❒ **Inverse** – L'inverse d'une matrice carrée inversible A est notée A^{-1} et est l'unique matrice telle que :

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Remarque : toutes les matricées carrés ne sont pas inversibles. Aussi, pour des matrices A,B, on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

❒ **Trace** – La trace d'une matrice carrée A, notée $\textrm{tr}(A)$, est la somme de ses entrées diagonales :

$$\boxed{\textrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}}$$

Remarque : pour toutes matrices A, B, on a $tr(A^T) = tr(A)$ et $tr(AB) = tr(BA)$.

❒ **Déterminant** – Le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ notée $|A|$ ou $\textrm{det}(A)$ est exprimée récursivement en termes de $A_{\backslash i,\backslash j}$, qui est la matrice A sans sa $i^{\textrm{ème}}$ ligne et $j^{\textrm{ième}}$ colonne, de la manière suivante :

$$\boxed{\textrm{det}(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} |A_{\backslash i,\backslash j}|}$$

Remarque : A est inversible si et seulement si $|A| \neq 0$. Aussi, $|AB| = |A||B|$ et $|A^T| = |A|$.

5.2.3 Propriétés matricielles

❒ **Décomposition symmétrique** – Une matrice donnée A peut être exprimée en termes de ses parties symmétrique et antisymmétrique de la manière suivante :

$$\boxed{A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\textrm{Symmétrique}} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\textrm{Antisymmétrique}}}$$

❒ **Norme** – Une norme est une fonction $N : V \longrightarrow [0, +\infty[$ où V est un espace vectoriel, et tel que pour tous x,$y \in V$, on a :

— $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$

— $N(ax) = |a|N(x)$ pour a scalaire

— si $N(x) = 0$, alors $x = 0$

Pour $x \in V$, les normes les plus utilisées sont récapitulées dans le tableau ci-dessous :