# 数理方程复习整理

吕铭　物理 21

2014 年 1 月 9 日

## 1　二阶线性常微分方程

### 1.1　级数解的一般原理

1. 一般的，对于常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + q(z)w = 0$$
$$w(z_0) = c_0, \quad w'(z_0) = c_1$$

如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在圆 $|z - z_0| < R$ 内单值解析，则有唯一的一个解 $w(z) = c_0 w_1(z) + c_1 w_2(z)$ ，且 $w(z)$ 在这个圆内单值解析。而后可以通过解析延拓拓展到圆外。

2. 若 $z_0$ 是方程的奇点，在 $0 < |z - z_0| < R$ 内，方程的两个线性无关解是

$$\begin{aligned} w_1(z) &= (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \\ w_2(z) &= g w_1 \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \end{aligned}$$

其中 $\rho_1$ 、 $\rho_2$ 和 $g$ 都是常数。

3. 当 $z_0$ 是 $p(z)$ 的不超过一阶极点， $q(z)$ 的不超过二阶极点时，称 $z_0$ 为方程的正则奇点，此时级数只含有有限个负幂项，可以写作：

$$\begin{aligned} w_1(z) &= (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_0 \neq 0 \\ w_2(z) &= g w_1 \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k, \quad g \neq 0 \text{或} d_0 \neq 0 \end{aligned}$$

称之为正则解。 $g = 0$ 时，两个解的形式相同。 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 称为正则解的指标。

4. 对于 $\mathrm{Re}\rho_1 \geq \mathrm{Re}\rho_2$ ，则：

当 $\rho_1-\rho_2\neq$ 非负整数时　第二解一定不含对数项
当 $\rho_1-\rho_2=0$ 时　第二解一定含对数项
当 $\rho_1-\rho_2=$ 正整数时　第二解可能不含对数项

# 2 建立模型方程

1. 波动方程（双曲型方程）：小振动近似和胡克定律下，可以得到
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u=f$$
2. 热传递方程和扩散方程（抛物型方程）：似稳近似，介质各向同性
$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\nabla^2 u=f$$
3. 稳恒状态（椭圆型方程）：
   (a) 泊松方程（Poisson's equation）：$\nabla^2 u=-f$
   (b) 拉普拉斯方程（Laplace's equation）：$\nabla^2 u=0$
   (c) 亥姆霍兹方程（Helmholtz equation）：$\nabla^2 u+k^2 u=0$

# 3 内积空间与函数空间

## 3.1 $\delta$ 函数

（形式的，后取极限）

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x=f(0)$（定义）
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(-x)\,\mathrm{d}x=-f'(0)$
- $\displaystyle\delta(g(x))=\left.\frac{\delta(x-x_0)}{|g'(x_0)|}\right|_{g(x_0)=0}$
- $\displaystyle\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$（形式的，后做积分）

# 4 分离变量方法

## 4.1 斯图姆 -刘维尔型方程（Sturm–Liouville equation）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0$$

1. 定义算符 $\boldsymbol{L}=\dfrac{1}{\rho(x)}\left\{-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)\right\}$

2. 定义内积 $(y_1,y_2)\equiv\displaystyle\int_a^b y_1^*(x)y_2(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$（要求 $\rho(x)\geq 0$ 且不恒为零）

3. 边界条件（使得 $\boldsymbol{L}$ 是自伴的）：当 $p(x),q(x)\in\mathbb{R}(x)$ 时

$$(y_1,\boldsymbol{L}y_2)-(\boldsymbol{L}y_1,y_2)=p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}y_2\right)\bigg|_{a_1}^{a_2}=0$$

   (a) 非周期性条件： $p(x)\left(y_1^*\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}y_2\right)\bigg|_{x=a_i}=0$

   - $p(x)|_{x=a_i}\neq 0$ ，第一二三类边界条件等价于 $\left[y_1^*\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}y_2\right]_{x=a_i}=0$
   - $p(x)|_{x=a_i}=0$ ，如果 $a_i$ 点是方程正则奇点，边界条件通常是有界条件
   - $p(x)|_{x=a_i}=0$ ，且 $a_i$ 点是方程非正则奇点，可通过要求函数平方可积（即“归一化条件”）而确定本征值

   (b) 周期性条件： $[p(x),q(x),\rho(x),y(x),y'(x)]_{a_1}^{a_2}=0$

这样的定义下，S-L 方程的本征值问题满足上面的一般性讨论。

# 5 本征值问题与特殊函数

## 5.1 拉普拉斯算符（Laplace operator）

| 坐标系 | 坐标表示 |
|---|---|
| 三维柱坐标系 | $\nabla^2\equiv\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ |
| 三维球坐标系 | $\nabla^2\equiv\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ |

