

复变函数与积分变换讲义

王明治

厦门理工学院 · 数学与统计学院

序言

这是一本为工科 48 学时 « 复变函数与积分变换课程 » 准备的讲义. 作者多次讲授该课程, 却很难找到适合自己风格的教材. 微积分之后的公共数学课教材, 往往缺乏对定理适用条件以及严格性的关注, 缺少对概念和理论之间联结的引导过渡. 在有限的课时约束下, 要想做到既不寡淡无味, 又不又干又柴, 无疑是个挑战. 本讲义在兼顾简洁和严谨的想法下编写, 为使读者容易上手, 温感良好, 提供了丰富的例题, 对概念和动机有适当的介绍; 限于篇幅和课程的性质, 对一些不宜展开的严格证明, 也尽量交代所需的背景知识, 给出参考文献, 以供偏好严格性的学生参考.

在教材编排上, 采取了先引入洛朗级数, 解析函数的概念, 把部分证明过程放到后面的围道积分里再补充的做法, 一来是希望尽快介绍留数的概念, 二来兼顾学生的接受程度使学习曲线不过于陡峭. 作者曾经从留数及其应用开始安排课程, 学生反馈压力较大, 因此多次调整授课次序, 前后编排可能有些来不及完全纠正之处, 敬请读者谅解.

为提升阅读体验, 部分定理的严格证明放在讲义每章的附录中. 讲义整体附录章节中是一个速成短课, 为那些需要立即用到拉普拉斯变换的专业准备.

在技术细节上, 本讲义也做了一些改变. 比如在讲述初等函数时, 利用唯一性定理阐明复初等函数作为相应实函数的解析延拓, 冠名实至名归. 在柯西-黎曼方程的引入上, 直接利用复合函数求导处理, 学生接受起来毫无障碍, 这一观点也非常适合推导其他坐标系下柯西-黎曼方程的形式. 在留数定理部分, 把传统的无穷远点奇点的转化作用直截了当总结为外部形式的留数定理. 在讲述围道积分时, 阐明其与定积分在来源上的区别: 促使数学家考虑复积分的不是几何或物理意义, 而是数学本身的意义 —— 作为求导的逆运算, 构造寻找原函数的方法. 在傅里叶变换解方程的章节, 作者指出相应的代数方程不可避免要考虑广义函数解, 从而给出漏掉的通解这一现象, 澄清了傅里叶变换只能求特解的误解. 但当涉及的函数是指数级增长时, 相应的广义函数处理起来比较复杂, 从而为拉普拉斯变换的引入埋下伏笔. 讲义也澄清了一些广泛出现的想当然的错误观念.

由于水平和精力所限, 错误在所难免. 建议读者把这些错漏看作打怪路上的礼物, 现在就出发, 一起“行到水穷处, 坐看云起时”.

目录

序言	I
记号	b
第一章 复变函数	1
1.1 复数性质	1
1.1.1 复数定义	1
1.1.2 三角函数	3
1.1.3 开方公式	6
1.2 复变极限	8
1.2.1 函数极限	8
1.2.2 连续函数	13
1.2.3 无穷级数	15
1.3 洛朗级数	18
1.3.1 复幂级数	18
1.3.2 收敛半径	22
1.3.3 洛朗级数	25
1.4 初等函数	27
1.4.1 指数函数	27
1.4.2 复幂函数	31
1.4.3 正切函数	32
1.A 附录	34
1.A.1 不可比性	34
1.A.2 证明定理	35
1.A.3 收敛半径	36

目录	III
第二章 解析函数	38
2.1 复解析性	38
2.1.1 定义导数	38
2.1.2 解析函数	40
2.1.3 C-R 方程	43
2.2 解析圆环	51
2.2.1 泰勒展开	51
2.2.2 洛朗展开	54
2.2.3 m 级零点	56
2.2.4 m 级极点	58
2.3 孤立奇点	60
2.3.1 可去奇点	60
2.3.2 本性奇点	62
2.3.3 无穷远点	64
2.4 留数演算	65
2.4.1 留数定义	65
2.4.2 计算规则	67
2.4.3 其他性质	70
2.A 附录	72
2.A.1 逐项求导	72
2.A.2 充要条件	73
2.A.3 偏导算子	74
2.A.4 本性奇点	76
第三章 围道积分	78
3.1 曲线积分	78
3.1.1 定义积分	78
3.1.2 变限积分	80
3.1.3 计算积分	82
3.2 道路变形	85
3.2.1 积分定理	85
3.2.2 积分公式	87
3.2.3 洛朗展开	88
3.3 留数定理	89
3.3.1 内部形式	89

3.3.2 外部形式	90
3.4 算定积分	92
3.4.1 三角积分	92
3.4.2 有理积分	94
3.4.3 三角因子	95
3.4.4 其他类型	97
3.A 附录	102
3.A.1 逐项积分	102
3.A.2 导数公式	103
第四章 积分变换	104
4.1 傅氏变换	104
4.1.1 傅氏积分	104
4.1.2 傅氏变换	106
4.1.3 广义函数	111
4.2 变换性质	115
4.2.1 基本性质	115
4.2.2 卷积定理	117
4.2.3 积分性质	120
4.2.4 能量积分	122
4.2.5 微分方程	123
4.3 拉氏变换	126
4.3.1 定义计算	126
4.3.2 拉氏卷积	128
4.3.3 变换性质	129
4.4 求逆变换	134
4.4.1 留数公式	134
4.4.2 留数失效	136
4.4.3 微分方程	137
4.A 附录	140
4.A.1 若干引理	140
4.A.2 刻画导数	142
4.A.3 广义函数	144
4.A.4 弱★极限	145
4.A.5 变换性质	147

4.A.6 广函方程	150
附录 A 成果速览	154
A.1 留数演算	154
A.1.1 简单函数	154
A.1.2 计算留数	155
A.2 拉氏变换	156
A.2.1 拉氏变换	156
A.2.2 微分方程	157
A.3 算定积分	158
A.3.1 三角积分	158
A.3.2 有理积分	159
A.3.3 三角因子	160
参考文献	162
索引	164

记号

- (1) 符号“ $:=$ ”表示“定义”或“记作”，用该符号右边的项定义左边的记号.
- (2) 小写字母 z, λ (或 a, x) 等，通常表示一个复数 (或实数).
- (3) $[a]$ 表示实数 a 的整数部分，即小于或等于 a 的最大整数.
- (4) $\operatorname{Re}(z)$ 表示 z 的实部, $\operatorname{Im}(z)$ 表示 z 的虚部.
- (5) 大写字母 A, B 等，通常表示复数集的一个子集.
- (6) $\operatorname{Res}_{z_0}(f)$ 或 $\underset{z_0}{\operatorname{Res}}(f)$ 或 $\operatorname{Res}(f, z_0)$: 复变函数 f 在 z_0 处的留数.
- (7) $f^{(n)}(z)$: 复变函数 f 在 z 处的 n 阶导数.
- (8) $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[f]$: 函数 f 的傅里叶变换与逆变换.
- (9) $\mathcal{L}[f], \mathcal{L}^{-1}[f]$: 函数 f 的拉普拉斯变换与逆变换.
- (10) $A \setminus B := \{a \mid a \in A \text{ 且 } a \notin B\}.$
- (11) \mathbb{R} : 实数集; \mathbb{C} : 复数集; \mathbb{Z} : 整数集; \mathbb{Q} : 有理数集; \mathbb{N} : 自然数集 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}.$
- (12) \mathbb{N}^* : 正整数集 $\{1, 2, 3, \dots\}$. \mathbb{R}^* : 非零实数集 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. \mathbb{C}^* : 非零复数集 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$
- (13) $A^c := \mathbb{C} \setminus A$ 是 A 的余集.
- (14) $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. 当 $A = \{\lambda\}$ 时，也将 $A + B$ 记作 $\lambda + B$. 类似定义 $A - B$.
- (15) $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. 当 $A = \{\lambda\}$ 时，也将 AB 记作 λB .
- (16) $\bar{A} := \{\bar{a} \mid a \in A\}$, $|A| := \{|a| \mid a \in A\}$, $A^n := \{a^n \mid a \in A\}$, $A^\lambda := \bigcup_{a \in A} a^\lambda$, 其中 λ 是复数.
- (17) $f \in C(D)$: f 是非空开集 D 上的连续函数.
- (18) $\ell(C)$: 可求长曲线 C 的弧长.
- (19) $\bar{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists z_n \in D \text{ s.t. } z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n\}$, 称为 D 的闭包，它是包含 D 的最小闭集. **不要与 D 的共轭混淆**，可依据上下文判断其含义.
- (20) $\int_C f(z) dz$: 复变函数 f 沿有向曲线 C 的复积分.

- (21) $\oint_C f(z) dz$: 复变函数 f 沿简单闭曲线 C 逆时针积分一圈.
- (22) $\oint_C f(z) dz$: 复变函数 f 沿简单闭曲线 C 顺时针积分一圈.
- (23) $f \in C^\infty$: f 是光滑函数, 即对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ 处处存在.
- (24) $f \in \mathcal{D}$: f 是实变量光滑函数, 且在某个有界区间外恒为零.
- (25) $f \in \mathcal{S}$: f 是实变量速降函数, 即 f 光滑且 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(t)$ 是 $t \rightarrow \infty$ 时的无限阶无穷小.
- (26) $f \in R_{loc}$: f 是局部可积函数, 即 f 在每个有界区间上反常可积.
- (27) $f \in L_{loc}$: f 是局部绝对可积函数, 即 f 在每个有界区间上的反常积分绝对收敛.
- (28) $f * g$: 函数 f 和 g 的卷积; $f *_{\mathcal{L}} g$: 函数 f 和 g 的拉普拉斯卷积.

第一章 复变函数

1.1 复数性质

1.1.1 复数定义

定义 1.1.1 (imaginary unit, complex number, real part, imaginary part) 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 虚数单位 i 满足 $i^2 = -1$. 称 $z = x + iy$ 为复数, x 和 y 分别是 z 的实部和虚部, 记作 $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$. 将复数的全体记作 \mathbb{C} .

- i 的引入解开了方程 $x^2 + 1 = 0$; 复数够用吗?

定理 1.1.2 (代数基本定理) 复数域 \mathbb{C} 上所有非常数多项式都在 \mathbb{C} 中有根, 即: 对任何复系数多项式 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_0$, 都存在复数 z 使得 $f(z) = 0$.

证 我们将在第三章利用柯西积分公式证明它 (推论 3.2.17). □

例 1.1.3 (因式分解) 完全分解 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 等价于求根.

- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$ 韦达定理

测试 1.1.4 根据根和系数的关系, 符合三次方程 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 的韦达定理的有

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| A. $a = -(x_1 + x_2 + x_3)$ | B. $b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ |
| C. $c = x_1x_2x_3$ | D. $c = -x_1x_2x_3$ |

推论 1.1.5 (1) 非常数复多项式都能唯一分解到一次项.

(2) 非常数实多项式都能唯一分解到至多实二次项.

(3) 奇数次实系数多项式一定有实根.

证 (1) $n = 1$ 时结论显然成立. 假设 $n > 1$ 且结论对 $n - 1$ 成立. 任取 f 的一个根 $x_n \in \mathbb{C}$, 则 $f(x_n) = 0$, 故

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(x_n) = \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n x_n^k = \sum_{k=0}^n a_k (x^k - x_n^k) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (x - x_n)(x^{k-1} + x^{k-2}x_n + \cdots + x_n^{k-1}) = (x - x_n)g(x), \end{aligned}$$

其中 $g(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x^{k-1} + x^{k-2}x_n + \cdots + x_n^{k-1})$ 是 $n-1$ 次多项式, 由归纳假设, $g(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$, 故

$$f(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

分解为一次项的乘积. 唯一性 (在一次因子首项系数等于 1, 即形如 $x - x_0$, 且不计因子的顺序意义下唯一) 的证明留给读者练习.

(2) 设 f 是实多项式且 $f(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_k)^{m_k}$, 其中 x_1, \dots, x_k 是 f 的全部互异复根. 取共轭得

$$f(x) = \overline{f(\bar{x})} = a_n(x - \bar{x}_1)^{m_1} \cdots (x - \bar{x}_k)^{m_k}$$

这说明 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ 也是 f 的全部互异复根, 由唯一性知 f 的非实根是共轭成对出现的. 重新编号排序可设

$$f(x) = a_n \prod_{s=1}^j (x - x_s)^{m_s} (x - \bar{x}_s)^{m_s} \cdot \prod_{t=j+1}^l (x - x_t)^{m_t}.$$

其中 x_{j+1}, \dots, x_l 是实数. 对每个 $s \leq j$,

$$(x - x_s)(x - \bar{x}_s) = x^2 - (x_s + \bar{x}_s)x + |x_s|^2$$

是实系数二次多项式, 而每个 $x - x_t$ ($t \geq j+1$) 是实系数一次多项式.

(3) 如果奇数次多项式 f 没有实根, 那么 f 在实数域中分解为二次多项式的乘积, 从而 f 是偶数次的, 矛盾. \square

例 1.1.6 $z^4 + 1 = (z^2 + 1)^2 - 2z^2 = (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)$
 $= \left[z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right] \left[z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right] \left[z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right] \left[z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right].$

R 中

C 中

注意在有理数域 \mathbb{Q} 或整数环 \mathbb{Z} 中它是不可分解 (不可约) 的.

命题 1.1.7 (有理根定理) 设有理数 r 是整系数多项式 $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ 的根, 则 $r \in \left\{ \pm \frac{p}{q} \mid p|a_0, q|a_n \right\}$. 即 r 必定是常数项 a_0 的因子与最高次项系数 a_n 的因子之商.

证 假设 $r = p/q$, 其中 p 和 q 互素, 则

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \Rightarrow q \mid a_n \text{ 且 } p \mid a_0.$$

\square

例 1.1.8 求 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ 的因式分解.

解 若 f 有有理根 r , 则 $r \in \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$. 经验证 $r = \frac{1}{2}$ 是根. 故 f 可分解为 $f(x) = (x - \frac{1}{2})g(x)$, 算得 $g(x) = 2(x^2 + x - 1)$, 故

$$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

\square

定义 1.1.9 (模 modulus) 设 $x, y \in \mathbb{R}$. 称 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为复数 $z = x + iy$ 的模.

例 1.1.10 ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$) 设 $z_0 = x_0 + iy_0$, 则 $|z - z_0| < \delta \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

- 复数的任何大小关系都无法合理参与运算*, 简称复数不能比较大小.

定义 1.1.11 (共轭 complex conjugate) 设 $x, y \in \mathbb{R}$. 称复数 $\bar{z} = x - iy$ 为复数 $z = x + iy$ 的共轭.

命题 1.1.12 (共轭、模与四则运算的关系) (1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

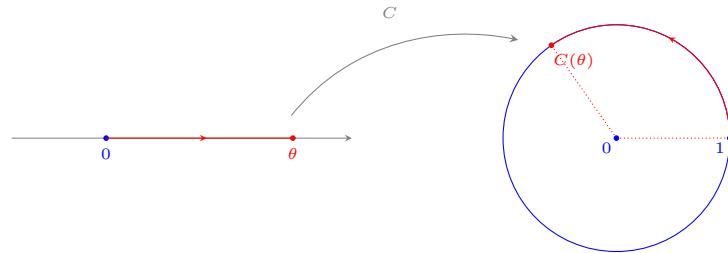
$$(2) z = \bar{\bar{z}}, \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, |z|^2 = z\bar{z}.$$

$$(3) |z| = |\bar{z}|, |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

$$(4) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

1.1.2 三角函数

- 称点集 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 为单位圆周.
- 设 $\theta \in \mathbb{R}$, 在单位圆周上以 1 为起点, 逆时针经过弧长 θ 达到的点记作 $C(\theta)$. 圆函数 $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto C(\theta)$ 是以 S^1 为值域的实变复值函数.



定义 1.1.13 将 $C(\theta)$ 的实部和虚部分别称为余弦函数和正弦函数, 记作 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$.

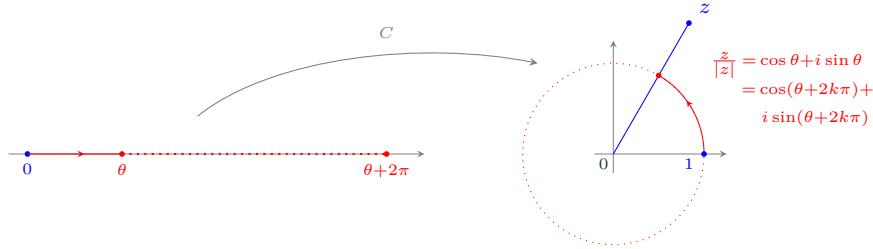
- 引入复指数函数 e^z 后, 我们有 $C(\theta) = e^{i\theta}$.
- 恒等式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 称为 Euler 公式.

定义 1.1.14 (辐角, 辐角主值 argument, principal value) 非零复数 z 的辐角

$$\operatorname{Arg} z := C^{-1} \left(\frac{z}{|z|} \right) = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \mid \frac{z}{|z|} = e^{i\theta} \right\}.$$

- z 的辐角是正实轴逆时针旋转到射线 Oz 所经过的角度:

*精确含义见本章附录.



- $C|_{(-\pi, \pi]} : (-\pi, \pi] \rightarrow S^1$ 是双射, 称 $\arg z = C|_{(-\pi, \pi]}^{-1} \left(\frac{z}{|z|} \right) = \operatorname{Arg} z \cap (-\pi, \pi]$ 为 z 的辐角主值.

例 1.1.15 (1) $\operatorname{Arg}(1-i) = \{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 运算中常简写为 $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

(2) $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} \in \operatorname{Arg} z$.

练习 1.1.16 求 $\operatorname{Arg}(-3-4i)$ 和 $\arg(-3-4i)$.

- 记 $|z| = r, \theta \in \operatorname{Arg} z$, 则 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 称为 z 的三角表示式 (trigonometric form).
- 指数表示式 (exponential form) $z = re^{i\theta}$, 其中 $r \geq 0$ 是 z 的模, $\theta \in \mathbb{R}$ 是 z 的辐角之一 (以下略称辐角). 即 z 是位于半径 r 的圆周上, 辐角为 θ 的点.

例 1.1.17 单位圆周 $|z|=1$ 上的点形如 $e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$ 是辐角:

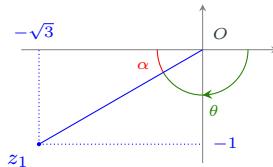
(1) $e^{\pi i} = -1$ (2) $e^{2\pi i} = 1$ (3) i 的指数表示?

测试 1.1.18 以下属于指数表达式的是

- A. $-2e^i$ B. e^2 C. e^{2-i} D. e^2e^{-i}

例 1.1.19 将 $z_1 = -\sqrt{3} - i$ 和 $z_2 = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ 化为指数形式.

解 1) $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$. z_1 位于第三象限, 记 Oz_1 和实轴的夹角为 α .



则 $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 $\alpha = \frac{\pi}{6}$. 因此 $\arg z_1 = -\frac{5\pi}{6}$, 从而 $z_1 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

2) $z_2 = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}) = e^{i\frac{3\pi}{10}}$. □

- 对两个复数集 $A, B \subset \mathbb{C}$, 约定

$$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}, \quad AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}, \quad \overline{A} = \{\bar{a} \mid a \in A\}.$$

- 当 $0 \notin B$ 时, 约定 $A/B = \{a/b \mid a \in A, b \in B\}$.

- 对于独点集不区分“数”和“集”的记号. 例如

$$\lambda A = \{\lambda\}A, \lambda + A = \{\lambda\} + A, -B = \{-b \mid b \in B\}, A - B = A + (-B).$$

练习 1.1.20 (1) 证明 $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ 及加法和乘法各自的交换律和结合律.

- (2) 证明 $(A + B) \cup (A + C) = A + (B \cup C)$, $A(B \cup C) = AB \cup AC$.
- (3) 举例说明 $A + B = C \Rightarrow A = C - B$.

$r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ 的启示

- $z_1 z_2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$, $\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.
- 幂运算的指数表达式 $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$.

例 1.1.21 分别将 $z_1 = -\sqrt{3} - i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ 和 $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$ 化为指数形式.

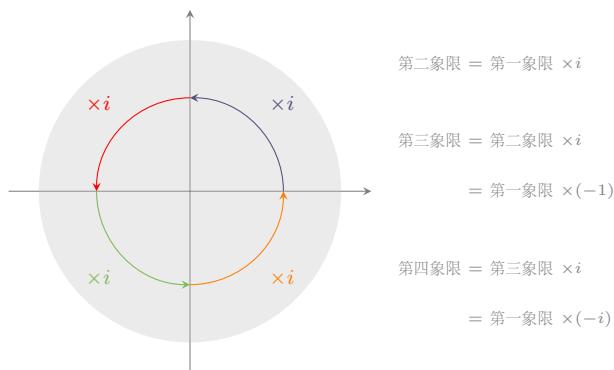
解 (1) $z_1 = -1 \cdot (\sqrt{3} + i)$. $\pi \in \operatorname{Arg}(-1)$, $\frac{1}{6}\pi \in \operatorname{Arg}(\sqrt{3} + i)$, 故 $\frac{7}{6}\pi$ 是 z_1 的一个辐角, 且 $|z_1| = 2$, 所以 z_1 的指数形式为 $z_1 = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$.

(2) $z_2 = i(\sqrt{3} + i)$. $\frac{\pi}{2} \in \operatorname{Arg} i$, 故 $\frac{2}{3}\pi$ 是 z_2 的一个辐角, 且 $|z_2| = 2$, 所以 z_2 的指数形式为 $z_2 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

(3) $z_3 = -i(\sqrt{3} + i)$. $-\frac{\pi}{2} \in \operatorname{Arg}(-i)$, 故 $-\frac{\pi}{3}$ 是 z_3 的一个辐角, 且 $|z_3| = 2$, 所以 z_3 的指数形式为 $z_3 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$. \square

练习 1.1.22 设非零复数 z 满足 $\operatorname{Arg}(-z) = -\operatorname{Arg} z$, 则 z 可能取哪些值?

定理 1.1.23 (复数乘法的几何意义) z 乘以 $re^{i\theta}$ ($r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$), 等于将 z 逆时针旋转 θ 角, 再同向伸缩 r 倍.



- 例 1.1.21 中正是利用了象限旋转关系, 将夹角都转化为锐角情形.

练习 1.1.24 设 $z \neq 0$, 关系 $\operatorname{Arg} \bar{z} = \operatorname{Arg} \frac{1}{z} = -\operatorname{Arg} z$ 是否成立?

例 1.1.25 设 $z \neq 0, n \in \mathbb{N}^* + 1$, 则 $\operatorname{Arg} z^n = \operatorname{Arg} z + \cdots + \operatorname{Arg} z \neq n \operatorname{Arg} z$.

证 由 $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ 得

$$\operatorname{Arg} z^n = \operatorname{Arg}(z \cdots z) = \operatorname{Arg} z + \cdots + \operatorname{Arg} z = n \operatorname{arg} z + 2\pi\mathbb{Z}.$$

而 $n \operatorname{Arg} z = n \operatorname{arg} z + 2n\pi\mathbb{Z}$, 故 $n > 1$ 时 $\operatorname{Arg} z^n \neq n \operatorname{Arg} z$. \square

- $nA = \{na \mid a \in A\}$ 和 $A + \cdots + A = \{a_1 + \cdots + a_n \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$ 可看做记号 nA 的两种解释, 它们是不同的; 为与一般情形(非整数的 n)一致, 我们选择前者作为 nA 的定义.
- 类似地规定 $A^n = \{a^n \mid a \in A\}$, 它与 $A \cdots A = \{a_1 \cdots a_n \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$ 也是不同的.

例 1.1.26* 设 $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. 证明 $\sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}$, $\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$.

证 因为

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i(n+2)\theta/2}(e^{-in\theta/2} - e^{in\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

分别取实部和虚部得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos k\theta &= \frac{\cos \frac{(n+1)\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta - \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \\ \sum_{k=1}^n \sin k\theta &= \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}. \end{aligned} \quad \square$$

例 1.1.27* 将 $\frac{\sin nx}{\sin x}$ 展开为三角多项式.

解 $\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{(e^{ix})^n - (e^{-ix})^n}{e^{ix} - e^{-ix}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(n-1-k)x} e^{-ikx} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(n-1-2k)x} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(n-1-2k)x$. \square

1.1.3 开方公式

定义 1.1.28 (z 的 n 次根 n th roots of z) 方程 $\omega^n = z$ 的解 ω 称为 z 的 n 次根, 记为 $\omega = \sqrt[n]{z}$.

将 ω 写为指数形式 $\omega = |\omega|e^{it}$, 则 $\omega^n = |\omega|^n e^{int}$ 是指数表达式. 故 $\omega^n = z \Leftrightarrow |\omega|^n = |z|, nt \in \operatorname{Arg} z \Leftrightarrow |\omega| = \sqrt[n]{|z|}, t \in \frac{\operatorname{Arg} z}{n}$.

定理 1.1.29 设 $z \neq 0$ 的指数表达式为 $re^{i\theta}$, 则 $\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k = 0, \dots, n-1 \right\}$. 公式中 $\sqrt[n]{r}$ 表示 r 的 n 次非负实根, 即使 $z = r$ 时也不要与左侧的复根记号 $\sqrt[n]{r}$ 混淆.

例 1.1.30 求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解 $\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi i}{16}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{4}} = \{\pm \sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi}{16}i}, \pm i\sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi}{16}i}\}$. \square

例 1.1.31 因式分解 $z^4 + 1$.

解 因为 $\sqrt[4]{-1} = \{e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{4}} \mid k = 0, 1, 2, 3\} = \{\pm e^{\frac{\pi i}{4}}, \pm ie^{\frac{\pi i}{4}}\}$, 所以 $z^4 + 1$ 有分解

$$z^4 + 1 = (z - ie^{\frac{\pi i}{4}})(z + ie^{\frac{\pi i}{4}})(z - e^{\frac{\pi i}{4}})(z + e^{\frac{\pi i}{4}}).$$

□

测试 1.1.32 求 $\sqrt[4]{1}$ 和 $\sqrt[5]{i}$.

解 $\sqrt[4]{1} = \{e^{\frac{2k\pi i}{4}} \mid k = 0, 1, 2, 3\} = \{\pm 1, \pm i\}$.

$$\sqrt[5]{i} = \{e^{\frac{\pi i}{10}}, i, ie^{\frac{2\pi i}{5}}, ie^{\frac{4\pi i}{5}}, -ie^{\frac{\pi i}{5}}\}.$$

□

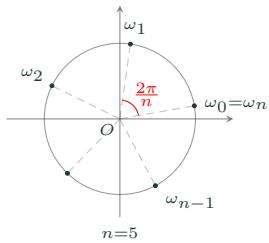
命题 1.1.33 当 $z \neq 0$ 且 $n > 1$ 时, $\sqrt[n]{z}$ 恰好是以原点为圆心, 以 $\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆周上的 n 个点, 且它们将此圆周等分.

证 记 $r = |z|$, $\theta \in \text{Arg } z$, 则 $\omega_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2k\pi i}{n}}$ 满足 $|\omega_k| = \sqrt[n]{r}$, 故它们均位于所述圆周上.

不难看出递推关系

$$\omega_k = \omega_{k-1} e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

这说明 ω_k 恰好是 ω_{k-1} 逆时针旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 的结果, ω_0 旋转 $n-1$ 次依次得到 $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$, 注意到 $\omega_n = \omega_0$, 第 n 次旋转回到它自己, 因此它们将圆周 n 等分. □



练习 1.1.34 设 $z \neq 0$, $n > 1$, $\sqrt[n]{z} = \{\omega_0, \dots, \omega_{n-1}\}$, 证明 $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$.

- 设 f 是一个数集值映射, 即 $f(z) \subset \mathbb{C}$ 是数集, 规定 $f(A) = \bigcup_{z \in A} f(z)$.

例 1.1.35* (1) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 则 $\sqrt[n]{A} = \bigcup_{a \in A} \sqrt[n]{a} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n \in A\}$.

$$f(z) = \sqrt[n]{z}$$

(2) 设 $z \neq 0$, 则 $\text{Arg } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Arg } z$.

命题 1.1.36* 设 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 则(1) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ (2) $\sqrt[n]{a} \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{ab}$.

证 不妨设 $ab \neq 0$. (1) $z \in \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \Leftrightarrow z^m \in \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow (z^m)^n = a \Leftrightarrow z \in \sqrt[mn]{a}$.

(2) 若 $z \in \sqrt[n]{a} \sqrt[m]{b}$, 则 $\exists z_1 \in \sqrt[n]{a}, z_2 \in \sqrt[m]{b}$ 使得 $z = z_1 z_2$, 故 $z^n = ab$, 即 $z \in \sqrt[mn]{ab}$. 反之若 $z \in \sqrt[mn]{ab}$, 取定一个 $z_1 \in \sqrt[n]{a}$, 则 $(z/z_1)^n = \frac{ab}{a} = b$, 故 $z_2 := \frac{z}{z_1} \in \sqrt[m]{b}$ 且 $z = z_1 z_2 \in \sqrt[n]{a} \sqrt[m]{b}$. □

- 注意根式应理解为多值根, 例如 $\sqrt[4]{1} = \{\pm 1\}$ 而不是 1:

$$\{\pm 1\} = \{\pm i\} \{\pm i\} = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2}.$$

上式也告诉我们 $\sqrt[m]{a} \sqrt[n]{a} \neq a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$.

- 事实上, $(a^{\frac{1}{m}})^n \neq (a^n)^{\frac{1}{m}}$, 所以 $a^{\frac{n}{m}}$ 需给出一个明确的定义, 后面我们会在幂函数的定义中得到 $a^{\frac{n}{m}} := (a^{\frac{1}{m}})^n$.

1.2 复变极限

1.2.1 函数极限

定义 1.2.1 设 $A \subset \mathbb{C}$. 我们称映射 $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ 为 A 上的一个复变函数, 即, 一个自变量和函数值都在 \mathbb{C} 中取值的映射.

例 1.2.2 (1) $z^2, \bar{z}, |z|$ 是 \mathbb{C} 上的函数; $\arg z, \frac{1}{z}$ 是 \mathbb{C}^* 上的函数;
(2) \sqrt{z} 不是函数, 称其为多值函数.

例 1.2.3 (几何上通常把复变函数看做平面点集之间的变换) 茹科夫斯基(Rokovsky)函数 $z + \frac{1}{z}$ 将圆周 $|z| = r$ 映为什么?

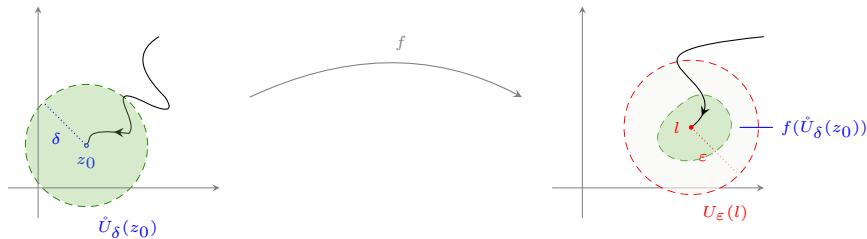
解 圆周 $|z| = r$ 有参数方程 $z = re^{i\theta}$, 像

$$u + iv = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

故 $\begin{cases} u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \\ v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$, 当 $r \neq 1$ 时, 这是长轴在实轴上, 以 $(\pm 2, 0)$ 为焦点的椭圆; 当 $r = 1$ 时, 这是实轴上的线段 $[-2, 2]$. \square

- 将以 z_0 为圆心, 以 r 为半径的开圆盘 $|z - z_0| < r$ 称为 z_0 的 r -邻域, 记作 $U_r(z_0)$. 将 $\dot{U}_r(z_0) := U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ 称为 z_0 的去心 r -邻域.

定义 1.2.4 (极限 limit) 设 f 在 $\dot{U}_r(z_0)$ 上有定义, $l \in \mathbb{C}$. 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - l| = 0$, 则称 l 为 f 当 z 趋于 z_0 时的极限, 记作 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$.



- 极限的符号描述: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时 $|f(z) - l| < \varepsilon$.
- 记 $u(z) = \operatorname{Re}[f(z)]$, $v(z) = \operatorname{Im}[f(z)]$, 则极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} [u(z) + iv(z)]$ 就是实向量函数极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (u(x,y), v(x,y))$.

例 1.2.5 (一元运算的连续性) $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_0)$, $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z_0)$, $\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} |z| = |z_0|$.

证 我们有以下三角不等式

$$0 \leq |\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)| = |\operatorname{Re}(z - z_0)| \leq |z - z_0|$$

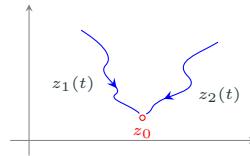
$$0 \leq |\bar{z} - \bar{z}_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$$

$$0 \leq ||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|$$

令 $z \rightarrow z_0$, 夹挤定理给出欲证的结论. \square

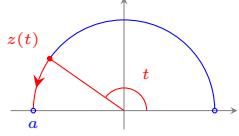
命题 1.2.6 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \Leftrightarrow$ 对任何满足(1) $t \neq t_0$ 时 $z(t) \neq z_0$ (2) $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0$ 的实变函数 $z = z(t)$ 都有 $\lim_{t \rightarrow t_0} f(z(t)) = l$.

- 简言之, 无论 z 以何种方式趋向于 z_0 , $f(z)$ 都要趋向于 l .



例 1.2.7 设 $a \in (-\infty, 0]$, 则 $\lim_{z \rightarrow a} \arg z$ 不存在.

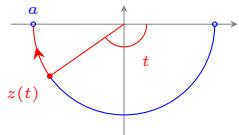
证 先设 $a \in (-\infty, 0)$. (1) 考察曲线 $z(t) = |a|e^{it}$, $0 < t < \pi$.



令 $t \rightarrow \pi^-$, 相应的 $z(t) \rightarrow a$ 且

$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} \arg z(t) = \lim_{t \rightarrow \pi^-} t = \pi.$$

(2) 考察曲线 $z(t) = |a|e^{-it}$, $0 < t < \pi$.



令 $t \rightarrow \pi^-$, 相应的 $z(t) \rightarrow a$ 且

$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} \arg z(t) = \lim_{t \rightarrow \pi^-} -t = -\pi.$$

故 $\lim_{z \rightarrow a} \arg z$ 不存在. 又 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \arg(te^{i\theta}) \stackrel{|\theta| < \pi}{=} \theta$, 故 $\lim_{z \rightarrow 0} \arg z$ 也不存在. \square

测试 1.2.8 极限 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - \bar{z}^2}{|z|^2}$ 是否存在, 若存在则求出其极限.

解 $\lim_{z=re^{i\theta} \rightarrow 0} \frac{z^2 - \bar{z}^2}{|z|^2} = \lim_{r \rightarrow 0} (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) = 2i \lim_{r \rightarrow 0} \sin 2\theta = 2i \sin 2\theta$ 依赖于方向 θ , 故极限不存在. \square

例 1.2.9 设 $f(z) = \begin{cases} 0, & y \neq x^2 \\ 1, & y = x^2 \end{cases}$. 当 z 沿任何经过原点的直线 L 趋于零时, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$, 但 $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ 不存在. 因此命题 1.2.6 中的任意曲线不能用任意直线代替.

定理 1.2.9 (极限存在 \Leftrightarrow 实部和虚部极限均存在) 设 $f(z) = u(z) + iv(z)$, $l = u_0 + iv_0$ 是相应的实部、虚部表示式, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = u_0, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = v_0. \end{cases}$$

- 定理还告诉我们 $\lim_{z \rightarrow z_0} [u(z) + iv(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} u(z) + i \lim_{z \rightarrow z_0} v(z)$.

证 显然有 $0 \leq \max\{|u(z) - u_0|, |v(z) - v_0|\} \leq |f(z) - l| \leq |u(z) - u_0| + |v(z) - v_0|$.

若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$, 即 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - l| = 0$, 对上述不等式的前三项应用夹挤定理, 可得 $\lim_{z \rightarrow z_0} |u - u_0| = \lim_{z \rightarrow z_0} |v - v_0| = 0$, 即 $\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = u_0$ 且 $\lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = v_0$.

反之, 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = u_0$ 且 $\lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = v_0$, 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} [|u(z) - u_0| + |v(z) - v_0|] = 0$, 对上述不等式第一、三和四项应用夹挤定理, 可得 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - l| = 0$, 即 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$.

当然这一结果也可从向量极限的理论得到. \square

测试 1.2.10 设 a 是常数, 则 $f(z) = ax + iy$ 的实部 $u = \underline{\quad}$, 虚部 $v = \underline{\quad}$.

推论 1.2.11 (设 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 和 $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ 都存在) (1) $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$.

$$(2) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z).$$

$$(3) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0 \text{ 时 } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}.$$

证 可利用定理 1.2.9 转化为实变量实值函数的情形, 留给读者自己尝试. 这里给出如下直接论证. 记 $l_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, $l_2 = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$.

(1) 在三角不等式 $0 \leq |[f(z) \pm g(z)] - (l_1 \pm l_2)| \leq |f(z) - l_1| + |g(z) - l_2|$ 中令 $z \rightarrow z_0$ 并应用夹挤定理, 可知 $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = l_1 \pm l_2$.

(2) $0 \leq |f(z)g(z) - l_1l_2| = |[f(z) - l_1]g(z) + l_1[g(z) - l_2]| \leq |f(z) - l_1||g(z)| + |l_1||g(z) - l_2| \leq |f(z) - l_1|(|g(z) - l_2| + |l_2|) + |l_1||g(z) - l_2|$. 令 $z \rightarrow z_0$, 可知最右侧项极限为零, 由夹挤定理得 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)g(z) - l_1l_2| = 0$, 即 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = l_1l_2$.

(3) 由(2)知 $\lim_{z \rightarrow z_0} [l_2f(z) - l_1g(z)] = 0$, 故 $\lim_{z \rightarrow z_0} |l_2f(z) - l_1g(z)| = 0$, 由模的连续性 $\lim_{z \rightarrow z_0} |g(z)l_2| = |l_2|^2 > 0$. 由实值函数的极限四则运算可知

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|l_2f(z) - l_1g(z)|}{|g(z)l_2|} = \frac{0}{|l_2|^2} = 0.$$

现在所欲证结论可由等式 $\left| \frac{f(z)}{g(z)} - \frac{l_1}{l_2} \right| = \frac{|l_2f(z) - l_1g(z)|}{|g(z)l_2|}$ 给出. \square

- 转化为实的情形, 实际上是向量值函数的理论, 宏观上方便把一大票结论打包转换. 直接利用复数模的运算讨论, 和一元实变函数的论证平行, 微观上更简洁.

定义 1.2.12 (无穷小, 无穷大 infinitesimal, infinite) (1) 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$, 则称 f 是 $z \rightarrow z_0$ 时的**无穷小量**, 简称**无穷小**.

(2) 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, 则称 f 是 $z \rightarrow z_0$ 时的**无穷大量**, 简称**无穷大**.

- f 是 $z \rightarrow z_0$ 时的无穷小 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |z - z_0| < \delta, |f(z)| < \varepsilon$.
- f 是 $z \rightarrow z_0$ 时的无穷大 $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |z - z_0| < \delta, |f(z)| > M$.

例 1.2.13 f 是 $z \rightarrow z_0$ 时的无穷小 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$.

证 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - 0| = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$. □

- 遵循上例的启示, 当 f 是 $z \rightarrow z_0$ 时的无穷大时, 我们也记 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

定义 1.2.14 设 f 在某个 $|z| > R$ 上有定义, $l \in \mathbb{C}$. 若 $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z) - l| = 0$, 则称 l 为 f 当 z 趋于 ∞ 时的**极限**, 记作 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l$.

- $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall |z| > M, |f(z) - l| < \varepsilon$.
- 例 1.2.5、定理 1.2.9 和推论 1.2.11 对 $z \rightarrow \infty$ 的极限过程同样成立.
- 类似定义 $z \rightarrow \infty$ 时的无穷小和无穷大, 例 1.2.13 的结论亦成立.

练习 1.2.15 (1) 证明 $\lim_{z \rightarrow \infty} z = \infty$ (2) $\operatorname{Re}(z)$ 是不是 $z \rightarrow \infty$ 时的无穷大?

定义 1.2.16 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l \stackrel{\text{定义}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - l| = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \stackrel{\text{定义}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$.

可由转化为实的情形或直接用符号定义验证以下性质.

复数列极限的性质

- 极限存在 \Leftrightarrow 实部和虚部极限均存在 \Leftrightarrow 子列极限均相等.
- 当单项极限存在时 (分母极限非零), 与四则运算可交换.

数列/函数极限的性质

- 无穷小乘以有界量 (即模有界) 还是无穷小.
- 数列/函数极限的唯一性、局部有界性仍然成立:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \in \mathbb{C} &\Rightarrow \exists \delta > 0, M > 0, \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0), |f(z)| \leq M. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l \in \mathbb{C} &\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}^*, M > 0, \forall n \geq N, |z_n| \leq M.\end{aligned}$$

- 除非是实值复变函数, 保序性没有意义, 应替换为分离性:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \neq b &= \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \\ \Rightarrow \forall 0 < r < 1, \exists \delta > 0, \forall z &\in \dot{U}_\delta(z_0), |f(z) - g(z)| > r \cdot |a - b|.\end{aligned}$$

例 1.2.17 (所列数列是否收敛? 若收敛则求出极限) (1) $\frac{1}{n} + in \sin \frac{1}{n}$ (2) $(1 + \frac{1}{n})^n e^{i\frac{\pi}{n}}$ (3) $\frac{2n+ni}{1-2ni}$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$, 故原式极限为 i .

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n e^{i\frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i\frac{\pi}{n}} = e.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+ni}{1-2ni} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+i}{n}}{\frac{1}{n}-2i} = i - \frac{1}{2}.$$

□

命题 1.2.18 (数列极限存在的必要条件) (1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_{n+1}| = 0$.

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 存在且非零, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n / z_{n+1} = 1$.

证 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - z_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n - \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_{n+1}| = 0$.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{z_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n / \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = 1.$$

□

例 1.2.19 (等比数列) 设 z 是一个复数. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n$.

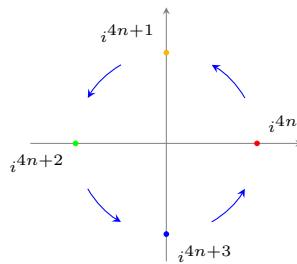
解 若 $|z| < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$.

若 $|z| > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n| = +\infty$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \infty$.

设 $|z| = 1$. 当 $z = 1$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 1$. 当 $z \neq 1$ 时, 则由 $|z^n| \equiv 1$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n - z^{n+1}| = |z - 1| \neq 0$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n$ 不是 ∞ 也不存在.

□

- 上例讨论的等比数列, 读者应与实数列情形印证. 例如 $\{i^n\}$ 类比于 $\{(-1)^n\}$, 可通过找出有不同极限的子列的方式论证发散. 事实上 $\{i^n\}$ 不停在单位圆周上以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度逆时针旋转:



测试 1.2.20 下述极限存在 (∞ 属于不存在) 的有

[]

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1+i}\right)^n$ C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n$

1.2.2 连续函数

定义 1.2.21 (连续 continuous) 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 就说 f 在 z_0 处连续.

- 连续函数就是与极限运算可交换的函数: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(\lim_{z \rightarrow z_0} z)$.

定理 1.2.22 (1) f 连续 $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(f)$ 和 $\operatorname{Im}(f)$ 连续.

(2) 连续函数的四则运算是连续函数. (分母不为零)

(3) 连续函数的复合是连续函数.

证 (1) $f(z)$ 在 z_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \operatorname{Re}[f(z_0)] + i \operatorname{Im}[f(z_0)] \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}[f(z)] = \operatorname{Re}[f(z_0)]$ 且 $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}[f(z)] = \operatorname{Im}[f(z_0)] \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f)$ 和 $\operatorname{Im}(f)$ 在 z_0 处连续.

(2) 以和为例. 设 f, g 在 z_0 处连续, 即 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0)$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = f(z_0) + g(z_0),$$

故 $f + g$ 在 z_0 处连续.

(3) 设 f 在 z_0 处连续, g 在 $f(z_0)$ 处连续, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z)) = g(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)) = g(f(z_0)),$$

即复合函数 $g \circ f$ 在 z_0 处连续. \square

例 1.2.23 (1) $f_1(z) = z, f_2(z) = \bar{z}, f_3(z) = |z|$ 都是连续函数 (2) 实多项式和复多项式都连续
(3) 有理函数在其定义域上连续.

证 (1) 它们的实部和虚部都是连续函数. (2)、(3) 可由 (1) 和连续函数的四则运算性质得到. \square

例 1.2.24 求极限 $\lim_{z \rightarrow 1+i} (x + 2iy)$.

解 因为 $x + 2iy$ 连续, 所以 $\lim_{z \rightarrow 1+i} (x + 2iy) = 1 + 2i$. \square

例 1.2.25 求极限 $\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2 - iz - 1 - i}{z^2 - 2i}$.

解 $1 + i$ 是分母的零点. 由于分母是多项式, 这意味着分母可分解出因子 $z - 1 - i$. 由 $z^2 - 2i = z^2 - (1 + i)^2$ 易得因式分解:

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2 - iz - 1 - i}{z^2 - 2i} = \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{(z+1)(z-1-i)}{(z+1+i)(z-1-i)} = \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z+1}{z+1+i} = \frac{3-i}{4}. \quad \square$$

测试 1.2.26 求极限 $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{|z|^2 - \bar{z} - iz + i}{z^2 - 3z + 2}$.

解 $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{|z|^2 - \bar{z} - iz + i}{z^2 - 3z + 2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(\bar{z}-i)(z-1)}{(z-2)(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\bar{z}-i}{z-2} = i - 1$. \square

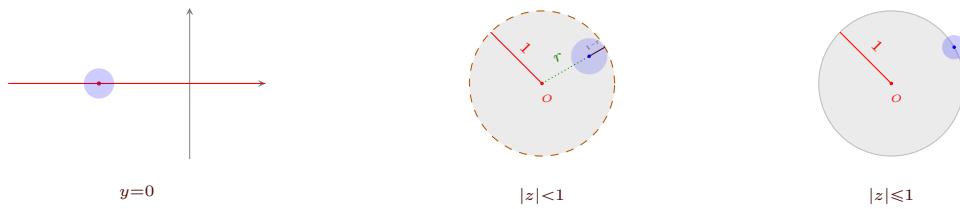
例 1.2.27 含原点的负实轴是辐角主值 $\arg z$ 的间断点集.

证 由例 1.2.7 知 $\arg z$ 在 $a \in (-\infty, 0]$ 处间断.

当 z 位于右半平面时 ($\operatorname{Re}(z) > 0$), $\arg z = \arctan \frac{y}{x}$ 连续. 当 z 位于上半平面时, $-iz$ 位于右半平面, 故 $\arg z = \frac{\pi}{2} + \arg(-iz)$ 连续. 当 z 位于下半平面时, iz 位于右半平面, 故 $\arg z = -\frac{\pi}{2} + \arg(iz)$ 连续. \square

定义 1.2.28 (开集 open set) 若 $\forall z \in D$, 存在 $r > 0$ 使得 $U_r(z) \subset D$, 则称 D 是 \mathbb{C} 中的开集.

例 1.2.29 实轴 $y = 0$ 不是开集. $\{z \mid |z| < 1\}$ 是开集, $\{z \mid |z| \leq 1\}$ 不是开集.



- 不是开集的原因是含有边界点. 故 \mathbb{C} 和 \emptyset 是开集.

命题 1.2.30 任意个开集的并是开集, 有限个开集的交是开集.

- 若有 $r > 0$ 使得 $U_r(z) \subset D$, 就说 z 是 D 的内点, 记作 $z \in D^\circ$.
- D 是开集 $\Leftrightarrow D = D^\circ$, 即 D 的每个点都是 D 的内点.

定义 1.2.31 若 f 在非空开集 D 内处处连续, 就说 f 在 D 上连续, 记作 $f \in C(D)$.

- 除定义域的内点外, 在更一般的点也能定义连续性: 设 f 的定义域为 A , $z_0 \in A$, f 在 z_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim_{A \ni z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ ($\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得只要 $|z - z_0| < \delta$ 且 $z \in A$, 就成立 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$).

例 1.2.32 $(\arg z)|_{(-\infty, 0)}$ 是连续函数, 因为它是常值函数.

例 1.2.33 若 $f \in C(B)$, $A \subset B$ 是 B 的子集, 则 $f|_A \in C(A)$.

- 开集的方便之处在于它保留了全部局部信息: 把函数向开子集上限制, 不会改变在开子集中那些点处的连续/间断性质.

定义 1.2.33 设 $A \subset \mathbb{C}$. 如果 A 对点列极限封闭, 即 $\{z_n\} \subset A$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in A$, 则称 A 是 \mathbb{C} 中的闭集.

例 1.2.34 (1) 实轴 $y = 0$ 是闭集. $\{z \mid |z| < 1\}$ 不是闭集.

(2) 有限个闭集的并是闭集, 任意个闭集的交是闭集.

(3) \mathbb{C} 和 \emptyset 是闭集, 它们是 \mathbb{C} 中仅有的既开又闭的子集.

- A 是闭集 $\Leftrightarrow A^c$ 是开集.

定义 1.2.35 (有界集 bounded set) 设 $A \subset \mathbb{C}$. 若 $\exists M > 0$ 使得 $\forall z \in A$ 有 $|z| \leq M$, 则称 A 是有界集. 称 M 是 $|A| := \{|z| \mid z \in A\}$ 的一个上界.

定理 1.2.36 非空有界闭集上的连续函数必有界, 且其模能取到最值.

1.2.3 无穷级数

定义 1.2.37 (复级数, 收敛, 发散 complex series, convergence, divergence) 设 $\{z_n\}$ 是复数列, 称形式和 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 为无穷级数. 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k$ 存在, 则称该级数收敛, 并以 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 记该极限, 称其为级数的和; 否则称该级数发散.

定理 1.2.38 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n)$ 都收敛. 收敛时

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n) + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n).$$

(2) 级数收敛的必要条件 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

证 (1) 因为极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(\sum_{k=1}^n z_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(z_k)$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(\sum_{k=1}^n z_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(z_k)$ 存在, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(z_k) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(z_k).$$

(2) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n z_k - \sum_{k=1}^{n-1} z_k \right) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n - \sum_{n=1}^{\infty} z_n = 0. \quad \square$$

敛散性判别法回顾: 正项级数

- 比较判别法 $0 \leq a_n \leq b_n \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散时} & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 也发散} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛时} & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也收敛} \end{cases}$
- d'Alembert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{收敛, 当} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \\ \text{发散, 当} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \end{cases} \quad (a_n > 0)$
- Cauchy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{收敛, 当} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \\ \text{发散, 当} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \end{cases} \quad (a_n \geq 0)$
- p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛, 当} & p > 1 \\ \text{发散, 当} & p \leq 1 \end{cases}$
- 同阶替换 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{收敛, 当} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n < \infty \text{ 对某个 } p > 1 \text{ 成立} \\ \text{发散, 当} & \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n > 0 \end{cases} \quad (a_n \geq 0)$
- 注意: $\sqrt[p]{a_n} < 1 \Rightarrow \text{收敛}; \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \text{收敛}.$

敛散性判别法回顾：变号级数

- Leibniz $a_n \downarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛
- Dirichlet 设 $\{a_n\}$ 单调趋于零, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.
- Abel 设 $\{a_n\}$ 单调有界, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.
- 复 Dirichlet 设实数列 $\{a_n\}$ 单调趋于零, 复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.
- 复 Abel 设实数列 $\{a_n\}$ 单调有界, 复级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例 1.2.39 (考察下述级数的敛散性) (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n} \right]$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}$

解 (1) 因为 $\frac{1}{n} \downarrow 0$, 由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 也收敛, 故原级数收敛.

(2) 一般项 $\{e^{in}\}$ 不是无穷小, 从而级数发散. \square

测试 1.2.40 下述级数中发散的是

- A. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n$ B. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{2} \right)^n$ C. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^n$ D. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{2} \right)^n$

定义 1.2.41 (绝对收敛, 条件收敛 absolutely convergent, conditionally convergent) (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛但非绝对收敛, 则称其**条件收敛**.

定理 1.2.42 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n)$ 绝对收敛.

证 由单调有界收敛原理, 正项级数收敛当且仅当部分和有界. 由不等式

$$\max\{|x_n|, |y_n|\} \leq |z_n| \leq |x_n| + |y_n|$$

知 $\sum_{k=1}^n |z_k|$ 有界 $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n |x_k|$ 和 $\sum_{k=1}^n |y_k|$ 同时有界. \square

推论 1.2.43 (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 且 $|\sum_{n=1}^{\infty} z_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

(2) 绝对收敛级数的重排仍绝对收敛, 且其和不变.

(3) 若 $\{z_n\}$ 可拆分为两个子列 $\{\zeta_n\}$ 和 $\{\xi_n\}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$.
此结论可扩展到无限个子列拆分情形.

证 (1) 因为实数列 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 故它们均收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 且

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛, $\{z_{\rho(n)}\}$ 是 $\{z_n\}$ 的重排, 其中 $\rho : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ 是双射. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, R_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} |z_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. 因为 $\rho^{-1}(\{1, \dots, N\})$ 是 \mathbb{N}^* 的有限子集, 它有最大元 m . 显然 $\{\rho(1), \dots, \rho(m)\} \supset \{1, \dots, N\}$. 则

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |z_{\rho(n)}| \leq R_N < \frac{\varepsilon}{3},$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\rho(n)}$ 绝对收敛. 记 $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. $\forall j \geq m$ 有

$$\left| \sum_{n=1}^j z_{\rho(n)} - S \right| \leq \left| \sum_{n=1}^j z_{\rho(n)} - \sum_{n=1}^N z_n \right| + R_N \leq 3R_N < \varepsilon$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\rho(n)} = S$.

(3) 易见 $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ 都绝对收敛. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\sum_{n=N_1+1}^{\infty} |z_n| < \varepsilon$. 取 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得 $N \geq N_1$ 且对每个 $n \leq N_1$, z_n 都出现在 $\{\zeta_k\}_{k=1}^N \sqcup \{\xi_k\}_{k=1}^N$ 中, 故当 $n \geq N$ 时

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k - \sum_{k=1}^n \zeta_k - \sum_{k=1}^n \xi_k \right| \leq \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |z_k| < \varepsilon,$$

这就说明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \zeta_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k$. \square

- 条件收敛的级数在重新排序下不能保证和不变. 实际上我们有如下的**黎曼 (Riemann) 重排定理** (参见 [6] 定理 9.4.6): 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是条件收敛的实数项级数, 则对任何 $a \in [-\infty, +\infty]$, 存在该级数的一个重排, 使得其和为 a .

例 1.2.44 (下列级数是否收敛? 是否绝对收敛?) (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n} \right]$ (3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln n}$ ($|z| = 1$ 且 $z \neq 1$)

解 (1) 对 $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(8i)^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ 用达朗贝尔判别法:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^{n+1}}{(n+1)!} \sqrt[n]{\frac{8^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n+1} = 0 < 1$$

故级数绝对收敛.

(2) 实部不是绝对收敛的: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. 由例 1.2.39 知该级数条件收敛.

(3) 因为 $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, 且 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由比较判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散, 由于 $|z| = 1$, 故 $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{z^n}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散. 因为 $\frac{1}{\ln n} \downarrow 0$, 且

$$\left| \sum_{k=2}^n z^k \right| = \left| \frac{z^2 - z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{2}{|1-z|}$$

有界, 由狄利克雷判别法, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln n}$ 条件收敛. \square

练习 1.2.45 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 的敛散性.

解 由达朗贝尔判别法可知, 当 $|z| < 1$ 时级数绝对收敛, 当 $|z| > 1$ 时级数发散. 若 $z = 1$, 级数是调和级数, 故它发散. 若 $|z| = 1$ 且 $z \neq 1$, 同上例 (3) 一样可知级数是条件收敛的. \square

例 1.2.46* 设 $\theta \in \mathbb{R}$, $p > 0$. 考察 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p}$ 的敛散特性.

证 (1) $p > 1$ 时显然两个级数绝对收敛.

(2) 设 $0 < p \leq 1$. 当 $e^{i\theta}$ 和 $e^{2i\theta}$ 都不等于 1, 即 $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ikn\theta}}{n^p}$ 收敛 ($k = 1, 2$), 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos kn\theta}{n^p}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn\theta}{n^p}$ 也收敛 ($k = 1, 2$). 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n\theta}{n^p} \right| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\theta}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos 2n\theta}{2n^p} = +\infty,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p}$ 条件收敛. 同理 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p}$ 条件收敛.

当 $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ 绝对收敛.

当 $\theta \in (2\mathbb{Z} + 1)\pi$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ 绝对收敛. \square

例 1.2.47* 设 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\theta$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\theta$ 均不存在.

证 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{in\theta}$ 不存在 (例 1.2.19) 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\theta$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\theta$ 至少有一个不存在. 等式

$$\sin n\theta = \frac{\cos n\theta \cos \theta - \cos(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad \cos n\theta = \frac{\sin n\theta \cos \theta - \sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

表明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\theta$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\theta$ 存在, 故二者均不存在. \square

- 实际上, 只要 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\pi$, $\{\cos n\theta\}$ 和 $\{\sin n\theta\}$ 就在 $[-1, 1]$ 中稠密, 参见 [4] 1.5 节例 5.

练习 1.2.48* 设 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n + \frac{1}{2})\theta$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n + \frac{1}{2})\theta$ 均不存在.

例 1.2.49* 设 $p \leq 0$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^p}$ 对任何 $\theta \in \mathbb{R}$ 都发散; 当 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^p}$ 也发散.

