



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
UNIDAD PROFESIONAL TICOMÁN

**DESARROLLO DE PAQUETERÍA DE SOFTWARE OPEN SOURCE EN
 LENGUAJE PYTHON PARA LA GENERACIÓN DE MALLAS**

TESIS
Que para obtener el grado de
INGENIERO EN AERONÁUTICA

PRESENTA
MARCO ANTONIO CARDOSO MORENO

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. RAFAEL MEDINA NOGUERÓN

Agradecimientos

Resumen

Indice

Indice de Figuras	IX
Indice de Tablas	XI
Nomenclatura	XIII
Introducción	XV
Objetivo	XVII
Motivación	XIX
1. Estado del Arte	1
1.1. Historia de la dinámica de fluidos computacional	1
1.2. La dinámica de fluidos actualmente	2
1.3. La generación de mallas actualmente	2
1.4. Software disponible para DFC	3
2. Discretización Espacial	5
2.1. Método de Diferencias Finitas	5
2.1.1. Desarrollo del método	6
3. Mallas	11
3.1. Tipos de Mallas Estructuradas	12
3.1.1. Mallas tipo C	13
3.1.2. Mallas tipo O	13
3.1.3. Mallas tipo H	15
3.2. Mallas Adaptativas	16
3.3. Consideraciones preliminares para la generación de mallas	16
3.4. Técnicas de generación del mallado	16
3.5. Generación de mallas mediante métodos algebráicos	17
3.5.1. Interpolación unidireccional	17
3.5.2. Interpolación multidireccional	20
3.6. Generación de mallas mediante EDP	22
3.7. Calidad de las Mallas	35
3.7.1. Skewness	38

4. Análisis de Flujo Potencial	39
4.1. Condiciones de Frontera	41
4.1.1. Condiciones en las lejanías	41
4.1.2. Condiciones para perfiles aerodinámicos	42
4.2. Discretización para flujo subsonico estacionario	44
4.2.1. Condiciones de frontera	48
5. Desarrollo Práctico	49
5.1. Estructura de las clases	49
5.1.1. Clase Airfoil	49
5.1.2. Clase Mesh	52
5.2. Diagramas de flujo	55
5.2.1. Estructura global del programa	55
5.2.2. Funciones principales	56
6. Resultados	63
6.1. Alcance y Límites de Aplicación	63
6.1.1. Malla O. Frontera interna única	63
6.1.2. Malla O. Frontera interna múltiple	63
6.1.3. Malla C. Frontera interna única.	66
6.1.4. Malla C. Frontera interna múltiple	66
6.2. Calidad de la malla	71
A. Códigos	81
B. Métodos Numéricos Iterativos	83
B.1. Métodos iterativos: Jacobi, Gauss-Seidel, SOR	83
B.1.1. Método de Jacobi	83
B.1.2. Método de Gauss-Seidel	84
B.1.3. Método de Sobre-relajación SOR	84
C. Solución de Sistemas de Bloque Tridiagonal	87
Referencias	89

Indice de Figuras

2.1. Discretización por Diferencias Finitas	6
2.2. Aproximaciones por Diferencias Finitas	7
3.1. Dominios lógico y físico	12
3.2. Mallas estructuradas y no estructuradas	12
3.3. Tipología de mallas	13
3.4. Malla tipo C	14
3.5. Malla tipo O	14
3.6. Malla tipo O	15
3.7. Malla Interpolación Polinomial	19
3.8. Malla Interpolación Polinomial Acercamiento	19
3.9. Transformación de malla por P_η	21
3.10. Transformación de malla por $P_\xi P_\eta$	21
3.11. Efecto de atracción por función $P(\xi, \eta)$	25
3.12. Efecto de atracción por función $Q(\xi, \eta)$	25
3.13. Generación de malla quasi uniforme por ecuaciones parabólicas	31
3.14. Generación de malla por ecuaciones elípticas	32
3.15. Control de ortogonalidad	35
3.16. Cálculo de aspect ratio en ANSYS	37
3.17. Estructura celda cuadrilatera en Verdict	37
4.1. Condiciones de frontera de flujo potencial	42
4.2. Desarrollo de flujo estacionario sobre un perfil aerodinámico	43
4.3. Fluido en reposo relativo a un perfil alar	43
4.4. Flujo alrededor de perfil momentos después	44
4.5. Malla original y mallas escalonadas	45
5.1. Diagrama de clase airfoil y subclase NACA4	51
5.2. Diagrama de clase mesh y subclases mesh_c y mesh_o	54
5.3. Estructura global del programa	55
5.4. Diagrama de flujo para generación de mallas (preproceso)	57
5.5. Diagrama de flujo para análisis de flujo potencial(solver)	58
5.6. Diagrama de flujo para análisis de postproceso	59
5.7. Diagrama de flujo para generación de mallas mediante la ecuación de Laplace	60
5.8. Diagrama de flujo para generación de mallas mediante la ecuación de Poisson	61
5.9. Diagrama de flujo para generación de mallas mediante la ecuación de Poisson	62
6.1. Malla tipo O con perfil NACA4415	64
6.2. Malla tipo O con perfil NACA4415 a 90°	65

6.3. Malla tipo O con perfil NACA4415 a 90°	65
6.4. Malla tipo O con perfily flap NACA 4415	67
6.5. Malla tipo O con perfily flap NACA4415	68
6.6. Malla tipo O con perfil y flap NACA4415 a -20°	69
6.7. Malla tipo C con perfil NACA 4415	69
6.8. Malla tipo C con perfil NACA4415 a -80°	70
6.9. Malla tipo C con perfil NACA4415 a -130°	70
6.10. Malla tipo C con perfily flap NACA 4415	71
6.11. Aspect ratio para malla tipo O con perfil NACA4415	72
6.11. Aspect ratio para malla tipo O con perfil NACA4415	73
6.12. Skew para malla tipo O con perfil NACA4415	74
6.12. Skew para malla tipo O con perfil NACA4415	75
6.13. Aspect ratio para malla tipo O con perfil y flap NACA4415	76
6.13. Aspect ratio para malla tipo O con perfil y flap NACA4415	77
6.14. Skew para malla tipo O con perfil NACA4415	78
6.14. Skew para malla tipo O con perfil NACA4415	79

Indice de Tablas

5.1. Métodos de la clase airfoil	50
5.2. Métodos de la subclase NACA4	51
5.3. Métodos de la clase mesh	52
5.4. Métodos de las clases mesh_c y mesh_o	53
6.1. Caracetísticas de malla O con perfil NACA 4415	64
6.2. Caracetísticas de malla O con perfil y flap NACA 4415	66
6.3. Caracetísticas de malla C con perfil NACA 4415	67
6.4. Caracetísticas de malla C con perfil y flap NACA 4415	68

Nomenclatura

Introducción

En general, para analizar y diseñar sistemas en los cuales interviene el flujo de fluidos se cuenta con dos herramientas: la experimentación y el cálculo. La experimentación implica la construcción de modelos que serán probados en túneles de viento u otras instalaciones. En el caso del cálculo, se puede realizar de manera analítica o mediante el uso de métodos numéricos, a esta última técnica se le da el nombre de dinámica de fluidos computacional (CFD, por sus siglas en inglés). El uso de la DFC (dinámica de fluidos computacional) se ha popularizado gracias al desarrollo de las capacidades de las computadoras, ya que las simulaciones presentan ciertas ventajas frente al enfoque experimental en términos de velocidad, seguridad y en la mayoría de casos, de costo. Gracias a esto la DFC es ampliamente usada en la actualidad en sectores de la industria como el aeroespacial, petrolero, entre otros. En el ámbito de la investigación también se tiene en la DFC una herramienta importante, pues permite analizar fenómenos complejos que pueden resultar difíciles de reproducir en experimentos.

Se realiza el presente trabajo con la finalidad tanto de generar en los estudiantes un interés por la dinámica de fluidos computacional (CFD), como de fomentar el desarrollo de este campo mediante la implementación de códigos. Por otro lado, se busca fomentar en el lector el uso y desarrollo de software libre.

En el capítulo 1

*****añadir descripción breve de los capítulos*****

Objetivo

Diseñar una paquetería de software que permita la generación de mallas a través de diferentes métodos y algoritmos, que se ajusten a la geometría de un perfil aerodinámico con flaps y que resulten viables para el desarrollo de análisis de dinámica de fluidos computacional sobre dichas mallas. El desarrollo completo se realizará en lenguaje Python 3 y se publicará de acuerdo a la ideología del software libre, lo que permitirá que la comunidad sea participe en el desarrollo de nuevos módulos y métodos para los cuáles el presente trabajo pueda servir de cimiento.

El programa debe ser capaz de generar mallas mediante diferentes métodos, en este trabajo se presta principal atención a las mallas generadas por métodos algebráicos, así como por métodos basados en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, más específico, en EDP elípticas. Se debe generar la malla para cualquier superficie o forma deseada, en este trabajo se hace la generación de mallas alrededor de perfiles aerodinámicos, por lo que se debe desarrollar un módulo que genere la nube de puntos que describe un perfil NACA de la serie 4, pudiendo ser ajustable la densidad de puntos de la misma. También se da la opción de importar la nube de puntos de cualquier otro perfil, con la restricción de que la densidad de la misma, depende de los datos de entrada que recibe el código.

Una vez generado el mallado del dominio, se creará un archivo que contenga toda la información de la misma, el cual podrá ser importado a cualquier software “*solver*”, para poder llevar a cabo el análisis de flujo deseado.

Los objetivos particulares son:

- Realizar un módulo que genere la nube de puntos de perfiles NACA de la serie de 4 dígitos. Así mismo, proporcionar la funcionalidad adecuada para que el usuario pueda importar la nube de puntos que describa cualquier otro perfil deseado.
- Realizar un módulo que modifique la nube de puntos característica del perfil, agregándole la información correspondiente al flap utilizado. Se consideran diferentes tipos de flaps.
- Desarrollar módulos para generar las mallas alrededor de la nube de puntos proporcionada. Se contemplan variadas tipologías, como lo son las mallas tipo “O” y las mallas tipo “C”, analizando sus ventajas y desventajas, así como una comparación entre las tipologías. Las mallas serán generadas mediante varios enfoques, como pueden ser la generación por ecuaciones algebráicas y por ecuaciones diferenciales parciales (elípticas, parabólicas e hiperbólicas).
- Llevar a cabo diferentes análisis, ya sea en el software de código libre SU2 o mediante el desarrollo de un módulo propio que realice el análisis correspondiente mediante flujo potencial. Esto con el propósito de probar las mallas y darles una aplicación de interés real.

Motivación

Existe en la actualidad, una vasta cantidad de software enfocado a la dinámica de fluidos computacional, tanto software privativo (o de licencia) como software libre. Para el caso del software privativo, el usuario paga por la licencia de uso del programa con lo cual puede usarlo, pero no tiene forma de saber la forma en la que el programa funciona ni la implementación del mismo. En cuanto al software libre, el usuario tiene la posibilidad de acceder al código fuente con el cual corre el programa, para analizarlo, comprenderlo e incluso de ser necesario, modificarlo ya sea para mejorar una característica ya implementada, o bien, para agregar una nueva característica al programa. Tanto el uso de software privativo, como la poca implementación de códigos y documentación accesible en México, han conducido a un punto en el que la comunidad académica en el país se limite únicamente a usar los programas sin un entendimiento claro de su funcionamiento, excluyéndose a sí misma del desarrollo de software.

Se desarrolla entonces, este trabajo con la intención de proporcionar información sobre la implementación de códigos de generación de mallas, para que el lector pueda a su vez, continuar contribuyendo al desarrollo de software libre para la dinámica de fluidos computacionala nivel nacional.

Los códigos aquí presentados quedan abiertos para que cualquier persona, ya sea alumno, profesor, investigador o simplemente entusiasta de la dinámica de fluidos computacional, pueda revisarlos, utilizarlos en beneficio propio, modificarlos, e incluso construir software nuevo a partir de éste.

Capítulo 1

Estado del Arte

1.1. Historia de la dinámica de fluidos computacional

La DFC tiene sus orígenes en el desarrollo de dos métodos numéricos que son las herramientas base de esta disciplina, el método de diferencias finitas y el método de elementos finitos. En 1910, Richardson presentó en la “Royal Society of London” un artículo con una solución mediante el método de diferencias finitas para un análisis de la distribución de esfuerzos de una presa de mampostería. Por otro lado, el primer trabajo mediante el método de elementos finitos, fue publicado en 1956 en el Aeronautical Science Journal por Turner, Clough, Martin y Topp, el cual trata aplicaciones del método para el análisis de esfuerzos en aeronaves. [1]

Durante la segunda guerra mundial, así como los años siguientes a la misma, el profesor John Von Neumann desarrolló un método para determinar la estabilidad numérica para la resolución de problemas dependientes del tiempo. Su trabajo fue publicado por O’Brien en 1950. El método de Von Neumann es ampliamente aplicado hoy en día para determinar la estabilidad numérica. [2]

En la década de los años 60s se dan los primeros esfuerzos en el desarrollo de técnicas para la generación de mallas. [3]

Al inicio de la década de 1970 se da un auge en la DFC gracias al incremento de las capacidades de procesamiento de las computadoras, incluso hoy en día el avance de la DFC va de la mano con el desarrollo de las computadoras. [4] Es en ésta década cuando se desarrollan, gracias a un grupo del “Imperial College” de Londres, algoritmos para flujos incompresibles de baja velocidad, así como el algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), lo cual sirvió como base para el desarrollo de esquemas de solución para las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible. [2]

Para la década de 1980 se comienza a dar solución a las ecuaciones de Euler tanto en dos dimensiones como en tres dimensiones. Para mediados de esta década, gracias de nuevo, al incremento en la capacidad de cálculo de los ordenadores, se comienza a hacer análisis de flujos viscosos, los cuales son descritos por las ecuaciones de Navier-Stokes. [4]

A finales de la década de 1980, comenzó una nueva etapa el desarrollo de técnicas para la generación de mallas. Dicha etapa se caracteriza por la implementación de códigos de generación

de mallas comprehensivas, multi propósito, tridimensionales. [3]

1.2. La dinámica de fluidos actualmente

La DFC tiene hoy en día, un rol tan importante, que puede considerarse una tercera rama de la dinámica de fluidos, siendo las dos primeras las ramas experimental y la teoría pura. [5]

Actualmetne, la DFC se aplica en diversos sectores, como el aeroespacial, diseño de turbomaquineria, carros y navíos. Además de campos como la meteorología, oceanografía, astrofísica e incluso arquitectura. Algunas técnicas desarrolladas para la DFC ahora se usan también en la solución de las ecuaciones de Maxwell, por lo que demuestra la creciente importancia que tiene la DFC como herramienta en ingeniería. [4]

Uno de los ámbitos en los que la DFC ha tenido mayor impacto es en el diseño de aeronaves, gracias al rápido decremento en los costos de computación, ocasionado por una mejora en las capacidades de cálculo y tecnológicas de los ordenadores, así como de el fácil acceso a los mismos, aunado a un incremento en el costo de experimentos en túneles de viento. Esto ha dado como resultado que el cálculo de las características aerodinámicas de una aeronave resulte más barato mediante DFC que mediante la experimentación en túnel de viento. De modo que en la industria el diseño preliminar de aeronaves se realiza mediante cálculos en computadoras, mientras que los detalles del diseño final se analizan experimentalmente. [5]

En la actualidad, la DFC es capaz de analizar flujos laminares sin mayor complicación, sin embargo, aún no es capaz de analizar flujos turbulentos, los cuales se presentan en la mayoría de casos prácticos, por lo que se debe de recurrir a modelos de turbulencia, los cuales dan buenos resultados, pese a que ningún modelo es universal, y se debe prestar atención al modelo que se desea emplear. [6]

1.3. La generación de mallas actualmente

En la actualidad se ha desarrollado un gran número de métodos avanzados para la generación de mallas, entre los que destacan los métodos algebráicos, mediante la solución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas, hiperbólicas, parabólicas, mallas variables, etc. La creación y mejora de todas estas técnicas nos ha llevado a un punto en el que se pueden realizar análisis en dominios de geometrías complejas.

Debido al desarrollo exitoso de esta área, el campo de generación numérica de mallas puede ser considerado una nueva disciplina matemática, con su propia metodología, tecnología y su propio enfoque.

La generación numérica de mallas, al ser una herramienta de amplia utilización tanto en la industria de la ingeniería, como en campos de computación científica, es ahora reconocida como una asignatura en algunas universidades. [3]

1.4. Software disponible para DFC

OpenFOAM

OpenFOAM (Open Source Field Operation and Manipulation) es un entorno de trabajo, para el desarrollo de ejecutables de aplicaciones que usa las funciones contenidas en aproximadamente 100 librerías escritas en C++. Contiene solvers específicos para cada tipo de problema en mecánica de fluidos, así como de mecánica del medio continuo. [7]

OpenFOAM se distribuye bajo la licencia GPL (General Public License), la cual garantiza a los usuarios finales la libertad de usar, estudiar, compartir y modificar el código fuente del software, lo cual es basicamente, la filosofía del software libre.

XFLR5

XFLR5 es una herramienta desarrollada para el análisis de perfiles alares, alas y aviones volando a bajos Números de Reynolds. Fue creado con dos propósitos principales, dar una interfaz amigable al programa “Xfoil”, y pasar el código fuente original de FORTRAN a lenguaje C / C++, es decir que los algoritmos con los que se desarrolló Xfoil son exactamente los mismos en XFLR5. [8] Este programa no ha sido desarrollado con fines profesionales, sino para uso meramente personal y se distribuye bajo la licencias GPL.

Xfoil

Es un programa interactivo para el diseño y análisis de perfiles operando en regímenes subsónicos. Dadas las coordenadas de la nube de puntos que describen la forma de un perfil, un número de Reynolds y el número de Mach, Xfoil puede calcular la distribución de presión a lo largo del perfil, y con esto, las fuerzas de levantamiento y arrastre. Consiste en una colección de funciones como:

- Análisis Viscoso de perfiles alares existentes.
- Diseño y rediseño de perfiles mediante la modificación de la distribución de velocidad superficial
- Rediseño de perfiles mediante la modificación de sus parámetros geométricos.

[9]

Xfoil es desarrollado por el MIT (Massachusetts Institute of Technology), escrito en lenguaje FORTRAN y distribuido bajo la licencia GPL.

XFlow

Es un software privativo desarrollado por la empresa Dassault Systèmes, el cual ofrece soluciones mediante el método de Lattice-Boltzman basado en partículas. El usuario puede analizar casos de aerodinámica transitoria, flujos multifase complejos, acústica aérea, geometrías en movimiento e interacciones fluido-estructura. Destaca por sus capacidades de renderizado. [10]

ANSYS Fluent

Ansys Fluent es un software privativo creado por la empresa ANSYS, Inc. dedicado a la simulación de DFC, implementado para dar soluciones mediante el método de volúmenes finitos.

SU2

SU2 es una colección de software “*open source*” desarrollado en los lenguajes Python y C++ para el análisis de ecuaciones diferenciales parciales mediante métodos numéricos, del actual estado del arte de la DFC. Enfocado principalmente a su aplicación en la industria aeronáutica, así como la industria automotriz, naval y de energías renovables, entre otras. [11]

Capítulo 2

Discretización Espacial

Las soluciones analíticas modeladas mediante ecuaciones diferenciales parciales de las ecuaciones que describen el flujo de fluidos dan resultados “continuos” a lo largo del dominio que se está estudiando, por otro lado, las soluciones numéricas dan resultados en puntos “discretos” del dominio llamados nodos, éstos, unidos mediante líneas, generan la malla del dominio en el que se está trabajando el problema. Para el caso de un análisis en dos dimensiones, la malla se forma por triángulos o cuadriláteros, mientras que en un caso de tridimensional la malla es conformada por tetrahédros o hexaédros.

En las aplicaciones de DFC se busca que la distribución de los nodos sea uniforme, dado que esto simplifica los algoritmos de solución a implementar, y que se traduce en un ahorro de tiempo en la ejecución de los programas, además de un uso considerablemente menor de memoria.

Existen básicamente dos tipos de mallas:

- Estructuradas: los nodos de la malla están alineados entre sí y son identificados mediante índices i, j, k . Una malla estructurada bidimensional está formada por cuadriláteros, mientras que una malla tridimensional se forma por hexahédros. Figura 3.2(a).
- No estructuradas: los nodos no tienen un orden particular, por lo que no se pueden identificar mediante índices, por lo que se debe llevar a cabo una forma diferente de identificación. Figura 3.2(b)

2.1. Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas fue de los primeros métodos numéricos que se emplearon para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, y ha sido hasta la fecha, uno de los más utilizados en aplicaciones de DFC. Este método está basado en las series de expansión de Taylor.

“El uso del método de diferencias finitas en la DFC tiene como propósito el reemplazar las derivadas parciales que aparecen en las ecuaciones que gobiernan el flujo, por coeficientes diferenciales que dan como resultado un sistema de ecuaciones algebraicas, el cual se resuelve para obtener las propiedades del campo de flujo en puntos discretos, es decir, en los nodos de la malla.” [5]

2.1.1. Desarrollo del método

Supongamos que se tiene el valor de una propiedad de flujo de $f_{i,j}$ en un punto (i, j) y se pretende calcular el valor de dicha propiedad en un punto $(i+1, j)$ (Figura 2.1) es decir, se quiere conocer el valor de $f_{i+1,j}$, dicho valor se puede expresar mediante una serie de expansión de Taylor, quedando:

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots + \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (2.1)$$

Matemáticamente, esta serie es una solución exacta bajo una de dos condiciones:

- La serie está formada por un número infinito de términos, haciendo que la serie converja
- El valor del intervalo entre puntos tiende a cero ($\Delta x \rightarrow 0$)

Para un análisis computacional resulta impráctico el trabajar con un número infinito de términos, por lo que se trunca la ecuación y se busca refinar la malla, haciendo el intervalo Δx lo más pequeño posible, incrementando de esta manera la exactitud de la solución.

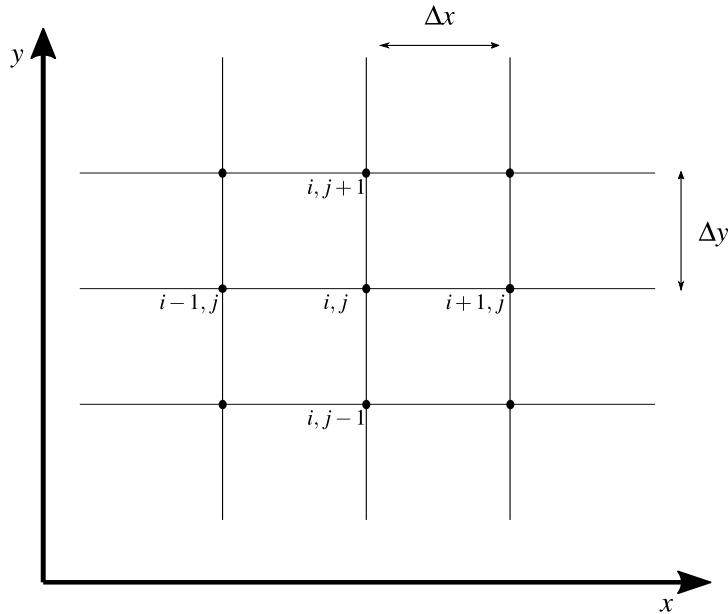


Figura 2.1: Discretización espacial (malla) por el método de diferencias finitas [5]

Todos los términos de la serie truncados se agrupan en un sólo término conocido como error de truncamiento y es representado por la simbología $O()$. Volviendo a la ecuación (2.1) y resolviendo para $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j}$ tenemos:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{6} - \dots \quad (2.2)$$

o bien:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

que para simplificar, queda:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \quad (2.3)$$

El símbolo $O(\Delta x)$ representa el error de truncamiento de la serie de expansión, y para este caso particular se dice que tiene una precisión de primer orden, ya que se están despreciando los términos de orden superior.

La ecuación 2.3 se le conoce como una aproximación tipo “forward” de primer orden y representa el valor aproximado del valor de la derivada parcial $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j}$ calculada mediante la relación lineal del punto (i, j) con el punto $(i + 1, j)$. (Figura 2.2(a))

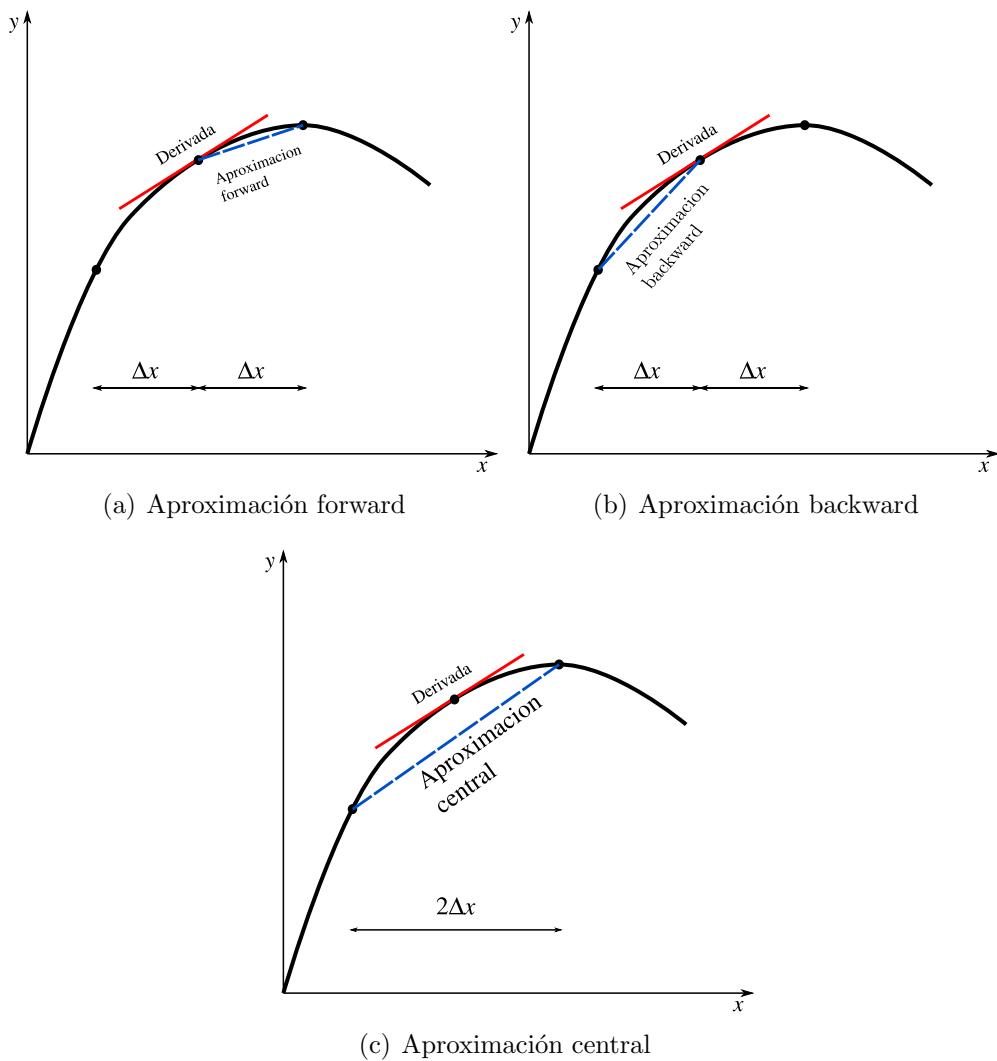


Figura 2.2: Esquemas de las aproximaciones por el método de diferencias finitas. [12]

Para obtener una aproximación tipo “backward” se debe generar una serie de Taylor para el punto $(i - 1, j)$ expandiendo a partir del punto (i, j)

$$f_{i-1,j} = f_{i,j} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^3}{3!} + \cdots + \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^n}{n!} \quad (2.4)$$

Una vez generada la serie, se sigue el mismo procedimiento empleado en la derivación de la aproximación “forward” para obtener:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (2.5)$$

que es la ecuación de una aproximación “backward”. (Figura 2.2(b))

Para diferentes aplicaciones de DFC, no basta con tener aproximaciones con precisión de primer orden, por lo cual se opta por generar una ecuación que tenga una precisión de segundo orden, a esta se le conoce como “aproximación central de segundo orden”. La deducción de ésta, parte de la resta de la ecuación 2.1 y la ecuación 2.4, que da como resultado:

$$f_{i+1,j} - f_{i-1,j} = 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + 2 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots + 2 \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (2.6)$$

que se puede simplificar a:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.7)$$

se observa en la ecuación 2.7 que para obtener un coeficiente en el punto (i, j) se está utilizando información proveniente de los nodos $(i - 1, j)$ e $(i + 1, j)$, adyacentes a dicho punto. (Figura 2.2(c))

Para el análisis de flujos viscosos, además de los coeficientes que sustituyen a las derivadas parciales de primer orden se necesitan desarrollar aproximaciones para las derivadas parciales de segundo orden, dado que, en las ecuaciones que describen el flujo de fluidos viscosos, las ecuaciones de Navier-Stokes, los términos de mayor orden son derivadas parciales de segundo orden.

Si se suman las ecuaciones 2.1 y 2.4, se obtiene un coeficiente para $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, como se muestra a continuación:

$$f_{i+1,j} + f_{i-1,j} = 2f_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^4}{4!} + \cdots + \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

despejando la segunda derivada parcial y despreciando el error de truncamiento:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (2.8)$$

a la ecuación 2.8 se le conoce como aproximación central para la derivada de segundo orden.

Ahora se desea obtener una aproximación por diferencias finitas para una derivada parcial mixta, llámese $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, donde f es una función dependiente de la posición de la partícula de fluido a lo largo de dos ejes, x y y . Dado que:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (2.9)$$

podemos desarrollar una aproximación “central” de la derivada parcial de y en función de x , es decir:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.10)$$

y desarrollando una diferencia central para la derivada parcial de f con respecto a y tenemos:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta y} - \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right] \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1}) \quad (2.12)$$

La misma metodología se aplica para obtener las aproximaciones por el método de diferencias finitas de una función respecto a un eje cualquiera, llámese eje y , ξ o η .

La mayor ventaja que presenta el método de diferencias finitas es su simplicidad de implementación, aunque presenta una limitante, el método únicamente es aplicable a mallas estructuradas, además de tampoco poderse aplicar a cuerpos de geometría curvilíneas, por lo que es necesario hacer una transformación de la malla, de un dominio físico a un dominio lógico, como se analiza en el capítulo 3.

Es este último punto, la piedra angular en la importancia del desarrollo de métodos de generación de mallas, ya que se busca trabajar con mallas en las cuales, en sus sistema de coordenadas computacional, pueda ser aplicado el método de diferencias finitas para la solución de problemas.

Capítulo 3

Mallas

Las mallas proveen soporte matemático para llevar a cabo una solución numérica de las ecuaciones que gobiernan el campo de análisis como medio continuo. La solución numérica se obtiene superponiendo la malla sobre el medio continuo, discretizando las ecuaciones respecto a la malla y por último, aplicando un algoritmo numérico de solución a la discretización de las ecuaciones. Este proceso resulta ser una evaluación de la solución en los nodos de la malla.

La mecánica de fluidos trabaja con ecuaciones no lineales, las cuales describen los flujos de fluidos, dichas ecuaciones en la mayoría de los casos prácticos de análisis no pueden ser resueltas de una manera analítica, por lo que se ha optado por la solución de dichas ecuaciones mediante métodos de aproximaciones entre los cuales encontramos los métodos de expansión y perturbación, método de diferencias finitas, método de volúmenes finitos e incluso el método de elementos finitos. En general los de mayor aplicación práctica son los tres últimos, pero para poder usarlos es necesario discretizar el campo de análisis mediante el uso de una malla. [13]

La utilización del método de diferencias finitas es directa si el problema se puede expresar en un sistema de coordenadas cartesianas, aunque el mismo puede aplicarse a sistemas de coordenadas polares, cilíndricas o esféricas, dando como resultado una malla rectangular estructurada, con espaciamiento uniforme entre los nodos en la dirección de los ejes del sistema. La mayoría de casos prácticos de interés en la DFC, tratan con geometrías complejas, lo que hace que sea muy difícil, si no imposible, generar una malla en alguno de los sistemas de coordenadas antes mencionados, que ajuste en su frontera interna de manera exacta a la forma de la geometría a analizar. Esto presenta una limitante que se debe atender, se debe llevar a cabo una transfofrmación de sistemas de coordenadas, llevando el dominio físico del problema a un dominio computacional. (Figura 3.1) El dominio computacional es una abstracción matemática, mientras que el dominio físico es el dominio continuo para el cual se desea una solución numérica.