## 5.2 亥姆霍兹方程（Helmholtz equation）的分离变量

1. 柱坐标系

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+ku=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}+\lambda^2 Z=0\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\nu^2\Phi=0\quad\text{（}2\pi\text{ 周期条件）}\\[2ex]\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda^2-\dfrac{\nu^2}{r^2}\right)R=0\quad\cdots\cdots\text{贝塞尔方程}\end{cases}$$

2. 球坐标系

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+m^2\Phi=0 \quad 2\pi\text{（}2\pi\text{ 周期条件）}\\[2mm] \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\dfrac{l(l+1)}{r^2}\right)R=0 \qquad \cdots\cdots\text{球贝塞尔方程}\\[2mm] \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(l(l+1)-\dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0 \quad \cdots\cdots\text{连带勒让德方程}\end{cases}$$

## 5.3 常用本征函数表

对于 $\boldsymbol{L}u+\lambda u=0$ ①，其中 $\boldsymbol{L}=\dfrac{1}{\rho(x)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)$ 可以确定权重。

### 5.3.1 非特殊函数

| $\boldsymbol{L}$ | 边界条件 | 本征函数 | 本征值 | 归一化系数② |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ | $u\|_{x=0,l}=0$ | $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ ③ | $\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ | $\sqrt{\frac{2}{l}}$ |
| | $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right\|_{x=0,l}=0$ | $1;\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ | $0;\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ | $\sqrt{\frac{1}{l}};\sqrt{\frac{2}{l}}$ |
| | 第三类 | $\sin\left(\lambda_n x+\phi\right)$ | $-\lambda_n^2$ ④ | 略 |
| | 周期性 | $1;\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{2\pi}{T}nx}$ | $0;\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2$ | $\sqrt{\frac{1}{T}}$ |

### 5.3.2 （连带）勒让德多项式

| $\boldsymbol{L}$ | 边界条件 | 本征函数 | 本征值 | 归一化系数 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]$ | $u\|_{x=\pm1}$ 有界 | $\mathrm{P}_l\left(x\right)$ ⑤ | $l(l+1)$ | $\sqrt{\frac{2}{2l+1}}$ |
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]-\frac{m^2}{1-x^2}$ | $u\|_{x=\pm1}$ 有界 | $\mathrm{P}_l^m(x)$ | $l(l+1)$ | $\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\frac{2}{2l+1}}$ |

### 5.3.3 贝塞尔函数与球贝塞尔函数

①此处对于本征值定义和上面的相差一个符号

③ $n=1,2,3,\cdots$，后同。

④ $\lambda_n$ 是边界条件相关的超越方程的根。

⑤ $l=0,1,2,\cdots$，后同

| $\boldsymbol{L}$ | 边界条件 | 本征函数 | 本征值 | 归一化系数 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{\nu^2}{r^2}$ | $u\vert_{r=0}$有界, $u\vert_{r=a}=0$ | $\mathrm{J}_\nu\left(k_i r\right)$[1] | $k_i^2$ | $\left[\frac{a^2}{2}\mathrm{J}_\nu'^2(k_i a)\right]^{-\frac{1}{2}}$ |
| | $u\vert_{r=0}$有界, $\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right\vert_{r=a}=0$ | $\mathrm{J}_\nu\left(k_i r\right)$ | $k_i^2$ | |
| | $u\vert_{r=0}$有界, 第三类 | $\mathrm{J}_\nu\left(k_i r\right)$ | $k_i^2$ | |
| | $u\vert_{r=a,b}$的齐次条件 | $\mathrm{J}_\nu, \mathrm{N}_\nu$ | $k_i^2$ | 略 |
| $\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}$ | $u\vert_{r=0}$有界, $u\vert_{r=a}=0$ | $\mathrm{j}_l(k_i r)$ | $k_i^2$ | |
| | $u\vert_{r=0}$有界, $u\vert_{r=a}$ | $\mathrm{j}_l(k_i r)$ | $k_i^2$ | |
| | $u\vert_{r=a,b}$的齐次条件 | $\mathrm{j}_l, \mathrm{n}_l$ | $k_i^2$ | 略 |

### 5.3.4 二元本征值问题

归一化系数为 1。

| $\boldsymbol{L}$ | 边界条件 | 本征函数 | 本征值 |
| --- | --- | --- | --- |
| $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ | $u\vert_{\theta=0,\pi}$ 有界, $u\vert_\phi$周期$2\pi$ | $\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$[2] | $l(l+1)$ |

## 5.4 特殊函数

### 5.4.1 勒让德多项式（Legendre polynomials）

1. $\mathrm{P}_l\left(x\right)=\sum_{n=0}^{l}\frac{1}{(n!)^2}\frac{(l+n)!}{(l-n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n \quad l=0,1,2,\cdots$

2. $\mathrm{P}_l\left(x\right)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left[(x^2-1)^l\right]$