证 由例 1.2.47* 知 $\{\cos n\theta\}$ 和 $\{\sin n\theta\}$ 不是无穷小, 故 $\{\frac{\cos n\theta}{n^p}\}$ 和 $\{\frac{\sin n\theta}{n^p}\}$ 也不是无穷小, 从而级数发散. 当然要说明不是无穷小, 并不需要像例 1.2.47* 那样强的结论. 下面给出另一个论证.

由 $2\cos^2 n\theta - \cos 2n\theta = 1$ 知 $|\cos n\theta|$ 和 $|\cos 2n\theta|$ 中至少有一个 $\geq \frac{1}{2}$, 故 $\{\cos n\theta\}$ 不是无穷小.

当 $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ 时, $\sin \theta \neq 0$. 取 $n \in \mathbb{N}^*$ 使得 $|\cos n\theta| \geq \frac{1}{2}$, 则

$$|\sin(n+1)\theta| + |\sin n\theta| \geq |\sin(n+1)\theta - \sin n\theta \cos \theta| = |\cos n\theta \sin \theta| \geq \frac{1}{2} |\sin \theta|,$$

这样的 n 有无穷多个, 故 $\{\sin n\theta\}$ 也不是无穷小. \square

1.3 洛朗级数

1.3.1 复幂级数

在微积分中, 我们有下述泰勒公式:

泰勒公式

若 f 在 x_0 处 n 阶可导, 则

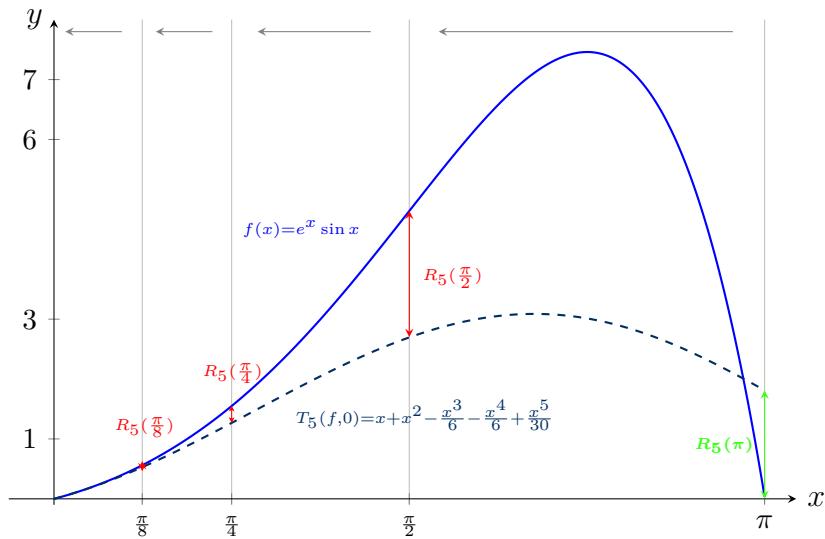
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0).$$

- 右侧由两部分组成, 即**泰勒多项式** ($x_0 = 0$ 时称为**麦克劳林多项式**)

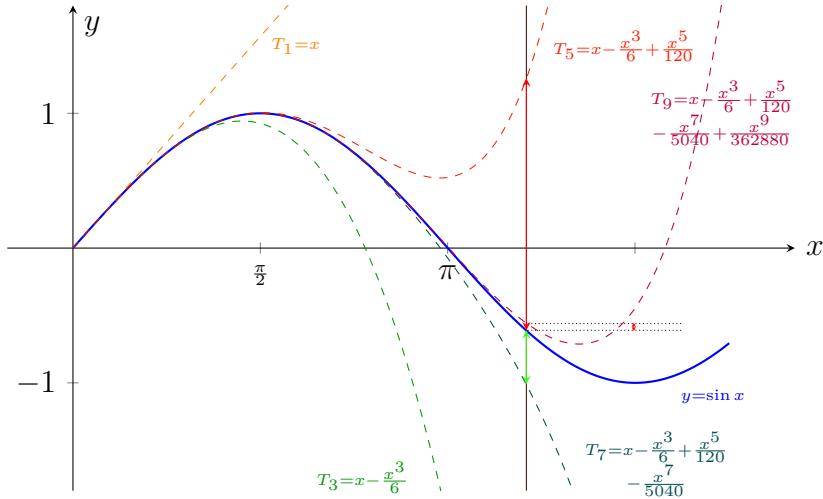
$$T_n(f, x_0)(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

和**余项** $R_n(f, x_0)(x) := f(x) - T_n(f, x_0)(x)$.

- 一般来说 $f(x) \neq T_n(f, x_0)(x)$, 因为右边是一个多项式, 而 f 未必是多项式. 泰勒定理指出余项 $R_n(f, x_0)(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时比 $(x - x_0)^n$ 更高阶的无穷小.
- 泰勒定理处理的是固定 n 让 $x \rightarrow x_0$ 时的变化情况.



$e^x \sin x$ 的五阶麦克劳林逼近及余项

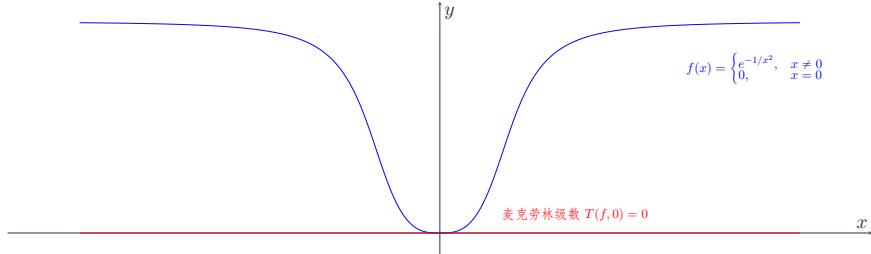


sin x 的一至九阶麦克劳林逼近

- 一个自然的想法是, 对于一个 C^∞ 函数 f , 如果固定 x , 让 $n \rightarrow \infty$, 是不是能让余项消失呢? 即期望 f 成为 x_0 处的泰勒级数:

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + R_n(f, x_0)(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = T_\infty(f, x_0)(x).$$

- 答案一般是否定的. 因为存在非零函数 f 满足 $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = \dots = 0$, 相应的泰勒级数 $T_\infty(f, x_0) = 0$.



f 的泰勒级数除了未必收敛到 f 自身之外, 它还可能压根不收敛, 例如存在着**麦克劳林级数**(即 0 处的泰勒级数)在 0 外处处发散的函数(参见 [5] 第五章例 40).

例 1.3.1 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 有任意阶导数, 且 $f^{(n)}(0) = 0$ 对任何自然数 n 成立, 故 f 的麦克劳林级数

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \equiv 0 \neq f(x), \quad \forall x \neq 0.$$

本例中 f 的任意次麦克劳林多项式都是相等的(等于零), 且 $R_n \equiv f$.

- 答案肯定 $\Leftrightarrow R_\infty(f, x_0)(x) = 0$, 后者发生时我们有泰勒展开式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

- 综上可知, 实变函数 f 的泰勒展开式在区间 $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ 上成立的充要条件是(1) $f \in C^\infty(I)$ (2) $R_\infty(f, x_0) = 0$ 在 I 上处处成立.
- 泰勒级数完全由函数 f 在一点 x_0 处的各阶导数决定, 因此是**局部决定整体**的函数.
- 先研究泰勒级数, 也就是幂级数 (Borel 定理说每个幂级数都是泰勒级数), 然后计算若干具体的展开式, 是高数中常用的处理方式.
- 这是因为 $R_\infty(f, x_0)$ 不容易处理, 在抽象层面讨论一个函数能否展开为泰勒级数的问题, 在实微积分的框架内难以得到令人满意的结果.

熟知的泰勒展开式

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, -1 < x \leq 1; \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, |x| \leq 1$.
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots, -1 < x < 1$. 此处 $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$.

测试 1.3.2 以下展开式在 $x = 0$ 附近成立的是

[]

- | | |
|---|---|
| A. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n$ | B. $e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ |
| C. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | D. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$ |

在下一章我们将看到, 当从实数域跃入复数域时, 问题被大大简化了: 人们可以对能做泰勒展开的函数给出一个清晰简明的刻画. 这里我们首先来讨论复幂级数的一些基本概念.

定义 1.3.3 (幂级数 power series) 设 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是复数列, $z_0 \in \mathbb{C}$. 将表达式

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

称为以 z_0 为中心的**幂级数**, 简写作 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$.

- 当系数 c_k 是零时, 可以省略 $c_k(z - z_0)^k$ 这一项. 例如多项式

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n$$

是以 z_0 为中心的幂级数, 它自第 $n+1$ 次幂起的系数都是零.

例 1.3.4 $1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$ 的系数 $c_{2n+1} = 0$, $c_{2n} = \frac{1}{(2n)!}$, 中心为 0.

例 1.3.5 单项式 $z^n = (z - z_0 + z_0)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z_0^{n-k} (z - z_0)^k$ 是 z_0 处的幂级数, 多项式可以表示为任一点处的(有限)幂级数.

练习 1.3.6 (以下形式是幂级数的是)

A. $z^2 + \sin z$ B. $(z - 1)^2 + (z - 2)^3$ C. $1 + z$ D. $1 + z(z - 2)$

- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 可能对 z 的某些取值收敛, 而对另一些取值发散.
- 点集 $E := \{z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \text{ 收敛}\}$ 称为幂级数的收敛范围.
- 以 E 为定义域, 在 \mathbb{C} 中取值的函数

$$S : E \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k(z - z_0)^k$$

称为幂级数的和函数.

例 1.3.7 (几何级数 geometric series) 求几何(等比)级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛范围与和函数.

解 当 $|z| \geq 1$ 时, 一般项 $\{z^n\}$ 不是无穷小, 级数发散. 当 $|z| < 1$ 时,

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

- 当我们知道 $S = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z| < 1$ 上收敛时, 亦可间接求和:

$$z \cdot S = z + z^2 + z^3 + \cdots = S - 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1 - z}, |z| < 1.$$

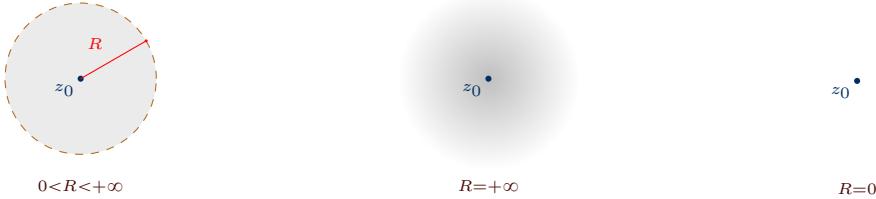
测试 1.3.8 求函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2z - i)^n$ 的收敛范围与和函数.

解 收敛范围 $|2z - i| < 1$, 即 $|z - \frac{i}{2}| < \frac{1}{2}$, 和函数 $S(z) = \frac{1}{1+i-2z}$. □

1.3.2 收敛半径

定理 1.3.9 (收敛半径与收敛圆) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 是一个幂级数. $\exists R \in [0, +\infty]$ 使该级数

- (1) 在 $|z - z_0| < R$ ($|z - z_0| > R$) 上绝对收敛(发散).
- (2) 在 $|z - z_0| = R$ 上可能部分/或全部/或处处不收敛.



- $R = 0$ 时, 仅在 z_0 处收敛; $R = +\infty$ 时, 处处绝对收敛.
- 幂级数的和在收敛圆 $|z - z_0| < R$ 内连续.

定理 1.3.10 当所涉极限存在时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 的收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$.

- 借助于上极限 (其优点是总存在) 的概念, 一般的收敛半径公式是**柯西-阿达玛 (Cauchy-Hadamard) 公式** $R = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|})^{-1}$ (实幂级数参见 [6] 定理 10.3.1, 复幂级数参见 [1] 定理 4.2.2).

例 1.3.11 (求所列幂级数的收敛半径) (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} (ni + 1) z^n$ (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{ni}}{n2^n} z^n$

$$\text{解 } (1) R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n!} / \frac{1}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty.$$

$$(2) R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{ni+1}{(n+1)i+1} \right| = 1.$$

$$(3) R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{ni}}{n2^n} / \frac{e^{(n+1)i}}{(n+1)2^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2|e^i| \cdot \frac{(n+1)}{n} = 2. \quad \square$$

推论 1.3.12 (设极限存在) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^{kn+l}$ 的收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|c_n|}}$.

例 1.3.13 (求所列幂级数的收敛半径) (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

解 (1) 定理 1.3.10 中两个极限都不存在. 一种办法是直接用达朗贝尔判别法计算, 留给读者自己尝试. 这里可应用推论 1.3.12, 适用于其中 $k = 2, l = 1$ 之情形:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} / \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} \right|} = +\infty,$$

(2) 同理得 $R = +\infty$. \square

练习 1.3.14 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{4n+5}}{3^n}$ 的收敛半径.

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ 的收敛半径分别为 r_1 和 r_2 , 和函数分别记为 $f(z)$ 和 $g(z)$. 令 $r = \min\{r_1, r_2\}$.

幂级数的四则运算

- (1) $(f \pm g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(z - z_0)^n, z \in U_r(z_0).$
- (2) $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z - z_0)^n, z \in U_r(z_0).$ 柯西乘积
- (3) 若 $g(z) \neq 0, z \in U_s(z_0)$, 则 $\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n, z \in U_{\min\{r,s\}}(z_0).$

- 在实变量情形无法有效估计 f/g 的展开半径. 例如:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, |x| < 1.$$

分子和分母处处收敛, 且分母无实零点, 商级数的收敛半径却仅为 1.

- 这是因为分母存在着只有进入复数域才能探测到的零点 $\pm i$.

例 1.3.15 不求和, 写出 $(\sum_{n=0}^{\infty} z^n)^2$ 在 $|z| < 1$ 上的幂级数展开式.

解 $\forall k \in \mathbb{N}$, z^k 的系数 $a_k = 1$, 且收敛半径为 1, 由柯西乘积公式,

$$(\sum_{n=0}^{\infty} z^n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, |z| < 1.$$

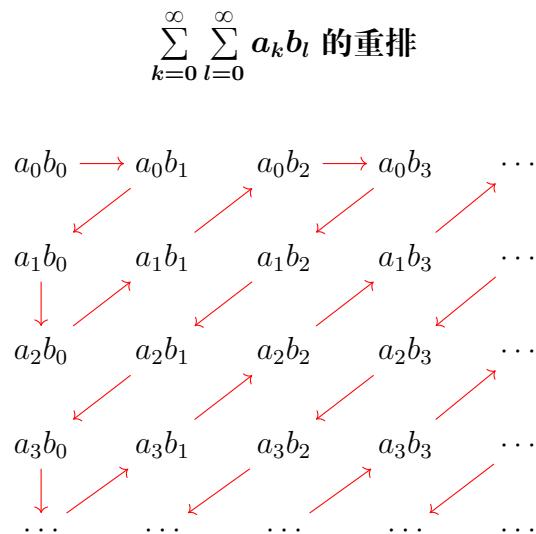
□

练习 1.3.16 不求和写出 $(\sum_{n=0}^{\infty} z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} nz^n)$ 在 $|z| < 1$ 上的幂级数展开式.

引理 1.3.17 (柯西乘积) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 是两个绝对收敛的级数, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

证 等式成立的原因是绝对收敛级数重排其和不变, 证明思路与推论 1.2.43 (2) 相同, 详细过程参见 [6] 定理 9.4.7 及例 10.3.9. □



1.3.3 洛朗级数

- $\frac{1}{z-z_0}$ 不能在 z_0 处展开成幂级数, 但若允许出现负幂项, 则 $\frac{1}{z-z_0}$ 已经是一个展开式 (z_0 附近但不含 z_0).

定义 1.3.18 (洛朗级数 Laurent series) (1) 称表达式

$$\cdots + c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_0 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

为以 z_0 为中心的**洛朗级数**.

(2) 若洛朗级数的幂级数部分

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

和负幂项部分

$$c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \cdots + c_{-n}(z - z_0)^{-n} + \cdots$$

都收敛, 则称该级数**收敛**.

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m c_k(z - z_0)^k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{-k}(z - z_0)^{-k}.$
- 书写时省略系数为零的那些项. 幂级数是洛朗级数的特例.
- 后面我们将看到, 圆盘/圆环上的幂/洛朗级数就是解析函数, 而解析函数是由局部数据决定的, 而去心区间上的实解析函数在中心左右半区间上的行为毫无关联, 因此一般不是圆环解析函数的限制, 从而不存在洛朗展开式.
- 类似地, 在高数中初等函数的定义里“可由一个式子表达”这个模糊的描述, 我们可以用“解析性”来代替, 因为这意味着局部决定整体.

例 1.3.19 (分段连续函数总可用一个式子表达) 设 f, g 是一元实变量连续函数, 则分段函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ g(x), & x < 0 \end{cases} \text{ 连续当且仅当 } f(0) = g(0), \text{ 此时 } \varphi \text{ 可用一个式子表达.}$$

证 连续的充要条件是显然的. 记 $c = f(0) = g(0)$. 则 $\varphi(x) = f(\frac{x+\sqrt{x^2}}{2}) + g(\frac{x-\sqrt{x^2}}{2}) - c$ 可用一个式子表达. \square

测试 1.3.20 以下形式是洛朗级数的是

[]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{1}{z^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z(z-1)^n}, \quad \frac{1}{(z-1)^2} + i(z-1)^3, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n(z-1)^2}{n!}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(z^2-1)^n$$

例 1.3.21 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{(z-2)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}(z-2)^n$ 的收敛域.

解 幂级数部分收敛域为 $|z - 2| < 4$. 负幂项部分是 $\frac{1}{z-2}$ 的幂级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{(z-2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n(n+1) \left(\frac{1}{z-2}\right)^n.$$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n(n+1)t^n$ 的收敛域为 $|t| < \frac{1}{3}$, 故负幂项部分收敛域为

$$z \neq 2 \text{ 且 } \left|\frac{1}{z-2}\right| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow |z-2| > 3.$$

综上可知原洛朗级数的收敛域为 $3 < |z-2| < 4$. \square

练习 1.3.22 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ 的收敛域及和函数.

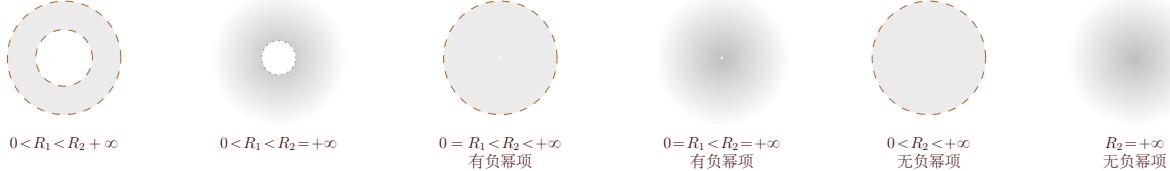
解 收敛域为 $1 < |z| < 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{z}{(z-1)(2-z)}, \quad 1 < |z| < 2. \quad \square$$

定理 1.3.23 设 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 是一个洛朗级数, 存在 $R_1, R_2 \in [0, +\infty]$ 使该级数

- (1) 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 上绝对收敛.
- (2) 在 $|z - z_0| < R_1$ 及 $|z - z_0| > R_2$ 上发散.
- (3) 在边界圆周 $|z - z_0| = R_1$ 或 R_2 上可能收敛可能发散.

- $|z - z_0| > R_1$ 是负幂项的收敛圆环, $|z - z_0| < R_2$ 是幂级数的收敛圆.
- 当 $R_1 \geq R_2$ 时圆环不存在, $R_1 > R_2$ 时级数处处发散. $R_1 < R_2$ 时:



- 洛朗级数的和在收敛圆环内连续.

例 1.3.24 ($R_1 = R_2$ 一例) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 和 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$ 的 $R_1 = R_2 = 1$. 前者仅在 $|z| = 1$ 上收敛, 中者还须排除 $z = 1$, 后者处处发散.

练习 1.3.25 洛朗级数的收敛域可不可能是 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ 或 } |z| = 2\}$?

几何展开式

当 $|z| < 1$ 时, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$. $(|z| \geq 1 \text{ 时级数发散})$

例 1.3.26 将 $\frac{1}{z^2-7z+10}$ 分别在 $0 < |z-2| < 3$ 和 $1 < |z-3| < 2$ 上展开.

解 (1) 在 $0 < |z - 2| < 3$ 上展开式形如 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - 2)^n$:

$$\frac{1}{(z-2)(z-5)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{z-2} \frac{1}{1-\frac{z-2}{3}} \stackrel{|z-2|<1}{\text{代入几何级数}} - \frac{1}{3} \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{n-1}}{3^{n+1}}.$$

(2) 在 $1 < |z - 3| < 2$ 上展开式形如 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - 3)^n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-2)(z-5)} &\stackrel{\substack{\text{先拆分} \\ \text{均须转换为 } z-3}}{=} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-2} \right) \stackrel{\substack{\text{化为 } \frac{1}{1\pm c(z-3)} \\ |z-3|>1}}{=} \frac{-1}{6} \frac{1}{1-\frac{z-3}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1+(z-3)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{6 \cdot 2^n} (z-3)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3} (z-3)^{-n}. \end{aligned}$$

□

练习 1.3.27 将 $\frac{1}{z(z-1)}$ 在 (1) $0 < |z| < 1$; (2) $|z-1| > 1$ 上展开为洛朗级数.

解 (1) $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{-1}{z} \frac{1}{1-z} \stackrel{|z|<1}{=} -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$.

(2) $\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1+(z-1)} \stackrel{|z-1|>1}{=} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^n}$.

□

测试 1.3.28 将 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-5)}$ 在 $1 < |z - 2| < 3$ 上展开为洛朗级数.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(z) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-1} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(z-2)-3} - \frac{1}{1+(z-2)} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{-1}{3} \frac{1}{1-\frac{z-2}{3}} - \frac{1}{z-2} \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} \right] = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^n}. \end{aligned}$$

□

1.4 初等函数

1.4.1 指数函数

定义 1.4.1 (指数函数) 复指数函数 $e^z := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

定理 1.4.2 设 $z = x + iy$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

证 将 $1 + \frac{z}{n}$ 写成三角形式 $r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$, 其中 $\theta_n = \arg(1 + \frac{z}{n})$, 当 $n \gg 1$ 时 $|\theta_n| < \frac{\pi}{2}$. 因为 $\theta_n \rightarrow 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y}{r_n} = y.$$

由棣莫弗公式 $(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt$ 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n^n (\cos n\theta_n + i \sin n\theta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n^n (\cos y + i \sin y).$$

只需再计算第一个因子的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln r_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} [(1 + \frac{x}{n})^2 - 1 + \frac{y^2}{n^2}]} = e^x.$$

□

当 $z = x$ 是实数时, $e^z = e^x$; 当 $z = i\theta$ 是纯虚数时, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

例 1.4.3 $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$. 特别地 $e^z \neq 0$.

证 设 $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$. 则 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, 故

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

由 $e^{-z}e^z = e^{-z+z} = e^0 = 1$ 知 $e^z \neq 0$ 且 $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$. \square

练习 1.4.4* 直接证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z_1}{n})^n (1 + \frac{z_2}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z_1+z_2}{n})^n$.

命题 1.4.5 e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数, 且 $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i$.

证 记 $z_1 - z_2 = a + bi$, 则 $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1-z_2} = 1 \Leftrightarrow e^a e^{ib} = 1 \Leftrightarrow a = 0, b = 2k\pi \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i$. \square

测试 1.4.6 函数 e^{-2iz+1} 的周期是

[]

- A. $2\pi i$ B. 2π C. πi D. π

命题 1.4.7 (加法定理) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$.

证 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 收敛半径为 $+\infty$, 故其处处绝对收敛, 从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}.$$

引理 1.4.8 $\forall y \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \cos y + i \sin y$.

证 依绝对收敛性, 可将 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$ 按奇偶次项分开求和

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

定理 1.4.9 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

证 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z$. \square

- 欧拉公式 $\Leftrightarrow \forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

定义 1.4.10 (三角函数) 称 $\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ 为 (复) 余弦函数和正弦函数. 称 $\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ 为双曲余弦函数和双曲正弦函数.

- 复变量 Euler 公式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
- $\cos(iz) = \cosh z$, $\sin(iz) = i \sinh z$, $\cos^2 z + \sin^2 z = \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

定理 1.4.11 $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

练习 1.4.12 (欧拉公式的幂级数解释) 试用指数函数和三角函数的幂级数展开式验证 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

证 依绝对收敛性, 可将 $e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$ 按奇偶次项分开求和

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

□

- 从幂级数的角度看, 欧拉公式就很自然.

例 1.4.13 计算 $\lim_{\Re y \rightarrow \infty} \cos yi$ 和 $\lim_{\Re y \rightarrow \infty} \sin yi$.

解 $\cos yi = \frac{e^{-y} + e^y}{2}$, $\sin yi = \frac{i}{2}(e^y - e^{-y})$. 显然

$$\lim_{\Re y \rightarrow \infty} \cos yi = \lim_{\Re y \rightarrow \infty} \sin yi = \infty.$$

□

练习 1.4.14 证明 $\lim_{\Re x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ 但 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sin z}{z}$ 不存在.

证 $\lim_{\Re x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, 但 $\lim_{\Re y \rightarrow \infty} \frac{\sin yi}{yi} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y - e^{-y}}{2y} = \infty$.

□

- $\cos z$ 和 $\sin z$ 是无界函数, 且所有三角恒等式仍成立.

例 1.4.15 $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

定义 1.4.16 (对数 logarithmic function) 将方程 $e^\omega = z$ 的解 ω 称为 z 的对数, 记作 $\omega = \ln z$, 即

$$\ln z = \{\omega \in \mathbb{C} \mid e^\omega = z\}$$

是 z 在指数映射下的原像 $\exp^{-1}(z)$.

- 由对数的定义, $e^{\ln z} = z$.
- 若 $e^{\omega_0} = z$, 则 $\ln z = \omega_0 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 因为 z 是 e^z 在指数映射下的一个原像, 故 $\ln(e^z) = z + 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- 同理若实数 $r > 0$, 则 $\ln r = \ln_{\mathbb{R}} r + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

练习 1.4.17 $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, $\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$.

对数表达式

当 $z = 0$ 时方程 $e^{\omega} = z$ 无解. 当 $z \neq 0$ 时 $\text{Ln } z = \ln_{\mathbb{R}} |z| + i \operatorname{Arg} z$.

证 $\text{Ln } z = \text{Ln}(|z|e^{i\theta}) = \text{Ln} |z| + \text{Ln} e^{i\theta} = \ln_{\mathbb{R}} |z| + i\theta + 2k\pi i$. □

- 这还说明 e^z 的值域为 \mathbb{C}^* .

例 1.4.18 解方程 $e^z = 1 - i$.

解 $z = \text{Ln}(1 - i) = \ln \sqrt{2} + (2\mathbb{Z} - \frac{1}{4})\pi i$. □

测试 1.4.19 计算 i 的对数 $\text{Ln } i$.

例 1.4.20 (1) $\text{Ln } z^n \overset{\text{一般}}{\neq} n \text{Ln } z$, 实际上 $\text{Ln } z^n \supset n \text{Ln } z$.

(2) $\forall z \neq 0$, $\text{Ln } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Ln } z$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

证 (1) 例如 $\text{Ln } 1^2 = 2k\pi i$, 而 $2 \text{Ln } 1 = 4k\pi i$. 事实上

$$\text{Ln } z^n = \text{Ln } z + \cdots + \text{Ln } z \text{ (共 } n \text{ 项)}$$

(2) $\text{Ln } \sqrt[n]{z} = \bigcup_{\omega \in \sqrt[n]{z}} (\ln |\omega| + i \operatorname{Arg} \omega) = \frac{1}{n} \ln |z| + i \bigcup_{\omega \in \sqrt[n]{z}} \operatorname{Arg} \omega = \frac{1}{n} \ln |z| + i \operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Ln } z$. □

练习 1.4.21 (1) 证明 $\forall z \neq 0$ 有 $\text{Ln} \frac{1}{z} = -\text{Ln } z$, $\overline{\text{Ln } z} = \text{Ln } \bar{z}$.

(2) 验证 $\text{Ln } \sqrt{-1} = \text{Ln } i \cup \text{Ln } (-i) = [(2\mathbb{Z} + \frac{1}{2}) \cup (2\mathbb{Z} - \frac{1}{2})]\pi i$ 和 $\frac{1}{2} \text{Ln}(-1) = (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})\pi i$ 是同一个数集.

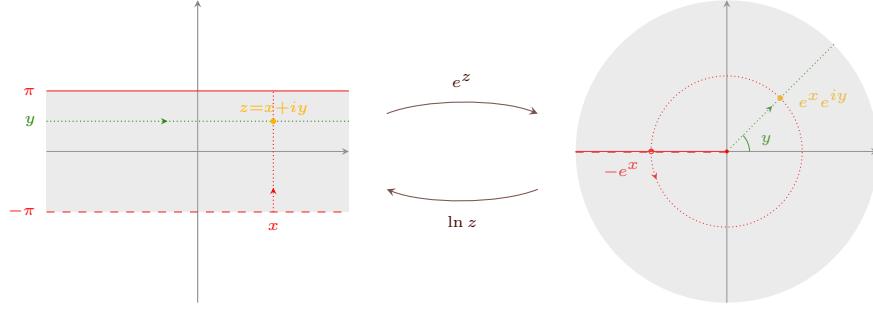
定义 1.4.22 (分支 branch) 设 Φ 是区域 D 上的多值函数. 若 $\varphi \in C(D)$ 满足 $\forall z \in D, \varphi(z) \in \Phi(z)$, 则称 φ 为 Φ 在 D 上的一个分支.

定义 1.4.23 $z \neq 0$ 的对数主值 $\text{ln } z := \ln_{\mathbb{R}} |z| + i \arg z = \ln_{\mathbb{R}} |z| + i(\operatorname{Arg} z \cap (-\pi, \pi])$.

例 1.4.24 $\text{ln } e^z = z \Leftrightarrow \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]$.

练习 1.4.25 求 $\text{ln}(-e)$ 和 $\text{ln } i$.

- 因为 $\operatorname{Re}(\text{ln } z) = \ln_{\mathbb{R}} |z|$ 在 \mathbb{C}^* 上连续, $\operatorname{Im}(\text{ln } z) = \arg z$ 连续点集是 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, 故 $\text{ln } z$ 的连续点集是 $D := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, 故它是 $\text{Ln } z$ 在 D 上的一个分支.
- $\log z = \text{ln}(-z) + \pi i = \ln_{\mathbb{R}} |z| + i(\operatorname{Arg} z \cap (0, 2\pi])$ 是 $\text{Ln } z$ 在 D 上的一个分支.
- $\text{ln } z$ 和 $\log z$ 分别是 e^z 限制在 $-\pi < y \leq \pi$ 和 $0 < y \leq 2\pi$ 上的反函数.



基本性质

- (1) $e^{\ln z} = z, \ln e^z = z + 2\lfloor \frac{\pi-y}{2\pi} \rfloor \pi i.$
- (2) $\ln z_1 - \ln z_2 = \ln \frac{z_1}{z_2} - 2\lfloor \frac{\pi+\arg z_2 - \arg z_1}{2\pi} \rfloor \pi i.$ “ $\lfloor \dots \rfloor$ ”代表“取整”
- (3) $\overline{\ln z} = \ln \bar{z}, \ln \frac{1}{z} = -\ln z, z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$
- (4) $\ln z$ 在 $(-\infty, 0]$ 上处处不连续.

1.4.2 复幂函数

定义 1.4.26 (z 的 μ 次幂 z to the μ -th power) 设 $\mu \in \mathbb{C}, z \neq 0$, 称 $z^\mu = e^{\mu \operatorname{Ln} z}$ 为 z 的 μ 次幂. 称 $e^{\mu \operatorname{Ln} z}$ 为 z^μ 的主值.

- 对每个固定的 k , $e^{\mu(\operatorname{Ln} z + 2k\pi i)}$ 是 z^μ 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上的分支.

例 1.4.27 求幂 $\sqrt{-1}, 2^i, i^i$ 及其主值.

解 $\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2} \operatorname{Ln}(-1)} = e^{\frac{i \operatorname{Arg}(-1)}{2}} = \pm i$; 主值为 i .

$2^i = e^{i \operatorname{Ln} 2} = e^{i(\operatorname{Ln} 2 + i2\pi\mathbb{Z})} = e^{2\pi\mathbb{Z}} e^{i \operatorname{Ln} 2}$; 主值为 $e^{i \operatorname{Ln} 2}$.

$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}}$; 主值为 $e^{-\frac{\pi}{2}}$. □

基本性质

- (1) 多值 $z^n, z^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{Z}^*$ 与以前的定义一致.
- (2) 多值幂函数等式 $(z_1 z_2)^\mu = z_1^\mu z_2^\mu, \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^\mu = \frac{z_1^\mu}{z_2^\mu}$.

证 (1) $e^{n \operatorname{Ln} z} = e^{n \operatorname{Ln} z + 2nk\pi i} = e^{\operatorname{Ln} z} e^{\operatorname{Ln} z} \cdots e^{\operatorname{Ln} z} = z^n. e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z} = e^{\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z}} = \sqrt[n]{z}$. □

练习 1.4.28 (1) 多值 $(z^{-1})^\mu = (z^\mu)^{-1} = z^{-\mu}$ 或 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上的主值.

(2) $z^n z^\mu = z^{n+\mu}$ 作为多值函数或 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上的同一分支成立.

(3) $z^{n\mu} = (z^\mu)^n \neq (z^n)^\mu, z^{\lambda\mu} \neq (z^\lambda)^\mu \neq (z^\mu)^\lambda, z^{\mu_1} z^{\mu_2} \neq z^{\mu_1 + \mu_2}$.

证 (3) $(z^2)^{\frac{1}{2}} = \pm z$, 而 $(z^{\frac{1}{2}})^2 = z$. 事实上,

$$(z^\mu)^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Ln} e^{\mu \operatorname{Ln} z}} = e^{\lambda(\mu \operatorname{Ln} z + 2k\pi i)} = e^{\lambda 2k\pi i} z^{\lambda \mu}.$$

$$1^{\frac{1}{2}} 1^{-\frac{1}{2}} \neq 1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}. (\mu_1 \operatorname{Ln} z + \mu_2 \operatorname{Ln} z \neq (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{Ln} z).$$

□

1.4.3 正切函数

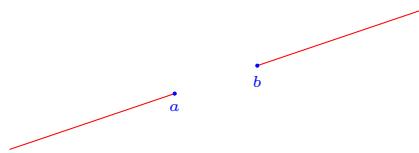
定义 1.4.29 称 $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ ($z \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$) 为**正切函数**, 称方程 $\tan \omega = z$ 的解 $\omega = \operatorname{Arctan} z$ 为 z 的**反正切**. 同样定义余切 $\cot z$ 和反余切 $\operatorname{Arccot} z$.

基本性质

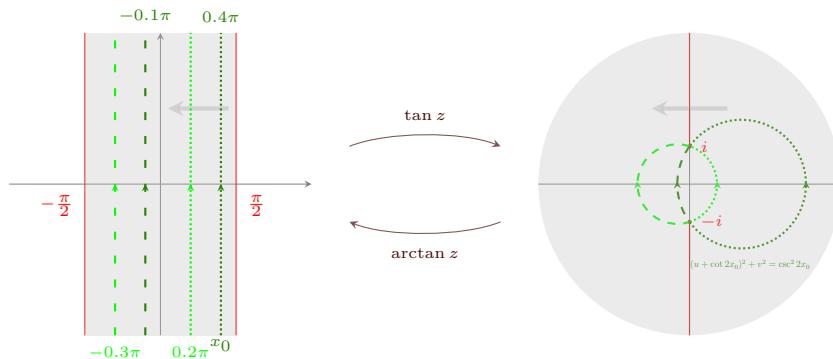
- (1) $\tan z = i(\frac{2}{e^{2iz}+1} - 1)$ 的值域为 $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. ($\frac{2}{e^{2iz}+1}$ 取不到 0 和 1 这两个值)
- (2) $\operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z}$ ($z \neq \pm i$).

- 设 a 和 b 是两个不同的复数. 用 $a \parallel b$ 表示直线 $\overline{ab} = \{ta + (1-t)b \mid t \in \mathbb{R}\}$ 去掉区间 $(a, b) = \{ta + (1-t)b \mid 0 < t < 1\}$ 的部分, 即

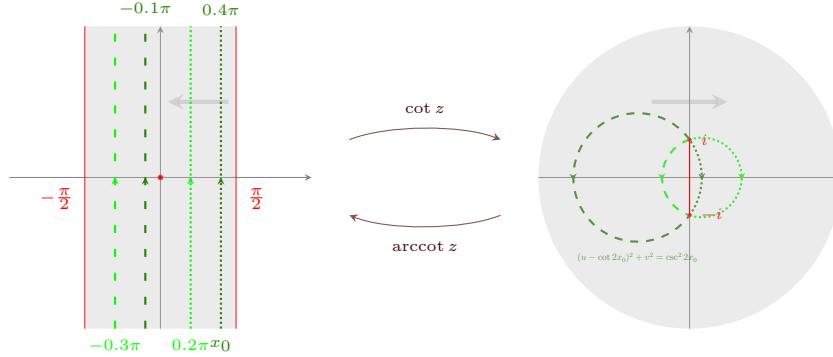
$$a \parallel b = \{ta + (1-t)b \mid t \leq 0 \text{ 或 } t \geq 1\}.$$



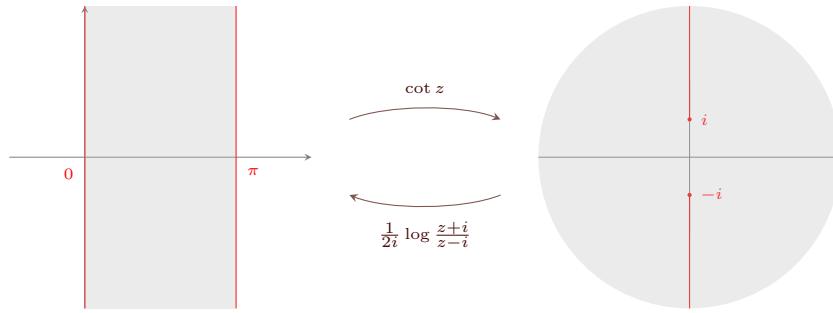
定理 1.4.30 (1) $\tan z$ 将带状区域 $|\operatorname{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}$ 一对一地映为区域 $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$.
(2) 主值 $\operatorname{arctan} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z}$ 是 $\tan z|_{\{|\operatorname{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}\}}$ 在 $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$ 上的反函数.



定理 1.4.31 (1) $\cot z$ 的值域为 $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, 它将穿孔带状区域 $D : |\operatorname{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}$ 且 $z \neq 0$ 一对一地映为区域 $G = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$. $\operatorname{Arccot} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}$ ($z \neq \pm i$).
(2) 主值反余切 $\operatorname{arccot} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}$ 是 $\cot z|_D$ 在 G 上的反函数.



定理 1.4.32 $\cot z$ 将区域 $0 < \operatorname{Re}(z) < \pi$ 一对一地映为 $\mathbb{C} \setminus -i[i]$. 它在 $\mathbb{C} \setminus -i[i]$ 上的反函数为 $\frac{1}{2i} \log \frac{z+i}{z-i}$.



- $\operatorname{arccot} z = \arctan \frac{1}{z}, z \neq \pm i; \frac{1}{2i} \log \frac{z+i}{z-i} = \frac{\pi}{2} - \arctan z (z \in \mathbb{C} \setminus -i[i]).$

例 1.4.33 讨论极限 $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} z$ 和 $\lim_{z \rightarrow \infty} \arctan z$.

解 (1) $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} z = \lim_{z \rightarrow \infty} \arctan \frac{1}{z} = 0$.

(2) 仅考虑实轴上的极限便知 $\lim_{z \rightarrow \infty} \arctan z$ 不存在. 回到对数表达式本身, $\ln z$ 在 -1 处的间断性导致 $\lim_{z \rightarrow \infty} \ln \frac{i-z}{i+z}$ 不存在:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im}(\frac{i-z}{i+z}) \geq 0}} \ln \frac{i-z}{i+z} = \pi i, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im}(\frac{i-z}{i+z}) < 0}} \ln \frac{i-z}{i+z} = -\pi i.$$

直接计算可知 $\operatorname{Im}(\frac{i-z}{i+z}) = \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|i+z|^2}$, 故

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re}(z) \geq 0}} \arctan z = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re}(z) < 0}} \arctan z = -\frac{\pi}{2}. \quad \square$$

测试 1.4.34 计算 $\arctan(i+2) + \operatorname{arccot}(i+2)$ 和 $\arctan(i-2) + \operatorname{arccot}(i-2)$.

定义 1.4.35 若 $\cos \omega = z$, 则称 ω 是 z 的反余弦, 记作 $\omega = \operatorname{Arccos} z$; 若 $\sin \omega = z$, 则称 ω 是 z 的反正弦, 记作 $\omega = \operatorname{Arcsin} z$.

基本性质

- (1) $\cos z$ 和 $\sin z$ 的值域均为 \mathbb{C} .
- (2) $\operatorname{Arccos} z = -i \ln(z + i\sqrt{1 - z^2})$.
- (3) $\operatorname{Arcsin} z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$.

定理 1.4.36 ($G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$) (1) $\cos z$ 将 $0 < x < \pi$ 映为 G , 其反函数 $\operatorname{arccos} z = -i \ln(z + ie^{\frac{1}{2} \ln(1-z^2)})$.

(2) $\sin z$ 将 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 映为 G , 其反函数 $\operatorname{arcsin} z = -i \ln(iz + e^{\frac{1}{2} \ln(1-z^2)})$.

- $\operatorname{arcsin} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos} z, z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

定义 1.4.37 分别称 $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ ($z \neq \frac{2k+1}{2}\pi i$) 和 $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$ ($z \neq k\pi i$) 为双曲正切函数和双曲余切函数.

例 1.4.38 (反双曲函数) $\operatorname{Artanh} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$, $\operatorname{Arcoth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}$ ($z \neq \pm 1$). $\operatorname{Arcosh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$, $\operatorname{Arsinh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$.

基本性质

- (1) $\tanh z = \frac{1}{i} \tan(iz)$ 和 $\coth z = i \cot(iz)$ 的值域均为 $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$.
- (2) $\tanh z$ 将带状区域 $D: |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}$ 一一地映为区域 $G_1 = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
- (3) $\operatorname{Artanh} z$ 的主值 $\operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$ 是 $\tanh z|_D$ 在 G_1 上的反函数.
- (4) $\coth z$ 将区域 $D: |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}$ 且 $z \neq 0$ 一一地映为 $G_2 = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
- (5) $\operatorname{Arcoth} z$ 的主值 $\operatorname{arcoth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}$ 是 $\coth z|_D$ 在 G_2 上的反函数.

1.A 附录

1.A.1 不可比性

定义 1.A.1 用 \mathbb{F} 表示有理数域或实数域或复数域. \mathbb{F} 上的一个关系 $>$ 若满足以下两条:

- (1) 传递性 若 $a > b$ 且 $b > c$, 则 $a > c$,
- (2) 三分律 任意 $a, b \in \mathbb{F}$, 以下关系: $a > b$, $a = b$, $b > a$ 有且仅有一个成立, 则称它是一个大小关系.

例 1.A.2 在 \mathbb{C} 上定义字典序: $x_1 + iy_1 > x_2 + iy_2 \Leftrightarrow "x_1 > x_2" \text{ 或 } "x_1 = x_2, y_1 > y_2"$. 这是一个大小关系.

定义 1.A.3 数域 \mathbb{F} 上的大小关系 $>$ 与算术相容是指:

- (1) $a > b \Rightarrow \forall c \in \mathbb{F} \text{ 有 } a + c > b + c$;

(2) $a > b \Rightarrow \forall 0 < c \in \mathbb{F}$ 有 $ac > bc$.

此时称 \mathbb{F} 是有序域. 将满足关系 $a > 0$ 的数 a 称为 (关于此关系) 的正数.

命题 1.A.4 在有序域中 (1) $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$ (2) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ (3) 正数之和仍正.

证 (1) $a < 0 \Leftrightarrow a + (-a) < -a \Leftrightarrow 0 < -a$.

(2) 因为 $a \neq 0$, a 和 $-a$ 必有一个为正, 故 $a^2 = (-a)^2 > 0$.

(3) 若 $a > 0, b > 0$, 则 $a + b > a + 0 = a > 0$. \square

推论 1.A.5 \mathbb{C} 不是有序域, 即复数不能以算术相容的方式比较大小.

证 若 \mathbb{C} 是有序域, 则 $0 = i^2 + 1^2 > 0$, 与三分律矛盾. \square

例 1.A.6 \mathbb{C} 上的字典序与加法相容, 但与乘法不相容: 字典序中 $i > 0$ 但 $i^2 = -1 < 0$.

- 在数系中定义一个关系, 与算术规律相容是非常重要的. 例如为了保证分配律始终有效, 规定负负得正, 而不是做其他约定.

1.A.2 证明定理

引理 1.A.7 (Bolzano-Weierstrass 定理) 有界实数列必有收敛子列.

证 这实质是实数完备性公理的等价命题之一, 参见 [6] 定理 2.4.5 或 [2] 1.1.4 节定理 2. \square

推论 1.A.8 有界复数列必有收敛子列.

证 设 $\{z_n = x_n + iy_n\}$ 是有界复数列, 则 $\{x_n\}$ 是有界实数列, 故其有收敛子列 $\{x_{k_n}\}$. 而 $\{y_{k_n}\}$ 同样是有界实数列, 故它又有收敛子列 $\{y_{l_n}\}$, 而收敛数列 $\{x_{k_n}\}$ 的相应子列 $\{x_{l_n}\}$ 收敛, 故 $\{z_n\}$ 的子列 $\{z_{l_n} = x_{l_n} + iy_{l_n}\}$ 收敛. \square

引理 1.A.9 非空有上界实数集必有上确界. 即: 若 $A \subset \mathbb{R}$ 非空, 且存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \leq M$, 则存在唯一的 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 x_0 是 A 的一个上界 (即 $\forall x \in A$ 有 $x \leq x_0$), 且有 A 中点列 $\{x_n\} \subset A$ 使得 $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 称 x_0 为 A 的上确界, 记作 $x_0 = \sup A$.

证 这同样是实数完备性公理的等价命题, 参见 [6] 或 [2]. \square

例 1.A.10 (1) 区间 $(0, 1)$ 是有上界的, 它没有最大数, 它的上确界 $\sup(0, 1) = 1$ 不属于 $(0, 1)$.

(2) $(0, 1]$ 的上确界就是它的最大数. $\sup\{0.5, 0.7, 1\} = 1$, 为验证这一事实, 可取 $x_n \equiv 1$.

推论 1.A.11 设 f 是非空数集 A 上的有界函数. 则存在 $z_n \in A$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)|$ 是 $|f|$ 的上界, 即 $|f(z)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)|, \forall z \in A$.

证 因为 $\{|f(z)| \mid z \in A\}$ 是非空有上界实数数集, 它有上确界 x_0 . 根据上确界的定义, 存在 $z_n \in A$ 使得 $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)|$. \square

推论 1.A.12 设 A 是非空有界集. 则存在 $z_n \in A$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ 且 $|z_0|$ 是 $|A|$ 的上界.

证 在推论 1.A.11 中取 $f(z) = z$ 即可. \square

定理 1.A.13 (一致连续性) 设 f 是非空有界闭集 A 上的连续函数, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, \zeta \in A, |z - \zeta| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$.

证 假设不然, 则存在 $\varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists z_n, \zeta_n \in A$ 使得 $|z_n - \zeta_n| < \frac{1}{n}$, 但 $|f(z_n) - f(\zeta_n)| \geq \varepsilon_0$.

因为 A 有界, 由推论 1.A.8, 必要时取子列, 可设 $\{z_n\}$ 收敛于某个 z_0 . 显然 $\{\zeta_n\}$ 也收敛于 z_0 . 由于 A 是闭集, $z_0 \in A$. 于是

$$0 = |f(z_0) - f(z_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n) - f(\zeta_n)| \geq \varepsilon_0 > 0,$$

矛盾. \square

定理 1.2.36 的证明 设 f 是非空有界闭集 A 上的连续函数. 倘若 f 无界, 则 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \zeta_n \in A$ 使得 $|f(\zeta_n)| \geq n$. 由推论 1.A.8, 必要时取子列, 不妨设 $\zeta_n \rightarrow \zeta \in A$ (因为 A 是闭集). 于是

$$|f(\zeta)| \stackrel{|f| \text{ 连续}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} |f(\zeta_n)| = +\infty,$$

这与 $f(\zeta) \in \mathbb{C}$ 矛盾.

由推论 1.A.11, 存在 $z_n \in A$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)|$ 是 $|f|$ 的上界. 因为 A 有界, 故 $\{z_n\}$ 是有界数列, 必要时取子列, 可设 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$. 因为 A 是闭集, 故 $z_0 \in A$, 又 f 连续, 所以 $|f(z_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)|$ 是 $|f|$ 在 A 上的最大值.

若 f 有零点 η , 则 $|f|$ 在 η 处取得最小值. 若 f 没有零点, 则 $\frac{1}{f}$ 是 A 上的连续函数, 故 $\frac{1}{|f|}$ 在某个 $\beta \in A$ 处取得最大值, 从而 $|f|$ 在 β 处取得最小值. \square

1.A.3 收敛半径

引理 1.A.14 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 在 ζ 处收敛 (发散), 则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 在 $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ ($|z - z_0| > |\zeta - z_0|$) 处绝对收敛 (发散).

证 (1) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 在 ζ 处收敛 (不妨设 $\zeta \neq z_0$). 则收敛数列 $\{c_n(\zeta - z_0)^n\}$ (它是无穷小) 有界, 故 $\exists M > 0$ 使得 $|c_n(\zeta - z_0)^n| \leq M$. 当 $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ 时, 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^n$ 收敛. 由

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\zeta - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^n$$

及正项级数比较判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - z_0)^n|$ 收敛.

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 在 ζ 处发散. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 在某个 $|z - z_0| > |\zeta - z_0|$ 处收敛, 由 (1) 知 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 在 ζ 处收敛, 矛盾. \square

定理 1.3.9 的证明 记 $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \text{ 在 } z \text{ 处收敛}\}$. 因为 $z_0 \in A$, 故 A 非空.

若 A 无界, 由引理 1.A.14 知 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 处处绝对收敛, 此时定理结论对 $R = +\infty$ 成立.

若 A 有界, 则函数 $f(z) = z - z_0$ 在 A 上有界, 应用引理 1.A.11, 存在 $\zeta_k \in A$ 使得 $R := \lim_{k \rightarrow \infty} |f(\zeta_k)|$ 是 $|f|$ 在 A 上的上界. 设 $|z - z_0| < R$, 则存在 $k \in \mathbb{N}^*$ 使得 $|z - z_0| < |\zeta_k - z_0|$, 由 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta_k - z_0)^n$ 收敛及引理 1.A.14 知, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 绝对收敛. 设 $|z - z_0| > R$, 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 收敛, 则 $z \in A$, 而 R 是 $|f|$ 在 A 上的上界, 故 $|z - z_0| = |f(z)| \leq R$, 矛盾, 因此 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 发散. \square

定理 1.3.10 的证明 (1) 当 $|z - z_0| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ 时, 若 $|z - z_0| = 0$ 级数当然绝对收敛, 否则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{c_n(z-z_0)^n} \right| = |z - z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1$, 由达朗贝尔判别法 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 绝对收敛, 故 $R \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$. 同理当 $|z - z_0| > \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 不绝对收敛, 故 $R \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$. 综上得 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$.

(2) 以柯西判别法替换达朗贝尔判别法, 类似可证 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. \square

- 用柯西公式 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ 计算收敛半径时, 下面的斯特林公式能提供方便.

命题 1.A.15 (斯特林 (Stirling) 公式) $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ ($n \rightarrow \infty$).

证 $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} \ln x dx > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n} > \int_0^1 \ln x dx$, 不难算得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} \ln x dx = \int_0^1 \ln x dx = -1$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n} = -1,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\sqrt[n]{n!}/n) = -1$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}/n = e^{-1}$. \square

第二章 解析函数

2.1 复解析性

2.1.1 定义导数

定义 2.1.1 (导数, 可导 derivative, differentiable) 设复变函数 f 在 $U_r(z_0)$ 上有定义, 称极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

为 f 在 z_0 处的导数, 记作 $f'(z_0)$ 或 $\frac{d}{dz}|_{z=z_0} f$.

- 可导的几何意义: $\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$, 不计高阶无穷小时, 函数增量等于自变量各向增量做同一个伸缩和旋转.

例 2.1.2 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 求函数 $f(z) = z^n$ 和 $g(z) = z^{-n}$ ($z \neq 0$) 的导数.

解 (1) $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (z + \Delta z)^{n-1-k} z^k = nz^{n-1}$.

(2) $g'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^{-n} - z^{-n}}{\Delta z} = -\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{z^n(z + \Delta z)^n} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = -\frac{1}{z^{2n}} f'(z) = -nz^{-n-1}$. □

练习 2.1.3 证明常值函数导数为零: $c' = 0$.

例 2.1.4 求 e^z , $\sin z$ 和 $\cos z$ 的导数.

解 $(e^z)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = e^z \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z} = e^z \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta z)^{n-1}}{n!} = e^z$.

$$\begin{aligned} (\sin z)' &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sin(z + \Delta z) - \sin z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2 \cos(z + \frac{\Delta z}{2}) \sin \frac{\Delta z}{2}}{\Delta z} \\ &= \cos z \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta z}{\Delta z} = \cos z \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\Delta z)^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \cos z. \end{aligned}$$

同理 $(\cos z)' = -\sin z$. □

例 2.1.5 复中值定理不成立: $e^{2\pi i} - e^{0i} \neq ie^{i\xi}(2\pi - 0)$.

测试 2.1.6 求极限 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}$.

练习 2.1.7 证明 $e^z - 1 \sim \ln(1 + z) \sim z$ ($z \rightarrow 0$).

证 由导数的定义得

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^0}{z - 0} = (e^z)' \Big|_{z=0} = 1 \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + z)}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + z) - \ln(1 + 0)}{z - 0} = [\ln(1 + z)]' \Big|_{z=0} = 1.\end{aligned}$$

□

练习 2.1.8 利用上一练习求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$.

解 由 $(1 + \frac{z}{n})^n = e^{n \ln(1 + \frac{z}{n})}$ 及 $\ln(1 + z) \sim z$ ($z \rightarrow 0$) 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + \frac{z}{n})} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{z}{n}} = e^z.$$

□

命题 2.1.9 在 z_0 处可导的函数必在 z_0 处连续.

证 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) + f(z_0)$
 $= f'(z_0) \cdot 0 + f(z_0) = f(z_0).$

□

命题 2.1.10 可导函数的四则运算 (分母不为零) 和复合还可导.

$$(1) (f \pm g)' = f' \pm g', (fg)' = f'g + fg', (f/g)' = (f'g - g'f)/g^2.$$

$$(2) [f(g(z))]' = f'(g(z))g'(z).$$

链式法则: $\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{d\omega} \frac{d\omega}{dz}$

证 证明同实的情形一样.

$$(2) \text{ 记 } \varphi(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(g(z))}{\zeta - g(z)} - f'(g(z)), & \zeta \neq g(z), \\ 0, & \zeta = g(z). \end{cases} \text{ 则 } \varphi \text{ 在 } g(z) \text{ 处连续, } \varphi(g(z)) = 0, \text{ 且}$$

$$f(\zeta) - f(g(z)) = [\zeta - g(z)][f'(g(z)) + \varphi(\zeta)].$$

由导数的定义

$$\begin{aligned}[f(g(z))]' &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(g(z + \Delta z)) - f(g(z))}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} [f'(g(z)) + \varphi(g(z + \Delta z))] \\ &= g'(z)[f'(g(z)) + \varphi(g(z))] = g'(z)f'(g(z)).\end{aligned}$$

- 若直接用 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(g(z + \Delta z)) - f(g(z))}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(g(z + \Delta z)) - f(g(z))}{g(z + \Delta z) - g(z)} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} = f'(g(z))g'(z)$, 就得面对 $g(z + \Delta z) - g(z) = 0$ 的逻辑漏洞.

(1) 由极限的四则运算性质易得 $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

$$\begin{aligned}(fg)'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z)g(z + \Delta z) - f(z)g(z)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z)[g(z + \Delta z) - g(z)] + g(z)[f(z + \Delta z) - f(z)]}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z + \Delta z) \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} + g(z) \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{[f(z + \Delta z) - f(z)]}{\Delta z} \\&= f(z)g'(z) + g(z)f'(z).\end{aligned}$$

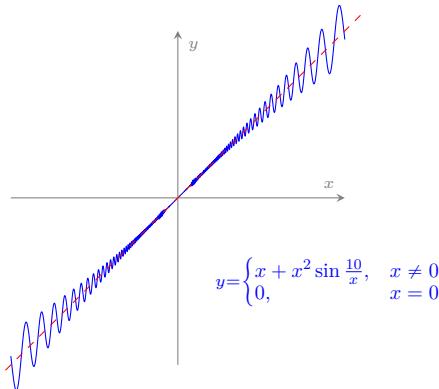
当 $g(z) \neq 0$ 时, 运用乘法求导和复合求导公式可得

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(z) = f'(z) \frac{1}{g(z)} + f(z) \left(\frac{1}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)}{g(z)} - \frac{f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \quad \square$$

测试 2.1.11 已知 $f'(0)$ 存在, 则 $\left.\frac{df(z^2)}{dz}\right|_{z=0} = \underline{\hspace{2cm}}$

2.1.2 解析函数

- 仅凭在 z_0 处的导数 $f'(z_0)$ 不足以推断 z_0 附近的信息.