Una malla es un conjunto de puntos distribuidos a lo largo de un campo dentro del cuál se llevan a cabo los cálculos para obtener la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Existen dos tipos principales de mallas: estructuradas y no estructuradas. (Figura 3.2) Las mallas estructuradas se forman mediante la intersección de coordenadas curvilíneas, formando celdas cuadriláteras en dos dimensiones, o hexahedros en tres dimensiones. En contraste, las mallas no estructuradas no tienen relación alguna con las direcciones coordinadas del sistema, éstas consisten generalmente de triángulos y tetrahédros en dos y tres dimendiones respectivamente, aunque en realidad se puede hacer uso de cualquier forma geométrica. Para este trabajo se considerará el desarrollo de mallas

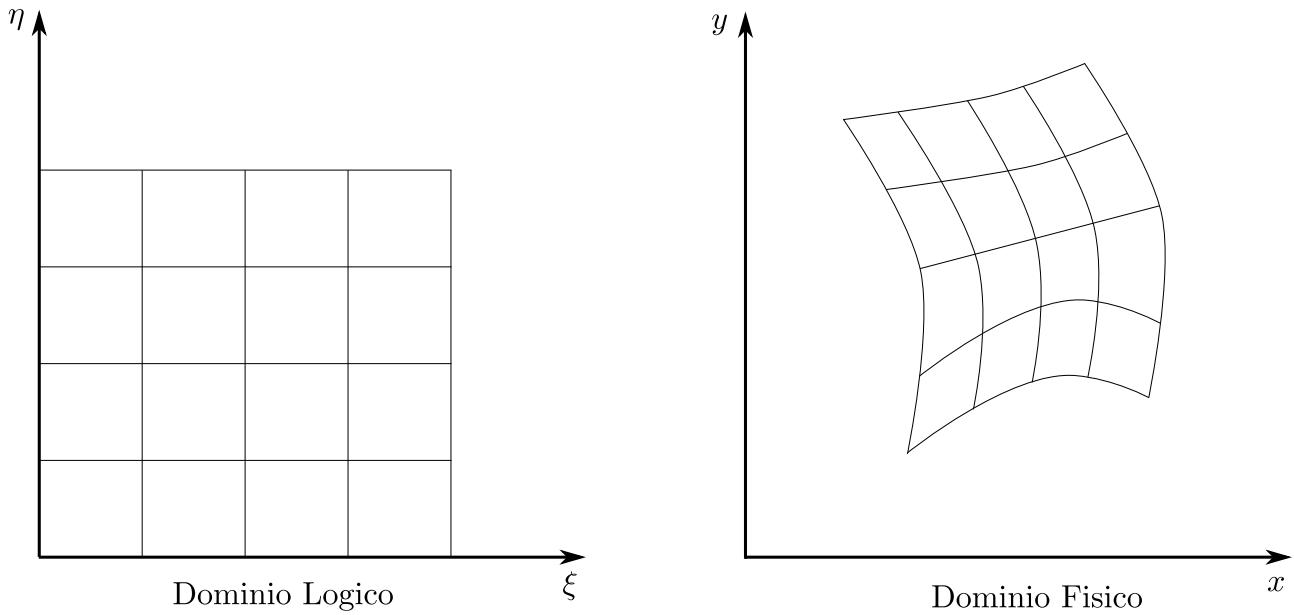


Figura 3.1: Dominios lógico (izquierda) y físico (derecha). [14]

estructuradas principalmente, que en principio tendrán una forma curvilínea ajustada a la forma del perfil alar con el que se esté trabajando como frontera interna del dominio.

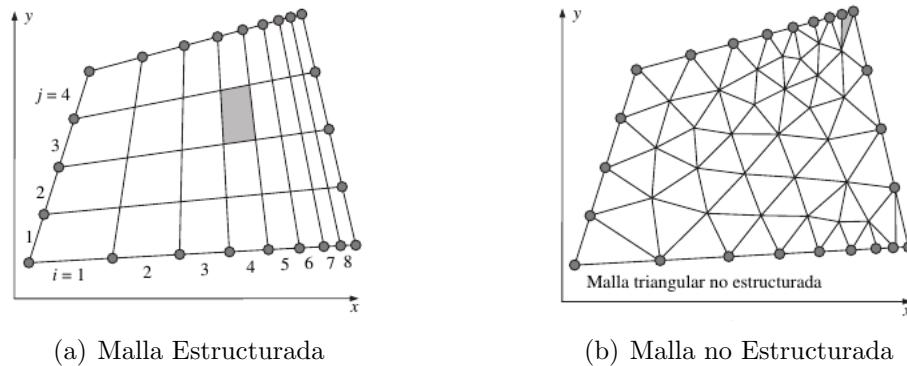


Figura 3.2: Mallas estructuradas y no estructuradas. [6]

La malla debe de generarse bajo ciertas restricciones las cuales suelen ser difíciles de satisfacer por completo. En la actualidad el tiempo que toma generar una malla llega a ser mayor en órdenes de magnitud que el tiempo requerido para la construcción y análisis de la solución del flujo sobre la malla. En especial ahora que hay mayor disponibilidad de software para la solución de flujos. [13]

3.1. Tipos de Mallas Estructuradas

Existen tres tipos base de mallas conocidos como mallas C, H u O respectivamente. El nombre que dichos tipos de mallado reciben se debe a que su estructura asemeja a dichas letras (en mayúsculas) desde una vista de planta.

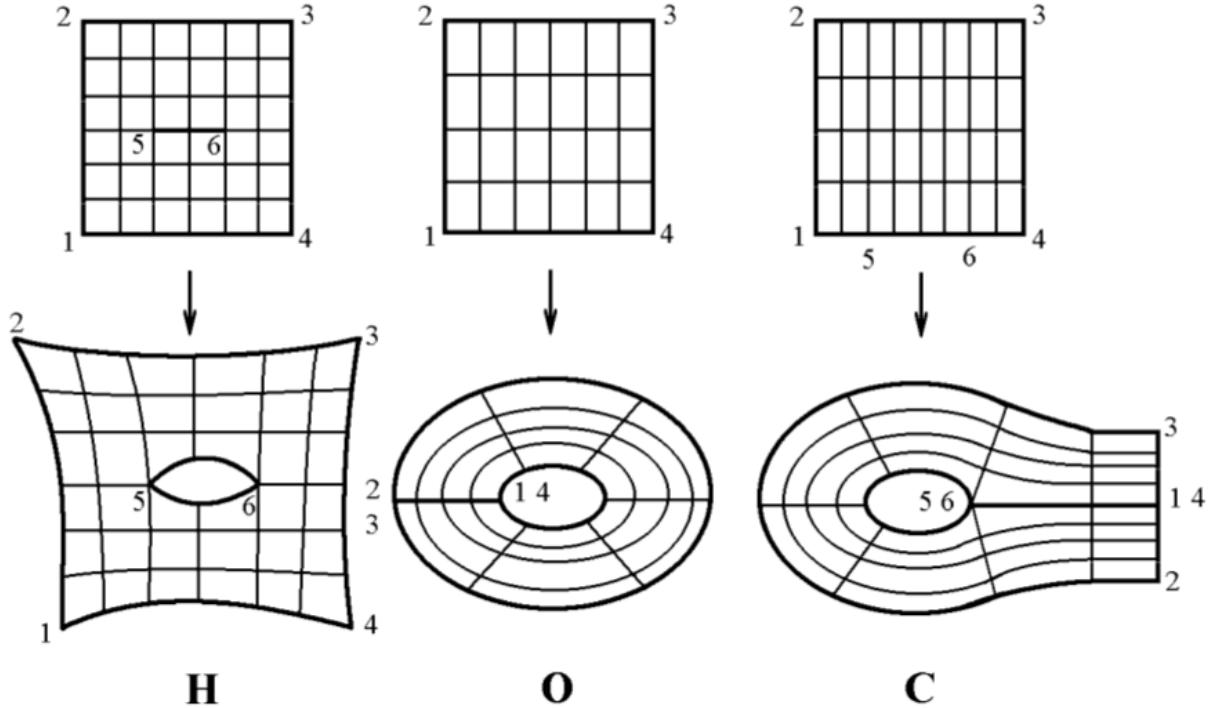


Figura 3.3: Tipología de malla y sus respectivos espacios computacionales.
H(izquierda), O(centro), C(derecha). [15]

3.1.1. Mallas tipo C

Las mallas tipos C están compuestas por una sección semicircular y otra rectangular en la frontera exterior, mientras que la frontera interior es de la misma forma del objeto que se analiza.

Suelen utilizarse para el análisis de flujos alrededor de perfiles alares, pues ofrecen como principal ventaja un buen análisis del flujo en la zona de deflexión de la estela, en especial si se compara contra las mallas tipo O. [16]

La transformación de esta malla de un espacio físico a un espacio computacional da como resultado una malla conformada por rectángulos. Durante la transformación se debe identificar un segmento, también conocido como corte, ya que este proceso implica conceptualmente, una separación en dicho corte, para posteriormente deformar el espacio físico llevándolo así a convertirse en una malla estructurada uniforme. En la figura 3.4 se observa que en el dominio físico, el segmento (ab) representa la sección del mallado donde se realiza el corte y que también se le llama ($a'b'$), y que en el dominio computacional este segmento representa dos segmentos diferentes.

3.1.2. Mallas tipo O

Este tipo de mallas son principalmente de sección circular, de ahí su nombre. Suelen ser utilizadas para el análisis del flujo alrededor de algunos componentes de aeronaves, como puede ser el fuselaje o las góndolas, entre otros. [15] También pueden llegar a utilizarse en el análisis de perfiles alares, pero presentan la dificultad de ofrecer una baja calidad de mallado en el borde de salida. [4] [16]

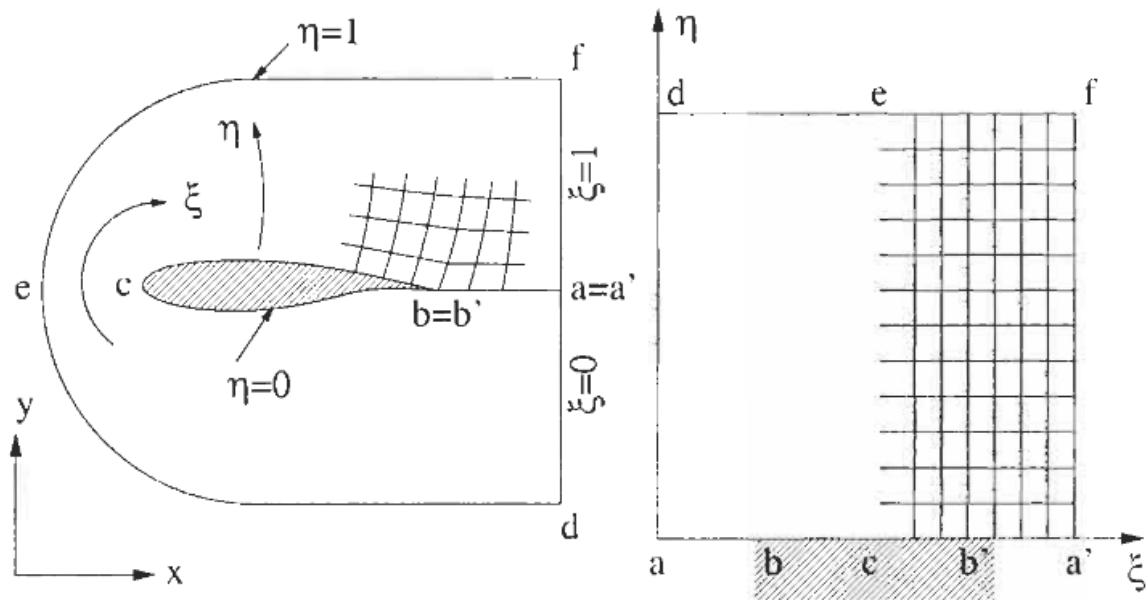


Figura 3.4: Malla tipo C y su transformación del espacio físico (izquierdo) al espacio lógico (derecha). [4]

En este caso, al igual que sucede con las mallas tipo C, el resultado en el dominio lógico es un cuadrado. El proceso de transformación de este tipo de malla se puede conceptualizar como el desdoble del espacio físico a partir de un corte, en la figura 3.5 se representa como (ac) o como ($a'c'$), para después deformarlo hasta alcanzar la forma cuadrada esperada.

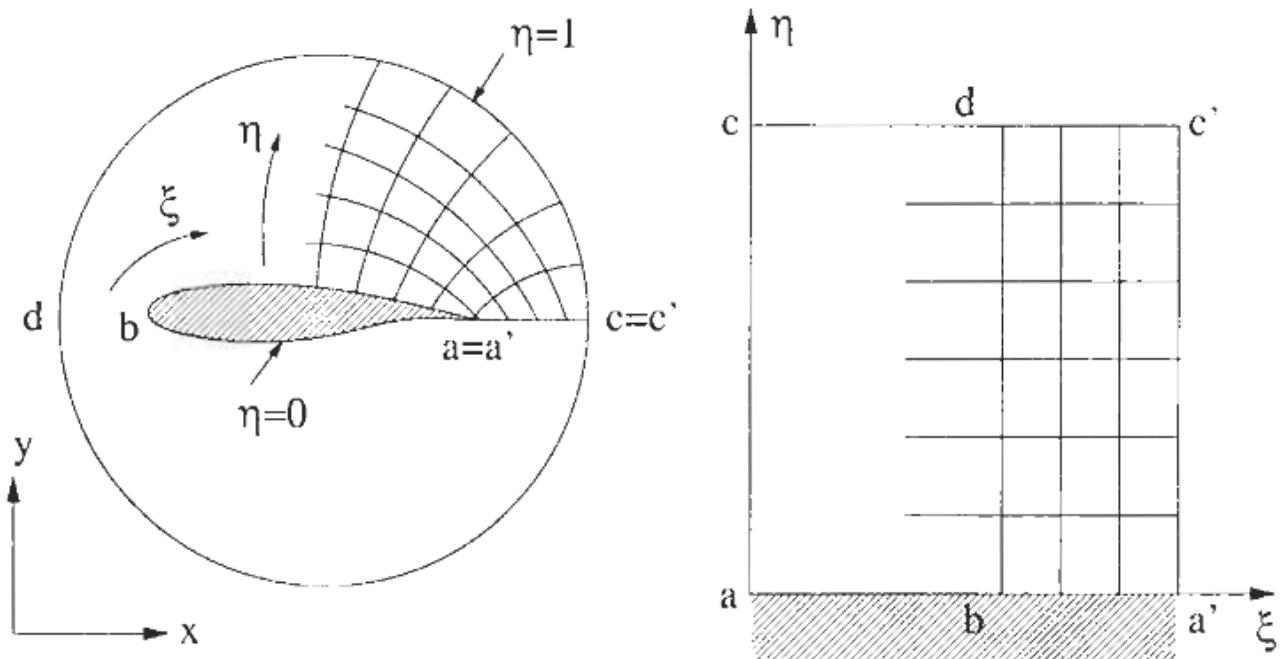


Figura 3.5: Malla tipo O y su transformación del espacio físico (izquierdo) al espacio lógico (derecha). [4]

3.1.3. Mallas tipo H

Este tipo de mallas son utilizadas principalmente en los análisis de turbomaquinaria, específicamente en la zona de los alabes. [4] [16] Tambien suelen utilizarse en el análisis de alas de aeronaves. [15]

La transformación en este tipo de malla, tambien da como resultado un dominio computacional cuadrado, que puede tener o no un corte al interior el cual corresponde a la frontera interior del dominio físico. (Figura3.3 (H)) La frontera externa del dominio computacional corresponde a la frontera externa del dominio físico.

La figura3.6 muestra el uso de una malla tipo H para el análisis del flujo a través de los álabes de una turbina, y su transformación del dominio físico al computacional. En este caso no existe un cuerpo en el centro del mallado, por lo que no hay corte alguno en el dominio lógico.

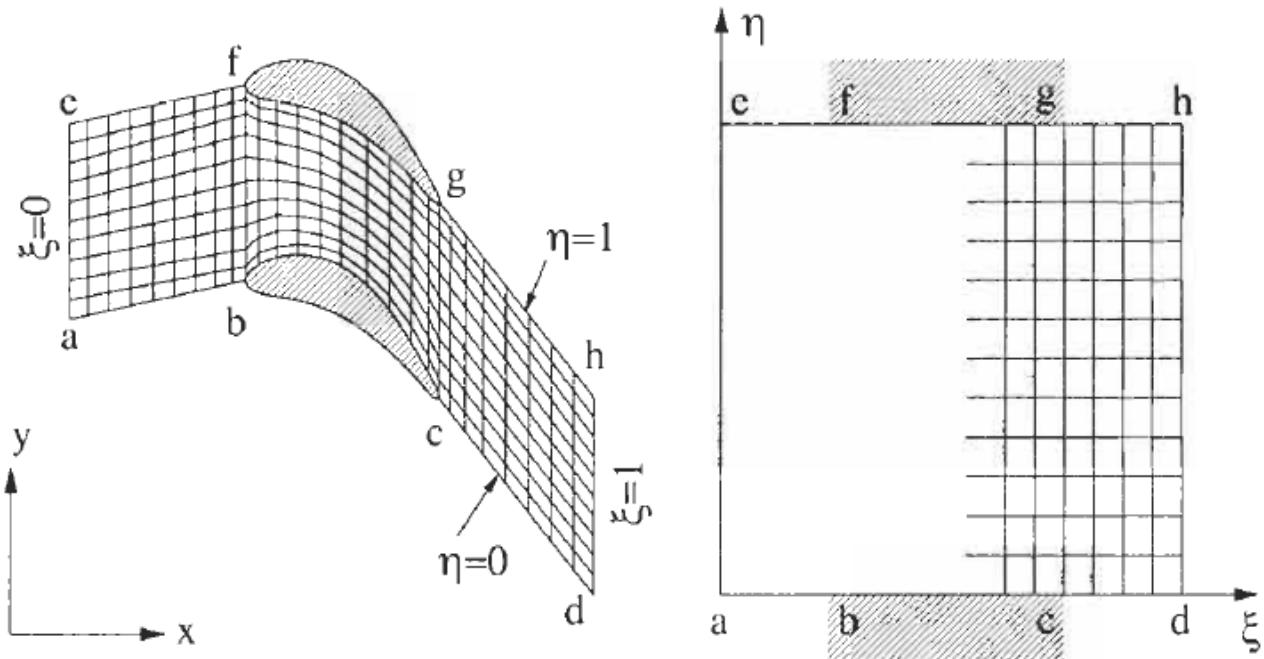


Figura 3.6: Malla tipo H y su transformación del espacio físico (izquierda) al espacio lógico (derecha). [4]

En el caso de que se quiera ocupar una malla H con un cuerpo a analizar en el interior del dominio, como el caso representado en la figura3.3 (H) se puede realizar un mallado uniforme, quizás mediante un método de interpolación algebráica, sobre el dominio físico quedando así coincidente con el dominio computacional. Los puntos 5 y 6 requieren de un trato especial al momento de llevar a cabo la solución, un ejemplo de esto puede ser que todos los puntos del mallado que caen dentro del objeto de análisis no sean utilizados durante la solución.

3.2. Mallas Adaptativas

A pesar de que existen varios modelos algebráicos y diferenciales para la generación de mallas, aún hay problemas para los cuales estos métodos no generen una malla adecuada, ya sea que la malla se aleje mucho de la ortogonalidad en ciertos puntos, que esté coprimida, e incluso no se llegue a la convergencia. Desde la década de 1960, época en la que la generación de mallas comienza a ser estudiada con mayor seriedad, se han analizado enfoques variables para solucionar los problemas presentados en los enfoques diferenciales.

3.3. Consideraciones preliminares para la generación de mallas

La densidad de la malla es el primer aspecto que se debe considerar, se debe generar una malla solo suficientemente densa para que la aproximación numérica sea precisa, sin embargo, se debe tener cuidado en no hacer la malla demasiado densa, tanto que resulte impráctico llevar a cabo un análisis y llegar a una eventual solución.

Otro importante aspecto a tener en cuenta durante este proceso, es la eficiencia computacional. Por un lado el uso de memoria podría ser tan grande que resulte impráctico llevar a cabo este proceso, por lo que una organización adecuada de la información es de vital importancia. Por otro lado, la generación de mallas debe llevarse a cabo mediante la implementación de códigos lo menos complejos posible.

3.4. Técnicas de generación del mallado

La generación de mallas *per se*, es un proceso libre durante su desarrollo, es decir, no se lleva a cabo mediante alguna fórmula o procedimiento estricto, por lo tanto, cualquier desarrollo se puede considerar apto para este propósito siempre y cuando dé como resultado una malla adecuada para el análisis que se pretende realizar. Sin embargo, si hay ciertas consideraciones a tomar en cuenta, tales como la capacidad de manejar problemas con múltiples variables, las cuales podrían variar en varios órdenes de magnitud. Del mismo modo, se debe considerar la posibilidad de presentar factores de compresión en ciertas áreas de la malla, en contraste con una malla uniforme.

Podemos señalar principalmente dos tipos de técnicas para la generación de malla, de entre el amplio número de técnicas existentes al día de hoy, las cuales son:

- **Métodos algebráicos:** es de todos, el método más sencillo de implementar, una de sus ventajas es la rapidez con la que se genera la malla. Se utiliza un método de interpolación para determinar los nodos del mallado, partiendo de las coordenadas de la frontera externa e interna. Y se realiza la transformación del dominio físico al lógico mediante una ecuación algebráica.
- **Metódos mediante ecuaciones diferenciales parciales (EDP):** se resuelve una EDP para obtener la distribución de los nodos, la resolución de las mismas se lleva a cabo mediante aproximaciones por el método de diferencias finitas. La distribución de la malla puede ser uniforme o concentrada dependiendo del tipo de ecuación que se resuelva.

3.5. Generación de mallas mediante métodos algebráicos

Como ya se mencionó previamente, los métodos más eficientes para la generación de mallas son los métodos algebráicos. Éstos métodos basados en interpolación son de gran utilidad en la industria, debido a su sencilla implementación, además de la capacidad de control sobre la densidad de la malla respecto a un nodo dentro del dominio. Un aspecto en contra de la generación de mallas mediante estos métodos es que no tienen la capacidad de suavizar las curvas, si no que tienden a mantener la forma de las fronteras, por lo que si se llegara a presentar algún tipo de discontinuidad en la frontera interna (superficie de análisis), esta seguiría presente los nodos internos de la malla. Es por esto que estos métodos son utilizados de manera general, como una primera aproximación, la cual sirve como condición inicial en la generación de mallas mediante la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. [17]

La idea fundamental sobre la cual se desarrollan todos los métodos algebráicos es el uso de funciones de interpolación matemática para interpolar entre algunos puntos conocidos o previamente asignados (fronteras) para así obtener la distribución de puntos que se ubican entre los ya mencionados. El método de interpolación puede variar dependiendo del método algebráico que se esté empleando, pero la idea base permanece. [18]

Los métodos algebráicos relacionan un dominio computacional, descrito por un cuadrado en 2D y un cubo en 3D, con un dominio físico de geometría arbitraria.

3.5.1. Interpolación unidireccional

La interpolación unidireccional se lleva a cabo interpolando una línea a la vez, en una dirección del espacio computacional, ya sea ξ o η . Es decir, para interpolar en la dirección ξ (desarrollo que se presenta en este trabajo), se deben seleccionar puntos en la frontera tanto interna como externa, que correspondan a la misma línea $\eta = \text{constante}$ y a lo largo de la cual se hará la interpolación, haciendo la variación en la coordenada ξ , interpolando así, línea por línea hasta terminarse de generar la malla. El mismo procedimiento se puede llevar a cabo interpolando en la dirección de η .

Interpolación Polinomial

En este método se ocupa el polinomio de Lagrange como ecuación de interpolación para generar la malla.

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.1)$$

El polinomio resultante será de grado n , donde el numerador omite el término $(x - x_i)$

El caso más sencillo con el que se puede trabajar el polinomio de Lagrange es generando un polinomio de grado 1, que resulta ser una línea recta que pasa a través de dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) , los cuales pertenecen a la frontera interna y externa respectivamente. Para este caso, se tienen los siguientes términos:

$$L_0 = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad L_1 = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

dando como resultado la ecuación que describe a una recta

$$y = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = y_0(1 - \xi) + y_1\xi \quad (3.2)$$

de donde se sabe que

$$\xi = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad (3.3)$$

y se observa que $\xi = 0, 1$ cuando $x = x_0, x_1$ respectivamente.

Despejando x de la ecuación 3.3 se obtiene:

$$x = (x_1 - x_0)\xi - x_0 = x_0(1 - \xi) + x_1\xi \quad (3.4)$$

por lo que la ecuación constitutiva de éste método, para una interpolación en dirección del eje ξ del espacio computacional puede escribirse de la siguiente manera:

$$r(\xi, \eta_j) = (1 - \xi)r(0, \eta_j) + \xi r(1, \eta_j) \quad (3.5)$$

Se puede hacer uso de la generación de un polinomio de mayor grado, para lo cual se deben proporcionar más puntos previamente definidos por los cuales tiene que pasar la curva descrita del polinomio. Para generar una ecuación de grado n se deben proporcionar como datos de inicio, al menos $n+1$, es decir, si se quisiera hacer la interpolación mediante un polinomio de grado 2, se debe proporcionar la información de al menos 3 puntos. Siempre cabe la posibilidad de que los puntos pertenezcan a una linea recta, en cuyo caso los términos de mayor orden se verán eliminados.

Las figuras 3.7 y 3.8 presentan una malla y su vista de detalle generada mediante este método alrededor de un perfil aerodinámico.

Interpolación mediante polinomios de Hermite

La interpolación mediante el polinomio de Lagrange se realiza mediante el uso de valores conocidos de ciertos puntos, sin embargo, es posible generar una malla partiendo tanto de valores conocidos de una función como de los valores de su primer derivada para ciertos puntos dados. El polinomio que describe este método se escribe como:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i H_i(x) + \sum_{i=0}^n y'_i \tilde{H}_i(x) \quad (3.6)$$

Los siguientes polinomios definen los polinomios de Hermite $H_i(x)$ $\tilde{H}_i(x)$ en función de polinomios de Lagrange:

$$H_i(x) = \{1 - 2L_i(x_i)(x - x_i)\} [L_i]^2 \quad (3.7)$$

$$\tilde{H}_i(x) = (x - x_i) [L_i]^2 \quad (3.8)$$

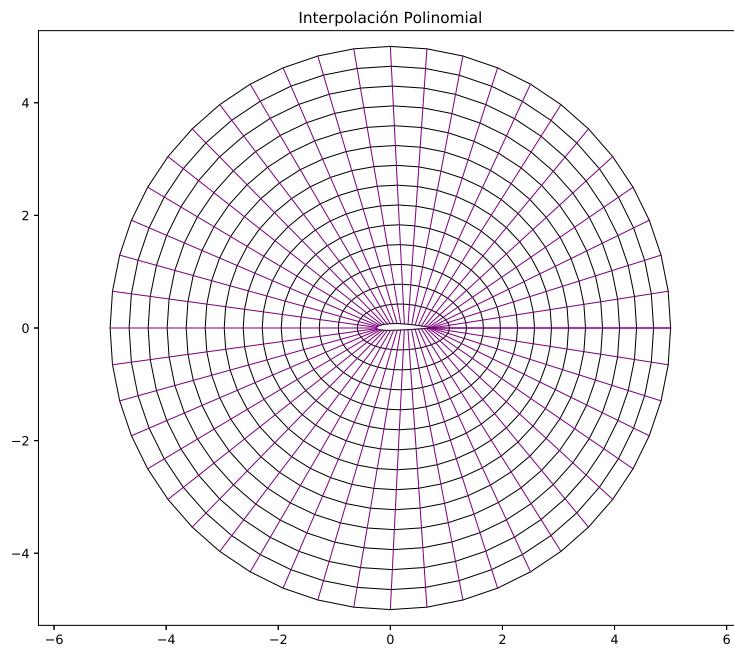


Figura 3.7: Malla tipo O generada mediante el método de interpolación polinomial alrededor de un perfil NACA 2412. Densidad de malla 49×15

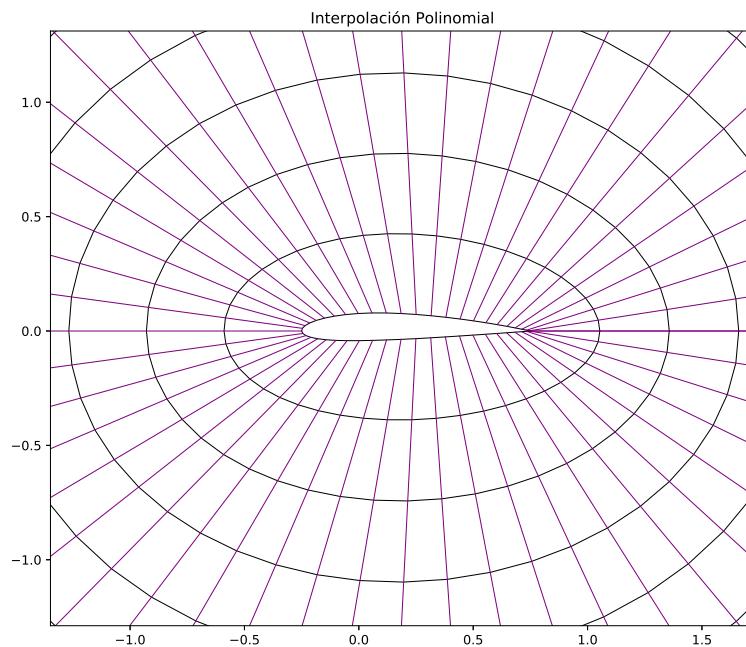


Figura 3.8: Vista de acercamiento a la malla generada de la figura 3.7

Se suele usar polinomios de Hermite cubicos, para los cuales se requiere el uso de polinomios de Lagrange de primer grado, es decir polinomios lineales. La ecuación constitutiva de la interpolación en dirección del eje ξ , por polinomios cúbicos de Hermite queda expresada de la siguiente manera:

$$r(\xi) = \sum_{i=0}^n r_i H_i(\xi) + \sum_{i=0}^n r'_i \tilde{H}_i(\xi) \quad (3.9)$$

que a su vez, desarrollando las operaciones matemáticas, se expresa como:

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta_j) = & r(0, \eta_j)(2\xi^3 - 3\xi^2 + 1) + r(1, \eta_j)(3\xi^2 - 2\xi^3) \\ & + r'(0, \eta_j)(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) + r'(1, \eta_j)(\xi^3 - \xi^2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.5.2. Interpolación multidireccional

La interpolación multidireccional consiste en la obtención de una ecuación algebráica que permita la interpolación simultánea en 2 o más direcciones. Para este caso (2D), se generan ecuaciones que permitan la interpolación simultánea, en el espacio computaciones, en ambas direcciones ξ y η .

Interpolación Transfinita - TFI

El método de TFI es un método de interpolación multivariable. Cuando se aplica el TFI para la generación de mallas, se restringe la malla para que coincida con la fronteras especificadas. Este método consiste en la suma de las interpolaciones de una sola variable para cada una de las coordenadas computacionales. Existen diversos tipos de interpolación a lo largo de una coordena, por lo que existen prácticamente un número ilimitado de variantes de TFI creadas a partir de la combinación de diversas interpolaciones de una sola variable. [13]

Una de las principales ventajas del método de interpolación transfinita es que asegura una concordancia en las frontiers en ambas direcciones. Su escencia es la de la interpolación en cada una de las coordenadas computacionales, formando así los productos tensores de las interpolaciones, y finalmente, se lleva a cabo una suma “booleana”. Las interpolaciones unidireccionales son una combinación lineal de datos proporcionados por el usuarios del dominio físico para valores dados de las coordenadas del dominio lógico.