3. $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=\infty}^{\infty}\mathrm{P}_l\left(x\right)t^l \quad |t|<\left|x\pm\sqrt{x^2-1}\right|$

### 5.4.2 连带勒让德函数（Associated Legendre polynomials）

1. $\mathrm{P}_l^m(x)=(-)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{P}_l\left(x\right)$

2. 相同阶但不同次的连带勒让德函数在区间 $[-1,1]$ 上正交

3. $\mathrm{P}_l^{-m}(x)=(-)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x)$

[1] $k_i$ 满足边界条件，下同。

[2] $m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$ ， $2l+1$ 重简并。权重因子 $\sin\theta$ 。

4. 正交性：

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_{l'}^{-m}(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad (-)^m \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

### 5.4.3 球面调和函数（球谐函数）

1. 归一化的球面调和函数定义（课件定义）：

$$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

其中 $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm l$

2. $\mathrm{Y}_l^{m*}(\theta,\phi) = (-)^m \mathrm{Y}_l^{-m}(\theta,\phi)$

### 5.4.4 贝塞尔函数（Bessel functions）和诺依曼函数（Neumann function）

1. $\mathrm{J}_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \qquad |\arg z| < \pi$

2. $\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi \mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \quad |\arg z| < \pi$

3. $\mathrm{J}_{-n}(z) = (-)^n \mathrm{J}_n(z)$ 其中 $n$ 为整数

4. 线性相关性（朗斯基行列式）：

$$\begin{aligned} \Delta[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] &= -\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu \\ \Delta[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{N}_\nu(z)] &= \frac{2}{\pi z} \end{aligned}$$

5. 递推公式

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\nu \mathrm{J}_\nu(z)] &= z^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(z) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\right] &= -z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z) \end{aligned}$$

诺依曼函数形式完全相同。

6. 渐近展开

$$\begin{aligned} \lim_{z\to0} \mathrm{N}_0(z) &\sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2} \\ \lim_{z\to\infty} \mathrm{J}_\nu(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad |\arg z| < \pi \\ \lim_{z\to\infty} \mathrm{N}_\nu(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad |\arg z| < \pi \end{aligned}$$

7. 整数阶特有的性质：

   (a) 生成函数

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)\,t^n,\quad 0<|t|<\infty$$

8. 一些积分式：

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \int_0^1(1-x^2)\mathrm{J}_0(\mu x)\,x\,\mathrm{d}x\bigg|_{\mathrm{J}_0(\mu)=0} &= \frac{2}{\mu^2}\mathrm{J}_2(\mu)\,\frac{4}{\mu^3}\mathrm{J}_1(\mu)\end{aligned}$$

9. $\mathrm{J}_{1/2}(z)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\sin z$

#### 5.4.5 球贝塞尔函数（Spherical Bessel function）

1. $l$ 阶球贝塞尔函数和 $l$ 阶球诺依曼函数定义

$$\begin{aligned}\mathrm{j}_l(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{J}_{l+1/2}(z)\\ \mathrm{n}_l(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{N}_{l+1/2}(z)\end{aligned}$$

2. $r=0$ 处 $\mathrm{j}_l(r)$ 有界， $\mathrm{n}_l(r)$ 无界

3. $r\to\infty$ 渐近行为：

$$\begin{aligned}\mathrm{j}_l(r) &\sim \frac{1}{r}\sin\left(r-\frac{l\pi}{2}\right)\\ \mathrm{n}_l(r) &\sim -\frac{1}{r}\cos\left(r-\frac{l\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

# 6 积分变换方法

## 6.1 拉普拉斯变换（Laplace transform）

1. 定义：

$$F(p)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t$$

   $F(p)$ 称为 $f(t)$ 的拉普拉斯换式，两者也分别称为像函数与原函数。 $\mathrm{e}^{-pt}$ 是拉普拉斯变换的核，简写为：

$$\begin{aligned}F(p)=\mathscr{L}\{f(t)\}\quad &\text{或}\quad F(p)\risingdotseq f(t)\\ f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}\quad &\text{或}\quad f(t)\fallingdotseq F(p)\end{aligned}$$

2. 导数性质

$$
\begin{aligned}
f'(t) &\risingdotseq pF(p)-f(0) \\
f^{(n)}(t) &\risingdotseq p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}f^{(k-1)}(0)
\end{aligned}
$$

3. 卷积定理

$$F_1(p)F_2(p) \fallingdotseq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

4. 变换表

$$
\begin{aligned}
1 &\risingdotseq \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Re}\, p>0 \\
\mathrm{e}^{\alpha t} &\risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}, \quad \mathrm{Re}\, p>\mathrm{Re}\, \alpha \\
\delta(t-\tau) &\risingdotseq \mathrm{e}^{-\tau p} \\
\frac{1}{n!}t^n &\risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}} \\
\frac{\sin\omega t}{t} &\risingdotseq \frac{\pi}{2}-\arctan\frac{p}{\omega}
\end{aligned}
$$