$y'(0) = 1$, 但 $y(x)$ 在 $x = 0$ 附近不单调

定义 2.1.12 (解析, 奇点 analytic, singularity) 若 f 在某个 $U_r(z_0)$ 上可导, 则称 f 在 z_0 处解析. 若 f 在非空开集 D 内处处解析, 则称 f 在 D 上解析, 记作 $f \in H(D)$. 不解析的点称为奇点.

- f 在 z_0 解析 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 可导.
- f 在非空开集 D 上解析 $\Leftrightarrow f$ 在非空开集 D 上可导.

命题 2.1.13 (1) 解析函数的四则运算还解析 (分母不为零).

(2) 解析函数的复合还解析.

证 从可导的性质可知结论成立. \square

例 2.1.14 复多项式在 \mathbb{C} 上解析, 复有理函数在定义域 (即分母不为零处) 上解析.

测试 2.1.15 函数 $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ 的奇点集是什么?

命题 2.1.16 (反函数定理) 设 f 在非空开集 D 上可导且是单射, 则 $f(D)$ 是开集, $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ 也可导且 $(f^{-1})'(z) = 1/f'(f^{-1}(z))$, $\forall z \in f(D)$.

证 在命题条件下, 可以证明 f^{-1} 也连续 (见 [1] 4.4 节).

$$(f^{-1})'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(z + \Delta z) - f^{-1}(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(z + \Delta z) - f^{-1}(z)}{f(f^{-1}(z + \Delta z)) - f(f^{-1}(z))}.$$

记 $\Delta\zeta = f^{-1}(z + \Delta z) - f^{-1}(z)$, 因为 f^{-1} 连续, 故当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时 $\Delta\zeta \rightarrow 0$, 所以

$$(f^{-1})'(z) = \lim_{\Delta\zeta \rightarrow 0} \frac{\Delta\zeta}{f(f^{-1}(z) + \Delta\zeta) - f(f^{-1}(z))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}. \quad \square$$

- 证明的关键是要说明 f^{-1} 可导. 当 f 和 f^{-1} 的可导性都得到确认时, 反函数导数公式可由复合求导推出: 在 $z = f(f^{-1}(z))$ 两边求导得 $1 = f'(f^{-1}(z))(f^{-1})'(z) \Rightarrow (f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$.

定理 2.1.17 (幂级数的解析性) 幂级数在收敛圆内可逐项求导且求导前后收敛圆相同:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}, \quad |z - z_0| < R.$$

证 见本章附录. \square

练习 2.1.18 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ 的和.

解 收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = 1$. 当 $|z| < 1$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{n+1})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \right)' = \left(\frac{z}{1-z} \right)' = \frac{1}{(z-1)^2}. \quad \square$$

例 2.1.19 $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$; $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

证 $(e^z)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z$.

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' = \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2} = -\sin z.$$

同理 $(\sin z)' = \cos z$.

由反函数定理, $\ln z$ 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上可导, 且 $(\ln z)' = \frac{1}{e^{\ln z}} = \frac{1}{z}$. \square

- 所有三角恒等式仍成立这一事实从幂级数的角度理解就很自然.

练习 2.1.20 证明 $(\tan z)' = \sec^2 z$, $(\sinh z)' = \cosh z$, $(\cosh z)' = \sinh z$.

定义 2.1.21 (区域, 闭区域, 单连通域 domain, closed domain, simply connected domain) 若非空开集 D 中任意两点都可用 D 中折线连接, 则称 D 是**区域**. 将 D 的闭包 $\bar{D} = D \cup \partial D$ 称为**闭区域**. 若区域 D 中任意闭曲线能收缩为一点, 则称 D 为**单连通域**, 否则称 D 为**多连通域**.

- 区域是开区间的推广: 开区间上导数为零的函数是常数.

例 2.1.22 $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - z_0| < 2\}$ 是区域, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ 或 } |z| > 2\}$ 不是区域.



定义 2.1.23 设 g 是 (a, b) 上的函数, 若存在包含 (a, b) 的区域 D 上的解析函数 f , 使得 $f|_{(a,b)} = g$, 则称 f 是 g 的**解析延拓**.

- 在指定区域上的解析延拓若存在则是唯一的 (见推论 2.2.29).

例 2.1.24 e^z , $\sin z$ 和 $\cos z$ 分别是 e^x , $\sin x$ 和 $\cos x$ 在 \mathbb{C} 上的解析延拓.

- 称对数函数、幂函数和反三角函数为基本初等多值函数.

命题 2.1.25 设 Φ 是区域 D 上的基本初等多值函数, 在 D 的每点局部有分支. 则(1) Φ 的每个分支都是解析的 (2) Φ 在 D 的每个单连通子域上有解析分支.

例 2.1.26 $\ln z$ 和 $\log z$ 分别是 $\text{Ln } z$ 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 和 $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ 上的解析分支.

- $\ln z$ 是 $\ln x$ 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上的解析延拓, 故 $\ln(1+z)$ 在 $|z| < 1$ 上的展开式亦可由唯一性从 $\ln(1+x)$ 在 $(-1, 1)$ 上的展开式得到.

命题 2.1.27 若多值函数 Φ 是解析函数 f 的“反函数”, 即 $\forall z \in D, \Phi(z) \subset f^{-1}(z)$ (等价地 $f(\Phi(z)) = z$), 则对 Φ 的每个分支 φ 成立 $\varphi'(z) = \frac{1}{f'(\varphi(z))}$.

证 这里我们先使用一些后面 §2.3 的概念, 初次阅读可跳过此证明. 显然 φ 是单射. 记 $\varphi(z_0) = \omega_0$, 则 $f(\omega_0) = z_0$. 当 $f'(\omega_0) \neq 0$ 时由经典反函数定理知 φ 在 z_0 处解析. 设 $f'(\omega_0) = 0$, 则 ω_0 是 f' 的孤立零点, 从而存在 $\rho > 0$ 使得 f' 在 $\check{U}_\rho(\omega_0)$ 中无零点. 则 φ 在 $\varphi^{-1}(\check{U}_\rho(\omega_0)) = \varphi^{-1}(U_\rho(\omega_0)) \setminus \{z_0\}$ 上解析, 由于 $\varphi^{-1}(U_\rho(\omega_0))$ 是开集, φ 的连续性表明 z_0 是 φ 的可去间断点, 从而 φ 在 z_0 处解析. 由 z_0 的任意性可知 φ 处处解析.

对等式 $f(\varphi(z)) = z$ 求导得 $f'(\varphi(z))\varphi'(z) = 1$. □

- 有稍强些的结论: 设 f 是区域 D 上连续函数, 若有区域 $G \supset f(D)$ 上非常值解析函数 g 使得 $g \circ f$ 解析, 则 f 解析.

命题 2.1.28 (1) $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; $(\log z)' = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

(2) z^μ 的分支在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上解析, 且 $(z^\mu)' = \mu z^{\mu-1}$. 当 $\mu \in \mathbb{R}$ 时, 主值 z^μ 是 x^μ ($x > 0$) 的解析延拓.

(3) $(\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus -i\mathbb{R}$. $\arctan z$ 是 $\arctan_{\mathbb{R}} x$ 到 $\mathbb{C} \setminus -i\mathbb{R}$ 上的解析延拓.

(4) $(\operatorname{arccot} z)' = -\frac{1}{1+z^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus [-i, i]$. $\operatorname{arccot} z$ 不是 $\operatorname{arccot}_{\mathbb{R}} x$ 的解析延拓.

(5) $(\arccos z)' = -e^{-\frac{1}{2}\ln(1-z^2)}$, $(\arcsin z)' = e^{-\frac{1}{2}\ln(1-z^2)}$. 二者分别是 $\arccos x$ 和 $\arcsin x$ 在 $\mathbb{C} \setminus -1\mathbb{R}$ 上的解析延拓.

(6) $e^{\frac{1}{2}\ln(1-z^2)}$ 是 $\sqrt{1-x^2}$ 在 $\mathbb{C} \setminus -1\mathbb{R}$ 上的解析延拓.

(7) $(\operatorname{arth} z)' = \frac{1}{1-z^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus -1\mathbb{R}$. $(\operatorname{arcoth} z)' = \frac{1}{1-z^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

定理 2.1.29 反余切 $\frac{1}{2i} \log \frac{z+i}{z-i} : \mathbb{C} \setminus -i\mathbb{R} \rightarrow 0 < \operatorname{Re}(z) < \pi$ 是 $\operatorname{arccot}_{\mathbb{R}} x$ 的解析延拓.

练习 2.1.30 $\arctan z = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-z}{i+z}$ 在 $\mathbb{C} \setminus -i\mathbb{R}$ 上解析, 并且 $(\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$, 容易联想到 $\arctan z \not= \frac{1}{2i} \ln \frac{z-i}{z+i}$, 问题在哪?

解 $\ln \frac{z-i}{z+i}$ 的解析域为 $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$, 因此

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \ln \frac{z-i}{z+i} + c_{\pm}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty i, \infty i),$$

其中 c_{\pm} 分别是右/左平面上的常值函数. 令 $z = x \rightarrow \pm\infty$ 得 $c_{\pm} = \pm\frac{\pi}{2}$. 故

$$\arctan z = \begin{cases} \frac{1}{2i} (\ln \frac{z-i}{z+i} + \pi i) = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-z}{i+z}, & \operatorname{Re}(z) > 0, \\ \frac{1}{2i} (\ln \frac{z-i}{z+i} - \pi i) = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-z}{i+z}, & \operatorname{Re}(z) < 0. \end{cases}$$
□

例 2.1.31 (对数求导法) 设 f_1, \dots, f_n 和 g_1, \dots, g_m 都在 z_0 处解析且在 z_0 处均不为零, 则

$$\left(\frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \right)' (z_0) = \frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \Big|_{z_0} \left(\left. \frac{f'_1}{f_1} \right|_{z_0} + \cdots + \left. \frac{f'_n}{f_n} \right|_{z_0} - \left. \frac{g'_1}{g_1} \right|_{z_0} - \cdots - \left. \frac{g'_m}{g_m} \right|_{z_0} \right).$$

证 取 $\ln z$ 在 $(\frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m})(z_0)$ 及 $f_k(z_0), g_l(z_0)$ 处的解析分支 φ , 则

$$\left(\frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \right)' (z_0) = \frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \Big|_{z_0} \left[\varphi \left(\frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \right) \right]' (z_0). \quad \square$$

2.1.3 C-R 方程

定义 2.1.32 (实变复值函数的导数) 设 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, 称 $f'(t) = \lim_{\mathbb{R} \ni \Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ 为 f 在 t 处的(实) 导数.

例 2.1.33 设 $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$, 则 f 实可导 $\Leftrightarrow u$ 和 v 实可导且 $f' = u' + iv'$.

证 $f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[u(t+\Delta t)-u(t)]+i[v(t+\Delta t)-v(t)]}{\Delta t} = u'(t) + iv'(t)$. □

定义 2.1.34 (实偏导数 real partial derivative) 设 $f(x_1, \dots, x_n)$ 是 n 元实变函数, 当固定其余变量, 将 f 视为 x_1 的一元实变函数时, 其关于 x_1 的导数称为 f 的第 1 个实偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$. 类似定义第 k 个实偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

- $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbb{R} \ni \Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$.
- 若 $f = u + iv$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} + i \frac{\partial v}{\partial x_k}$.

例 2.1.35 求实偏导数 $\frac{\partial(x^3 + ix y^2)}{\partial x}$ 和实导数 $(e^{it})'$.

$$\text{解 } (1) \frac{\partial(x^3 + ix y^2)}{\partial x} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + i \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} = 3x^2 + iy^2.$$

$$(2) (e^{it})' = (\cos t + i \sin t)' = (\cos t)' + i(\sin t)' = ie^{it}. \quad \square$$

命题 2.1.36 (复合求导) 设 $\zeta = \zeta(z)$ 可导, $z = z(\mathbf{x})$ 实可导, 则 $\frac{\partial \zeta}{\partial x_k} = \frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_k}$.

证 证明与复合求导法则的证明一样. \square

例 2.1.37 设 $f(x, y) = (x^2 + iy^3)^{1000}$. 求偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\text{解 } \text{记 } \zeta = z^{1000}, \frac{\partial f}{\partial x} = \zeta'(x^2 + iy^3) \cdot \frac{\partial(x^2 + iy^3)}{\partial x} = 2000x(x^2 + iy^3)^{999}. \quad \square$$

练习 2.1.38 用复合求导计算 $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + iy^3)^{1000}$ 和 $\frac{d}{dt}(e^{it})$.

定理 2.1.39 (导数公式) 设 f 在 z_0 处可导, 则 $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

$$\begin{aligned} \text{证 } \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) &= \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{z_0} f(x + iy) = f'(z_0) \cdot \left. \frac{\partial(x + iy)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = f'(z_0). \\ \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) &= \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{z_0} f(x + iy) = f'(z_0) \cdot \left. \frac{\partial(x + iy)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = if'(z_0). \end{aligned} \quad \square$$

推论 2.1.40 (可导的必要条件) 在 z_0 处可导的函数 f 必满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \end{cases}$$

证 由 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, $-i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ 知方程 $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$ 等价于推论中 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 的方程组. \square

推论 2.1.41 (仅用实部/虚部求导数) 设 f 在 z_0 处可导, 则 $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$.

证 在导数公式 $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ 中, 以柯西-黎曼方程 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ 替换 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 即得 $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$. 类似可得第二个等式. \square

例 2.1.42 设实值函数 f 在 z_0 处可导, 则 $f'(z_0) = 0$.

证 因为 f 的虚部 $v \equiv 0$, 故 $f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. \square

测试 2.1.43 (判断对错) f 在 z_0 处可导 $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(f)$ 和 $\operatorname{Im}(f)$ 在 z_0 处可导.

定理 2.1.44 (可导的充要条件) f 在 $z_0 \in D^\circ$ 处可导 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.

证 这是下面的定理 2.1.63 的特例, 或见本章附录另一观点下的写法. \square

推论 2.1.45 (可导的充分条件) (1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 z_0 附近存在 (2) $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 z_0 处连续 (3) $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, 则 f 在 z_0 处可导.

例 2.1.46 用可导的充分条件验证 $f(z) = e^z$ 可导且 $(e^z)' = e^z$.

解 对 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 求偏导, 得

$$f_x = f(z), f_y = e^x(-\sin y + i \cos y) = i f(z) = i f_x,$$

处处连续且满足 C-R 方程, 故 f 处处可导, 且 $f' = f_x = f$. \square

- 若 f_x 和 f_y 在 f 的定义域上连续, 则称 f 是 **实 C^1 函数**.
- 实 C^1 函数的四则运算 (分母非零处) 和复合还是实 C^1 函数.

推论 2.1.47 (实 C^1 函数可导的充要条件) 设 f 是实 C^1 函数. 则 f 在 z_0 处可导 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 处的 C-R 方程成立.

证 (\Rightarrow) 设 f 在 z_0 处可导. 由推论 2.1.40 知 f 在 z_0 处满足柯西-黎曼方程.

(\Leftarrow) 设 f 在 z_0 处满足 C-R 方程. 又 f 是实 C^1 函数, 推论 2.1.45 表明 f 在 z_0 处可导. \square

例 2.1.48 函数 $f(z) = e^{x^2+iy^2}$ 在何处可导, 在可导的点求导.

解 显然 f 是实 C^1 函数. 求偏导得 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2iyf$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xf$, 由柯西-黎曼方程 $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$ 得 $2iyf = 2ixf$, 因为 $f \neq 0$, 故前式的解为 $x = y$. 即 f 在对角线 $x = y$ 上可导, 且导数 $f'(x + ix) = 2xf(x + ix) = 2xe^{(1+i)x^2}$. \square

练习 2.1.49 设 a, b 是复常数. 函数 $f(z) = e^{ax+iby}$ 处处可导, 证明 $f(z) = e^{az}$.

例 2.1.50 设 a, b, c, d 是实常数, 问它们取何值时函数 $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 处处可导?

解 f 是实 C^1 函数, 故 f 在 \mathbb{C} 上可导当且仅当它处处满足 C-R 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + ay = dx + 2y \\ ax + 2by = -2cx - dy \end{cases}$$

两个多项式处处相等当且仅当系数相同, 即

$$a = d = 2, \quad b = -\frac{d}{2} = -1, \quad c = -\frac{a}{2} = -1.$$

故当且仅当 $a = d = 2, b = c = -1$ 时 f 处处可导. \square

测试 2.1.51 $f(z) = ax + i \sin(\pi y)$ 在 $z = 0$ 处可导, 则常数 $a =$ []

例 2.1.52 设 a, b, c, d 是复常数, 问它们取何值时函数 $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在 \mathbb{C} 上解析?

解 f 是实 C^1 函数, 故 f 在 \mathbb{C} 上可导当且仅当它处处满足 C-R 方程

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x} \Leftrightarrow (a + id)x + 2(b + i)y = 2(i - c)x + (ia - d)y.$$

两个多项式处处相等当且仅当系数相同, 所以

$$a + id = 2(i - c), \quad a + id = 2(1 - ib).$$

解此线性方程组得

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 2i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1-i \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \quad \square$$

- 可读出实解: 由 a, c 实知 c_1, c_2 实, 由 b 实解出 $c_2 = -1$; 由 d 实解出 $c_1 = 2$.

例 2.1.53 (对数求导法) 设 f_1, \dots, f_n 和 g_1, \dots, g_m 都在 z_0 处解析且在 z_0 处均不为零, 则

$$\left(\frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \right)' (z_0) = \frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \Big|_{z_0} \left(\frac{f'_1}{f_1} \Big|_{z_0} + \cdots + \frac{f'_n}{f_n} \Big|_{z_0} - \frac{g'_1}{g_1} \Big|_{z_0} - \cdots - \frac{g'_m}{g_m} \Big|_{z_0} \right).$$

证 取 $\ln z$ 在 $(\frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m})(z_0)$ 及 $f_k(z_0), g_l(z_0)$ 处的解析分支 φ , 则

$$\left(\frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \right)' (z_0) = \frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \Big|_{z_0} \left[\varphi \left(\frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \right) \right]' (z_0). \quad \square$$

练习 2.1.54 验证 $\ln(e^{i(\pi-\theta_0)}z) + i(\pi + \theta_0)$ 是 $\ln z$ 在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ e^{i\theta_0}$ 上的解析分支.

$$(1) \text{ 柯西-黎曼方程 } \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2) f \text{ 可导时 } f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

例 2.1.55 (判断下列函数在何处可导, 在可导的点求导) (1) $f(z) = \bar{z}$ (2) $f(z) = |z|^2$ (3) $\arg z$

解 (1) 由 $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$ 知 \bar{z} 的 C-R 方程处处不成立, 所以 \bar{z} 处处不可导.

(2) f 是 C^1 函数. 由 C-R 方程 $0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$ 得 $z = 0$, 故 f 仅在原点可导, $f'(0) = \bar{z}|_{z=0} = 0$.

(3) 若 $\arg z$ 在 $z_0 \neq 0$ 处可导, 则 $|z|^2 = z^2 e^{-2i \arg z}$ 也在 z_0 处可导, 与 (2) 矛盾. 故 $\arg z$ 处处不可导. \square

- 在无显式表达式处, 用 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y})$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y})$ 计算.

练习 2.1.56 (判断下列函数何处可导, 在可导的点求导) (1) $e^{\sin \bar{z}}$ (2) $f(z) = z + (z + \bar{z})^2$ (3) $|z|$

例 2.1.57 讨论函数 $\bar{z}, |z|^2$ 和 $z + (z + \bar{z})^2$ 的解析性.

解 \bar{z} 处处不可导, $|z|^2$ 仅在原点可导, $z + (z + \bar{z})^2$ 仅在虚轴上可导, 因此它们处处不解析. \square

练习 2.1.58 讨论 $f(z) = (\bar{z}^2 - 2z)^{1000}$ 的解析性.

解 显然 f 是 C^1 函数. 求偏导得 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2000\bar{z}(\bar{z}^2 - 2z)^{999}$, 由 C-R 方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 解得 $z = 0$ 或 $z = \sqrt[3]{8}$. 故 f 在 0 和 $2e^{\frac{2k\pi i}{3}}$ ($k = 0, 1, 2$) 处可导, 处处不解析. \square

例 2.1.59 设 $f(x, y)$ 是二元实变量多项式. 则 f 在 z_0 处解析 $\Leftrightarrow f$ 是 z 的多项式 $\Leftrightarrow f$ 处处解析.

证 设 $f = \sum_{k \leq m; l \leq n} a_{kl} z^k \bar{z}^l$ 在 0 处解析. 由 C-R 方程得

$$a_{kl} = \frac{1}{k!l!} \left. \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{\partial^l}{\partial \bar{z}^l} \right|_0 f = 0, \quad l \geq 1.$$

故 $f(x, y) = \sum_{k=0}^m a_{k0} z^k$ 是 z 的多项式. \square

- 勿以为由 C-R 方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 可推断“解析函数 f 只是 z 的函数, 与 \bar{z} 无关”, 因为 z 和 \bar{z} 并非独立变量, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 也并非“对 \bar{z} 求偏导”. 例如:

$$z = |z|e^{i \arg z} = |\bar{z}|e^{-i \arg \bar{z}} \text{ 怎么解读?}$$

- 后面我们可以这样解释: f 在 z_0 处与 \bar{z} 无关, 是指 f 能展开成 z 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

测试 2.1.60 例 2.1.48 中函数 $f(z) = e^{x^2+iy^2}$ 的奇点集是_____.

定义 2.1.61 设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 和 $V \subset \mathbb{C}$ 是两个非空开集, 若 $\varphi : U \rightarrow V$ 是一个双射, 且它和它的反函数 $\psi : V \rightarrow U$ 都是 C^k 的, 则称 φ 是 V 上 (每点处的) 一个 C^k 坐标.

例 2.1.62 $\varphi : (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], (r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$ 是 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上的光滑坐标, 称为极坐标. 注意这里极坐标中不能用 $(-\pi, \pi]$, 因为它不是开集, 且其反函数此时不连续.

- 当我们讨论负实轴上的点时, 可以选取极坐标的其他参数区域, 比如 $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$.

定理 2.1.63 设 $z = \varphi(s, t)$ 是 z_0 处的 C^1 坐标, 则 f 在 z_0 处可导 $\Leftrightarrow f \circ \varphi$ 在 $(s_0, t_0) = \varphi^{-1}(z_0)$ 处实可微且 φ 坐标下的 C-R 方程 $\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s}$ 在 (s_0, t_0) 处成立.

- C-R 方程可以用向量关系描述为: $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$, 即 $(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})$ 与 $(\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t})$ 复线性相关. 由于 φ 是坐标, 故后一向量非零, 从而等价于存在 $l \in \mathbb{C}$ 使得 $(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) = l(\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t})$, 当然 l 就是 $f'(z_0)$.

证 (\Rightarrow) 因为 f 在 z_0 处实可微, φ 在 (s_0, t_0) 处实可微, 故 $f \circ \varphi$ 在 (s_0, t_0) 处实可微. 由复合求导法则得 $\frac{\partial f}{\partial s} = f'(z_0) \frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial f}{\partial t} = f'(z_0) \frac{\partial z}{\partial t}$, 第一式乘以 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 就等于第二式乘以 $\frac{\partial z}{\partial s}$.

(\Leftarrow) 由于 φ 和 φ^{-1} 都是连续的, 故 $(s, t) \rightarrow (s_0, t_0) \Leftrightarrow z \rightarrow z_0$. 设 $(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) = l(\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t})$, 则

$$\begin{aligned} f(s, t) &= f(s_0, t_0) + \frac{\partial f}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + o(\sqrt{\Delta s^2 + \Delta t^2}) \\ z(s, t) &= z(s_0, t_0) + \frac{\partial z}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial z}{\partial t} \Delta t + o(\sqrt{\Delta s^2 + \Delta t^2}) \\ \Rightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{(\Delta s, \Delta t) \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + o(\sqrt{\Delta s^2 + \Delta t^2})}{\frac{\partial z}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial z}{\partial t} \Delta t + o(\sqrt{\Delta s^2 + \Delta t^2})} = \lim_{(\Delta s, \Delta t) \rightarrow 0} \frac{l + \frac{o(\sqrt{\Delta s^2 + \Delta t^2})}{\frac{\partial z}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial z}{\partial t} \Delta t}}{1 + \frac{o(\sqrt{\Delta s^2 + \Delta t^2})}{\frac{\partial z}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial z}{\partial t} \Delta t}} = l. \end{aligned}$$

最后一个等号的理由是: $\frac{\partial z}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 实线性无关 (因为 φ 是坐标), 从而存在 $c > 0$ 使得 $|\frac{\partial z}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial z}{\partial t} \Delta t| \geq c \sqrt{\Delta s^2 + \Delta t^2}$, 故 $\lim_{(\Delta s, \Delta t) \rightarrow 0} \frac{o(\sqrt{\Delta s^2 + \Delta t^2})}{\frac{\partial z}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial z}{\partial t} \Delta t} = 0$. \square

命题 2.1.64 (C-R 方程的极坐标形式) 在极坐标下, C-R 方程为 $\frac{\partial f}{\partial \theta} = ir \frac{\partial f}{\partial r}$, 可导时 $f'(z) = \frac{1}{iz} \frac{\partial f}{\partial \theta}$.

证 由 $z = re^{i\theta}$ 得 $(\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}) = e^{i\theta}(1, ir)$, C-R 方程为 $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} & ir \end{vmatrix} = 0$, 且 $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial \theta} / \frac{\partial z}{\partial \theta}$. \square

例 2.1.65 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上, $\arg z = \theta$, 故 $\frac{\partial(\arg z)}{\partial \theta} = 1$, $\frac{\partial(\arg z)}{\partial r} = 0$, C-R 方程不成立.

例 2.1.66 用 C-R 方程直接验证 $\ln z$ 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上解析.

证 在极坐标下 $\ln z = \ln r + i\theta$, $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. 求偏导得

$$\frac{\partial \ln z}{\partial \theta} = i, \quad \frac{\partial \ln z}{\partial r} = \frac{1}{r},$$

显然它是实 C^1 的, 且 C-R 方程 $\frac{\partial \ln z}{\partial \theta} = ir \frac{\partial \ln z}{\partial r}$ 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上处处成立, 故 $\ln z$ 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上解析, 且 $(\ln z)' = \frac{1}{iz} \frac{\partial \ln z}{\partial \theta} = \frac{1}{z}$. \square

例 2.1.67 讨论函数 $f(z) = 3|z|^2 + 2i \arg^3 z$ 的可导性.

解 函数在负实轴上不连续, 故不可导. 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上考虑极坐标:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 6i\theta^2, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 6r \Rightarrow \text{C-R 方程为 } 6i\theta^2 = 6ir^2,$$

故函数可导的点集为 $\{|\theta|e^{i\theta} \mid \theta \in (-\pi, \pi) \text{ 且 } \theta \neq 0\}$. \square

注 极坐标 C-R 方程的实方程组形式为 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}, \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = r \frac{\partial u}{\partial r}. \end{cases}$

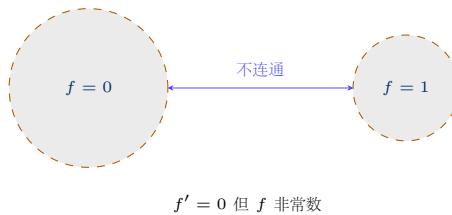
- 区域 D 上一阶偏导恒为零的实变函数是常数.

证 可以通过积分或中值定理说明, 比如: 设 $(x(t), y(t)) (t \in [0, 1])$ 是 D 中连接 P 和 Q 的折线, 则

$$f(Q) - f(P) = \int_0^1 [f(x(t), y(t))]' dt = \int_0^1 f_x x'(t) + f_y y'(t) dt = 0.$$

引理 2.1.68 若 f' 在区域 D 上等于零, 则 f 是常数.

证 因为 $f' = f_x = -if_y$, 所以 $f_x = f_y = 0$, 故 f 是常数. \square

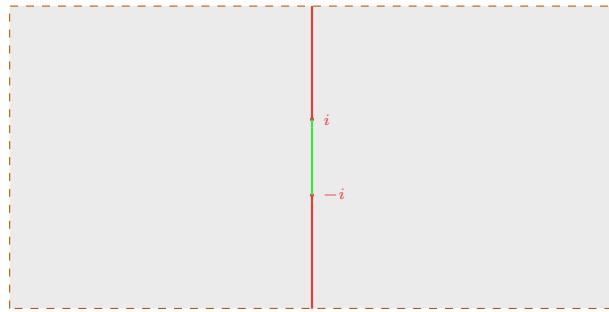


推论 2.1.69 若 f, g 在区域 D 上解析且 $f' = g'$, 则 $f = g + c$, 其中 $c \in \mathbb{C}$.

证 因为 $(f - g)' = 0$, 所以 $f - g = c$ 是常数, 故 $f = g + c$. \square

例 2.1.70 $\arctan z + \operatorname{arccot} z = \pm \frac{\pi}{2}$, 在右(左)半平面取正(负)号.

证 因为当 $\operatorname{Re}(z) \neq 0$ 时, $(\arctan z + \operatorname{arccot} z)' = 0$, 所以它在左半平面和右半平面上都是常数. \square



例 2.1.71 由例 2.1.42 知区域 D 上实值解析函数必为常数.

推论 2.1.72 (设 f, g 在区域 D 上解析) (1) 若 $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(g)$, 则 $f = g + ic$, 其中 $c \in \mathbb{R}$.

(2) 若 $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(g)$, 则 $f = g + c$, 其中 $c \in \mathbb{R}$.

证 两种情形都说明 $f' = g'$. □

练习 2.1.73 设 f 在区域 D 上解析, 若 f 的实部或虚部也解析, 证明 f 是常数.

证 记 $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$.

(1) 设 u 解析, 则由 $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(u)$ 得 $f = u + ic$ 是常数.

(2) 设 v 解析, 则由 $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(iv)$ 得 $f = iv + c$ 是常数.

上面已经用了例 2.1.71 的结论来推断 u, v 均为常数. □

例 2.1.74 已知 \mathbb{C} 上解析函数 f 的实部 $u = x^2 - x - y^2$, 求 f .

解 因为 $\frac{\partial f}{\partial x} = u_x - iu_y = 2x - 1 + 2iy$, 所以

$$f = \int (2x - 1 + 2iy) dx = x^2 - x + 2ixy + \varphi(y).$$

由 $\varphi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} - 2ix = -2y - i(\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x})$ 得 $\varphi(y) = -y^2 - iy + c$. 故

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy - x - iy + c = z^2 - z + c.$$

观察 f 的实部可知 c 是纯虚数. □

- 也可由 $f' = 2z - 1$ 得 $f = z^2 - z + c$.

例 2.1.75 设 φ 是一元实可导实值函数. 若区域 D 上的解析函数 $f = u + iv$ 的实部和虚部满足 $v = \varphi(u)$, 或 $u = \varphi(v)$, 则 f 是常数.

证 1° 设 $v = \varphi(u)$ 在 D 上成立. 由 $f' = f_x = -if_y$ 得

$$f' = u_x[1 + i\varphi'(u)] = -iu_y[1 + i\varphi'(u)].$$

因此 $f'/[1 + i\varphi'(u)]$ 既是实数, 又是纯虚数, 它只能是零, 从而 $f' = 0$. 故 f 在 D 上是常数.

设 $u = \varphi(v)$ 在 D 上成立. 则 $if = -v + iu$ 在 D 上解析, 且其虚部 $u = \varphi(-(-v))$ 是其实部 $-v$ 的函数, 由上一段的证明知 if 是常数, 从而 $f = -i \cdot if$ 也是常数.

2° 由 $0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = [1 + i\varphi'(u)]\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ 得 $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$, 故 u 解析, 从而 f 是常数 (练习 2.1.73). □

练习 2.1.76 设 f 是区域 D 上解析函数. 证明在以下两种情形下 f 都是常数.

- f 是径向函数, 即存在函数 φ 使得 $f(z) = \varphi(|z|)$, $\forall z \in D \setminus \{0\}$.
- f 是方向函数, 即存在函数 ρ 使得 $f(z) = \rho(\arg z)$, $\forall z \in D \setminus \{0\}$.

- 区域 D 上非常值解析函数 f 是“开映射”, 即开集在映射 f 下的像总是开集. 在上面的例子中, 整个区域 D 被映射到一条曲线上, 所以像不可能是开集, 因此 f 必然是常数.

练习 2.1.77 设 f 在区域 D 上解析.

- (1) 若 \bar{f} 也在 D 上解析, 则 f 必为常数;
- (2) 若 $|f|$ 是常数, 则 f 必为常数;
- (3) 若 $\arg f$ 是常数, 则 f 必为常数.

提示 (1) $\operatorname{Im}(f + \bar{f}) = 0, \operatorname{Re}(f - \bar{f}) = 0$.

(2) 若 $|f| = 0$, 则 $f = 0$; 否则 $\bar{f} = \frac{|f|^2}{f}$ 也在 D 上解析.

(3) $e^{-i\arg f} f$ 是实值解析函数. \square

2.2 解析圆环

2.2.1 泰勒展开

定理 2.2.1 f 在圆盘 $U_\rho(z_0)$ 上解析 $\Leftrightarrow f$ 能在 $U_\rho(z_0)$ 上展开为幂级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad z \in U_\rho(z_0).$$

- 我们将在第三章利用柯西积分理论给出定理的证明.
- 收敛圆内可逐项求导, 故解析函数任意阶可导.
- 展开式是唯一的: 在 z_0 处逐项求导得 $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
- 实解析函数: 实幂级数在收敛区间内的和函数.
- ρ 最大能取到 f 的奇点离中心 z_0 的最近距离.

例 2.2.2 $\frac{1}{1-z}$ 在 $U_1(0) : |z| < 1$ 上能展开为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 在 $U_2(3) : |z - 3| < 2$ 上能展开为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - 3)^n$.

测试 2.2.3 $\tan z$ 在 $U_\rho(-\frac{3\pi}{4})$ 上能展开为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z + \frac{3\pi}{4})^n$, 求 ρ 的最大值.

例 2.2.4 展开式 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 可通过解析性和计算导数得到.

解 以 $f(z) = e^z$ 为例: $f^{(n)} = f \Rightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$, 又 f 在 $U_{+\infty}(0)$ 上解析, 故 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, z \in U_{+\infty}(0) = \mathbb{C}$. \square

例 2.2.5 设 $m \in \mathbb{N}^*$, 则 $\frac{1}{(1+z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} z^n, |z| < 1$.

证 因为 $f(z) = \frac{1}{(1+z)^m}$ 在 $|z| < 1$ 上解析, 故可在 $|z| < 1$ 上展开为麦克劳林级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, |z| < 1$ (*). 求导得

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} (1+z)^{-m-n} \Big|_{z=0} = (-1)^n \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}.$$

代入 (*) 式即得结论. \square

- 这里的记号 $\binom{-m}{n}$ 表示 $\frac{-m(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$.
- 等价形式: $\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} z^n, |z| < 1$.

例 2.2.6 $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, |z| < 1$.

证 $|z| < 1$ 时, $[\ln(1-z)]' = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. 由逐项求导法则可得

$$\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1,$$

这说明 $\ln(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} + C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} + C$. 令 $z=0$ 解得 $C=0$, 从而 $\ln(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}, |z| < 1$. 这可写成等价的形式

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, |z| < 1. \quad \square$$

例 2.2.7 (对数求导法) 设 f_1, \dots, f_n 和 g_1, \dots, g_m 都在 z_0 处可导且在 z_0 处均不为零, 则

$$\left(\frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \right)' (z_0) = \frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \Big|_{z_0} \left(\frac{f'_1}{f_1} \Big|_{z_0} + \cdots + \frac{f'_n}{f_n} \Big|_{z_0} - \frac{g'_1}{g_1} \Big|_{z_0} - \cdots - \frac{g'_m}{g_m} \Big|_{z_0} \right).$$

证 取常数 α_k 和 β_j 使得 $\alpha_k f_k(z_0), \beta_j g_j(z_0), \frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k f_k}{\prod_{j=1}^m \beta_j g_j}(z_0) \notin (-\infty, 0]$. 则

$$\frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k f_k}{\prod_{j=1}^m \beta_j g_j} = \frac{\prod_{k=1}^n e^{\ln(\alpha_k f_k)}}{\prod_{j=1}^m e^{\ln(\beta_j g_j)}} = e^{\sum_{k=1}^n \ln(\alpha_k f_k) - \sum_{j=1}^m \ln(\beta_j g_j)}$$

在 z_0 附近成立, 两边求导得

$$\frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k}{\prod_{j=1}^m \beta_j} \cdot \left(\frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \right)' (z_0) = \frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k}{\prod_{j=1}^m \beta_j} \cdot \frac{f_1 \cdots f_n}{g_1 \cdots g_m} \Big|_{z_0} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{f'_k}{f_k} \Big|_{z_0} - \sum_{k=1}^m \frac{g'_k}{g_k} \Big|_{z_0} \right).$$

约去两边的非零常数 $\frac{\prod_{k=1}^n \alpha_k}{\prod_{j=1}^m \beta_j}$ 即得结论. \square

练习 2.2.8 设 $f(z) = \frac{e^{(z+\cos^2 z)} \cos^{100} z}{(z+1)^5 (2z+1)^9 (1-\sin z)^{10}}$, 求 $f'(0)$.

解 由对数求导法, 在 $f(z) \neq 0$ 处有

$$\begin{aligned} f'(z) &= f(z) \left[(z + \cos^2 z)' + 100 \frac{-\sin z}{\cos z} - 5 \frac{(z+1)'}{z+1} - 9 \frac{(2z+1)'}{2z+1} - 10 \frac{(1-\sin z)'}{1-\sin z} \right] \\ &= f(z) \left(1 - \sin 2z - 100 \tan z - \frac{5}{z+1} - \frac{18}{2z+1} + \frac{10 \cos z}{1-\sin z} \right), \end{aligned}$$

故 $f'(0) = e(1 - 5 - 18 + 10) = -12e$. \square

$\ln z$ 在 $z_0 \notin (-\infty, 0]$ 处的展开式

- 当 $\operatorname{Re}(z_0) \geq 0$ 时, $\ln z$ 在 $|z - z_0| < |z_0|$ 上解析, 故

$$\ln z = \ln z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nz_0^n} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < |z_0|.$$

- 当 $\operatorname{Re}(z_0) \leq 0$ 时, $\ln z$ 在圆盘 $|z - z_0| < |\operatorname{Im}(z_0)|$ 上解析, 故

$$\ln z = \ln z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nz_0^n} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < |\operatorname{Im}(z_0)|.$$

当 $\operatorname{Re}(z_0) < 0$ 时, 右侧级数的收敛半径 $R = |z_0| > |\operatorname{Im}(z_0)|$.

- $\ln z$ 的展开式告诉我们展开式 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 成立的最大圆盘半径 ρ 和级数的收敛半径 R 并非一回事.

命题 2.2.9 设 f 在 z_0 处解析, R 是 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ 的收敛半径. 则使等式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r$$

成立的最大 r 等于 f 的奇点到 z_0 的最近距离 ρ , 且 $\rho \leq R$.

证 设 r 使等式成立, 则 f 在 $|z - z_0| < r$ 上解析, 因此 f 的奇点均位于 $|z - z_0| \geq r$ 中, 故 $\rho \geq r$.

反之, 因为 f 在 $|z - z_0| < \rho$ 上解析, 由定理 2.2.1 知等式在 $|z - z_0| < \rho$ 上成立, 故 $r \geq \rho$.

在展开式成立处, 右侧的级数必须收敛, 故 $R \geq r$. \square

下面是一个更简单的例子.

例 2.2.10 函数 $f(z) = \begin{cases} e^z, & |z| < 1 \\ 0, & |z| \geq 1 \end{cases}$ 的麦克劳林级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, 其收敛半径 $R = +\infty$, 但等式 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 仅在 $|z| < 1$ 时成立, 此时 $\rho = 1 < R$.

引理 2.2.11 任何有理函数 f 均可唯一分解为

$$f(z) = T(z) + \frac{a}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{b}{z - z_0} + \cdots + \frac{c}{(z - z_k)^m} + \cdots + \frac{d}{z - z_k}$$

的形式, 其中 T 是多项式, a, \dots, d 均为复常数, 可用待定系数法求出.

证 设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 是多项式 P 和 Q 的商, 且 P, Q 无公共零点. 设 Q 的全部零点为 z_0, \dots, z_k , 则

$$Q(z) = (z - z_0)^{n_0} \cdots (z - z_k)^{n_k}.$$

将 $P(z)$ 在 z_0 处做泰勒展开得 $P(z) = \sum_{j=0}^r c_j (z - z_0)^j$, 因此

$$f(z) = \frac{\sum_{j=n_0}^r c_j (z - z_0)^{j-n_0}}{(z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_k)^{n_k}} + \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{c_j}{(z - z_0)^{n_0-j} \cdots (z - z_k)^{n_k}}$$

对分母的零点个数归纳, 可知上式右边第一项可如引理所述分解, 问题归结为 $\frac{1}{(z-z_0)^{n_0}\cdots(z-z_k)^{n_k}}$ 的分解. 注意到

$$\frac{1}{(z-z_0)^{n_0}\cdots(z-z_k)^{n_k}} = \frac{1}{z_0-z_k} \left[\frac{1}{(z-z_0)^{n_0}\cdots(z-z_k)^{n_k-1}} - \frac{1}{(z-z_0)^{n_0-1}\cdots(z-z_k)^{n_k}} \right]$$

右侧两个分母次数都比左侧降了 1, 对分母次数归纳, 可知结论成立.

分解的唯一性可从留数公式 (参考定义 2.4.1) 确认: 例如 $a = \text{Res}_{z_0}[(z-z_0)^{n-1}f(z)], \dots, d = \text{Res}_{z_k}(f)$. 唯一性也可以从纯代数的角度证明. \square

例 2.2.12 (分母有重根) 求 $\frac{z}{(1-z)^2(z+3)}$ 在 $z_0 = -2$ 处的幂级数展开.

解 奇点为 1, -3, 故展开式的成立半径 $r = 1$. 当 $|z+2| < 1$ 时

$$\begin{aligned} \frac{z}{(1-z)^2(z+3)} &= \frac{1}{4} \frac{(z+3)-3(1-z)}{(1-z)^2(z+3)} = \frac{1}{4} \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{3}{16} \frac{1}{z+3} - \frac{3}{16} \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-z} \right)' - \frac{3}{16} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+2)^n - \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^n} \\ &\quad \text{对 } \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^{n+1}} \text{ 逐项求导} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n-5 + (-1)^{n+1} 3^{n+3}}{16 \cdot 3^{n+2}} (z+2)^n. \end{aligned}$$

\square

2.2.2 洛朗展开

定理 2.2.13 (洛朗 Laurent) f 在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 上解析 $\Leftrightarrow f$ 可展开为 (唯一的) 洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad R_1 < |z-z_0| < R_2.$$

- 定理的证明将在第三章给出.
- f 在 $0 < |z-z_0| < R$ 上的展开称为 z_0 处的展开.

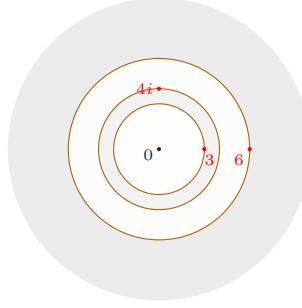
例 2.2.14 将 $f(z) = z \sin \frac{1}{z-2}$ 在 $z_0 = 2$ 处展开为洛朗级数.

解 f 在 $0 < |z-2| < +\infty$ 上解析. 当 $z \neq 2$ 时

$$\begin{aligned} z \sin \frac{1}{z-2} &= (z-2) \sin \frac{1}{z-2} + 2 \sin \frac{1}{z-2} \\ &= (z-2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-2)^{-2n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-2)^{-2n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-2)^{-2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)!} (z-2)^{-2n-1}. \end{aligned}$$

\square

例 2.2.15 $\frac{z-5}{(z-3)(z-4i)(z-6)}$ 可在 $|z| < 3, 3 < |z| < 4, 4 < |z| < 6$ 及 $|z| > 6$ 上展开.



函数 $\frac{z-5}{(z-3)(z-4i)(z-6)}$ 以 0 为中心能展开的四个最大圆环

测试 2.2.16 找出 $\frac{z-5}{(z-3)(z-4i)(z-6)}$ 以 $z_0 = 3$ 为中心能展开的最大圆环.

解 奇点 $3, 4i, 6$ 到 z_0 的距离分别为 $0, 5, 3$, 故三个最大圆环为

$$0 < |z - 3| < 3, \quad 3 < |z - 3| < 5, \quad 5 < |z - 3| < +\infty. \quad \square$$

定理 2.2.17 (逐项求导) 洛朗级数在收敛圆环内可逐项求导且求导前后收敛圆环相同:

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \right]' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n(z - z_0)^{n-1}, \quad R_1 < |z - z_0| < R_2.$$

证 显然求导前后的级数收敛圆环相同. 幂级数部分 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 的收敛圆盘为 $|z - z_0| < R_2$, 它可逐项求导:

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n(z - z_0)^{n-1}, \quad |z - z_0| < R_2. \quad (2.2.1)$$

负幂项部分 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n$ 的收敛圆环为 $|z - z_0| > R_1$. 记 $S(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \zeta^{-n}$, 则它是 ζ 的幂级数, 收敛圆盘为 $|\zeta| < \frac{1}{R_1}$. 因为 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n = S(\frac{1}{z-z_0})$, 应用复合函数求导公式和幂级数 S 的逐项求导得:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n \right]' &= -\frac{1}{(z - z_0)^2} S' \left(\frac{1}{z - z_0} \right) = -\frac{1}{(z - z_0)^2} \sum_{n=-\infty}^{-1} (-n) c_n (z - z_0)^{n+1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} n c_n (z - z_0)^{n-1}, \quad |z - z_0| > R_1. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

结合 (2.2.1) 和 (2.2.2) 即得定理中的逐项求导公式. \square

练习 2.2.18 (分母有重根的洛朗展开) 将 $\frac{1}{(z-2)^2(z-5)}$ 在 $|z - 3| > 2$ 上展开为洛朗级数.

解 奇点为 $2, 5$, 故函数确可在 $2 < |z - 3| < +\infty$ 上展开为洛朗级数.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-2)^2(z-5)} &= \frac{1}{9} \frac{1}{z-5} - \frac{1}{9} \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(z-2)^2} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-3)^{n+1}} - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}} + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}} \right]' \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 6n - 1}{(z-3)^{2n+1}} + \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n - 3n - 1}{(z-3)^{2n+2}}. \end{aligned}$$

对 $\frac{1}{z-2}$ 的展开式逐项求导

\square

2.2.3 m 级零点

定义 2.2.19 (m 级零点 zero of order m) 令 m 为 f 在解析点 z_0 处的泰勒展开最低次项次数, 即

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots, \quad c_m \neq 0$$

若 $0 < m < +\infty$, 则称 z_0 是 f 的 m 级零点 (或 m 阶零点, m 重零点).

- m 级零点是 f 的零点: $f(z_0) = 0$.

例 2.2.20 0 是 $z - \sin z$ 的 3 级零点: $z - \sin z = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots, \quad |z| < +\infty$.

定理 2.2.21 设 f 在 z_0 处解析, $m \in \mathbb{N}^*$. 则以下各条等价:

- (1) z_0 是 f 的 m 级零点.
- (2) $f(z) = (z - z_0)^m \phi(z), \forall z \in U_R(z_0)$, ϕ 解析且 $\phi(z_0) \neq 0$.
- (3) $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

证 (1) \Rightarrow (2) 将 f 在某个圆盘 $U_R(z_0)$ 上展开为

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots, \quad c_m \neq 0 \text{ 且 } m \geq 1.$$

令 $\phi(z) = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \cdots$, 则 ϕ 在 $U_R(z_0)$ 上解析, 且 $\phi(z_0) = c_m \neq 0$. 显然 $\forall z \in U_R(z_0), f(z) = (z - z_0)^m \phi(z)$.

(2) \Rightarrow (3) 由高阶导数的莱布尼茨公式

$$f^{(n)}(z_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(z - z_0)^m]^{(k)} \Big|_{z=z_0} \phi^{(n-k)}(z_0)$$

知, 当 $n \leq m-1$ 时 $f^{(n)}(z_0) = 0$, 且 $f^{(m)}(z_0) = m! \phi(z_0) \neq 0$.

(3) \Rightarrow (1) 将 f 在某个 $U_R(z_0)$ 上展开:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad z \in U_R(z_0).$$

由于展开式的系数 $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, 故 $c_0 = \cdots = c_{m-1} = 0$ 且 $c_m \neq 0$, 即 z_0 是 f 的 m 级零点. \square

例 2.2.22 (1) 多项式的 m 级零点就是 m 重根 (2) 0 是 $\ln(1+z) - z$ 的 2 级零点.

解 (1) 设非零多项式 $P(z)$ 的全部零点为 z_0, z_1, \dots, z_k , 相应的重数为 m, n_1, \dots, n_k , 则

$$P(z) = c(z - z_0)^m (z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_k)^{n_k},$$

其中 $c \neq 0$ 是 P 的首项系数. 记 $\phi(z) = c(z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_k)^{n_k}$, 则 ϕ 解析且 $\phi(z_0) \neq 0$, 故由 $P(z) = (z - z_0)^m \phi(z)$ 知 z_0 是 P 的 m 级零点.

(2) 记 $f(z) = \ln(1+z) - z$, 则 $f(0) = 0, f'(0) = (\frac{1}{1+z} - 1) \Big|_{z=0} = 0, f''(0) = -\frac{1}{(1+z^2)^2} \Big|_{z=0} = -1 \neq 0$, 故 0 是 f 的 2 级零点. \square

测试 2.2.23 ($n \geq 1$) 设 $a \neq 0$, z_0 是多项式 $z^n - a$ 的根, 它是几级零点?

解 因为 n 次根 $\sqrt[n]{a}$ 是 n 个互异复数, 故它们都是 $z^n - a$ 的单根, 从而是 1 级零点. 也可用导数判别: $(z^n - a)'|_{z_0} = nz_0^{n-1} \neq 0$ (因为 $z_0^n = a \neq 0$). \square

推论 2.2.24 若 z_0 分别是 f 和 g 的 m, n 级零点, 则它是 fg 的 $m+n$ 级零点.

证 由条件知, 存在 $R > 0$ 及解析函数 ϕ_1, ϕ_2 使得 $\phi_1(z_0) \neq 0, \phi_2(z_0) \neq 0$, 且 f 和 g 在 $U_R(z_0)$ 上有分解

$$f(z) = (z - z_0)^m \phi_1(z), \quad g(z) = (z - z_0)^n \phi_2(z).$$

因此等式 $(fg)(z) = (z - z_0)^{m+n} \phi_1(z) \phi_2(z)$ 在 $U_R(z_0)$ 上成立, 且 $\phi_1(z) \phi_2(z)$ 解析, $\phi_1(z_0) \phi_2(z_0) \neq 0$, 故 z_0 是 fg 的 $m+n$ 级零点. \square

例 2.2.25 0 是 $f(z) = (z - \sin z)^{50} [\ln(1+z) - z]^{100}$ 的 350 级零点.

解 0 是 $z - \sin z$ 的 3 级零点 (例 2.2.20), 是 $\ln(1+z) - z$ 的 2 级零点 (例 2.2.22), 由推论 2.2.24 知 0 是 f 的 350 级零点. \square

- 若 f 在 z_0 处解析但 $f(z_0) \neq 0$, 暂称 z_0 为“0 级零点”.
- 若 $\forall n \in \mathbb{N}$ 都有 $f^{(n)}(z_0) = 0$, 暂称 z_0 为“ ∞ 级零点”.
- f 在“ ∞ 级零点” z_0 附近恒为零.

证 因为 f 在 z_0 处解析, 存在 $R > 0$ 使得

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad z \in U_R(z_0).$$

因为 $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0$, 故上式右侧泰勒级数是 0, 从而 $f(z) = 0, z \in U_R(z_0)$. \square

- 推论 2.2.24 对 0, ∞ 级“零点”亦成立.

命题 2.2.26 (1) m 级零点 z_0 是孤立的: $\exists R > 0$ 使得 f 在 $U_R(z_0)$ 上只有一个零点.

(2) 解析函数的孤立零点一定是有限级零点.

证 (1) 设 $f(z) = (z - z_0)^m \phi(z), z \in U_R(z_0)$, 其中 ϕ 解析且 $\phi(z) \neq 0$. 因此当 $z \in \mathring{U}_R(z_0)$ 时 $f(z) \neq 0$, 故 f 在 $U_R(z_0)$ 中只有 z_0 这一个零点.

(2) 设 z_0 是 f 的孤立零点. 若 z_0 是“ ∞ 级零点”, 则它在某个 $U_r(z_0)$ 上恒为零, 这与 z_0 是孤立零点矛盾. \square

例 2.2.27 函数 $f(z) = \begin{cases} z^2 \sin \frac{1}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ 的零点 0 不是孤立的.

推论 2.2.28 (唯一性定理) 若 f, g 在区域 D 上解析, 且有互异点列 $\{z_n\}$ 收敛于 $z_0 \in D$ 使得 $f(z_n) = g(z_n)$, 则 $f = g$.

证 因为 z_0 是解析函数 $f - g$ 的非孤立零点, 故它是“ ∞ 级零点”, 从而 $f - g$ 在 z_0 附近恒为零. 进一步可证 $f - g$ 在 D 上恒为零. \square

推论 2.2.29 若区域 D 上的解析函数 f, g 在 D 中某条曲线段上相等, 则 $f = g$.

例 2.2.30 用唯一性定理解释等式 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, z \in \mathbb{C}$.

解 函数 $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$ 和 $g(z) = 1$ 均在区域 \mathbb{C} 上解析, 且二者在 \mathbb{C} 中曲线段 $y = 0$ (实轴) 上相等, 由唯一性定理知二者处处相等. \square

- 唯一性定理也对复变量基本初等函数的麦克劳林展开式与实变量的麦克劳林展开式系数总是相同的这一现象做出了解释.

练习 2.2.31 设 f 在 $|z| < 2$ 上解析. 若 $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(\frac{1}{2^n}) = 0$, 试求 $f(0)$ 和 $f(i)$.

2.2.4 m 级极点

定义 2.2.32 (m 级极点 pole of order m) 若 f 在 z_0 处的洛朗展开最低次项次数 $-\infty < -m < 0$:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots, c_{-m} \neq 0 \text{ 且 } m > 0$$

则称 z_0 是 f 的 m 级极点 (或 m 阶极点, m 重极点).

例 2.2.33 2 是 $\frac{e^z}{(z-2)^2}$ 的 2 级极点: $\frac{e^z}{(z-2)^2} = \frac{e^2}{(z-2)^2} + \frac{e^2}{z-2} + \frac{e^2}{2!} + \cdots, 0 < |z-2| < +\infty$.

定理 2.2.34 设 f 在 $\mathring{U}_R(z_0)$ 上解析. 则以下各条等价:

- (1) z_0 是 f 的 m 级极点.
- (2) $\exists z_0$ 处的解析函数 ϕ 使得 $\phi(z_0) \neq 0$ 且 $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}, z \in \mathring{U}_R(z_0)$.
- (3) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = a \in \mathbb{C}^*$.

证 (1) \Rightarrow (2) 将 f 在去心圆盘 $\mathring{U}_R(z_0)$ 上展开:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots, c_{-m} \neq 0 \text{ 且 } m > 0.$$

令 $\phi(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^{n+m} + \cdots$, 则 $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$ 在 $\mathring{U}_R(z_0)$ 上成立, 且 ϕ 满足 (2) 中条件.

(2) \Rightarrow (3) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \phi(z) = \phi(z_0) \in \mathbb{C}^*$.

(3) \Rightarrow (1) 设 f 在 $\dot{U}_R(z_0)$ 上解析, 令 $g(z) = (z - z_0)^{m+1}f(z)$, $z \in \dot{U}_R(z_0)$, 并规定 $g(z_0) = 0$. 则 g 在 $\dot{U}_R(z_0)$ 上解析且

$$g'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \in \mathbb{C}^*,$$

故 g 在 z_0 处也可导, 且 z_0 是 g 的 1 级零点 (因为 $g'(z_0) \neq 0$). 故 g 有泰勒展开式

$$g(z) = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad z \in U_R(z_0), \text{ 其中 } c_1 \neq 0.$$

从而 f 在 $\dot{U}_R(z_0)$ 上有洛朗展开式

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^{m+1}} = \frac{c_1}{(z - z_0)^m} + \frac{c_2}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots, \text{ 其中 } c_1 \neq 0. \quad \square$$

例 2.2.35 2 是 $\frac{e^z}{(z-2)^2}$ 的 2 级极点. 0 是 $\frac{\cos z}{z}$ 的 1 级极点, 但不是 $\frac{\sin z}{z}$ 的 1 级极点.

推论 2.2.36 (1) 设 f 在 z_0 处解析. 则 z_0 是 f 的 m 级零点 $\Leftrightarrow z_0$ 是 $\frac{1}{f}$ 的 m 级极点.

(2) 设 z_0 是 f 的 m 级极点. 规定 $\frac{1}{f}(z_0) = 0$, 则 z_0 是 $\frac{1}{f}$ 的 m 级零点.

例 2.2.37 0 是 $(z - \sin z)^{-50}[\ln(1 + z) - z]^{-100}$ 的 350 级极点.

测试 2.2.38 $z_0 = 1$ 是 $\frac{1}{(z^2 - z^5)(z^2 - 1)^4}$ 的几级极点?