A partir de la existencia de una transformación $r = r(\xi, \eta)$ ($x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$) la cual hace un mapeo de un cuadrado de dimensiones $0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1$ en el dominio computacional, con la región del dominio físico, delimitada por una frontera externa y una interna, que se pretende analizar. De igual modo, se puede escribir otra transformación P_ξ , la cual recibe el nombre de proyector, la cual relaciona puntos en el espacio lógico con puntos en el espacio físico, definida como:

$$P_\xi(\xi, \eta) = (1 - \xi)r(0, \eta) + \xi r(1, \eta) \quad (3.11)$$

Como ya se explicó en la sección 3.5.1, esta transformación hace una transformación con la cual las fronteras en la dirección de ξ son mapeadas, mientras que las fronteras en dirección de η son reemplazadas por líneas rectas. De manera análoga se puede definir el proyector:

$$P_\eta(\xi, \eta) = (1 - \eta)r(\xi, 0) + \eta r(\xi, 1) \quad (3.12)$$

con el cual se preservan las fronteras en dirección η y se reemplazan las fronteras en ξ por líneas rectas.

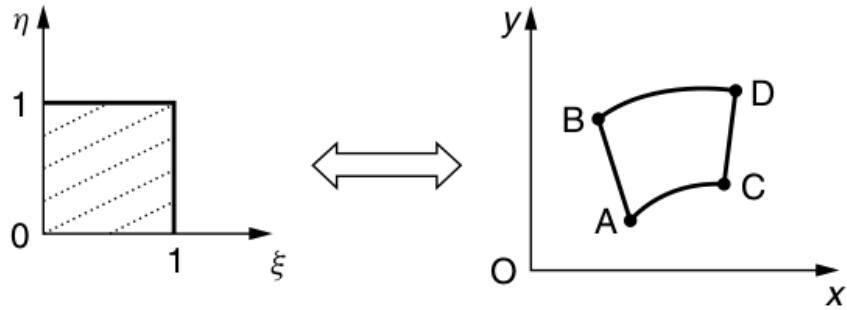


Figura 3.9: Transformación de una malla a través del proyector P_η [17]

La figura 3.9 representa gráficamente la transformación de la malla del dominio lógico al dominio computacional mediante la aplicación del proyector P_η . Se observa como las fronteras conformadas por los segmentos AC y BD se conservan durante las transformación, mientras que las fronteras AB y CD son reemplazadas por líneas rectas.

A partir de estas ecuaciones, se puede definir un mapeo compuesto $P_\xi P_\eta$, de tal manera que:

$$\begin{aligned} P_\xi(P_\eta(\xi, \eta)) &= P_\xi((1 - \eta)r(\xi, 0) + \eta r(\xi, 1)) \\ &= (1 - \xi)[(1 - \eta)r(0, 0) + \eta r(0, 1)] + \xi[(1 - \eta)r(1, 0) + \eta r(1, 1)] \\ &= (1 - \xi)(1 - \eta)r(0, 0) + (1 - \xi)\eta r(0, 1) + \xi(1 - \eta)r(1, 0) + \xi\eta r(1, 1) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Con esta transformación compuesta, se logra preservar los 4 vértices en los que se interseccionan las fronteras, sin embargo, las cuatro fronteras son reemplazadas por líneas rectas. Es decir, las líneas $\xi = \text{constante}$ y $\eta = \text{constante}$ en el dominio computacional son transformadas como líneas rectas en el dominio físico, como se muestra en la figura 3.10.

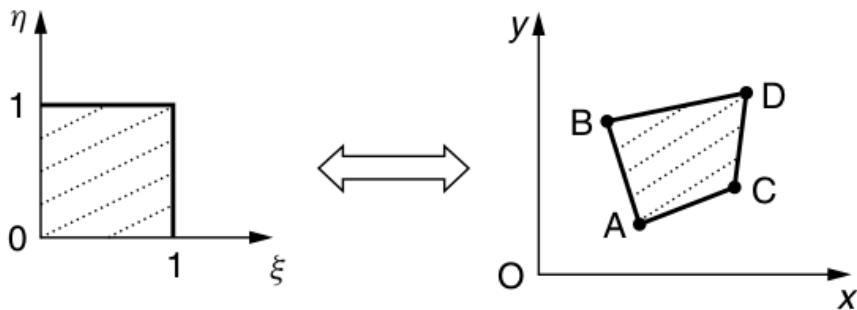


Figura 3.10: Transformación de una malla a través del proyector compuesto $P_\xi P_\eta$ [17]

Si consideramos los diferentes mapeos de un lado, bajo cualquiera de los proyectores previamente desarrollados, por ejemplo el lado $\eta = 0$, bajo el proyector P_ξ es mapeado con una línea recta AC , si por otro lado se lleva a cabo la transformación mediante el proyector P_η el mapeo resultante es uno a uno, es decir que la recta $\eta = 0$ se mapea con la curva de la frontera AC . Por último transformando con el proyector compuesto $P_\xi P_\eta$ también se hace un mapeo con la línea recta AC .

Desarrollando la misma lógica y consideraciones a las 4 fronteras de la frontera, se concluye que el mapeo compuesto ($P_\xi + P_\eta - P_\xi P_\eta$) lleva a cabo una transformación con un mapeo uno a uno de las fronteras del cuadrado de longitud uitaria (dominio computacional) con la curvas de frontera del dominio físico. A este mapeo se le conoce como la suma booleana de las transformaciones P_ξ y P_η , y se escribe $P_\xi \oplus P_\eta$, por lo tanto:

$$P_\xi \oplus P_\eta = P_\xi + P_\eta - P_\xi P_\eta \quad (3.14)$$

con lo que la fórmula final queda:

$$\begin{aligned} (P_\xi \oplus P_\eta)(\xi, \eta) &= P_\xi(\xi, \eta) + P_\eta(\xi, \eta) - P_\xi P_\eta(\xi, \eta) \\ &= (1 - \xi)r(0, \eta) + \xi r(1, \eta) + (1 - \eta)r(\xi, 0) + \eta r(\xi, 1) \\ &\quad - (1 - \xi)(1 - \eta)r(0, 0) - (1 - \xi)\eta r(0, 1) - (1 - \eta)\xi r(1, 0) \\ &\quad - \xi\eta r(1, 1) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Esta ecuación es la base del métro de TFI para dos dimensiones. La malla se genera tomando valores discretos ξ_i, η_j para los ejes ξ y η .

3.6. Generación de mallas mediante EDP

La generación de mallas mediante estos métodos se ha esparcido gracias a la versatilidad que poseen y la relativa facilidad con la que pueden ser aplicados. La idea sobre la cual se desarrolla el método, es la de obtener la solución numérica de una ecuación diferencial parcial, esta solución representa las coordenadas de la malla, la cual debe coincidir en su frontera interna, con la forma geométrica del cuerpo que se pretende analizar. [18]

Existen tres esquemas predominantes de generación de mallas mediante la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales:

- Ecuaciones Elípticas
- Ecuaciones Hiperbólicas
- Ecuaciones Parabólicas

Generación de mallas mediante EDP elípticas

Para la solución de un sistema de EDP elípticas se necesita cumplir la condición de tener definidas las condiciones de frontera a lo largo de todos los puntos pertenecientes a la misma, es decir, que se tengan condiciones de frontera de Dirichlet. La solución se obtiene mediante diferentes métodos numéricos iterativos entre los que destacan el método de Jacobi, el método de Gauss-Seidel y métodos de sobre relajación. Informacion sobre el procedimiento y desarrollo de estos métodos está disponible en el apéndice B.

La idea es que se calculen las coordenadas (ξ, η) y que la solución del sistema de ecuaciones genere las correspondientes coordenadas (x, y) del dominio físico, con un mapeo uno a uno, es decir, que exista una relación adecuada entre el dominio computacional y el lógico.

Considerando la ecuación de Laplace:

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0 \quad (3.16a)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = 0 \quad (3.16b)$$

donde como ya se ha mencionado, ξ y η representan las coordenadas del dominio computacional y además, son variables dependientes de x y de y . Si se quiere trabajar con la forma inversa, es decir, que ahora x y y sean variables dependientes de ξ y η , la ecuación de Laplace se expresa como:

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \quad (3.17a)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0 \quad (3.17b)$$

donde:

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$$

La distribución de los nodos, obtenidos mediante la solución de la ecuación de Laplace (ecuación 3.16), tiende ser uniforme debido al efecto suavizante de dicha ecuación. Para poder manipular esta distribución, es necesario agregar funciones de forzado a la ecuación 3.16, dando como resultado la ecuación de Poisson:

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (3.18a)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \quad (3.18b)$$

y transformando la ecuación, haciendo x y y las variables dependientes:

$$\alpha x_{\xi\xi} + \beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -I^2[P(\xi, \eta)x_\xi + Q(\xi, \eta)x_\eta] \quad (3.19a)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} + \beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -I^2[P(\xi, \eta)y_\xi + Q(\xi, \eta)y_\eta] \quad (3.19b)$$

Las funciones P y Q se seleccionan dependiendo de la necesidad específica del problema que se analiza. Dichas necesidades pueden ser, por ejemplo, el agrupamiento de nodos alrededor de un punto específico, o quizás sea la búsqueda de un sistema ortogonal en la superficie.

El uso de las funciones P y Q para manipular la densidad de puntos alrededor de ciertas zonas se logra atrayendo las líneas vecinas a una línea seleccionada. La misma funciona para los nodos, haciendo la atracción de los nodos colindantes hacia el nodo seleccionado. O bien, se puede llevar a cabo una combinación de ambos efectos.

Las ecuaciones para P y Q que llevan a cabo este proceso son:

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{m=1}^M a_m \frac{\xi - \xi_m}{|\xi - \xi_m|} \exp(-c_m |\xi - \xi_m|) \\ - \sum_{n=1}^N b_n \frac{\xi - \xi_n}{|\xi - \xi_n|} \exp\{-d_n [(\xi - \xi_n)^2 + (\eta - \eta_n)^2]^{\frac{1}{2}}\} \quad (3.20)$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{m=1}^M a_m \frac{\eta - \eta_m}{|\eta - \eta_m|} \exp(-c_m |\eta - \eta_m|) \\ - \sum_{n=1}^N b_n \frac{\eta - \eta_n}{|\eta - \eta_n|} \exp\{-d_n [(\xi - \xi_n)^2 + (\eta - \eta_n)^2]^{\frac{1}{2}}\} \quad (3.21)$$

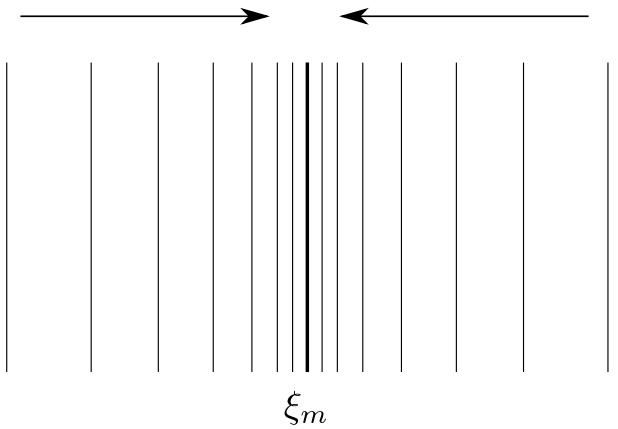
estas ecuaciones fueron propuestas en 1974 por Thompson, Thames y Mastin [19], y son ampliamente referidas en diversos textos tanto de dinámica de fluidos computacional como de generación numérica de mallas.

En las ecuaciones 3.20 y 3.21 el valor de M es el número de líneas existentes en la malla, tanto líneas coordenadas $\xi = \xi_m$ como líneas $\eta = \eta_m$ y N representa el número de nodos ($\xi = \xi_n, \eta = \eta_n, 0 \leq \xi_n, \eta_n \leq 1$) a los que la malla se verá atraída. Los factores a_m y b_n son factores de amplificación, mientras que los factores c_m y d_n son factores de decaimiento, estos cuatro parámetros son datos de entrada para el código, asignados por el usuario, y los cuatro deben ser valores positivos.

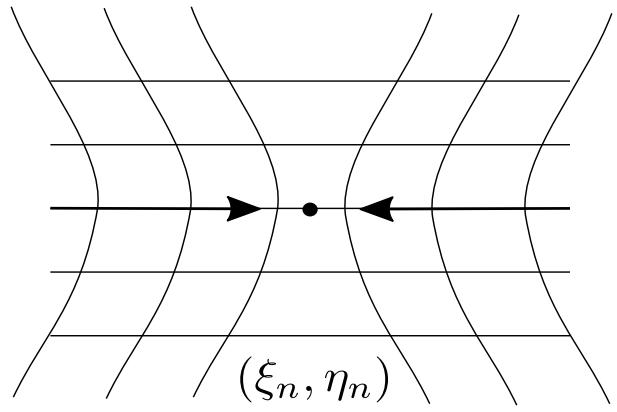
El primer término en la ecuación para $P(\xi, \eta)$ tiene como efecto la atracción de las líneas ξ (líneas a lo largo de las cuales la coordenada en ξ permanece constante) hacia la línea $\xi = \xi_m$ en el dominio físico con una amplitud a_m , mientras que le segundo término atrae las líneas ξ hacia un punto determinado con una amplitud b_n . Estos parámetros tienen el mismo efecto en la ecuación de $Q(\xi, \eta)$, pero la atracción se ve reflejada en las líneas donde se mantiene constante la coordenada η .

Las funciones $(\xi - \xi_m)/|\xi - \xi_m|$ y $(\eta - \eta_m)/|\eta - \eta_m|$ son funciones que solo pueden dar como resultado valores ± 1 y su propósito dentro de la fórmula es el garantizar que la atracción se dé, en caso de las líneas ξ y η por ambos lados de las mismas, y en todos los nodos vecinos para el caso de la atracción hacia un punto (ξ_n, η_n) . Asignar un valor negativo a los factores de amplitud da como resultado un efecto contrario, es decir, se crea un efecto de repulsión.

Las ecuaciones discretizadas para la generación de mallas mediante las ecuaciones de Laplace y Poisson quedan

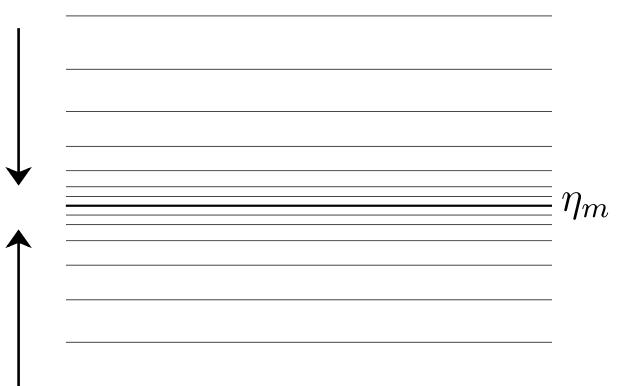


(a) Efecto de atracción a la línea $\xi = \xi_m$

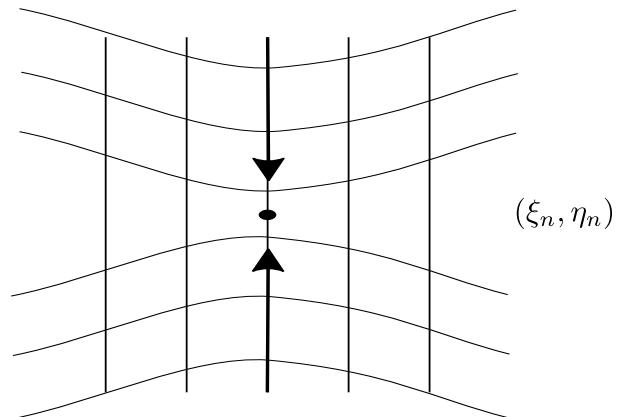


(b) Efecto de atracción al punto (ξ_n, η_n)

Figura 3.11: Efecto de atracción en el eje ξ por la función $P(\xi, \eta)$



(a) Efecto de atracción a la línea $\eta = \eta_m$



(b) Efecto de atracción al punto (ξ_n, η_n)

Figura 3.12: Efecto de atracción en el eje η por la función $Q(\xi, \eta)$

$$X_{i,j} = \frac{1}{2(\alpha + \gamma)} \left[\alpha(X_{i+1,j} + X_{i-1,j}) + \gamma(X_{i,j+1} - X_{i,j-1}) \right] \quad (3.22)$$

$$- \frac{\beta}{2}(X_{i+1,j+1} + X_{i-1,j-1} - X_{i-1,j+1} - X_{i+1,j-1}) \quad (3.23)$$

$$+ \frac{I^2}{2}(P(X_{i+1,j} - X_{i-1,j}) + Q(X_{i,j+1} - X_{i,j-1})) \quad (3.24)$$

$$Y_{i,j} = \frac{1}{2(\alpha + \gamma)} \left[\alpha(Y_{i+1,j} + Y_{i-1,j}) + \gamma(Y_{i,j+1} - Y_{i,j-1}) \right] \quad (3.25)$$

$$- \frac{\beta}{2}(Y_{i+1,j+1} + Y_{i-1,j-1} - Y_{i-1,j+1} - Y_{i+1,j-1}) \quad (3.26)$$

$$+ \frac{I^2}{2}(P(Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j}) + Q(Y_{i,j+1} - Y_{i,j-1})) \quad (3.27)$$

donde $P = 0$ y $Q = 0$ si se pretende utilizar la ecuación de Laplace.

Generación de mallas mediante EDP hiperbólicas

La generación de mallas mediante EDP elípticas puede ser demasiado costosa en términos de tiempo de cómputo, así como en el uso de memoria en el ordenador. Esto se debe a que dicho esquema intenta hacer coincidir un sistema de coordenadas curvilíneo a cuatro curvas de frontera, seis en mallas tridimensionales. De aquí surge un nuevo enfoque, en el cual solo se requiere iniciar la solución con una sola frontera e ir avanzando hacia afuera en el dominio físico usando EDP hiperbólicas. [17]

Con este propósito se toma en cuenta el trabajo publicado por Steger y Chausse [20] para la generación de mallas bidimensionales ortogonales y con control del área de celda. Se inicia el proceso con una frontera única en la que se considera que $\eta = 0$. Se propone tambien un sistema de ecuaciones de primer orden para las coordenadas x, y como funciones de ξ, η :

$$g_{12} = g_1 \cdot g_2 = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0 \quad (3.28a)$$

$$|g_1 \times g_2| = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = F \quad (3.28b)$$

La primera ecuación dota a la malla de ortogonalidad, mientras que la segunda tiene el término F como una medida del área de la celda (si el producto $\delta\xi\delta\eta$ es el mismo para cada celda). Se puede trabajar utilizando F como una función de ξ, η , lo que permitiría incrementar la densidad de la malla cerca de la frontera donde $\eta = 0$ haciendo que F tenga un valor pequeño en dicha zona. De las ecuaciones 3.28:

$$x_\eta = -\frac{F}{x_\xi^2 + y_\xi^2} y_\xi \quad (3.29a)$$

$$y_\eta = \frac{F}{x_\xi^2 + y_\xi^2} x_\xi \quad (3.29b)$$

Antes de proceder a la solución del sistema de las ecuaciones 3.28 se deben tomar en cuenta algunas consideraciones. En primera instancia debe tenerse en cuenta que el sistema es un sistema no lineal por lo que un proceso de linearización debe llevarse a cabo, una segunda consideración es que al ser un sistema de ecuaciones hiperbólicas se debe llevar a cabo el proceso de solución mediante un proceso de marcha, en este trabajo la marcha se realizará en la dirección del eje η . Tercera, para un sistema de ecuaciones hiperbólicas se debe especificar una condición inicial así como un condición de frontera y por último, con el objetivo de evitar la presencia de oscilaciones, se puede agregar un término de “damping”, o viscosidad artificial, al lado derecho de las ecuaciones.

Para el proceso de linearización, se utilizará el esquema iterativo de Newton, el cual especifica que un término no lineal es aproximado mediante

$$AB = A^{k+1}B^k + B^{k+1}A^k - A^kB^k \quad (3.30)$$

donde el superíndice k representa el estado previo conocido. A partir de este punto el superíndice $k + 1$, el cual representa el nivel actual a obtener, será eliminado de las ecuaciones, y se entiende que todos los términos sin superíndice pertenecen al nivel actual $k + 1$. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones hiperbólicas es expresado en su forma lineal como:

$$x_\xi x_\eta^k + x_\xi^k x_\eta - x_\xi^k x_\eta^k + y_\xi y_\eta^k + y_\xi^k y_\eta - y_\xi^k y_\eta^k = 0 \quad (3.31a)$$

$$x_\xi y_\eta^k + x_\xi^k y_\eta - x_\xi^k y_\eta^k - x_\eta y_\xi^k - x_\eta^k y_\xi + x_\eta^k y_\xi^k = F \quad (3.31b)$$

Aplicando el concepto de las ecuaciones 3.28 a las ecuaciones 3.31 podemos simplificar las últimas, quedando como

$$x_\xi x_\eta^k + x_\xi^k x_\eta + y_\xi y_\eta^k + y_\xi^k y_\eta = 0 \quad (3.32a)$$

$$x_\xi y_\eta^k + x_\xi^k y_\eta - x_\eta y_\xi^k - x_\eta^k y_\xi = F + F^k \quad (3.32b)$$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse de forma compacta como

$$[A] R_\xi + [B] R_\eta = H \quad (3.33)$$

donde:

$$R = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} x_\eta^k & y_\eta^k \\ y_\eta^k & -x_\eta^k \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x_\xi^k & y_\xi^k \\ -y_\xi^k & x_\xi^k \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ F + F^k \end{bmatrix}$$

Por definición, el sistema de ecuaciones descrito por la ecuación 3.33 es hiperbólico si los eigenvalores de $[B]^{-1}[A]$ son reales. Se observa que

$$[B]^{-1} = \frac{1}{DN} \begin{bmatrix} x_\xi^k & -y_\xi^k \\ y_\xi^k & x_\xi^k \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$[C] = [B]^{-1} [A] = \begin{bmatrix} x_\xi^k x_\eta^k - y_\xi^k y_\eta^k & x_\xi^k y_\eta^k + x_\eta^k y_\xi^k \\ x_\xi^k y_\eta^k + x_\eta^k y_\xi^k & -(x_\xi^k x_\eta^k - y_\xi^k y_\eta^k) \end{bmatrix}$$

donde

$$DN = (x_\xi^k)^2 + (y_\xi^k)^2$$

Los eigenvalores de $[C]$ son

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{(x_\eta^k)^2 + (y_\eta^k)^2}{DN}}$$

los cuales cumplen con la condición de ser siempre reales (para un sistema hiperbólico) siempre que

$$DN = (x_\xi^k)^2 + (y_\xi^k)^2 \neq 0$$

Para obtener un sistema de ecuaciones algebráico, debemos aplicar el método de diferencias finitas. Para la sustitución de las derivadas parciales respecto al eje ξ se utiliza una aproximación central de segundo orden y para el caso de las derivadas parciales respecto al eje η se hará uso de aproximaciones de primer orden tipo “backwards”, resultando la ecuación en

$$[A] \frac{R_{i+1,j} - R_{i-1,j}}{2\Delta\xi} + [B] \frac{R_{i,j} - R_{i,j-1}}{\Delta\eta} = [H]_{i,j} \quad (3.34)$$

que al ser multiplicada por la matriz $[B]^{-1}$ y reacomodada queda cómo

$$\frac{R_{i,j} - R_{i,j-1}}{\Delta\eta} + [B]^{-1} [A] \frac{R_{i+1,j} - R_{i-1,j}}{2\Delta\xi} = [B]^{-1} H_{i,j} \quad (3.35)$$

en donde las matrices A y B son evaluadas en la línea $(j-1)$. Esta ecuación se reacomoda y se le asignan nuevos términos, con el propósito de compactar a la misma, dando como resultado

$$[AA] R_{i-1,j} + [BB] R_{i,j} + [CC] R_{i+1,j} = [DD]_{i,j} \quad (3.36)$$

donde

$$[AA] = -\frac{1}{2\Delta\xi} [C]_{i,j-1}$$

$$[BB] = \frac{1}{\Delta\eta} [I]$$

$$[CC] = \frac{1}{2\Delta\xi} [C]_{i,j-1}$$

$$[DD] = [B]_{i,j-1}^{-1} H_{i,j} + \frac{R_{i,j-1}}{\Delta\eta}$$

una vez que se ha desarrollado la ecuación 3.36 para todas las instancias existentes a lo largo de i para un mismo nivel j , se obtiene un sistema de bloque tridiagonal

$$\begin{bmatrix} [BB]_2 & [CC]_2 & & \\ [AA]_3 & [BB]_3 & [CC]_3 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & [AA]_{m-2} & [BB]_{m-2} & [CC]_{m-2} \\ & & [AA]_{m-1} & [BB]_{m-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{m-2} \\ R_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [DD]_2 \\ [DD]_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ [DD]_{m-2} \\ [DD]_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

los términos $[DD]_2$ y $[DD]_{m-1}$ son afectados por las condiciones de frontera de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [DD]_2 &= [DD]_2 - [AA]_2 R_1 \\ [DD]_{m-1} &= [DD]_{m-1} - [CC]_{m-1} R_m \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones se resuelve avanzando en dirección del eje η , siempre y cuando la distribución de punto en la superficie y en las fronteras sea proporcionada.

Los puntos en las fronteras deben ser libres de flotar, es decir, deben calcularse al final de cada iteración. Esto se logra aplicando la condición de ortogonalidad a las fronteras $i = 1$ e $i = m$ para actualizar dichos puntos.

Un algoritmo para la solución de sistemas de ecuaciones de bloque tridiagonal es proporcionado en el apéndice C

Generación de mallas mediante EDP parabólicas

El esquema elíptico desarrollado por Thompson et. al. [19] ha sido de los más utilizados en la generación de mallas estructuradas, sin embargo presenta ciertas desventajas que han hecho que se desarrollen otros enfoques y esquemas que sean más rápidos para obtener una solución y que consuman menos recursos computacionales. De este razonamiento surge el método propuesto por Steger y Chausse [20] el cual utiliza ecuaciones hiperbólicas para este propósito, entre las ventajas que dicho método presenta con respecto al esquema elíptico destaca el uso de un procedimiento de marcha lo que se traduce en un menor tiempo de ejecución del código dado que el esquema elíptico utiliza métodos iterativos y el tiempo de ejecución de un método de marcha es del orden que toma a un método iterativo llevar a cabo una iteración. Por otro lado, el usar ecuaciones hiperbólicas tiene a su vez desventajas como son la propagación de discontinuidades que puedan presentarse en la frontera interna conforme la solución marcha de dentro hacia afuera, otro punto importante de desventaja es que a menudo se necesita introducir términos que representen una “viscosidad artificial” en la solución ya que las soluciones de este tipo de ecuaciones tienden a ser inestables dadas sus características matemáticas. Por último, no es posible definir una frontera externa.

En este trabajo se presenta el esquema desarrollado por Nakamura [21] y que fue retomado por Siladic [18], el cual propone un método de generación de mallas a través de la solución de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. El uso de ecuaciones parabólicas presenta ciertas ventajas, entre

ellas destaca el uso de métodos de solución de marcha, similares a los utilizados en la solución de ecuaciones hiperbólicas, dado que es una solución de problemas con condiciones iniciales, esto se traduce de igual manera en un tiempo de cómputo bajo. Por otro lado, las ecuaciones parabólicas comparten mucho del comportamiento matemático que está presente en las ecuaciones elípticas, que para el caso particular de la generación de mallas se traduce en el hecho de poseer un efecto difusivo que permite suavizar cualquier discontinuidad presente en la frontera interna conforme el procedimiento marcha de dentro hacia afuera. Por último, se posee la capacidad de definir las condiciones de frontera impuestas en la frontera externa.

En resumen, lo explicado arriba, es decir, el desarrollo de un algoritmo de generación de mallas mediante ecuaciones parabólicas tiene dos puntos de vital importancia, el primero de ellos es el bajo tiempo de ejecución computacional que es requerido para lograr la solución del problema, que representa una pequeña fracción del tiempo demandado por el esquema elíptico. El segundo es la baja demanda de memoria para llevar a cabo los cálculos requerido, y que además también es sustancialmente menor que el requerido por un esquema elíptico.

Se propone el siguiente conjunto de ecuaciones

$$a(\xi, \eta)x_\eta = b(\xi, \eta)x_{\xi\xi} + c(\xi, \eta)V_x(\xi, \eta) + d(\xi, \eta) \quad (3.40a)$$

$$a(\xi, \eta)y_\eta = b(\xi, \eta)y_{\xi\xi} + c(\xi, \eta)V_y(\xi, \eta) + d(\xi, \eta) \quad (3.40b)$$

donde a, b y c pueden ser constantes o alguna función de (ξ, η) , los valores (x, y) representan las coordenadas en el dominio físico mientras que los valores (ξ, η) representan las coordenadas en el plano computacional, por último V_x y V_y son considerados términos fuente. En este esquema, la frontera externa se impone como una restricción sobre el comportamiento de la solución en la dirección j mientras que la frontera interna funge como condición inicial del problema. Las ecuaciones 3.40 son discretizadas mediante el método de diferencias finitas, las derivadas parciales con respecto al eje η son sustituidas por aproximaciones tipo “backwards” mientras que las derivadas respecto al eje ξ son reemplazadas por aproximaciones centrales. Dadas las condiciones iniciales para x y y en $\eta = 0$, es decir, una vez proporcionada la nube de puntos que definen la frontera interna, se obtiene un sistema de bloque tridiagonal, el cual debe ser resuelto para cada valor de η contemplado.

Los valores iniciales son especificados como:

$$x(\eta, 0) = x_0(\xi) \quad (3.41a)$$

$$y(\eta, 0) = y_0(\xi) \quad (3.41b)$$

donde $x_0(\xi)$ y $y_0(\xi)$ las coordenadas de la superficie de la frontera, es decir, del perfil aerodinámico a analizar. Para entender el efecto de los términos fuente, se asigna un valor cero a las constantes b y c , a su vez $a = c = 1$, expresando las ecuaciones resultantes en términos de incrementos en lugar de términos diferenciales:

$$\Delta x = V_x(\xi, \eta)\Delta\eta \quad (3.42a)$$

$$\Delta y = V_y(\xi, \eta)\Delta\eta \quad (3.42b)$$

en las ecuaciones 3.42 se observa que conforme η aumenta, el cambio tanto en x como en y está determinado por V_x y V_y respectivamente, lo que implica que ambos términos fuente deben especificarse de tal modo que x y y aumenten en la dirección y magnitud deseados. Por otro lado, las segundas derivadas parciales $x_{\xi\xi}$ y $y_{\xi\xi}$ en las ecuaciones 3.40 tienen un efecto disipador para los intervalos en dirección ξ . Los valores de los términos fuente V_x y V_y pueden ser determinados mediante interpolación, ya sea polinomial o lineal, entre las fronteras interna y externa. Si se desea tener un control sobre la ortogonalidad del mallado, es posible la introducción de una frontera falsa para la frontera externa que permita lograr dicha característica, sumado a esto, es posible variar la distancia entre nodos en ambas direcciones ξ y η al discretizar las ecuaciones 3.40 sobre una malla no uniforme en el plano computacional.

En la mayoría de casos, y en general en la literatura encontrada en la generación de mallas, se asume una malla uniforme y en algunos casos se sugiere que el espacio entre nodos sea igual a la unidad, esto último con el objetivo de simplificar las ecuaciones. Sin embargo, estas consideraciones no son estrictamente necesarias sino que representan simplificaciones del problema, por lo que la generación de una malla cuasi uniforme en el plano computaciones, y que despues se utilice en el análisis de flujos como si de una malla uniforme se tratase, es tambien un enfoque válido.