## 6.2 傅里叶变换（Fourier transform）

1. 定义

$$F(k)=\mathscr{F}[f(x)]\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$

逆变换（反演）

$$f(x)=\mathscr{F}^{-1}[F(k)]\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

简记作 $f(x)\risingdotseq F(k)$

2. 卷积定理

$$
\begin{aligned}
F_1(k)F_2(k) &\fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
f_1(x)f_2(x) &\risingdotseq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\kappa)F_2(k-\kappa)\,\mathrm{d}\kappa
\end{aligned}
$$

3. 导数公式

$$f'(x)\risingdotseq \mathrm{i}kF(k), \quad F'(k)\fallingdotseq -\mathrm{i}xf(x)$$

4. 变换表

$$
\begin{aligned}
1 &\risingdotseq \sqrt{2\pi}\delta(k) \\
\delta(x-x') &\risingdotseq \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'}}{\sqrt{2\pi}} \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} &\risingdotseq \sqrt{2\pi}\delta(k-k') \\
\mathrm{e}^{\alpha x^2} &\risingdotseq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\alpha}}
\end{aligned}
$$

# 7 格林函数（Green's function）方法

## 7.1 不含时的格林函数

1. 格林第二公式

$$\iiint_V \left[u(\boldsymbol{r})\nabla^2 v(\boldsymbol{r}) - v(\boldsymbol{r})\nabla^2 u(\boldsymbol{r})\right] \mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} \left[u(\boldsymbol{r})\nabla(\boldsymbol{r}) - v(\boldsymbol{r})\nabla u(\boldsymbol{r})\right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

2. 稳定问题的格林函数

$$\begin{cases} \left(\nabla^2 + k^2\right) u(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r}) & \boldsymbol{r} \in V \\ \left[\alpha u(\boldsymbol{r}) + \beta \dfrac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}\right]_\Sigma = f(\Sigma) & \Sigma = \partial V \end{cases}$$

相应的格林函数满足的方程：

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 + k^2\right) G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') &= -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ \left[\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}\right]_{r\in\Sigma} &= 0 \end{aligned}$$

此时方程的解：

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint_V G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V' - \iint_\Sigma \frac{f(\Sigma')}{|\alpha|^2+|\beta|^2}\left[\alpha^* \frac{\partial G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}'} - \beta^* G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\right] \mathrm{d}\Sigma'$$

其中 $\alpha, \beta$ 可以是关于 $\sigma$ 的函数。

3. 格林函数的对称性 $G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$（取决于具体方程，此处对于上述稳恒问题成立）

## 7.2 含时的格林函数

1. 空间上的对称性与时间上的倒易性（取决于具体问题，此处对于波动方程和扩散问题成立）

$$G(x',t';x,t) = G(x,-t;x',-t')$$

在这个关系式中，将 $t$ 和 $t'$ 对换位置时出现的负号，正好保证了时间的先后次序不变，否则就会有悖于因果律的要求

2. 一维波动方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= f(x,t) \qquad 0<x<l \; t>0 \\ u(x,t)|_{x=0} = \mu(t), \quad u(x,t)|_{x=l} &= \nu(t) \qquad t>0 \\ u(x,t)|_{t=0} = \phi(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \psi(x) \qquad 0<x<l \end{aligned}$$

格林函数满足（先是 $G(x,-t;x',-t')$ 满足的方程再利用对称性与倒易性得到）：

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 G(x',t';x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 G(x',t';x,t)}{\partial x^2}=\delta(x-x')\delta(t-t') \qquad 0<x,x'<l\ t,t'>0\\
G(x',t';x,t)|_{x=0}=0,\quad G(x',t';x,t)|_{x=l}=0 \qquad t,t'>0\\
G(x',t';x,t)|_{t'<t}=0,\quad \left.\frac{\partial G(x',t';x,t)}{\partial t}\right|_{t'<t}=0 \qquad 0<x,x'<l
\end{gathered}$$

从而方程的解为

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^l \mathrm{d}x' \int_0^t G f(x',t')\,\mathrm{d}t' - \int_0^l \left[G\psi(x')-\phi(x')\frac{\partial G}{\partial t'}\right]_{t'=0}\mathrm{d}x' \\
&\quad -a^2\int_0^t \left[\nu(t')\frac{\partial G}{\partial t'}-\mu(t')\frac{\partial G}{\partial x'}\right]_{x'=0}\mathrm{d}t'
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
G &= G(x,t;x',t') \\
&= \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x'\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}a(t'-t)\right)\eta(t'-t)
\end{aligned}$$