解 z_0 是分母的 5 级零点, 故它是 $\frac{1}{(z^2 - z^5)(z^2 - 1)^4}$ 的 5 级极点. \square

例 2.2.39 设 z_0 是 f 的孤立零点或极点, 则 z_0 是 $\frac{f'}{f}$ 的 1 级极点.

解 设 $f(z) = (z - z_0)^m \phi(z)$, $m\phi(z_0) \neq 0$. 则 $\frac{f'}{f} \xrightarrow{\text{对数}} \frac{m}{z - z_0} + \frac{\phi'}{\phi}$. 因为 $\frac{\phi'}{\phi}$ 在 z_0 处解析, 故其在 z_0 处的展开式中没有负幂项, 从而 $\frac{m}{z - z_0}$ 就是 $\frac{f'}{f}$ 在 z_0 处的洛朗展开式中唯一的负幂项, 故 z_0 是其 1 级极点. \square

例 2.2.40 求 $\frac{1}{\sin z}$ 在 0 处的洛朗展开式 (到三次项).

解 因为 0 是 $\frac{1}{\sin z}$ 的 1 级极点, 且 $\frac{1}{\sin z}$ 是奇函数, 所以

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{c_{-1}}{z} + c_1 z + c_3 z^3 + \cdots, \quad 0 < |z| < \pi.$$

上式两边乘以 $\sin z = b_1 z + b_3 z^3 + \cdots$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} c_k b_l \right) z^n = 1, \quad 0 < |z| < \pi.$$

比较各项系数可知 (注意 $b_{2n} = c_{2n} = 0$)

$$\text{常数项:} \quad c_{-1} b_1 = 1,$$

$$\text{二次项:} \quad c_{-1} b_3 + c_1 b_1 = 0,$$

$$\text{四次项:} \quad c_{-1} b_5 + c_1 b_3 + c_3 b_1 = 0.$$

由此解得 $c_{-1} = 1, c_1 = \frac{1}{6}, c_3 = \frac{7}{360}$, 故

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \dots, \quad 0 < |z| < \pi.$$

□

2.3 孤立奇点

2.3.1 可去奇点

定义 2.3.1 (孤立奇点 isolated singularity) 设 z_0 是 f 的奇点. 若 $\exists R > 0$ 使得 f 在 $0 < |z - z_0| < R$ 上解析, 则称 z_0 是 f 的**孤立奇点**.

- z_0 是 f 的“非孤立”奇点 $\Leftrightarrow z_0$ 是 f 的其他奇点的极限 (即: $\exists f$ 的互异奇点列 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0).
- 若 f 只有有限个奇点, 则每个奇点都孤立. 故有理函数的奇点均孤立.
- m 级极点是孤立奇点.

例 2.3.2 $\ln z$ 的奇点集是 $(-\infty, 0]$, 其每个奇点都不是孤立的.

练习 2.3.3 0 是 $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ 的孤立奇点吗?

解 奇点为 $z_0 = 0, \pm z_n = \pm \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{N}^*$. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, 所以 0 不是其孤立奇点.

定义 2.3.4 (可去奇点 removable singularity) 若 f 在孤立奇点 z_0 处的洛朗展开式是幂级数, 则称 z_0 是 f 的**可去奇点**.

例 2.3.5 0 是 $\frac{z^2}{z}$ 的可去奇点, 但不是 $\frac{z^2}{z^3}$ 的可去奇点.

定理 2.3.6 设 z_0 是 f 的孤立奇点. 则以下各条等价:

- (1) z_0 是 f 的可去奇点.
- (2) $\exists z_0$ 处的解析函数 ϕ 使得 $f(z) = \phi(z), z \in \overset{\circ}{U}_R(z_0)$.
- (3) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在.

证 (1) \Rightarrow (2) 设 f 在某个 $\overset{\circ}{U}_R(z_0)$ 上有展开式

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

记右侧级数在 $U_R(z_0)$ 中的和为 $\phi(z)$, 则 ϕ 在 $U_R(z_0)$ 上解析, 且 $f(z) = \phi(z), z \in \overset{\circ}{U}_R(z_0)$.

$$(2)\Rightarrow(3) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \phi(z) = \phi(z_0).$$

(3) \Rightarrow (1) 因为 $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)[f(z) + \frac{1}{z - z_0}] = 1$, 由定理 2.2.34 知 z_0 是 $f(z) + \frac{1}{z - z_0}$ 的 1 级极点, 故有展开式

$$f(z) + \frac{1}{z - z_0} = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots, \quad z \in \mathring{U}_R(z_0).$$

两边乘以 $z - z_0$ 求 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 可知 $c_{-1} = 1$, 故两边的 $\frac{1}{z - z_0}$ 可消去, 从而

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots, \quad z \in \mathring{U}_R(z_0). \quad \square$$

- 可去奇点 z_0 处, 只要重新定义 $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, z_0 就成为解析点.

命题 2.3.7 (黎曼可去奇点定理) 若 f 在孤立奇点 z_0 附近有界, 则 z_0 是 f 的可去奇点.

证 检查定理 2.3.6 中 (3) \Rightarrow (1) 的证明过程, 可以发现并不需要 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在, 只要 f 在 z_0 附近有界就足以保证推理顺利进行. \square

- 称两个解析函数的商为亚纯函数.

命题 2.3.8 (亚纯函数的奇点) 设 z_0 是 f_k 的 $n_k \in \mathbb{N}$ 级“零点”($k = 1, 2$), 记 $m = n_1 - n_2$.

(1) 当 $m \geq 0$ 时, z_0 是 $\frac{f_1}{f_2}$ 的可去奇点.

(2) 当 $m < 0$ 时, z_0 是 $\frac{f_1}{f_2}$ 的 $|m|$ 级极点.

证 不妨设 $f_k(z) = (z - z_0)^{n_k} \phi_k(z)$, $z \in U_R(z_0)$, 其中 ϕ_k 解析且 $\phi_k(z) \neq 0, \forall z \in U_R(z_0)$, 则

$$\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = (z - z_0)^m \frac{\phi_1(z)}{\phi_2(z)}, \quad z \in \mathring{U}_R(z_0).$$

若 $m \geq 0$, 则右侧的函数在 z_0 处解析, 故 z_0 是 f_1/f_2 的可去奇点. 若 $m < 0$, 右侧是定理 2.2.34 中 $|m|$ 级极点的一个分解式, 故 z_0 是 f_1/f_2 的 $|m|$ 级极点. \square

例 2.3.9 找出函数 $f(z) = \frac{(z^7 - 1)^2}{(z - 1)(1 - z^2)^2}$ 的奇点并判断类型.

解 奇点为 ± 1 . $z = 1$ 是 $z^7 - 1$ 、 $z - 1$ 、 $z^2 - 1$ 的 1 级零点 (练习 2.2.23). 分子在 1 处的零点级数为 2, 分母在 1 处的零点级数为 3, 所以 $z = 1$ 是 f 的 1 级极点. 类似地, $z = -1$ 是 f 的 2 级极点. \square

测试 2.3.10 0 是 $\frac{(z - \sin z)^3 z^2}{(1 - \cos z)^5}$ 的什么奇点?

练习 2.3.11 指出函数 $\frac{z^m - \sin z^m}{z^n(e^{z^n} - 1)}$ 的奇点 $z = 0$ 的类型.

解 因为 $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$,

$$z^m - \sin z^m = z^m - \left(z^m - \frac{z^{3m}}{3!} + \frac{z^{5m}}{5!} - \cdots \right) = z^{3m} \left(\frac{1}{3!} - \frac{z^{2m}}{5!} + \cdots \right)$$

所以 0 是分子的 $3m$ 级零点.

因为 $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$, 所以

$$e^{z^n} - 1 = z^n \left(1 + \frac{z^n}{2!} + \frac{z^{2n}}{3!} + \dots \right),$$

故 0 是分母的 $2n$ 级零点. 当 $m \geq \frac{2}{3}n$ 时, 0 是可去奇点; 当 $m < \frac{2}{3}n$ 时, 0 是 $2n - 3m$ 级极点. \square

2.3.2 本性奇点

定义 2.3.12 (本性奇点 essential singularity) 若 f 在 $U_R(z_0)$ 上的洛朗展开有无穷多负幂项, 则称 z_0 是 f 的**本性奇点**.

例 2.3.13 (1) $e^{\frac{1}{z-z_0}} = 1 + \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(z-z_0)^2} + \dots, \quad 0 < |z-z_0| < +\infty.$

(2) $\cos(\frac{1}{z-z_0}) = 1 - \frac{1}{2!} \frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{4!} \frac{1}{(z-z_0)^4} - \dots, \quad 0 < |z-z_0| < +\infty.$

(3) $\sin(\frac{1}{z-z_0}) = \frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{3!} \frac{1}{(z-z_0)^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{(z-z_0)^5} - \dots, \quad 0 < |z-z_0| < +\infty.$

故以上情形 z_0 都是本性奇点.

例 2.3.14 亚纯函数的奇点要么可去, 要么是极点, 故都不是本性奇点.

练习 2.3.15 0 是不是 $ze^{z^{-2}}$ 的本性奇点?

- 有时候函数的展开式不太好写 (例如, 研究 $\frac{1}{2}$ 是不是 $\sin[e^{\frac{1}{2z-1}} + \cos(\pi z)]$ 的本性奇点, 用展开式就不甚方便), 有必要研究其他辅助判断方法.

定理 2.3.16 设 z_0 是 f 的孤立奇点. 则 z_0 是 f 的本性奇点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 无意义.

- 极限无意义: 它既不趋于有限值, 也不趋于无穷大, 而是震荡类型, 即存在两个趋于 z_0 的点列 $\{z_n\}$ 和 $\{\zeta_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(\zeta_n)$.

命题 2.3.17 若 z_0 是 f 的本性奇点, 则 $\forall l \in \mathbb{C}$, 存在 $z_n \rightarrow z_0$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = l$.

例 2.3.18 $\frac{1}{2}$ 是不是函数 $f(z) = \sin[e^{\frac{1}{2z-1}} + \cos(\pi z)]$ 的本性奇点?

解 因为 $\frac{1}{2}$ 是 $e^{\frac{1}{2z-1}}$ 的本性奇点, 存在趋于 $\frac{1}{2}$ 的点列 $\{z_n\}$ 和 $\{\zeta_n\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2z_n-1}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2\zeta_n-1}} = 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \sin(0 + 0) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(\zeta_n) = \sin(1 + 0) = \sin 1 \neq 0,$$

故 0 是函数 f 的本性奇点. \square

奇点类型	洛朗展开	极限
可去奇点	无负幂项	存在
m 级极点	负幂次项最高次为 m	m 阶无穷大
本性奇点	有无穷多负幂项	无意义

例 2.3.19 0 分别是 $\frac{1}{ze^z}$, $\frac{\sin z}{z}$ 和 $e^{\frac{1}{z}}$ 的什么奇点?

解 前两个函数是亚纯函数, 可用数零点的办法判断.

(1) 0 是 1 和 e^z 的“0 级零点”, 是 z 的 1 级零点, 故它为 1 级极点.

(2) 0 是分子和分母的 1 级零点, 故为可去奇点.

(3) $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$, $|z| > 0$, 故 0 是它的本性奇点. \square

- 第三个函数 $e^{\frac{1}{z}}$ 不是亚纯函数, 故不能用数零点的方法判断奇点类型. 前两个函数也可以用展开式等方法判断, 第三个函数也可以用极限判断, 请大家自行尝试.

命题 2.3.20 (1) 设 $\rho = |z_1 - z_0| > 0$, f 在 $|z - z_0| < \rho$ 上解析, 且 z_1 是 f 的极点或本性奇点, 则 f 在 z_0 处的泰勒展开式收敛半径 $R = \rho$.

(2) 设 $R_k = |z_k - z_0| > 0$, f 在 $D : R_1 < |z - z_0| < R_2$ 上解析, 且 z_1, z_2 是 f 的极点或本性奇点, 则 D 是 f 在 D 上洛朗展开式的收敛圆环.

- 条件中的“解析”可放宽为“仅有可去奇点”. 即: 可去奇点不影响收敛半径.

例 2.3.21 设 f 在 z_0 处解析且在 $U_R(z_0)$ 中仅有可去奇点, 则 f 在 z_0 处的展开式收敛半径 $\geq R$.

例 2.3.22 例 2.2.10 中的函数 $f(z) = \begin{cases} e^z, & |z| < 1 \\ 0, & |z| \geq 1 \end{cases}$, 奇点距 $z_0 = 0$ 的最小距离为 1, 但其麦克劳林展开式收敛半径为 $+\infty$, 这与命题 2.3.20 并不矛盾, 因为 $|z| = 1$ 上的奇点都是非孤立奇点.

例 2.3.23 (1) $\frac{1}{1-z^2}$ 在 0 和 $\frac{1}{2}$ 处展开的收敛半径分别为 1 和 $\frac{1}{2}$.

(2) $\frac{\sin \pi z}{z-1} e^{\frac{1}{z-2}}$ 的麦克劳林展开式收敛半径为 2.

解 (1) 函数的奇点为 ± 1 , 均是极点, 因此在 0 处的展开式收敛半径为 $|\pm 1 - 0| = 1$, 在 $\frac{1}{2}$ 处的展开式收敛半径为 $\min\{|1 - \frac{1}{2}|, |-1 - \frac{1}{2}|\} = \frac{1}{2}$.

(2) 奇点 1 是可去奇点, 排除它. 奇点 2 是本性奇点, 故在 0 处的展开式收敛半径为 2. \square

测试 2.3.24 (1) 求 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z_0 = 1+i$ 和 $z_1 = 2+i$ 处泰勒展开式的收敛半径.

(2) 求 $\frac{z}{\sin z}$ 在 $z_0 = i$ 处泰勒展开式的收敛半径.

解 (2) 函数的奇点为 $\pi\mathbb{Z}$, 排除可去奇点 0 后离 z_0 最近的奇点为 $\pm\pi$, 故展开式收敛半径为 $|\pm\pi - i| = \sqrt{\pi^2 + 1}$. \square

2.3.3 无穷远点

定义 2.3.25 若 $\exists R \in \mathbb{R}$ 使得 f 在 $R < |z| < +\infty$ 上解析, 则称 ∞ 为 f 的孤立奇点.

- ∞ 是 f 的孤立奇点 $\Leftrightarrow f$ 的有限奇点集是有界的.

例 2.3.26 ∞ 是 $e^z, \sin z, z$ 的孤立奇点, 但不是 $\frac{1}{e^z-1}$ 的孤立奇点.

解 $z_k = 2k\pi i$ 都是 $\frac{1}{e^z-1}$ 的奇点, 故 ∞ 不是 $\frac{1}{e^z-1}$ 的孤立奇点. \square

例 2.3.27 ∞ 是 f 的孤立奇点 $\Leftrightarrow 0$ 是 $f(\frac{1}{z})$ 的孤立奇点.

解 f 在 $R < |z| < +\infty$ 上解析 $\Leftrightarrow f(\frac{1}{z})$ 在 $0 < |z| < \frac{1}{R}$ 上解析. \square

定义 2.3.28 若 0 是 $f(\frac{1}{z})$ 的可去奇点、 m 级极点或本性奇点, 则称 ∞ 是 f 的可去奇点、 m 级极点或本性奇点.

定理 2.3.29 (设 ∞ 是 f 的孤立奇点) ∞ 是可去奇点、 m 级极点、本性奇点 $\Leftrightarrow f$ 在 ∞ 的洛朗展开式没有正幂项、最高次正幂项是 m 次、有无穷多正幂项.

证 这是因为若 f 在 $|z| > R$ 上的展开式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

则 $f(\frac{1}{z})$ 在 $0 < |z| < \frac{1}{R}$ 的展开式为

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}. \quad \square$$

定理 2.3.30 (设 ∞ 是 f 的孤立奇点) ∞ 是可去奇点、 m 级极点、本性奇点 $\Leftrightarrow f$ 在 ∞ 的极限存在、是 m 阶无穷大、无意义.

证 这是因为 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f(\frac{1}{z})$. \square

- f 是 $z \rightarrow \infty$ 时的 m 阶无穷大是指: $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^m} \in \mathbb{C}^*$.
- ∞ 是有理函数的可去奇点或极点.

例 2.3.31 ∞ 是下列函数的什么奇点?

$$(1) f(z) = \frac{z^7}{(z-1)(1-z^2)^2}; \quad (2) f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}.$$

解 (1) 函数是 $z \rightarrow \infty$ 时的 2 阶无穷大, 故 ∞ 是 f 的 2 级极点.

(2) 展开式

$$\frac{\sin z - z}{z^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2}, \quad 0 < |z| < +\infty$$

中有无穷多个正幂项, 故 ∞ 是 f 的本性奇点. \square

测试 2.3.32 设 f 在 \mathbb{C} 上解析, 且它不是多项式. 问 ∞ 是 f 的什么奇点?

因为解析函数都能做幂级数展开, 因此洛必达法则对解析函数仍然成立. 具体地, 我们有下面两个结论.

要使表达式 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$ 有意义, f, g 必须首先在靠近 z_0 时可导, 即 z_0 至多是 f, g 的孤立奇点.

定理 2.3.33 (洛必达法则 L'Hôpital's rule) 设 z_0 是 f, g 的孤立零点或极点, 则 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

证 z_0 是 f/g 和 f'/g' 的可去奇点或极点, 两个极限都是有意义的 (与实情形不同). 设 z_0 分别是 f 和 g 的 m 和 n 级点 (正整数代表零点, 负整数代表极点). 则

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad g(z) = (z - z_0)^n \psi(z), \quad z \in U_R(z_0)$$

其中 φ 和 ψ 均在 $U_R(z_0)$ 上解析, 且 $\varphi(z)\psi(z) \neq 0$, $z \in U_R(z_0)$.

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f(z)}{g(z)} \cdot \frac{m + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}(z - z_0)}{n + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}(z - z_0)} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{m}{n} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}.$$

当 $m > n$ 时 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ 是零, 当 $m < n$ 时是 ∞ , 当 $m = n$ 时 $\frac{m}{n} = 1$, 故 $\frac{m}{n} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$, 故 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{m}{n} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$. \square

推论 2.3.34 设 ∞ 是 f, g 的孤立零点或极点, 则 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

证 转化为零点的极限即可:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{z^2} f'(\frac{1}{z})}{-\frac{1}{z^2} g'(\frac{1}{z})} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

例 2.3.35 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^z + 1}{e^z}$ 不存在, 而 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(e^z + 1)'}{(e^z)'} = 1$. 注意 ∞ 是 e^z 的本性奇点.

2.4 留数演算

2.4.1 留数定义

定义 2.4.1 (留数 residue) 若 f 在 z_0 处有洛朗展开:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

则称 c-1 为 f 在 z_0 点的留数, 记作 $\text{Res}_{z_0}(f)$, $\text{Res}_{z=z_0}(f)$, 或 $\text{Res}(f, z_0)$.

例 2.4.2 $\frac{1}{z(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$, $0 < |z| < 1 \Rightarrow \text{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)}, 0\right] = -1$.

练习 2.4.3 求 $\text{Res}\left[\frac{1}{z(z-1)}, 1\right]$.

命题 2.4.4 设 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, 则 $\text{Res}_{z_0}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Res}_{z_0}(f) + \mu \text{Res}_{z_0}(g)$.

例 2.4.5 求 $\text{Res}_0\left(z^2 \sin \frac{1}{z}\right)$ 和 $\text{Res}_1\left(e^{\frac{z}{z-1}}\right)$.

解 (1) 因为在 $z_0 = 0$ 处的洛朗展开式

$$z^2 \sin \frac{1}{z} = z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \dots, \quad 0 < |z| < +\infty$$

系数 $c_{-1} = -\frac{1}{6}$, 故 $\text{Res}_0\left(\sin \frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{6}$.

(2) 在 $z_0 = 1$ 处洛朗展开式

$$e^{\frac{z}{z-1}} = ee^{\frac{1}{z-1}} = e + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2!(z-1)^2} + \dots, \quad 0 < |z-1| < +\infty$$

系数 $c_{-1} = e$, 故 $\text{Res}_1\left(e^{\frac{z}{z-1}}\right) = e$. □

练习 2.4.6 求 $\text{Res}_0\left(e^{\frac{z}{z-1}}\right)$.

解 函数在 0 处解析, 故其展开式是泰勒级数, 从而留数为 0. □

命题 2.4.7 (公式一) 设 φ 在 z_0 处解析, $m \in \mathbb{N}^*$, 则 $\text{Res}_{z_0}\left[\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}\right] = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$.

证 因为 φ 在 z_0 处解析, 存在 $R > 0$ 使得

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

因此当 $0 < |z - z_0| < R$ 时

$$\frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m},$$

上述洛朗展开式负一次项的系数

$$c_{-1} = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!},$$

故 $\text{Res}_{z_0}\left[\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}\right] = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$. □

命题 2.4.8 (公式二) 设 φ, ψ 在 z_0 处解析, 且 z_0 是 ψ 的一级零点, 则 $\text{Res}_{z_0}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

证 因为 $f(z) = \begin{cases} (z - z_0)^{-1}\psi, & z \neq z_0 \\ \psi'(z_0), & z = z_0 \end{cases}$ 在 z_0 处解析且 $f(z_0) \neq 0$, 故

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{\varphi}{\psi} \right) = \operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{\varphi/f(z)}{z - z_0} \right) = \frac{\varphi(z_0)}{f'(z_0)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad \square$$

例 2.4.9 求函数 $f(z) = \frac{z^2+2}{z^3-2z^2+z}$ 和 $g(z) = \frac{z^2+2}{\sin z}$ 在 $z_0 = 0$ 处的留数.

解 $f(z) = \frac{z^2+2}{z(z-1)^2}$, 因为 $z_0 = 0$ 是分母的 1 级零点, 用公式二. 记 $\varphi(z) = \frac{z^2+2}{(z-1)^2}$, $\psi(z) = z$. 由公式二得

$$\operatorname{Res}_0(f) = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \frac{z^2+2}{z'(z-1)^2} \Big|_{z=0} = 2.$$

同理, $\operatorname{Res}_0(g) = \frac{(z^2+2)'}{(\sin z)'} \Big|_{z=0} = 2. \quad \square$

例 2.4.10 求函数 $f(z) = \frac{z^2+2}{z^3-2z^2+z}$ 在 $z_0 = 1$ 处的留数.

解 $f(z) = \frac{z^2+2}{z(z-1)^2}$, 因为 $z_0 = 1$ 不是分母的 1 级零点, 此处应该用公式一. 记 $\varphi(z) = \frac{z^2+2}{z}$, 适用于 $m = 2$ 的公式:

$$\operatorname{Res}_1(f) = \varphi'(1) = \left(z + \frac{2}{z} \right)' \Big|_{z=1} = -1. \quad \square$$

测试 2.4.11 $f(z) = \frac{1-2z}{z^3(1+z)}$ 在 $z_0 = 0$ 处的留数是_____.

解 适用于 $m = 3$ 的公式一:

$$\operatorname{Res}_0(f) = \frac{1}{2!} \left(\frac{1-2z}{1+z} \right)'' \Big|_{z=0} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1+z} \right)'' \Big|_{z=0} = \frac{3}{(1+z)^3} \Big|_{z=0} = 3. \quad \square$$

- 凡是分母是多项式的亚纯函数, 都可以用公式一和二计算留数.

2.4.2 计算规则

定义 2.4.12 (留数 residue) 设 ∞ 是 f 的孤立奇点. 将 f 在 ∞ 处洛朗展开式负一次项系数的相反数 $-c_{-1}$ 称为 f 在 ∞ 处的留数; 记作 $\operatorname{Res}_\infty(f)$, $\operatorname{Res}_{z=\infty}(f)$, 或 $\operatorname{Res}(f, \infty)$.

留数的计算规则

- (1) $z_0 \in \mathbb{C}$ 为可去奇点 $\Rightarrow \operatorname{Res}_{z_0}(f) = 0$.
- (2) ∞ 为可去奇点 $\Rightarrow \operatorname{Res}_\infty(f) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - f(\infty)]$.
- (3) $z_0 \in \mathbb{C}$ 为不超过 m 级极点 $\Rightarrow \operatorname{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}}{(m-1)!}$.
- (4) φ, ψ 解析且 $z_0 \in \mathbb{C}$ 是 ψ 的 1 级零点 $\Rightarrow \operatorname{Res}_{z_0}(\frac{\varphi}{\psi}) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

(5) $z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow \text{Res}_{z_0}(f) = c_{-1}$; $\text{Res}_\infty(f) = -c_{-1}$.

(6) $\text{Res}_\infty(f) = \text{Res}_0 \left[-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right]$.

(7) 奇点总数有限时, 留数 (包括 ∞) 之和为零.

- (3) 是命题 2.4.7 (公式一) 的推广.

证 (1) 因为有限可去奇点处展开式负幂项系数均为零, 故 $\text{Res}_{z_0}(f) = 0$.

(2) 当 ∞ 为可去奇点时, f 在 $|z| > R$ 上的展开式无正幂项, 设为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n, \quad \text{其中 } c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) =: f(\infty).$$

故 $f(z) - f(\infty)$ 恰好将常数项 c_0 约去, 从而 $z[f(z) - f(\infty)] = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^{n+1}$ 的常数项恰为 c_{-1} , 且它无正幂项, 故 $c_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - f(\infty)]$.

(3) 设 $f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + \cdots$, $z \in \dot{U}_R(z_0)$, 则

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \cdots, \quad z \in \dot{U}_R(z_0),$$

令 $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, $z \in \dot{U}_R(z_0)$, $g(z_0) = c_{-m}$, 则上式在 $U_R(z_0)$ 上成立, 它就是 g 的泰勒展开式, c_{-1} 是其 $m-1$ 次项的系数, 故

$$c_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}}{(m-1)!}.$$

(4) 设 $\psi(z) = (z - z_0)\phi(z)$, $z \in U_R(z_0)$, 则 $\phi(z_0) = \psi'(z_0) \neq 0$, 故 $\frac{\varphi}{\phi}$ 在 z_0 处解析, 从而

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{\varphi(z)}{\phi(z)} = \frac{1}{z - z_0} \left[\frac{\varphi(z_0)}{\phi(z_0)} + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \right], \quad z \in \dot{U}_R(z_0),$$

故 $c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\phi(z_0)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

(6) 设 f 在 $|z| > R$ 上的展开式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| > R,$$

将 $\frac{1}{z}$ 代入上式得

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -c_n z^{-n-2}, \quad 0 < |z| < \frac{1}{R}$$

上式的负一次项系数恰好为 $-c_{-1}$.

(7) 这是留数定理的推论, 留给读者学习完围道积分的章节后自行完成. \square

例 2.4.13 $\text{Res}_0\left(\frac{\sin z}{z}\right) = 0$, 因为 0 是 $\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点 (例 2.3.19).

例 2.4.14 求 $\text{Res}_0\left(\frac{z}{\sin^2 z}\right)$ 和 $\text{Res}_0\left(\frac{e^z}{\sin^2 z}\right)$.

解 0 分别是 $\frac{z}{\sin^2 z}$ 和 $\frac{e^z}{\sin^2 z}$ 的 1 级和 2 级极点.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_0\left(\frac{z}{\sin^2 z}\right) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\sin^2 z} = 1 \\ \operatorname{Res}_0\left(\frac{e^z}{\sin^2 z}\right) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z^2 e^z}{\sin^2 z}\right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z[(z^2 + 2z)\sin^2 z - 2z^2 \sin z \cos z]}{\sin^4 z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z+2)\sin z - 2z \cos z}{z^2} = 1.\end{aligned}$$

第二个留数也可以这样算: 记 $g(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$, 则

$$\operatorname{Res}_0\left(\frac{e^z}{\sin^2 z}\right) = \operatorname{Res}_0\left(\frac{e^z}{z^2 g^2(z)}\right) = \left[\frac{e^z}{g^2(z)}\right]' \Big|_{z=0} = \frac{e^0 g^2(0) - 2g(0)g'(0)e^0}{g^4(0)} = 1. \quad \square$$

例 2.4.15 求 $\frac{ze^z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$ 在 ± 1 处的留数.

解 ± 1 均是分母 $z^2 - 1$ 的 1 级零点, 由规则 ④ 得

$$\operatorname{Res}_{\pm 1}\left[\frac{ze^z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}\right] = \frac{ze^z}{(z^2-1)'(z^2+1)^2} \Big|_{z=\pm 1} = \frac{e^{\pm 1}}{8}. \quad \square$$

测试 2.4.16 $f(z) = \frac{e^z}{(3z+1)(z+3)}$ 在 $z_0 = -\frac{1}{3}$ 处的留数是_____.

例 2.4.17 求 $f(z) = \frac{z-\sin z}{z^6}$ 在各奇点处的留数.

解 f 的奇点为 0, ∞ . 由洛朗展开

$$f(z) = \frac{1}{z^6} \left(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \dots \right), \quad 0 < |z| < +\infty$$

和规则 ⑤ 得 $\operatorname{Res}_0(f) = c_{-1} = -\frac{1}{5!}$, $\operatorname{Res}_\infty(f) = \frac{1}{5!}$. \square

例 2.4.18 $\operatorname{Res}_\infty\left(\frac{z^2-2z}{z+1}\right) \stackrel{\textcircled{6}}{=} -\operatorname{Res}_0\left[\frac{1-2z}{z^3(1+z)}\right] = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-2z}{1+z}\right)'' \Big|_{z=0} = -3.$

例 2.4.19 设 $f(z) = \frac{z^{11}}{(z^2-1)(z^6+1)}$, 计算留数 $\operatorname{Res}_\infty(f)$.

解 在 $|z| > 1$ 上展开

$$\begin{aligned}\frac{z^{11}}{(z^2-1)(z^6+1)} &= z^3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^6}} \\ &= z^3 \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^{12}} - \dots\right) \\ &= z^3 \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots\right) \\ &= z^3 + z + \frac{1}{z} + \dots\end{aligned}$$

可知 $\operatorname{Res}_\infty(f) = -c_{-1} = -1$. \square

- 在上例中可求出展开式通项如下:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^{6j}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^{2(k+3j)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+3j=n} \frac{(-1)^j}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} (-1)^j z^{-2n}$$

当 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 是奇数时, $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} (-1)^j = 0$, 当 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 是偶数时 $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} (-1)^j = 1$, 故非零项次数对应于 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 2m$ 的自然数, 即 $n = 6m, 6m+1, 6m+2$, 从而

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z^{6j}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{12n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{12n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{12n+4}}.$$

2.4.3 其他性质

命题 2.4.20 (留数的线性性) 若 $z_0 \in \mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是 f 和 g 的孤立奇点, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, 则

$$\operatorname{Res}_{z_0}(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot \operatorname{Res}_{z_0}(f) + \mu \cdot \operatorname{Res}_{z_0}(g).$$

推论 2.4.21 (1) 设 f 是有理函数, Q 是它的真分式部分, 则 $\operatorname{Res}_\infty(f) = -\lim_{z \rightarrow \infty} zQ(z)$.

(2) 若有理函数 f 的分母比分子次数至少高两次, 则 $\operatorname{Res}_\infty(f) = 0$.

证 (1) 设 $f(z) = P(z) + Q(z)$, 其中 P 是多项式, Q 是真分式, 则 $\operatorname{Res}_\infty(P) = 0$, 而 ∞ 是 Q 的可去奇点且 $Q(\infty) = 0$, 故线性和规则②给出

$$\operatorname{Res}_\infty(f) = \operatorname{Res}_\infty(P) + \operatorname{Res}_\infty(Q) = \operatorname{Res}_\infty(Q) = -\lim_{z \rightarrow \infty} zQ(z).$$

(2) 由 (1) 得 $\operatorname{Res}_\infty(f) = -\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$. □

例 2.4.22 设 $f(z) = \frac{z^{11}}{(z^2-1)(z^6+1)}$, 计算留数 $\operatorname{Res}_\infty(f)$.

解 做部分分式分解

$$f(z) = \frac{z^5}{z^2-1} \frac{z^6}{z^6+1} = \frac{z^5}{z^2-1} - \frac{z^5}{(z^2-1)(z^6+1)} = z(z^2+1) + \frac{z}{z^2-1} - \frac{z^5}{(z^2-1)(z^6+1)}.$$

故 $\operatorname{Res}_\infty(f) = \operatorname{Res}_\infty\left(\frac{z}{z^2-1}\right) = -\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{z^2-1} = -1$. □

定义 2.4.23 (原函数 antiderivative, primitive) 若 $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in D$, 则称 F 是 f 在 D 上的原函数.

命题 2.4.24 $f \in H(\dot{U}_R(z_0))$ 有原函数 $\Leftrightarrow \operatorname{Res}_{z_0}(f) = 0$.

证 (\Rightarrow) 设 $f(z) = F'(z)$, $z \in \dot{U}_R(z_0)$. 将 F 展开为洛朗级数

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad z \in \dot{U}_R(z_0).$$

逐项求导得

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}, \quad z \in \overset{\circ}{U}_R(z_0).$$

显然其 -1 次项系数为 $0c_0 = 0$.

(\Leftarrow) 因为 $\text{Res}_{z_0}(f) = 0$, 故 f 有展开式

$$f(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad z \in \overset{\circ}{U}_R(z_0).$$

显然它有一个原函数 (注意此级数是收敛的)

$$F(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{1-n}(z - z_0)^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}, \quad z \in \overset{\circ}{U}_R(z_0).$$

$z_0 = \infty$ 的情形可类似证明. \square

例 2.4.25 $\text{Res}_0\left(\frac{\cos z}{\sin^2 z}\right) = 0$.

推论 2.4.26 $\text{Res}_{z_0}(fg) = -\text{Res}_{z_0}(fg')$.

例 2.4.27 $\text{Res}_0\left[\frac{\cos z}{(e^z-1)^2}\right] = -\text{Res}_0\left[(\frac{1}{e^z-1})'e^{-z}\cos z\right] = \text{Res}_0\left[\frac{(e^{-z}\cos z)'}{e^z-1}\right] = \frac{(e^{-z}\cos z)'}{(e^z-1)'}\Big|_{z=0} = -1$.

例 2.4.28 $\frac{1}{z}$ 在 $0 < |z| < 1$ 上没有原函数, 因为 $\text{Res}_0(\frac{1}{z}) = 1 \neq 0$.

练习 2.4.29 若 f, g 都在 D 上有原函数, 问 fg 是否也在 D 上有原函数?

解 从留数观点看, 就是问两个没有负一次项的展开式乘起来是否也没有负一次项. 反例是显而易见的: $z^2 \cdot \frac{1}{z^3} = \frac{1}{z}$. \square

命题 2.4.30 设 ∞ 是 f 的孤立奇点且

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad R < |z - z_0| < +\infty,$$

则 $\text{Res}_{\infty}(f) = -c_{-1}$.

证 由命题 2.4.24 知

$$\text{Res}_{\infty}(f) = \text{Res}_{\infty}\left(\frac{c_{-1}}{z - z_0}\right) = -\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{c_{-1}}{z - z_0} = -c_{-1}. \quad \square$$

例 2.4.31 $\text{Res}_{\infty}\left(\frac{z^2-2z}{z+1}\right) = \text{Res}_{\infty}\left(z - 3 + \frac{3}{z+1}\right) = \text{Res}_{\infty}(z - 3) + \text{Res}_{\infty}\left(\frac{3}{z+1}\right) = -3$.

测试 2.4.32 求 $\text{Res}_{\infty}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{z-4} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(z-2)^2}\right]$.

例 2.4.33 若 $0(\infty)$ 是偶函数 f 的孤立奇点, 则 $\text{Res}_{0(\infty)}(f) = 0$.

证 设 0 是 f 的孤立奇点, 则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad 0 < |z| < R.$$

以 $-z$ 替换 z 得

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n c_n z^n, \quad 0 < |z| < R.$$

由展开式的唯一性得 $c_n = (-1)^n c_n$, 故 $c_{2n+1} = 0$, 特别地 $c_{-1} = 0$. \square

例 2.4.34 $\text{Res}_0\left(\frac{z}{\sin z}\right) = \text{Res}_0\left(\frac{\cos z}{\sin^2 z}\right) = 0$.

- 练习 2.4.35** (已知 f 的四个洛朗展开式) (1) $f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{7}{4} + \frac{23}{8}(z-1) + \dots, 0 < |z-1| < 1$;
(2) $f(z) = \dots - \frac{17}{2} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{5}{4} \frac{1}{z-1} - \dots, \quad 1 < |z-1| < 2$;
(3) $f(z) = \dots + \frac{6}{z^2} + \frac{1}{z}, \quad |z| > 3$;
(4) $f(z) = \dots + -\frac{7}{2} \frac{1}{z} + \frac{5}{2} - \frac{z}{2} + \dots, \quad 2 < |z| < 3$.

1 和 ∞ 分别是什么奇点, $\text{Res}_1(f) = ?$ $\text{Res}_{\infty}(f) = ?$

练习 2.4.36 (例 2.4.33 的推广) $\text{Res}_{z_0}[f(z_0 + (z-z_0)^k)] = 0, k = 2, 3, \dots$

练习 2.4.37 证明 $\text{Res}_{z_0}(f) = \text{Res}_0 f(z+z_0) = -\text{Res}_{\infty}[\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z} + z_0)]$.

练习 2.4.38 (1) $\text{Res}_{z_0}[f(-z)] = -\text{Res}_{-z_0}(f)$ (2) 若 $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, 则 $\text{Res}_{\bar{z}_0}(f) = \overline{\text{Res}_{z_0}(f)}$.

2.A 附录

2.A.1 逐项求导

引理 2.A.1 设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(z-z_0)^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n}(z-z_0)^n$ 的收敛半径也是 R .

证 先设 $R > 0$. 任取 $0 < r < R$. 当 $|z-z_0| < r$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n|z-z_0|^n}{r^n} = 0$, 故由

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n n(z-z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n| \frac{n|z-z_0|^n}{r^n}$$

及 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n|$ 收敛可知 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n n(z-z_0)^n|$ 收敛 (正项级数比较判别法), 故 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(z-z_0)^n$ 的收敛半径 $R_1 \geq r$, 由 r 的任意性可知, 其收敛半径 $R_1 \geq R$. 同理 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n}(z-z_0)^n$ 的收敛半径 $R_2 \geq R$.

由上一段的结论, 又有 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n n}{n}(z-z_0)^n$ 的收敛半径 $R \geq R_1$, 故 $R = R_1$, 同理 $R_2 = R_1$.

再设 $R = 0$. 此时若 $R_1 > 0$, 则由 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n n}{n}(z-z_0)^n$ 知 $R \geq R_1 > 0$, 矛盾, 故 $R_1 = 0$. 若 $R_2 > 0$, 由第一段的证明可得 $R \geq R_2 > 0$, 矛盾, 故亦有 $R_2 = 0$. \square

定理 2.1.17 的证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z - z_0)^n$ 有相同的收敛半径, 由引理 2.A.1, 逐项求导前后的级数有相同的收敛半径, 记之为 R .

任取 $\zeta \in U_R(z_0)$. 因为 $|\zeta - z_0| < R$, 取 $r > 0$ 使得

$$|\zeta - z_0| < r < R. \quad (2.A.1)$$

令 $\delta_1 = r - |\zeta - z_0| > 0$. 当 $0 < |z - \zeta| < \delta_1$ 时,

$$|z - z_0| \leq |z - \zeta| + |\zeta - z_0| < \delta_1 + |\zeta - z_0| = r. \quad (2.A.2)$$

故此时

$$|(z - z_0)^k - (\zeta - z_0)^k| = \left| (z - \zeta) \sum_{j=0}^{k-1} (z - z_0)^j (\zeta - z_0)^{k-1-j} \right| \stackrel{(2.A.2)}{\leq} k |z - \zeta| r^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (2.A.3)$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| nr^{n-1}$ 收敛, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k| kr^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.A.4)$$

记 $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, $\tilde{S}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(z - z_0)^{n-1}$, 令 $S_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k(z - z_0)^k$ 是幂级数 $S(z)$ 的部分和, $R_n(z) = S(z) - S_n(z)$ 是其余项. 同样定义 $\tilde{S}_n(z)$ 和 $\tilde{R}_n(z)$. 因为 $S'_N(\zeta) = \tilde{S}_N(\zeta)$, 所以存在 $\delta_2 > 0$, 当 $0 < |z - \zeta| < \delta_2$ 时

$$\left| \frac{S_N(z) - S_N(\zeta)}{z - \zeta} - \tilde{S}_N(\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.A.5)$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |z - \zeta| < \delta$ 时

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(z) - S(\zeta)}{z - \zeta} - \tilde{S}(\zeta) \right| &\leq \left| \frac{S_N(z) - S_N(\zeta)}{z - \zeta} - \tilde{S}_N(\zeta) \right| + \left| \frac{R_N(z) - R_N(\zeta)}{z - \zeta} - \tilde{R}_N(\zeta) \right| \\ &\stackrel{(2.A.5)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{|R_N(z) - R_N(\zeta)|}{|z - \zeta|} + |\tilde{R}_N(\zeta)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k>N} \frac{|c_k| |(z - z_0)^k - (\zeta - z_0)^k|}{|z - \zeta|} + \sum_{k>N} |kc_k(\zeta - z_0)^{k-1}| \\ &\stackrel{(2.A.3)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} + 2 \sum_{k>N} |c_k| kr^{k-1} \stackrel{(2.A.4)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

这就说明 $\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{S(z) - S(\zeta)}{z - \zeta} = \tilde{S}(\zeta)$, 即 $S'(\zeta) = \tilde{S}(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(\zeta - z_0)^{n-1}$. \square

- 熟悉一致收敛概念的读者, 应知此定理是累次极限交换次序的 Moore-Osgood 定理的特例.
- 还可以使用微积分基本定理 (同样需要一致收敛) 给出更简洁的证明 (参见 [6] 定理 10.2.6).
- 利用复积分理论, 可以得到一个更快速且更具复变特色的证明 (参见 [1] 定理 4.1.9).

2.A.2 充要条件

- 为得到可导的第二必要条件, 我们回顾高数中实可微的概念: 若存在常数 $A, B \in \mathbb{C}$ 使得

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\Delta z) \quad (\Delta z \rightarrow 0),$$

则称 f 在 z_0 处实可微, 实线性映射 $df|_{z_0}(\Delta z) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ 是 f 在 z_0 处的实微分.

- 关于实可微性, 我们有下述基本性质:

- (1) f 在 z_0 处实可微 $\Leftrightarrow u, v$ 在 z_0 处实可微, 且此时 $A = f_x(z_0), B = f_y(z_0)$.
- (2) 若 f_x, f_y 在 z_0 处连续, 则 f 在 z_0 处实可微.

定义 2.A.2 (可微 differentiable) 设 f 在 z_0 附近有定义, 若存在 $C \in \mathbb{C}$ 使得

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + C \cdot \Delta z + o(\Delta z) \quad (\Delta z \rightarrow 0),$$

则称 f 在 z_0 处可微. 复线性映射 $Df|_{z_0}(\Delta z) = C \cdot \Delta z$ 是 f 在 z_0 处的微分.

- 显然在 z_0 处可微的函数必在 z_0 处实可微:

$$C \cdot \Delta z = C \cdot \Delta x + iC \cdot \Delta y,$$

且此时 $df|_{z_0} = Df|_{z_0}$.

例 2.A.3 (第二必要条件) f 在 z_0 处可导 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 处可微. 并且此时 $C = f'(z_0)$, 即

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z).$$

故 f 在 z_0 处实可微也是可导的必要条件.

证 留给读者. □

练习 2.A.4* (1) 构造函数 $\omega = \omega(x, y)$, 使得它在原点不是实可微的, 且 $\omega_x(0, 0) = \omega_y(0, 0) = 0$.
 (2) 证明复变函数 $f(z) = \omega(x, y)(1 + i)$ 在原点处满足柯西-黎曼方程, 但不可微.

定理 2.1.44 的证明 显然 “ f 在 z_0 处可微” \Leftrightarrow “ f 在 z_0 处实可微, 且其实微分 $df|_{z_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) dy$ 是复线性的”, 不难验证 C-R 方程恰好是 df 复线性的充要条件. □

- C-R 方程是 f 的实线性逼近恰为复线性的条件.
- 一阶偏导连续 \Rightarrow 实可微.

2.A.3 偏导算子

例 2.A.5 $f(z) = z^2 + \bar{z}$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$.

解 f 可以看成 $\zeta(s, t) = s^2 + t$ 和 $s = z, t = \bar{z}$ 的复合.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = 2z + 1.$$

常常把 $\frac{\partial \zeta}{\partial s}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ 写作 $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 2z + 1$. □

- 上例中的 f 恰好由 z, \bar{z} 的二元解析式给出. 这种表达式未必存在唯一.

- 如果可以严格地解释记号 $\frac{\partial f}{\partial z}$, 而不只是临时使用它, 会带来很多方便.
- $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ 启发我们规定 $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}$.

定义 2.A.6 (两个偏导算子) $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$.

命题 2.A.7 若有复可微函数 $\varphi(\zeta, \eta)$ 使得 $f(z) = \varphi(z, \bar{z})$, 则 $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$.

证 因为 $\frac{\partial}{\partial z}$ 是偏导算子, 故满足复合求导的链式法则, 故而

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}(z, \bar{z}) \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(z, \bar{z}) \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}(z, \bar{z}).$$

同理证第二个等式. \square

直觉计算法适用的情形

- 若 f 在 z_0 处实解析, 即 $f(z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} (x-x_0)^k (y-y_0)^l$, 令 $\varphi(\zeta, \eta) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl} \left(\frac{\zeta+\eta}{2} - x_0 \right)^k \left(\frac{\zeta-\eta}{2i} - y_0 \right)^l$, 就得满足前述命题要求的 φ .
- 此时计算 $\frac{\partial f}{\partial z}$, 即是以 $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ 替换 $f(z)$ 的表达式中的 x, y , 将 z 和 \bar{z} 视为独立变量, 对 z 求偏导; 计算 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 时视为对 \bar{z} 求导.

例 2.A.8 设 $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^3}{z^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$, 则 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0)$ 就不能当做对 \bar{z} 的偏导计算.

证 将 z 和 \bar{z} 看做独立变量, 对 $\varphi(z, \bar{z}) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^3}{z^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ 求偏导得 $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(0, 0) = \frac{d}{d\bar{z}}|_{\bar{z}=0} \varphi(0, \bar{z}) = 0$, 但

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{d}{dx}\Big|_{x=0} f(x) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0) = \frac{d}{dy}\Big|_{y=0} f(iy) = -i$$

给出 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0) = \frac{1}{2} \cdot (1 - i^2) = 1$. \square

命题 2.A.9 偏导算子与共轭可交换, 即 $\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}, \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$.

证 注意到 $\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}$, 就有

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} &= \overline{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}. \\ \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)} &= \overline{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}. \end{aligned} \quad \square$$

命题 2.A.10 (复合求导: 外层实可微, 内层实可导) (1) 设 $\zeta = \zeta(z(\mathbf{x}))$, 则 $\frac{\partial \zeta}{\partial x_k} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_k}$.
(2) 设 $\omega = \omega(\zeta(z))$, 则 $\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}$, $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}}$.

(3) 设 $\omega = \omega(\mathbf{x}(z))$, 则 $\frac{\partial \omega}{\partial z} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial z}$, $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{z}}$.

证 (1) 注意到 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$ 就有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial x_k} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_k} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial x}{\partial x_k} + i \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial y}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial x}{\partial x_k} + i \frac{\partial y}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial x}{\partial x_k} - i \frac{\partial y}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_k}.\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 有 $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y}$, 代入 $\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \omega}{\partial x} - i \frac{\partial \omega}{\partial y})$ 和 $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \omega}{\partial x} + i \frac{\partial \omega}{\partial y})$ 即可验证欲证等式成立.

(3) 将通常的复合求导公式代入偏导算子的定义即可验证欲证等式. \square

2.A.4 本性奇点

引理 2.A.11 设 z_0 是 f 的孤立奇点. 则 z_0 是 f 的极点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

证 (\Rightarrow) 若 z_0 是 f 的 m 级极点, 则 $f(z)$ 是 $z \rightarrow z_0$ 时的 m 阶无穷大, 当然有 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

(\Leftarrow) 因为 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, 故存在 $R > 0$ 使得 $\forall z \in \dot{U}_R(z_0), |f(z)| > 1$, 特别地 $f(z) \neq 0$. 于是 $\frac{1}{f}$ 在 $\dot{U}_R(z_0)$ 上有定义. 又 z_0 是 f 的孤立奇点, 必要时适当缩小 R , 可设 f 在 $\dot{U}_R(z_0)$ 上解析, 故 $\frac{1}{f}$ 还在 $\dot{U}_R(z_0)$ 上解析, 且 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, 故 z_0 是它的可去奇点, 补充定义 $\frac{1}{f}(z_0) = 0$, 则 z_0 是 $\frac{1}{f}$ 的孤立零点, 因此它是 f 的极点. \square

- 引理的意义在于说明孤立奇点处的无穷大总是有限阶的.

定理 2.3.16 的证明 z_0 是 f 的本性奇点 $\Leftrightarrow z_0$ 不是 f 的可去奇点且不是 f 的极点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在且 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不是无穷大 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 无意义. \square

命题 2.3.17 的证明 若在 z_0 的每个去心邻域中 $f(z) - l$ 都有根, 结论成立. 假设 $f(z) - l$ 在某个 $\dot{U}_\delta(z_0)$ 中没有根, 则 $g(z) = \frac{1}{f(z)-l}$ 在 $\dot{U}_\delta(z_0)$ 中解析. 若 g 在 z_0 附近有界, 则 z_0 是 g 的可去奇点 (命题 2.3.7), 故 $a = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)-l}$ 存在. 从而 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l + \frac{1}{a}$ 有意义, 矛盾. 故 g 在 z_0 附近无界, 从而结论成立. \square

注 Picard 大定理 (参见 [10] 10.4 节): f 在本性奇点的无穷小去心邻域上无穷多次取到每一个复数值, 至多有一个复数例外.

命题 2.3.20 的证明 (1) 由命题 2.2.9 知 $R \geq \rho$. 如果 $R > \rho$, 则 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ 是 $U_R(z_0)$ 上的解析函数且 $g|_{U_\rho(z_0)} = f$. 因为 $z_1 \in U_R(z_0)$, 而后者是开集, 故存在 $\delta > 0$ 使得 $U_\delta(z_1) \subset U_R(z_0)$. 由于 z_1 是 f 的孤立奇点, 适当缩小 δ , 可设 f 在 $\dot{U}_\delta(z_1)$ 上解析, 由唯一性定理知 $g|_{\dot{U}_\delta(z_1)} = f|_{\dot{U}_\delta(z_1)}$, 由于 g 在 z_1 处解析, 前式表明 z_1 是 f 的可去奇点, 矛盾.

(2) 与 (1) 的证明类似. \square

例 2.3.21 的证明 对任何 $0 < r < R$, f 在 $U_r(z_0)$ 只有有限个奇点 (否则 f 将在 $U_R(z_0)$ 中有非孤立奇点, 与仅有可去奇点矛盾). 因此论证过程和只有一个奇点 z_1 是类似的, 不妨假设就是如此.

令 $g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in U_R(z_0) \setminus \{z_1\} \\ \lim_{z \rightarrow z_1} f(z), & z = z_1 \end{cases}$, 则 g 在 $U_R(z_0)$ 上解析, 故 g 在 z_0 处的泰勒展开式收敛半径 $\geq R$. 但 \hat{f} 的展开式与 g 的展开式相同: 因为 $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0), n \in \mathbb{N}$. \square

现在我们把前面的两个“孤立”术语统一一下.

定义 2.A.12 设 $z_0 \in E$. 若存在 $R > 0$ 使得 $U_R(z_0) \cap E = \{z_0\}$, 则称 z_0 是 E 的孤立点. 若 E 中每个点都是 E 的孤立点, 则称 E 是离散集.

例 2.A.13 (1) 有限集是离散集 (2) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ 是离散集, 但 $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ 不是.

- $z_0 \in E$ 不是 E 的孤立点 $\Leftrightarrow z_0$ 是 E 的极限点, 即 $\exists \{z_n\} \subset E \setminus \{z_0\}$ 使得 $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.
- f 的孤立零点 (奇点) 就是 f 的零点 (奇点) 集的孤立点.

唯一性定理可叙述为: 若区域 D 上的两个解析函数 f, g 在某个非离散子集上相等, 则 $f = g$. 等价的说法是: 区域上不恒为零的解析函数, 其零点集是离散集.

第三章 围道积分

3.1 曲线积分

3.1.1 定义积分

- 若无特意说明, 本章中 D 都代表区域.

例 3.1.1 (1) 利用幂级数展开可知, 圆盘上的解析函数必有原函数.

(2) z^{-1} 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上有原函数 $\ln z$, 但它在 \mathbb{C}^* 上不存在原函数.

- 实变连续函数有原函数: 求导有积分这个逆运算 $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x)$.
- 为了构造复导数的逆运算, 考虑 D 中的曲线积分^{*}.

定义 3.1.2 ((分段) 光滑曲线, 简单闭围道 (piecewise) smooth curve, simply closed contour) (1)

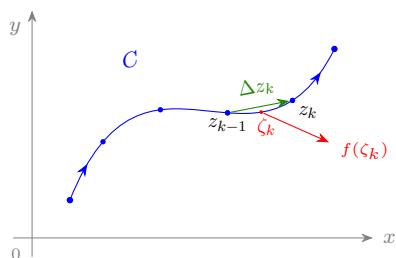
若 $z(t) \in C^1[a, b]$ 且 $z'(t) \neq 0$ ($\forall t$), 则称 C 为光滑曲线.

(2) 分段光滑曲线: 由有限段光滑曲线依次首尾相连得到.

(3) (简单) 闭围道: 起点和终点重合且 (无自交点) 的分段光滑曲线.

(4) 曲线 C 的弧长: $\ell(C) = \int_a^b |z'(t)| dt$.

例 3.1.3 设 $y = y(x) \in C^1[a, b]$, 则 $z(x) = x + iy(x)$ 是光滑曲线.



1. 分割路径 C 为 n 个小段 $\{C_k\}_{k=1}^n$.

2. 在每个 C_k 上取一点 ζ_k .

3. 计算复数乘积 $f(\zeta_k)\Delta z_k$ 的和:

$$\int_C f(z) dz \approx \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k.$$

4. 对黎曼和取分割无限加细的极限.

^{*}不沿直线段积分是因为: 1. 会破坏积分的可加性; 2. 函数的定义域可能不允许.

定义 3.1.4 (复积分 the line integral of f along C) 设 C 是分段光滑曲线, 若存在不依赖于具体分割和取点的极限

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\max_k \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$$

则称复变函数 f 沿 C 的复积分存在.

基本性质

$$(1) \int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i(v dx + u dy).$$

(2) 当 f 连续时, 复积分 $\int_C f(z) dz$ 存在.

(3) 若 C^- 是 C 的反向, 则 $\int_{C^-} f(z) dz = -\int_C f(z) dz$.

(4) 积分的线性性: $\int_C [\lambda f(z) + \mu g(z)] dz = \lambda \int_C f(z) dz + \mu \int_C g(z) dz$.

(5) 积分对路径的可加性: 若 C 由 C_1 和 C_2 两条曲线组成, 则

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

(6) ML 不等式: $|f(z)| \leq M \Rightarrow |\int_C f(z) dz| \leq M \cdot \ell(C)$. 此处 $\ell(C)$ 表示曲线 C 的弧长.

(7) 当 f 连续时, $\varphi(z) = \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$ 在 $\mathbb{C} \setminus C$ 上解析.

定义 3.1.5 当曲线 $C : z = t$ ($t \in [a, b]$) 是正向区间 $[a, b]$ 时, 相应的复积分称为复值定积分, 记作 $\int_a^b f(t) dt$.

- 当 f 是实值函数时 $\int_a^b f(t) dt = \lim_{\max_k \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta t_k$ 就是实定积分.
- 设 $f(t) = u(t) + iv(t)$, 由积分的线性性得

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt,$$

即“复值定积分 = 实部的实定积分 + $i \cdot$ 虚部的实定积分”.

复积分的意义

- 复积分是定积分的推广, 可帮助计算某些定积分.
- 复积分在一定条件下是求导的逆运算, 且提供了构造解析函数的方法.
- 复积分起源于分析自身的目的, 并非发轫于几何动机或物理问题.

3.1.2 变限积分

引理 3.1.6 (微积分第二基本定理) 设 f 是一元实变量复值函数. 若 $F' = f$, 则 $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

证 设 $f(t) = u(t) + iv(t)$, $F(t) = \omega(t) + i\eta(t)$, 则 $\omega' = u$, $\eta' = v$, 故

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt = (\omega + i\eta) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad \square$$

例 3.1.7 求积分 $I = \int_0^{2\pi} e^{it} \arg(e^{it}) dt$.

解 $\arg(e^{it})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上是分段函数: 当 $t \in [0, \pi]$ 时, $\arg(e^{it}) = t$; 当 $t \in (\pi, 2\pi]$ 时, $\arg(e^{it}) = t - 2\pi$. 故

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi t e^{it} dt + \int_\pi^{2\pi} (t - 2\pi) e^{it} dt = \int_0^{2\pi} t e^{it} dt - 2\pi \int_\pi^{2\pi} e^{it} dt \\ &= (1 + \frac{t}{i}) e^{it} \Big|_0^{2\pi} - \frac{2\pi}{i} e^{it} \Big|_\pi^{2\pi} = 2\pi i. \end{aligned} \quad \square$$

测试 3.1.8 求积分 $\int_0^1 e^{it} dt$.