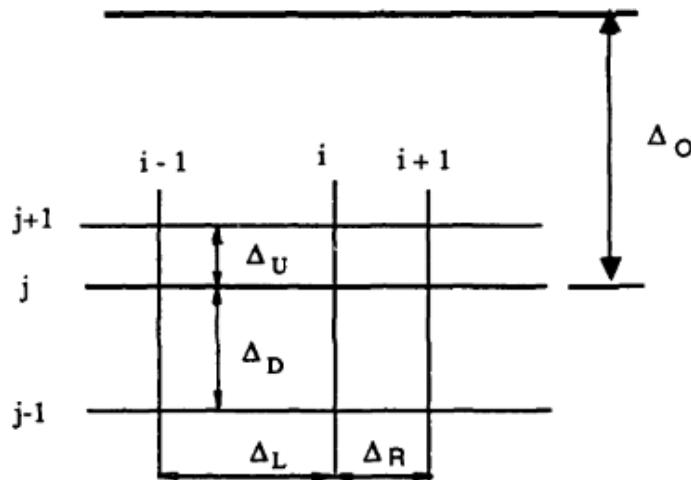


Figura 3.13: Generación de malla estructurada cuasi uniforme desarrollada mediante ecuaciones parabólicas [18]

En la figura 3.13 se muestra un ejemplo de malla no uniforme, donde ΔL y ΔR representan incrementos en la dirección i , a su vez ΔU y ΔD representan incrementos en términos de j para un punto (i, j) dado. Retomando lo expuesto en el capítulo 2, se pueden usar series de Taylor para aproximar los términos que incluyen derivadas en las ecuaciones gobernantes en el esquema parabólico, quedando de la siguiente manera:

$$f_x = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta R}$$

$$f_y = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta U}$$

$$f_x = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta L}$$

$$f_y = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta D}$$

$$f_{xx} = \frac{2}{\Delta R + \Delta L} \left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta R} - \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta L} \right)$$

$$f_{yy} = \frac{2}{\Delta D + \Delta U} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta U} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta D} \right)$$

$$f_{xy} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{(\Delta R + \Delta L)(\Delta D + \Delta U)}$$

con esto, las ecuaciones gobernantes 3.40 se discretizan de la siguiente manera

$$\frac{a(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{\Delta D} = \frac{2b}{\Delta L + \Delta R} \left[\frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\Delta R} - \frac{x_{i,j} - x_{i-1,j}}{\Delta L} \right] + c \frac{XB_{i,Jmax} - x_{i,j}}{\Delta O} + d \quad (3.43a)$$

$$\frac{a(y_{i,j} - y_{i,j-1})}{\Delta D} = \frac{2b}{\Delta L + \Delta R} \left[\frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\Delta R} - \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\Delta L} \right] + c \frac{YB_{i,Jmax} - y_{i,j}}{\Delta O} + d \quad (3.43b)$$

Para poder determinar los valores de los coeficientes a , b y c y para entender el método presente para el control de la densidad de mallado, se deben relacionar las ecuaciones gobernantes con un conjunto de ecuaciones conocidas en el plano computacional. Con este propósito es que se seleccionan las ecuaciones de Laplace en el modelo de generación de mallas mediante ecuaciones elípticas (ecuaciones 3.17), intentando obtener un método equivalente al obtenido en el esquema elíptico, en el que cualquier línea m en la dirección η sea forzada a moverse hacia una línea $m-1$. En la figura 3.14 se muestra un representación de lo descrito, siendo para un punto (i,j) , F_{i-1} y F_i incrementos en la dirección ξ y a su vez g_{j-1} y g_j incrementos en la dirección η .

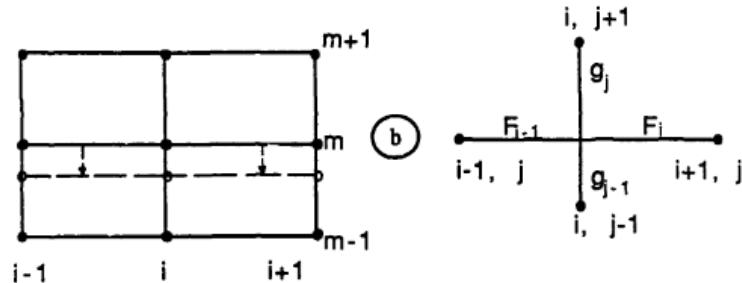


Figura 3.14: Generación de malla estructurada no uniforme desarrollada mediante ecuaciones elípticas [18]

Las ecuaciones del modelo de generación de mallas elíptico (ecuaciones 3.17), bajo este nuevo esquema basado en la generación de una malla cuasi uniforme se discretizan en (ξ, η) dando como resultado

$$\frac{2\alpha}{F_i + F_{i-1}} \left[\frac{s_{i-1,j} - s_{i,j}}{F_{i-1}} + \frac{s_{i+1,j} - s_{i,j}}{F_i} \right] + \beta \left[\frac{s_{i+1,j+1} - s_{i+1,j-1} - s_{i-1,j+1} + s_{i-1,j-1}}{(F_{i-1} + F_i)(g_{j-1} + g_j)} \right] + \frac{2\gamma}{g_j + g_{j-1}} \left[\frac{s_{i,j-1} - s_{i,j}}{g_{j-1}} + \frac{s_{i,j+1} - s_{i,j}}{g_j} \right] = 0 \quad (3.44)$$

A partir de la ecuación 3.44 se propone un procedimiento de marcha, reemplazando en dicha ecuación los valores $x_{i,j+1}$ y $y_{i,j+1}$ por valores conocidos $XO_{i,j+1}$ y $YO_{i,j+1}$ los cuales son obtenidos mediante interpolación lineal entre los valores de la frontera interna (perfil aerodinámico) y la frontera externa (tipología de la malla). La distancia g_j puede cambiarse gradualmente a lo largo de la malla para una mayor versatilidad en la generación de la ésta.

En el caso más sencillo, aquel en el que no interesa forzar la ortogonalidad en las fronteras, a las variables XO y YO se les asignan los valores ($XB_{i,Jmax} YB_{i,Jmax}$) en la frontera externa. Reordenando los términos, y donde s representa cualquier coordenada x o y

$$\frac{2\alpha}{F_i + F_{i-1}} \left[\frac{s_{i-1,j} - s_{i,j}}{F_{i-1}} + \frac{s_{i+1,j} - s_{i,j}}{F_i} \right] + \frac{2\gamma}{g_{j-1} + G_j} \left[\frac{-s_{i,j}}{g_{j-1}} - \frac{s_{i,j}}{G_j} \right] = -\beta \left[\frac{SO_{i+1,j+1} - SO_{i-1,j-1} - s_{i+1,j-1} + s_{i-1,j-1}}{(F_{i-1} + F_i)(g_{j-1} + G_j)} \right] - \frac{2\gamma}{g_{j-1} + G_j} \left[\frac{s_{i,j-1}}{g_{j-1}} + \frac{SO_{i,j+1}}{G_j} \right] \quad (3.45)$$

donde

$$G_j = g_j + g_{j+1} + \dots + g_{Jmax-1} = \eta_{max} - \eta_j$$

$$g_{j-1} = \eta_j - \eta_{j-1}; \quad F_i = \xi_{i+1} - \xi_i; \quad F_{i-1} = \xi_i - \xi_{i-1}$$

G_j representa la distancia entre las líneas (i,j) e (i,JO) en el plano computacional, por lo tanto $SO_{i,j} = XO_{i,j}$ o $YO_{i,j}$. Si comparamos ambos modelos discutidos en esta sección, es decir el modelo parabólico (ecuaciones 3.43) y el modelo elíptico (ecuaciones 3.45) se puede establecer una clara relación, al colocar de un lado las incógnitas de cada ecuación, y del otro todos los valores conocidos, es decir

$$-\left(\frac{b}{\Delta L} + \frac{b}{\Delta R}\right) \frac{2s_{i,j}}{\Delta L + \Delta R} - \left(\frac{a}{\Delta D} + \frac{c}{\Delta O}\right) s_{i,j} + \frac{b}{\Delta R} \frac{2s_{i-1,j}}{\Delta R + \Delta L} + \frac{b}{\Delta R} \frac{2s_{i+1,j}}{\Delta R + \Delta L} = -c \frac{SB_{i,Jmax}}{\Delta O} - a \frac{s_{i,j-1}}{\Delta D} - d \quad (3.46)$$

$$-\left(\frac{\alpha}{F_{i-1}} + \frac{\alpha}{F_i}\right) \frac{2s_{i,j}}{F_i + F_{i-1}} - \left(\frac{\gamma}{g_{j-1}} + \frac{\gamma}{G_j}\right) \frac{2s_{i,j}}{G_j + g_{j-1}} + \frac{\alpha}{F_{i-1}} \frac{2s_{i-1,j}}{F_i + F_{i-1}} + \frac{\alpha}{F_i} \frac{2s_{i,j}}{F_i + F_{i-1}} = -\frac{2\gamma}{g_{j-1} + G_j} \left[\frac{SO_{i,j+1}}{G_j} + \frac{s_{i,j-1}}{g_{j-1}} \right] - \beta \left[\frac{SO_{i+1,j+1} - SO_{i-1,j+1} - s_{i+1,j-1} + s_{i-1,j-1}}{(F_i + F_{i-1})(g_{j-1} + G_j)} \right] \quad (3.47)$$

de este reacomodo se puede observar que ambas ecuaciones tienen la misma forma, por lo que es posible establecer una relación entre sus coeficientes

$$b = \alpha$$

$$a = c = \frac{2\gamma}{G_j + g_{j-1}}$$

$$d = \beta \left[\frac{SO_{i+1,j+1} - SO_{i-1,j+1} - s_{i+1,j-1} + s_{i-1,j-1}}{(F_i + F_{i-1})(G_j + g_{j-1})} \right]$$

donde α , β y γ son los coeficientes de las ecuaciones 3.17. El sistema representado por la ecuación 3.45 representa un sistema tridiagonal de matrices 2x2 el cual se desarrolla del siguiente modo

$$A = \frac{2\alpha}{F_{i-1}(F_i + F_{i-1})} ; \quad C = \frac{2\alpha}{F_i(F_i + F_{i-1})}$$

$$B = \frac{-2\alpha}{F_i + F_{i-1}} \left(\frac{1}{F_i} + \frac{1}{F_{i-1}} \right) - \frac{2\gamma}{G_j + g_{j-1}} \left(\frac{1}{G_j} + \frac{1}{g_{j-1}} \right)$$

$$D_x = -\beta \frac{XO_{i+1,j+1} - XO_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}}{(F_i + F_{i-1})(G_j + g_{j-1})} - \frac{2\gamma}{G_j + g_{j-1}} \left[\frac{x_{i,j-1}}{g_{j-1}} + \frac{XO_{i,j+1}}{G_j} \right]$$

$$D_y = -\beta \frac{YO_{i+1,j+1} - YO_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}}{(F_i + F_{i-1})(G_j + g_{j-1})} - \frac{2\gamma}{G_j + g_{j-1}} \left[\frac{y_{i,j-1}}{g_{j-1}} + \frac{YO_{i,j+1}}{G_j} \right]$$

finalmente, las ecuaciones gobernantes del sistema parabólico pueden expresarse como:

$$Ax_{i-1,j} + Bx_{i,j} + Cx_{i+1,j} = D_x \quad (3.49a)$$

$$Ay_{i-1,j} + By_{i,j} + Cy_{i+1,j} = D_y \quad (3.49b)$$

Las ecuaciones 3.49 se resuelven simultáneamente para todos los puntos de la malla para el mismo nivel η (línea j) resolviendo el sistema tridiagonal para cada $x_{i,j}$ y $y_{i,j}$. La solución comienza en $j = 1$ (justo después de la frontera interna) y finaliza en $j = Jmax - 2$ (un nivel antes de la frontera externa). Los coeficientes α , β y γ se calculan usando las coordenadas de puntos adyacentes que ya se han generado, dichos valores son sustituidos en las aproximaciones por diferencias finitas utilizadas para reemplazar las primeras derivadas parciales, las cuales para este sistema quedan expresadas como

$$x_\xi = \frac{x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j-1}}{F_i + F_{i-1}} \quad (3.50a)$$

$$y_\xi = \frac{y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1}}{F_i + F_{i-1}} \quad (3.50b)$$

$$x_\eta = \frac{XO_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{g_{j-1} + G_j} \quad (3.50c)$$

$$y_\eta = \frac{YO_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{g_{j-1} + G_j} \quad (3.50d)$$

Los términos no uniformes en la separación de la malla descritos arriba tienen un efecto similar al control de la densidad de mallado mediante funciones exponenciales presentado por Thompson, Thames y Mastin [19] para la generación de mallas mediante el esquema elíptico.

Ortogonalidad de la Malla

“Al analizar y resolver flujos viscosos o capas límite, la ortogonalidad de las líneas de la malla en las cercanías a las superficies de cuerpos es deseable para representar todas las derivadas normales de manera simple y precisa” [18]. Si se desea lograr esto, se debe tener la capacidad de controlar la orientación de las líneas, lo cual puede lograrse introduciendo una frontera externa modificada lo que permite determinar los valores de los términos fuente. Es decir, si la frontera externa modificada se posiciona de manera que sus puntos se localizan perpendicularmente a sus correspondientes sobre la superficie del cuerpo, las líneas se alejarán del cuerpo de manera ortogonal. Esto es mejor ilustrado en la figura 3.15.

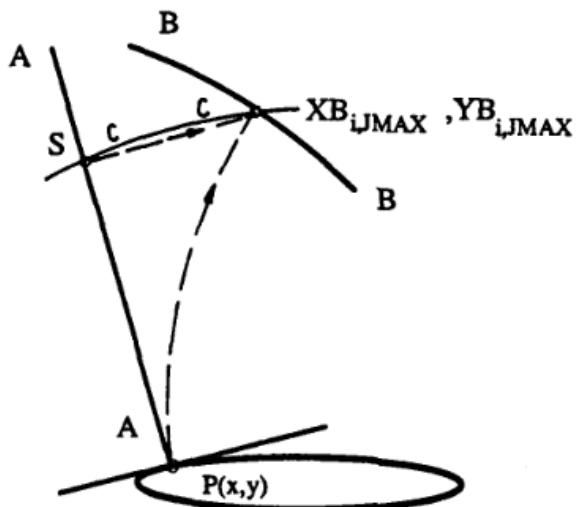


Figura 3.15: Control de ortogonalidad en la generación de mallas por ecuaciones parabólicas [18]

Si nos ubicamos en un punto (i, j) con sus correspondientes coordenadas $(XO_{i,j+1}, YO_{i,j+1})$, se observa de la figura 3.15 una recta AA que es perpendicular a la superficie de la frontera interna la cual nace del punto $(i, 0)$, punto que corresponde a la misma línea $\xi = cte$ del punto en el que nos ubicamos. También podemos observar en la figura un arco de circunferencia CC , dicho arco tiene su centro en el punto $(i, 0)$ y pasa por las coordenadas $(XB_{i,Jmax}, YB_{i,Jmax})$ de la frontera externa no modificada. La intersección de la línea AA y del arco CC representa los valores dados para las coordenadas $(XO_{i,j+1}, YO_{i,j+1})$ con el uso de una frontera modificada.

3.7. Calidad de las Mallas

La calidad de la malla es un tema de vital importancia en la generación de las mismas, ya que representa un indicativo de la confiabilidad y la usabilidad de la malla. Por lo tanto es necesario

desarrollar métodos que permitan analizar dicha característica en las mallas generadas con el fin de poder modificar las anomalías y errores que se presenten.

Esto conlleva la necesidad de determinar las características correctas con las cuales se evaluará la calidad, y entender como los resultados obtenidos se relacionan con los errores que puedan presentarse durante las simulaciones de flujos.

Las características que más suelen evaluarse son:

- *Skewness*
- *Alargamiento*
- *Torsión*
- *Aspect Ratio*
- *Volúmen de Celda*
- *Densidad de Nodos*

En el caso de mallas estructuradas, dados los conceptos con los que se lleva a cabo su generación, se pueden definir muchas de las características de la malla tomando la transformación de coordenadas como propiedades de las curvas, supercicies y volúmenes. Estos valores se determinan mediante los elemertos del tensor de la métrica de la transformación y las derivadas de éste. [15]

Aspect Ratio

El aspect ratio es un valor característico de cada celda, mide que tan alejada está la forma de la celda de una figura que sirve de base para la comparación. Para mallas bidimensionales, las celdas pueden ser triangulares o cuadrilaterales, en el caso de celdas triangulares la figura base suele ser un triángulo equilátero, mientras que para celdas de 4 lados, algunas fuentes toman como figura base el rombo, mientras que otras fuentes toman como base el cuadrado.

Por ejemplo, Liseikin [15], presenta un método que toma como referencia el rombo, dicho método viene dado por la ecuación

$$Q_{as}^l = \frac{g_{ii}}{g_{jj}} + \frac{g_{jj}}{g_{ii}} = \frac{(g_{ii} + g_{jj})^2}{g_{ii}g_{jj}} - 2 \quad (3.51)$$

esta ecuación presenta la desigualdad $Q_{as}^l \geq 2$ la cual se vuelve una igualdad si, y solo si, $g_{ii} = g_{jj}$, lo cual se traduce a que el paralelogramo es un rombo. Por lo tanto, esta ecuación indica qué tan alejada está la forma de la celda de un rombo.

Por su parte ANSYS, uno de los programas más reconocidos en el ámbito de la ingeniería asistida por computadora (CAE por sus siglas en inglés), considera el aspect ratio como una medida del alargamiento de la celda, y lo calcula como la relación entre entre el valor máximo y el valor mínimo de alguno de diferentes valores como pueden ser: distancia entre el centroide de la celda a los nodos, distancia entre el centroide de la celda y los centroides de las caras que la forman. La figura 3.16 es una representación gráfica de este método.

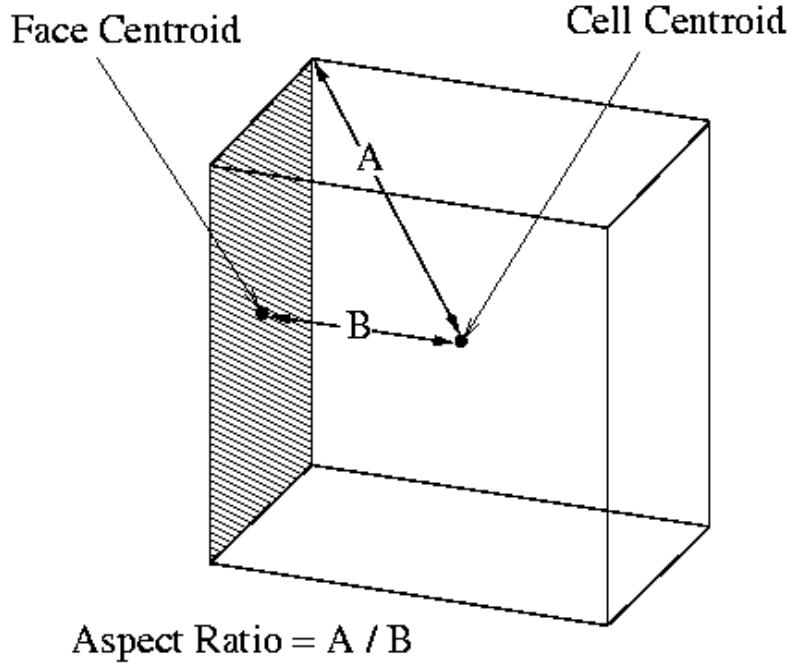


Figura 3.16: Cálculo de aspect ratio para una celda tridimensional en ANSYS

Otro método que se debe resaltar es el empleado en la librería “The Verdict Quality Library”, esta librería contiene rutinas para evaluar la calidad geométrica de diferentes tipos de celdas como pueden ser triangulos, cuadrilateros, tetahedros y exahedros. Para el cálculo del aspect ratio de celdas formadas por cuadrilateros utiliza la siguiente fórmula

$$q = \frac{L_{\max} (L_0 + L_1 + L_2 + L_3)}{4A} \quad (3.52)$$

donde

$$L_{\max} = \max (L_0, L_1, L_2, L_3)$$

$$A = \frac{1}{2} |\vec{L}_0 \times \vec{L}_1| + \frac{1}{2} |\vec{L}_2 \times \vec{L}_3|$$

la figura 3.17 muestra graficamente los elementos que de una celda formada por un cuadrilatero, con los cuales se calculan las metricas propuestas por esta librería.

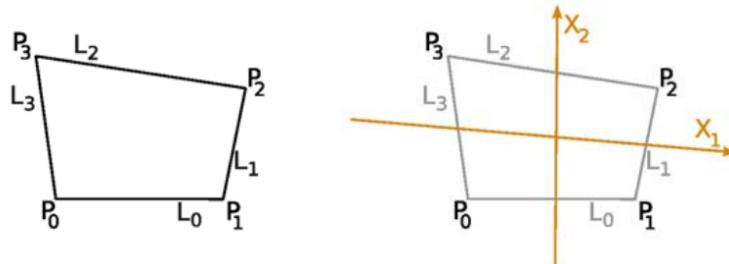


Figura 3.17: Estructura de celda cuadrilátera en Verdict. Del lado derecho se muestran los nodos y los elementos que la forman. Del lado izquierdo se muestran los ejes principales de la misma [22]

Esta librería y sus métodos son utilizados por diversos programas, entre ellos destaca el programa SALOME, el cual es un software de código abierto desarrollado para las etapas de preproceso y postproceso en análisis computacionales de ingeniería.

3.7.1. Skewness

El “skew” puede interpretarse geométricamente como el sesgo de la celda, es decir, se interpreta como la desviación de la simetría, dicha simetría depende del tipo de celda que contenga la malla, por ejemplo para celdas triangulares la simetría corresponde a una celda equilátera la cual por lo tanto se considera no sesgada. En el caso en el que la malla está formada por celdas cuadriláteras, se considera una celda no sesgada a una celda cuadrada o rectangular.

Cengel [6] presenta una fórmula para calcular el “skew” de la celda mediante la siguiente formula

$$Q_{EAS} = MAX \left(\frac{\theta_{max} - \theta_{igual}}{180^\circ - \theta_{igual}}, \frac{\theta_{igual} - \theta_{min}}{\theta_{igual}} \right) \quad (3.54)$$

donde θ_{min} y θ_{max} son los ángulos mínimo y máximo entre los lados de las celdas, mientras que θ_{igual} es el ángulo entre los lados de una celda ideal, es decir no sesgada, el cual para celdas cuadriláteras es $\theta_{igual} = 90^\circ$ y para celdas triangulares corresponde a $\theta_{igual} = 60^\circ$.

Los resultados de esta fórmula arrojan valores entre 0 y 1, donde 0 representa una celda sin sesgo, es decir que la celda es un cuadrado o un rectángulo si la malla se compone de cuadriláteros. Celdas muy distorsionadas o alejadas de dicha simetría tienden a tener valores cercanos a la unidad.

Por su parte, “The Verdict Quality Library” presenta su propio método para evaluar el “skew” de una celda. Este método evalua el ángulo existente entre los ejes principales de la celda y de manera más precisa, evalua el valor del coseno de dicho ángulo. La figura 3.17 muestra gráficamente los elementos que conforman una celda.

El método usado por la librería es el siguiente. Primero se deben normalizar los ejes principales \vec{X}_1 y \vec{X}_2 , los cuales están definidos por

$$\vec{X}_1 = (\vec{P}_1 - \vec{P}_0) + (\vec{P}_2 - \vec{P}_3) \quad (3.55a)$$

$$\vec{X}_2 = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) + (\vec{P}_3 - \vec{P}_0) \quad (3.55b)$$

y normalizados se definen como

$$\hat{X}_1 = \frac{\vec{X}_1}{\|\vec{X}_1\|} \quad (3.56a)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{\vec{X}_2}{\|\vec{X}_2\|} \quad (3.56b)$$

Con esto, el “skew” está dado por

$$q = |\hat{X}_1 \cdot \hat{X}_2| \quad (3.57)$$

En este método el rango de valores también se encuentra entre 0 y 1, sin embargo a diferencia del método propuesto por Cengel, en éste una celda sin sesgo presenta un valor $q = 1$, mientras que los valores de q para celdas muy sesgadas tienden a 0.

Capítulo 4

Análisis de Flujo Potencial

El modelo de flujo potencial es la más simple consideración de flujo no viscoso en tomar en cuenta los efectos de compresibilidad.

Para el caso de flujos externos, en este caso el flujo de una corriente de aire alrededor de un perfil aerodinámico, existen ciertas consideraciones que permiten tratar el flujo como no viscoso e irrotacional.

Se sabe que la condición de irrotacionalidad requiere la ausencia de viscosidad, así como de gradientes de velocidad en la dirección normal al flujo. Teóricamente estas condiciones en el flujo son imposibles de conseguir, sin embargo en flujos de fluidos con valores relativamente pequeños de viscosidad (como el agua y el aire) los efectos de la capa límite suceden en una sección en teoría demasiado pequeña, con lo que dicha sección puede ser despreciada durante el análisis. En cuanto al resto del flujo, la condición de irrotacionalidad, así como la no consideración de los efectos viscosos, son simplificaciones válidas.

Como ya se mencionó, la condición principal que debe tener el flujo para poder ser considerado potencial y no viscoso es la irrotacionalidad. De acuerdo al teorema de Kelvin, si el flujo es irrotacional en un momento, continuara siendo irrotacional y por lo tanto también será isentrópico.

Estas consideraciones teóricas llevan consigo una serie de simplificaciones a las ecuaciones de Navier Stokes que facilitan el análisis de diversos flujos. En primera instancia, al decirse que el flujo es no viscoso se debe despreciar los efectos de los esfuerzos cortantes, dicha simplificación nos permite trabajar con las ecuaciones de Euler. Si además de esto, se toma como irrotacional el flujo, se obtienen las ecuaciones de Bernoulli.

Para flujos no viscosos, la función de potencial puede definirse como:

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \quad (4.1)$$

La forma conservativa de la ecuación del potencial puede obtenerse a partir de la ecuación de la continuidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} \phi) = 0 \quad (4.2)$$

La ecuación de momento y energía pueden reducirse a la siguiente ecuación para la entalpía de estancamiento:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H = H_0 \quad (4.3)$$

donde H_0 representa la entalpía de estancamiento y es un valor constante para todo el fluido.

La densidad es una función tanto de $\vec{\nabla}\phi$ como de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, que para el caso de un gas perfecto (dado que el flujo potencial se considera isentrópico) con valores definidos para la densidad y entalpía de estancamiento ρ_0 y H_0 se escribe como:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{2H_0} - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}}{H_0} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (4.4)$$

Para el caso de un flujo estacionario la ecuación del flujo potencial resulta:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla}\phi) = 0 \quad (4.5)$$

mientras que la ecuación de la energía, a través de las relaciones para gas isentrópico, queda como

$$H \equiv h + \frac{\vec{v}^2}{2} = H_0 \quad (4.6)$$

Dada una transformación de sistemas coordenados como la descrita en capítulos anteriores:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned}$$

la ecuación de flujo potencial puede ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \frac{V}{J} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Las componentes de la velocidad en el dominio computacional U y V pueden definirse en función de las componentes del sistema cartesiano u y v como:

$$U = \xi_x \phi_x + \xi_y \phi_y = \xi_x u + \xi_y v \quad (4.8a)$$

$$V = \eta_x \phi_x + \eta_y \phi_y = \eta_x u + \eta_y v \quad (4.8b)$$

A partir de las ecuaciones 4.1 y 4.5 se puede obtener una ecuación para flujo potencial estacionario

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(g^{11} \phi_\xi + g^{12} \phi_\eta) \frac{\rho}{J} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(g^{21} \phi_\xi + g^{22} \phi_\eta) \frac{\rho}{J} \right] = 0 \quad (4.9)$$

ya que también se tiene:

$$U = g^{11} \phi_\xi + g^{12} \phi_\eta \quad (4.10)$$

$$V = g^{21} \phi_\xi + g^{22} \phi_\eta \quad (4.11)$$

A su vez la matriz del tensor de la transformación $[g]$ tiene las siguientes componentes

$$g^{11} = \xi_x^2 + \xi_y^2 \quad (4.12a)$$

$$g^{12} = g^{21} = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y \quad (4.12b)$$

$$g^{22} = \eta_x^2 + \eta_y^2 \quad (4.12c)$$

En la mayoría de los flujos de análisis práctico, es generalmente necesario trabajar con la transformación inversa:

$$x = x(\xi, \eta) \quad (4.13a)$$

$$y = y(\xi, \eta) \quad (4.13b)$$

la cual es obtenida a través de las transformaciones

$$\xi_x = J y_\eta \quad \xi_y = -J x_\eta \quad (4.14)$$

$$\eta_x = -J y_\xi \quad \eta_y = J x_\xi \quad (4.15)$$

con el Jacobiano

$$J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \quad (4.16)$$

4.1. Condiciones de Frontera

Para que una simulación se lleve a cabo es necesario establecer un dominio computacional, el cual contará con una o más fronteras Γ , sobre dichas fronteras se deben especificar las correspondientes condiciones de frontera que dotarán de sentido físico a la simulación, es decir, para este caso se deben especificar condiciones de frontera que coincidan con la teoría de flujo potencial.

4.1.1. Condiciones en las lejanías

En la frontera externa el campo de fluido se asume como conocido. Para casos de flujos externos, como lo es el caso de un perfil inmerso en un flujo uniforme con velocidad \vec{V}_∞ , el flujo potencial está definido mediante:

$$\phi = \vec{V}_\infty \cdot \vec{x} + \phi_0 \quad (4.17)$$

donde ϕ_0 es una constante arbitraria y \vec{x} representa la distancia a un punto de la frontera con respecto a una referencia establecida previamente.

Para cuerpos que producen sustentación con una circulación Γ_B , se debe tomar en cuenta la contribución de dicha circulación al flujo potencial en una distancia lejana. En el caso de perfil bidimensionales esto se logra mediante la adición de un vórtice, corregido por efectos de compresibilidad:

$$\phi_\infty = \vec{V}_\infty \cdot \vec{x} + \frac{\Gamma_B}{2\pi} \tan^{-1} \left[\sqrt{1 - M_\infty^2} \tan(\theta - \alpha_\infty) \right] + \phi_0 \quad (4.18)$$

donde θ es la posición angular de un punto en la lejanía, Γ_B es la circulación y M_∞ es el número de Mach correspondiente a la velocidad de la corriente libre \vec{V}_∞ con un ángulo de incidencia α_∞ .

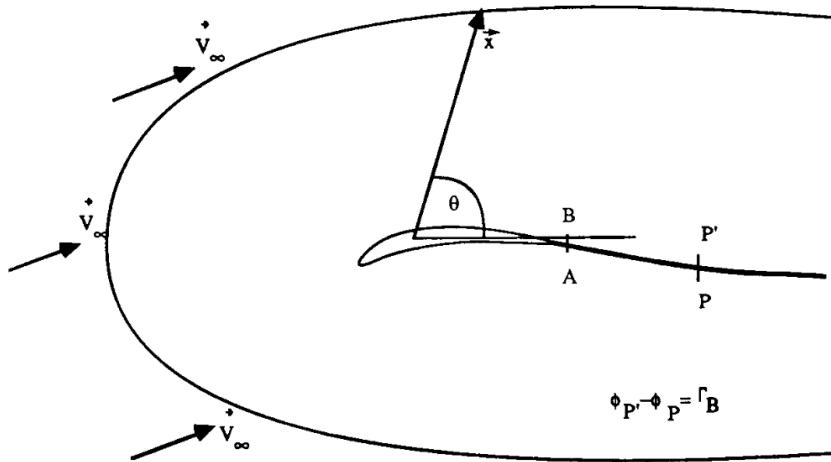


Figura 4.1: Condiciones de frontera de flujo potencial para perfil aerodinámico bidimensional [23]

4.1.2. Condiciones para perfiles aerodinámicos

Circulación y condición de Kutta

La condición de Kutta implica que en flujo no viscoso e incompresible alrededor de un perfil alar, el fluido sale del borde de salida de manera suave.

Supongase el flujo sobre un perfil aerodinámico, en el momento en que el flujo ha comenzado y en los primeros instantes, el fluido intentará rodear el borde de salida, desde el lado inferior al superior, esto implica la existencia de un punto de estancamiento en el extrados del perfil. Sin embargo, este comportamiento no es sostenible en un flujo real por mucho tiempo. En realidad conforme el flujo termina de desarrollarse hasta llegar a un estado estacionario, dicho punto de estancamiento va recorriendose hacia la parte posterior hasta llegar al borde de salida, a partir de que se logra esta condición se cumple la condición de Kutta, es decir el fluido deja el borde de salida de manera suave.

La figura 4.2 muestra este comportamiento, en la subfigura 4.2.1 se ve el instante inicial y se evidencia la presencia de un punto de estancamiento en el extrados del perfil. Conforme se avanza en los cuadros se observa como dicho punto de estancamiento se desplaza hacia la sección posterior del perfil hasta llegar al cuadro 4.2.6 donde se ha alcanzado el flujo estacionario. Es en este último cuadro donde se observa el cumplimiento de la condición de Kutta.

