❒ **Espérance et moments de la distribution** – Voici les expressions de l'espérance $E[X]$, l'espérance généralisée $E[g(X)]$, $k^{ième}$ moment $E[X^k]$ et fonction caractéristique $\psi(\omega)$ dans les cas discret et continu.

Case	$E[X]$	$E[g(X)]$	$E[X^k]$	$\psi(\omega)$
(D)	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} g(x_i) f(x_i)$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^k f(x_i)$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) e^{i\omega x_i}$
(C)	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$

Remarque : on a $e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x)$.

❒ **Transformation de variables aléatoires** – Soit X, Y des variables liées par une certaine fonction. En notant f_X et f_Y les fonctions de distribution de X et Y respectivement, on a :

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|}$$

❒ **Loi d'intégration de Leibniz** – Soit g une fonction de x et potentiellement c, et a, b, les limites de l'intervalle qui peuvent dépendre de c. On a :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial c}\left(\int_a^b g(x) dx\right) = \frac{\partial b}{\partial c} \cdot g(b) - \frac{\partial a}{\partial c} \cdot g(a) + \int_a^b \frac{\partial g}{\partial c}(x) dx}$$

❒ **Inégalité de Tchebychev** – Soit X une variable aléatoire de moyenne μ. Pour $k,\sigma > 0$, on a l'inégalité suivante :

$$\boxed{P(|X - \mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}}$$

5.1.4 Variables aléatoires conjointement distribuées

❒ **Densité conditionnelle** – La densité conditionnelle de X par rapport à Y, souvent notée $f_{X|Y}$, est définie de la manière suivante :

$$\boxed{f_{X|Y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

❒ **Indépendance** – Deux variables aléatoires X et Y sont dits indépendantes si l'on a :

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)}$$

❒ **Densité marginale et fonction de répartition** – À partir de la densité de probabilité f_{XY}, on a :