定理 3.1.9 (化复积分为定积分) 设 f 在 C 上连续, C 有定向参数方程 $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, 则

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) d[z(t)].$$

证 以 $\ell(C)$ 记 C 的弧长 $\int_a^b |z'(t)| dt$. $\forall \varepsilon > 0$, 由定理 1.A.13, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(z(s)) - f(z(t))| < \frac{\varepsilon}{\ell(C) + 1}, \quad \forall |s - t| < \delta.$$

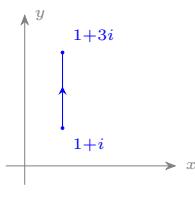
由 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 得 $\Delta z_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} z'(t) dt$, 故当 $\max_k \{t_k - t_{k-1}\} < \delta$ 时

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n f(z(\xi_k)) \Delta z_k - \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(z(\xi_k)) - f(z(t))] z'(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(z(\xi_k)) - f(z(t))| |z'(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{\ell(C) + 1} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |z'(t)| dt = \frac{\ell(C)}{\ell(C) + 1} \varepsilon < \varepsilon, \end{aligned}$$

这就说明 $\int_C f(z) dz = \lim_{\max_k \{t_k - t_{k-1}\} \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z(\xi_k)) \Delta z_k = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$. \square

例 3.1.10 设 C 是从 $1+i$ 到 $1+3i$ 的直线段, 计算 $\int_C (x+2iy) dz$.

解 C 有定向参数方程 $z = 1+it$, $t \in [1, 3]$. 故



$$\begin{aligned}
 \int_C (x + 2iy) dz &= \int_1^3 (1 + 2it) d(1 + it) \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 (1 + 2it) d(1 + 2it) \\
 &= \frac{1}{4} (1 + 2it)^2 \Big|_1^3 = -8 + 2i.
 \end{aligned}$$

- 以 z_0 为起点, z_1 为终点的有向线段: $z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$, $t \in [0, 1]$.

定理 3.1.11 (复积分版微积分第二基本定理) 若连续函数 f 在 C 上有原函数 F , 即 $F'(z) = f(z), \forall z \in C$, 则

$$\int_C f(z) dz = F(z_1) - F(z_0),$$

其中 z_0, z_1 分别是 C 的起点和终点.

证 设 $C : z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, 因为 $[F(z(t))]' = f(z(t))z'(t)$, 故

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt = F(z(t)) \Big|_a^b = F(z_1) - F(z_0).$$

例 3.1.12 设曲线 C : 从 0 沿虚轴向上到达 i . 求积分 $\int_C \frac{dz}{1+z}$.

解 对数主值 $\ln(1+z)$ 是 $\frac{1}{1+z}$ 在区域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \supset C$ 上的原函数, 故

$$\int_C \frac{dz}{1+z} = \ln(1+z) \Big|_0^i = \ln(1+i) = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i.$$

测试 3.1.13 求积分 $\int_C z + \cos z dz$, 其中 C 是单位圆周右半平面从 $-i$ 到 i 的部分.

- 设 $f \in C(D)$. 若对 D 中任何起终点分别相同的曲线 γ_1, γ_2 都有 $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$, 则称 f 在 D 中的积分与路径无关.

推论 3.1.14 当 f 在 D 上有原函数 F 时, 其在 D 中的积分与路径无关.

定义 3.1.15 (积分上限函数) 设函数 f 在区域 D 中的积分与路径无关, 在 D 中取定一点 z_0 . 称 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$, $z \in D$ 为 f 在 D 中的一个积分上限函数.

- $\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$ 表示沿 D 中任一条以 z_0 为起点、 z_1 为终点的曲线积分.
- 积分与路径无关时, 定积分记号 $\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$ 才有意义.

定理 3.1.16 (微积分第一基本定理) 设 f 在区域 D 上连续且 f 在 D 中的积分与路径无关. 则 f 的积分上限函数是 f 的一个原函数.

证 $0 \leq |\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| \leq \max_{|\zeta-z| \leq |\Delta z|} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0 (\Delta z \rightarrow 0).$

推论 3.1.17 设 $f \in C(D)$. 则 f 在 D 上有原函数 $\Leftrightarrow f$ 在 D 中的积分与路径无关.

例 3.1.18 由命题 2.4.24, 在 \mathbb{C} (或圆盘) 上解析的函数必有原函数.

例 3.1.19 f 在 D 上有原函数 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上解析.

证 (\Leftarrow) 前面的例子中已经看到解析函数不必有原函数.

(\Rightarrow) 设 $f(z) = F'(z)$, $z \in D$. 则 F 在 D 上解析, 又解析函数的导数仍解析, 所以 f 也在 D 上解析. \square

推论 3.1.20 (莫雷拉定理 Morera) 设 $f \in C(D)$. 若对 D 中任何闭围道 C 都有 $\oint_C f(z) dz = 0$, 则 f 在 D 中解析.

证 因为积分与路径无关 \Leftrightarrow 沿闭围道积分为零. \square

例 3.1.21 若 $f \in C(D)$ 且除有限条分段光滑曲线上的点外 f 都解析, 则 f 在 D 中解析.

证 因为在每个 $z_0 \in D$ 处, 总可找到一个邻域 $U_r(z_0)$ 使得对任何闭围道 $C \subset U_r(z_0)$ 有 $\oint_C f(z) dz = 0$. \square

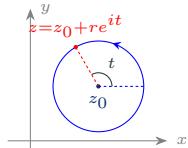
定理 3.1.22 (Radó 定理) 若 $f \in C(D)$, 且 f 在非零处 (即 $\{z \in D \mid f(z) \neq 0\}$) 解析, 则 f 在 D 中解析.

证 这是一个非常有趣的结论, 因为由 Morera 定理出发很容易猜想到它, 但其证明却不容易. 参见 [13] 11.8 节定理 1, 或 [14] 附录 III.7 节引理 7A. \square

3.1.3 计算积分

例 3.1.23 设 $n \in \mathbb{Z}$. 求积分 $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^n}$.

解 当 $n \neq 1$ 时积分为零: $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ 上有原函数.



逆时针圆周 $|z - z_0| = r$ 有定向参数方程 $z = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, 故

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{d(z_0 + re^{it})}{re^{it}} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i. \quad \square$$

练习 3.1.24 说明定积分记号 $\int_0^i z \cos z dz$ 的合理性, 并求其值.

解 因为 $z \cos z$ 在单连通域 \mathbb{C} 上解析, 故它有原函数, 因此定积分记号是合理的. 分部积分得 $\int_0^i z \cos z dz = z \sin z \Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz = e^{-1} - 1$. \square

虽然复变函数没有等式的中值定理, 我们仍然可以得到几乎同样有用的不等式中值定理:

例 3.1.25 设 f 在连续可微曲线段 $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 的每点处可导, 可导且 $|f'(z(t))| \leq M, \forall t \in [a, b]$, 则 $|f(z(b)) - f(z(a))| \leq M\ell$, 其中 ℓ 是曲线 C 的弧长.

证 由 ML 不等式得

$$|f(z(b)) - f(z(a))| = \left| \int_C f'(z) dz \right| \leq M\ell. \quad \square$$

- 例 3.1.25 实际上可以从导数的定义直接证明.
- 在证明幂级数可逐项求导时, 用到的估计 (2.A.3) 可从例 3.1.25 得到. 而区域上导数恒为零的复变函数是常数这一事实也可直接从例 3.1.25 得到, 而不必求助于实变函数的结论.

例 3.1.26 若 g 有原函数 G 且 $f(z(t)) d[z(t)] = g(\omega(t)) d[\omega(t)]$, 则

$$\int_a^b f(z(t)) d[z(t)] = G(\omega(t)) \Big|_a^b.$$

原函数计算的一些规则

- 若 $f \cdot g'$ 有原函数, 则 $g \cdot f'$ 也有, 且成立分部积分公式 (f, g 有原函数 $\Rightarrow fg'$ 有原函数, 例如 $f = \frac{1}{z^2}, g = z^2$)

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(z) d[g(z)] = f(z)g(z) \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} g(z) d[f(z)].$$

- 设 f 在 D 上有原函数, $\varphi : \Omega \rightarrow D$ 是解析函数. $\zeta_i \in \Omega, \xi_i \in D$ ($i = 1, 2$).
- (1) $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ 在 Ω 上有原函数, 且成立换元公式

$$\int_{\varphi(\zeta_1)}^{\varphi(\zeta_2)} f(z) dz = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(\varphi(\zeta)) d[\varphi(\zeta)].$$

- (2) 若 $F' = f$, 则 $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, 即有凑微分公式

$$\int f(\varphi(\zeta)) d[\varphi(\zeta)] = \int f(z) dz \Big|_{z=\varphi(\zeta)}.$$

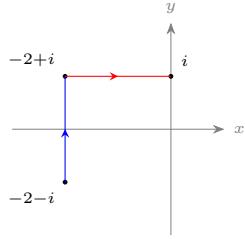
- 当不确定 f 是否在 D 上有原函数时, 可用双射解析换元 $\varphi : \Omega \rightarrow D$, 即 φ 解析且为双射: $z(t) \leftrightarrow \varphi^{-1}(z(t))$

$$\int_C f(z) dz = \int_{\varphi^{-1} \circ C} f(\varphi(\zeta)) d[\varphi(\zeta)].$$

例 3.1.27 设曲线 C : 先从 $-2 - i$ 平行于虚轴向上到达 $-2 + i$, 再从 $-2 + i$ 平行于实轴向右到达 i . 求积分 $\int_C \frac{dz}{1+z}$.

解 C 上从 $-2 + i$ 到 i 这一段包含在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ 中, 故其上的积分为

$$\ln(1+z) \Big|_{-2+i}^i = \ln(1+i) - \ln(-1+i) = -\frac{\pi}{2}i.$$



从 $-2-i$ 到 $-2+i$ 这段可用参数 $z = -2+it$ 算:

$$\int_{-1}^1 \frac{d(-2+it)}{it-1} = \int_{-1}^1 \frac{(-1-it)i dt}{1+t^2} \stackrel{\text{奇偶性}}{=} -i \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}i.$$

$$\text{综上得 } \int_C \frac{dz}{1+z} = -\frac{\pi}{2}i - \frac{\pi}{2}i = -\pi i. \quad \square$$

- 若用 $\ln(1+z) \Big|_{-2-i}^i = \pi i$ 则是错误的.

定理 3.1.28 洛朗级数在收敛圆环 D 内可逐项积分: $\forall C \subset D$

$$\int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_C c_n(z-z_0)^n dz.$$

推论 3.1.29 圆环 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 上的解析函数 f 洛朗展开式的系数为

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}},$$

其中 $r \in (R_1, R_2)$.

证 设 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $R_1 < |z-z_0| < R_2$, 记 $C: |z-z_0| = r$.

$$\oint_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k dz}{(z-z_0)^{n+1-k}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_C \frac{c_k dz}{(z-z_0)^{n+1-k}} \stackrel{\text{例3.1.23}}{=} 2\pi i c_n. \quad \square$$

推论 3.1.30 设 f 在 $\mathring{U}_R(z_0)$ 上解析, 则

$$\text{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz,$$

其中 $r \in (0, R)$.

证 由推论 3.1.29, $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{-1+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz$. \square

推论 3.1.31 设 f 在 $|z-z_0| > R$ 上解析, 则

$$\text{Res}_{\infty}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz,$$

其中 $r \in (R, +\infty)$.

证 同上有 $-c_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz$. \square

3.2 道路变形

3.2.1 积分定理

定理 3.2.1 (柯西积分定理) 设 D 是单连通域, $f \in H(D)$. 则(1) f 沿 D 中任何闭围道的积分均为零 (2) 若还有 ∂D 是简单闭围道, 且 $f \in C(\overline{D})$ 则 $\oint_{\partial D} f(z) dz = 0$. (从 Goursat 证明可知, 这是一个局部-整体定理)

证 (1) 可以转化为 (2).

(2) 这个定理在加上 f' 连续的条件下可以用格林 (Green) 公式和 C-R 方程简洁地证明:

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = \oint_{\partial D} u dx - v dy + i(v dx + u dy) = \iint_D -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

一般情形的证明由古萨 (Goursat) 给出, 参见 [1] 定理 3.2.3. \square

推论 3.2.2 f 在单连通域 D 上有原函数 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上解析.

证 这是因为积分与路径无关 \Leftrightarrow 沿闭围道积分为零. \square

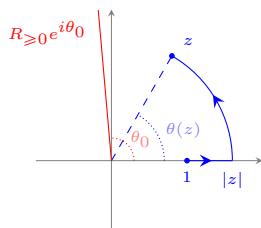
例 3.2.3 $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 是单连通的, 故 $\frac{1}{z}$ 在 D 上有原函数.

例 3.2.4 一条简单闭围道内部的区域是单连通的. 故在某简单闭围道内部 D 解析的函数, 都在 D 上有原函数.

例 3.2.5 设 $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ 求对数函数在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} e^{i\theta_0}$ 上的解析分支 φ , 使得 $\varphi(1) = 0$.

解 因为 $\varphi'(z) = \frac{1}{z}$, 单连通域 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} e^{i\theta_0}$ 中的变限积分 $\varphi(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} e^{i\theta_0}$ 给出的函数就是例题所求. 下面来计算这个积分.

任取 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} e^{i\theta_0}$, 令 $\theta(z) = (\theta_0 - 2\pi, \theta_0) \cap \text{Arg } z$ 为 z 的位于 $(\theta_0 - 2\pi, \theta_0)$ 中的辐角. 令 C 为下述曲线: 先沿实轴从 1 到 $|z|$, 再将 $|z|$ 绕原点逆时针旋转角度 θ 到达 z . 则



$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int_C \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^{|z|} \frac{dx}{x} + \int_0^{\theta(z)} \frac{d(|z|e^{it})}{|z|e^{it}} \\ &= \ln |z| + \int_0^{\theta(z)} i dt = \ln |z| + i\theta(z). \end{aligned}$$

当 $\theta_0 = \pi$ 时, $\theta(z) = \arg z$ 是 z 的辐角主值, 此时算得的 φ 就是对数主值 $\ln z$. \square

例 3.2.6 求 $\text{Arctan } z$ 在 $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$ 上的解析分支 $\text{arctg } z$, 使得 $\text{arctg } 0 = 0$.

解 因为 $(\arctg z)' = \frac{1}{1+z^2}$, 在单连通域 $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$ 中的积分

$$\arctg z = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-i, i]$$

给出的函数即为所求. 部分分式分解给出

$$\arctg z = \int_0^z \frac{-d\zeta}{i^2 - \zeta^2} = \frac{1}{2i} \int_0^z \left(\frac{-1}{i-\zeta} - \frac{1}{i+\zeta} \right) d\zeta.$$

因为当 $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [-i, i]$ 时, $\frac{i-\zeta}{i+\zeta} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, 故 $\ln \frac{i-\zeta}{i+\zeta}$ 是 $\frac{-1}{i-\zeta} - \frac{1}{i+\zeta}$ 的原函数. 因此

$$\arctg z = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-\zeta}{i+\zeta} \Big|_0^z = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-z}{i+z}. \quad \square$$

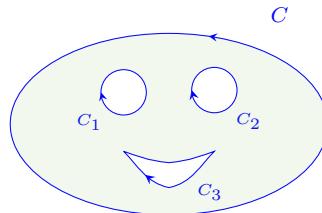
例 3.2.7 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ 的和.

解 收敛圆 $|z| < 1$ 是单连通的, 其上的解析函数在 $|z| < 1$ 内的积分与路径无关, 故可做定积分.

当 $|z| < 1$ 时

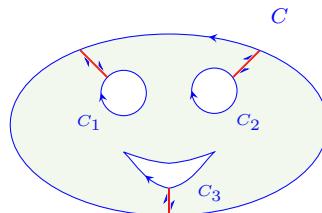
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^z \zeta^{n-1} d\zeta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z (-1)^{n-1} \zeta^{n-1} d\zeta = \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} (-\zeta)^{n-1} d\zeta \\ &= \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta} = \ln(1+\zeta) \Big|_0^z = \ln(1+z). \end{aligned} \quad \square$$

- 设区域 D 由有限条互不相交的简单闭围道 C, C_1, \dots, C_n 围成, 其中 C 是外边界, C_1, \dots, C_n 是内边界.



定义 3.2.8 赋予 D 的外边界 C 逆时针定向, 内边界 C_1, \dots, C_n 顺时针定向, 称如此定向的 $C \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$ 为 D 的正向边界, 记作 ∂D .

定理 3.2.9 (柯西积分定理 - 零调版) 若 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 则 $\oint_{\partial D} f(z) dz = 0$.



证 如图, 通过添加辅路径可以转化为单连通域边界的积分, 而相应的辅助路径彼此方向相反, 多余的积分相互抵消. \square

- 零调版本的柯西积分定理有更一般的形式, 参见 [11] 第 4 章定理 15, “零调”的几何意义参见 [8] 定理 6.11.

推论 3.2.10 (闭路变形原理) 设 D 的外边界是 C , 内边界是 C_1, \dots, C_n , 若 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 则

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$

定理 3.2.11 (柯西积分定理 - 同伦版) 若 γ_1 不经过 f 的奇点连续端端变形到 γ_2 , 则 $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$.

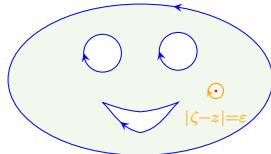
证 参见 [15] 定理 V.3.2 或 [12] 定理 4.11. \square

3.2.2 积分公式

定理 3.2.12 (柯西积分公式) 设 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 则 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$, $\forall z \in D$.

证 对取定的 $z \in D$, 当 $\varepsilon > 0$ 足够小时, $C_\varepsilon : |\zeta - z| = \varepsilon$ 完全位于 D 中.

在 $D \setminus \overline{U_\varepsilon(z)}$ 上对 $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 应用柯西积分定理得



$$\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 得

$$\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z). \quad \square$$

- 应用 ML 不等式可给出极限式的严格证明

$$\begin{aligned} \left| \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i f(z) \right| &= \left| \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z) d\zeta}{\zeta - z} \right| \leq \ell(C_\varepsilon) \max_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} \\ &\leq 2\pi \max_{|\zeta - z| \leq \varepsilon} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0 \ (\varepsilon \rightarrow 0^+) \end{aligned}$$

最后的极限为零是因为 f 在 z 处连续.

- 解析函数 f 的值完全由边界曲线上的值确定.
- 取 $D : |\zeta - z| \leq r$, 得到平均值性质 $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta$. 平均值性质: 定常温度场.

构造新解析函数

设 f 是简单闭围道 $C = \partial D$ 上的连续函数, 则

$$\varphi(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus C$$

在 $\mathbb{C} \setminus C$ 上解析. 当 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$ 时, $\varphi(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \notin \bar{D}. \end{cases}$

例 3.2.13 试求 $|z| \neq 1$ 上的解析函数 $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{x d\zeta}{\zeta - z}$.

解 因为在 $|\zeta| = 1$ 上 $x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2} = \frac{\zeta}{2} + \frac{1}{2\bar{\zeta}}$, 所以

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \left[\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} \right] d\zeta = \begin{cases} \frac{z}{2}, & |z| < 1, \\ \frac{-1}{2z}, & |z| > 1. \end{cases}$$
□

定理 3.2.14 (导数的柯西积分公式) 若 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$, 则 $\forall z \in D, n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

推论 3.2.15 (用 $|f|$ 控制 $|f^{(n)}|$) 设 D 是简单闭围道 C 的内部, $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$, 则

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \ell(C) \max_{\zeta \in C} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}}, \quad \forall z \in D.$$

例 3.2.16 (Cauchy: 刘维尔 (Liouville) 定理) 设 $f \in H(\mathbb{C})$. 若 f 有界, 则 f 是常数.

证 设 $|f(z)| \leq M$. 任取 $z \in \mathbb{C}$, 在推论 3.2.15 中取 $C : |\zeta - z| = R$ 则有

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$
□

- $\sin z$ 和 $\cos z$ 无界不是偶然现象.
- Picard 小定理: 若 $f \in H(\mathbb{C})$ 取值漏掉两个点, 则它是常数.

推论 3.2.17 (代数基本定理) 每个非常数复多项式必有复零点.

证 若非常数多项式 f 没有零点, 则 $\frac{1}{f} \in H(\mathbb{C})$. 因为 f 是次数大于等于 1 的多项式, 所以 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{f(z)} = 0$, 这说明连续函数 $\frac{1}{f}$ 是有界的, 由刘维尔定理得 $\frac{1}{f}$ 是常数, 从而 f 是常数, 矛盾. □

思考题 3.2.18 设 $f \in H(\mathbb{C})$, 且 $|f(z)| \leq \sqrt{|z|}, \forall z \in \mathbb{C}$. 证明 $f \equiv 0$.

3.2.3 洛朗展开

定理 3.2.19 圆环 $D : R_1 < |z - z_0| < R_2$ 上的解析函数能展开为洛朗级数.

证 任取 $z \in D$ 及 $r_1 < r_2$ 使得 $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$. 在柯西积分公式中将 $\frac{1}{\zeta - z}$ (作为 z 的函数) 在 $r_1 < |\zeta - z_0| < r_2$ 上展开得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n f(\zeta) d\zeta}{(z - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

因为 $r_1 < |z - z_0| < r_2$, 与定理 3.1.28 同样推理知求和号可以与积分号交换:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n}} \right] (z - z_0)^{-n-1}.$$

由于系数积分与 r_1, r_2 无关, f 在 D 上有统一的洛朗展开式. \square

推论 3.2.20 圆盘 $D : |z - z_0| < R$ 上的解析函数能展开为泰勒级数.

证 将 f 在圆环 $0 < |z - z_0| < R$ 上展开得

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

展开式负幂项的系数

$$c_{-n} = \oint_{|z-z_0|=\frac{R}{2}} (z - z_0)^{n-1} f(z) dz = 0,$$

上式最后一个等号成立是因为被积函数在 $|z - z_0| \leq \frac{R}{2}$ 上解析. 所以

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R.$$

由连续性, 上式在 z_0 处也成立. \square

3.3 留数定理

3.3.1 内部形式

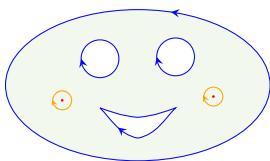
定理 3.3.1 (留数定理 Cauchy) 设 f 连续到 ∂D , 在 D 内部只有有限个奇点 $\{z_k\}_{k=1}^n$, 则

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f)_{z_1} + \dots + \operatorname{Res}(f)_{z_n}].$$

证 取充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $U_{2\varepsilon}(z_k)$ 互不相交且均位于 D 内部.

记 $C_k : |z - z_k| = \varepsilon$, 则 f 在 ∂D 和 $\{C_k\}_{k=1}^n$ 围成的区域中无奇点, 由零调版柯西积分定理得

$$\oint_{\partial D} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = 0.$$



由 f 在 $0 < |z - z_k| < 2\varepsilon$ 中解析得 $\oint_{C_k} f(z) dz \xrightarrow{\text{推论3.1.30}} 2\pi i \operatorname{Res}_{z_k}(f)$, 故

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k}(f). \quad \square$$

例 3.3.2 计算积分 $I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \sin^9 z}$.

解 被积函数在 $|z|=1$ 内只有奇点 0, 又它是偶函数, 故 $\operatorname{Res}_0 \frac{1}{z \sin^9 z} = 0$. 依留数定理 $I = 0$. \square

测试 3.3.3 求积分 $\oint_{|z|=1} f(z) dz$, 其中 $f(z) = \frac{e^{2iz}}{(4z-\pi) \sin 2z}$.

解 f 在 $|z|=1$ 内有奇点 $z_1 = 0$ 和 $z_2 = \frac{\pi}{4}$, 均为 1 级极点.

$$\operatorname{Res}_0(f) = \frac{e^{2iz}}{(4z-\pi)2\cos 2z} \Big|_{z=0} = \frac{-1}{2\pi}, \quad \operatorname{Res}_{z_2}(f) = \frac{e^{2iz}}{4\sin 2z} \Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{i}{4},$$

因此留数定理给出 $\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{-1}{2\pi} + \frac{i}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} - i$. \square

我们知道单连通域上的解析函数有原函数, 对于由一个单连通域去掉有限个点 $\{z_k\}_{k=1}^n$ 组成的非单连通域, 其上的解析函数可由在这些点处的留数判断其是否有原函数.

推论 3.3.4 设 $\{z_k\}_{k=1}^n$ 是单连通域 D 中的点, $f \in H(D \setminus \{z_k\}_{k=1}^n)$. 则 f 在 $D \setminus \{z_k\}_{k=1}^n$ 上有原函数 $\Leftrightarrow \operatorname{Res}_{z_k}(f) = 0, k = 1, \dots, n$.

例 3.3.5 判断 $\frac{1}{z^2+1}$ 和 $\frac{1}{z^2}$ 在其定义域上是否有原函数.

解 (1) $\frac{1}{z^2+1}$ 的定义域为 $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. 因为

$$\operatorname{Res}_i \left(\frac{1}{z^2+1} \right) = \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i} \neq 0,$$

故 $\frac{1}{z^2+1}$ 在其定义域中没有原函数.

(2) $\frac{1}{z^2}$ 的定义域为 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 我们知道它有不定积分 $-\frac{1}{z} + \mathbb{C}$. 现在这一事实亦可由留数 $\operatorname{Res}_0(\frac{1}{z^2}) = 0$ 印证. \square

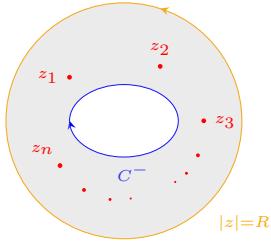
3.3.2 外部形式

定理 3.3.6 (留数定理 - 外部形式) 设 f 在简单闭围道 C 上无奇点, 在 C 外只有有限个奇点 $\{z_k\}_{k=1}^n$, 则

$$\oint_C f(z) dz = -2\pi i \left[\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k}(f) + \operatorname{Res}_\infty(f) \right].$$

证 取充分大的 $R > 0$ 使得 f 的有限奇点均在 $|z| < R$ 内.

由留数定理



$$\oint_{|z|=R} f(z) dz - \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

因为 $\oint_{|z|=R} f(z) dz \xrightarrow{\text{推论3.1.31}} -2\pi i \text{Res}_\infty(f)$, 故

$$\oint_C f(z) dz = -2\pi i \left[\text{Res}_\infty(f) + \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) \right]. \quad \square$$

例 3.3.7 计算积分 $\oint_{|z|=2} f(z) dz$, 其中 $f(z) = \frac{z^3+z}{(z^2-1)^{100}(8-z^2)}$.

解 f 位于曲线 $|z|=2$ 内的奇点 ± 1 是 100 级极点, 在 $|z|=2$ 外的普通奇点 $\pm \sqrt{8}$ 是 1 级极点, 利用外部奇点计算更方便.

$$\text{Res}_\infty(f) + \sum_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \text{Res}(f) \xrightarrow{\text{规则④}} -\frac{9}{7^{100}}.$$

因为 $f(\infty) = 0$, 故 ∞ 是 f 的可去奇点, 故

$$\text{Res}_\infty(f) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - 0] = -\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^4 + z^2}{(z^2 - 1)^{100}(8 - z^2)} = 0.$$

由外部形式的留数定理得

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz = -2\pi i \left[\text{Res}_\infty(f) + \sum_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \text{Res}(f) \right] = \frac{18\pi i}{7^{100}}. \quad \square$$

例 3.3.8 求积分 $\oint_{|z|=1} f(z) dz$, 其中 $f(z) = \frac{1}{z^4 \sin \frac{1}{z}}$.

解 f 有无限个普通奇点 (0 和 $\{\frac{1}{k\pi}\}_{k=\pm 1, \pm 2, \dots}$) 且均位于 $|z|=1$ 内, 因此内部形式的留数定理不适用. 由外部形式的留数定理

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = -2\pi i \text{Res}_\infty(f).$$

因为 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 故 ∞ 是 f 的可去奇点, 故

$$\text{Res}_\infty(f) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - 0] = -\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^3 \sin \frac{1}{z}} = 0.$$

因此 $\oint_{|z|=1} f(z) dz = 0$. \square

- 注意 $\text{Res}_{\pm \frac{1}{k\pi}}(f) = (-1)^{k-1} k^2 \pi^2$, 因此 $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}_{\pm \frac{1}{k\pi}}(f)$ 是发散的.
- 0 是 f 的非孤立奇点, 其留数没有意义.

练习 3.3.9 设 C 是单位圆周 $|z|=1$. 分别计算下列积分 (1) $\oint_C \bar{z} dz$ (2) $\oint_C |\bar{z}| dz$ (3) $\oint_C \operatorname{Re}(z) dz$ (4) $\oint_C |z+1|^2 dz$

解 (1) $\oint_C \bar{z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq \overline{\oint_C z dz}$.

(2) $\oint_C |\bar{z}| dz = \oint_C 1 dz = 0 \neq |\oint_C \bar{z} dz|$.

(3) $\oint_C \operatorname{Re}(z) dz = \frac{1}{2} \oint_C (z + \bar{z}) dz = \pi i \neq \operatorname{Re}(\oint_C z dz)$.

$$\begin{aligned} (4) \oint_C |z+1|^2 dz &= \oint_C (z+1)(\bar{z}+1) dz \\ &= \oint_C (2+z+\bar{z}) dz = 2\pi i \neq \left| \oint_C (z+1)^2 dz \right|. \end{aligned}$$
□

3.4 算定积分

3.4.1 三角积分

设 $f(x, y)$ 是一个实变量二元有理函数, 即实变量二元多项式的商, 比如:

$$f(x, y) = \frac{x^{10} - 7x^2y^3 + 5iy^7}{x^{15} + y^8 + i(x^3y^2 + 1)}$$

就是一个实变量复值二元有理函数.

定理 3.4.1 设二元有理函数 $f(x, y)$ 的分母在单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上没有零点, 则

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz}.$$

- 右边的复积分用留数计算.
- 这个公式不必硬记, 我们通过下面的例子说明如何使用它.

例 3.4.2 用留数计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-3\sin\theta}$.

解 令 $z = e^{i\theta}$. 由欧拉公式 $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, 及 $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, 可得 (复值) 微分形式的等式

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-3\sin\theta} &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{5 - \frac{3}{2i}(z - z^{-1})} \frac{dz}{iz} \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{2 dz}{-3z^2 + 10iz + 3} = \oint_{|z|=1} \frac{2 dz}{(3iz+1)(iz+3)}. \end{aligned}$$

分母 $(3iz+1)(iz+3)$ 位于 $|z|=1$ 内的零点为 $-\frac{1}{3i} = \frac{i}{3}$, 故

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\sin\theta} d\theta = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{\frac{i}{3}} \left[\frac{2}{(3iz+1)(iz+3)} \right] = 2\pi i \cdot \frac{2}{3i(iz+3)} \Big|_{z=\frac{i}{3}} = \frac{\pi}{2}.$$
□

测试 3.4.3 用留数计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$.

解 令 $z = e^{i\theta}$. 则 $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$, 故

$$\frac{1}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \frac{1}{5 - 2(z + z^{-1})} \frac{dz}{iz} = \frac{dz}{i(-2z^2 + 5z - 2)} = \frac{dz}{i(-2z + 1)(z - 2)}.$$

分母 $(-2z + 1)(z - 2)$ 位于 $|z| = 1$ 内的零点为 $\frac{1}{2}$, 故

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta} = 2\pi i \cdot \text{Res}_{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{i(-2z + 1)(z - 2)} \right] = 2\pi i \cdot \frac{1}{-2i(z - 2)} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}. \quad \square$$

例 3.4.4 求积分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos 2\theta + \cos \theta - 5}$.

解 由 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ 得

$$\cos 2\theta + \cos \theta - 5 = 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 6 = (2\cos \theta - 3)(\cos \theta + 2).$$

令 $z = e^{i\theta}$, 则 $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$, 故

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos 2\theta + \cos \theta - 5} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z + \frac{1}{z} - 3) (\frac{z+z^{-1}}{2} + 2) iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2z dz}{i(z^2 - 3z + 1)(z^2 + 4z + 1)}.$$

被积函数 f 的分母位于 $|z| = 1$ 内的零点为 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 和 $\sqrt{3}-2$, 因此

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left[\text{Res}_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}(f) + \text{Res}_{\sqrt{3}-2}(f) \right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{2z}{i(2z-3) \cdot 7z} \Big|_{z=\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \frac{2z}{i(-7z)(2z+4)} \Big|_{z=\sqrt{3}-2} \right] \\ &= -\frac{2\pi}{7} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad \square$$

例 3.4.5 计算积分 $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} d\theta$ ($0 < p < 1$).

解 令 $z = e^{i\theta}$. 由 $\cos 2\theta = \frac{z^2 + z^{-2}}{2}$, $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ 及 $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ ($d\theta = \frac{dz}{iz}$) 得

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2 + z^{-2}}{2}}{1 - 2p \frac{z+z^{-1}}{2} + p^2} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z) dz,$$

其中 $f(z) = \frac{z^4 + 1}{2iz^2(z-p)(1-pz)}$ 位于 $|z| = 1$ 内的奇点为 $0, p$.

$$\begin{aligned} \text{Res}_0(f) &= \left[\frac{z^4 + 1}{2i(z-p)(1-pz)} \right]' \Big|_{z=0} \xrightarrow{\text{对数求导}} -\frac{1+p^2}{2ip^2} \\ \text{Res}_p(f) &= \frac{z^4 + 1}{2iz^2(1-pz)} \Big|_{z=p} = \frac{p^4 + 1}{2ip^2(1-p^2)} \end{aligned}$$

依留数定理得

$$I = 2\pi i \left[-\frac{1+p^2}{2ip^2} + \frac{p^4 + 1}{2ip^2(1-p^2)} \right] = \frac{2\pi p^2}{1-p^2}. \quad \square$$

3.4.2 有理积分

定理 3.4.6 设有理函数 f 的分母比分子至少高两次且分母没有实零点, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} [f(z)],$$

其中 $\{z_k\}_{k=1}^n$ 是分母在上半平面的零点.

由留数定理, 当 $R \gg 0$ 时

$$\int_{L_R}^{+\infty} f(z) dz + \int_{\Gamma_R}^{+\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k) > 0} \operatorname{Res}_{z_k}(f).$$

因为 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R}^{+\infty} f(z) dz = 0$, 令 $R \rightarrow +\infty$ 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k) > 0} \operatorname{Res}_{z_k}(f).$$

例 3.4.7 计算积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$.

解 1° 实方法. 做部分分式分解

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3} \frac{4(x^2+1)-(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+1} \right),$$

因此

$$I = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4 dx}{x^2+4} - \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{2}{3} \arctan 2x \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{3} \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{3}.$$

2° 复方法. 被积函数分母 $(x^2+1)(x^2+4)$ 的零点为 $\pm i, \pm 2i$, 其中在上半平面的是 i 和 $2i$, 且均为 1 级零点. 记 $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$, 则

$$\operatorname{Res}_i(f) = \frac{z^2}{(z^2+1)'(z^2+4)} \Big|_{z=i} = \frac{z}{2} \frac{1}{z^2+4} \Big|_{z=i} = \frac{i}{6}, \quad \operatorname{Res}_{2i}(f) = -\frac{i}{3},$$

因此 $I = 2\pi i \left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right) = \frac{\pi}{3}$. 两种方法计算结果是一致的. \square

测试 3.4.8 计算积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$.

解 被积函数分母 $(x^2+1)^5$ 的零点为 $\pm i$, 其中在上半平面的是 i . 记 $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^5}$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_i(f) &= \operatorname{Res}_i \left[\frac{1}{(z+i)^5(z-i)^5} \right] = \frac{1}{4!} \left[\frac{1}{(z+i)^5} \right]^{(4)} \Big|_{z=i} \\ &= \frac{(-1)^4 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4!(z+i)^9} \Big|_{z=i} = \frac{35}{28i}. \end{aligned}$$

故 $I = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_i(f) = \frac{35\pi}{128}$. \square

例 3.4.9 求积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx$.

解 复有理函数 $f(z) = \frac{z^2}{1+z^6}$ 在上半平面的奇点为 $e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{\pi i}{2}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}$, 均为分母的 1 级零点.

$$\text{Res}(f, e^{\frac{(2k+1)\pi i}{6}}) \stackrel{\text{规则④}}{=} \frac{z^2}{6z^5} \Big|_{z=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{6}}} = \frac{1}{6} e^{\frac{-(2k+1)\pi i}{2}} = \frac{(-1)^{k+1}}{6} i.$$

由定理 3.4.6 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = 2\pi i \cdot \frac{i}{6} [(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3] = \frac{\pi}{3}. \quad \square$$

3.4.3 三角因子

定理 3.4.10 设 $a > 0$. 有理函数 f 的分母至少比分子高一次且分母无实零点, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z)e^{iaz}]_{z_k}.$$

其中 $\{z_k\}_{k=1}^n$ 是分母在上半平面的零点.

例 3.4.11 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+4x+5} dx$.

解 分母 $(x+2)^2 + 1$ 在上半平面的零点为 $-2+i$, 记 $f(z) = \frac{e^{2iz}}{(z+2)^2+1}$.

$$\text{Res}(f) = \frac{e^{2iz}}{2(z+2)} \Big|_{z=-2+i} = \frac{e^{-4i-2}}{2i}.$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+4x+5} dx = \pi e^{-4i-2}$. \square

练习 3.4.12 计算积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-ix)e^{2ix}}{(x^2+4)(x^2+9)} dx$.

解 $f(z) = \frac{(z^2-iz)e^{2iz}}{(z^2+4)(z^2+9)}$ 的分母在上半平面的零点是 $2i$ 和 $3i$. 因为

$$\text{Res}_{2i}(f) = \frac{(z^2-iz)e^{2iz}}{2z(z^2+9)} \Big|_{z=2i} = \frac{ie^{-4}}{10}, \quad \text{Res}_{3i}(f) = \frac{(z^2-iz)e^{2iz}}{2z(z^2+4)} \Big|_{z=3i} = -\frac{ie^{-6}}{5},$$

由定理 3.4.10 得 $I = 2\pi i \cdot [\text{Res}_{2i}(f) + \text{Res}_{3i}(f)] = \frac{\pi}{5}(2e^{-6} - e^{-4})$. \square

a < 0 的情形

- 当定理 3.4.10 中 $a < 0$ 而其他条件不变时, 可通过换元 $x = -t$ 转换为 $-a > 0$ 的情形, 或直接应用相应版本的公式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im}(z_k) < 0} \text{Res}[f(z)e^{iaz}]_{z_k}. \quad (a < 0).$$

- 由欧拉公式 $e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$ 知

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) \cos \alpha x + i f(x) \sin \alpha x] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx\end{aligned}$$

- 故当 $f(x)$ 是实值函数且 α 是实数时 (Re 表实部, Im 表虚部)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx &= \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx \right], \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx &= \operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx \right].\end{aligned}$$

例 3.4.13 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4x+5} dx$.

解 由例 3.4.11

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+4x+5} dx = \pi e^{-4i-2} = \pi e^{-2} e^{-4i} = \pi e^{-2} (\cos 4 - i \sin 4),$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4x+5} dx = \operatorname{Re} [\pi e^{-2} (\cos 4 - i \sin 4)] = \pi e^{-2} \cos 4$. \square

例 3.4.14 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+\varepsilon^2} dx$ ($\varepsilon > 0$).

解 $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2+\varepsilon^2}$ 的分母 $z^2 + \varepsilon^2$ 在上半平面只有 1 级零点 εi .

$$\operatorname{Res}(f) = \left. \frac{ze^{iz}}{(z^2+\varepsilon^2)'} \right|_{z=\varepsilon i} = \frac{e^{-\varepsilon}}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+\varepsilon^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\varepsilon}}{2} = \pi i e^{-\varepsilon}.$$

因为 $\frac{x \sin x}{x^2+\varepsilon^2}$ 是偶函数, 所以

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+\varepsilon^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+\varepsilon^2} dx \right] = \frac{\pi}{2} e^{-\varepsilon}. \quad \square$$

例 3.4.15 (狄利克雷积分) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+\varepsilon^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} e^{-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$.

上例中极限与积分可交换的证明 任取 $\varepsilon > 0$. 因为

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x \sin x}{x^2+\varepsilon^2} \right) dx \right| &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} - \frac{x \sin x}{x^2+\varepsilon^2} \right| dx = \int_0^{+\infty} |\sin x| \left| \frac{\varepsilon^2}{x(x^2+\varepsilon^2)} \right| dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^2 dx}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{\pi}{2} \varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+\varepsilon^2} dx$. \square

- $\frac{\sin x}{x}$ 的原函数不是初等函数, 所以狄利克雷积分的计算需要各种特殊方法.

测试 3.4.16 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+4} dx$.

练习 3.4.17 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix}}{x^2+4x+5} dx$.

练习 3.4.18 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

例 3.4.19 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos cx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$ ($a > 0, b > 0, c > 0$).

解 (1) 先设 $a \neq b$. ai 和 bi 是 $f(z) = \frac{z^2 e^{icz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ 在上半平面的全部奇点.

$$\text{Res}(f, ai) \stackrel{\text{规则④}}{=} \frac{z^2 e^{icz}}{(z^2+a^2)'(z^2+b^2)} \Big|_{z=ai} = \frac{z}{2} \frac{e^{icz}}{z^2+b^2} \Big|_{z=ai} = \frac{aie^{-ac}}{2(b^2-a^2)}.$$

对称地 $\text{Res}(f, bi) = \frac{bie^{-bc}}{2(a^2-b^2)}$. 因此

$$I = \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \left\{ 2\pi i \left[\frac{aie^{-ac}}{2(b^2-a^2)} + \frac{bie^{-bc}}{2(a^2-b^2)} \right] \right\} = \frac{\pi}{2(b^2-a^2)} (be^{-bc} - ae^{-ac}). \quad (*)$$

(2) 再设 $a = b$. 此时 ai 是 2 级极点, 由

$$\text{Res}(f, ai) = \frac{d}{dz} \Big|_{z=ai} \frac{z^2 e^{icz}}{(z+ai)^2} = \frac{1-ac}{4ai} e^{-ac}$$

得 $I = \frac{\pi(1-ac)}{4a} e^{-ac}$. 可统一在 (*) 式中: $I(a, a) = \lim_{b \rightarrow a} I(a, b)$. \square

3.4.4 其他类型

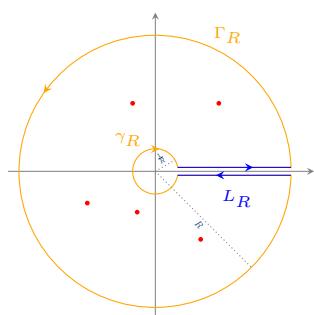
半轴积分

定理 3.4.20* 有理函数 f 分母比分子至少高两次且分母在 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ 上无零点, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = - \sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+} \frac{\text{Res}[f(z) \log z]}{z_k}.$$

其中 $\log z = \ln |z| + i[(0, 2\pi) \cap \text{Arg } z]$ 是 $\text{Ln } z$ 在 $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ 上的解析分支.

\Leftrightarrow 记 $g = f(z) \log z$, 则当 $R \gg 0$ 时



$$\int_{L_R + \Gamma_R + \gamma_R} g(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+} \frac{\text{Res}(g)}{z_k}.$$

\Leftrightarrow 在定理条件下 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R + \Gamma_R} g(z) dz = 0$, 故

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+} \frac{\text{Res}(g)}{z_k} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} g(z) dz \\ &= -2\pi i \int_0^{+\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

例 3.4.21* 设 $n \in \mathbb{N}^* + 1$, 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$.

解 函数 $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ 满足定理 3.4.20* 的条件, 其奇点为

$$z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

由留数计算规则得

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\log z}{1+z^n}, z_k\right] = \frac{\log z_k}{nz_k^{n-1}} = -\frac{2k+1}{n^2} \pi i z_k.$$

由定理 3.4.20* 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi i}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) z_k = \frac{2\pi i}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k z_k = \frac{2\pi i}{n^2} e^{\frac{\pi i}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} k (e^{\frac{2\pi i}{n}})^k$$

记 $s = \sum_{k=0}^{n-1} k (e^{\frac{2\pi i}{n}})^k$. 因为 $(e^{\frac{2\pi i}{n}})^n = 1$, 所以

$$e^{\frac{2\pi i}{n}} s = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(e^{\frac{2\pi i}{n}})^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{k+1} = n + s - \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}} - (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{n+1}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} = n + s \Rightarrow s = \frac{n}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1}.$$

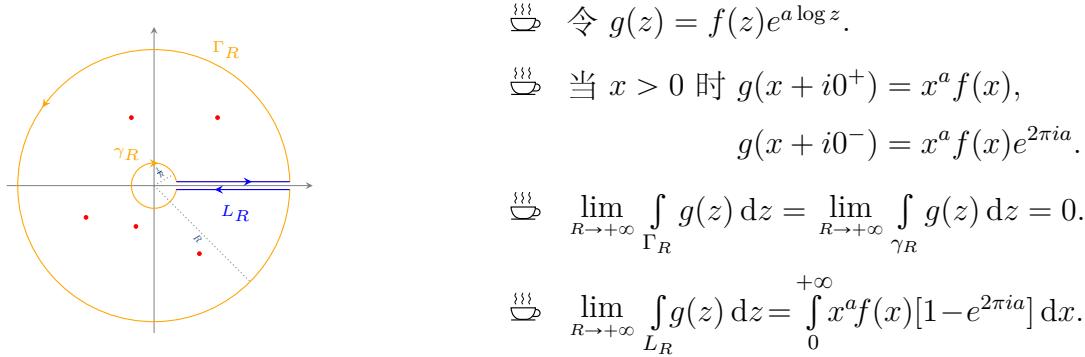
代入前面的式子就有

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{2\pi i}{n^2} \frac{e^{\frac{\pi i}{n}} n}{e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1} = \frac{2\pi i}{n} \frac{1}{e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}. \quad \square$$

- 例如取 $n = 3$ 就得到 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi$.

定理 3.4.22* 设 $0 < a < 1$, 有理函数 f 分母比分子至少高两次且在 \mathbb{R}_+ 上至多在 0 处有 1 级极点, 则

$$\int_0^{+\infty} x^a f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+} \operatorname{Res}[f(z) e^{a \log z}].$$



- 对于非整实数 a , $\int_0^{+\infty} x^a f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^{a-|a|} (f(x)x^{|a|}) dx$ 可化为 $0 < a < 1$ 的情形.

例 3.4.23 设 $0 < a < 1$, 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+x)}$.

解 记 $f(z) = \frac{1}{z(1+z)}$, 则 f 满足定理 3.4.22* 的条件, 且它在 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ 上只有 -1 这一个奇点, 故

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+x)} = \int_0^{+\infty} x^{1-a} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(1-a)}} \operatorname{Res}[f(z) e^{(1-a) \log z}].$$

由留数计算规则得

$$\operatorname{Res}_{-1} [f(z)e^{(1-a)\log z}] = \frac{e^{(1-a)\log z}}{z} \Big|_{z=-1} = -e^{\pi i(1-a)}.$$

代入前式得

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+x)} = \frac{-2\pi i e^{\pi i(1-a)}}{1-e^{2\pi i(1-a)}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi i(1-a)}-e^{-\pi i(1-a)}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}. \quad \square$$

练习 3.4.24 设 $0 < a < 1$, 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^a dx}{(1+x)^2}$.

对数因子

定理 3.4.25* 实变复值有理函数 f 分母比分子至少高两次且分母在 \mathbb{R}_+ 上无零点, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln x dx = -\frac{1}{2} \sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+} \operatorname{Res}_{z_k} [f(z) \log^2 z] - \pi i \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

当 f 在 \mathbb{R} 上取实值时

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+} \operatorname{Res}_{z_k} [f(z) \log^2 z] \right\}.$$

\Leftrightarrow 考虑 $g(z) = f(z) \log^2 z$.

\Leftrightarrow $x > 0$ 时 $g(x+i0^+) = f(x) \ln^2 x$,

$\Leftrightarrow g(x+i0^-) = f(x)(\ln x + 2\pi i)^2$.

$\Leftrightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R + \Gamma_R} g(z) dz = 0,$
 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} g(z) dz = -4\pi i \int_0^{+\infty} f(x)(\ln x + \pi i) dx.$

这给出第一个算式.

\Leftrightarrow 当 $f(x)$ 恒取实值时, 考察第一个算式两边的实部就得到第二个算式.

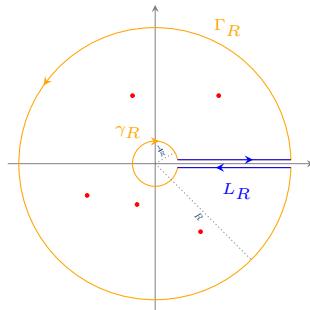
例 3.4.26 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x+1)(x+2)}$.

解 函数 $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ 有两个奇点 $-1, -2$. 因为

$$\operatorname{Res}_{-1} (f(z) \log^2 z) = \frac{\log^2 z}{z+2} \Big|_{z=-1} = -\pi^2,$$

$$\operatorname{Res}_{-2} (f(z) \log^2 z) = \frac{\log^2 z}{z+1} \Big|_{z=-2} = \pi^2 - \ln^2 2 - 2\pi i \ln 2,$$

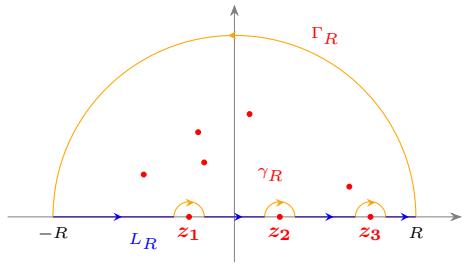
所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x+1)(x+2)} = -\frac{1}{2}(-\pi^2 + \pi^2 - \ln^2 2) = \frac{\ln^2 2}{2}$. \square



有暇积分

定理 3.4.27* 设 $a \geq 0$, 实变复值有理函数 f 分母比分子至少高两次 ($a > 0$ 时只需高一次) 且在实轴上至多有 1 级极点, 则 Cauchy 主值

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k) > 0} \operatorname{Res}[f(z)e^{iaz}] + \pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k) = 0} \operatorname{Res}[f(z)e^{iaz}].$$



在以 1 级极点 z_j 为圆心, 以 $\frac{1}{R}$ 为半径的顺时针上半圆周 $\gamma_{R,j}$ 上有

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{R,j}} f(z)e^{iaz} dz \\ = -\pi i \operatorname{Res}_{z_j} [f(z)e^{iaz}] \end{aligned}$$

上式对以 z_j 为 1 级极点的函数均成立.

- 其他类型的积分, 如 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 在正实轴上有奇点时, 可同样讨论.

例 3.4.28 求狄利克雷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

解 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 满足定理 3.4.27* 的条件. $f(z) = \frac{1}{z}$ 在上半平面无奇点, 在实轴上有一个 1 级极点 0, 故

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{R} < |x| < R} f(x)e^{ix} dx = \pi i \operatorname{Res}_0 \left(\frac{e^{iz}}{z} \right) = \pi i e^{i0} = \pi i.$$

取虚部并注意到 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\pi i) = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

注 定理 3.4.27* 对非有理函数有效: 只要 f 在 $y \geq 0$ 上只有有限个奇点, 在实轴上至多有 1 级极点, 且 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)e^{iaz} dz = 0$.

例 3.4.29 求积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

解 函数 $f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$ 仅有 $z=0$ 这一个奇点, 且是 1 级极点. 显然

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^2} dz - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

故定理 3.4.27* 的算式成立 ($a=0$), 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \pi i \operatorname{Res}_0(f) = \pi i \lim_{z \rightarrow 0} (1-e^{iz})' = -\pi i \cdot i = \pi.$$

由于 $\frac{1-\cos x}{x^2}$ 是偶函数, 故

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

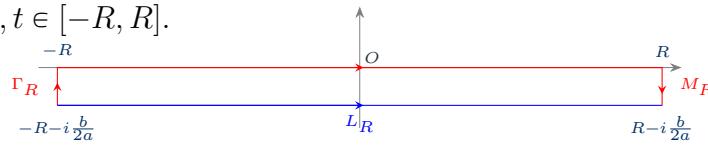
算定积分的留数方法并不局限于前面介绍的几个有限公式, 下面看几个其他的例子.

例 3.4.30 (高斯型积分) 设 $a > 0$. 求积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$.

解 考虑积分 $A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{ibx} dx$. 配方得

$$e^{\frac{b^2}{4a}} A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x - \frac{bi}{2a})^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} e^{-az^2} dz,$$

其中 $L_R: z(t) = t - \frac{bi}{2a}, t \in [-R, R]$.



由于 e^{-az^2} 处处解析, 其积分与路径无关, 所以

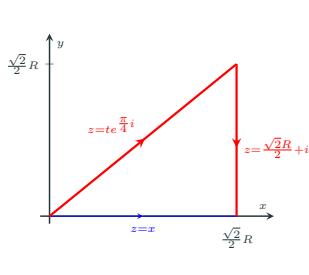
$$\int_{L_R} e^{-az^2} dz = \int_{\Gamma_R} e^{-az^2} dz + \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx + \int_{M_R} e^{-az^2} dz.$$

在 Γ_R 和 M_R 上 $|e^{-az^2}| \leq e^{-aR^2 + \frac{b^2}{4a}}$, 故 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R + M_R} e^{-az^2} dz = 0$, 从而

$$I = \frac{1}{2} A = \frac{e^{-\frac{b^2}{4a}}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}. \quad \square$$

例 3.4.31 (菲涅耳积分 Fresnel integral) 求积分 $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ 和 $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$.

解 任取 $R > 0$, 考虑积分 $I_R = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{ix^2} dx$.



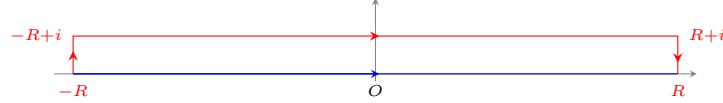
因为 e^{iz^2} 在整个平面上解析, 所以其积分与路径无关, 从而

$$I_R = \int_0^R e^{i(t e^{\frac{\pi i}{4}})^2} d\left(t e^{\frac{\pi i}{4}}\right) - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{i(\frac{\sqrt{2}}{2}R+it)^2} d\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}+it\right)$$

整理得 $I_R = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^R e^{-t^2} dt - i \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{i(\frac{1}{2}R^2-t^2)-\sqrt{2}Rt} dt$. 又 $\left| i \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{i(\frac{1}{2}R^2-t^2)-\sqrt{2}Rt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2}Rt} dt = \frac{1}{\sqrt{2}R}$, 令 $R \rightarrow +\infty$ 得 $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 故

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad \square$$

例 3.4.32 设 $a, b \neq 0$ 是实数. 求 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x} dx$.



解 因为 $f(z) = \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z}$ 在 \mathbb{C} 上的积分与路径无关, 故

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_{-R}^{-R+i} f(z) dz + \int_{-R+i}^{R+i} f(z) dz + \int_{R+i}^R f(z) dz \right].$$

上式中第一项和第三项极限均为零, 故

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R+i}^{R+i} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x+i) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-a} e^{iax} - e^{-b} e^{ibx}}{x+i} dx.$$

由定理 3.4.10, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x+i} dx = -2\pi i e^a u(-a)$, 其中 u 是单位阶跃函数, 故

$$I = 2\pi i [u(-b) - u(-a)]. \quad \square$$

- I 也可由 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx \stackrel{\text{令 } x=\frac{t}{a}}{=} \operatorname{sgn}(a) \pi$ 得到.

3.A 附录

3.A.1 逐项积分

- 记号 $\int_C f(z)|dz|$ 表示 f 沿 C 的第一型曲线积分, 即 $\int_C f(z)|dz| = \int_a^b f(z(t))|z'(t)| dt$.
- ML 不等式是 $|\int_C f(z) dz| \leq \int_C |f(z)| |dz|$ 的特例.

引理 3.A.1 (勒贝格逐项积分定理 Lebesgue) 当 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_C |f_n(z)| |dz| < +\infty$ 时可逐项积分:

$$\int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_C f_n(z) dz.$$

证 参见 [4] 推论 4.16. \square

勒贝格逐项积分定理是一个非常强大的工具, 绝大多数此类问题都可以靠它解决. 洛朗级数的逐项积分容易以之证明, 具体过程留给读者练习; 这里再给出一个直接的证明.

定理 3.1.28 的证明 设 $D : R_1 < |z - z_0| < R_2$. 因为 C 是有界闭集, 存在 $r_1, r_2 > 0$ 使得 $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ 且 $C \subset \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. 对任何 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n dz - \sum_{n=-N_1}^{N_2} \int_C c_n (z - z_0)^n dz \right| \\ & \leq \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \int_C |c_n (z - z_0)^n| dz + \sum_{n=-\infty}^{-N_1-1} \int_C |c_n (z - z_0)^n| dz \\ & \leq \ell(C) \left(\sum_{n=N_2+1}^{\infty} |c_n| r_2^n + \sum_{n=-\infty}^{-N_1-1} |c_n| r_1^n \right). \end{aligned}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|r_2^n$ 和 $\sum_{n=-\infty}^0 |c_n|r_1^n$ 收敛, 所以

$$\lim_{N_2 \rightarrow +\infty} \sum_{n=N_2+1}^{\infty} |c_n|r_2^n = \lim_{N_1 \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{-N_1-1} |c_n|r_1^n = 0,$$

这就说明

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_C c_n(z-z_0)^n dz = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \int_C c_n(z-z_0)^n dz = \int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n dz. \quad \square$$

- 类似可证幂级数在收敛圆盘内可逐项积分.