En resumen lo que la condición de Kutta establece es que la circulación alrededor de un perfil es la adecuada justo para asegurar que el flujo deja de manera suave el borde de salida. [24]

Condiciones de frontera

Los perfiles aerodinámicos requieren la presencia de una circulación cuya intensidad es definida por la condición de Kutta. El origen de dicha circulación se da a partir del inicio del flujo alrededor del perfil, y tiene explicación gracias al teorema de Kelvin de la circulación, el cual dice que la razón de cambio de la circulación con respecto al tiempo alrededor de una curva cerrada conformada por

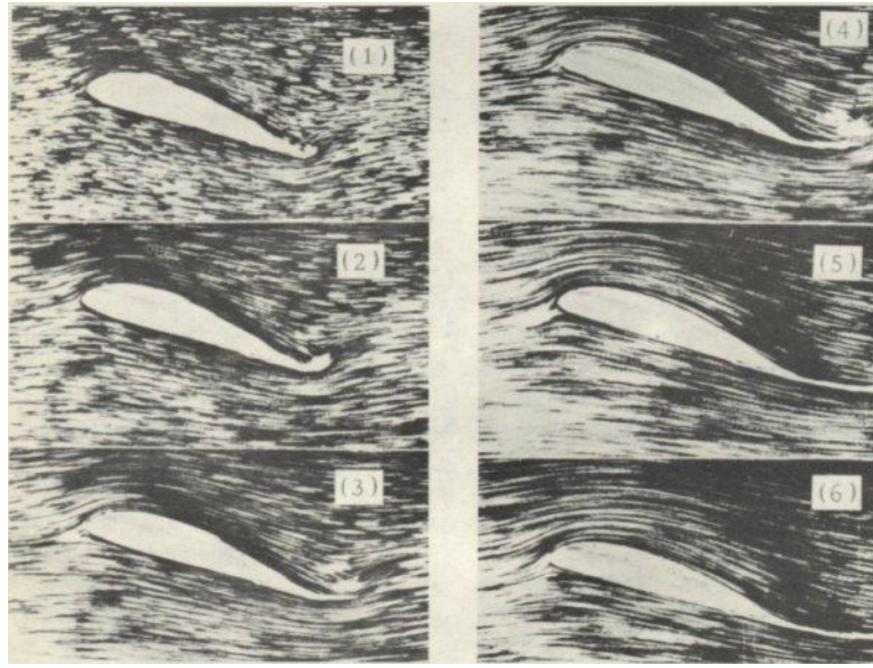


Figura 4.2: Desarrollo de flujo estacionario sobre un perfil aerodinámico, desde el reposo hasta una velocidad estacionaria.

el mismo fluido es igual a cero

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (4.19)$$

En un instante inicial, cuando el flujo alrededor del perfil está en reposo y su velocidad es igual a cero, la circulación alrededor de una curva arbitraria que rodee al perfil tambien será cero, tal como se muestra en la figura 4.3.

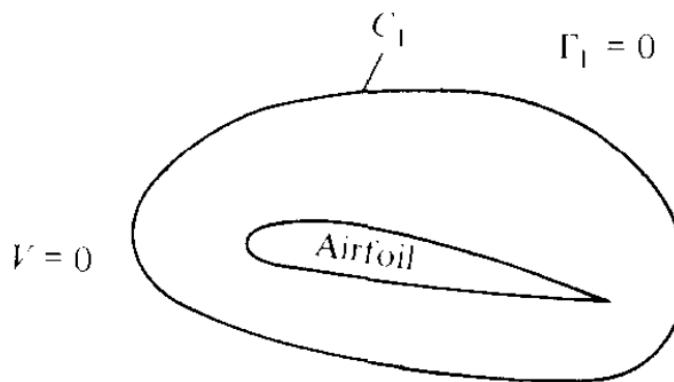


Figura 4.3: Fluido en reposo relativo a un perfil alar [24]

Al pasar los primeros instantes el fluido intentará rodear el borde de salida del perfil con lo cual se formará una región con grandes gradientes de velocidad y vorticidad en el borde de salida. Esta región es característica de las partículas que la forman con lo cual se comienza a desplazar

corriente abajo hasta que la condición de Kutta se cumple, durante este proceso esta región adopta la forma de un vórtice al cual se le conoce como vórtice de inicio.

Una vez lograda la condición de Kutta, el vórtice de inicio ya no está presente en el perfil sino que continuara alejándose corriente abajo conforme el tiempo avanza. Sin embargo, tal como se muestra en la figura 4.4, la curva que conformaba en el reposo al fluido alrededor del perfil se ha deformado, y ahora contiene además al vórtice de inicio. Se sabe gracias al teorema de Kelvin que la circulación alrededor de la curva C_2 debe ser cero, pero si esta curva la dividimos en C_3 y C_4 contenidos al vórtice y al perfil respectivamente, observamos que la circulación alrededor de C_3 tendrá un valor finito debido al vórtice y por lo tanto alrededor de la curva C_4 debe existir una circulación de igual magnitud en sentido contrario, con lo que se logra que alrededor de la curva C_2 la circulación sea cero.

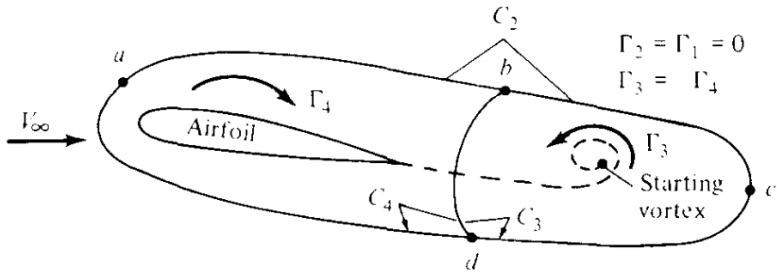


Figura 4.4: Flujo alrededor de perfil momentos después [24]

En simulaciones computacionales un corte debe definirse, a lo largo del cual existirá una discontinuidad del potencial dado por

$$\phi_{P'} - \phi_P = \Gamma_B = \phi_B - \phi_A \quad (4.20)$$

con lo cual se logra tomar en cuenta los efectos del vórtice de inicio en los resultados.

El valor de la circulación debe ser actualizado en cada iteración del proceso de solución, esto se logra imponiendo velocidades o presiones iguales en ambos lados del borde de salida.

4.2. Discretización para flujo subsonico estacionario

La ecuación de flujo potencial en su variable estacionaria para flujo subsonico es una ecuación diferencial parcial elíptica. Esto presenta la facilidad de utilizar diferencias finitas como método de discretización del problema, sin embargo es importante recalcar que este no es el único método válido y que tambien es posible llevar a cabo la discretización mediante los métodos de volúmenes y elementos finitos.

Ya que los flujos subsónicos presentan generalmente un comportamiento suave es posible realizar las simulaciones con mallas que tengan una baja densidad de celdas, a excepción ciertas zonas donde se generan grandes gradientes como lo son esquinas, y bordes de ataque y de salida de perfiles alares, entre otros.

Sin embargo la discretización de la ecuación de flujo potencial supone un esfuerzo mayor, debido a que a partir de la malla generada previamente se deben calcular otras dos mallas escalonadas en los puntos medios. Para una malla con puntos (i, j) donde $i = 1, \dots, M$ y $j = 1, \dots, N$ se tendrán puntos escalonados $(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2})$. En los puntos pertenecientes a la malla original se calcula la función de potencial, mientras que en las mallas intercaladas se calcula tanto la densidad como la velocidad.

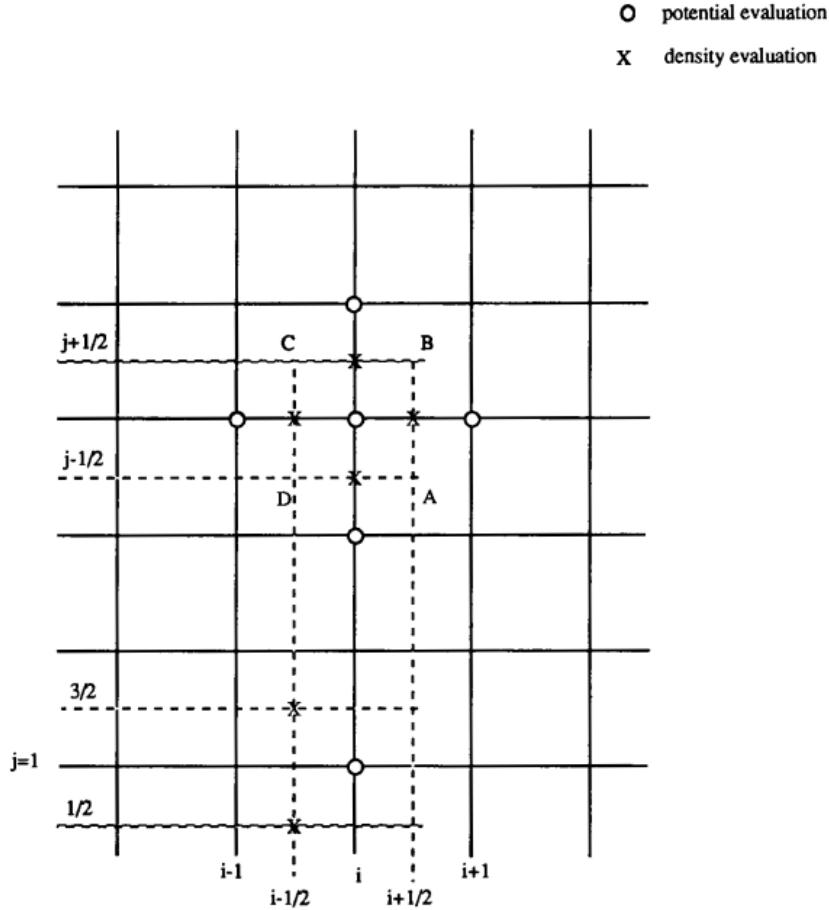


Figura 4.5: Malla original y mallas escalonadas [23]

La figura 4.5 es una representación de la localización de los puntos de las mallas intercaladas. De dicha figura se puede deducir la existencia de dos mallas escalonadas, una malla vertical y otra horizontal. En la figura se observa una “molecula” delimitada por los puntos $ABCD$, sobre dicho contorno se encuentran marcados con una X los puntos de intersección de las mallas escalonadas con la malla original, es importante resaltar que los puntos $ABCD$ no forman parte de ninguna de las mallas y su único propósito en la imagen es delimitar una partícula.

Si a la ecuación 4.7 se le eliminan los términos relacionados con el cambio respecto al tiempo, dado que se está calculando flujo estacionario, y además utilizamos una diferencia de tipo central para los términos de la densidad y las velocidades se obtiene

$$\frac{(\rho_J^U)_{i+\frac{1}{2},j} - (\rho_J^U)_{i-\frac{1}{2},j}}{2\Delta\xi} + \frac{(\rho_J^V)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\rho_J^V)_{i,j-\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta} = 0 \quad (4.21)$$

la cual se simplifica si se toman $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$, quedando

$$\left(\rho \frac{U}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\rho \frac{U}{J}\right)_{i-\frac{1}{2},j} + \left(\rho \frac{V}{J}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left(\rho \frac{V}{J}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} = 0 \quad (4.22)$$

A partir de las ecuaciones 4.10 y 4.11 (mostradas nuevamente por conveniencia) se obtienen los valores correspondientes a las velocidades mediante la discretización de las mismas por aproximaciones centrales.

$$\begin{aligned} U &= g^{11}\phi_\xi + g^{12}\phi_\eta \\ V &= g^{21}\phi_\xi + g^{22}\phi_\eta \end{aligned}$$

En la malla intercalada vertical, es decir donde la variable ξ es constante, la variación del potencial respecto a ξ se obtiene calculando por aproximaciones centrales de dicha variación en los puntos adyacentes pertenecientes a la malla original y calculando la media de las mismas. Para la variación con respecto a η se calcula únicamente una aproximación central entre los puntos adyacentes. Esto es, para un punto $(i, j + \frac{1}{2})$ las variaciones con respecto a ξ se obtienen promediando las aproximaciones centrales con respecto a ξ de los puntos (i, j) e $(i, j + 1)$; para las variaciones respecto a η se hace una aproximación central entre los puntos (i, j) e $(i, j + 1)$.

Por otro lado, en la malla intercalada horizontal, donde $\eta = cte$, la variación del potencial respecto a ξ ϕ_ξ es simplemente la aproximación central de dicha variación a partir de los puntos adyacentes de la malla original. En el caso de la variación del potencial respecto a η ϕ_η , primero se debe calcular dicha variación en los puntos adyacentes de la malla y posteriormente obtener la media de las mismas. Es decir, para un punto $(i + \frac{1}{2}, j)$, las variaciones con respecto a ξ son una aproximación central entre los puntos (i, j) e $(i + 1, j)$ y para las variaciones con respecto a η se deben calcular las aproximaciones centrales con respecto a η en los puntos (i, j) e $(i + 1, j)$ para posteriormente calcular la media.

La discretización de las velocidades, considerando $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$, finalmente queda:

$$U_{i+\frac{1}{2},j} = g_{i+\frac{1}{2},j}^{11}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) + \frac{1}{4}g_{i+\frac{1}{2},j}^{12}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) \quad (4.23a)$$

$$U_{i-\frac{1}{2},j} = g_{i-\frac{1}{2},j}^{11}(\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}) + \frac{1}{4}g_{i-\frac{1}{2},j}^{12}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1}) \quad (4.23b)$$

$$U_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}g_{i,j+\frac{1}{2}}^{11}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) + g_{i,j+\frac{1}{2}}^{12}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}) \quad (4.23c)$$

$$U_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}g_{i,j-\frac{1}{2}}^{11}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j-1}) + g_{i,j-\frac{1}{2}}^{12}(\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}) \quad (4.23d)$$

$$V_{i+\frac{1}{2},j} = g_{i+\frac{1}{2},j}^{21}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) + \frac{1}{4}g_{i+\frac{1}{2},j}^{22}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) \quad (4.23e)$$

$$V_{i-\frac{1}{2},j} = g_{i-\frac{1}{2},j}^{21}(\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}) + \frac{1}{4}g_{i-\frac{1}{2},j}^{22}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1}) \quad (4.23f)$$

$$V_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}g_{i,j+\frac{1}{2}}^{21}(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) + g_{i,j+\frac{1}{2}}^{22}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}) \quad (4.23g)$$

$$V_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}g_{i,j-\frac{1}{2}}^{21}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j-1}) + g_{i,j-\frac{1}{2}}^{22}(\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}) \quad (4.23h)$$

En las ecuaciones 4.23 se ubican términos que se mantienen iguales para un mismo punto intercalado, por simplicidad dichos términos se agrupan en el término P , quedando como

$$P_{i+\frac{1}{2},j} = \phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} \quad (4.24a)$$

$$P_{i-\frac{1}{2},j} = \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i-1,j-1} \quad (4.24b)$$

$$P_{i,j+\frac{1}{2}} = \phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j} \quad (4.24c)$$

$$P_{i,j-\frac{1}{2}} = \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j-1} \quad (4.24d)$$

Una vez discretizados los valores de las componentes de la velocidad, se puede despejar el valor del potencial a partir de la ecuación 4.22

$$\begin{aligned} \phi_{i,j} = & \frac{1}{\left(\frac{\rho g^{11}}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j} + \left(\frac{\rho g^{11}}{J}\right)_{i-\frac{1}{2},j} + \left(\frac{\rho g^{22}}{J}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\rho g^{22}}{J}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}} \left(\left(\frac{\rho}{J}\right)_{i+\frac{1}{2},j} \left((g^{12}P)_{i+\frac{1}{2},j} + g_{i+\frac{1}{2},j}^{11} \phi_{i+1,j} \right) \right. \\ & - \left(\left(\frac{\rho}{J}\right)_{i-\frac{1}{2},j} \left((g^{12}P)_{i-\frac{1}{2},j} - g_{i-\frac{1}{2},j}^{11} \phi_{i-1,j} \right) + \left(\frac{\rho}{J}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} \left((g^{21}P)_{i,j+\frac{1}{2}} + g_{i,j+\frac{1}{2}}^{22} \phi_{i,j+1} \right) \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\rho}{J}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} \left((g^{21}P)_{i,j-\frac{1}{2}} - g_{i,j-\frac{1}{2}}^{22} \phi_{i,j-1} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Mediante la ecuación 4.4 se pueden obtener los valores de la densidad, sustituyendo las ecuaciones de la velocidad en ella. Sin embargo dicha ecuación requiere el cuadrado del módulo de la velocidad en el sistema de coordenadas del dominio físico u y v las cuales se describen como

$$u = x_\xi U + x_\eta V \quad (4.26a)$$

$$v = y_\xi U + y_\eta V \quad (4.26b)$$

$$u^2 + v^2 = U^2(x_\xi^2 + y_\xi^2) + V^2(x_\eta^2 + y_\eta^2) + 2UV(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) \quad (4.26c)$$

con lo cual la ecuación de la densidad queda

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{U^2(x_\xi^2 + y_\xi^2) + V^2(x_\eta^2 + y_\eta^2) + 2UV(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)}{2H_0} \right] \quad (4.27)$$

Para este punto es evidente la necesidad de obtener los valores en las mallas intercaladas tanto de los elementos del tensor de la transformación (elementos g^{mn}) como de las razones de cambio $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$, los cuales se calculan de la misma manera. Sea s un parámetro de los previamente mencionados, sus aproximaciones en las mallas escalonadas quedan:

$$s_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(s_{i+1,j} + s_{i,j}) \quad (4.28a)$$

$$s_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{i-1,j}) \quad (4.28b)$$

$$s_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (s_{i,j+1} + s_{i,j}) \quad (4.28c)$$

$$s_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{i,j-1}) \quad (4.28d)$$

4.2.1. Condiciones de frontera

En el caso del perfil alar, se considera que la velocidad normal al mismo es cero, por lo que la ecuación 4.11 se iguala a cero y se discretiza

$$\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta\xi} g^{21} + \frac{\phi_{i,j-2} - 4\phi_{i,j-1} + 3\phi_{i,j}}{2\Delta\eta} g^{22} = 0 \quad (4.29)$$

si se despeja el potencial se obtiene:

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{3} \left(4\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j-2} - \frac{g^{21}}{g^{22}} (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) \right) \quad (4.30)$$

Como ya se comentó, en la simulación se debe especificar un corte a lo largo del cual existirá una discontinuidad en el potencial, dicho corte se hace coincidir por conveniencia con el corte ya presente en la malla durante su generación.

$$\phi_{1,j} = \phi_{M,j} + \Gamma \quad (4.31)$$

El valor de la circulación, como ya se ha mencionado, debe ser actualizado durante la ejecución del proceso iterativo, y como lo indica la condición de Kutta para este tipo de perfiles la velocidad en el borde de salida es cero. Como ya se mencionó en la frontera interna la velocidad normal es cero, solo resta igualar la velocidad tangencial, también a cero. La velocidad tangencial discretizada queda

$$\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta\xi} g^{11} + \frac{\phi_{i,j-2} - 4\phi_{i,j-1} + 3\phi_{i,j}}{2\Delta\eta} g^{12} = 0 \quad (4.32)$$

entonces la circulación viene dada por:

$$\Gamma = \phi_{1,1} \quad (4.33)$$

Capítulo 5

Desarrollo Práctico

Los códigos de este trabajo fueron implementados en lenguaje Python 3, utilizando el paradigma de programación orientada a objetos, en éste los datos son trabajados como objetos con atributos y métodos pertenecientes a una clase, y que pueden ser heredados y aplicados a objetos o instancias de alguna subclase.

En el presente trabajo se implementaron dos superclases: “airfoil” y “mesh”, cada una con sus respectivas subclases. Además se generaron funciones que lleven a cabo análisis de flujo potencial, las cuales no forman parte de ninguna clase, pero que reciben como datos de entrada objetos de las clases mesh.

A continuación se enlistan los nombres de los archivos de código que se desarrollaron, así como una breve descripción de su funcionalidad

- airfoil.py. Contiene la definición de las clases airfoil y NACA4
- helpers.py. Contiene diversas funciones que se ocupan dentro de los métodos de las clases.
- mesh.py. Contiene la definición de la clase mesh.
- mesh_c.py. Contiene la definición de la clase mesh_c.
- mesh_o.py. Contiene la definición de la clase mesh_o.
- mesh_su2. Contiene las funciones que permiten exportar las mallas del formato propio, al formato utilizado por el software SU2.
- potential.py. Contiene todas las funciones relacionadas con el análisis de flujo potencial, como es el mismo flujo potencial, el campo de velocidades, el campo de presiones y el coeficiente de presión, la función de corriente, entre otros.

5.1. Estructura de las clases

5.1.1. Clase Airfoil

La clase airfoil se desarrolló para la creación de perfiles alares a partir de un archivo de texto que contenga la nube de puntos del perfil deseado, como dato de entrada se requiere el nombre del archivo texto y la dimensión en metros de la cuerda.

La clase airfoil contiene métodos que son utilizados por las demás subclases.

Método	Descripción
<code>__init__(c, number)</code>	Crea objeto airfoil, con cuerda c [m]. number representa el número de perfil (en caso de flaps), por default es igual a uno.
<code>get_chord()</code>	Regresa la dimensión de la cuerda aerodinámica.
<code>get_number()</code>	Regresa el número de perfil (en caso de flaps o varios profiles).
<code>get_x()</code>	Regresa un arreglo que contiene todas las coordenadas en el eje <i>x</i> de los puntos del perfil.
<code>get_y()</code>	Regresa un arreglo que contiene todas las coordenadas en el eje <i>y</i> de los puntos del perfil.
<code>get_union()</code>	Regresa el número de puntos que unen a los perfiles. Por default es cero.
<code>is_alone()</code>	Regresa verdadero o falso, dependiendo si existen 2 o más perfiles.
<code>is_boundary_()</code>	Regresa un arreglo de componentes verdadero o falso, dependiendo si el punto correspondiente forma parte de una frontera (perfil) o es un punto de unión.
<code>size()</code>	Regresa el número de puntos que forman el perfil.
<code>plot()</code>	Grafica el perfil alar.
<code>create(filename)</code>	Crea perfil aerodinámico a partir de un archivo que contiene la nube de puntos que lo describen.
<code>rotate(degrees)</code>	Rota el perfil degrees grados. Se considera rotación positiva en sentido horario.
<code>join(other, dx, dy, union)</code>	Une dos perfiles alares. El que invoca el método con other. dx y dy son las distancias sobre los ejes entre el borde de salida de un perfil y el borde de ataque del otro.
<code>to_csv(filename)</code>	Exporta la nube de puntos del perfil a un archivo de valores separados por comas (.csv)

Tabla 5.1: Métodos de la clase airfoil

Esta clase tiene una subclase de nombre “NACA4” la cual genera perfiles aerodinámicos NACA de la serie de 4 dígitos. La creación del perfil se hace a partir de la ecuación constitutiva de la serie. Como datos de entrada se requieren los valores de *m* (combudura máxima), *p* (posición de la combadura máxima), *t* (espesor máximo) y *c* (cuerda). La subclase NACA4 tiene dos métodos para la creación del perfil, el primero de ellos, el método “create_linear” crea la nube de puntos con una distribución equidistante de los puntos en dirección del eje *x*. El segundo método, llamado “create_sin” genera a partir de una función senoidal una nube de punto que permite que haya mayor densidad de nodos tanto en el borde de ataque como en el borde de salida del perfil.

Las tablas 5.1 y 5.2 presentan los métodos pertenecientes a la clase airfoil y a la clase NACA4 respectivamente, así como una breve descripción de los mismos. A su vez, la figura 5.1 presenta un diagrama de clase donde se muestran los atributos y métodos de la clase airfoil, así como su herencia con respecto a la clase NACA4, junto con los atributos y métodos de la misma.

Método	Descripción
<code>__init__(m, p, t, c, number)</code>	Crea objeto NACA4, con combadura máxima m, posición de ésta p, espesor máximo t y cuerda aerodinámica c. number representa el número de perfil (en caso de flaps), por default es igual a uno.
<code>create_linear(points)</code>	Crea perfil NACA4 con una distribución equidistante de los puntos en el eje x con un número de puntos points.
<code>create_sin(points)</code>	Crea perfil NACA4 con una distribución senoidal de los puntos en el eje x con un número de puntos points. Esta distribución permite obtener mayor densidad de puntos tanto en el borde de ataque como de salida con respecto a la distribución lineal para un mismo número de puntos.

Tabla 5.2: Métodos de la subclase NACA4

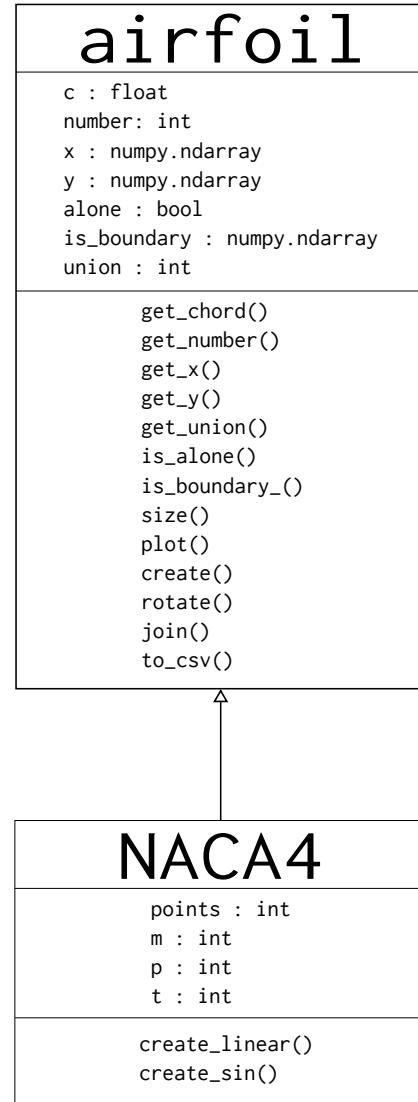


Figura 5.1: Diagrama de clase airfoil y subclase NACA4

5.1.2. Clase Mesh

La clase mesh se desarrolló para el desarrollo de mallas estructuradas. Además es la superclase a la que pertenecen las subclases mesh_c y mesh_o. En esta clase están definidos los métodos de creación de malla mediante ecuaciones algebráicas, los cuales son independientes de la tipología de la malla.

La tabla 5.3 contiene información con respecto a los métodos pertenecientes a esta clase.

Método	Descripción
<code>__init__(R, M, N, airfoil)</code>	Crea un objeto mesh donde R es la dimensión de la frontera externa, M es el número de niveles en el eje ξ , N es el número de niveles en el eje η y airfoil es un objeto de la clase homónima que contiene la información del perfil aerodinámico a analizar.
<code>plot()</code>	Representación gráfica de la malla generada.
<code>to_txt_mesh(filename)</code>	Exporta la malla a un archivo de texto de extensión <code>txt_mesh</code> . Este formato es de desarrollo propio y se implementó con la intención de importar al software mallas previamente generadas para su análisis.
<code>gen_inter_pol(eje)</code>	Genera una malla mediante el método de interpolación polinomial, la cual se basa en el polinomio de Lagrange. eje representa el eje a lo largo del cual se realiza la interpolación, por default es el eje η .
<code>gen_TFI()</code>	Genera una malla mediante el método de interpolación transfinita (TFI).
<code>gen_inter_Hermite()</code>	Genera una malla mediante el método de interpolación de Hermite.

Tabla 5.3: Métodos de la clase mesh

Como previamente se ha mencionado, la clase mesh sirve de superclase de las subclases mesh_c y mesh_o. Como el nombre de las mismas lo indica son subclases desarrolladas para la generación de mallas tipo C y tipo O respectivamente. En este trabajo se han desarrollado los mismos métodos para ambas subclases, con lo que se logra la misma funcionalidad en ambos casos. La razón de desarrollar dos clases distintas atiende a la necesidad de manejar las ecuaciones de diferente manera en las fronteras de la malla dependiendo de la tipología de ésta. La tabla 5.4 enlista los métodos disponibles para ambos tipos de malla, así como una breve descripción de ellos.

La figura 5.2 es una representación de la estructura de la clase mesh y su relación (herencia) con respecto a las subclases mesh_c y mesh_o. En este diagrama se enlistan los atributos y métodos pertenecientes a cada clase.

Método	Descripción
<code>__init__(R, M, N, airfoil)</code>	Crea un objeto <code>mesh_c</code> o <code>mesh_o</code> , donde <code>R</code> es la dimensión de la frontera externa, <code>M</code> es el número de niveles en el eje ξ , <code>N</code> es el número de niveles en el eje η y <code>airfoil</code> es un objeto de la clase homónima que contiene la información del perfil aerodinámico a analizar.
<code>gen_Laplace(metodo)</code>	Genera la malla resolviendo la ecuación de Laplace. La variable <code>metodo</code> se refiere al método iterativo de solución, el usuario puede escoger entre Jacobi, Gauss-Seidel y SOR. Por default se utiliza el método SOR
<code>gen_Poisson(metodo)</code>	Genera la malla resolviendo la ecuación de Poisson. La variable <code>metodo</code> se refiere al método iterativo de solución, el usuario puede escoger entre Jacobi, Gauss-Seidel y SOR. Por default se utiliza el método SOR.
<code>tensor()</code>	Calcula el tensor métrico de la transformación, tanto la transformación directa como indirecta. Tambien calcula el Jacobiano de dicha transformación y los valores de las derivadas parciales x_ξ , x_η , y_x^i y y_η . Los valores que regresa el método son matrices de $M \times N$, ya que todos los términos se calculan para cada uno de los puntos de la malla.
<code>to_su2()</code>	Convierte la malla al formato del software SU2, con el objetivo de realizar simulaciones en dicho programa sobre las mallas desarrolladas en este proyecto.

Tabla 5.4: Métodos de las clases `mesh_c` y `mesh_o`

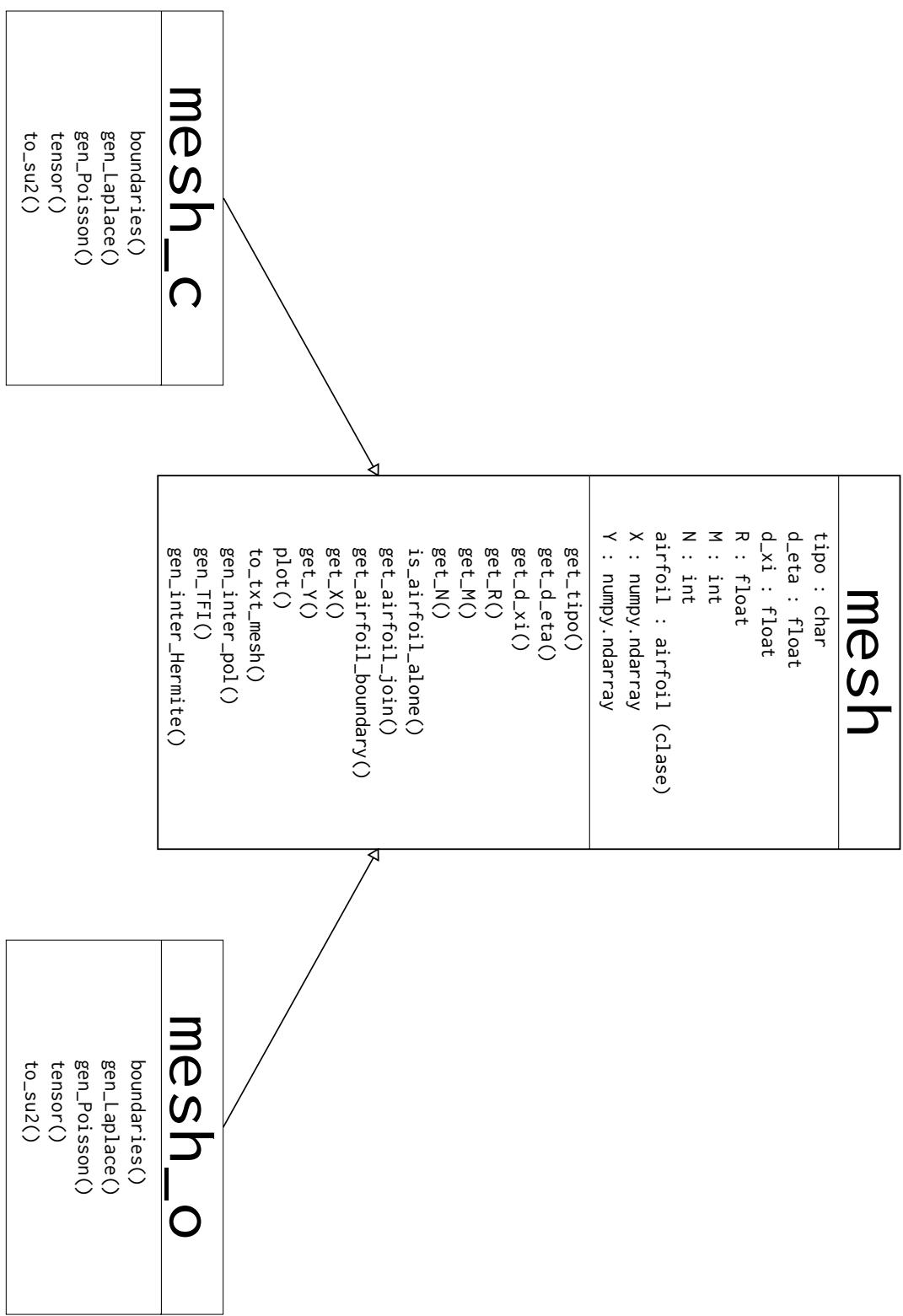


Figura 5.2: Diagrama de clase mesh y subclases mesh_c y mesh_o

5.2. Diagramas de flujo

5.2.1. Estructura global del programa

Siguiendo la estructura adoptada por los software de simulación y análisis de ingeniería, donde la solución del problema se divide en 3 procesos generales

1. Preproceso
2. Solver
3. Postproceso

se muestra un diagrama en la figura 5.3 donde se relaciona cada parte de este proyecto con el correspondiente proceso de los arriba mencionados.