3.A.2 导数公式

定理 3.2.14 的证明 对 n 归纳, $n = 0$ 时就是柯西积分公式, 故结论成立. 设结论对 n 成立. 存在 $\delta > 0$, 当 $|\Delta z| < \delta$ 时, $z + \Delta z$ 也属于 D (因为 D 是开集), 由归纳假设

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z + \Delta z) - f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)^{n+1}} - \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \\ &= \Delta z \cdot \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta) \sum_{k=0}^n (\zeta - z)^k (\zeta - z - \Delta z)^{n-k}}{(\zeta - z - \Delta z)^{n+1} (\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \end{aligned}$$

将 Δz 除到左边, 并令 $\Delta z \rightarrow 0$ 得

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(z + \Delta z) - f^{(n)}(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta) \sum_{k=0}^n (\zeta - z)^k (\zeta - z - \Delta z)^{n-k}}{(\zeta - z - \Delta z)^{n+1} (\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

不难用 ML 不等式证明此极限可拿到积分号里面, 故

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(z + \Delta z) - f^{(n)}(z)}{\Delta z} &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\zeta) \sum_{k=0}^n (\zeta - z)^k (\zeta - z - \Delta z)^{n-k}}{(\zeta - z - \Delta z)^{n+1} (\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta) (n+1) (\zeta - z)^n}{(\zeta - z)^{2n+2}} d\zeta = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta. \end{aligned}$$

因此结论对 $n + 1$ 也成立. \square

第四章 积分变换

4.1 傅氏变换

4.1.1 傅氏积分

周期函数的傅里叶展开

设 f 是以 T 为周期的实函数, 若它满足狄利克雷条件: 分段单调有界或分段可微, 则 f 有**傅里叶级数展开式**:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t},$$

其中 $\omega = \frac{2\pi}{T}$, 系数 $c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau$.

证 参见 [6] 定理 16.2.2. □

定理 4.1.1 (傅里叶积分定理) 设 f 是 \mathbb{R} 上的实值函数, 且 (1) f 在任意有界区间上都满足狄利克雷条件 (2) f 在 \mathbb{R} 上绝对可积,

则下述**傅里叶积分公式**成立:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega.$$

证 参见 [7] 定理 17.5.5 或 [18] 定理 7.3. □

- 上式右侧称为 f 的**傅里叶积分**. 在 f 的连续点 t 处其值恰好是 $f(t)$.
- 外层积分表明 f 是正弦波 $\{e^{i\omega t}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ 的合成, 内层积分是圆频率为 ω 的正弦波 $e^{i\omega t}$ 对应的权重和初相.

用 $\mathbf{1}_A$ 表示集合 A 的指示函数: $\mathbf{1}_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$

例 4.1.2 $\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(t)$ 称为单位阶跃函数, 常记作 $u(t)$.

例 4.1.3 (分段函数的表示) 设 $A \cap B = \emptyset$, 函数 $f(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \in A \\ f_2(t), & t \in B \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 可写作 $f = f_1 \mathbf{1}_A + f_2 \mathbf{1}_B$.

例 4.1.4 (化定积分为反常积分) 因为 $f(t) \mathbf{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, b] \\ 0, & t \notin [a, b] \end{cases}$, 所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathbf{1}_{[a,b]}(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

例 4.1.5 求函数 $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ 的傅里叶积分.

解 根据定义, f 的傅里叶积分为 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$. 我们要算出内层积分, 之后适当化简外层积分的形式. 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = \int_{-1}^1 e^{-i\omega \tau} d\tau = 2 \frac{\sin \omega}{\omega},$$

所以 f 的傅里叶积分

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \begin{cases} f(t), & |t| \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & |t| = 1 \end{cases}$$

在上式中取 $t = 0$ 得狄利克雷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. □

应用欧拉公式和奇偶性可得:

傅里叶积分公式的三角形式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \stackrel{\text{奇偶性}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau.$$

正弦积分公式

当 f 是奇函数时有正弦积分公式

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \omega t d\omega \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

余弦积分公式

当 f 是偶函数时有余弦积分公式

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \omega t \, d\omega \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau.$$

测试 4.1.6 求函数 $f = \mathbf{1}_{(0,1)} - \mathbf{1}_{(-1,0)}$ 的傅里叶积分.

解 f 是奇函数, 所以 f 的傅里叶积分可用正弦计算

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \omega t \, d\omega \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau.$$

将 f 的表达式代入计算:

$$\int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau = \int_0^1 \sin \omega \tau \, d\tau = \frac{1 - \cos \omega}{\omega},$$

因此 f 的傅里叶积分为

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = \begin{cases} f(t), & t \notin \{0, \pm 1\}; \\ \frac{t}{2}, & t \in \{0, \pm 1\}. \end{cases}$$
□

例 4.1.7 求函数 $f(t) = 1, t \in (0, 1]$ 的傅里叶积分表达式.

解 函数不是处处有定义的. 将 f 在 $t \in (1, +\infty)$ 上看作 0. 奇延拓为 f_1 , 由练习 4.1.6 得 f 的傅里叶积分表达式

$$f(t) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega} \sin \omega t \, d\omega, \quad 0 < t \leq 1.$$

偶延拓为 f_2 , 由例 4.1.5 得 f 的傅里叶积分表达式

$$f(t) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} \, d\omega, \quad 0 < t \leq 1.$$

作零延拓, 即 $f_3 = \mathbf{1}_{(0,1]} \sim \frac{f_1 + f_2}{2}$, 故又有 f 的傅里叶积分表达式

$$f(t) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t + \sin \omega(1-t)}{\omega} \, d\omega, \quad 0 < t \leq 1.$$
□

4.1.2 傅氏变换

定义 4.1.8 (傅里叶 (逆) 变换 - (inverse) Fourier transform) 设 f 是 \mathbb{R} 上绝对可积的复值函数, 称实变复值函数

$$\mathcal{F}[f](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} \, dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

为 f 的傅里叶变换. 称实变复值函数

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

为 f 的傅里叶逆变换.

- f 的傅里叶积分就是 $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$. 当 f 满足傅里叶积分定理的条件时, 等式 $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)$ 在 f 的连续点 x 处成立.
- 当 f 不绝对可积时, $\mathcal{F}[f](x)$ 和 $\mathcal{F}^{-1}[f](x)$ 可能在某些 x 处不存在. 按后面的广义函数理解存在时, 其个别点的值有无定义无关紧要.
- 这里用 x 作为变换和逆变换的自变量, 是为了方便阐释对称性. 后面会回到传统自变量记号.

对称性

- (1) $\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f](-x)$, $\mathcal{F}[f](x) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[f](-x)$.
- (2) 当 f 满足傅里叶积分定理的条件时: $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x) \stackrel{a.e.}{=} 2\pi f(-x)$.

定理 4.1.9 若 f, g 绝对可积且连续, 则 $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g] \Leftrightarrow f = g$.

证 参见 [20] §1.1 推论 1.22. □

例 4.1.10 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(-t) dt$.

证 对左侧的积分作换元 $t = -\tau$, 则 $t = \pm\infty$ 时, $\tau = \mp\infty$, 故

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)g(t) dt &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau)g(-\tau) d(-\tau) = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau)g(-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(-t) dt. \end{aligned}$$
□

推论 4.1.11 (1) 设 f 绝对可积, 则 $\mathcal{F}[f(-t)](x) = \mathcal{F}[f](-x)$. 翻转性质

(2) 若 f 绝对可积且连续, 则 f 与 $\mathcal{F}[f]$ 奇偶性相同. 同奇偶性

证 (1) 这是因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt$. □

- 定理 4.1.9 和推论 4.1.11 中去掉连续的条件, 只能得到几乎处处的结论.

定理 4.1.12 (控制收敛定理) 设 F 可积, 收敛的可积函数列 $\{f_n\}$ 满足 $|f_n| \leq F$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt.$$

证 参见 [4] 定理 4.14. □

引理 4.1.13 (Riemann-Lebesgue 引理) 设 f 绝对可积, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt = 0$.

证 参见 [6] 定理 16.2.1. □

推论 4.1.14 绝对可积函数 f 的傅里叶变换 F 是满足 $F(\infty) = 0$ 的有界连续函数.

证 任取 $x_0 \in \mathbb{R}$ 及 $x_n \rightarrow x_0$, 则 $|f(t)e^{-ix_n t}| \leq |f(t)|$, 且 $|f|$ 可积, 控制收敛定理给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f(t)e^{-ix_n t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ix_0 t} dt = F(x_0),$$

故 F 在 x_0 处连续. 由

$$|F(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-ixt}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$$

知 F 是有界函数. 最后, 黎曼-勒贝格引理指出 $F(\infty) = 0$. □

- 实际上, F 是一致连续 (此概念可参考数学分析教材) 的.

下面的例子表明黎曼-勒贝格引理对条件可积的函数一般不成立.

例 4.1.15 令 $f(t)$ 在区间 $((k-1)\pi, k\pi]$ 上取值 $\sin kt$, 即 $f = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kt) \mathbf{1}_{((k-1)\pi, k\pi]}$, 则 f 条件可积,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(kt) dt = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 2 \ln 2.$$

因为当 $n \neq k$ 时 $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(kt) \sin(nt) dt = 0$, 而 $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin^2(nt) dt = \frac{\pi}{2}$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(nt) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(kt) \sin(nt) dt = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin^2(nt) dt = \frac{\pi}{2} \rightarrow 0.$$

若在 f 的定义中以 $\sqrt{k} \sin(kt)$ 代替 $\sin(kt)$, 就会得到 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ 收敛, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(nt) dt = \infty$ 的例子.

例 4.1.16 (矩形脉冲) 由例 4.1.5 得 $\mathcal{F}[\mathbf{1}_{[-1,1]}] = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$. 故 $\mathcal{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \mathcal{F}^2\left[\frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}\right] = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]}$.

例 4.1.17 (指数衰减函数) 设 $a > 0$. 求 $f(t) = e^{-at} u(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$.

解 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{-e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega} \Big|_0^{+\infty}$. 由于 $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+i\omega)t} = 0$, 所以 f 的傅里叶变换为 $F(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$. □

例 4.1.18 设 $a > 0$. 求 $f(t) = e^{-a|t|}$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$.

解 $f(t) = e^{-at} u(t) + e^{at} u(-t)$ 在 $t \neq 0$ 时成立, 故由翻转性质得

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$
□

例 4.1.19 求 $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$.

解 1° 直接用定义计算 f 的傅里叶变换. 当 $\omega < 0$ 时

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2} dt = 2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2} \right) = \pi e^\omega.$$

因为 f 是偶函数, 故 F 亦然: $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

$$2^\circ \mathcal{F}[f] \xrightarrow{\text{例 4.1.18}} \mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}e^{-|\omega|}\right]\right] \xrightarrow{\text{对称性}} 2\pi \cdot \frac{1}{2}e^{-|-\omega|} = \pi e^{-|\omega|}. \quad \square$$

上个例子我们用了如下显然的事实

- 若 f 是偶函数, 则 $f(t) = f(|t|) = f(-|t|)$.
- 若 f 是奇函数, 则 $f(t) = \operatorname{sgn}(t)f(|t|) = -\operatorname{sgn}(t)f(-|t|)$.
- 对于非绝对可积的函数 f , 其傅里叶变换式仍然可能收敛, 如前所述往往不是处处收敛的. 例如例 4.1.16 中 $\mathcal{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$ 在 $\omega = \pm 1$ 处其实是发散的. 下面再看几个这样的例子.

例 4.1.20 $a \in \mathbb{R}$, 求傅里叶变换 $\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{|t|}}\right]$, $\mathcal{F}\left[\frac{\sin at}{\sqrt{|t|}}\right]$ 和 $\mathcal{F}\left[\frac{\cos at}{\sqrt{|t|}}\right]$.

解 用定义转化为菲涅尔积分 (例 3.4.31) 计算

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{\sin at}{\sqrt{|t|}}\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{\sqrt{|t|}} e^{-i\omega t} dt = -2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin at \sin \omega t}{\sqrt{t}} dt = -4i \int_0^{+\infty} \sin at^2 \sin \omega t^2 dt \\ &= 2i \int_0^{+\infty} [\cos(a+\omega)t^2 - \cos(a-\omega)t^2] dt = \left(\frac{2i}{|a+\omega|} - \frac{2i}{|a-\omega|} \right) \int_0^{+\infty} \cos t^2 dt \\ &\xrightarrow{\text{例 3.4.31}} i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{|a+\omega|} - \frac{1}{|a-\omega|} \right). \end{aligned}$$

同理可得 $\mathcal{F}\left[\frac{\cos at}{\sqrt{|t|}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{|a+\omega|} + \frac{1}{|a-\omega|} \right)$. 令 $a = 0$ 得 $\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{|t|}}\right] = \sqrt{\frac{2\pi}{|\omega|}}$.

注意本例中后两个傅里叶变换在 $\omega = \pm a$ 处发散. \square

例 4.1.21 设 $a > 0$, 求傅里叶变换 $\mathcal{F}[\sin at^2]$ 和 $\mathcal{F}[\cos at^2]$.

解 同样用菲涅尔积分计算:

$$\mathcal{F}[\sin at^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin at^2 \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\sin(at^2 + \omega t) + \sin(at^2 - \omega t)] dt.$$

先算第一个积分 $I_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(at^2 + \omega t) dt$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \left[a \left(t + \frac{\omega}{2a} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4a} \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sin \left[a \left(t + \frac{\omega}{2a} \right)^2 \right] \cos \frac{\omega^2}{4a} - \cos \left[a \left(t + \frac{\omega}{2a} \right)^2 \right] \sin \frac{\omega^2}{4a} \right\} dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left(\cos \frac{\omega^2}{4a} - \sin \frac{\omega^2}{4a} \right). \end{aligned}$$

又第二个积分 $I_2 = I_1(-\omega) = I_1$, 从而

$$\mathcal{F}[\sin at^2] = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left(\cos \frac{\omega^2}{4a} - \sin \frac{\omega^2}{4a} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos \left(\frac{\omega^2}{4a} + \frac{\pi}{4} \right).$$

同理可得 $\mathcal{F}[\cos at^2] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos \left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4} \right)$. \square

例 4.1.22 已知 $\mathcal{F}[f] = \frac{\sin \omega}{\omega}$, 求 f .

解 1° $f = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin \omega}{\omega}\right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega \xrightarrow{\text{例 4.1.5}} \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}$.

2° 因为 $\frac{\sin \omega}{\omega} = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i\omega} = \frac{1}{2i\omega} \int_1^{-1} (e^{-i\omega t})' dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^{-i\omega t} dt$, 且右边的积分可转化为反常积分:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]} e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}\right](\omega),$$

由定理 4.1.9 (及其注) 得 $f \stackrel{a.e.}{=} \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}$.

3° 同前例用留数 (见第三章第 8 节) 计算. \square

- 由定理 4.1.1, $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{(-1,1)} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{\pm 1\}}$.
- 并非说 $f = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{(-1,1)} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{\pm 1\}}$, 因为 $f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$ 只在连续点成立.
- 通过逆变换求 f 时, 不必纠结个别点的值: 类似于求不定积分, 它们的傅里叶变换都是 F , $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$ 只是其中的一员.

定义 4.1.23 设 f 在正实轴 $(0, +\infty)$ 上绝对可积, 称

$$\mathcal{F}_s[f](x) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin xt dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

为 f 的傅里叶正弦变换, 称

$$\mathcal{F}_s^{-1}[f](x) = \frac{2}{\pi} \mathcal{F}_s[f](x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin xt dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

为 f 的傅里叶正弦逆变换.

- 类似定义傅里叶余弦变换

$$\mathcal{F}_c[f](x) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos xt dt$$

和傅里叶余弦逆变换 $\mathcal{F}_c^{-1}[f](x) = \frac{2}{\pi} \mathcal{F}_c[f]$.

- 当 f 满足傅里叶积分定理的条件时

$$f(x) = \mathcal{F}_s^{-1}[\mathcal{F}_s[f]](x) = \mathcal{F}_c^{-1}[\mathcal{F}_c[f]](x)$$

对几乎所有的 $x \in (0, +\infty)$ 成立.

4.1.3 广义函数

- $\phi \in \mathcal{D}$ 表示 ϕ 光滑 (即无穷次可微) 且在某个有界区间外恒为零.
- 若 f 在 E 的每个紧区间上 (绝对) 可积, 则称 f 在 E 上 局部 (绝对) 可积, 记作 $f \in R_{loc}(E)$ ($f \in L_{loc}(E)$).
- 记号 $\langle f, g \rangle$ 表示积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt$, 或 f 以 g 为自变量.

引理 4.1.24 (导数的另一种刻画) (1) $f \in C^1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\phi(t) dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi'(t) dt, \forall \phi \in \mathcal{D}$.

(2) 反之, 若 g 连续且 $\langle g, \phi \rangle = -\langle f, \phi' \rangle, \forall \phi \in \mathcal{D}$, 则 $g = f'$.

- 这里我们把几乎处处相等的局部绝对可积函数看做同一个函数: 因为如果把它们看做以 ϕ 为自变量的“广义函数” $f(\phi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t) dt$, 则 $f_1 \stackrel{a.e.}{=} f_2 \Leftrightarrow f_1(\phi) = f_2(\phi), \forall \phi \in \mathcal{D}$.
- (2) 的精确含义是: 只要适当改变 f 在某个长度是零的子集 (称为零测集) 上的定义, f 就成为一个 C^1 函数且 $f' = g$.

定义 4.1.25 设 $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$, 称 $\langle f', \phi \rangle = -\langle f, \phi' \rangle, \forall \phi \in \mathcal{D}$ (左侧括号表示 f' 以 ϕ 为自变量, 右侧括号代表乘积的积分) 确定的 f' 为 f 的弱导数.

- f' 是以 ϕ 为自变量的广义函数.
- 当 $\langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\phi(t) dt$ 时, 称 $T = \rho$ 是由 ρ 表示的正则广函.
- 当 $f \in C^1$ 时, f' 由它的经典导数 f'_{cl} 表示.

例 4.1.26 求单位阶跃函数 $u(t) = \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(t)$ 的弱导数 $\delta = u'$.

解 $\langle \delta, \phi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\phi'(t) dt = -\int_0^{+\infty} \phi'(t) dt = -\phi(t)|_0^{+\infty} = \phi(0)$. □

- 直观上常从经典导数观点把 δ 看成满足下述三个条件的“函数”: (1) $\delta(t) = 0, t \neq 0$ (2) $\delta(0) = +\infty$ (3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$.

但这几个条件是矛盾的, 并不存在这样的函数: 例如按①和②应有 $2\delta = \delta$, 但③就给出 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta(t) dt = 2$.

练习 4.1.27 求 $u(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$ 的导数 δ_a .

定义 4.1.28 (单位脉冲函数) 称 $\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$ 为聚集在 a 点的 δ -函数, $a = 0$ 时就简称狄拉克 δ -函数或单位脉冲函数.

定义 4.1.29 广义函数 f 的导数 f' 仍由 $\langle f', \phi \rangle = -\langle f, \phi' \rangle$ 定义.

例 4.1.30 $\langle \delta^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \phi^{(n)}(0), \quad \langle \delta_a^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \phi^{(n)}(a)$.

- 设 g 局部绝对可积, 则 $f(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$ 几乎处处可微, 且经典导数 $f'_{cl} \stackrel{a.e.}{=} g$ 也是 g 在广义函数意义下的原函数, 即 f 的弱导数 $f' = g = f'_{cl}$.
- 设 f 是连续函数, 则 f 的弱导数 f' 等于经典导数 $f'_{cl} \Leftrightarrow f$ 是积分上限函数, 即存在局部可积函数 g 使得 $f(t) = f(0) + \int_0^t g(\tau) d\tau$.

练习 4.1.31 (1) 证明 $[tu(t)]' = u(t)$.

$$(2) \text{ 证明 } |t|' = \operatorname{sgn}(t), \text{ 此处符号函数 } \operatorname{sgn}(t) := \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

定义 4.1.32 (广义函数的运算) 设 f, g 是广义函数, h 是光滑函数, $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$.

- (1) 和 $\langle f + g, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle + \langle g, \phi \rangle$.
- (2) 线性换元 $\langle f(at + b), \phi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle f, \phi(\frac{t-b}{a}) \rangle$.
- (3) 乘积 $\langle hf, \phi \rangle = \langle f, h\phi \rangle$.

例 4.1.33 $\langle \delta(t-a), \phi \rangle = \langle \delta, \phi(t+a) \rangle = \phi(a)$, 即 $\delta(t-a) = \delta_a$.

- 把 $\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$ 仍用积分记号记, 称为 **δ -函数的筛选性质**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) \phi(t) dt = \phi(a).$$

例 4.1.34 (1) $\delta(at) \stackrel{a \neq 0}{=} \frac{1}{|a|} \delta \Rightarrow \delta(-t) = \delta(t)$, 我们说 δ 是偶函数.

- (2) 设 h 光滑, 则 $h\delta = h(0)\delta$.

例 4.1.35 (1) 设广义函数 f 满足 $(t^2 + 1)f = 0$, 求 f .

- (2) 若 $tf = 0$, 是否能得出 $f = 0$?

解 (1) 以光滑函数 $\frac{1}{t^2+1}$ 乘等式两边得 $f = \frac{1}{t^2+1} \cdot 0 = 0$.

(2) 因为 $t\delta = 0\delta = 0$, 所以 $tf = 0 \Rightarrow f = 0$. □

- $t^n f = 0$ 的通解为 $f = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}$.

例 4.1.36 $u^2 = u$, 但 $2uu' = 2\delta \neq u' = \delta$. 因此一般的复合求导法则不成立.

命题 4.1.37 (f, g, h, a, b 如定义 4.1.32, $\lambda \in \mathbb{R}$) (1) $(f + g)' = f' + g'$, $[f(at + b)]' = af'(at + b)$.

- (2) $(hf)' = h'f + hf'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$.

- (3) $f' = 0 \Leftrightarrow f = C$.

证 (3) 不难验证 $c' = 0$, 下证 (\Leftarrow). 取 $\rho \in \mathcal{D}$ 使得 $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) dt = 1$. $\forall \phi \in \mathcal{D}$, 由推论 4.A.5, 存在 $\psi \in \mathcal{D}$ 使得 $\phi - \lambda\rho = \psi'$, 其中 $\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = \langle 1, \phi \rangle$. 记 $C = \langle f, \rho \rangle$, 则

$$0 = \langle f', \psi \rangle = -\langle f, \psi' \rangle = -\langle f, \phi - \lambda\rho \rangle \Rightarrow \langle f, \phi \rangle = \langle f, \lambda\rho \rangle = \lambda \langle f, \rho \rangle = C\lambda = \langle C, \phi \rangle. \quad \square$$

例 4.1.38 $h\delta' = h(0)\delta' - h'(0)\delta$.

例 4.1.39 对于光滑函数 h 有 $h\delta = h(0)\delta$. 当 $h = \frac{1}{t}$ 时, 由于 h 不光滑, 故 $h\delta$ 不能理解为 h 与 δ 的乘积. 那么, 如何理解 $\frac{1}{t}\delta(t)$?

解 记 $f = \frac{1}{t}\delta$, 应有 $tf = \delta$. 因为 $-t\delta' \xrightarrow{\text{例4.1.38}} \delta$, 故 $f = -\delta' + C\delta$. \square

例 4.1.40 求函数 $f(t) = \begin{cases} e^t + 1, & t \geq 0, \\ \sin t - 1, & t < 0 \end{cases}$ 的导数.

解 等式 $f = (e^t + 1)u(t) + (\sin t - 1)u(-t)$ 在 $t \neq 0$ 时成立, 故它们作为广义函数相等. 从而 $f' = e^tu + \cos tu(-t) + 3\delta = f'_{cl} + 3\delta$. \square

定理 4.1.41 设 f 在 $(-\infty, a^-], \dots, [b^+, +\infty)$ 上连续可微, 则

$$f' = f'_{cl} + [f(a^+) - f(a^-)]\delta_a + \dots + [f(b^+) - f(b^-)]\delta_b.$$

证 当 x 不是分段点 a, \dots, b 时成立

$$f(x) = f(a-1) + \int_{a-1}^x f'_{cl}(t) dt + [f(a^+) - f(a^-)]u(x-a) + \dots + [f(b^+) - f(b^-)]u(x-b),$$

对上式求导即得结论. \square

- 利用弱导数与弱极限可交换, 可将上述结论推广到有无限个分段点, 且在任何有界区间内只有有限个分段点的情形: $f' = f'_{cl} + \sum_{n=1}^{\infty} [f(a_k^+) - f(a_k^-)]\delta_{a_k}$.

练习 4.1.42 求函数 $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ 的导数.

解 间断点为 ± 1 , 故 $f' = f'_{cl} + \delta_{-1} - \delta_1 = \delta_{-1} - \delta_1$. \square

练习 4.1.43 证明 $\delta(at+b) = \frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a}) = \frac{1}{|a|}\delta_{\frac{-b}{a}}$.

练习 4.1.44 ($b \neq 0$) 证明 $\delta_a(bt+c) = \frac{1}{|b|}\delta_{\frac{a-c}{b}}$, 特别地 $\delta_a(-t) = \delta_{-a}$.

练习 4.1.45 证明 $h \in C^\infty \Rightarrow h\delta_a^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle \delta_a^{(k)}, h \rangle \delta_a^{(n-k)}$.

练习 4.1.46 证明当 $k \leq n$ 时 $(t-a)^k \delta_a^{(n)} = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} \delta_a^{(n-k)}$; 当 $k > n$ 时其值为零.

在传统广义函数理论中, 并非每个广义函数都有傅里叶变换. 能做傅氏变换的广义函数是所谓的缓增分布 (tempered distributions), 其自变量在比 \mathcal{D} 更大的“速降函数类 \mathcal{S} ” (指任意阶导数在 ∞ 处都是无限阶无穷小的光滑函数全体) 中取值. 所有不超过多项式增长的局部绝对可积函数及其弱导数都是缓增分布. 限于篇幅, 本讲义仅在附录中予以简单讨论.

定理 4.1.47 (缓增分布的傅氏变换) (1) $f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f]$.

- | | |
|--|----|
| (2) $\mathcal{F}^{\pm 1}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}^{\pm 1}[f] + \beta \mathcal{F}^{\pm 1}[g]$. | 线性 |
| (3) $\mathcal{F}^{\pm 1}[f(-t)] = \mathcal{F}^{\pm 1}[f](-\omega)$. | 翻转 |
| (4) $\mathcal{F}[f^{(n)}] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f]$. | 微分 |
| (5) $\mathcal{F}^{-1}[f](t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f](-t)$, $\mathcal{F}^2[f] = 2\pi f(-t)$. | 对称 |
| (6) $\langle \mathcal{F}^{\pm 1}[f], \phi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{\pm 1}[\phi] \rangle$. | 伴随 |

例 4.1.48 由 ③ 可得 f 和 $\mathcal{F}[f]$ 有相同的奇偶性.

例 4.1.49 求傅里叶变换 $\mathcal{F}[\delta]$, $\mathcal{F}[\delta^{(n)}]$.

解 $\mathcal{F}[\delta] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1$. $\mathcal{F}[\delta^{(n)}] = (i\omega)^n$. \square

练习 4.1.50 求 $\mathcal{F}[\delta_a]$ 和 $\mathcal{F}[\delta_a^{(n)}]$.

- 事实上 δ 是 $\frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}$ 的弱极限, 即 $\forall \phi \in \mathcal{S}$, $\langle \delta, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}, \phi \rangle$. 故 (详见附录)

$$\mathcal{F}[\delta] = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}\left[\frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}\right] = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ne^{-i\omega t}}{\pi(1+n^2t^2)} dt = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{|\omega|}{n}} = 1.$$

例 4.1.51 求 $\mathcal{F}[1]$ 和 $\mathcal{F}[e^{iat}]$.

解 $\mathcal{F}[1] = \mathcal{F}^2[\delta] = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$.

$\mathcal{F}[e^{iat}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-a)t} dt = \mathcal{F}[1](\omega - a) = 2\pi\delta_a$. \square

- 同理, $\mathcal{F}[1]$ 的积分表示 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt$ 是弱极限 $\mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-i\omega t} dt$.

例 4.1.52 求 $\mathcal{F}[\sin at]$, $\mathcal{F}[\cos at]$, $\mathcal{F}^{-1}[e^{ia\omega}]$.

解 $\mathcal{F}[\sin at] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right] = \pi i(\delta_{-a} - \delta_a)$, $\mathcal{F}[\cos at] = \pi(\delta_a + \delta_{-a})$.

$\mathcal{F}^{-1}[e^{ia\omega}] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[e^{ia\omega}](-t) = \delta_a(-t) = \delta_{-a}$. \square

例 4.1.53 $\mathcal{F}[u] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$.

解 记 $F(\omega) = \mathcal{F}[u]$. 因为 $u' = \delta$, 所以

$$\mathcal{F}[u'] = \mathcal{F}[\delta] \Rightarrow i\omega F(\omega) = 1.$$

因此 $F(\omega) = \frac{1}{i\omega} + c\delta(\omega)$. 因为 $u(t) + u(-t) \stackrel{\text{a.e.}}{=} 1$, 所以

$$2\pi\delta(\omega) = F(\omega) + F(-\omega) = 2c\delta(\omega) \Rightarrow c = \pi.$$

- 此处 $\frac{1}{\omega}$ 是 $\ln|\omega|$ 的弱导数, $\langle \frac{1}{\omega}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|\omega| \geq \varepsilon} \frac{\phi(\omega)}{\omega} d\omega$ 且 $\omega \cdot \frac{1}{\omega} = 1$.

例 4.1.54 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega$ 及 $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin \omega}{\omega}\right]$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega = 2\pi i \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{i\omega}\right] = \pi i \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[2u - 1]) = \pi i(2u - 1).$
 $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin \omega}{\omega}\right] = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(1+t)} - e^{i\omega(t-1)}}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(t).$ \square

基本性质表

(1) 筛选性质	$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$	
(2) 傅里叶变换	$\mathcal{F}[\delta_a] = e^{-ia\omega}, \mathcal{F}[e^{iat}] = 2\pi\delta_a,$ $\mathcal{F}[u] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta.$	
(3) 积分表示	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t).$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega = \pi i[2u(t) - 1].$	$\delta = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\delta]]$ $u = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[u]]$
(4) 奇偶性	$\delta(-t) = \delta(t), \delta_a(-t) = \delta_{-a}(t).$	
(5) 原函数	$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t), u'(t) = \delta(t).$	
(6) 线性变换	$\delta(at + b) = \frac{1}{ a }\delta(t + \frac{b}{a}), (a \neq 0).$	
	<ul style="list-style-type: none"> ⑤中变限积分是筛选性质①的特例. ②用 $\delta = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\delta]], u = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[u]].$ 	

4.2 变换性质

4.2.1 基本性质

定理 4.2.1 (微分性质: 导数是弱导数) (1) $\mathcal{F}[f'] = i\omega \mathcal{F}[f]$ (2) $\mathcal{F}[tf] = i(\mathcal{F}[f])'$

- 微分性质对广义函数亦成立.

证 见本章附录. \square

例 4.2.2 设 $f = e^{-at}u(t)$ ($a > 0$) 是指数衰减函数, 试求 $\mathcal{F}[t^n f]$.

解 $\mathcal{F}[tf] = i\left(\frac{1}{a+i\omega}\right)' = \frac{1}{(a+i\omega)^2}$. 归纳得 $\mathcal{F}[t^n f] = \frac{n!}{(a+i\omega)^{n+1}}$. \square

例 4.2.3 设 $n \in \mathbb{N}$. 求 $\mathcal{F}\left[\frac{(-i)^n}{2\pi}t^n\right]$ 和 $\mathcal{F}[(-i)^n \delta^{(n)}]$.

解 $\mathcal{F}\left[\frac{(-i)^n}{2\pi}t^n\right] = \frac{(\mathcal{F}[1])^{(n)}}{2\pi} = \delta^{(n)}, \mathcal{F}[(-i)^n \delta^{(n)}] = \omega^n \mathcal{F}[\delta] = \omega^n$. \square

例 4.2.4 求 $tu(t)$ 的傅里叶变换.

解 $\mathcal{F}[tu(t)] = i(\mathcal{F}[u])' = i\left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta\right)' = -\frac{1}{\omega^2} + i\pi\delta'.$ \square

- 此处 $\frac{1}{\omega^2}$ 是 $\frac{-1}{\omega}$ 的弱导数: $\langle \frac{1}{\omega^2}, \phi \rangle = \int_0^\infty \frac{\phi(\omega) + \phi(-\omega) - 2\phi(0)}{\omega^2} d\omega$.

例 4.2.5 设 $n \in \mathbb{N}^*$. 求 $\mathcal{F}\left[\frac{i^n t^{n-1}}{2 \cdot (n-1)!} \operatorname{sgn}(t)\right]$.

解 因为 $\operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$, 所以 $\mathcal{F}\left[\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(t)\right] = \frac{1}{\omega}$. 由微分性质得

$$\mathcal{F}\left[\frac{i^n t^{n-1}}{2 \cdot (n-1)!} \operatorname{sgn}(t)\right] = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{\omega^n}. \quad \square$$

例 4.2.6 求傅里叶变换 $\mathcal{F}[|t|]$.

解 $\mathcal{F}[|t|] = \mathcal{F}[t \operatorname{sgn}(t)] = i(\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)])' = i\left(\frac{2}{i\omega}\right)' = -\frac{2}{\omega^2}$. \square

例 4.2.7 求钟形脉冲函数 $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ 的傅里叶变换.

解 因为 $f' = -tf$, 所以 $i\omega \mathcal{F}[f] = -i(\mathcal{F}[f])'$. 即 $F = \mathcal{F}[f]$ 是微分方程 $F' = -\omega F$ 的解. 方程等价于

$$F' + \omega F = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{\omega^2}{2}} F\right)' = 0.$$

故 $F(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{2}}$. 因为 $C = F(0) = \sqrt{2\pi}$, 故 $\mathcal{F}[f] = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$. \square

测试 4.2.8 以下关于 δ 函数的说法错误的是

[]

- A. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t) dt = f(0)$
- B. $\delta(t) = u'(t)$
- C. $t\delta(t) = 0$
- D. $\mathcal{F}[\delta^{(n)}] = \omega^n$

定理 4.2.9 (延迟、位移、相似) (1) $\mathcal{F}[f(t+a)] = e^{ia\omega} \mathcal{F}[f]$ (2) $\mathcal{F}[e^{iat}f] = \mathcal{F}[f](\omega - a)$

$$(3) \mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (a \neq 0)$$

- 第①、③条是乘积积分的换元性质的特例:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(T(t))g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(T^{-1}(t)) \frac{1}{|T'(t)|} dt.$$

- 第②条容易从定义直接验证. 以上性质对广函亦成立.
- $\mathcal{F}^{-1}[e^{ia\omega} F] = \mathcal{F}^{-1}[F](t+a)$, $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega-a)] = e^{iat} \mathcal{F}^{-1}[F]$. $\mathcal{F}^{-1}[F(a\omega)] = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}^{-1}[F]\left(\frac{t}{a}\right)$ ($a \neq 0$).
- 运用位移性质和例 4.2.2, 4.2.3 和 4.2.5, 理论上可以通过部分分式分解求出任何有理函数的傅里叶逆变换.

例 4.2.10 设 $a > 0$. 求钟形脉冲函数 $f(t) = e^{-a(t-t_0)^2}$ 的傅里叶变换.

解 记 $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, 例 4.2.7 已求得 $\mathcal{F}[g] = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$. 由变换性质得

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g(\sqrt{2a}(t-t_0))] = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[g(\sqrt{2a}t)] = \frac{e^{-i\omega t_0}}{\sqrt{2a}} \mathcal{F}[g]\left(\frac{\omega}{\sqrt{2a}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-(i\omega t_0 + \frac{\omega^2}{4a})}. \quad \square$$

例 4.2.11 求 $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ 的傅里叶变换 $\mathcal{F}[f]$.

$$\text{解 } \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[u(t+1) - u(t-1)] \xrightarrow{\text{延迟}} (e^{i\omega} - e^{-i\omega})\mathcal{F}[u] = (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) \left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta \right) = \frac{2\sin\omega}{\omega}. \quad \square$$

练习 4.2.12 设 $a > 0$. 利用 $\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = \pi e^{-|\omega|}$ 求 $f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$ 的傅氏变换.

例 4.2.13 已知 $\mathcal{F}[f] = \frac{\sin\omega}{\omega}$, 求 f .

$$\begin{aligned} \text{解 } f &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i\omega}\right] \xrightarrow{\text{延迟}} \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{i\omega}\right](t+1) - \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{i\omega}\right](t-1) \\ &= \frac{1}{2}u(t+1) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}u(t-1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}. \end{aligned} \quad \square$$

练习 4.2.14 利用 $\mathcal{F}^2[f](t) = 2\pi f(-t)$ 求 $\mathcal{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$.

解 由上例知 $\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}\mathcal{F}[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$, 所以

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{F}^2[u(\omega+1) - u(\omega-1)] = \frac{1}{2}2\pi[u(-\omega+1) - u(-\omega-1)] = \begin{cases} \pi, & |\omega| < 1, \\ 0, & |\omega| > 1. \end{cases} \quad \square$$

4.2.2 卷积定理

定义 4.2.15 (卷积 convolution) 设 f 和 g 是两个实变量复值函数, 若积分

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau$$

存在, 就称其为 f 和 g 的卷积.

例 4.2.16 设 f 绝对可积, 求 $f * u$.

$$\text{解 } (f * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

从计算结果看出, $1 * u$ 不存在. \square

- 若 $f \in C^1$ 且 $f(-\infty) = 0$, 则 $f = f' * u$.

分段函数的卷积

若 $f(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [a, b] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $g(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [c, d] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则

$$(f * g)(t) = \int_{[t-d, t-c] \cap [a, b]} \phi(\tau)\psi(t-\tau) d\tau$$

上式对无界区间也成立.

证 由卷积的定义

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

容易验证 $\tau \in [a, b]$ 且 $t - \tau \in [c, d] \Leftrightarrow \tau \in [t - d, t - c] \cap [a, b]$, 因此只要 $\tau \notin [t - d, t - c] \cap [a, b]$ 就有 $f(\tau)g(t - \tau) = 0$. 而当 $\tau \in [t - d, t - c] \cap [a, b]$ 时, $f(\tau) = \phi(\tau)$, $g(t - \tau) = \psi(t - \tau)$, 故

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{[t-d, t-c] \cap [a, b]} f(\tau)g(t - \tau) d\tau + \int_{\mathbb{R} \setminus ([t-d, t-c] \cap [a, b])} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{[t-d, t-c] \cap [a, b]} \phi(\tau)\psi(t - \tau) d\tau + \int_{\mathbb{R} \setminus ([t-d, t-c] \cap [a, b])} 0 d\tau \\ &= \int_{[t-d, t-c] \cap [a, b]} \phi(\tau)\psi(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

□

例 4.2.17 设 $f(t) = e^{-t}u(t)$, $g(t) = e^{-2t}u(t)$, 求 $f * g$.

解 根据卷积定义

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau = \int_{[0, +\infty) \cap (-\infty, t]} e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)} d\tau.$$

当 $t < 0$ 时相交区间是 \emptyset , 当 $t \geq 0$ 时相交区间是 $[0, t]$, 故

$$(f * g)(t) = u(t) \int_0^t e^{\tau-2t} d\tau = u(t)e^{\tau-2t} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = u(t)(e^{-t} - e^{-2t}).$$

□

测试 4.2.18 设 $f(t) = e^{-t}u(t)$, $g(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}$, 求 $f * g$.

解 根据卷积定义

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t - \tau) d\tau = \int_{[0, +\infty) \cap [t-1, t]} e^{-\tau} d\tau.$$

(1) 当 $t < 0$ 时相交区间是 \emptyset , 故 $(f * g)(t) = 0$.

(2) 当 $0 \leq t < 1$ 时相交区间是 $[0, t]$, 故

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}.$$

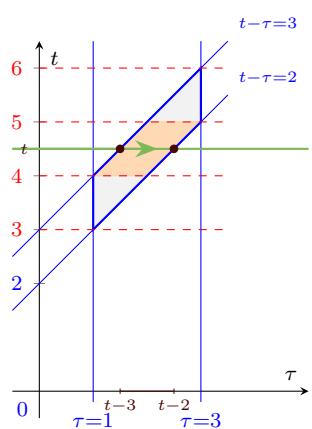
(3) 当 $t \geq 1$ 时相交区间是 $[t-1, t]$, 故

$$(f * g)(t) = \int_{t-1}^t e^{-\tau} d\tau = e^{-t}(e - 1).$$

□

例 4.2.19 设 $f(t) = \sin t \mathbf{1}_{[1,3]}$, $g(t) = e^t \mathbf{1}_{[2,3]}$. 求 $f * g$.

解 被积函数 $f(\tau)g(t - \tau)$ 的非零区域为 $1 \leq \tau \leq 3$, $2 \leq t - \tau \leq 3$. 对参数 t 的取值讨论积分区间 $\tau \in [1, 3] \cap [t - 3, t - 2]$.



$t < 3$ 或 $t \geq 6$. $(f * g)(t) = 0$.

$$3 \leq t < 4. \quad (f * g)(t) = \int_1^{t-2} \sin \tau e^{t-\tau} d\tau.$$

$$4 \leq t < 5. \quad (f * g)(t) = \int_{t-3}^{t-2} \sin \tau e^{t-\tau} d\tau.$$

$$5 \leq t < 6. \quad (f * g)(t) = \int_{t-3}^3 \sin \tau e^{t-\tau} d\tau.$$

因为 $F(\tau) = -\frac{e^{-\tau}}{2}(\sin \tau + \cos \tau)$ 是 $\sin \tau e^{-\tau}$ 的一个原函数, 故

$$(f * g)(t) = e^t [F(t-2) - F(1)], \quad 3 \leq t < 4,$$

类似可得 $f * g$ 在其它区间上的取值. \square

引理 4.2.20 (Fubini 定理) 设 $f(x, y)$ 是二元局部绝对可积函数, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dy$. 当该绝对积分值有限时, 去掉绝对值符号的等式也成立.

证 参见 [4] 定理 4.27, 定理 4.29. \square

- 富比尼定理告诉我们, 只要加绝对值积分有限, 重积分就可交换积分次序. 这是一个十分强大的定理, 可以解决绝大多数积分换序问题.

定理 4.2.21 (卷积定理) (1) 设 f, g 绝对可积, 则 $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$.

$$(2) \text{ 设 } f, g, \mathcal{F}[g] \text{ 绝对可积, 则 } \mathcal{F}[fg] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g].$$

证 (1) 由卷积和傅里叶变换的定义

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(\tau)g(t-\tau) d\tau.$$

注意到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\omega t} f(\tau)g(t-\tau)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)| d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-\tau)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)| d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < +\infty,$$

由富比尼定理知累次积分可交换次序, 故

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g(t-\tau) dt \stackrel{\text{位移}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} G(\omega) d\tau = F(\omega)G(\omega).$$

(2) 容易从傅里叶变换与逆变换的对称性和 (1) 推出 (2). \square

命题 4.2.22 (卷积的分析性质) 设 f, g 绝对可积.

- (1) $f * g$ 也绝对可积.
- (2) 若 f 或 g 有界, 则 $f * g$ 连续.
- (3) 若 g'_{cl} 有界, 则 $(f * g)'_{cl} = f * g'_{cl}$.
- (4) 若 f'_{cl} 和 g'_{cl} 均有界, 则 $(f * g)'_{cl} = f * g'_{cl} = f'_{cl} * g$.

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} (f * g) = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g.$$

$$(6) \int_{-\infty}^x (f * g) = (f * \int_{-\infty}^t g)(x) = ((\int_{-\infty}^t f) * g)(x).$$

例 4.2.23 $(\delta_a * f)(t) = (f * \delta_a)(t) = f(t - a)$, 特别地 $f * \delta = f$.

命题 4.2.24 (广义函数的卷积) (1) $f * g = g * f$, $(f * g) * h = f * (g * h)$.

$$(2) f(x + h) * g(x) = (f * g)(x + h), f(-t) * g(-t) = (f * g)(-t).$$

$$(3) (f * g)' = f' * g = f * g'.$$

定理 4.2.25 (卷积定理) 设 f 是广函, g 是支集有界的广函或速降函数, 则 $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$.

证 参见 [3] 定理 4.11 及定理 4.13. \square

4.2.3 积分性质

定理 4.2.26 (积分性质) 设 f 绝对可积, 则 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta\right)\mathcal{F}[f]$, 其中 $\frac{F(\omega)}{\omega}$ 是广函.

证 见附录. \square

推论 4.2.27 设 f 绝对可积且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$, 则 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{i\omega}\mathcal{F}[f]$.

证 这是因为 $\pi\delta\mathcal{F}[f] = \pi\delta\mathcal{F}[f](0) = \pi\delta\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$. \square

定理 4.2.28 设 f 和 $\frac{f}{t}$ 绝对可积, 则 $\mathcal{F}\left[\frac{f}{t}\right] = i \int_{\omega}^{+\infty} \mathcal{F}[f](\tau) d\tau = -i \int_{-\infty}^{\omega} \mathcal{F}[f](\tau) d\tau$.

证 见附录. \square

例 4.2.29 求傅里叶变换 $\mathcal{F}\left[\frac{e^{-t}u(t)\sin t}{t}\right]$.

解 由线性性质和位移性质得

$$\mathcal{F}[e^{-t}u(t)\sin t] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}e^{-t}u(t)\right] = \frac{1}{2i}\mathcal{F}[e^{-t}u(t)]\Big|_{\omega+1}^{\omega-1} = \frac{1}{(1+i\omega)^2+1}$$

由积分性质得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{e^{-t}u(t)\sin t}{t}\right] &= i \int_{\omega}^{+\infty} \mathcal{F}[e^{-t}u(t)\sin t](\tau) d\tau \\ &= \int_{\omega}^{+\infty} \frac{d(1+i\tau)}{(1+i\tau)^2+1} = -\arccot(1+i\tau)\Big|_{\omega}^{+\infty} \\ &= -\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i} \ln \frac{1+i(\tau+1)}{1+i(\tau-1)} + \arccot(1+i\omega) \\ &= \arccot(1+i\omega). \end{aligned}$$

例 4.2.30 (广函的积分性质) 设 f 是缓增分布, 则 $\mathcal{F}\left[\frac{f}{t}\right]$ 是 $-i\mathcal{F}[f]$ 的原函数.

证 这是因为 $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[t \cdot \frac{f}{t}] = i(\mathcal{F}[\frac{f}{t}])'$, 即 $(\mathcal{F}[\frac{f}{t}])' = -i\mathcal{F}[f]$. \square

例 4.2.31 求傅里叶变换 $\mathcal{F}[\frac{\sin t}{t}]$.

解 $(\mathcal{F}[\frac{\sin t}{t}])' = -i\mathcal{F}[\sin t] \xrightarrow{\text{例 4.1.52}} \pi[\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)] \xrightarrow{\text{命题 4.1.37(1)}} (\pi \mathbf{1}_{[-1,1]})'$, 故存在常数 C 使得 $\mathcal{F}[\frac{\sin t}{t}] \xrightarrow{\text{命题 4.1.37(2)}} \pi \mathbf{1}_{[-1,1]} + C$. 两边取傅里叶变换得

$$2\pi \frac{\sin \omega}{\omega} = 2\pi \frac{\sin \omega}{\omega} + C2\pi \delta(\omega) \Rightarrow C = 0,$$

故 $\mathcal{F}[\frac{\sin t}{t}] = \pi \mathbf{1}_{[-1,1]}$. \square

- 注意如下的“解法”是错误的: $\mathcal{F}[\frac{\sin t}{t}] = i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\sin t](\tau) d\tau = \dots$, 因为 $\frac{\sin t}{t}$ 不是绝对可积的. 一个更明显的反例是:

例 4.2.32 由 $\mathcal{F}[u] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta$ 得 $2\pi u(-\omega) = \mathcal{F}^2[u] = \mathcal{F}[\frac{1}{it}] + \pi$, 故 $\mathcal{F}[\frac{1}{t}] = \pi i[2u(-\omega) - 1] = -\pi i \operatorname{sgn}(\omega)$ (亦见于例 4.2.5). 若用“积分性质”去算, 会有:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right] = -i \int_{-\infty}^{\omega} \mathcal{F}[1](\tau) d\tau = -2\pi i \int_{-\infty}^{\omega} \delta(\tau) d\tau = 2\pi i u(\omega)$$

结果错误.

例 4.2.33 求傅里叶变换 $\mathcal{F}[\frac{\sin^2 t}{t^2}]$.

解 $(\mathcal{F}[\frac{\sin^2 t}{t^2}])'' = -\mathcal{F}[\sin^2 t] = -\frac{1}{2}\mathcal{F}[1 - \cos 2t] \xrightarrow{\text{例 4.1.52}} -\pi\delta(\omega) + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)]$. 因为

$$[\omega \cdot u(\omega)]' \xrightarrow{\text{命题 4.1.37}} u(\omega) + \omega\delta(\omega) = u(\omega) \Rightarrow \delta(\omega) = u'(\omega) = [\omega u(\omega)]'',$$

故 $(\mathcal{F}[\frac{\sin^2 t}{t^2}])'' = \{-\pi\omega u(\omega) + \frac{\pi}{2}[(\omega - 2)u(\omega - 2) + (\omega + 2)u(\omega + 2)]\}''$, 从而

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin^2 t}{t^2}\right] = -\pi\omega u(\omega) + \frac{\pi}{2}[(\omega - 2)u(\omega - 2) + (\omega + 2)u(\omega + 2)] + C_1\omega + C_2.$$

因为 $\frac{\sin^2 t}{t^2}$ 绝对可积, 故 $\mathcal{F}[\frac{\sin^2 t}{t^2}](\infty) = 0$. 由 $\mathcal{F}[\frac{\sin^2 t}{t^2}](-\infty) = 0$ 得 $C_1 = 0$, 由 $\mathcal{F}[\frac{\sin^2 t}{t^2}](+\infty) = 0$ 得 $C_2 = 0$, 故

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin^2 t}{t^2}\right] = \begin{cases} 0, & \omega < -2 \\ \frac{\pi}{2}(\omega + 2), & -2 \leq \omega < 0 \\ \frac{\pi}{2}(-\omega + 2), & 0 \leq \omega < 2 \\ 0, & \omega \geq 2 \end{cases} = \pi \left(1 - \frac{|\omega|}{2}\right) \mathbf{1}_{[-2,2]}. \quad \square$$

例 4.2.34 求傅里叶变换 $\mathcal{F}[\frac{1}{|t|}]$.

解 注意 $\frac{1}{|t|}$ 不是局部绝对可积的, 作为广义函数必须阐明它的意义. 这里把 $\frac{1}{|t|}$ 看作 $\operatorname{sgn}(t) \ln |t|$ 的弱导数, 它是缓增分布. 则 $t \cdot \frac{1}{|t|} = \operatorname{sgn}(t)$:

$$\begin{aligned}\left\langle t \cdot \frac{1}{|t|}, \phi \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{|t|}, t \cdot \phi \right\rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(t) \ln |t| (t \cdot \phi)' dt = - \int_0^{+\infty} (t \cdot \phi)' \ln t dt + \int_{-\infty}^0 \ln(-t) (t \cdot \phi)' dt \\ &= -(t \cdot \phi) \ln t \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \phi(t) dt + (t \cdot \phi) \ln(-t) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \phi(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \phi(t) dt - \int_{-\infty}^0 \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(t) \phi(t) dt = \langle \operatorname{sgn}(t), \phi \rangle,\end{aligned}$$

即 $\frac{1}{|t|} \in \frac{1}{t} \operatorname{sgn}(t)$. 由广义函数的积分性质得

$$\left(\mathcal{F} \left[\frac{1}{|t|} \right] \right)' = -i \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] = -\frac{2}{\omega} = (-\ln \omega^2)' \Rightarrow \mathcal{F} \left[\frac{1}{|t|} \right] = -\ln \omega^2 + C.$$

为求出 C , 两边作用到 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 上得

$$\sqrt{2\pi}C - 4 \int_0^{+\infty} \ln t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left\langle \mathcal{F} \left[\frac{1}{|t|} \right], e^{-\frac{t^2}{2}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{|t|}, \mathcal{F} \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \right] \right\rangle = \sqrt{2\pi} \left\langle \frac{1}{|t|}, e^{-\frac{t^2}{2}} \right\rangle.$$

在左边的积分中作换元 $t = \sqrt{2}x$ 得

$$-4 \int_0^{+\infty} \ln t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -4\sqrt{2} \int_0^{+\infty} (\ln \sqrt{2} + \ln x) e^{-x^2} dx = -2\sqrt{2\pi} \ln \sqrt{2} + \sqrt{2\pi}(\gamma + 2 \ln 2) = \sqrt{2\pi}(\gamma + \ln 2),$$

其中 γ 是欧拉常数, 它 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = - \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$, 上面第二个等号用到它的性质: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \ln x dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\gamma + 2 \ln 2)$. 现在看右边的积分:

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} \left\langle \frac{1}{|t|}, e^{-\frac{t^2}{2}} \right\rangle &= -\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(t) \ln |t| (e^{-\frac{t^2}{2}})' dt = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t| \ln |t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 2\sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} t \ln t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \stackrel{\text{令 } t=\sqrt{2}x}{=} 2\sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} \sqrt{2x} \ln \sqrt{2x} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{2x}} \\ &= \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} (\ln 2 + \ln x) e^{-x} dx = \sqrt{2\pi}(\ln 2 - \gamma).\end{aligned}$$

因此 $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\sqrt{2\pi}(\ln 2 - \gamma) - \sqrt{2\pi}(\gamma + \ln 2)] = -2\gamma$. 综上可知

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{|t|} \right] = -2(\ln |\omega| + \gamma). \quad \square$$

4.2.4 能量积分

Plancherel 定理、能量积分 (设 f, g 平方可积)

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f] \overline{\mathcal{F}[g]} d\omega.$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}[f]|^2 d\omega.$

例 4.2.35 求积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

解 由例 4.1.19, $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ 的傅里叶变换为 $\pi e^{-|\omega|}$. 由能量积分得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{+\infty} \pi^2 e^{-2\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

基本性质表

- (1) 奇偶性 $\mathcal{F}[f]$ 和 f 有相同的奇偶性.
- (2) 线性性 $\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g]$
- (3) 位移性质 $\mathcal{F}[f(at+b)] = \frac{1}{|a|} e^{i\frac{b}{a}\omega} F(\frac{\omega}{a})$, $a \neq 0$
 $\mathcal{F}[e^{iat} f(t)] = F(\omega - a)$
- (4) 微分性质 $\mathcal{F}[f^{(n)}] = (i\omega)^n F$
 $\mathcal{F}[t^n f] = (i\frac{d}{d\omega})^n F$
- (5) 积分性质 $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau] = (\frac{1}{i\omega} + \pi\delta) F$
- (6) 能量积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

4.2.5 微分方程

定理 4.2.36 设 f 是已知广义函数, $a_i \in C^\infty$. 微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f$$

- (1) 通解为 $y_0 + y^*$, 其中 y_0 是特解, y^* 是齐次方程的经典通解. 当 f 连续时广义解均为经典解.
- (2) 当 a_i 是常数且 f 是缓增分布时, 必有可用傅里叶变换求出的特解.

证 (1) 参见 [23] 推论 3.1.6. (2) 参见 [22]. \square

例 4.2.37 解方程 $y' + iy = 0$.

解 令 $Y = \mathcal{F}[y]$. 在原方程两边作傅里叶变换得

$$i(\omega + 1)Y = 0 \xrightarrow{\text{推论 4.A.47}} Y = c \cdot \delta(\omega + 1).$$

取傅里叶逆变换得 $y = \mathcal{F}^{-1}[Y] = c \cdot e^{-it}$. \square

例 4.2.38 解方程 $y'' + y = 0$.

解 令 $Y = \mathcal{F}[y]$. 在原方程两边作傅里叶变换得

$$(1 - \omega^2)Y = 0 \Rightarrow (1 + \omega)Y = c_1 \delta(\omega - 1) \xrightarrow[\text{例 4.A.50}]{\text{定理 4.A.52}} Y = c_1 \delta(\omega - 1) + c_2 \delta(\omega + 1).$$

取逆变换得 $y = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$. \square

例 4.2.39 解方程 $y''(t) - y(t) = 0$.

解 设 y_0 是方程的特解. 记 $Y = \mathcal{F}[y_0]$. 作傅里叶变换得 $-\omega^2 Y - Y = 0 \Rightarrow Y = 0 \Rightarrow y_0 = 0$. \square

- 通解 $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, 非零解均不存在傅里叶变换.
- 变量 ω 取实值, 遗漏了零点 $\pm i$, 故无法解出实指数.
- 以上不足可以通过更一般的广函理论 (参见 [19]) 克服.

例 4.2.40 求 $y'' - y = \sin t$ 的特解.

解 记 $Y = \mathcal{F}[y_0]$, 作傅里叶变换得

$$-(\omega^2 + 1)Y = \pi i(\delta_{-1} - \delta_1) \Rightarrow Y = \frac{-\pi i(\delta_{-1} - \delta_1)}{\omega^2 + 1} = \frac{-\pi i(\delta_{-1} - \delta_1)}{2}.$$

取逆变换得 $y_0 = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{-\pi i(\delta_{-1} - \delta_1)}{2}\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\frac{-\sin t}{2}\right]\right] = -\frac{1}{2} \sin t$. \square

例 4.2.41 求 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_0 = f$ 的特解, 其中 a_k 是常数.

解 设 $h^{(n)} + a_1 h^{(n-1)} + \cdots + a_0 = \delta$ (依定理 4.2.36, 这样的 h 是存在的), 记 $H = \mathcal{F}[h]$, $Y = \mathcal{F}[y]$, 则

$$\begin{aligned} [(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \cdots + a_0]H &= 1 \\ [(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \cdots + a_0]Y &= \mathcal{F}[f] \end{aligned}$$

故 $Y = H\mathcal{F}[f] \Rightarrow y = \mathcal{F}^{-1}[H\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[h * f]] = h * f$. \square

- 常常把常系数线性微分方程 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n = f$ 左侧看成一个微分算子 P 作用在 y 上, P 常写作求导算子 $\frac{d}{dt}$ 的多项式

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

作用, 将原方程表示为 $P(\frac{d}{dt})y = f$.

另一个角度看基本解

- 将 $P(\frac{d}{dt})y = \delta$ 的解称为微分算子 $P(\frac{d}{dt})$ 的**基本解**.
- 设求出一个基本解 φ , 当 $\varphi * f$ 存在时, 因为

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(\varphi * f) = P\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi * f = \delta * f = f,$$

所以非齐次方程 $P(\frac{d}{dt})y = f$ 有**特解** $\varphi * f$.

- 若 $f \in L_{loc}$ 在某有界区间外恒为零, 则 $\varphi * f$ 对任何广函 φ 存在.

例 4.2.42 (卷积不存在) 解方程 $y'' + y = \sin t$.

解 基本解不是绝对可积的. 直接做傅里叶变换:

$$(1 - \omega^2)Y = \pi i(\delta_{-1} - \delta_1).$$

解得 $Y = c_1\delta_1 + c_2\delta_{-1} - \frac{\pi i}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)'$. 取逆变换得

$$y = c_1e^{it} + c_2e^{-it} - \frac{t}{2}\cos t.$$

□

例 4.2.43 (f 的傅里叶变换也不存在) 解方程 $x'(t) + x(t) = e^{-t}$.

解 直接求解

$$e^t[x'(t) + x(t)] = 1 \Leftrightarrow (e^t x)' = 1 \Leftrightarrow e^t x = t + C,$$

故方程通解为 $x = e^{-t}(t + C)$.

□

- 若引入复变换 $\psi = \mathcal{F}[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{-ist} dt, \phi \in C_c^\infty$, 并将广义函数 f 的变换 $\mathcal{F}[f]$ 定义于 $\mathcal{F}[C_c^\infty]$ 上:

$$\langle \mathcal{F}[f], \psi \rangle = 2\pi \langle f, \phi(-t) \rangle,$$

则任何广义函数的变换均存在. 当 f 正则时 $\langle f, \phi(-t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(-t) dt$.

- 利用 $\mathcal{F}[e^{at}] = 2\pi\delta(s+ia)$, $\mathcal{F}[f'] = is\mathcal{F}[f]$, $\mathcal{F}[tf] = i(\mathcal{F}[f])'$, 可得 $(s-i)X = -2\pi i\delta(s-i)$. 利用 $(s-i)\delta'(s-i) = -\delta(s-i)$, 可得 $X = 2\pi i\delta'(s-i) + c\delta(s-i)$, 从而解出通解.

例 4.2.44 解方程 $x'(t) - 9 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = e^{-|t|}$.

解 设方程有绝对可积且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0$ 的解 x_0 . 记 $X = \mathcal{F}[x_0]$. 在 x_0 的方程两边作傅里叶变换得

$$i\omega X - \frac{9}{i\omega}X = \mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2} \Rightarrow X = \frac{-2i\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$$

将 X 做部分分式分解:

$$X = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{1-i\omega} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3+i\omega} - \frac{1}{3-i\omega} \right)$$

取傅里叶逆变换得

$$x_0 = \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{8}u(t) - \frac{e^t - e^{3t}}{8}u(-t).$$

显然 x_0 绝对可积且 $\mathcal{F}[x_0](0) = 0$, 故它确是方程的解. 方程的通解为 $x = x_0 + ce^{3t}$.

□

例 4.2.45 解方程 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^2+a^2} d\tau = \frac{1}{t^2+b^2}$ ($0 < a < b$).

解 设方程有绝对可积解 y . 记 $Y = \mathcal{F}[y]$. 方程两边作傅里叶变换 (注意方程左边为卷积 $y * \frac{1}{t^2+a^2}$, 且 $\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+a^2}\right] \xrightarrow{\text{练习4.2.12}} \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$) 得

$$Y \cdot \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} = \frac{\pi}{b} e^{-b|\omega|} \Rightarrow Y = \frac{a}{b} e^{-(b-a)|\omega|}.$$

从而有可能解

$$y = \mathcal{F}^{-1}[Y] = \frac{a(b-a)}{\pi b[t^2 + (b-a)^2]}.$$

因为 y 确实是绝对可积的, 所以它是方程的解. \square

4.3 拉氏变换

4.3.1 定义计算

定义 4.3.1 若存在实常数 c_f , 当 $c > c_f$ 时, 有常数 A 使得 $|f(t)| \leq e^{ct}$, $\forall t \geq A$, 则称 f 至多指数级增长, 满足条件的最小 c_f 为 f 的增长指标.

例 4.3.2 (1) t^λ ($\lambda \geq 0$)、多项式的增长指标都是 0 (2) e^{at} 的增长指标为 $\operatorname{Re}(a)$.

定义 4.3.3 (拉普拉斯 - Laplace transform) 设 $f \in L_{loc}[0, +\infty)$ 至多指数级增长. 则 f 的拉普拉斯变换定义为

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

它是半平面 $\operatorname{Re}(s) > c_f$ 上的解析函数.

- $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{F}[e^{-\beta t} u(t)f(t)](\omega)$, 其中 $\beta = \operatorname{Re}(s)$, $\omega = \operatorname{Im}(s)$.
- 若 $F = \mathcal{L}[f]$, 则称 f 为 F 的拉普拉斯逆变换, 记为 $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$. $\mathcal{L}^{-1}[F]$ 在几乎处处相等的意义下是唯一确定的.
- 两个在正实轴上几乎处处相等的函数有相同的拉氏变换.

例 4.3.4 (求下述拉普拉斯变换) (1) $\mathcal{L}[u]$ (2) $\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right]$ ($n \in \mathbb{N}$) (3) $\mathcal{L}[e^{at}]$ (a 是复常数)

解 (1) u 的增长指标是 0. 当 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 时,

$$\mathcal{L}[u](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s}.$$

(2) 当 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 时, 对 $\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-st} dt$ 分部积分得

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right].$$

即 $s^n \mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right]$ 是常函数列, 故

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{s^n} \mathcal{L}\left[\frac{t^0}{0!}\right] = \frac{1}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

$$(3) \mathcal{L}[e^{at}] = \mathcal{L}[u](s-a) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a).$$

□

例 4.3.5 求 $\sin at, \cos at, \sinh at, \cosh at$ 的拉普拉斯变换.

解 当 $\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Im}(a)|$ 时

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin at] &= \frac{\mathcal{L}[e^{iat}] - \mathcal{L}[e^{-iat}]}{2i} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \\ \mathcal{L}[\cosh at] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{s}{s^2 + a^2}. \end{aligned}$$

当 $\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(a)|$ 时

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sinh at] &= \frac{\mathcal{L}[e^{at}] - \mathcal{L}[e^{-at}]}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2}, \\ \mathcal{L}[\cosh at] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}. \end{aligned}$$

□

f	t^n	e^{at}	$\sin at$	$\cos at$	$\sinh at$	$\cosh at$
$\mathcal{L}[f]$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

练习 4.3.6 求 $\cos^2 t$ 的拉普拉斯变换.

$$\begin{aligned} \text{解 } \mathcal{L}[\cos^2 t] &= \mathcal{L}\left[\frac{1 + \cos 2t}{2}\right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[u] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[\cos 2t] \\ &= \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2 + 4)} = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0. \end{aligned}$$

□

测试 4.3.7 关于 f 的拉普拉斯变换 F , 以下说法正确的是

[]

- A. $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$
 B. $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$
 C. $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$
 D. $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$

- 设 $a \geq 0, n \in \mathbb{N}$. 规定 $\delta_a^{(n)}$ 的增长指标为 $-\infty$.
- 对于广义函数的拉普拉斯变换的一般理论, 可以参考 [16] 及 [21].

例 4.3.8 设 $a \geq 0$, 求 $\mathcal{L}\left[\delta_a^{(n)}\right]$.

$$\text{解 } \mathcal{L}\left[\delta_a^{(n)}\right] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta_a^{(n)} e^{-st} dt = (-1)^n (e^{-st})^{(n)}|_{t=a} = s^n e^{-as}.$$

□

例 4.3.9 求 $\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]$.

解 当 $s \in (0, +\infty)$ 时

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-st} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-st^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

由解析函数的唯一性, 上式 (右侧分母是主值幂) 对 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 成立. \square

练习 4.3.10 求 $f(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{1+2t^2}} \cdot \delta(t) - \sin t \cdot u(t)$ 的拉普拉斯变换.

解 由 $\frac{\cos t}{\sqrt{1+2t^2}} \cdot \delta(t) = \delta(t)$, $\mathcal{L}[\sin t \cdot u(t)] = \mathcal{L}[\sin t]$ 得

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\delta] - \mathcal{L}[\sin t] = 1 - \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{s^2}{s^2 + 1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0. \quad \square$$

4.3.2 拉氏卷积

定义 4.3.11 (卷积 convolution) 设 f 和 g 是 $[0, +\infty)$ 上的复值局部绝对可积函数, 称卷积

$$(fu * gu)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

定义的 $[0, +\infty)$ 上的函数为 f 和 g 的拉普拉斯卷积 $f *_{\mathcal{L}} g$.

命题 4.3.12 (卷积的基本性质) (1) 交换律、结合律、双线性性. (2) $|f *_{\mathcal{L}} g| \leq |f| *_{\mathcal{L}} |g|$.

例 4.3.13 设 $a \geq 0$, 求 $f *_{\mathcal{L}} u$ 和 $f *_{\mathcal{L}} \delta_a$.

解 由拉普拉斯卷积的定义和筛选性质, $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} f *_{\mathcal{L}} u &= \int_0^t f(\tau)u(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau \\ f *_{\mathcal{L}} \delta_a &= \int_0^t \delta_a(\tau)f(t - \tau) d\tau = (fu)(t - a). \end{aligned}$$

特别地, $f *_{\mathcal{L}} \delta = fu$. \square

定理 4.3.14 (卷积定理 $\operatorname{Re}(s) > \max\{c_f, c_g\}$) 若 f 和 g 局部绝对可积或 g 是 δ -函数的导数, 则 $\mathcal{L}[f *_{\mathcal{L}} g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$.

证 不难验证 $(fu * gu)(t)e^{-\beta t}u(t) = e^{-\beta t}f(t)u(t) * e^{-\beta t}g(t)u(t)$. 令 $\beta = \operatorname{Re}(s), \omega = \operatorname{Im}(s)$, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f *_{\mathcal{L}} g](s) &= \mathcal{F}[(fu * gu)(t)e^{-\beta t}u(t)](\omega) = \mathcal{F}[e^{-\beta t}f(t)u(t) * e^{-\beta t}g(t)u(t)](\omega) \\ &\stackrel{\text{卷积定理}}{=} \mathcal{F}[e^{-\beta t}f(t)u(t)](\omega) \cdot \mathcal{F}[e^{-\beta t}g(t)u(t)](\omega) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s). \end{aligned} \quad \square$$

例 4.3.15 设 $\mathcal{L}[f] = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$, 求 f .

解 因为 $\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \mathcal{L}[t]\mathcal{L}[\sin t] = \mathcal{L}[t *_{\mathcal{L}} \sin t]$, 所以

$$f(t) = t *_{\mathcal{L}} \sin t = t - \sin t, \quad t \geq 0.$$

或: $\mathcal{L}[f] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}[t - \sin t] \Rightarrow f = t - \sin t$. \square

命题 4.3.16 (卷积的分析性质) 设 $f, g \in L_{loc}([0, +\infty))$ 在 $(0, +\infty)$ 上局部有界, 则

- (1) $f *_{\mathcal{L}} g$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.
- (2) 若至少有一个函数在 $[0, +\infty)$ 上局部有界, 则 $f *_{\mathcal{L}} g$ 在 0 处右连续.
- (3) 若 $f'_{cl} \in L_{loc}(0, +\infty)$, 则 $(f *_{\mathcal{L}} g)'_{cl}(t) \stackrel{a.e.}{=} (f'_{cl} *_{\mathcal{L}} g)(t) + f(0^+)g(t)$.
- (4) 若 $f'_{cl} \in L_{loc}(0, +\infty)$ 且 $f(0^+) = 0$, 则 $(f *_{\mathcal{L}} g)'_{cl} \stackrel{a.e.}{=} f'_{cl} *_{\mathcal{L}} g$.
- (5) $\int_0^x (f *_{\mathcal{L}} g) = (f *_{\mathcal{L}} \int_0^t g)(x) = ((\int_0^t f) *_{\mathcal{L}} g)(x)$.

推论 4.3.17 若 $f, g \in C^1[0, +\infty)$, $f(0) = g(0) = 0$, 则

$$(f *_{\mathcal{L}} g)'_{cl} = f'_{cl} *_{\mathcal{L}} g = f *_{\mathcal{L}} g'_{cl}, \quad t \geq 0.$$

$f(0), g(0)$ 不全为零时将 f'_{cl}, g'_{cl} 换为弱导数 $(fu)', (gu)'$.

例 4.3.18 在 $u = \delta *_{\mathcal{L}} u$ 两边求导得: 当 $n \in \mathbb{N}$ 时 $\delta^{(n)} = \delta^{(n+1)} *_{\mathcal{L}} u$; 用上式递推定义 $\delta^{(-n)}$, 可得 $\delta^{(-n)} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, 故 $\mathcal{L}[\delta^{(n)}] = s^n$ 对 $n \in \mathbb{Z}$ 成立.

4.3.3 变换性质

定理 4.3.19 (微分性质 $\operatorname{Re}(s) > c_f$) (1) $\mathcal{L}[tf] = -(\mathcal{L}[f])'$ (2) $\mathcal{L}[t^n f] = (-1)^n (\mathcal{L}[f])^{(n)}$

例 4.3.20 求 t^n 和 $t^n e^{at}$ 的拉普拉斯变换, 其中 n 是正整数.

解 $\mathcal{L}[t^n e^{at}] = (-1)^n (\mathcal{L}[e^{at}])^{(n)} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}. \quad \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$. \square

- $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$, $\mathcal{L}^{-1}[s^n] = \delta^{(n)}$.
- 理论上可用部分分式分解求任何有理函数的逆变换.
- 由解析函数唯一性知: 当 $\lambda \in (-1, +\infty)$ 时, $\mathcal{L}[t^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$.

定理 4.3.21 (微分性质 $\operatorname{Re}(s) > \max_{0 \leq k \leq n-1} \{c_{f^{(k)}}\}$) • 设 $f \in C^1$, 则 $\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0)$.

- 设 $f \in C^2$, 则 $\mathcal{L}[f''] = s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0)$.

例 4.3.22 (1) $\mathcal{L}[f] = \frac{s}{(s^2+1)^2}$, 求 f . (2) $\mathcal{L}[g] = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$, 求 g .

解 (1) 由 $\frac{s}{(s^2+1)^2} = -[\frac{1}{2(s^2+1)}]'$ 及 $\frac{1}{2(s^2+1)} = \mathcal{L}[\frac{\sin t}{2}]$ 得

$$\mathcal{L}[f] = -\left(\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{2}\right]\right)' = \mathcal{L}\left[\frac{t \sin t}{2}\right] \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}t \sin t, t \geq 0.$$

(2) 因为 $s\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[f'] + f(0)$, 所以

$$\mathcal{L}[g] = s\mathcal{L}\left[\frac{t \sin t}{2}\right] = \mathcal{L}\left[\left(\frac{t \sin t}{2}\right)'\right] + \frac{t \sin t}{2}\Big|_{t=0} = \mathcal{L}\left[\left(\frac{t \sin t}{2}\right)'\right].$$

这说明 $g(t) = \frac{(t \sin t)'}{2} = \frac{\sin t + t \cos t}{2}, t \geq 0$. \square

练习 4.3.23 利用微分性质求钟形脉冲函数 $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ 的拉普拉斯变换.

解 因为 $f'(t) = -tf(t)$, 由微分性质得

$$s\mathcal{L}[f] - f(0) = (\mathcal{L}[f])'.$$

即 $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$ 是微分方程 $F'(s) - sF(s) = -1$ 的解. 此方程等价于

$$[e^{-\frac{s^2}{2}} F(s)]' = -e^{-\frac{s^2}{2}} = g'(s),$$

其中 $g(z) = -\int_0^z e^{-\frac{s^2}{2}} ds$. 则 $F(s) = e^{\frac{s^2}{2}} [g(s) + C]$. 因为

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad g(0) = 0,$$

所以 $C = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 综上可知

$$\mathcal{L}[f] = e^{\frac{s^2}{2}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^s e^{-\frac{\zeta^2}{2}} d\zeta \right).$$

\square

相似、位移 (① $\operatorname{Re}(s) > c_f$ ② $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a) + c_f$)

(1) $a > 0$ 时 $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f](\frac{s}{a})$ (2) $\mathcal{L}[e^{at}f] = \mathcal{L}[f](s-a)$

例 4.3.24 求 $\mathcal{L}[\delta(2t-3)]$.

解 $\mathcal{L}[\delta(t-3)] = e^{-3s} \Rightarrow \mathcal{L}[\delta(2t-3)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\delta(t-3)]\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3s}{2}}$. 也可以用 $\delta(2t-3) = \frac{1}{2}\delta(t-\frac{3}{2})$ 来计算. \square

例 4.3.25 求 $\mathcal{L}[te^{at} \sin bt]$.

解 $\mathcal{L}[te^{at} \sin bt] \xrightarrow[\text{位移}]{\text{微分}} -(\mathcal{L}[\sin bt](s-a))' = \frac{2b(s-a)}{[(s-a)^2+b^2]^2}$. \square

练习 4.3.26 设 $\mathcal{L}[f] = \frac{1}{(s^2+4s+13)^2}$, 用卷积表示 f .

解 $f = \frac{e^{-2t}}{9}(\sin 3t * \mathcal{L} \sin 3t)$. \square

延迟性质 ($\operatorname{Re}(s) > c_f$)

设 $a \geq 0$, 则 $\mathcal{L}[(fu)(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f]$.

证 在拉氏变换定义中换元:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] &= \int_0^{+\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st} dt = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-st} dt \\ &\stackrel{t=a+x}{=} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-s(a+x)} dx = e^{-as} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx} dx = e^{-as}\mathcal{L}[f].\end{aligned}\quad \square$$

- 当 $f|_{(-\infty,0)} = 0$ 时, $(fu)(t-a) = f(t-a)$.

例 4.3.27 设 $\mathcal{L}[f] = \frac{s}{(s^2+1)^2}e^{-as}$ ($a > 0$), 求 f .

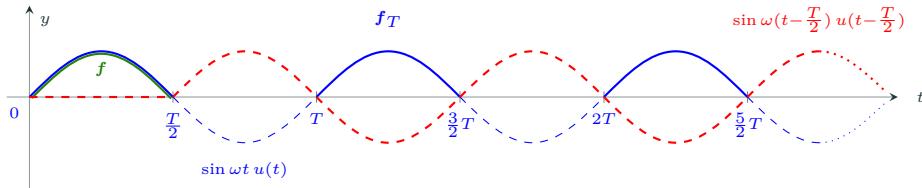
解 $\mathcal{L}[f] \xrightarrow[4.3.22]{\text{例}} e^{-as}\mathcal{L}[\frac{1}{2}t \sin t] \xrightarrow{\text{延迟}} f = \frac{(t-a)\sin(t-a)}{2} \mathbf{1}_{[a,+\infty)}$. \square

例 4.3.28 (周期公式: 设 $\tau > 0$ 且 $f = fu$) 试用 $\mathcal{L}[f]$ 表示 $g(t) = [f(t) + f(t-\tau) + f(t-2\tau) + \dots]$ 的拉普拉斯变换 (当 f 在 $t \geq \tau$ 上也为零时, g 就是 $f|_{[0,\tau]}$ 的周期延拓).

解 $f(t) = g(t) - g(t-\tau) \xrightarrow{\text{延迟}} \mathcal{L}[f] = (1 - e^{-\tau s})\mathcal{L}[g] \Rightarrow \mathcal{L}[g] = \frac{\mathcal{L}[f]}{1 - e^{-\tau s}}$. \square

练习 4.3.29 用延迟性质求 $f(t) = \sin t \cdot \mathbf{1}_{[0,\pi]}(t)$ 的拉普拉斯变换.

例 4.3.30 (单个半正弦波与半波正弦) 设 $f(t) = \sin \omega t \mathbf{1}_{[0,\frac{T}{2}]}$ 是单个半正弦波, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. 将 f 以 T 为周期向右延拓得半波正弦 f_T , 求 $\mathcal{L}[f]$ 和 $\mathcal{L}[f_T]$.



解 (1) 显然 $f = \sin \omega t u(t) + \sin \omega(t - \frac{T}{2})u(t - \frac{T}{2})$, 延迟性质给出

$$\mathcal{L}[f] = (1 + e^{-\frac{sT}{2}})\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{sT}{2}}\right).$$

(2) 由周期公式

$$\mathcal{L}[f_T] = \frac{\mathcal{L}[f]}{(1 - e^{-sT})} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \left(1 - e^{-\frac{sT}{2}}\right)^{-1}.$$

练习 4.3.31 参看上面的曲线示意图, 用 $f_T(t) - f_T(t - T/2) = \sin \omega t, t \geq 0$ 计算 $\mathcal{L}[f_T]$.

积分性质 ($\operatorname{Re}(s) > \max\{0, c_f\}$, $\operatorname{Re}(s) > c_f$)

- (1) $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau) d\tau] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f].$
(2) 设 $\frac{1}{t}f$ 局部绝对可积, 则 $\mathcal{L}[\frac{1}{t}f] = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[f] dz.$

- $\mathcal{L}[f]$ 在单连通域上解析, 故积分与路径无关.

例 4.3.32 求 $\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right].$

解 $\arctan z = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-z}{i+z}$ 是 $\frac{1}{1+z^2}$ 在 $\mathbb{C} \setminus -i[i, +\infty)$ 上的原函数, 当 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 时

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right](s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_s^x \mathcal{L}[\sin t] dz = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_s^x \frac{dz}{z^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \arctan s = \operatorname{arccot} s. \square$$

- 由第三章例 2.20, 极限 $\lim_{s \rightarrow \infty} \arctan s$ 不存在.

例 4.3.33

定理 4.3.34 设 $c_f \leq 0$, $\frac{1}{t}f$ 局部绝对可积且 $\int_0^{+\infty} \frac{f}{t} dt$ 收敛, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}[f](x) dx.$$

例 4.3.35 计算狄利克雷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$

解 因为 $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ 满足定理 4.3.34 的条件, 故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

定理的条件要注意:

例 4.3.36 $\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}\right] = \int_s^{+\infty} \frac{1}{z} dz = (\ln z)|_s^{+\infty}$ 不存在. 瑕积分 $\int_0^a 1/t dt$ 不存在. \square

例 4.3.37 求 $\mathcal{L}[(e^t - e^{-t})/t].$

解 $\lim_{t \rightarrow 0} (e^t - e^{-t})/t = 2$, $t = 0$ 不是瑕点, 增长指标为 1. 当 $\operatorname{Re}(z) > 1$ 时, $\operatorname{Re}(z-1) > 0$, $\operatorname{Re}(z+1) > 0$, 因此对数主值 $\ln(z-1)$ 和 $\ln(z+1)$ 均在 $\operatorname{Re}(z) > 1$ 上解析, 故

$$\mathcal{L}[(e^t - e^{-t})/t] = \int_s^{+\infty} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz = \ln \frac{z-1}{z+1} \Big|_s^{+\infty}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-1}{x+1} = 0$, 故

$$\mathcal{L}[(e^t - e^{-t})/t] = \ln \frac{s+1}{s-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1. \quad \square$$

定理 4.3.38 (初值定理、终值定理) (1) 设 $f \in C^1$ 且 $c_f < \infty$. 则 $f(0) = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}[f].$

(2) 设 $f \in C^1$ 且 $c_f \leq 0$, $f(+\infty)$ 存在有限, 则 $f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}[f].$

证 (1) 微分性质给出

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} [s\mathcal{L}[f] - f(0)] = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f'](s), \quad \operatorname{Re}(s) > c_f.$$

由于 $\mathcal{L}[f'](s)$ 关于 $\operatorname{Re}(s)$ 在 $(c_f + 1, +\infty)$ 上一致收敛, 故

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} [s\mathcal{L}[f] - f(0)] = \int_0^{+\infty} \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} f'(t)e^{-st} dt = 0.$$

这就给出 $f(0) = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}[f](s)$.

(2) 设 $x > 0$. 由 $\int_A^{+\infty} f'(t)e^{-xt} dt = x \int_A^{+\infty} [f(t) - f(A)]e^{-xt} dt$ 得 $|\int_A^{+\infty} f'(t)e^{-xt} dt| \leq \sup_{t \geq A} |f(t) - f(A)| \rightarrow 0$ ($A \rightarrow \infty$), 这表明 $\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt} dt$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

在等式 $\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt} dt = x\mathcal{L}[f](x) - f(0)$, $x > 0$ 两边令 $x \rightarrow 0^+$, 由一致收敛性得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(t)e^{-xt} dt = f(+\infty) - f(0). \quad \square$$

推论 4.3.39 设 $f \in C^1$ 且 $c_f \leq 0$. 若以下两条任满足其一: (1) $f' \in L[0, \infty)$ (2) $s\mathcal{L}[f]$ 只有有限个位于虚轴左侧的奇点, $\mathcal{L}[f](\infty) = 0$. 则终值定理的结论成立.

例 4.3.40 设 $f \in C^1$ 且 $c_f \leq 0$, $\mathcal{L}[f] = \frac{1}{s+a}$, $a \geq 0$. 求 $f(0), f(+\infty)$.

解 由初值定理, $f(0) = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} \frac{s}{s+a} = 1$. 显然 $\frac{s}{s+a}$ 的唯一奇点 $-a$ 位于虚轴左侧 (当 $a = 0$ 时没有奇点) 且 $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s+a} = 0$, 由终值定理

$$f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+a} = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ 1, & a = 0. \end{cases} \quad \square$$

例 4.3.41 设 $f \in C^1$ 且 $c_f \leq 0$, $\mathcal{L}[f] = \frac{1}{(s^2+1)^2}$, 求 f .

解 由微分性质得 $\mathcal{L}[f'] = \frac{s}{(s^2+1)^2} - f(0)$. 因为

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} = - \left(\mathcal{L} \left[\frac{1}{2} \sin t \right] \right)' = \mathcal{L} \left[\frac{t}{2} \sin t \right]$$

又 $f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{(s^2+1)^2} = 0$, 故 $\mathcal{L}[f'] = \mathcal{L}[\frac{t}{2} \sin t]$,

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \frac{\tau}{2} \sin \tau d\tau = \frac{\sin t - t \cos t}{2}.$$

若不顾条件套用终值定理, 则 $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{(s^2+1)^2} = 0$, 结论错误. \square

例 4.3.42 令 $f = e^t \sin e^t$. 则 $\mathcal{L}[f]$ 没有奇点, 从而 $s\mathcal{L}[f]$ 也没有奇点. $\lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}[f] = 0$, 然而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ 并不存在.

解 $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} e^t \sin e^t dt = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^s} dt$ 在 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 时都收敛. 分部积分得

$$\mathcal{L}[f](s) = \cos 1 - s \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{s+1}} dt$$

上式在 $\operatorname{Re}(s) > -1$ 时收敛, 故 $\mathcal{L}[f](s)$ 在 $\operatorname{Re}(s) > -1$ 上解析, 不断分部积分, 可知 $\mathcal{L}[f](s)$ 处处解析. \square

基本性质

(1) 线性性质 $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$

(2) 延迟性质 $\mathcal{L}[f(at-b)u(at-b)] = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} F(\frac{s}{a})$. $a > 0, b > 0$

(3) 位移性质 $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

$\operatorname{Re}(s-a) > c_f$

(4) 微分性质 $\mathcal{L}[t^n f] = (-1)^n F^{(n)}$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0) \quad \operatorname{Re}(s) > \max_{0 \leq k \leq n-1} \{c_f(k)\}$$

(5) 积分性质 $\mathcal{L}\left[\frac{f}{t}\right] = \int_s^\infty F(z) dz$

$\frac{f}{t}$ 局部绝对可积

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f] \quad \operatorname{Re}(s) > \max\{0, c_f\}$$

(6) 端值定理 $f(0) = \lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} sF(s)$

$f \in C^1$

$$f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad f \in C^1, c_f \leq 0 \text{ 且 } f(+\infty) \text{ 存在有限}$$

(7) δ 函数 $\mathcal{L}[\delta_a^{(n)}] = s^n e^{-as}$

$a \geq 0$

4.4 求逆变换

4.4.1 留数公式

由于 $\mathcal{L}[f](\beta + i\omega) = \mathcal{F}[e^{-\beta t} u(t)f](\omega)$, 若 $e^{-\beta t} uf$ 满足傅里叶积分存在定理的条件, 则在 f 的连续点处,

$$f(t) = e^{\beta t} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{L}[f](\beta + i\omega)], \quad t > 0.$$

定理 4.4.1 (Bromwich-Fourier-Mellin 反演积分) 设 f 局部绝对可积且增长不超过指指数级, 在 $[0, +\infty)$ 的每个有界闭区间上满足狄利克雷条件, 则对每个 $\beta > c_f$, 在 f 的连续点处都成立

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(s)=\beta} F(s) e^{st} ds, \quad t > 0,$$

其中 $F = \mathcal{L}[f]$, 且反常曲线积分

$$\int_{\operatorname{Re}(s)=\beta} F(s) e^{st} ds = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} F(s) e^{st} ds,$$

其中 L_R 是从 $\beta - Ri$ 到 $\beta + Ri$ 的直线段.

- 从广义函数的角度, 不必纠结狄利克雷条件.

定理 4.4.2 设 $F = \mathcal{L}[f]$ 只有有限个奇点 $\{s_k\}_{k=1}^n$ 且 $F(\infty) = 0$, 则

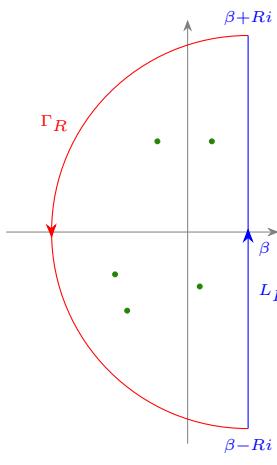
$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [F(s)e^{st}, s_k], \quad t > 0.$$

取 $\beta > 0$ 使得反演公式成立且 F 的奇点均位于 $x = \beta$ 左侧. 则当 $R \gg 0$ 时

$$\int_{L_R + \Gamma_R} F(s)e^{st} ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [F(s)e^{st}, s_k].$$

在定理条件下 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} F(s)e^{st} ds \stackrel{t>0}{=} 0$, 故

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} F(s)e^{st} ds \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R + \Gamma_R} F(s)e^{st} ds \\ &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [F(s)e^{st}, s_k]. \end{aligned}$$



例 4.4.3 求 $Y_1 = \frac{1}{(s-1)(s+3)}$ 和 $Y_2 = \frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换.

解 显然这两个函数都满足定理 4.4.2 的条件.

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_1] \stackrel{\text{分母零点}}{=} \operatorname{Res}_1 \left[\frac{e^{st}}{(s-1)(s+3)} \right] + \operatorname{Res}_{-3} \left[\frac{e^{st}}{(s-1)(s+3)} \right] = \frac{e^t}{4} - \frac{e^{-3t}}{4}, \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_2] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2 - (s-1)^2}{s^2(s-1)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^2} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right]$$

$$\stackrel{\text{分母零点}}{=} \operatorname{Res}_1 \left[\frac{e^{st}}{(s-1)^2} \right] - \operatorname{Res}_0 \left[\frac{e^{st}}{s^2} \right] = (e^{st})' \Big|_{s=1} - (e^{st})' \Big|_{s=0} = t(e^t - 1), \quad t \geq 0. \quad \square$$

测试 4.4.4 求 $Y_1 = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+3)}$ 和 $Y_2 = \frac{1}{s(s-1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换.

$$\text{证 } \mathcal{L}^{-1}[Y_1] = \operatorname{Res}_1[Y_1 e^{st}] + \operatorname{Res}_{-1}[Y_1 e^{st}] + \operatorname{Res}_{-3}[Y_1 e^{st}] = \frac{e^t}{8} - \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{-3t}}{8}, \quad t \geq 0.$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_2] = \operatorname{Res}_0 \left[\frac{e^{st}}{s(s-1)^2} \right] + \operatorname{Res}_1 \left[\frac{e^{st}}{s(s-1)^2} \right] = \frac{e^{st}}{(s-1)^2} \Big|_{s=0} + \left(\frac{e^{st}}{s} \right)' \Big|_{s=1} = 1 + e^t(t-1), \quad t \geq 0. \quad \square$$

例 4.4.5 设 a 是复常数, $n \in \mathbb{N}^*$. 求 $f = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^n} e^{\frac{a}{s}} \right]$.

解 注意 $a \neq 0$ 时 $s = 0$ 是本性奇点, 用展开法计算留数:

$$f = \operatorname{Res}_0 \left(\frac{e^{st} e^{\frac{a}{s}}}{s^n} \right) = \operatorname{Res}_0 \left(\frac{1}{s^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k t^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{l! s^l} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{l+n-1} a^l}{l!(l+n-1)!}, \quad t > 0.$$

□

- 位移性质 $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}\mathcal{L}^{-1}[F]$

例 4.4.6 设 $\mathcal{L}[f] = \frac{1}{(s^2+4s+13)^2}$, 求 f .

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{1}{(s^2+4s+13)^2} &= -\frac{1}{36} \left[\frac{(s+2+3i)-(s+2-3i)}{(s+2+3i)(s+2-3i)} \right]^2 \\ &= -\frac{1}{36} \left[\frac{1}{(s+2-3i)^2} + \frac{1}{(s+2+3i)^2} \right] + \frac{1}{18} \frac{1}{(s+2)^2+3^2}. \\ \text{因此 } f(t) &\stackrel{\text{位移}}{=} -\frac{t}{36} [e^{(-2+3i)t} + e^{-2-3it}] + \frac{e^{-2t}}{54} \sin 3t = -\frac{te^{-2t}}{18} \cos 3t + \frac{e^{-2t}}{54} \sin 3t, \quad t > 0. \end{aligned}$$

基本性质

- (1) 线性 $\mathcal{L}^{-1}[\alpha F + \beta G] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[F] + \beta \mathcal{L}^{-1}[G]$
- (2) 延迟 $\mathcal{L}^{-1}[e^{-as} F] = \mathcal{L}^{-1}[F](t-a) \cdot u(t-a)$ $a \geq 0$
- (3) 位移 $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at} \mathcal{L}^{-1}[F]$
- (4) 微分 $\mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}] = (-t)^n \mathcal{L}^{-1}[F]$
- (5) 积分 $\mathcal{L}^{-1}[\int_s^{+\infty} F dz] = \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}[F]$ $\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}[F]$ 局部绝对可积
- (6) 卷积 $\mathcal{L}^{-1}[F \cdot G] = \mathcal{L}^{-1}[F] * \mathcal{L}^{-1}[G]$

4.4.2 留数失效

例 4.4.7 求 $F(s) = \frac{s}{s-1}$ 的拉普拉斯逆变换.

解 因为 $F(\infty) = 1 \neq 0$, 不能用留数法. 由线性性质得

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = \mathcal{L}^{-1}[1] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = \delta + e^t.$$

留数给出的结果 $\text{Res}_1(\frac{se^{st}}{s-1}) = e^t$ 是错误的. □

- 有理函数理论上都能用部分分式分解计算逆变换.

例 4.4.8 求 $F(s) = \ln \frac{s}{s-1}$ 的拉普拉斯逆变换.

解 函数 F 有无穷多个奇点 $([0, 1])$, 故无法用留数计算.

$$\mathcal{L}^{-1}[F'] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}\right] = 1 - e^t.$$

由微分性质得 $\mathcal{L}^{-1}[F] = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}[F'] = \frac{e^t - 1}{t} \in L_{loc}$. □

例 4.4.9 ($a > 0$) 求 $F_1(s) = e^{-as}$ 的拉普拉斯逆变换.

解 $\mathcal{L}^{-1}[F_1] = \mathcal{L}^{-1}[1](t-a) \cdot u(t-a) = \delta(t-a)$. □

例 4.4.10 求 $F_2(s) = \frac{1+e^{-2s}}{s^3}$ 的拉普拉斯逆变换.

解 $\mathcal{L}^{-1}[F_2] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^3}\right] = \frac{t^2}{2} + \frac{(t-2)^2}{2}u(t-2)$. □

- 在上面两个例子中, F_1 没有普通奇点, $\text{Res}_0(F_1 e^{st}) = \frac{t^2+(t-2)^2}{2}$, 都给出错误的结果.
- ∞ 是 e^{-as} 的本性奇点, 这破坏了 $F(\infty) = 0$ 的条件.

4.4.3 微分方程

例 4.4.11 求方程 $y'' - y = 0$ 的通解.

解 记 $Y = \mathcal{L}[y]$, $y(0) = a$, $y'(0) = b$. 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - as - b.$$

对原方程作拉普拉斯变换得

$$(s^2 - 1)Y = as + b \Rightarrow Y = \frac{as + b}{s^2 - 1}.$$

取拉普拉斯逆变换得

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{as + b}{s^2 - 1}\right] = \frac{a+b}{2}e^t + \frac{a-b}{2}e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

记 $c_1 = \frac{a+b}{2}$, $c_2 = \frac{a-b}{2}$, 显然 c_1 和 c_2 可取遍所有复数, 故前式可写作

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \quad t \geq 0.$$

根据解析性, 这实际上是实轴上的通解. □

例 4.4.12 解初值问题 $y'' - y = \sin t \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

解 设 y 是方程的解, 记 $Y = \mathcal{L}[y]$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y,$$

$$\mathcal{L}[\sin t \mathbf{1}_{[0, \pi]}] = \mathcal{L}[\sin t] + \mathcal{L}[\sin(t-\pi)u(t-\pi)] = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

原方程作拉普拉斯变换得 $Y = \frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2-1)(s^2+1)}$. 取逆变换得

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-1)(s^2+1)}\right] + \left(u \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-1)(s^2+1)}\right]\right)(t-\pi) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4}e^t(1+e^{-\pi}) - \frac{1}{4}e^{-t}(1+e^\pi), & t \geq \pi, \\ \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) - \frac{1}{2}\sin t, & 0 \leq t < \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

为求出 y 在负实轴上的表达式, 可做换元 $t \mapsto -t$ 再用拉普拉斯变换. 但注意到 $-y(-t)$ 在 $t \leq 0$ 时满足方程, 且在 $t = 0$ 处无缝拼合, 将 y 作奇延拓即可. \square

测试 4.4.13 用拉普拉斯变换解方程 $y'' - 2y' + 3y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

解 记 $Y = \mathcal{L}[y]$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y - 1, \quad \mathcal{L}[y'] = sY, \quad \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}.$$

对方程做拉普拉斯变换得

$$(s^2 - 2s + 3)Y - 1 = \frac{1}{s+1} \Rightarrow Y = \frac{1}{(s+1)(s^2 - 2s + 3)} + \frac{1}{s^2 - 2s + 3}.$$

做部分分式分解得 (分解到分母至多二次即可)

$$Y = \frac{1}{6} \frac{(s^2 - 2s + 3) - (s+1)(s-3)}{(s+1)(s^2 - 2s + 3)} + \frac{1}{s^2 - 2s + 3} = \frac{1}{6(s+1)} + \frac{4}{3} \frac{1}{(s-1)^2 + 2} - \frac{1}{6} \frac{s-1}{(s-1)^2 + 2}.$$

取拉普拉斯逆变换得

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{6(s+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{2}}{(s-1)^2 + (\sqrt{2})^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{6} \frac{s-1}{(s-1)^2 + (\sqrt{2})^2}\right] \\ &= \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{2\sqrt{2}}{3}e^t \sin(\sqrt{2}t) - \frac{1}{6}e^t \cos(\sqrt{2}t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad \square$$

例 4.4.14 解方程 $y''' - y = \cos t$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

解 记 $Y = \mathcal{L}[y]$, 则 $\mathcal{L}[y'''] = s^3Y - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3Y$, 故原方程的拉普拉斯变换为

$$(s^3 - 1)Y = \frac{s}{s^2 + 1} \Rightarrow Y = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^3 - 1)} = \frac{1}{(s^2 + 1)(s-1)} - \frac{1}{s^3 - 1}.$$

作部分分式分解得

$$Y = \frac{1}{(s^2 + 1)(s-1)} - \frac{1}{s^3 - 1} = \frac{1}{6} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{s+1}{s^2 + 1} + \frac{1}{3} \frac{s+2}{s^2 + s + 1}$$

取拉普拉斯逆变换得

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}}{(s + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right] \\ &= \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \end{aligned} \quad \square$$

例 4.4.15 解方程 $y'' + y = e^{-t^2}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

解 记 $Y = \mathcal{L}[y]$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y.$$

对原方程作拉普拉斯变换得

$$(s^2 + 1)Y = \mathcal{L}[e^{-t^2}] \Rightarrow Y = \frac{\mathcal{L}[e^{-t^2}]}{s^2 + 1} = \mathcal{L}[\sin t] \mathcal{L}[e^{-t^2}].$$

由卷积定理 $Y = \mathcal{L}[\sin t *_{\mathcal{L}} e^{-t^2}]$, 故

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y](t) = \sin t *_{\mathcal{L}} e^{-t^2} \\ &= \int_0^t \sin \tau \cdot e^{-(t-\tau)^2} d\tau, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$
□

例 4.4.16 解常系数初值问题 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_0 = f$, $y^{(j)}(0) = 0, j < n$.

解 令 h 为以 δ 替换 f 的零初值问题的解. 记 $H = \mathcal{L}[h]$, $Y = \mathcal{L}[y]$, 则

$$\begin{aligned} (s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n)H &= \mathcal{L}[\delta] = 1, \\ (s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n)Y &= \mathcal{L}[f]. \end{aligned}$$

故卷积定理给出 $Y = H \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[h *_{\mathcal{L}} f]$, 因此 $y = h *_{\mathcal{L}} f$, 其中

$$h = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}\right].$$
□

练习 4.4.17 验证例 4.4.12 的解是

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 1}\right] *_{\mathcal{L}} \sin t \mathbf{1}_{[-\pi, \pi]} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) *_{\mathcal{L}} \sin t \mathbf{1}_{[0, \pi]}.$$

微分性质与积分性质的逆变换形式

- (1) $\mathcal{L}^{-1}[s^n F] = (\mathcal{L}^{-1}[F])^{(n)}$
 - (2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} F\right] = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}[F] d\tau$
- $(\mathcal{L}^{-1}[F])^{(k)}(0) = 0, 0 \leq k \leq n-1$

例 4.4.18 (二阶方程) 设 P 是一个 n 次多项式, 解方程 $y'' + ay' + by = P(t)e^{ct}$.

解 记 $y(0) = A$, $y'(0) = B$, $Y = \mathcal{L}[y]$, 因为 $\mathcal{L}[t^k e^{ct}] = \frac{k!}{(s-c)^{k+1}}$, 在方程两边取拉普拉斯变换得

$$(s^2 + as + b)Y = \tilde{P}\left(\frac{1}{s-c}\right) + A(s+a) + B,$$

其中 \tilde{P} 是一个 $n+1$ 次多项式. 解得

$$Y = \frac{1}{(s-z_1)(s-z_2)} \tilde{P}\left(\frac{1}{s-c}\right) + \frac{(s+a)A+B}{(s-z_1)(s-z_2)}.$$

其中 z_1 和 z_2 是 $s^2 + as + b = 0$ 的根. 下面针对根的重数进行讨论.

- (1) $z_1 \neq z_2$, 即特征方程方程 $s^2 + as + b = 0$ 有互异的根.

① $c \neq z_1, c \neq z_2$. 则 $\frac{(s+a)A+B}{(s-z_1)(s-z_2)} = \frac{\nu_1}{s-z_1} + \frac{\nu_2}{s-z_2}$.

$$\frac{1}{(s-z_1)(s-z_2)} \frac{1}{(s-c)^k} = \frac{\lambda_1}{s-z_1} + \frac{\lambda_2}{s-z_2} + \frac{\mu_1}{(s-c)^k} + \cdots + \frac{\mu_k}{s-c}$$

因而 $y = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} + Q(t) e^{ct}$, 其中 Q 是一个 n 次多项式.

② $c = z_1$ 或 z_2 . 不妨设 $c = z_2$. 则

$$\frac{1}{(s-z_1)(s-z_2)} \frac{1}{(s-z_2)^k} = \frac{\lambda_1}{s-z_1} + \frac{\mu_1}{(s-z_2)^{k+1}} + \cdots + \frac{\mu_k}{(s-z_2)^2}$$

因而 $y = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} + t Q(t) e^{z_2 t}$, 其中 Q 是一个 n 次多项式.

(2) 特征方程 $s^2 + as + b = 0$ 有重根, 记为 λ .

① $c \neq \lambda$. 则 $\frac{(s+a)A+B}{(s-\lambda)^2} = \frac{\nu_1}{(s-\lambda)^2} + \frac{\nu_2}{(s-\lambda)}$.

$$\frac{1}{(s-\lambda)^2} \frac{1}{(s-c)^k} = \frac{\lambda_1}{(s-\lambda)^2} + \frac{\lambda_2}{s-\lambda} + \frac{\mu_1}{(s-c)^k} + \cdots + \frac{\mu_k}{(s-c)}$$

因而 $y = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} + Q(t) e^{\lambda t}$, 其中 Q 是一个 n 次多项式.

② $c = \lambda$. 则 $\frac{1}{(s-\lambda)^2} \frac{1}{(s-c)^k} = \frac{1}{(s-\lambda)^{k+2}}$. 因而

$$y = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} + t^2 Q(t) e^{\lambda t},$$

其中 Q 是一个 n 次多项式. □

4.A 附录

4.A.1 若干引理

- 设 $f \in C^\infty$, 称多项式 $T_n(f) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$ 为 f 在 0 处的 n 阶泰勒多项式.

引理 4.A.1 (带积分余项的泰勒公式) 设 $f \in C^\infty$, 则对任何 $n \in \mathbb{N}$ 成立

$$f(t) = T_n(f) + \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau t) d\tau.$$

证 由牛顿-莱布尼茨公式

$$f(t) = f(0) + \int_0^1 [f(\tau t)]' d\tau = f(0) + t \int_0^1 f'(\tau t) d\tau$$

知结论对 $n = 0$ 成立. 假设结论对 n 成立, 即

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau t) d\tau = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k - \frac{t^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(\tau t) d\left[\frac{(1-\tau)^{n+1}}{n+1}\right]$$

对上式分部积分得

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k - \frac{[t(1-\tau)]^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\tau t) \Big|_0^1 + \frac{t^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{n+1} f^{(n+2)}(\tau t) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{t^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{n+1} f^{(n+2)}(\tau t) d\tau, \end{aligned}$$

即结论对 $n+1$ 也成立. \square

引理 4.A.2 设 $\phi \in C^\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$. 则

- (1) $\phi \in t^n C^\infty \Leftrightarrow \forall k < n$ 有 $\phi^{(k)}(0) = 0$.
- (2) 条件成立时, 满足 $t^n \psi = \phi$ 的 C^∞ 函数 ψ 是唯一的.
- (3) 当 $\phi \in \mathcal{D}$ (或 \mathcal{S}) 时, 亦有 $\psi \in \mathcal{D}$ (或 \mathcal{S}).

证 (1) (\Rightarrow) 设 $\exists \psi \in C^\infty$ 使得 $\phi = t^n \psi$. 直接求导可知 $\forall k < n$ 有 $\phi^{(k)}(0) = 0$.

(\Leftarrow) 设 $\forall k < n$ 有 $\phi^{(k)}(0) = 0$. 由带积分余项的泰勒公式有

$$\phi(t) = \frac{t^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \phi^{(n)}(\tau t) d\tau = t^n \psi(t).$$

其中 $\psi(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \phi^{(n)}(\tau t) d\tau$. 显然 $\psi \in C^\infty$.

(2) 当 $t \neq 0$ 时 $\psi(t) = \frac{\phi(t)}{t^n}$. 因为 $\psi \in C^\infty$, 它在 $t=0$ 处连续, 故

$$\psi(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t)}{t^n} = \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}.$$

(3) i) 设 $\phi \in \mathcal{D}$. 存在 $a > 0$ 使得当 $|t| \geq a$ 时 $\phi(t) = 0$, 故由 $\phi(t) = t^n \psi(t)$ 知当 $|t| \geq a$ 时亦有 $\psi(t) = 0$. 故 $\psi \in \mathcal{D}$.

ii) 设 $\phi \in \mathcal{S}$. 由于 $t \neq 0$ 时 $\psi(t) = \frac{\phi(t)}{t^n}$, 故亦有 $\psi \in \mathcal{S}$. \square

- 当 ϕ 满足引理 4.A.2 中条件时, 相应的 $\psi(t) = \begin{cases} \frac{\phi(t)}{t^n}, & t \neq 0 \\ \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}, & t = 0 \end{cases}$ 就简记作 $\frac{\phi}{t}$ (这个记号曾用
来表示广函方程 $tf = \phi$ 的通解 $\{f \in \mathcal{D}' \mid tf = \phi\}$, 这里又把它用来表示一个自然的特解, 可根据上下文理解以避免混淆).

定义 4.A.3 设 $\phi \in \mathcal{D}$ (或 \mathcal{S}). 若存在 $\psi \in \mathcal{D}$ (或 \mathcal{S}) 使得 $\phi = \psi'$, 则称 ϕ 在 \mathcal{D} (或 \mathcal{S}) 中有原函数.

- ϕ 在 \mathcal{S} 中的原函数必是唯一的: 若 $\psi'_1 = \phi = \psi'_2$, 则 $\psi_1 = \psi_2 + c$, 由 $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}$ 知 $c = 0$.
- 当 ϕ 在 \mathcal{D} 中有原函数 ψ 时, 因为 $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, ψ 也是它在 \mathcal{S} 中的原函数. 故它在 \mathcal{D} 中的原函数若存在也是唯一的.

引理 4.A.4 设 $\phi \in \mathcal{D}$ (或 \mathcal{S}), 则 ϕ 在 \mathcal{D} (或 \mathcal{S}) 中有原函数的充要条件是 $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 0$.

证 设 $\phi = \psi'$, 其中 $\psi \in \mathcal{D}$ (或 \mathcal{S}), 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = \psi(+\infty) - \psi(-\infty) = 0$.

设 $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 0$. 令 $\psi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(\tau) d\tau$, 则 $\phi = \psi'$.

(1) $\phi \in \mathcal{D}$. 取区间 $[a, b]$ 使得 $\phi(t) = 0, \forall t \notin [a, b]$. 则 $t \notin [a, b]$ 时亦有 $\psi(t) = 0$, 故 $\psi \in \mathcal{D}$.

(2) $\phi \in \mathcal{S}$. 对任何 $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (1+t^{2n}) |\psi(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+t^{2n}) \left| \int_t^{+\infty} \phi(\tau) d\tau \right| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} (1+\tau^{2n}) |\phi(\tau)| d\tau = 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (1+t^{2n}) |\psi(t)| = \lim_{t \rightarrow -\infty} (1+t^{2n}) \left| \int_{-\infty}^t \phi(\tau) d\tau \right| \leq \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^t (1+\tau^{2n}) |\phi(\tau)| d\tau = 0.$$

故 ψ 在 $t \rightarrow \infty$ 时是无限阶无穷小. 由于 $\psi' = \phi$, 其各阶导数同样如此. 故 $\psi \in \mathcal{S}$. \square

推论 4.A.5 设 $\rho \in \mathcal{D}$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) dt = 1$. 则 $\forall \phi \in \mathcal{D}$ (或 \mathcal{S}), $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\phi - \lambda\rho$ 在 \mathcal{D} (或 \mathcal{S}) 中有原函数.

证 令 $\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt$, 则 $\phi - \lambda\rho \in \mathcal{D}$ (或 \mathcal{S}) 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} [\phi(t) - \lambda\rho(t)] dt = 0$. \square

4.A.2 刻画导数

引理 4.A.6 设 f 是局部绝对可积函数, 若 $\langle f, \phi' \rangle = 0$ 对任意 $\phi \in \mathcal{D}$ 成立, 则 $f \stackrel{a.e.}{=} c$.

证 任取 $\rho \in \mathcal{D}$ 使得 $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) dt = 1$, 记 $c = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \rho(t) dt = \langle f, \rho \rangle$.

$\forall \phi \in \mathcal{D}$, 记 $\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt$, 则 $\phi - \lambda\rho = \psi'$, 其中 $\psi \in \mathcal{D}$, 故

$$0 = \langle f, \psi' \rangle = \langle f, \phi - \lambda\rho \rangle = \langle f, \phi \rangle - \lambda c = \langle f, \phi \rangle - \langle c, \phi \rangle = \langle f - c, \phi \rangle.$$

上式对任何 $\phi \in \mathcal{D}$ 成立, 故 $f - c \stackrel{a.e.}{=} 0$ (这是一个众所周知的事实, 例如可参见 [23] 定理 1.2.5). \square

引理 4.1.24 的证明 (1) 因为 f' 连续, 分部积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \phi(t) dt = f(t) \phi(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi'(t) dt.$$

因为 ϕ 在某个有界区间外恒为零, 故上式右侧第一个量为 0.

(2) 因为 g 连续, 所以它有原函数. 令 G 为 g 的一个原函数. 由 (1) 可知

$$\langle G, \phi' \rangle = -\langle g, \phi \rangle = \langle f, \phi' \rangle, \text{ 即 } \langle G - f, \phi' \rangle = 0, \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

由引理 4.A.6 得 $f \stackrel{a.e.}{=} G - c$, 重新改变 f 在一个零长度点集上的定义, 可设前式处处成立. 求导得 $f' = g$. \square

一个自然的问题是, 什么时候 f 的经典导数 f'_{cl} 等于 f 的弱导数 f'' ?

定义 4.A.7 若 f 在每个有界闭区间上可积但不必绝对可积, 则称 f 局部可积.

定义 4.A.8 若存在局部可积函数 g 使得 $f(t) = f(0) + \int_0^t g(\tau) d\tau$, 则称 f 是积分上限函数. 当 g 局部绝对可积时, 称 f 绝对连续.

引理 4.A.9 设 g 局部可积, $f(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$. 则 f 连续, 且 $f' = g$.

证 显然 f 连续. 任取 $\phi \in \mathcal{D}$, 则

$$-\langle f, \phi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(t) f(t) dt = \phi(t) f(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \phi(t) dt = \langle g, \phi \rangle.$$

注意虽然 g 可能不连续, 对 f 用分部积分公式仍然是有效的 (参见 [4] 定理 5.15; 在暇积分情形, 参见 [9] 第 1 章 12.2). \square

引理 4.A.10 设 g 局部可积, $f(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$. 则 f 几乎处处可微, 且 $f'_{cl} \stackrel{a.e.}{=} g$.

证 参见 [4] 定理 5.7 (积分条件收敛时见 [9] 第 1 章 4.11). \square

定理 4.A.11 局部绝对可积函数 f 的弱导数 f' 是局部 (绝对) 可积函数 $\Leftrightarrow f$ 几乎处处等于一个积分上限 (绝对连续) 函数, 且此时经典导数 $f'_{cl} = f'$.

证 (\Rightarrow) 设 f' 是局部 (绝对) 可积函数, 令 $F(t) = \int_0^t f'(\tau) d\tau$, 则 $F' = f'$. 由推论 4.A.5 知存在 $C \in \mathbb{C}$ 使得 $f \stackrel{a.e.}{=} F + C$, 重新改变 f 在一个零测集上的定义, 就有 $f = F + C$, 即 $f(t) = \int_0^t f'(\tau) d\tau + C$, 令 $t = 0$ 知 $C = f(0)$, 故 $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau) d\tau$.

(\Leftarrow) 由前两个引理可知结论成立. \square

推论 4.A.12 连续函数 f 的弱导数等于经典导数 $\Leftrightarrow f$ 是积分上限函数.

例 4.A.13 记 $\ln |t|$ 的弱导数为 $\frac{1}{t}$, 则 $\langle \frac{1}{t}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{\phi(t)}{t} dt$ 且 $t \cdot \frac{1}{t} = 1$.

证 因为 $t \ln |t| = \int_0^t (\ln |\tau| + 1) d\tau$, 故 $(t \ln |t|)' = (t \ln |t|)'_{cl} = \ln |t| + 1$. 又由命题 4.1.37, $(t \ln |t|)' = \ln |t| + t(\ln |t|)'$, 结合前式就得到 $t(\ln |t|)' = 1$. 任取 $\phi \in \mathcal{S}$. 由引理 4.A.2, $\psi(t) = \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{t} \in \mathcal{S}$. 因为 $\ln |t|$ 是偶函数, 故 $(\ln |t|)'$ 是奇函数, 从而

$$\langle (\ln |t|)', \phi \rangle = \frac{1}{2} \langle (\ln |t|)', t\psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle t(\ln |t|)', \psi \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{t} dt. \quad \square$$

- 直接计算 $(\ln |t|)'$ 可能更容易:

$$\begin{aligned} \langle (\ln |t|)', \phi \rangle &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(t) \ln |t| dt = - \int_0^{+\infty} [\phi'(-t) + \phi'(t)] \ln t dt \\ &= -[\phi(t) - \phi(-t)] \ln t \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{t} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{\phi(t)}{t} dt. \end{aligned} \quad \square$$

4.A.3 广义函数

引理 4.A.14 (1) 任意区间 $[a, b] \subset (c, d)$, 存在 $\phi \in \mathcal{D}$ 使得 $0 \leq \phi \leq 1$, 且 $\phi|_{[a,b]} = 1$, $\phi|_{\mathbb{R} \setminus [c,d]} = 0$.
(2) 存在 $\{\phi_n\} \subset \mathcal{D}$ 使得在每个有界区间 $[a, b]$ 上只有有限个 ϕ_n 不恒为零, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n = 1$.