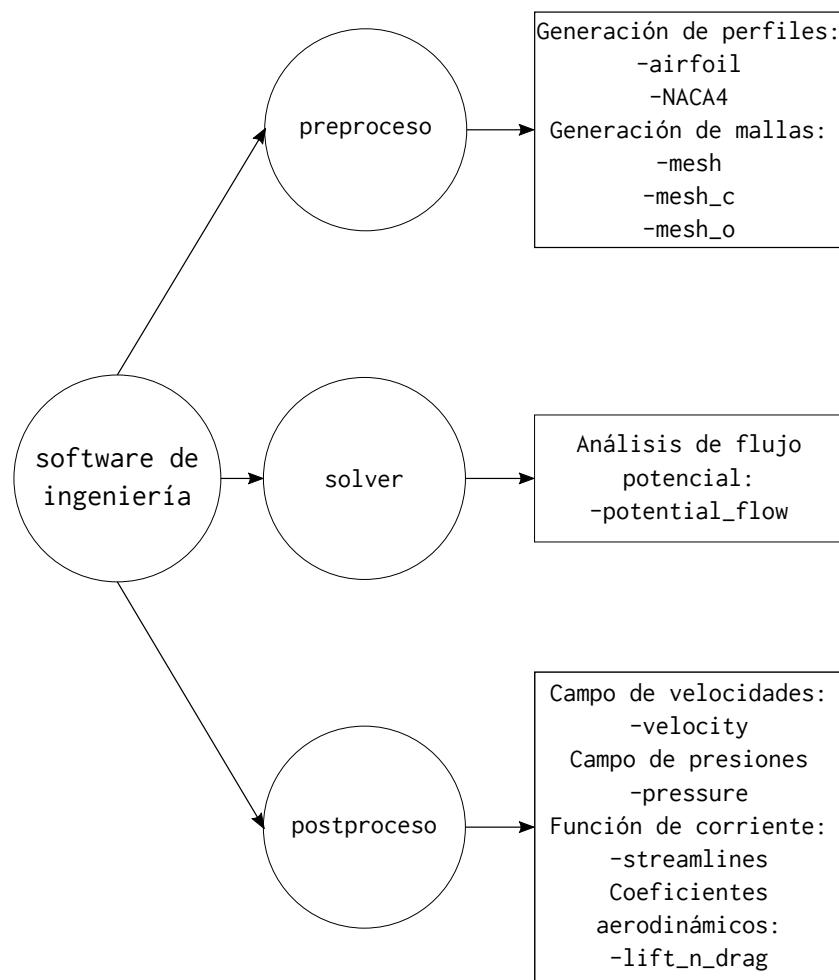


Figura 5.3: Estructura global del programa, dividido en preproceso, solver y postproceso

A continuación se muestran los diagramas de flujo que explican el funcionamiento de los 3 procesos generales dentro de este proyecto.

La figura 5.4 presenta el diagrama de flujo que se sigue para generar una malla y poder guardar dichos datos tanto en el formato de este proyecto como en el formato de SU2. Estas acciones corresponden al preprocesso del análisis.

El diagrama de flujo de la figura 5.5 representa el algoritmo empleado para el análisis de flujo potencial, lo cual corresponde al “solver” del programa.

El postproceso se ve ilustrado en la figura 5.6, la cual representa el algoritmo para la obtención de diferentes parámetros de interés en los análisis aerodinámicos, entre ellos los coeficientes de presión (c_p), de sustentación (c_l) y de resistencia al avance (c_d).

5.2.2. Funciones principales

Hasta ahora, solo se han presentado diagramas de flujo que presentan el funcionamiento general del programa sin entrar en específicos sobre los algoritmos de las funciones y los métodos que lo componen. Se muestran a continuación diagramas de flujo para la generación de mallas mediante la ecuación de Laplace y Poisson, además de solución a la ecuación de potencial, dado que son los algoritmos más complejos en este trabajo.

La figura 5.7 presenta el algoritmo utilizado para la generación de mallas mediante la solución de la ecuación de Laplace. De igual manera la figura 5.8 presenta el diagrama de flujo para la solución de la ecuación de Poisson. Por último, el diagrama de flujo ilustrado en la figura 5.9 muestra el algoritmo empleado para resolver la función potencial.

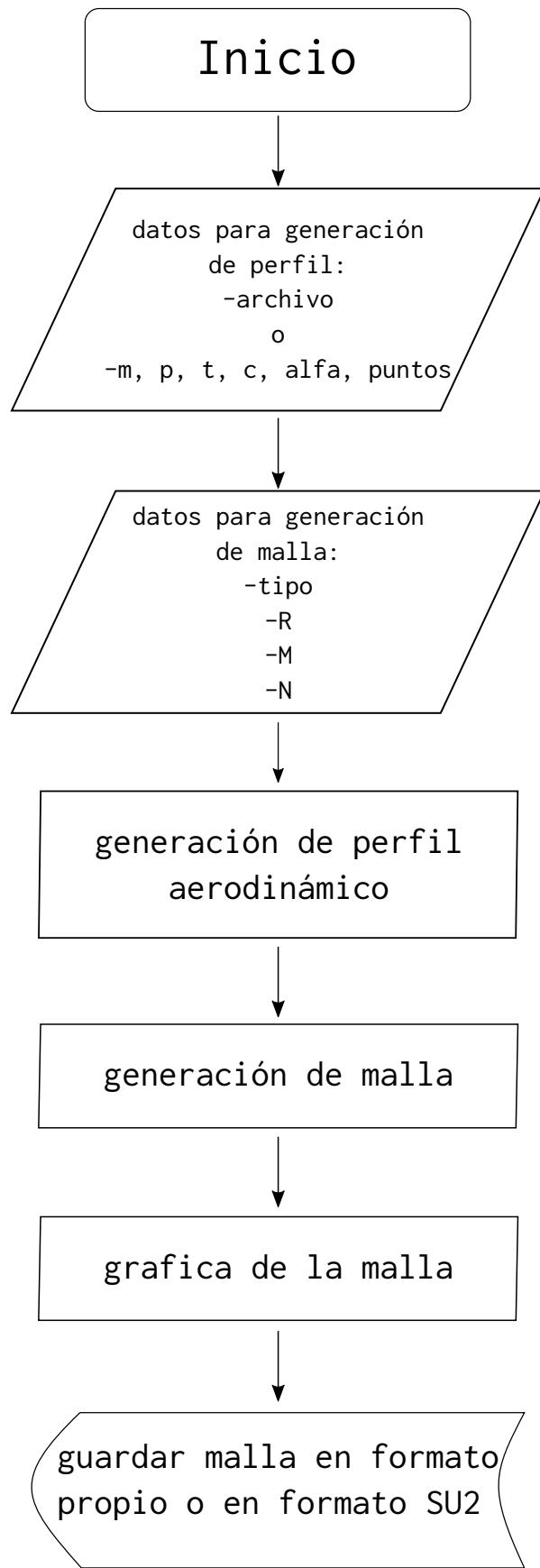


Figura 5.4: Diagrama de flujo para generación de mallas (preproceso)

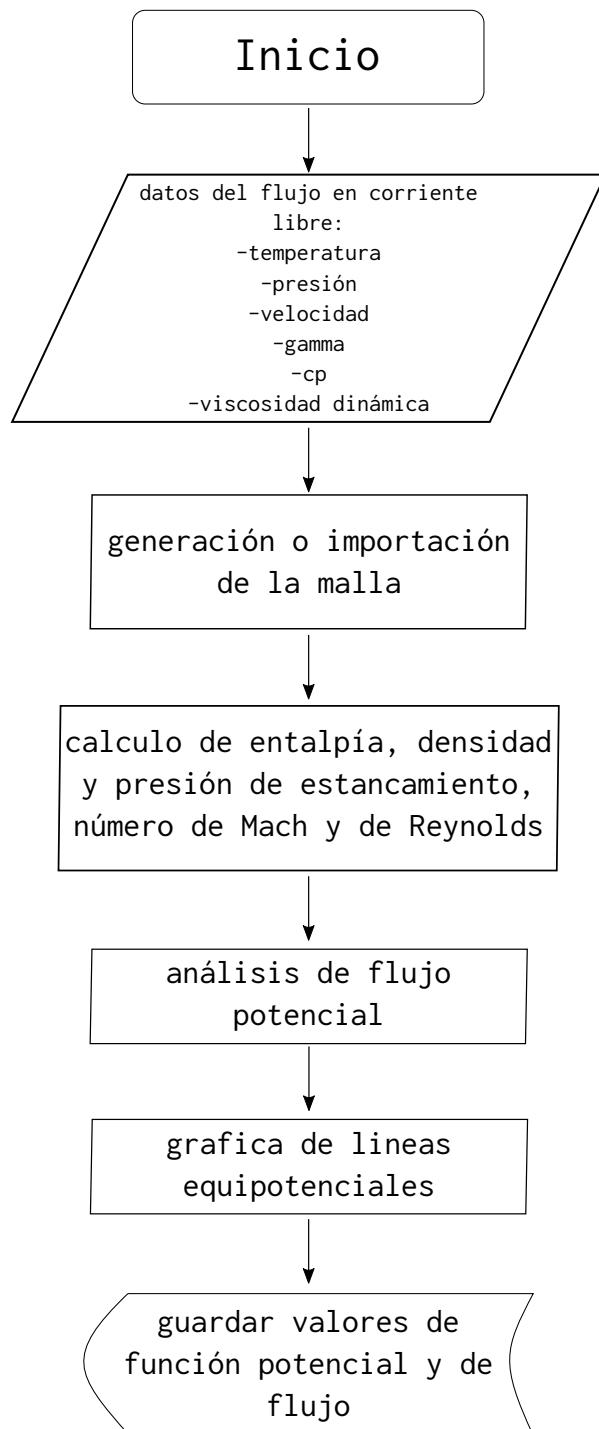


Figura 5.5: Diagrama de flujo para análisis de flujo potencial(solver)

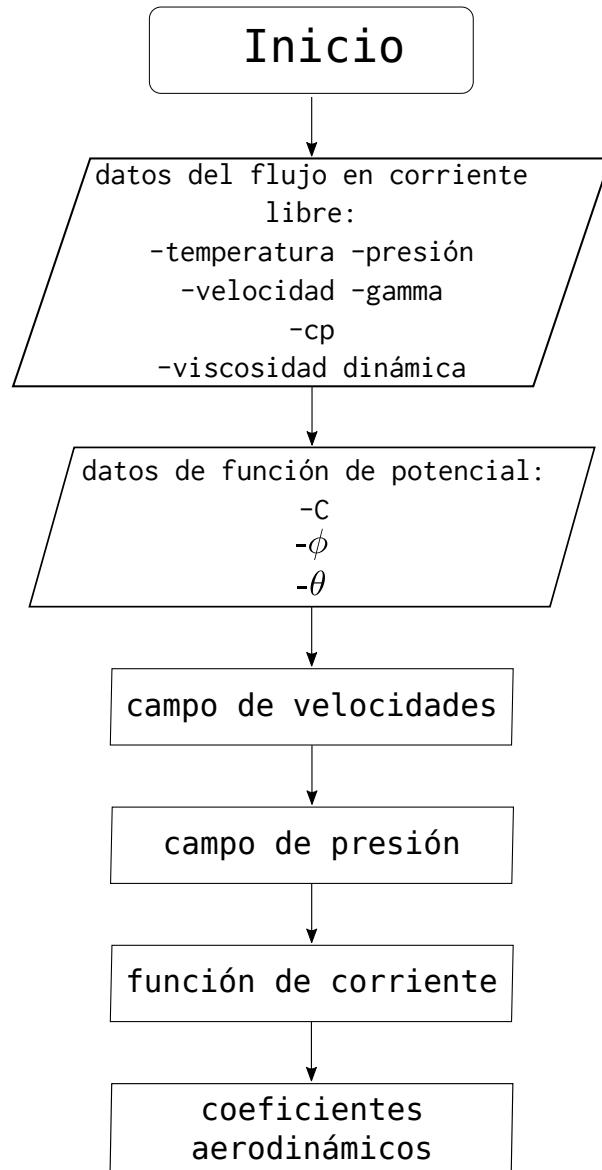


Figura 5.6: Diagrama de flujo para análisis de postproceso

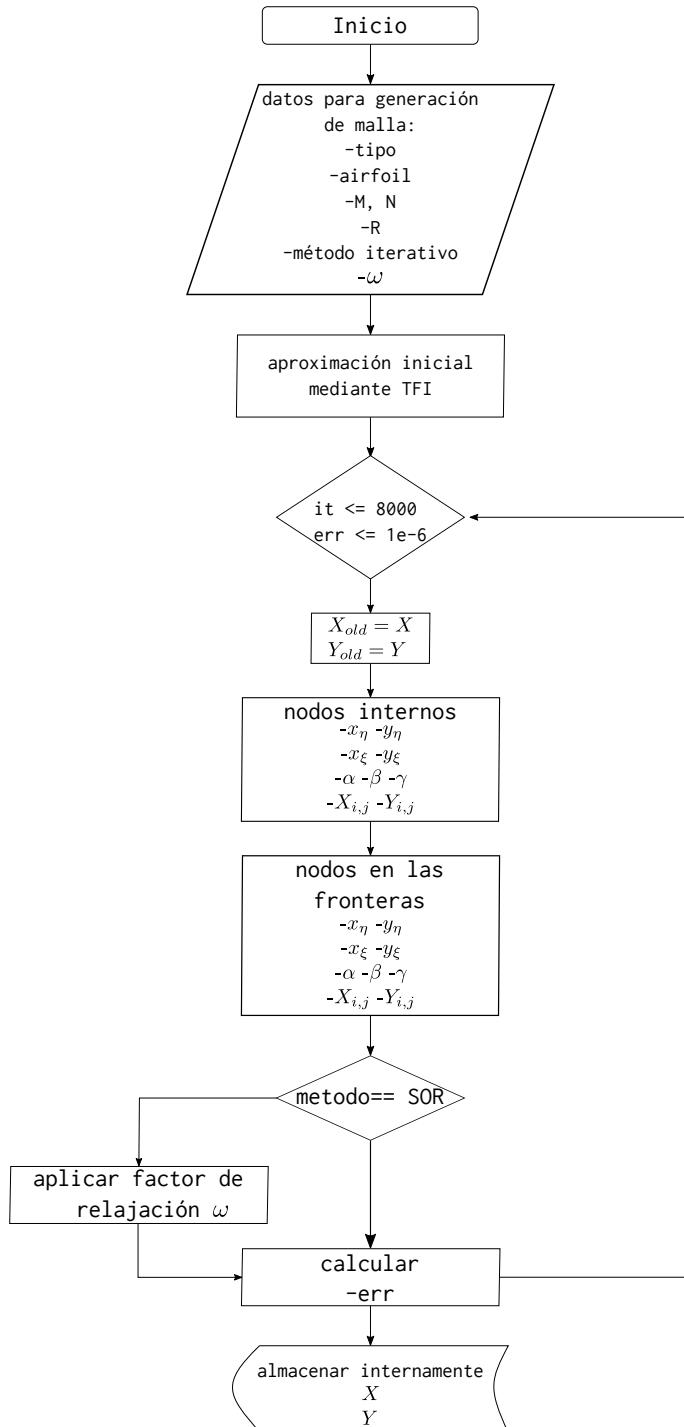


Figura 5.7: Diagrama de flujo para generación de mallas mediante la ecuación de Laplace

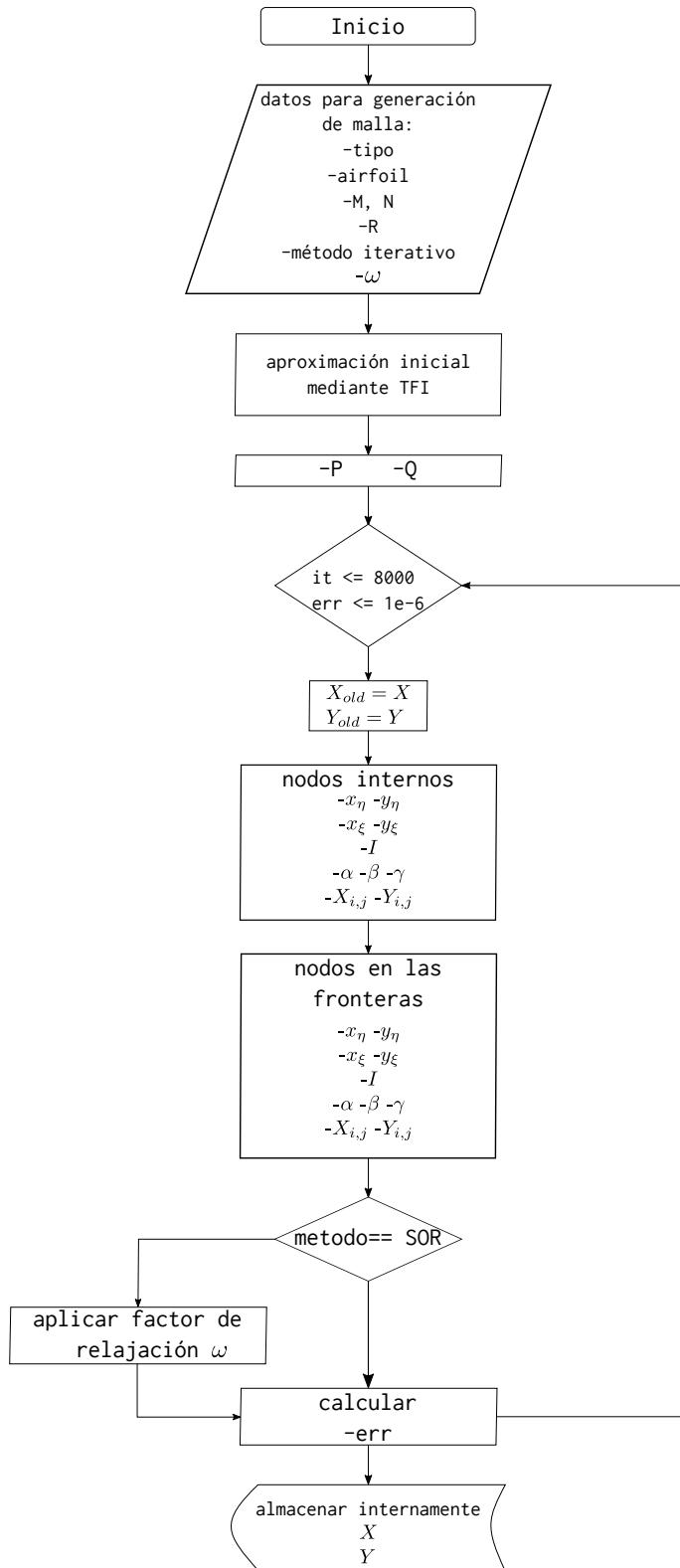


Figura 5.8: Diagrama de flujo para generación de mallas mediante la ecuación de Poisson

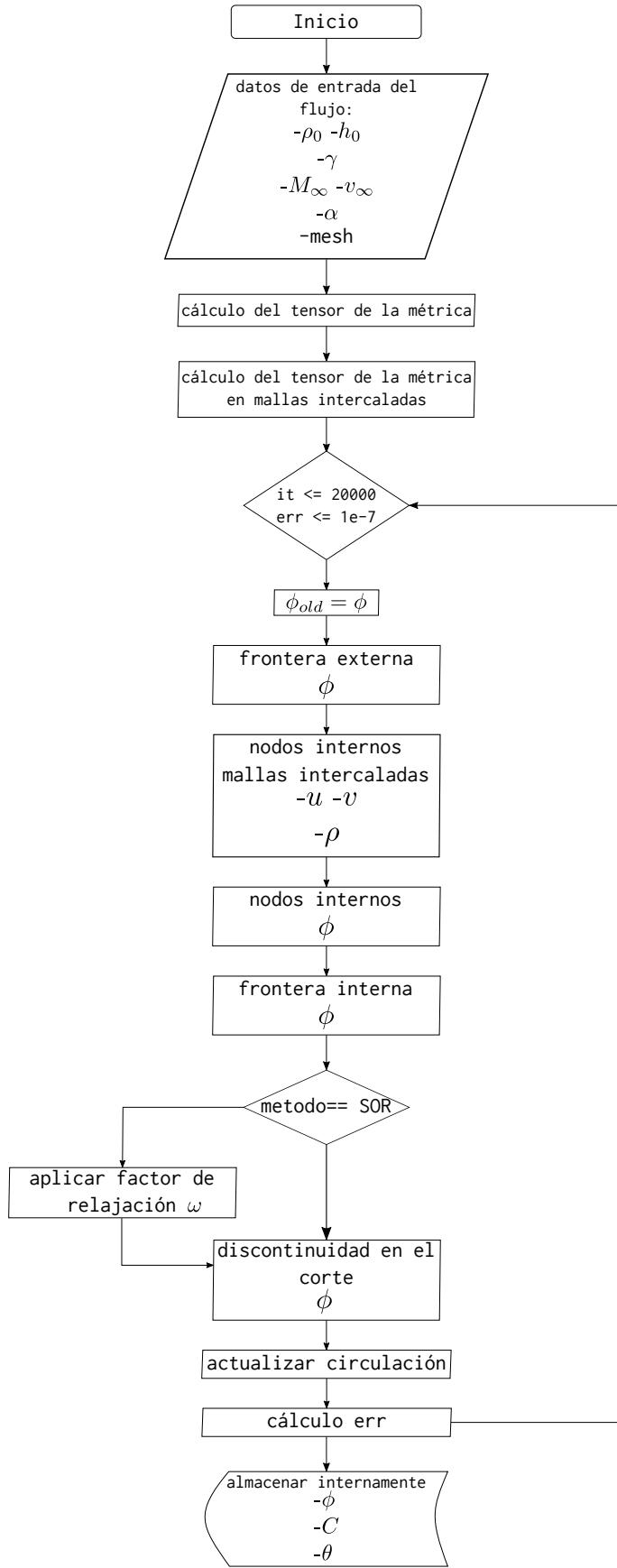


Figura 5.9: Diagrama de flujo para generación de mallas mediante la ecuación de Poisson

Capítulo 6

Resultados

Los resultados de este trabajo se dividen en tres secciones diferentes, la primera de ellas lidia con el alcance de las mallas generadas mediante este programa, analizando para diferentes configuraciones la distribución de los nodos. En segundo lugar para diferentes configuraciones se evalua la calidad de la malla mediante el “aspect ratio” y el “skewness” de las celdas de la misma, con la intención de mostrar la calidad lograda, lo que dota de confiabilidad al proyecto para su uso en posteriores proyectos. Por último se llevan a cabo simulaciones de flujo potencial utilizando el código desarrollado como parte de este proyecto, y también se realizan simulaciones a través del uso del software SU2, con el fin de confirmar la correcta generación de las mallas y de mostrar su aplicabilidad.

6.1. Alcance y Límites de Aplicación

En esta sección se analizan las mallas resultantes para diferentes ángulos de ataque de un perfil seleccionado, con lo que se obtiene un rango de valores para el ángulo de ataque en los que todavía se cuenta con una malla que resulte de utilidad para análisis de DFC. Normalmente este límite se alcanza cuando se presentan cruces en las líneas que forman la malla.

6.1.1. Malla O. Frontera interna única

La primera malla que se presenta es una malla tipo O con un solo perfil. La tabla 6.1 presenta las características de la malla, así como los casos límite de aplicabilidad. La figura 6.1 muestra la malla generada para un ángulo de ataque $\alpha = 0^\circ$. A su vez, la figura 6.2 muestra un acercamiento al perfil para un ángulo de ataque $\alpha = 90^\circ$, condición en la cual todavía se muestra una malla dentro del rango de usabilidad. Mientras que la figura 6.2 muestra un acercamiento al perfil con un ángulo de ataque $\alpha = -90^\circ$, e ilustra una malla de mala calidad en el borde de salida.

6.1.2. Malla O. Frontera interna múltiple

El segundo caso de análisis presenta una malla tipo O con un perfil NACA 4415 y un flap del tipo perfil externo, el cual tambien es un perfil NACA 4415. En el caso de esta configuración, el ángulo de ataque del perfil se mantiene constante a 0° , mientras que el ángulo de deflexión del flap se va variando. La tabla 6.2 presenta las caraterísticas de esta configuración. La figura 6.4 presenta la malla generada, tanto una vista completa de la misma, así como un acercamiento en el cual se logra apreciar tanto el perfil como el flap, el cual tiene un ángulo de deflexión igual

Malla O	
Característica	Valor
Perfil	NACA 4415
M	45
N	45
Ecuación	Poisson
aa_m	20.5
cc_m	6.5
Método	SOR
Ángulo máximo	110°
Ángulo máximo recomendado	90°
Ángulo mínimo	-50°
Ángulo mínimo recomendado	-30°

Tabla 6.1: Características de malla O con perfil NACA 4415

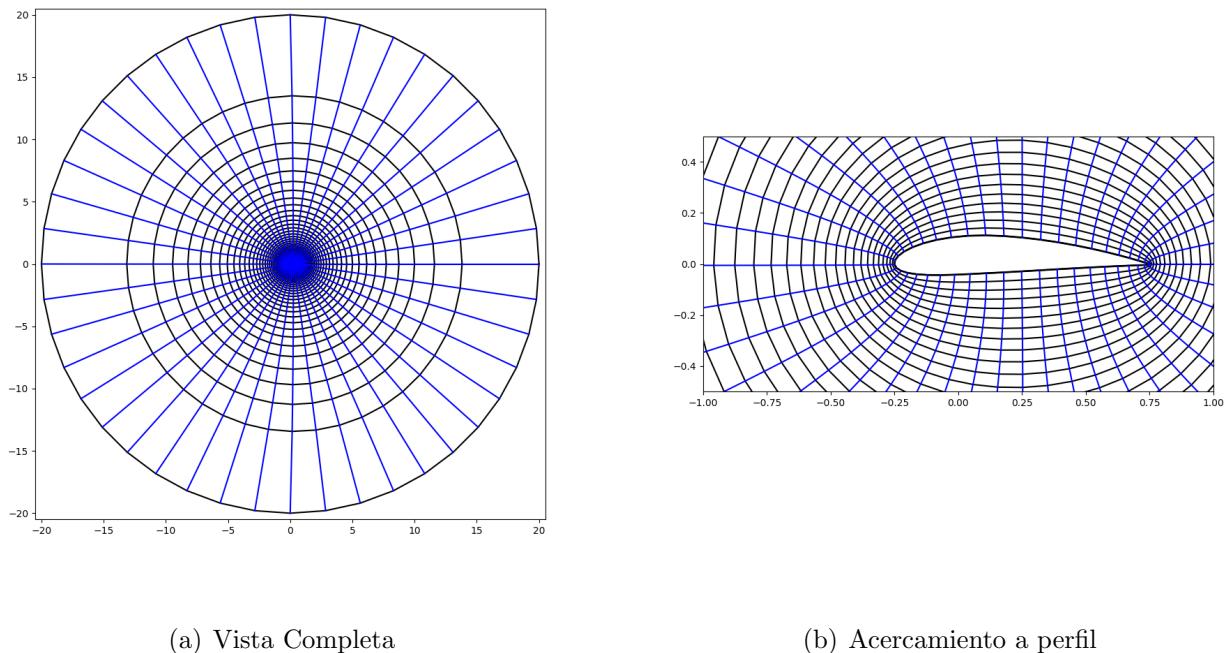
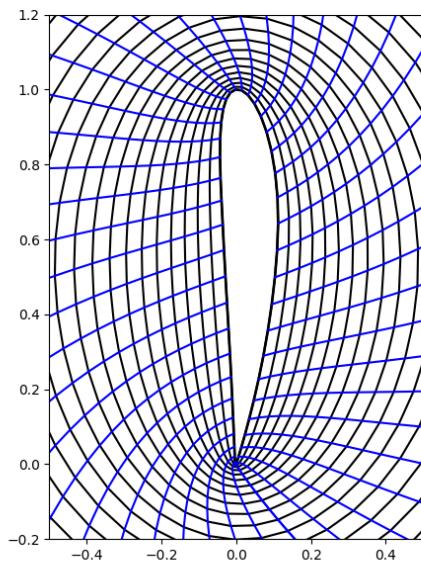
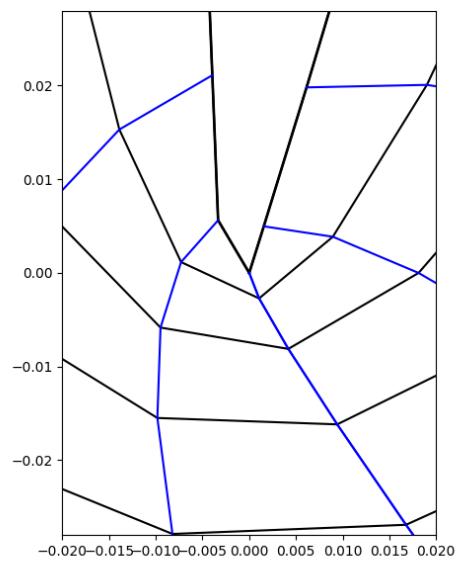


Figura 6.1: Malla tipo O con perfil NACA4415 con ángulo de ataque 0°

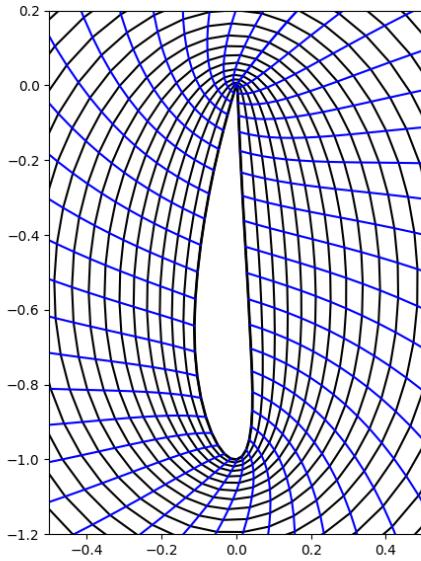


(a) 90° Vista del perfil

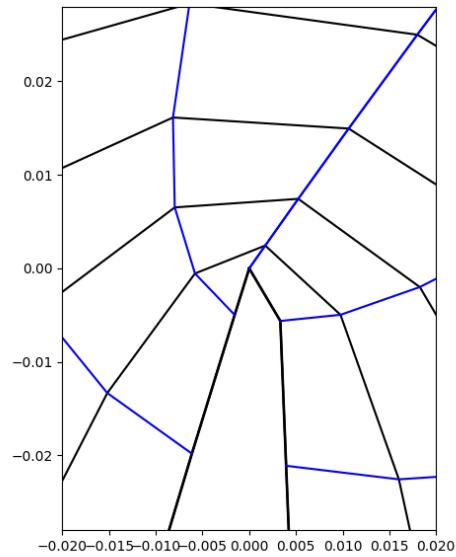


(b) 90° Vista del borde de salida

Figura 6.2: Malla tipo O con perfil NACA4415 con ángulo de ataque 90° . Acercamiento al perfil y al borde de salida



(a) -90° Vista del perfil



(b) -90° Vista del borde de salida

Figura 6.3: Malla tipo O con perfil NACA4415 con ángulo de ataque 90° . Acercamiento al perfil y al borde de salida

a 0° . Por su parte la figura 6.5 muestra una malla generada bajo los mismos parámetros y una deflexión del flap igual a 40° , la cual cumple en términos generales con las características de una malla de calidad. En contraste, la figura 6.6 muestra una malla para el caso en el cual el flap tiene un angulo de deflexión igual a -20° , dicha malla resulta inservible para el análisis, ya que en la vista de acercamiento al borde de ataque del flap se observa incluso un cruce entre las líneas que unen a los nodos en esa región.