证 这是单位分解定理 (参见 [17] 定理 1.11) 的特例. \square

定义 4.A.15 一个广义函数 T , 是以 $\phi \in \mathcal{D}$ 为自变量的函数, 使得存在连续函数列 $\{f_n\}$ 和自然数列 $\{k_n\}$ 满足: (1) 在每个有界区间 $[a, b]$ 上只有有限个 f_n 不恒为零, (2) $T = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k_n)}$.

- 广义函数有不同的等价定义方式. 取如引理 4.A.14 中的函数列 $\{\phi_n\}$, 这个描述是对 $T = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n T$ 应用 [25] 定理 24.5 推论 3 的结果.
- 任何局部绝对可积函数 (特别地, 连续函数) f 都是广义函数: 由引理 4.A.9, $f = g'$. 由引理 4.A.14 有 $g = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n g$, 故 $f = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_n g)'$.
- 局部绝对可积函数的弱导数是广义函数. 广义函数对线性组合封闭.

命题 4.A.16 每个广义函数都有原函数.

证 设 $T = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k_n)}$ 是广义函数. 令 $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid k_n \geq 1\}$, 则 $T = f + \sum_{n \in A} f_n^{(k_n)}$, 其中 $f = \sum_{n \notin A} f_n^{(k_n)}$ 是连续函数. 令 g 是 f 的一个经典原函数, 则 $S = g + \sum_{n \in A} f_n^{(k_n-1)}$ 是 T 的一个原函数. \square

- 将广义函数 f 的原函数全体记作 $\int f(t) dt$, 由命题 4.1.37 (3) 可知 $\int f(t) dt = F + \mathbb{C}$, 其中 F 是 f 的一个原函数.

定义 4.A.17 若存在常数 A 和 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|f(t)| \leq |t|^n$ 对任何 $|t| \geq A$ 成立, 则称 f 是缓增函数. 称缓增连续函数 f 的各阶导数为缓增分布.

- 因为缓增局部绝对可积函数的积分上限是连续的, 且仍缓增, 定义中的连续函数可替换为局部绝对可积函数.
- 因为 $f^{(0)} = f$, 故缓增函数均是缓增分布. 特别地, 常值函数、实正 (余) 弦函数, 多项式, 以及分母无实零点的有理函数, 都是缓增分布.
- 缓增分布对线性组合封闭; $\delta_a^{(n)}$ 是缓增分布.
- 缓增分布 f 可以作用在速降函数上, 即函数 f 有更大的定义域 \mathcal{S} .

引理 4.A.18 多项式与缓增分布的乘积是缓增分布.

证 只需证若 f 是缓增分布, 则 tf 亦然.

设 g 是缓增连续函数. 显然 tg 仍然缓增, 故 tg 是缓增分布. 假设 $tg^{(n)}$ 是缓增分布, 则

$$tg^{(n+1)} = [tg^{(n)}]' - g^{(n)}$$

是缓增分布. 由归纳原理可知 $\forall n \in \mathbb{N}$, $tg^{(n)}$ 都是缓增分布.

由 g 的任意性和缓增分布的定义, 可知若 f 是缓增分布, 则 tf 亦然. \square

例 4.A.19 若 f 是绝对可积函数, 则 $\forall \phi \in \mathcal{D}, \langle \mathcal{F}[f], \phi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\phi] \rangle$.

证 容易由富比尼定理看出, 下面的积分交换次序是合理的:

$$\langle \mathcal{F}[f], \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \langle f, \mathcal{F}[\phi] \rangle. \quad \square$$

引理 4.A.20 速降函数的傅氏变换还是速降函数, 即 $\phi \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}[\phi] \in \mathcal{S}$.

证 任取 $n, k \in \mathbb{N}$. 由傅里叶变换的性质

$$\omega^n \cdot (\mathcal{F}[\phi])^{(k)} = \omega^n \mathcal{F}[(-i)^k t^k \phi] = \mathcal{F}[(-i)^{n+k} (t^k \phi)^{(n)}].$$

因为 $\phi \in \mathcal{S}$, 所以 $(t^k \phi)^{(n)} \in \mathcal{S}$, 特别地 $(-i)^{n+k} (t^k \phi)^{(n)}$ 绝对可积, 故

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^n \cdot (\mathcal{F}[\phi])^{(k)} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathcal{F}[(-i)^{n+k} (t^k \phi)^{(n)}] \xrightarrow{\text{推论 4.1.14}} 0. \quad \square$$

定义 4.A.21 设 f 是缓增分布, f 的傅里叶变换 $\mathcal{F}[f]$ 是下式定义的广义函数:

$$\langle \mathcal{F}[f], \phi \rangle := \langle f, \mathcal{F}[\phi] \rangle, \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

命题 4.A.22 缓增分布的傅里叶变换仍是缓增分布.

证 先设 f 是缓增连续函数. 取 n 使得 $g = \frac{f}{1+t^{2n}}$ 绝对可积, 则 $\mathcal{F}[g]$ 是有界连续函数, 当然缓增, 故它是缓增分布, 且此时 $\langle f, \mathcal{F}[\phi] \rangle$ 由积分给出, 故

$$\begin{aligned} \langle f, \mathcal{F}[\phi] \rangle &= \langle g, (1+t^{2n}) \mathcal{F}[\phi] \rangle = \langle g, \mathcal{F}[\phi + (-1)^n \phi^{(2n)}] \rangle = \langle \mathcal{F}[g], \phi + (-1)^n \phi^{(2n)} \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[g] + (\mathcal{F}[(-1)^n g])^{(2n)}, \phi \rangle \end{aligned}$$

因此 $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g] + \mathcal{F}[(-1)^n g]^{(2n)}$ 是缓增分布.

现在只需证明, 若 $\mathcal{F}[f]$ 是缓增分布, 则 $\mathcal{F}[f']$ 亦然. 这可从可直接由定义 4.A.21 验证的等式 $\mathcal{F}[f'] = i\omega \mathcal{F}[f]$ 得到. \square

4.A.4 弱 \star 极限

- 若 f 是广义函数, 若广义函数列 f_n 使得 $\forall \phi \in \mathcal{D}, \langle f, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \phi \rangle$, 则称 f 是 f_n 的弱极限 (更严谨的叫法是弱 \star 极限), 记作 $f = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.
- 若 f 是缓增分布, 若缓增分布列 f_n 使得 $\forall \phi \in \mathcal{S}, \langle f, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \phi \rangle$, 则称 f 是 f_n 的弱极限, 记作 $f = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.
- 任何 (缓增) 广义函数都是 \mathcal{D} 中函数列的弱极限.

例 4.A.23 一般而言, 极限存在时也未必等于弱极限. 例如 $f_n(t) = n\mathbf{1}_{(0, \frac{1}{n})}$ 处处收敛于 0, 但 $\forall \phi \in \mathcal{D}$, 由积分中值定理, $\exists \xi_n \in [0, \frac{1}{n}]$ 使得 $\int_0^{\frac{1}{n}} \phi(t) dt = \frac{1}{n} \phi(\xi_n)$, 故

$$\langle f_n, \phi \rangle = n \int_0^{\frac{1}{n}} \phi(t) dt = \phi(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle$$

表明 $\{f_n\}$ 的弱极限是 δ .

但根据控制收敛定理, 我们有下面的判别法:

命题 4.A.24 设 $\{f_n\} \cup \{f\}$ 是局部绝对可积函数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{a.e.}{=} f$.

(1) 若存在局部绝对可积函数 F 使得 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n - f| \leq F$, 则 $f = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

(2) 设 f 不超过多项式增长, 若存在不超过多项式增长的局部绝对可积函数 F 使得 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n - f| \leq F$, 则 $f = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

命题 4.A.25 (弱导数、傅氏变换都保持弱极限) (1) 若 $f = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, 则 $f' = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$.

(2) $f = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, 则 $\mathcal{F}[f] = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f_n]$.

推论 4.A.26 设 $f \in C^1$ 满足 $f(+\infty) = 1, f(-\infty) = 0$, 则 $f_n(t) := f(nt)$ 弱收敛于 $u(t)$, $f'_n = nf'(nt)$ 弱收敛于 δ .

证 由条件可知 f 是有界函数, 设 $M > 0$ 是 $|f|$ 的一个上界. 则 $|f_n - u| \leq M + 1$ 且当 $t \neq 0$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = u(t)$, 故 $u = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

由于 $\delta = u'$, 且弱导数保持弱极限, 而 $f_n \in C^1$ 表明其弱导数由经典导数表示, 故 $f'_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta$. \square

例 4.A.27 (1) 取 $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan t$, 则 $f'_n = \frac{n}{\pi(1+n^2t^2)} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta$.

(2) 取 $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$, 则 $f'_n = \frac{\sin nt}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta$.

(3) 取 $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau$, 则 $f'_n = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2t^2}{2}} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta$.

例 4.A.28 因为 $1 = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{[-n, n]}$, 所以

$$\mathcal{F}[1] = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\mathbf{1}_{[-n, n]}] = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{-i\omega t} dt = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin n\omega}{\omega} = 2\pi\delta.$$

引理 4.A.29 $\mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\cos nt}{t} = \frac{1}{t}$.

证 任取 $\phi \in \mathcal{S}$. 因为 $\frac{1-\cos nt}{t}$ 是奇函数, 故

$$\left\langle \frac{1-\cos nt}{t}, \phi \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1-\cos nt}{t}, \phi(t) - \phi(-t) \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1-\cos nt}{t}, t\psi(t) \right\rangle = \frac{1}{2} \langle 1 - \cos nt, \psi(t) \rangle$$

其中 $\psi(t) = \frac{\phi(t)-\phi(-t)}{t} \in \mathcal{S}$. 因为 $\cos nt = (-\frac{\sin nt}{n})'$, 故

$$\left\langle \frac{1-\cos nt}{t}, \phi \right\rangle = \frac{1}{2} \langle 1, \psi \rangle - \frac{1}{n} \langle \sin nt, \psi' \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \langle 1, \psi \rangle = \left\langle \frac{1}{t}, \phi \right\rangle$$

故 $\mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\cos nt}{t} = \frac{1}{t}$. \square

例 4.A.30 因为 $u = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{[0,n]}$, 所以

$$\mathcal{F}[u] = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\mathbf{1}_{[0,n]}] = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-i\omega t} dt = \mathcal{S}'\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \cos n\omega}{i\omega} + \frac{\sin n\omega}{\omega} \right) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega).$$

4.A.5 变换性质

傅氏变换

定理 4.A.31 设 f 是 C^1 函数, $\mathcal{F}[f]$ 存在且 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, 则 $\mathcal{F}[f']$ 存在且 $\mathcal{F}[f'] = i\omega\mathcal{F}[f]$.

证 $\mathcal{F}[f'] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt = f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\omega)f(t)e^{-i\omega t} dt = i\omega\mathcal{F}[f].$ \square

- 定理的局限是, 限制条件较多且不易验证.
- 当 C^1 函数 f 绝对可积且 f' 也绝对可积时, 定理条件成立.

引理 4.A.32 (积分号下求导) 设对 $\forall \omega \in (a, b)$, $f(t, \omega)$ 关于 t 绝对可积, $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ 处处存在, 且存在绝对可积的 g 使得 $|\frac{\partial f}{\partial \omega}(t, \omega)| \leq g(t)$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \omega) dt$ 可导, 且 $\frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \omega) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \omega}(t, \omega) dt$.

证 可由控制收敛定理证明 (参见 [4] 定理 4.17). \square

定理 4.A.33 设 f 和 tf 都绝对可积, 则 $\mathcal{F}[tf] = i(\mathcal{F}[f])'$.

证 由绝对可积条件, 知 $\mathcal{F}[f]$ 和 $\mathcal{F}[tf]$ 均存在. 显然函数 $f(t)e^{-i\omega t}$ 满足引理 4.A.32 的条件 (取 $g(t) = |tf(t)|$ 即可), 故

$$(\mathcal{F}[f])' = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\partial}{\partial \omega} (e^{-i\omega t}) dt = -i \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-i\omega t} dt = -i\mathcal{F}[tf]. \quad \square$$

推论 4.A.34 若 f 和 tf 绝对可积, 则 $\mathcal{F}[f]$ 是 C^1 函数.

推论 4.A.35 设 f 和 $\frac{f}{t}$ 绝对可积, 则 $\mathcal{F}[\frac{f}{t}] = i \int_{\omega}^{+\infty} \mathcal{F}[f](\tau) d\tau$.

证 记 $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, 则 g 和 tg 绝对可积, 故 $\mathcal{F}[g]$ 是 C^1 函数且 $\mathcal{F}[g](\infty) = 0$ (推论 4.1.14), 因此

$$\mathcal{F}[g](\omega) = - \int_{\omega}^{+\infty} (F[g])'(\tau) d\tau = - \int_{\omega}^{+\infty} -i\mathcal{F}[tg](\tau) d\tau = i \int_{\omega}^{+\infty} \mathcal{F}[f](\tau) d\tau. \quad \square$$

定理 4.A.36 设 f 是缓增分布, 则 $\mathcal{F}[f'] = i\omega\mathcal{F}[f]$.

证 $\forall \phi \in \mathcal{D}$, ϕ 和 $t\phi$ 显然是绝对可积的, 故

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[f'], \phi \rangle &= \langle f', \mathcal{F}[\phi] \rangle = -\langle f, (\mathcal{F}[\phi])' \rangle \xrightarrow{\text{定理 4.A.33}} -\langle f, -i\mathcal{F}[t\phi] \rangle = \langle if, \mathcal{F}[t\phi] \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[if], t\phi \rangle \xrightarrow{\substack{\text{光滑函数} \\ \text{与广义函数乘积的定义}}} \langle t\mathcal{F}[if], \phi \rangle = \langle it\mathcal{F}[f], \phi \rangle, \end{aligned}$$

傅里叶变换中自变量习惯写作 ω , 即有 $\mathcal{F}[f'] = i\omega\mathcal{F}[f]$. \square

- 采用广函的观点, 不但扩大了傅里叶变换的范围, 也使得微分性质成立的条件变成了无条件 (但请注意 f' 是广义函数导数, 即弱导数).

定理 4.A.37 设 f 是缓增分布, 则 $\mathcal{F}[tf] = i(\mathcal{F}[f])'$.

证 $\forall \phi \in \mathcal{D}$ 显然满足定理 4.A.31 的条件, 故

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[tf], \phi \rangle &= \langle tf, \mathcal{F}[\phi] \rangle \xrightarrow{\substack{\text{光滑函数} \\ \text{与广函乘积的定义}}} \langle f, t\mathcal{F}[\phi] \rangle \xrightarrow{\text{定理4.A.31}} \langle f, -i\mathcal{F}[\phi'] \rangle = -\langle if, \mathcal{F}[\phi'] \rangle \\ &= -\langle \mathcal{F}[if], \phi' \rangle \xrightarrow{\substack{\text{弱导数} \\ \text{的定义}}} \langle (\mathcal{F}[if])', \phi \rangle = \langle i(\mathcal{F}[f])', \phi \rangle. \end{aligned}$$

定理 4.A.38 (1) $\mathcal{F}[f(t+a)] = e^{ia\omega} \mathcal{F}[f]$ (2) $\mathcal{F}[e^{iat}f] = \mathcal{F}[f](\omega - a)$ (3) $\mathcal{F}[f(at)] \xrightarrow{a \neq 0} \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

证 不难从傅里叶变换的定义验证这些性质. 注意 e^{iat} 和 $e^{ia\omega}$ 乘以缓增分布还是缓增分布. \square

定理 4.A.39 设 f 绝对可积, 则 $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau] = (\frac{1}{i\omega} + \pi\delta)\mathcal{F}[f]$. 其中 $\frac{\mathcal{F}[f]}{\omega}$ 是下式定义的广义函数: $\langle \frac{\mathcal{F}[f]}{\omega}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_0^{+\infty} \frac{\phi(\tau)e^{-it\tau} - \phi(-\tau)e^{it\tau}}{i\tau} d\tau$. 当 tf 也绝对可积时, $\langle \frac{\mathcal{F}[f]}{\omega}, \phi \rangle = \langle \frac{1}{\omega}, \mathcal{F}[f]\phi \rangle$.

证 记 $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$. $\forall \phi \in \mathcal{S}$, 因为对每个 $t \in \mathbb{R}$ 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\phi(\tau)e^{-it\tau} - \phi(-\tau)e^{it\tau}}{-i\tau} d\tau$ 都绝对收敛,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi(\tau)e^{-it\tau} - \phi(-\tau)e^{it\tau}}{-i\tau} \right) \right| = |\phi(\tau)e^{-it\tau} + \phi(-\tau)e^{it\tau}| \leq |\phi(\tau)| + |\phi(-\tau)|$$

且后者在 $[0, +\infty)$ 上绝对可积, 故下面的对 t 求导与积分交换次序是合法的:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[g], \phi \rangle &= \langle g, \mathcal{F}[\phi] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)e^{-it\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \int_0^{+\infty} [\phi(\tau)e^{-it\tau} + \phi(-\tau)e^{it\tau}] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) d \left[\int_0^{+\infty} \frac{\phi(\tau)e^{-it\tau} - \phi(-\tau)e^{it\tau}}{-i\tau} d\tau \right] \\ &= g(t) \int_0^{+\infty} \frac{\phi(\tau)e^{-it\tau} - \phi(-\tau)e^{it\tau}}{-i\tau} d\tau \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_0^{+\infty} \frac{\phi(\tau)e^{-it\tau} - \phi(-\tau)e^{it\tau}}{i\tau} d\tau. \end{aligned}$$

处理第一个积分. 由引理 4.1.13, $e^{\pm it\tau}$ 中余弦部分的积分值为零. 正弦部分

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^{+\infty} \frac{[\phi(\tau) + \phi(-\tau)] \sin t\tau}{\tau} d\tau \xrightarrow{\text{引理4.1.13}} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^1 \frac{[\phi(\tau) + \phi(-\tau)] \sin t\tau}{\tau} d\tau \\ &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^1 \frac{[\phi(\tau) + \phi(-\tau) - 2\phi(0)] \sin t\tau}{\tau} d\tau + 2\phi(0) \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^1 \frac{\sin t\tau}{\tau} d\tau \\ &\xrightarrow{\text{引理4.1.13}} 2\phi(0) \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \pm\pi\phi(0). \end{aligned}$$

又 $g(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \mathcal{F}[f](0)$, $g(-\infty) = 0$, 故

$$g(t) \int_0^{+\infty} \frac{\phi(\tau)e^{-it\tau} - \phi(-\tau)e^{it\tau}}{-i\tau} d\tau \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} = \pi\phi(0)[g(+\infty) + g(-\infty)] = \pi(\phi\mathcal{F}[f])(0) = \langle \pi\delta\mathcal{F}[f], \phi \rangle.$$

第二个积分就是 $\langle \frac{F(\omega)}{i\omega}, \phi \rangle$. 当 tf 也绝对可积时, 由富比尼定理第二个积分可交换积分次序成为 $\int_0^{+\infty} \frac{\phi(\tau)F(\tau) - \phi(-\tau)F(-\tau)}{i\tau} d\tau = \langle \frac{1}{i\omega}, F(\omega)\phi \rangle$. 如果 $F(\omega)$ 还是光滑函数 (例如 f 是速降函数, 或某个有

界区间外恒为零的有界可积函数时), 那么 $\frac{F(\omega)}{i\omega}$ 就是前面定义的光滑函数 $F(\omega)$ 与广义函数 $\frac{1}{i\omega}$ 的乘积. \square

推论 4.A.40 若 f 绝对可积且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0$, 则 $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau] = \frac{1}{i\omega} \mathcal{F}[f]$.

拉氏变换

定理 4.A.41 设 f 局部绝对可积且 $c_f < \infty$, 则 $\operatorname{Re}(s) > c_f$ 时 $\mathcal{L}[tf](s) = -(\mathcal{L}[f])'(s)$.

证 显然 $c_{tf} = c_f < \infty$. 任取 $c > c_f$, 当 $\operatorname{Re}(s) > c$ 时, $|\frac{\partial}{\partial s}[f(t)e^{-st}]| \leq |tf(t)|e^{-ct}$, 后者是可积的, 故求导与积分号可交换 (结合例 3.1.25, 可知引理 4.A.32 对复参数仍然适用):

$$(\mathcal{L}[f])' = \left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \right)' = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}[f(t)e^{-st}] dt = - \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st} dt = -\mathcal{L}[tf]. \quad \square$$

定理 4.A.42 设 $f \in C^1$ 且 $c_f < \infty$, 则 $\operatorname{Re}(s) > c_f$ 时, $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f] - f(0)$.

证 对 f' 的拉普拉斯变换分部积分得

$$\mathcal{L}[f'] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

当 $\operatorname{Re}(s) > c_f$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t)e^{-st}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t)|e^{-\operatorname{Re}(s)t} = 0$, 从而 $\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0)$. \square

例 4.A.43 f 不超过指数增长时, f' 有可能是超过指数增长的. 例如 $f(t) = \sin(e^{t^2})$.

定理 4.A.44 设 $c_f < \infty$ 且 $\frac{1}{t}f$ 局部绝对可积, 则 $\mathcal{L}[\frac{1}{t}f] = \int_s^\infty \mathcal{L}[f](z) dz$, $\operatorname{Re}(s) > c_f$.

证 显然 $\frac{1}{t}f$ 的增长指标也是 c_f . 由微分性质得

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}\left[t \cdot \frac{f}{t}\right] = -\left(\mathcal{L}\left[\frac{f}{t}\right]\right)',$$

由于 $\mathcal{L}[f](z)$ 在单连通域 $\operatorname{Re}(z) > c_f$ 上解析, 积分 $\int_s^\zeta \mathcal{L}[f](z) dz$ 与路径无关, 当 $\operatorname{Re}(s) > c$ 时

$$\lim_{\operatorname{Re}(\zeta) \rightarrow +\infty} \left(\mathcal{L}\left[\frac{f}{t}\right](\zeta) - \mathcal{L}\left[\frac{f}{t}\right](s) \right) = -\lim_{\operatorname{Re}(\zeta) \rightarrow +\infty} \int_s^\zeta \mathcal{L}[f](z) dz.$$

由于 $\lim_{\operatorname{Re}(\zeta) \rightarrow +\infty} \mathcal{L}\left[\frac{f}{t}\right](\zeta) = 0$, 所以

$$\mathcal{L}\left[\frac{f}{t}\right](s) = \lim_{\operatorname{Re}(\zeta) \rightarrow +\infty} \int_s^\zeta \mathcal{L}[f](z) dz, \quad \operatorname{Re}(s) > c_f. \quad \square$$

- 在上面 $\zeta \rightarrow \infty$ 的过程中只要 $\operatorname{Re}(\zeta) \geq c_1 > c$ 即可: 将 f 等同于 fu , 取 $f(t)e^{-c_1 t}$ 的 \mathcal{D} 逼近 g 使得 $\|g - f(t)e^{-c_1 t}\|_{L^1} < \varepsilon$, 记 $a(x) = x - c_1 \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}e^{-iyt} dt \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-c_1 t} - g(t)|e^{-at} dt + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-at}e^{-iyt} dt \right| \\ &< \varepsilon + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-at}e^{-iyt} dt \right|. \end{aligned}$$

不妨设 a 有界而 $y \rightarrow \infty$, 分部积分得

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-at}e^{-iyt} dt \right| = \left| \frac{1}{iy} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt}[g(t)e^{-at}]' dt \right| \leq \frac{1}{|y|} (\|ag\|_{L^1} + \|g'\|_{L^1}) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0.$$

同法可用于证明: 若 $f \in L^1$, 则 $\forall x(y)$, $\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{x(y)} f(t)e^{iyt} dt = 0$.

4.A.6 广义方程

引理 4.A.45 设 $\phi \in \mathcal{D}$. 函数 $\rho \in \mathcal{D}$ 使得 ρ 在 0 附近恒等于 1. 则 $\phi - \rho T_{n-1}(\phi) \in t^n \mathcal{D}$.

证 这是因为 $\psi := \phi - \rho T_{n-1}(\phi) \in \mathcal{D}$ 且 $\forall k < n$ 有 $\psi^{(k)}(0) = 0$. \square

命题 4.A.46 设 $n \in \mathbb{N}^*$. 广义函数方程 $t^n f = 0$ 的通解为 $f = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}$ (引理 4.A.2).

证 设 f 是方程 $t^n f = 0$ 的解. 取 $\rho \in \mathcal{D}$ 使得 ρ 在 0 附近恒等于 1, 则 $\forall \phi \in \mathcal{D}$ 有 $\phi - \rho T_{n-1}(\phi) = t^n \psi$, $\psi \in \mathcal{D}$. 故

$$0 = \langle t^n f, \psi \rangle = \langle f, t^n \psi \rangle = \langle f, \phi - \rho T_{n-1}(\phi) \rangle \Rightarrow \langle f, \phi \rangle = \langle f, \rho T_{n-1}(\phi) \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \phi^{(k)}(0) \left\langle f, \frac{t^k}{k!} \rho \right\rangle.$$

记 $C_k = (-1)^k \langle f, \frac{t^k}{k!} \rho \rangle$, 就有

$$\langle f, \phi \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} C_k (-1)^k \phi^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \langle \delta^{(k)}, \phi \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}, \phi \right\rangle$$

由 ϕ 的任意性可知 $f = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}$.

反之, 若 $f = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}$, 代入方程左边可知它确实是方程的解. \square

推论 4.A.47 设 $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$. 广义函数方程 $(t-a)^n f = 0$ 的通解为 $f = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta_a^{(k)}$.

证 此方程等价于 $t^n f(t+a) = 0$, 故通解为 $f(t+a) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}$, 即 $f = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta_a^{(k)}$. \square

例 4.A.48 设 $h \in C^\infty$, 方程 $tf = h$ 有特解 $f_0 = h \cdot \frac{1}{t}$. 当 h 不超过多项式增长时, f_0 是缓增分布.

解 只需验证如上定义的 $f_0 = h \cdot \frac{1}{t}$ 是解.

$$\begin{aligned}\langle tf_0, \phi \rangle &= \langle f_0, t\phi \rangle = \left\langle \frac{1}{t}, ht\phi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{ht\phi}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t|>\varepsilon} h\varphi dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h\phi dt = \langle h, \phi \rangle.\end{aligned}$$

□

例 4.A.49 设 $a \in \mathbb{R}$, $g \in C^\infty$. 依广义函数的运算定义, $\frac{1}{t-a}$ 为柯西主值定义的广义函数:

$$\left\langle \frac{1}{t-a}, \phi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t-a|>\varepsilon} \frac{\phi}{t-a} dt, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

令 $\frac{1}{(t-a)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{1}{t-a}\right)^{(n-1)}$, 则 $f_0 = g \cdot \frac{1}{(t-a)^n}$ 是广义方程 $(t-a)^n f = g$ 的一个特解.

证 只需证 $(t-a)^n \cdot \frac{1}{(t-a)^n} = 1$. $n=1$ 时同上例一样验证 $(t-a) \cdot \frac{1}{t-a} = 1$. 故结论对 $n=1$ 成立. 设结论对 n 成立, 即 $(t-a)^n \cdot \frac{1}{(t-a)^n} = 1$. 将该式求导得

$$0 = n(t-a)^{n-1} \cdot \frac{1}{(t-a)^n} - n(t-a)^n \cdot \frac{1}{(t-a)^{n+1}} \Rightarrow (t-a)^{n+1} \cdot \frac{1}{(t-a)^{n+1}} = (t-a)^n \cdot \frac{1}{(t-a)^n} = 1,$$

故结论对 $n+1$ 也成立. □

例 4.A.50 设 $a, b \in \mathbb{R}$. 广义方程 $(t-a)^n f = \delta_b^{(m)}$ 当 $b=a$ 时有特解 $f_0 = \frac{(-1)^n m!}{(m+n)!} \delta_a^{(m+n)}$; 当 $b \neq a$ 时有特解

$$f_0 = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!(b-a)^{n+k}} \delta_b^{(m-k)}.$$

证 (1) $b=a$ 时, 方程为 $(t-a)^n f = \delta_a^{(m)}$. 在方程 $(t-a)\delta_a = 0$ 两边求 k 阶导数得

$$0 = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (t-a)^{(j)} \delta_a^{(k-j)} = (t-a)\delta_a^{(k)} + k\delta_a^{(k-1)} \Rightarrow -\frac{t-a}{k} \delta_a^{(k)} = \delta_a^{(k-1)}.$$

在上面最后一个等式两边乘以 $\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} (t-a)^{k-1}$ 就得到 $(-1)^k \frac{(t-a)^k}{k!} \delta_a^{(k)} = (-1)^{k-1} \frac{(t-a)^{k-1}}{(k-1)!} \delta_a^{(k-1)}$, 这说明函数列 $\{(-1)^k \frac{(t-a)^k}{k!} \delta_a^{(k)}\}$ 是和 k 无关的常函数列, 令 $k=m+n$ 和 $k=m$ 就得到

$$(-1)^{m+n} \frac{(t-a)^{m+n}}{(m+n)!} \delta_a^{(m+n)} = (-1)^m \frac{(t-a)^m}{m!} \delta_a^{(m)} \Rightarrow (t-a)^m \left[(t-a)^n \frac{(-1)^n m!}{(m+n)!} \delta_a^{(m+n)} - \delta_a^{(m)} \right] = 0.$$

由推论 4.A.47 知

$$(t-a)^n \frac{(-1)^n m!}{(m+n)!} \delta_a^{(m+n)} = \delta_a^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta_a^{(k)}.$$

将两边同时作用于 $(t-a)^k$ ($k < m$) 可知 $c_k = 0$.

(2) 设 $b \neq a$. 令 $r = \frac{|b-a|}{4}$, 取 $\rho \in \mathcal{D}$ 使得 $\rho|_{(b-r, b+r)} = 1$ 且 $\rho|_{\mathbb{R} \setminus (b-2r, b+2r)} = 0$, 则 $\frac{\rho(t)}{(t-a)^n} \in \mathcal{D}$. 因为 $\rho-1 \in C^\infty$ 在 $(b-r, b+r)$ 上恒为零, 故 $(\rho-1)\delta_b^{(m)} = 0$. 则

$$(t-a)^n \cdot \frac{\rho(t)}{(t-a)^n} \delta_b^{(m)} = \rho \delta_b^{(m)} = \delta_b^{(m)}$$

表明 $f_0 = \frac{\rho(t)}{(t-a)^n} \delta_b^{(m)}$ 是方程的一个特解. 将 $\frac{\rho(t)}{(t-a)^n}$ 展开为 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k-1)!}{k!(n-1)!} \frac{(t-b)^k \rho(t)}{(b-a)^{n+k}}$, 则

$$\begin{aligned} f_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k-1)!}{k!(n-1)!} \frac{(t-b)^k \rho(t)}{(b-a)^{n+k}} \delta_b^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k-1)!}{k!(n-1)!} \frac{(t-b)^k}{(b-a)^{n+k}} \delta_b^{(m)} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (n+k-1)!}{k!(n-1)!} \frac{(t-b)^k}{(b-a)^{n+k}} \delta_b^{(m)}. \end{aligned} \quad (\star)$$

下面来计算 $(t-b)^k \delta_b^{(m)}$. 因为

$$\begin{aligned} \langle (t-b)^k \delta_b^{(m)}, \phi \rangle &= (-1)^m [(t-b)^k \phi]^{(m)}(b) = (-1)^m \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} [(t-b)^k]^{(j)}(b) \phi^{(m-j)}(b) \\ &= (-1)^m \binom{m}{k} k! \phi^{(m-k)}(b) = \left\langle (-1)^k \binom{m}{k} k! \delta_b^{(m-k)}, \phi \right\rangle, \end{aligned}$$

所以 $(t-b)^k \delta_b^{(m)} = (-1)^k \binom{m}{k} k! \delta_b^{(m-k)}$, 代入 (\star) 式即得所欲证的 f_0 . \square

- 对于 $(t-a)^m \cdots (t-b)^n f = g$, 可以一步步求解.

对于一般的广义函数 g , 我们有下面的结论.

定理 4.A.51 设 P 是非零多项式, 则 $Pf = g$ 总有解. 当 g 是缓增分布时, 存在一个缓增分布解 f .

证 参见 [24] 第 V 章第 123 页. \square

定理 4.A.52 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 广函方程 $(t-a)^n f = g$ 的通解为 $f = f_0 + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta_a^{(k)}$, 其中 f_0 是特解.

证 这是因为若 f_0 是一个特解, 则对任何一个解 f 我们有

$$(t-a)^n (f - f_0) = g - g = 0,$$

由推论 4.A.47 知 $f - f_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta_a^{(k)}$. \square

例 4.A.53 设 $h \in C^\infty$, 方程 $tf = h$ 的通解为 $f = h \cdot \frac{1}{t} + C\delta$.

推论 4.A.54 设 f 是缓增分布, 则任何 $g \in \frac{f}{t}$ 都是缓增分布, 且 $\mathcal{F}[g](\omega) \in -i \int \mathcal{F}[f](\omega) d\omega$

证 由定理 4.A.37 知 $\mathcal{F}[f] = i(\mathcal{F}[g])'$, 即 $\mathcal{F}[g]$ 是 $-i\mathcal{F}[f]$ 的一个原函数. \square

例 4.A.55 设 h 是实解析函数且只有有限个非零零点 t_1, \dots, t_n , 解方程 $hf = \delta$.

解 因为 $h(0) \neq 0$, 方程显然有特解 $f_0 = \frac{1}{h(0)}\delta$. 现在来解齐次方程 $hf = 0$.

设 t_k 是 h 的 m_k 级零点, 取 $\rho_k \in \mathcal{D}$ 使得 ρ_k 在 t_k 附近恒为 1, 且彼此支集不相交. 由积分余项的泰勒公式知

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \quad \frac{\phi(t) - \sum_{k=1}^n \rho_k(t) \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{\phi^{(j)}(t_k)}{j!} (t-t_k)^j}{h(t)} \in \mathcal{D}$$

所以

$$\begin{aligned}\langle f, \phi \rangle &= \left\langle hf, \frac{\phi(t) - \sum_{k=1}^n \rho_k(t) \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{\phi^{(j)}(t_k)}{j!} (t-t_k)^j}{h(t)} \right\rangle + \left\langle f, \sum_{k=1}^n \rho_k(t) \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{\phi^{(j)}(t_k)}{j!} (t-t_k)^j \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{\phi^{(j)}(t_k)}{j!} \langle f, \rho_k(t)(t-t_k)^j \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} C_{kj} \langle \delta_{t_k}^{(j)}, \phi \rangle\end{aligned}$$

即 $hf = 0$ 的通解为 $f = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} C_{kj} \delta_{t_k}^{(j)}$, 故方程 $hf = \delta$ 的通解为

$$f = \frac{1}{h(0)} \delta + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} C_{kj} \delta_{t_k}^{(j)}.$$

□

附录 A 成果速览

本章为部分需要快速了解和使用拉氏变换的专业课提供一个速成短课.

A.1 留数演算

A.1.1 简单函数

定义 A.1.1 (指数函数) 复数列 $z_n = x_n + iy_n$ 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. 复指指数函数

$$e^z := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

命题 A.1.2 设 $z = x + iy$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

证 见定理 1.4.2. □

例 A.1.3 $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$. 特别地 $e^z \neq 0$.

证 设 $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$. 则 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, 故

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

由 $e^{-z}e^z = e^{-z+z} = e^0 = 1$ 知 $e^z \neq 0$ 且 $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$. □

- 当 $z = x$ 是实数时, $e^z = e^x$ 就是实指指数函数.
- **Euler 公式** 当 $z = i\theta$ 是纯虚数时, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.
- 欧拉公式 $\Leftrightarrow \forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

定义 A.1.4 (三角函数) 称 $\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ 为 (复) 余弦函数和正弦函数.

- **复变量 Euler 公式** $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

定义 A.1.5 (有理函数) 设 $n \in \mathbb{N}$. 称 $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ 为 (复) 多项式函数, 称两个 (复) 多项式的商为 (复) 有理函数, 当分母比分子次数高时, 称为有理真分式.

- $(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$.
- 复导数与实导数有相同的复合求导、四则运算法则.

例 A.1.6 (1) $(e^{iz^2})' = 2ize^{iz^2}$ (2) $(\frac{\sin z}{z})' = \frac{z \cos z - \sin z}{z^2}$.

- 称指数、多项式经有限次四则/复合运算得到的函数为简单初等函数.

定义 A.1.7 (单级零点) 若简单初等函数 ψ 满足 $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, 则称 z_0 是 ψ 的 1 级零点.

例 A.1.8 (1) 0 是 $\sin z$, $e^z - 1$ 的 1 级零点.

(2) z_0 是多项式 $P(z)$ 的 1 级零点 $\Leftrightarrow z_0$ 是 $P(z)$ 的单根.

A.1.2 计算留数

- 设简单初等函数 φ 在 z_0 处有定义, z_0 是 ψ 的 1 级零点, 则留数

$$\text{Res}_{z_0} \left(\frac{\varphi}{\psi} \right) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

- 设简单初等函数 φ 在 z_0 处有定义, 则留数

$$\text{Res}_{z_0} \left[\frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} \right] = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

例 A.1.9 求函数 $f(z) = \frac{z^2+2}{z^3-2z^2+z}$ 和 $g(z) = \frac{z^2+2}{\sin z}$ 在 $z_0 = 0$ 处的留数.

解 $f(z) = \frac{z^2+2}{z(z-1)^2}$, 因为 $z_0 = 0$ 是分母的 1 级零点, 用第一个公式. 记 $\varphi(z) = \frac{z^2+2}{(z-1)^2}$, $\psi(z) = z$. 则

$$\text{Res}_0(f) = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \frac{z^2+2}{z'(z-1)^2} \Big|_{z=0} = 2.$$

同理, $\text{Res}_0(g) = \frac{z^2+2}{(\sin z)'} \Big|_{z=0} = 2$. □

例 A.1.10 求函数 $f(z) = \frac{z^2+2}{z^3-2z^2+z}$ 在 $z_0 = 1$ 处的留数.

解 前面已得到 $f(z) = \frac{z^2+2}{z(z-1)^2}$, 因为 $z_0 = 1$ 不是分母的 1 级零点, 此处应该用第二个公式. 记 $\varphi(z) = \frac{z^2+2}{z}$, 适用于 $m = 2$ 的公式:

$$\text{Res}_1(f) = \varphi'(1) = \left(z + \frac{2}{z} \right)' \Big|_{z=1} = -1. \quad \square$$

练习 A.1.11 $f(z) = \frac{e^z}{(3z+1)(z+3)}$ 在 $z_0 = -\frac{1}{3}$ 处的留数是_____.

练习 A.1.12 $f(z) = \frac{1-2z}{z^3(1+z)}$ 在 $z_0 = 0$ 处的留数是_____.

解 适用于 $m = 3$ 的公式:

$$\text{Res}_0(f) = \frac{1}{2!} \left(\frac{1-2z}{1+z} \right)^{(3)} \Big|_{z=0} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1+z} \right)^{(3)} \Big|_{z=0} = \frac{3}{(1+z)^3} \Big|_{z=0} = 3.$$

□

A.2 拉氏变换

A.2.1 拉氏变换

定义 A.2.1 函数 $y = y(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y(s) = \int_0^{+\infty} y(t)e^{-st} dt =: \mathcal{L}[y]$. 称 y 是 Y 的拉普拉斯逆变换, 记作 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y](t)$, $t \geq 0$.

例 A.2.2 设 a 是复常数. $\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} \xrightarrow{\text{当 } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)} \frac{1}{s-a}$. 此处条件 $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$ 是为了保证极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} = 0$, 当 $\operatorname{Re}(s) \leq \operatorname{Re}(a)$ 时此极限不存在 (除非 $s = a$).

命题 A.2.3 (拉氏变换的线性性) 设 λ, μ 是常数, 则 $\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{L}[f] + \mu \mathcal{L}[g]$, 逆变换亦然.

例 A.2.4 $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{1}{2i} (\mathcal{L}[e^{iat}] - \mathcal{L}[e^{-iat}]) = \frac{a}{s^2+a^2}$, $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$.

例 A.2.5 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2} \sin 2t$, $t \geq 0$.

定理 A.2.6 设有理真分式 Y 的分母零点为 $\{s_k\}_{k=1}^n$, 则 $y = \sum_{k=1}^n \text{Res}_{s_k}[Ye^{st}]$, $t \geq 0$.

例 A.2.7 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] \xrightarrow{\text{分母零点 } -2i, 2i} \text{Res}_{-2i}\left[\frac{e^{st}}{s^2+4}\right] + \text{Res}_{2i}\left[\frac{e^{st}}{s^2+4}\right] = \frac{\sin 2t}{2}$, $t \geq 0$.

例 A.2.8 求 $Y_1 = \frac{1}{(s-1)(s+3)}$ 和 $Y_2 = \frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换.

解 显然这两个函数都满足定理 A.2.6 的条件.

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_1] \xrightarrow{\text{分母零点 } 1, -3} \text{Res}_1\left[\frac{e^{st}}{(s-1)(s+3)}\right] + \text{Res}_{-3}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)(s+3)}\right] = \frac{e^t}{4} - \frac{e^{-3t}}{4}, \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_2] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 - (s-1)^2}{s^2(s-1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{分母零点 } 1, 0} \text{Res}_1\left[\frac{e^{st}}{(s-1)^2}\right] - \text{Res}_0\left[\frac{e^{st}}{s^2}\right] = (e^{st})' \Big|_{s=1} - (e^{st})' \Big|_{s=0} = t(e^t - 1), \quad t \geq 0.$$

□

练习 A.2.9 求 $Y_1 = \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+3)}$ 和 $Y_2 = \frac{1}{s(s-1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换.

解 这些函数都满足定理 A.2.6 的条件. 故

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_1] = \text{Res}_1[Y_1 e^{st}] + \text{Res}_{-1}[Y_1 e^{st}] + \text{Res}_{-3}[Y_1 e^{st}] = \frac{e^t}{8} - \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{-3t}}{8}, \quad t \geq 0.$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_2] = \text{Res}_0\left[\frac{e^{st}}{s(s-1)^2}\right] + \text{Res}_1\left[\frac{e^{st}}{s(s-1)^2}\right] = \frac{e^{st}}{(s-1)^2}\Big|_{s=0} + \left(\frac{e^{st}}{s}\right)' \Big|_{s=1} = 1 + e^t(t-1), \quad t \geq 0. \quad \square$$

例 A.2.10 设 a 是复常数, $n \in \mathbb{N}^*$. 求 $\frac{1}{(s-a)^n}$ 的拉普拉斯逆变换.

解 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^n}\right] = \text{Res}_a\left[\frac{e^{st}}{(s-a)^n}\right] = \frac{1}{(n-1)!}(e^{st})^{(n-1)} \Big|_{s=a} = \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}. \quad \square$

- 取 $a=0$ 就有 $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$, 特别地 $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$.

A.2.2 微分方程

定理 A.2.11 (微分性质) 设 $Y = \mathcal{L}[y]$, 则 (1) $\mathcal{L}[y'] = sY - y(0)$, $\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0)$ (2) $\mathcal{L}[ty] = -Y'(s)$.

例 A.2.12 $\mathcal{L}[t] = -(\mathcal{L}[1])' = -(\frac{1}{s})' = \frac{1}{s^2}$.

例 A.2.13 求解初值问题 $y'' + 2y' - 3y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

解 设 y 是方程的解, 记 $Y = \mathcal{L}[y]$, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''] &= s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 1, \\ \mathcal{L}[y'] &= sY - y(0) = sY, \quad \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

对原方程作拉氏变换得 $(s^2 + 2s - 3)Y - 1 = \frac{1}{s+1}$, 即

$$Y = \frac{1}{(s-1)(s+3)} + \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+3)}.$$

取拉氏逆变换得

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+3)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+1)(s+3)}\right]$$

例 A.2.8
练习 A.2.9

$$\frac{1}{8}(3e^t - 2e^{-t} - e^{-3t}), \quad t \geq 0. \quad \square$$

例 A.2.14 求解初值问题 $\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2, \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t, \\ x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

解 记 $X = \mathcal{L}[x]$, $Y = \mathcal{L}[y]$, 作拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} (s+1)Y - sX = \frac{2-s}{s(s-1)^2} \\ 2sY - (s+1)X = -\frac{1}{s^2(s-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{2s-1}{s^2(s-1)^2} \\ Y = \frac{1}{s(s-1)^2} \end{cases}$$

取拉普拉斯逆变换得

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}\right] \stackrel{\text{例A.2.8}}{=} t(e^t - 1), \quad t \geq 0. \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)^2}\right] \stackrel{\text{练习 A.2.9}}{=} 1 + e^t(t-1), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad \square$$

练习 A.2.15 求方程 $y'' - y = \sin 2t$, $y(0) = y'(0) = 0$ 的解.

解 设 y 是方程的解, 记 $Y = \mathcal{L}[y]$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y, \quad \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

在方程两边作拉普拉斯变换得

$$(s^2 - 1)Y = \frac{2}{s^2 + 4} \Rightarrow Y = \frac{2}{(s^2 - 1)(s^2 + 4)}.$$

取拉普拉斯逆变换得

$$y = \mathcal{L}^{-1}[Y] = \frac{2}{5} \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 4}\right] \right) = \frac{1}{5}(e^t - e^{-t} - \sin 2t), \quad t \geq 0. \quad \square$$

A.3 算定积分

A.3.1 三角积分

设 $f(x, y)$ 是一个实变量二元有理函数, 即实变量二元多项式的商, 比如:

$$f(x, y) = \frac{x^{10} - 7x^2y^3 + 5iy^7}{x^{15} + y^8 + i(x^3y^2 + 1)}$$

就是一个实变量复值二元有理函数.

定理 A.3.1 设二元有理函数 $f(x, y)$ 的分母在单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上没有零点, 则

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} \left[\frac{1}{iz} f\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \right],$$

其中 $\{z_k\}_{k=1}^n$ 是有理函数 $\frac{1}{iz} f\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right)$ 的分母位于 $|z| = 1$ 内的零点.

- 这个公式不必硬记, 我们通过下面的例子说明如何使用它.

例 A.3.2 计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-3\sin\theta}$.

解 令 $z = e^{i\theta}$. 由欧拉公式 $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}$, 及 $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, 可得 (复值) 微分形式的等式

$$\frac{d\theta}{5-3\sin\theta} = \frac{1}{5-\frac{3}{2i}(z-z^{-1})} \frac{dz}{iz} = \frac{2 dz}{-3z^2 + 10iz + 3} = \frac{2 dz}{(3iz+1)(iz+3)}.$$

分母 $(3iz+1)(iz+3)$ 位于 $|z|=1$ 内的零点为 $-\frac{1}{3i} = \frac{i}{3}$, 故

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\sin\theta} d\theta = 2\pi i \cdot \text{Res}_{\frac{i}{3}} \left[\frac{2}{(3iz+1)(iz+3)} \right] = 2\pi i \cdot \frac{2}{3i(iz+3)} \Big|_{z=\frac{i}{3}} = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

练习 A.3.3 计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$.

解 令 $z = e^{i\theta}$. 则 $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$, 故

$$\frac{1}{5-4\cos\theta} d\theta = \frac{1}{5-2(z+z^{-1})} \frac{dz}{iz} = \frac{dz}{i(-2z^2+5z-2)} = \frac{dz}{i(-2z+1)(z-2)}.$$

分母 $(-2z+1)(z-2)$ 位于 $|z|=1$ 内的零点为 $\frac{1}{2}$, 故

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta} = 2\pi i \cdot \text{Res}_{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{i(-2z+1)(z-2)} \right] = 2\pi i \cdot \frac{1}{-2i(z-2)} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}. \quad \square$$

A.3.2 有理积分

定理 A.3.4 设有理函数 f 的分母比分子至少高两次且分母没有实零点, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z_k} [f(z)],$$

其中 $\{z_k\}_{k=1}^n$ 是分母在上半平面的零点.

例 A.3.5 计算积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$.

解 1° 实方法. 做部分分式分解

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3} \frac{4(x^2+1)-(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+1} \right),$$

因此

$$I = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4 dx}{x^2+4} - \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{2}{3} \arctan 2x \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{3} \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{3}.$$

2° 复方法. 被积函数分母 $(x^2+1)(x^2+4)$ 的零点为 $\pm i, \pm 2i$, 其中在上半平面的是 i 和 $2i$, 且均为 1 级零点. 记 $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$, 则

$$\text{Res}_i(f) = \frac{z^2}{(z^2+1)'(z^2+4)} \Big|_{z=i} = \frac{z}{2} \frac{1}{z^2+4} \Big|_{z=i} = \frac{i}{6}, \quad \text{Res}_{2i}(f) = -\frac{i}{3},$$

因此 $I = 2\pi i \left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right) = \frac{\pi}{3}$. 两种方法计算结果是一致的. \square

练习 A.3.6 计算积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$.

解 被积函数分母 $(x^2+1)^5$ 的零点为 $\pm i$, 其中在上半平面的是 i . 记 $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^5}$, 则

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_i(f) &= \operatorname{Res}_i \left[\frac{1}{(z+i)^5(z-i)^5} \right] = \frac{1}{4!} \left[\frac{1}{(z+i)^5} \right]^{(4)} \Big|_{z=i} \\ &= \frac{(-1)^4 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4!(z+i)^9} \Big|_{z=i} = \frac{35}{28i}.\end{aligned}$$

故 $I = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_i(f) = \frac{35\pi}{128}$. \square

A.3.3 三角因子

定理 A.3.7 设 $a > 0$. 有理函数 f 的分母至少比分子高一次且分母无实零点, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k}[f(z)e^{iaz}].$$

其中 $\{z_k\}_{k=1}^n$ 是分母在上半平面的零点.

例 A.3.8 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+4x+5} dx$.

解 分母 $(x+2)^2 + 1$ 在上半平面的零点为 $-2+i$, 记 $f(z) = \frac{e^{2iz}}{(z+2)^2+1}$.

$$\operatorname{Res}_{-2+i}(f) = \frac{e^{2iz}}{2(z+2)} \Big|_{z=-2+i} = \frac{e^{-4i-2}}{2i}.$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+4x+5} dx = \pi e^{-4i-2}$. \square

练习 A.3.9 计算积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-ix)e^{2ix}}{(x^2+4)(x^2+9)} dx$.

解 $f(z) = \frac{(z^2-iz)e^{2iz}}{(z^2+4)(z^2+9)}$ 的分母在上半平面的零点是 $2i$ 和 $3i$. 因为

$$\operatorname{Res}_{2i}(f) = \frac{(z^2-iz)e^{2iz}}{2z(z^2+9)} \Big|_{z=2i} = \frac{ie^{-4}}{10}, \quad \operatorname{Res}_{3i}(f) = \frac{(z^2-iz)e^{2iz}}{2z(z^2+4)} \Big|_{z=3i} = -\frac{ie^{-6}}{5},$$

由定理 A.3.7 得

$$I = 2\pi i \cdot \left[\operatorname{Res}_{2i}(f) + \operatorname{Res}_{3i}(f) \right] = \frac{\pi}{5}(2e^{-6} - e^{-4}). \quad \square$$

- 由欧拉公式 $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$ 知

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) \cos ax + if(x) \sin ax] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx\end{aligned}$$

- 故当 $f(x)$ 是实值函数且 a 是实数时 (Re 表实部, Im 表虚部)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx = \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i a x} dx \right],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx = \operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i a x} dx \right].$$

例 A.3.10 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 4x + 5} dx$.

解 由例 A.3.8

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + 4x + 5} dx = \pi e^{-4i-2} = \pi e^{-2} e^{-4i} = \pi e^{-2} (\cos 4 - i \sin 4),$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 4x + 5} dx = \operatorname{Re} [\pi e^{-2} (\cos 4 - i \sin 4)] = \pi e^{-2} \cos 4$. \square

例 A.3.11 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + \varepsilon^2} dx$ ($\varepsilon > 0$).

解 $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + \varepsilon^2}$ 的分母 $z^2 + \varepsilon^2$ 在上半平面只有 1 级零点 εi .

$$\operatorname{Res}(f) = \frac{ze^{iz}}{(z^2 + \varepsilon^2)'} \Big|_{z=\varepsilon i} = \frac{e^{-\varepsilon}}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + \varepsilon^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\varepsilon}}{2} = \pi i e^{-\varepsilon}.$$

因为 $\frac{x \sin x}{x^2 + \varepsilon^2}$ 是偶函数, 所以

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right] = \frac{\pi}{2} e^{-\varepsilon}. \quad \square$$

例 A.3.12 (狄利克雷积分) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} e^{-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$.

上例中极限与积分可交换的证明 任取 $\varepsilon > 0$. 因为

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x \sin x}{x^2 + \varepsilon^2} \right) dx \right| &\leqslant \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} - \frac{x \sin x}{x^2 + \varepsilon^2} \right| dx = \int_0^{+\infty} |\sin x| \left| \frac{\varepsilon^2}{x(x^2 + \varepsilon^2)} \right| dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \frac{\varepsilon^2}{x^2 + \varepsilon^2} dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^2 dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{\pi}{2} \varepsilon, \end{aligned}$$

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + \varepsilon^2} dx$. \square

- $\frac{\sin x}{x}$ 的原函数不是初等函数, 所以狄利克雷积分的计算需要各种特殊方法.

练习 A.3.13 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix}}{x^2 + 4x + 5} dx$.

练习 A.3.14 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^2}$.

参考文献

- [1] 复变函数. 史济怀, 刘太顺.
- [2] 高等数学导论 (第三版). 中国科学技术大学高等数学教研室.
- [3] 广义函数引论. 巴罗斯 - 尼托.
- [4] 实变函数论 (第二版). 周民强.
- [5] 实分析中的反例. 汪林.
- [6] 数学分析 (第三版). 陈纪修, 於崇华, 金路.
- [7] 数学分析教程 (第三版). 常庚哲, 史济怀.
- [8] Algebraic Topology, a First Course. William Fulton.
- [9] A Modern Theory of Integration. Robert G. Bartle.
- [10] Classical Topics in Complex Function Theory. Reinhold Remmert.
- [11] Complex Analysis (Third Edition). Lars V. Ahlfors.
- [12] Complex Analysis (Lecture notes). Torsten Wedhorn.
- [13] Complex Analysis in One Variable (Second Edition). Raghavan Narasimhan, Yves Nievergelt.
- [14] Complex Analytic Varieties. Hassler Whitney.
- [15] Complex Function Theory. Maurice Heins.
- [16] Distribution Theory, Convolution, Fourier Transform, and Laplace Transform. Gerrit van Dijk.
- [17] Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Frank W. Warner.

- [18] Fourier and Laplace Transforms. R.J. Beerends, H.G. ter Morsche, J.C. van den Berg, E.M. van de Vrie.
- [19] Generalized Functions I Properties and Operations. I.M. Gel'Fand, G.E. Shilov.
- [20] Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Elias M. Stein, Guido Weiss.
- [21] Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation. Gustav Doetsch, Walter Nader.
- [22] On the Division of Distributions by Polynomials. Lars Hörmander.
- [23] The Analysis of Linear Partial Differential Operators I Distribution Theory and Fourier Analysis. Lars Hörmander.
- [24] Théorie des distributions, I-II. L. Schwartz.
- [25] Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Francois Treves.

索引

- δ -函数, 111 反正切函数, 32
筛选性质, 112 反正弦函数, 33

傅里叶
 位移性质, 116 指数函数, 27, 154
 余弦变换, 110 正弦函数, 29, 154
 余弦积分公式, 106 简单初等函数, 155
 傅氏积分的三角形式, 105 解析函数, 40
 傅里叶变换, 107 连续函数, 13
 傅里叶积分, 104 卷积, 117
 傅里叶级数, 104 分段函数的卷积, 117
 傅里叶逆变换, 107 卷积定理, 119
 微分性质, 115 拉氏变换的卷积定理, 128
 正弦变换, 110 拉普拉斯卷积, 128
 正弦积分公式, 105 奇点, 40

函数 ∞ 点, 64
 余弦函数, 29, 154 m 级极点, 58
 可去奇点, 60

- 孤立奇点, 60
本性奇点, 62
对数
主值, 30
多值对数, 29
导数, 38
仅实 (虚) 部求导, 44
导数公式, 44
广义函数的导数, 111
柯西 - 黎曼方程, 44
弱导数, 111
局部 (绝对) 可积, 111
开集, 14
拉普拉斯变换, 126
位移性质, 130
初值定理与终值定理, 132
周期公式, 131
基本性质表, 134
延迟性质, 131
微分性质 I, 129
微分性质 II, 129
积分性质, 131
逆变换的留数公式, 135
极限, 8
无穷大, 11
无穷小, 11
柯西
导数的柯西积分公式, 88
柯西 - 黎曼方程, 44
柯西乘积, 24
柯西积分公式, 87
柯西积分定理, 85
留数, 67
计算公式, 67
 ∞ 点的留数, 67
两个常用公式, 155
外部形式的留数定理, 90
留数定理, 89
线性性, 70
积分, 79
原函数法, 81
参数计算法, 80
留数法, 89
级数

- 几何级数, 22
幂级数, 21
收敛半径, 23
无穷级数, 15
条件收敛, 16
洛朗级数, 25
绝对收敛, 16
辐角, 3
指数表达式, 4
辐角主值, 4
开方公式, 6
闭集, 14
零点, 56

© 2025 王明治. 本作品采用 **CC BY-NC 4.0** 授权许可. 您可以共享、复制及传播本作品, 但不得用于商业用途, 并且须署名作者. 禁止演绎修改作品.