Malla O	
Caracterísitca	Valor
Perfil	NACA 4415
Flap	NACA 4415
M	83
N	45
Union entre perfil y flap	6
Ecuación	Poisson
aa_m	20.5
cc_m	6.5
Método	SOR
Ángulo máximo	45°
Ángulo máximo recomendado	40°
Ángulo mínimo	-10°
Ángulo mínimo recomendado	-5°

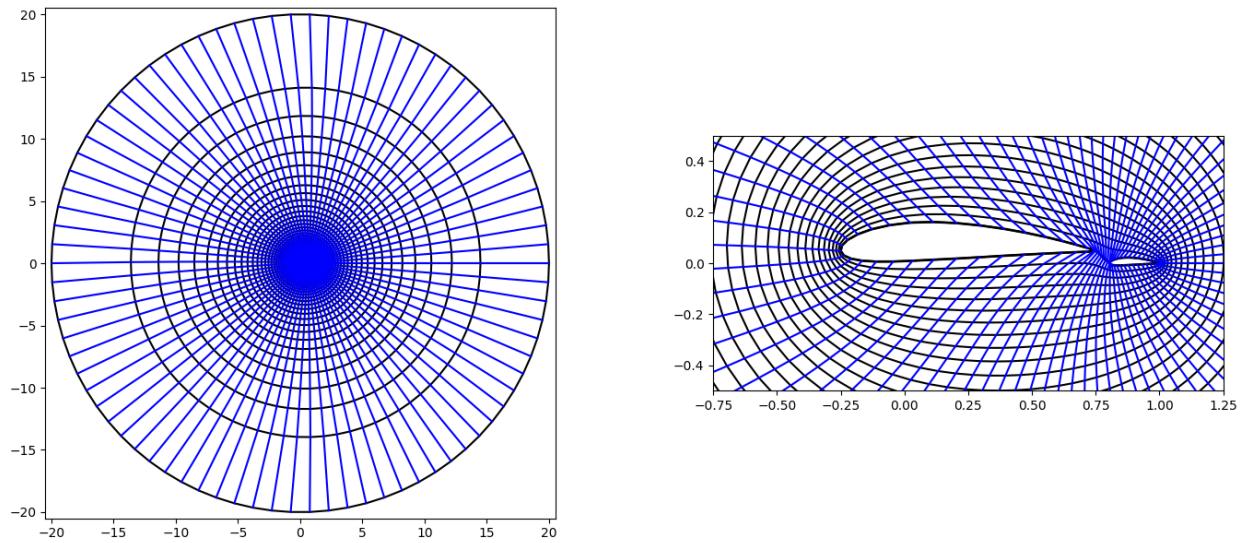
Tabla 6.2: Características de malla O con perfil y flap NACA 4415

6.1.3. Malla C. Frontera interna única.

El tercer caso de análisis es similar al primer caso, es decir se genera una malla alrededor de un perfil aerodinámico NACA 4415, sin embargo la malla resultante es una malla tipo C. En la tabla 6.4 se muestran los valores asignados a cada parámetro con los que esta malla ha sido generada. La figura 6.7 muestra la vista de la malla, brinda una vista total de la misma así como un acercamiento a la región donde se encuentra el perfil. La figura 6.8 presenta la malla generada para el caso en el que el perfil tiene un ángulo de ataque $\alpha = -80^\circ$, caso que se mantiene dentro del rango de usabilidad de la malla.

6.1.4. Malla C. Frontera interna múltiple

El último caso de estudio corresponde a una malla tipo C, la cual tiene como frontera interna un perfil NACA 4415 el cual cuenta con un flap con el mismo diseño NACA 4415. El perfil se mantiene constante con un ángulo de ataque $\alpha = 0^\circ$ mientras que el ángulo de deflexión del flap se varía.



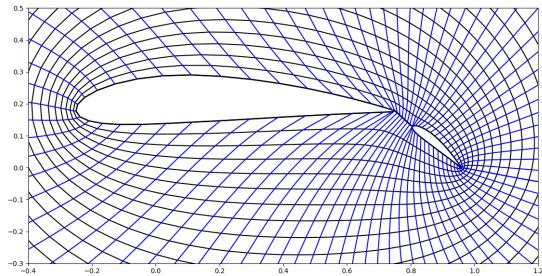
(a) Vista completa

(b) Acercamiento a perfil

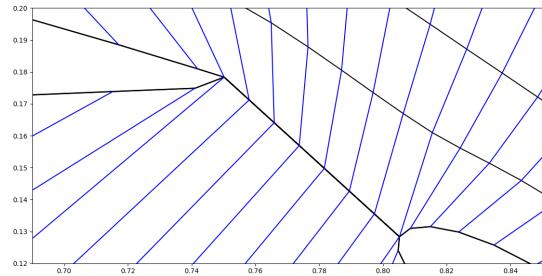
Figura 6.4: Malla tipo O con perfil y flap NACA4415, ambos con ángulo de ataque 0°

Malla C	
Característica	Valor
Perfil	NACA 4415
M	99
N	45
Ecuación	Poisson
aa_m	37
cc_m	7
Método	SOR
Ángulo máximo	90°
Ángulo máximo recomendado	80°
Ángulo mínimo	-110°
Ángulo mínimo recomendado	-90°

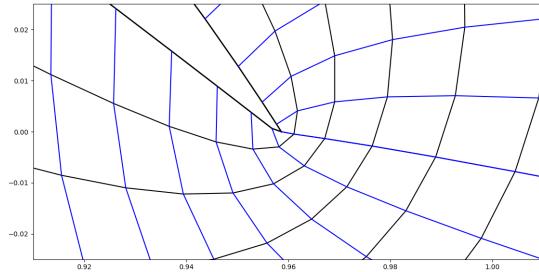
Tabla 6.3: Características de malla C con perfil NACA 4415



(a) Flap a 40°



(b) Acercamiento a borde de salida de perfil y borde de ataque de flap

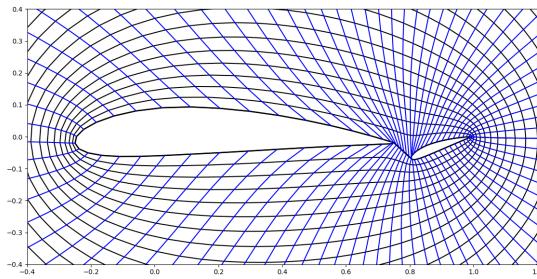


(c) Acercamiento a borde de salida de flap

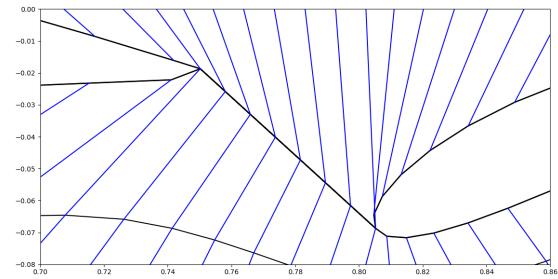
Figura 6.5: Malla tipo O con perfil y flap NACA4415. El perfil tiene un ángulo de ataque de 0° y el flap un ángulo de deflexión de 40°

Malla C	
Característica	Valor
Perfil	NACA 4415
M	159
N	65
Ecuación	Poisson
aa_m	35
cc_m	6.5
Método	SOR
Ángulo máximo	100°
Ángulo máximo recomendado	80°
Ángulo mínimo	-50°
Ángulo mínimo recomendado	-40°

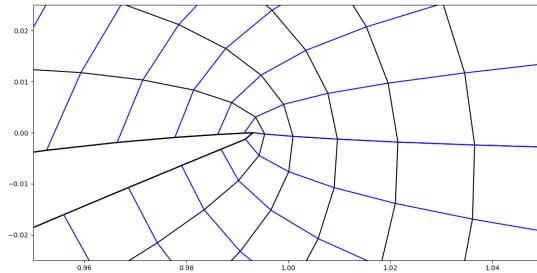
Tabla 6.4: Características de malla C con perfil y flap NACA 4415



(a) Acercamiento a perfil y flap

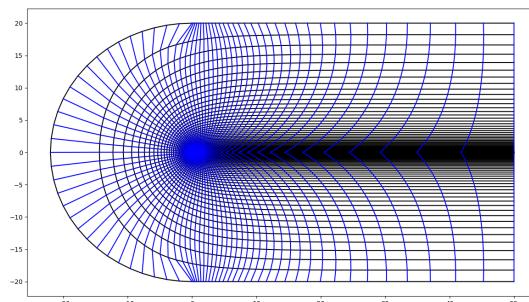


(b) Acercamiento a borde de salida de perfil y borde de ataque de flap

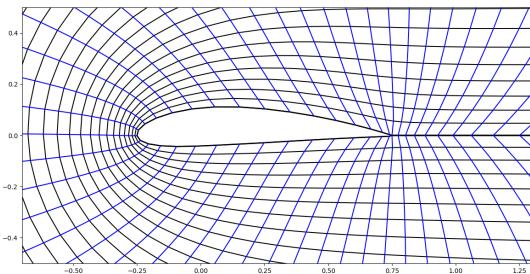


(c) Acercamiento a borde de salida de flap

Figura 6.6: Malla tipo O con perfil y flap NACA4415. El perfil tiene un ángulo de ataque de 0° y el flap un ángulo de deflexión de -20°

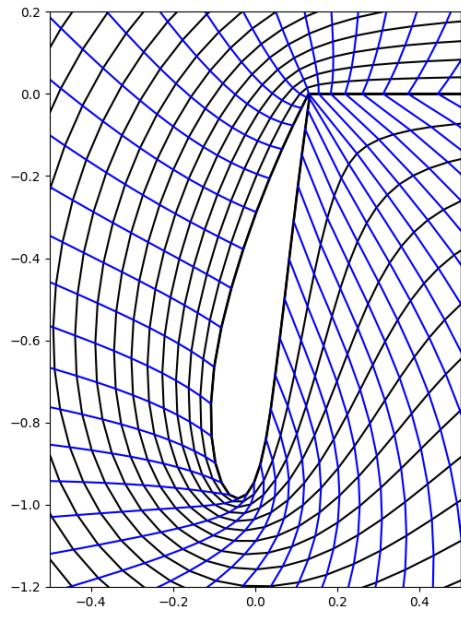


(a) Vista completa

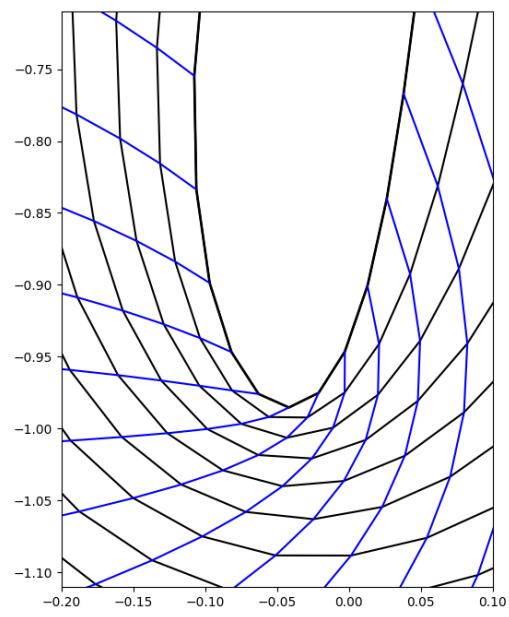


(b) Acercamiento a perfil

Figura 6.7: Malla tipo C con perfil NACA 4415, a un ángulo de ataque 0°

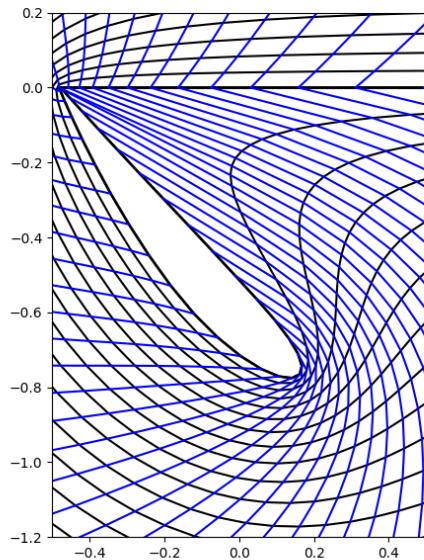


(a) -80° Vista del perfil

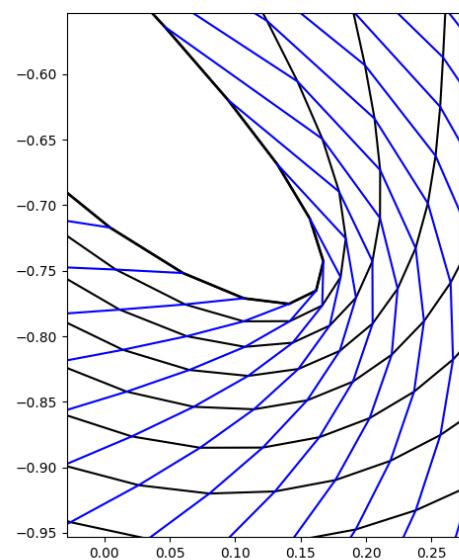


(b) -80° Vista del borde de ataque

Figura 6.8: Malla tipo C con perfil NACA 4415 con ángulo de ataque -80° . Acercamiento al perfil y al borde de ataque

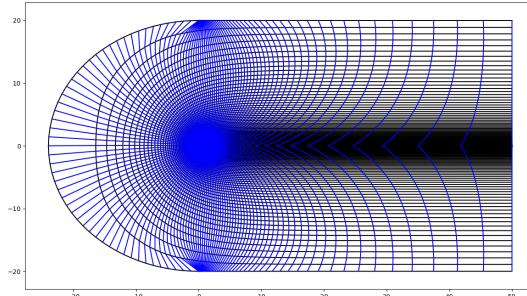


(a) -130° Vista del perfil

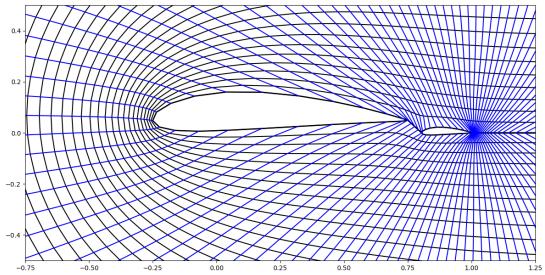


(b) -130° Vista del borde de ataque

Figura 6.9: Malla tipo C con perfil NACA 4415 con ángulo de ataque -130° . Acercamiento al perfil y al borde de ataque



(a) Vista completa



(b) Acercamiento a perfil

Figura 6.10: Malla tipo C con perfil y flap NACA 4415, ambos con ángulo de ataque 0°

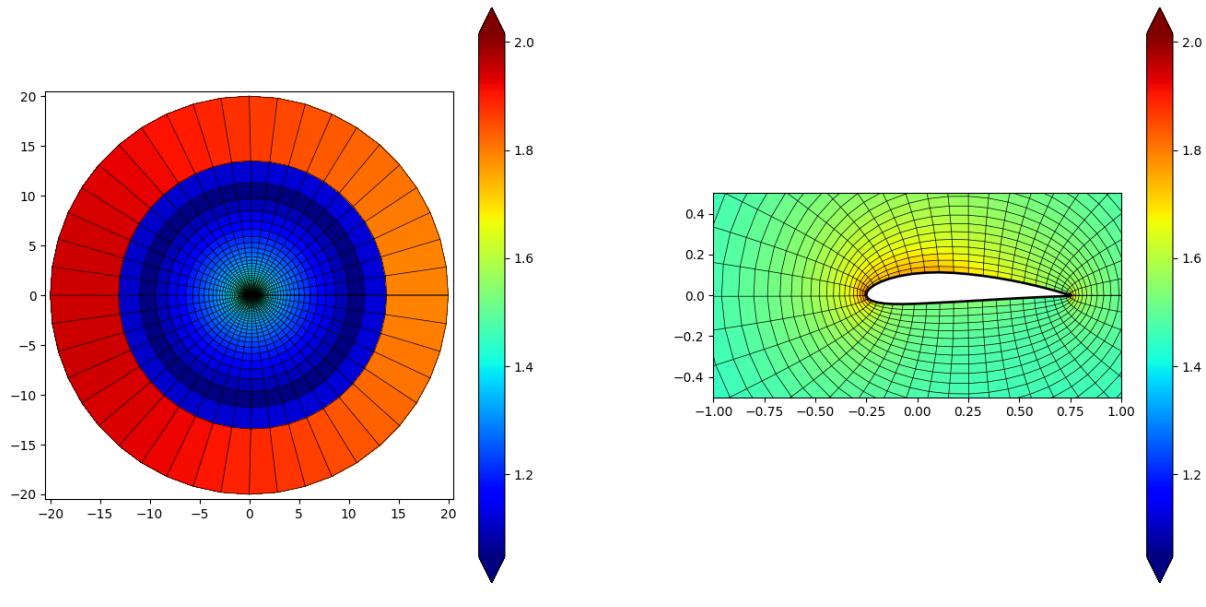
6.2. Calidad de la malla

En esta sección se discuten los resultados obtenidos para diferentes configuraciones de malla, analizando la calidad de la misma. Este aspecto es evaluado mediante el método utilizado en la librería “The Verdict Geometric Quality Library”, mencionado previamente en el capítulo 3. Los aspectos que se van a analizar son el “aspect ratio” y el “skewness” en cada una de las celdas.

Para esto se define una configuración inicial, es decir se define la tipología de la malla, el perfil a mallar, las dimensiones de la malla M y N , y los valores de entrada para las funciones que afectan la densidad del mallado en la ecuación de Poisson. A partir de dicha configuración se varía un parámetro a la vez, de los previamente mencionados, para mostrar el efecto que cada uno tiene sobre la malla.

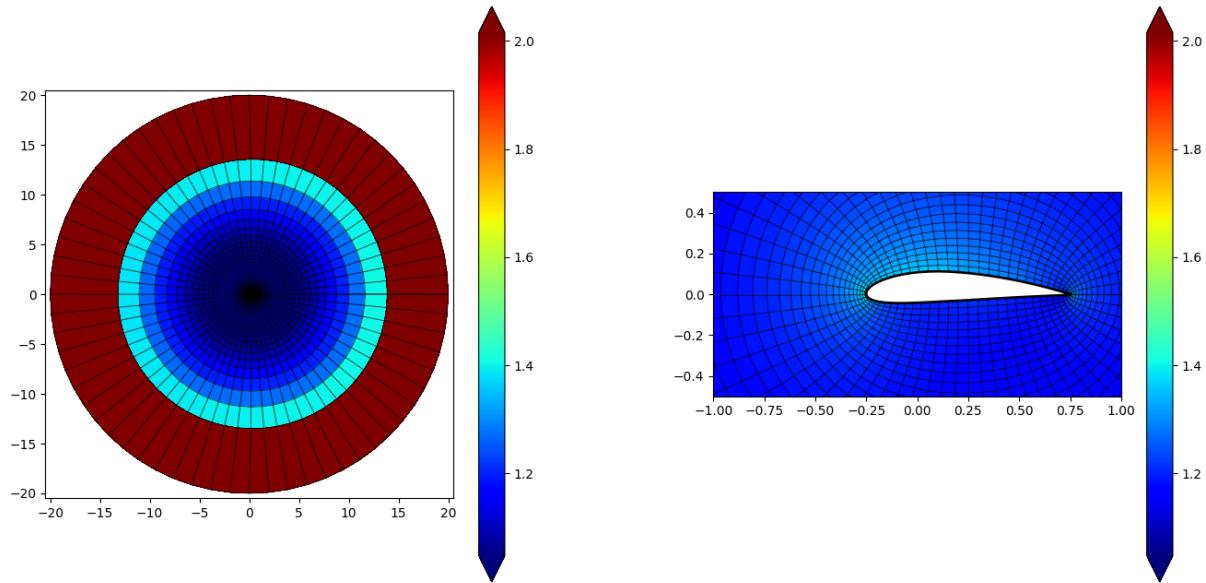
El primer caso corresponde al descrito por la tabla 6.1 y representado por la malla de la figura 6.1. A esta configuración se le realizarán variaciones en sus parámetros con el fin de identificar el efecto de cada uno de ellos en la calidad de la malla. Las figuras 6.11 y 6.14 se muestran el aspect ratio y el skew de las celdas, respectivamente. El primer cambio es el aumento de la dimensión M de la malla desde $M = 45$ a $M = 65$. El segundo cambio implica un incremento en el número de nodos en la dirección del eje η , es decir, aumentando el número de nodos desde $N = 45$ a $N = 65$. Por último se cambia el valor de la variable aa_m correspondiente a la ecuación de Poisson, de $aa_m = 20,5$ a $aa_m = 21,5$.

El siguiente caso corresponde al descrito en la tabla 6.2, al cual se le realizan los mismos incrementos, el valor de M cambia de $M = 83$ a $M = 103$ y el valor de aa_m de $aa_m = 20,5$ a $aa_m = 21,5$.



(a) Vista Completa

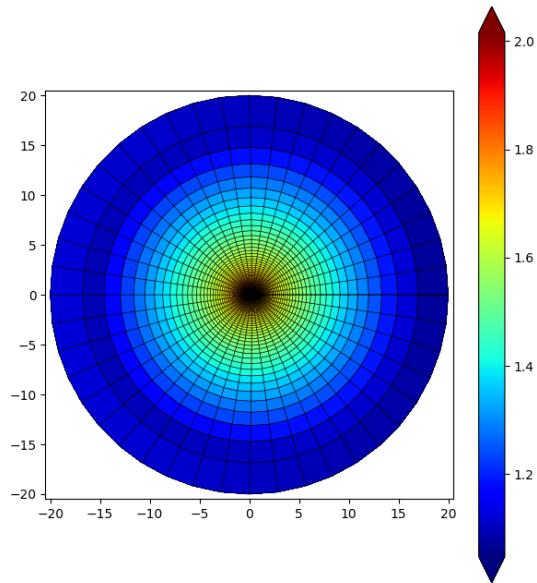
(b) Acercamiento a perfil



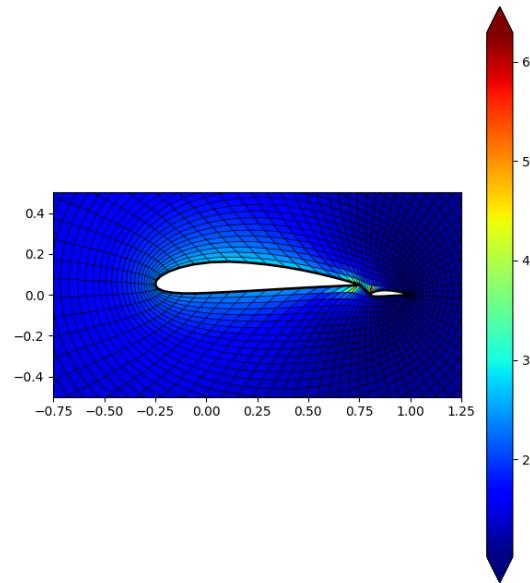
(c) Vista Completa $M = 65$

(d) Acercamiento a perfil $M = 65$

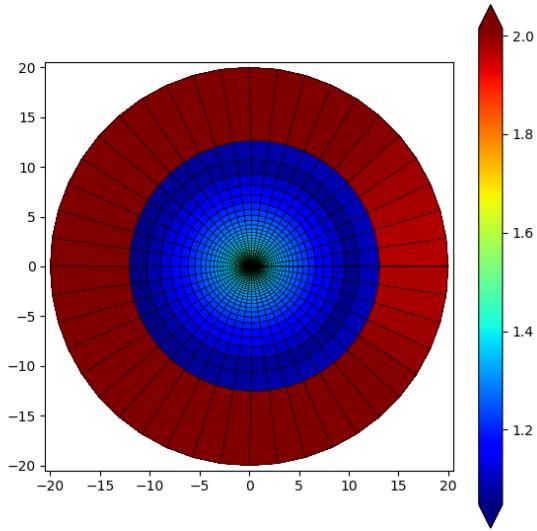
Figura 6.11: Aspect ratio para malla tipo O con perfil NACA4415



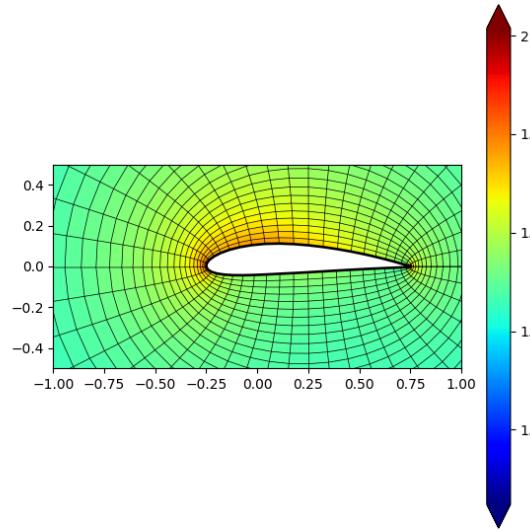
(a) Vista Completa $N = 65$



(b) Acercamiento a perfil $N = 65$

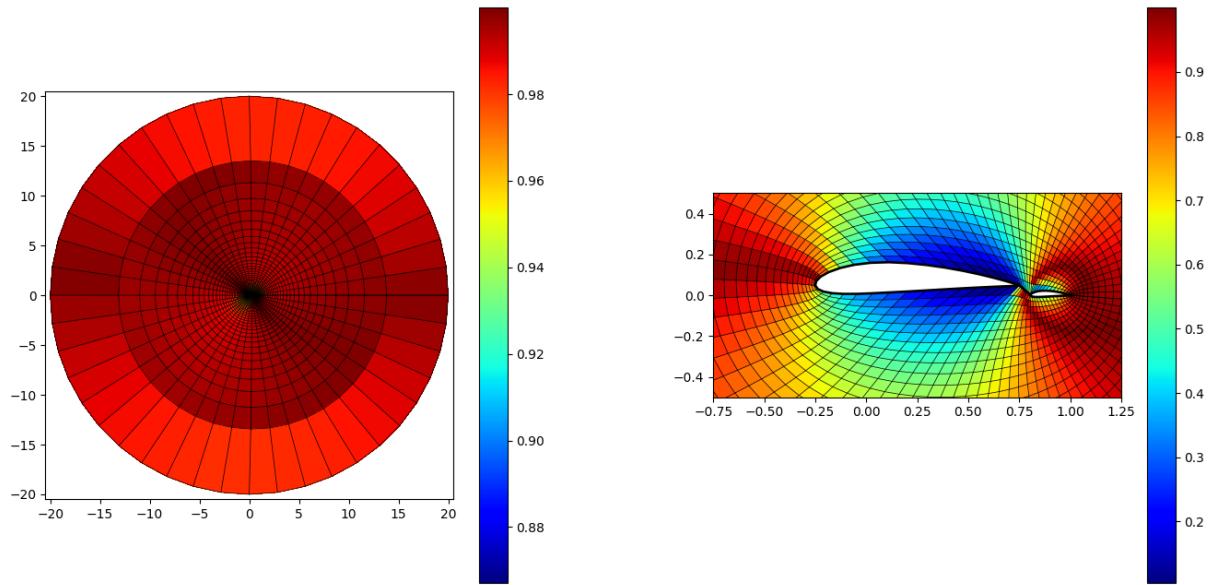


(c) Vista Completa $a = 21,5$



(d) Acercamiento a perfil $a = 21,5$

Figura 6.11: Aspect ratio para malla tipo O con perfil NACA4415



(e) Vista Completa

(f) Acercamiento a perfil

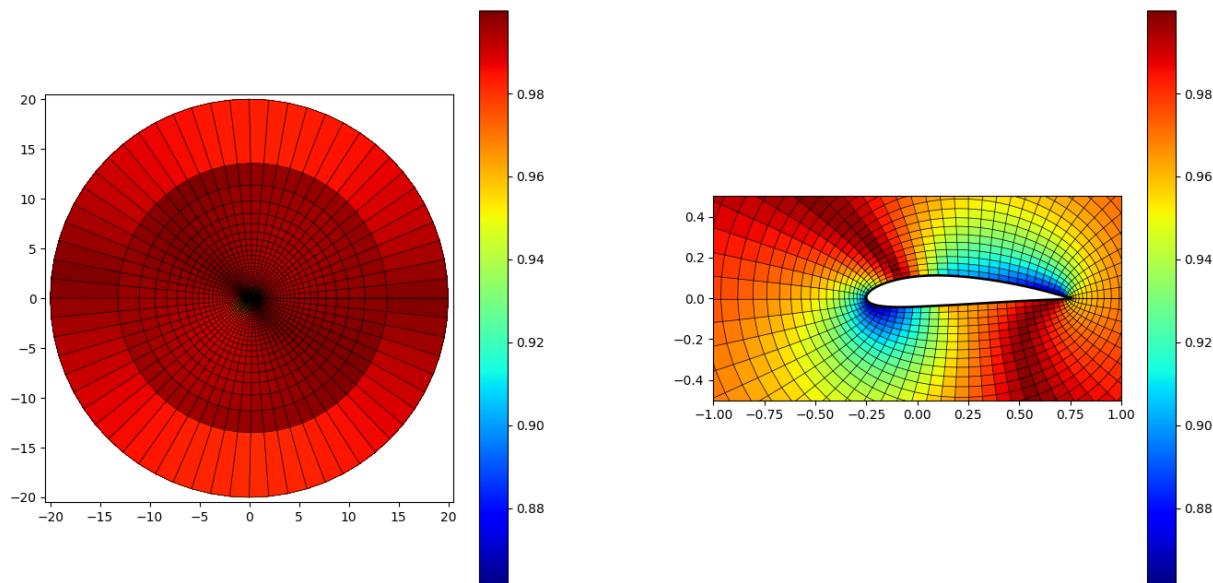
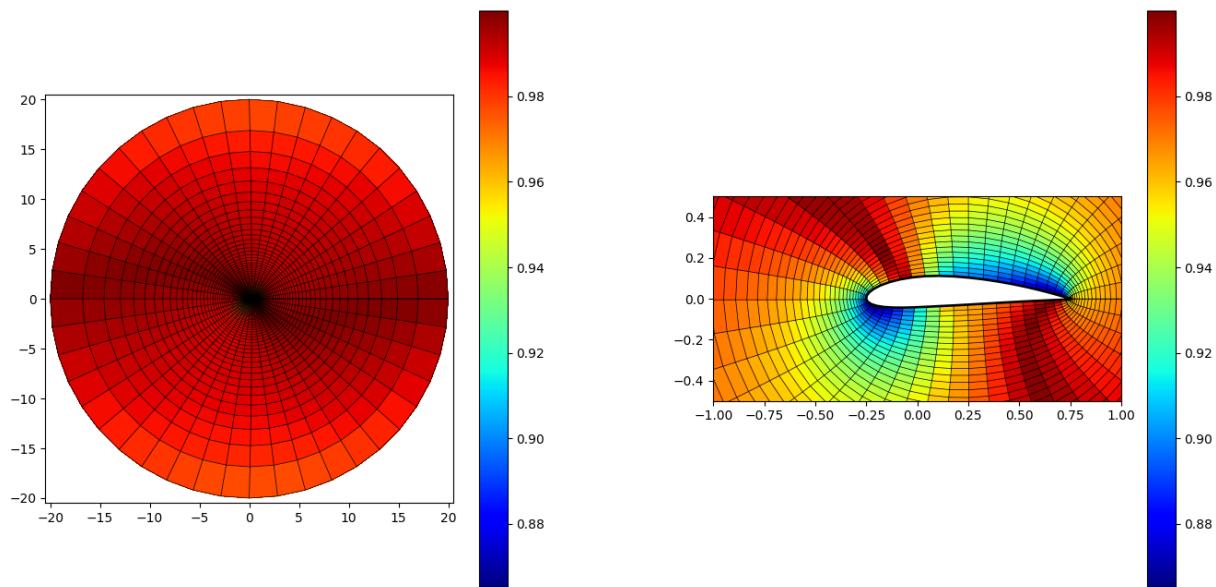
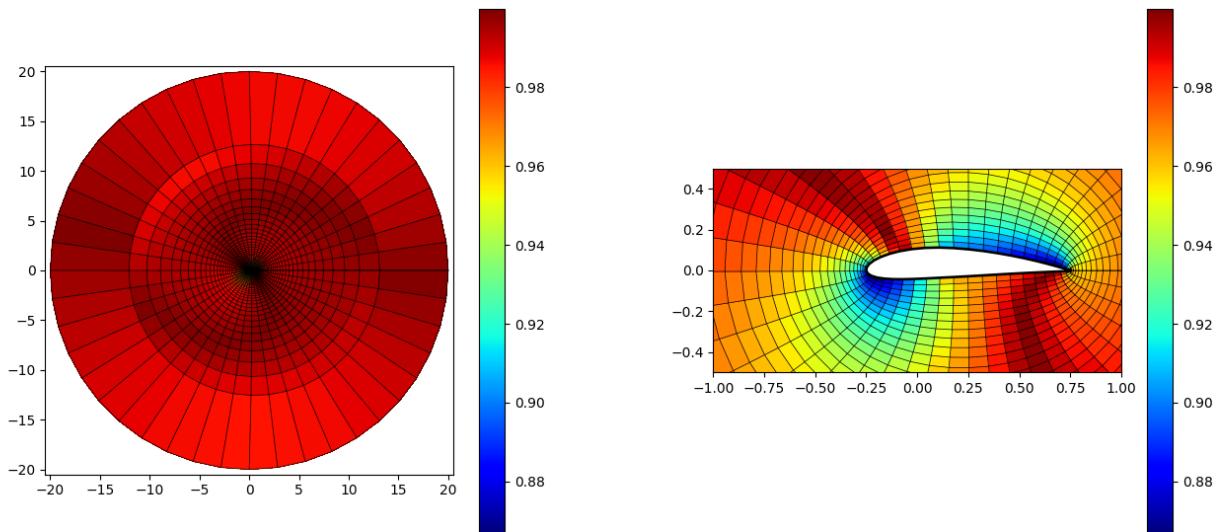
(g) Vista Completa $M = 65$ (h) Acercamiento a perfil $M = 65$

Figura 6.12: Skew para malla tipo O con perfil NACA4415



(a) Vista Completa $N = 65$

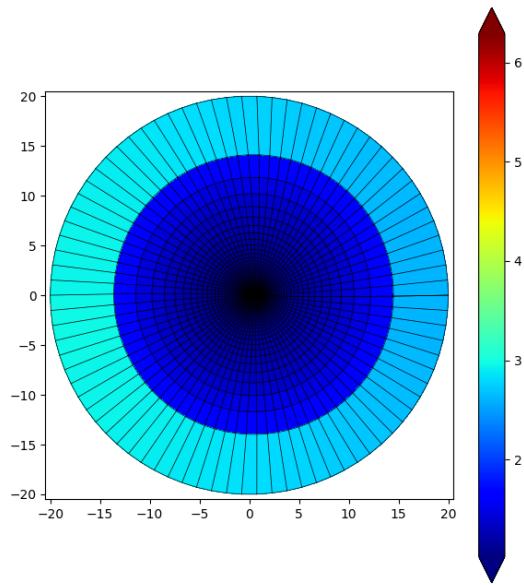
(b) Acercamiento a perfil $N = 65$



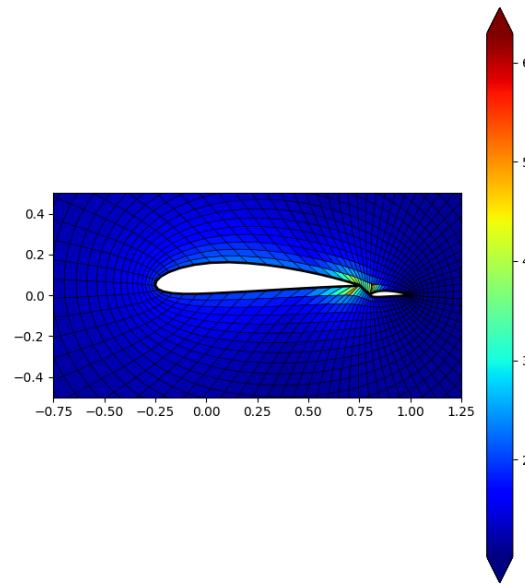
(c) Vista Completa $a = 21,5$

(d) Acercamiento a perfil $a = 21,5$

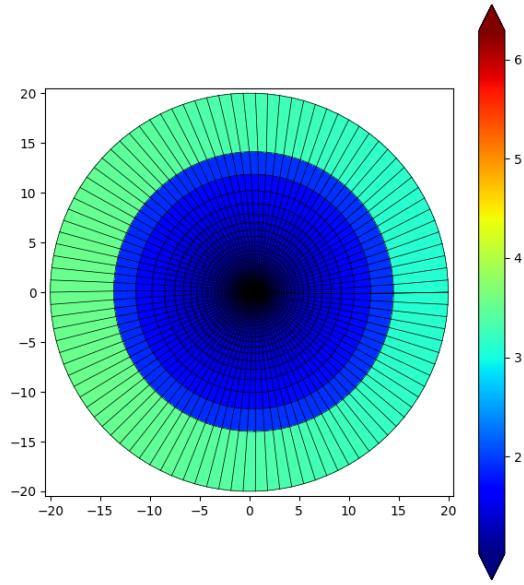
Figura 6.12: Skew para malla tipo O con perfil NACA4415



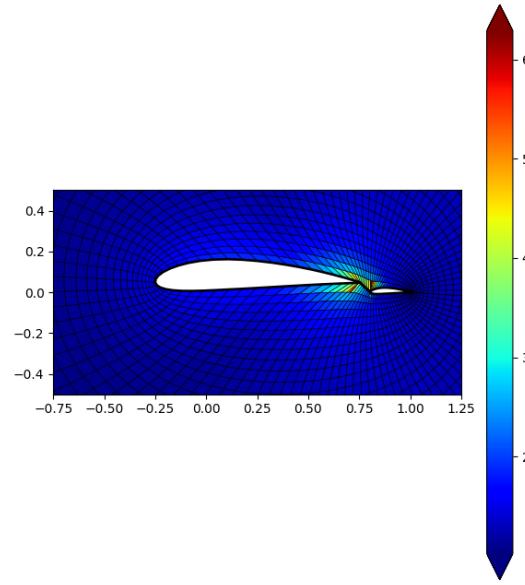
(e) Vista Completa



(f) Acercamiento a perfil

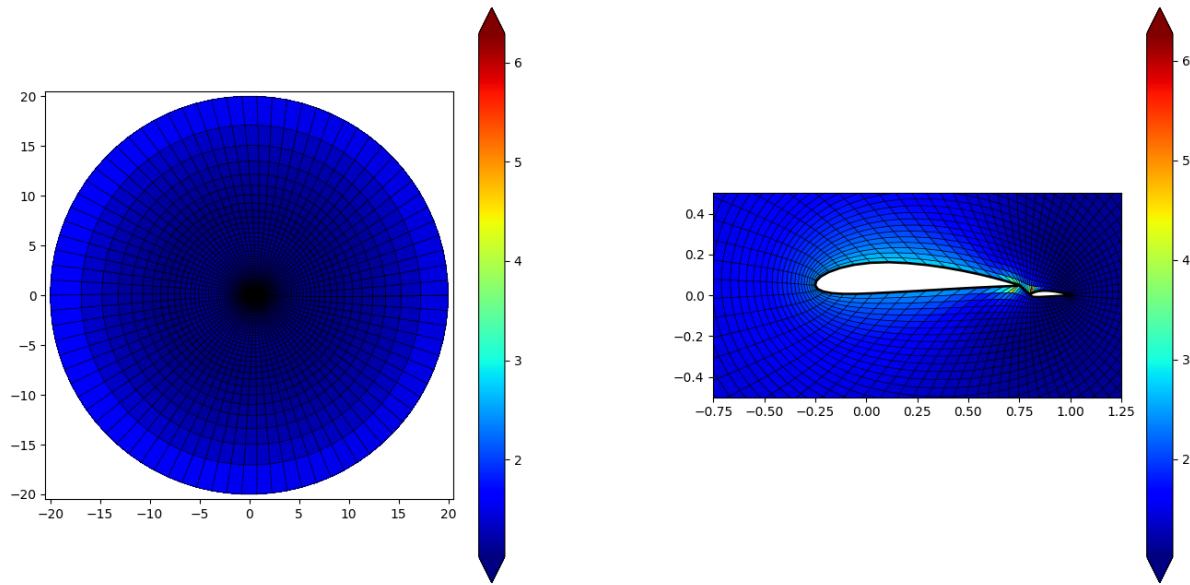


(g) Vista Completa $M = 103$



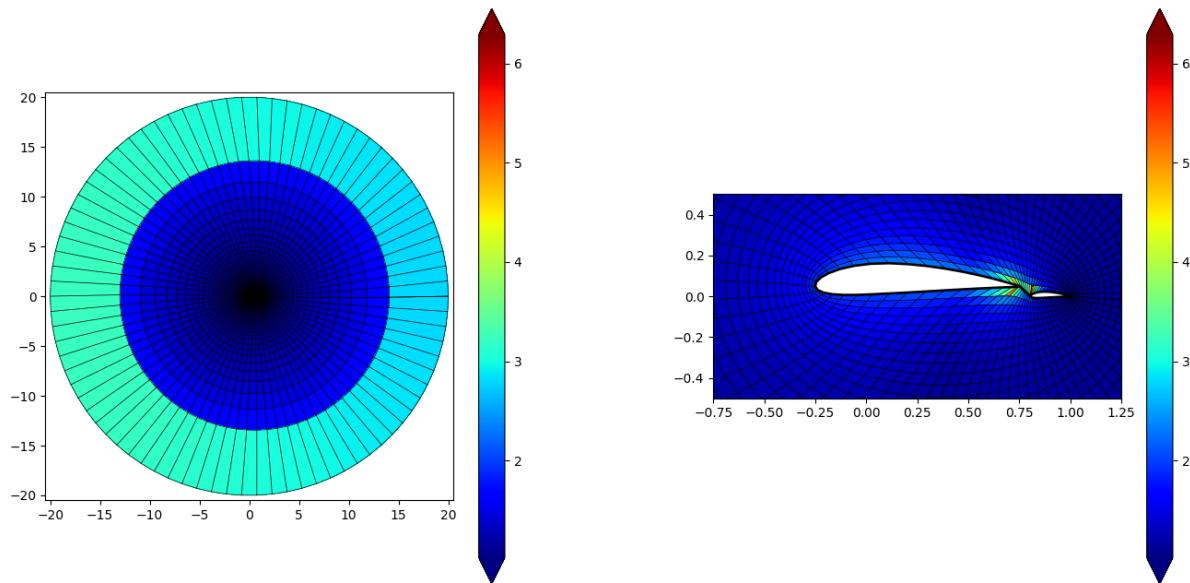
(h) Acercamiento a perfil $M = 103$

Figura 6.13: Aspect ratio para malla tipo O con perfil y flap NACA4415



(a) Vista Completa $N = 65$

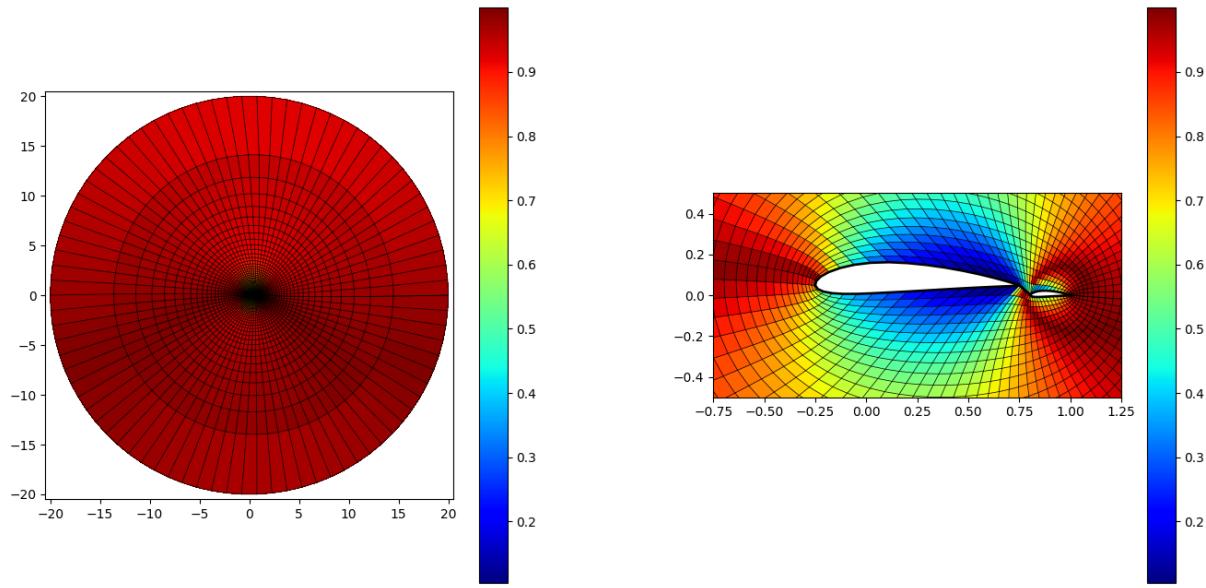
(b) Acercamiento a perfil $N = 65$



(c) Vista Completa $a = 21,5$

(d) Acercamiento a perfil $a = 21,5$

Figura 6.13: Aspect ratio para malla tipo O con perfil y flap NACA4415



(e) Vista Completa

(f) Acercamiento a perfil

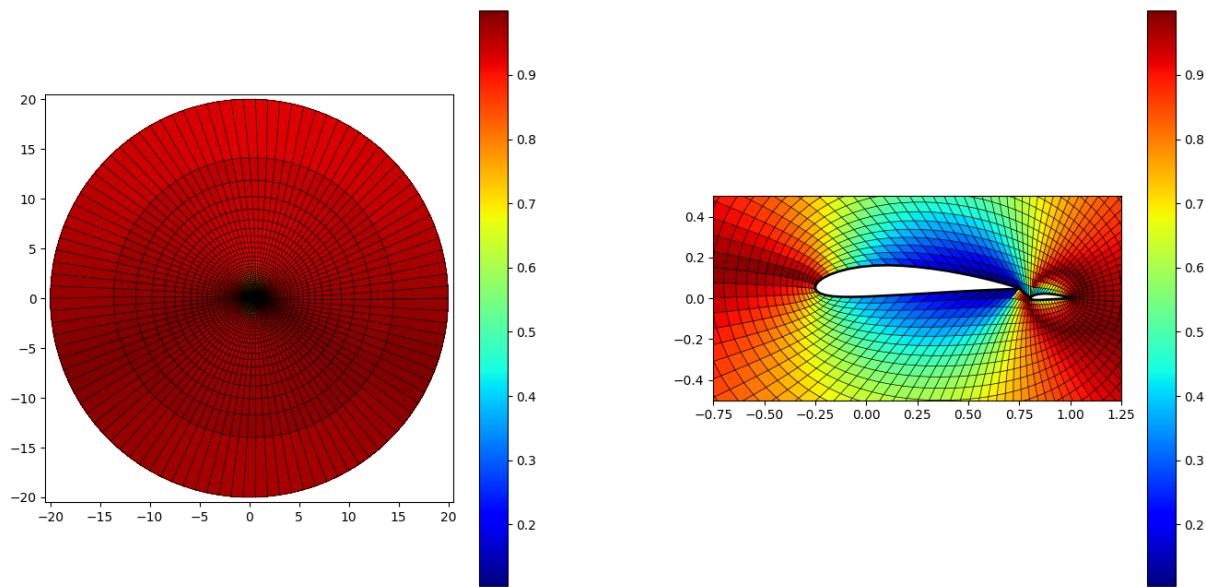
(g) Vista Completa $M = 103$ (h) Acercamiento a perfil $M = 103$

Figura 6.14: Skew para malla tipo O con perfil NACA4415

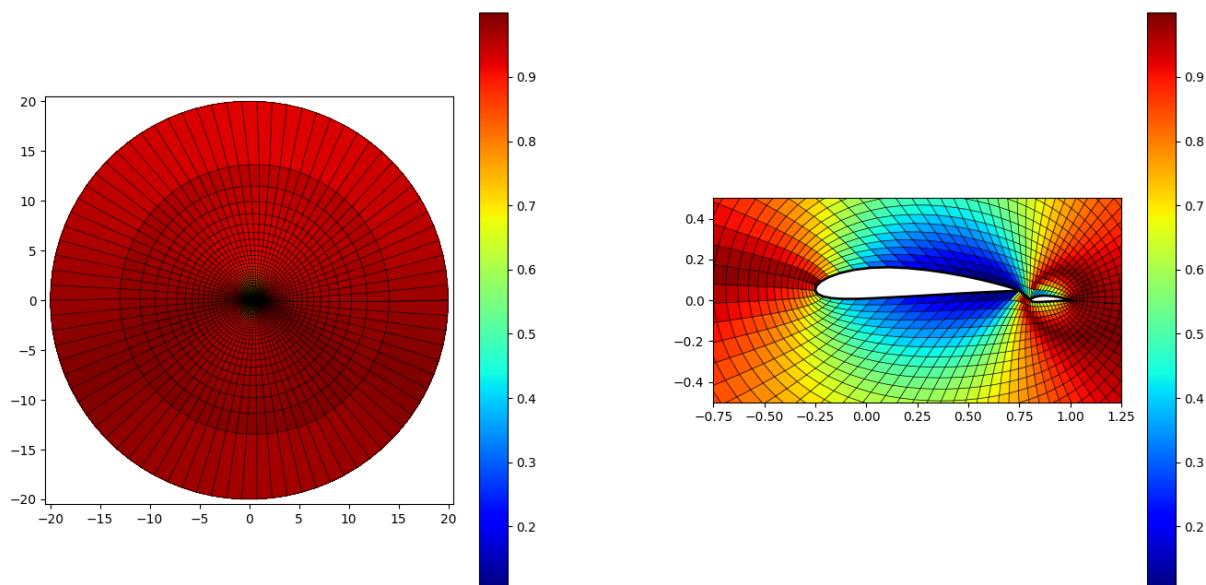
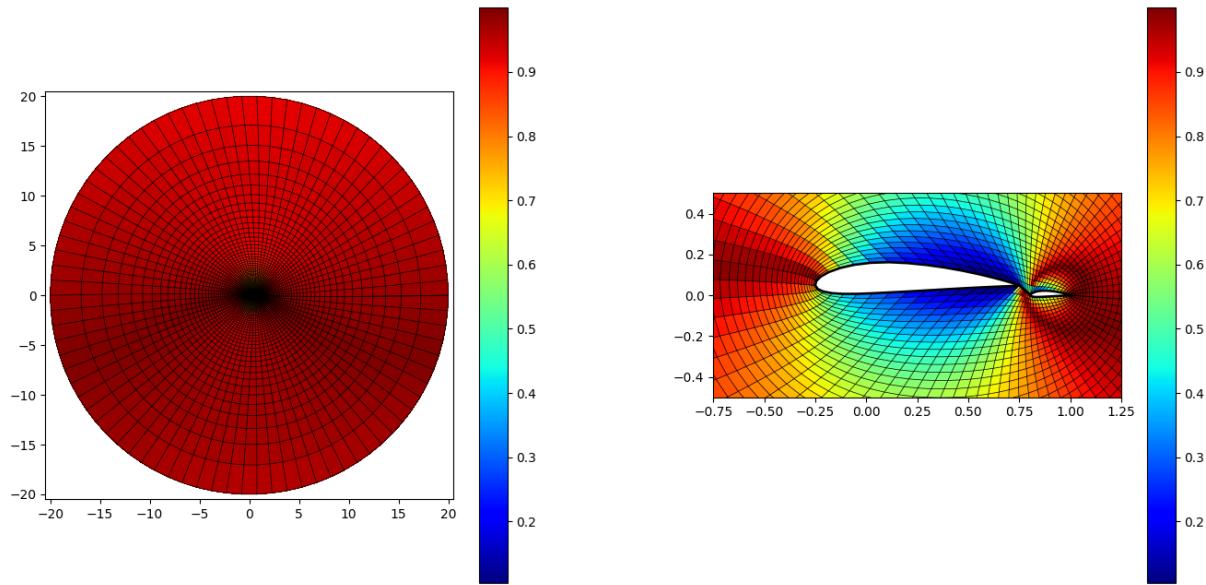


Figura 6.14: Skew para malla tipo O con perfil NACA4415

Apéndice A

Códigos

Apéndice B

Métodos Numéricos Iterativos

Existen en general, dos métodos de solución de sistemas de ecuaciones algebráicas lineales simultáneas: métodos directos y métodos iterativos.

Dentro de los métodos directos podemos encontrar los métodos de Cramer y de Gauss. La principal desventaja que presentan estos métodos es el gran número de operaciones aritméticas necesarias para obtener una solución del sistema. Desde el punto de vista computacional otras desventajas que presentan son el uso de memoria y cierta dificultad para ser programados. Los métodos iterativos son simples y fáciles de programar, por lo que se presentan como una mejor herramienta para llevar a cabo la solución del sistema. La idea de estos métodos, tal y como su nombre lo indica, es obtener la solución mediante un proceso iterativo, por lo general se asume una primera solución y con dichos valores propuestos se calculan nuevos valores de las incógnitas, con base en los nuevos valores calculados se obtienen nuevos valores. Este proceso se repite hasta satisfacer el criterio de convergencia establecido.

B.1. Métodos iterativos: Jacobi, Gauss-Seidel, SOR

B.1.1. Método de Jacobi

Para resolver una ecuación matricial de la forma $Au = d$ para el vector u de dimensiones $n \times 1$ suelen utilizarse métodos iterativos. Se pueden escribir las ecuaciones para cada término del vector u (asumiendo que ningún elemento de la diagonal principal de la matriz es igual a 0) de la siguiente manera

$$u_1 = \frac{1}{a_{11}} [d_1 - (a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + \cdots + a_{1n}u_n)]$$

$$u_2 = \frac{1}{a_{22}} [d_2 - (a_{21}u_1 + a_{23}u_3 + \cdots + a_{2n}u_n)]$$

...

$$u_n = \frac{1}{a_{nn}} [d_n - (a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \cdots + a_{n(n-1)}u_{n-1})]$$

A partir de estas ecuaciones se derivan varios esquemas iterativos, dada una solución inicial $u_i^{(1)}, i = 1, 2, \dots, n$. El primero de ellos es el método de Jacobi, en éste, la variable dependiente se

calcula usando los datos previamente obtenidos, quedando sus ecuaciones como

$$\begin{aligned}
 u_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}} [d_1 - (a_{12}u_2^k + a_{13}u_3^k + \cdots + a_{1n}u_n^k)] \\
 u_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}} [d_2 - (a_{21}u_1^k + a_{23}u_3^k + \cdots + a_{2n}u_n^k)] \\
 &\quad \dots \\
 u_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}} [d_n - (a_{n1}u_1^k + a_{n2}u_2^k + \cdots + a_{n(n-1)}u_{n-1}^k)]
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

La ecuación B.3 es la ecuación constitutiva del método iterativo de Jacobi, en ella k representa los valores previamente calculados, es decir, obtenidos de la iteración anterior o de la solución inicial, según sea el caso. El superíndice $k + 1$ indica el valor obtenido en la iteración actual.

B.1.2. Método de Gauss-Seidel

El siguiente método que puede desarrollarse es el método de Gauss-Seidel, el cual utiliza los valores calculados en la iteración actual para calcular los siguientes valores de la variable dependiente. Sus ecuaciones se escriben como

$$\begin{aligned}
 u_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}} [d_1 - (a_{12}u_2^k + a_{13}u_3^k + \cdots + a_{1n}u_n^k)] \\
 u_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}} [d_2 - (a_{21}u_1^{k+1} + a_{23}u_3^k + \cdots + a_{2n}u_n^k)] \\
 &\quad \dots \\
 u_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}} [d_n - (a_{n1}u_1^{k+1} + a_{n2}u_2^{k+1} + \cdots + a_{n(n-1)}u_{n-1}^{k+1})]
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

en este método se calcula un nuevo valor u_1^{k+1} con los valores de la iteración anterior, dicho valor luego es ocupado para el cálculo de u_2^{k+1} , ambos términos son utilizados para obtener u_3^{k+1} y el proceso continúa de la misma manera hasta llegar a la última ecuación. Es decir, el método de Gauss-Seidel implica el uso inmediato de los valores u_i^{k+1} tan pronto como están disponibles lo que da como resultado un uso menor de memoria en el ordenador, además de satisfacer el criterio de convergencia en menos iteraciones comparado con el método de Jacobi. La ecuación B.5 puede escribirse de la siguiente manera

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[d_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}u_j^k \right], \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{B.6}$$

B.1.3. Método de Sobre-relajación SOR

Si durante el proceso de solución se percibe una tendencia en los valores calculados se puede utilizar la dirección de cambio para extrapolar en la siguiente iteración y por lo tanto, acelerar el proceso de solución. A este procedimiento se le conoce como método SOR (Successive Over-Relaxation o

Sobre-relajación sucesiva). Este método introduce un parámetro extra ω conocido como parámetro de aceleración, el cual puede acelerar la convergencia. Dicho método está representado por

$$\begin{aligned} u_i^{k+1} &= u_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[d_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{k+1} - a_{ii} u_i^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^k \right] \\ &= \frac{\omega}{a_{ii}} \left[d_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^k \right] + (1 - \omega) u_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{B.7}$$

Cuando $\omega = 1$ el método SOR se convierte en el método de Gauss-Seidel. Si $1 < \omega < 2$ se está trabajando con sobre-relajación, mientras que al utilizar un valor $0 < \omega < 1$ se lleva a cabo una bajo-relajación. El uso de sobrerelajación se debe utilizar cuando de antemano se sabe que la solución del sistema tiende a converger bajo el método de Gauss-Seidel (cuando $\omega = 1$). La técnica de bajo-relajación es utilizada cuando se sabe que la solución tiende a diverger bajo el método de Gauss-Seidel, en este caso omega sirve como un término disipativo que ayuda a encontrar la convergencia.

Apéndice C

Solución de Sistemas de Bloque Tridiagonal

En el presente proyecto se lleva a cabo la solución del sistema obtenido en la sección anterior mediante el método propuesto por Hoffman [25].

Un sistema de ecuaciones diferenciales parciales es aproximado mediante un sistema de bloque tridiagonal cuando en dicho sistema se involucran tres puntos de la malla en cada nivel. El sistema resultante puede expresarse en su forma general como:

$$S\Delta Q = R \quad (\text{C.1})$$

donde ΔQ y R con vectores con m componentes, y a su vez, S representa el bloque tridiagonal

$$S = \begin{bmatrix} B_2 & C_2 & & & \\ A_3 & B_2 & C_3 & & \\ & A_4 & B_4 & C_4 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & A_{m-2} & B_{m-2} & C_{m-2} \\ & & & & A_{m-1} & B_{m-1} \end{bmatrix}$$

donde A_i, B_i y C_i son matrices de orden m .

Para poder continuar con la obtención de un esquema de solución, habrá que considerar la siguiente factorización

$$S = LU = \begin{bmatrix} \alpha_2 & & & & \\ A_3 & \alpha_3 & & & \\ & A_4 & \alpha_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & A_{m-2} & \alpha_{m-2} \\ & & & & A_{m-1} & \alpha_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \beta_2 & & & \\ & I & \beta_3 & & \\ & & I & \beta_4 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & I & \beta_{m-2} \\ & & & & & I \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

donde I es la matriz identidad de orden m y las matrices cuadradas α_i y β_i se determinan mediante

$$\alpha_2 = B_2 \quad y \quad \beta_2 = B_2^{-1}C_2 \quad (\text{C.3})$$

$$\alpha_i = B_i - A_i \beta_{i-1} \quad i = 3, 4, \dots, m-1 \quad (\text{C.4})$$

y

$$\beta_i = \alpha_i^{-1} C_i \quad i = 3, 4, \dots, m-2 \quad (\text{C.5})$$

Ahora, el sistema dado por la ecuación C.1 es equivalente a

$$LY = R \quad (\text{C.6})$$

donde

$$Y = U\Delta Q \quad (\text{C.7})$$

La ecuación C.6 al desarrollarse queda de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & & & & \\ A_3 & \alpha_3 & & & \\ & A_4 & \alpha_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & A_{m-1} & \alpha_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ \vdots \\ Y_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ \vdots \\ R_{m-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

donde

$$Y_2 = \alpha_2^{-1} R_2 \quad (\text{C.9})$$

y

$$Y_i = \alpha_i^{-1} (R_i - A_i Y_{i-1}) \quad i = 3, 4, \dots, m-1 \quad (\text{C.10})$$

La ecuación C.7 se desarrolla como

$$\begin{bmatrix} I & \beta_2 & & & \\ & I & \beta_3 & & \\ & & I & \beta_4 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & I & \beta_{m-2} \\ & & & & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \\ \vdots \\ \Delta Q_{m-2} \\ \Delta Q_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ \vdots \\ Y_{m-2} \\ Y_{m-1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

en donde

$$\Delta Q_{m-1} = Y_{m-1} \quad (\text{C.12})$$

y

$$\Delta Q_i = Y_i - \beta_i \Delta Q_{i+1} \quad i = m-1, m-2, \dots, 3, 2 \quad (\text{C.13})$$

Bibliografía

- [1] TJ Chung. *Computational fluid dynamics*. Cambridge university press, segunda edición, 2010.
- [2] Richard H Pletcher, John C Tannehill, and Dale Anderson. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. CRC Press, tercera edición, 2012.
- [3] Vladimir D Liseikin. *Grid generation methods*, volume 1. Springer, 1999.
- [4] Jiri Blazek. *Computational fluid dynamics: principles and applications*. Butterworth-Heinemann, tercera edición, 2015.
- [5] John David Anderson and J Wendt. *Computational fluid dynamics*, volume 206. Springer, tercera edición, 1995.
- [6] Yunus A Cengel and John M Cimbala. *Mecánica de fluidos: Fundamentos y Aplicaciones*. McGraw Hill Higher Education, segunda edición, 2012.
- [7] CFD Direct. <https://cfd.direct/openfoam/user-guide/introduction/>, 2017.
- [8] XFLR5. www.xflr5.com/, 2017.
- [9] Massachusetts Institute of Technology. <http://web.mit.edu/drela/Public/web/xfoil/>, 2001.
- [10] XFLOW. <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/xflow/>, 2018.
- [11] SU2. <https://su2code.github.io/>, 2018.
- [12] Steven C. Chapra and Raymond P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill, New York, sexta edición, 2010.
- [13] Joe F Thompson, Bharat K Soni, and Nigel P Weatherill. *Handbook of grid generation*. 1999.
- [14] Joe F Thompson, Zahir UA Warsi, and C Wayne Mastin. *Numerical grid generation: foundations and applications*, volume 45. North-holland Amsterdam, 1985.
- [15] Vladimir D Liseikin. *Grid generation methods*, volume 1. Springer, 1999.
- [16] Abhishek Khare, Ashish Singh, and Kishor Nokam. Best practices in grid generation for cfd applications using hypermesh. *Computational Research Laboratories*, page 2, 2009.
- [17] M Farrashkhalvat and JP Miles. *Basic Structured Grid Generation: With an introduction to unstructured grid generation*. Elsevier, 2003.

- [18] Mato F Siladic. Numerical grid generation and potential airfoil analysis and design. Technical report, AIR FORCE INST OF TECH WRIGHT-PATTERSON AFB OH, 1988.
- [19] Joe F Thompson, Frank C Thames, and C Wayne Mastin. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of computational physics*, 15(3):299–319, 1974.
- [20] Joseph L Steger and Denny S Chaussee. Generation of body-fitted coordinates using hyperbolic partial differential equations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1(4):431–437, 1980.
- [21] S Nakamura. Marching grid generation using parabolic partial differential equations. Technical report, OHIO STATE UNIV COLUMBUS DEPT OF MECHANICAL ENGINEERING, 1982.
- [22] Patrick Michael Knupp, CD Ernst, David C Thompson, CJ Stimpson, and Philippe Pierre Pebay. The verdict geometric quality library. Technical report, Sandia National Laboratories, 2006.
- [23] Charles Hirsch. Numerical computation of internal and external flows. vol. 2-computational methods for inviscid and viscous flows. *Chichester, England and New York, John Wiley & Sons, 1990, 708 p.*, 1990.
- [24] J.D. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill Education, 2010.
- [25] Klaus A Hoffmann and Steve T Chiang. Computational fluid dynamics volume 1. *Engineering Education System, Wichita, Kan, USA*, 2000.