分析力学整理

整理人: 物理 21 吕铭

2014 年 1 月 16 日

约定:
s 通常表示系统自由度
$\boldsymbol{q}$ 在多自由度下表示矢量 $(q_1, q_1, \dots)^{\mathrm{T}}$, $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}$ 在多自由度情况下表示梯度, $\boldsymbol{p}$ 同理
定义 $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{p} = \sum\limits_i q_i p_i$, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{q}} \equiv \sum\limits_i \dfrac{\partial u}{\partial q_i}\dfrac{\partial v}{\partial q_i}$

1 关于动力学方程的基本原理

1.1 力学原理

等价的力学第一性原理:

1. 牛顿定律
2. 达朗伯原理 (d'Alembert's principle): 理想约束下 $\sum\limits_i (\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$
3. 拉格朗日方程 (Lagrange equation):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = 0$$

   对于理想约束, 完整系, 在经典条件下 $L = T - V$,
   电磁相互作用下 $L = \dfrac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 - q\varphi + q\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$,
   狭义相对论下, 拉氏量 $L = -m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} - V$

4. 哈密顿 (正则) 方程 (Hamilton's equations):

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = [q_i, H] \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = [p_i, H] \end{cases}$$

   哈密顿量 (Hamiltonian) $H(p, q, t) = \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{p}_k - L$ 是拉格朗日量的勒让德变换 (Legendre transform)
   $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$; 不含时的哈密顿量 $H = E = T + V$

5. 哈密顿 (最小作用量) 原理 (Hamilton's priciple): 作用量 (action) S 满足

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,\mathrm{d}t=0$$

对于约束 $G_j(q_i,t)=0$, 令 $S=\displaystyle\int L+\lambda_j G_j\,\mathrm{d}t$ 其拉氏乘子 λ_j 以及与 q_i 相关的约束力 R_i 关系如下:

$$R_i=\sum_j\lambda_j\frac{\partial G_j}{\partial q_i}$$

6. 哈密顿 -雅克比方程 (Hamilton-Jacoby equation, HJE)
第一类

$$H\left(q,\frac{\partial S(q,t)}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S(q,t)}{\partial t}=0$$

$$\begin{cases}p=\dfrac{\partial S}{\partial q}\\ \xi=\dfrac{\partial S}{\partial\eta}\end{cases}$$

其中 η 是积分常量, 和 ξ 共同构成一组正则变换下的守恒正则变量, 取值决定于初始条件. 大括号中 $2s$ 个方程中科院得到 p,q 共 $2s$ 个表达式
第二类 (要求哈密顿量不含时)

$$H\left(q,\frac{\partial W(q)}{\partial q},t\right)=E$$

1.2 相关概念

1. 约束方程: $f_i(\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i,t)=0$:
完整约束 (holonomic constraints): $\dfrac{\partial f}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}=0$, 完整系;
稳定约束 (sleronomic constraints): $\dfrac{\partial f}{\partial t}=0$

2. 理想约束: $\displaystyle\sum_i\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$

3. 广义力 (generalized force): $Q_j=\displaystyle\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$

4. 正则共轭动量 (canonically conjugate momentum): $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$

5. p,q 坐标的 $2s$ 维空间称为相空间, 粒子在相空间中的轨迹称为相轨迹. 对于保守系统 (哈密顿量不含时) 相轨迹不相交, 不经过奇点和平衡点. 对于含时的体系, 可以将相空间推广到 p,q,t 的 $2s+1$ 维空间中.

1.2.1 泊松括号 (Poisson bracket)

定义

$$[f(q,p,t),g(q,p,t)]=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{q}}\cdot\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{p}}-\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{q}}$$

可以正面, 使用不同正则变量得到的结果是一样的.

性质

$$
\begin{aligned}
&[u,u]=0\\
&[u,v]=-[v,u]\\
&[\alpha u+\beta v,w]=\alpha[u,w]+\beta[v,w]\\
&[uv,w]=[u,w]v+u[v,w]\\
&[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0
\end{aligned}
$$

表现在正则方程中,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=[f,H]+\frac{\partial f}{\partial t}\\
&[q_i,f]=\frac{\partial f}{\partial p_i}\\
&[p_i,f]=-\frac{\partial f}{\partial q_i}\\
&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u,v]=0
\end{aligned}
$$

1.2.2 正则变换 (canonical transformation)

1. 定义: 变换

$$
\begin{cases}
Q=Q(q,p,t)\\
P=P(q,p,y)
\end{cases}
$$

在变换后仍然满足正则方程的非异变换 (要求自由度未变). 通常来说等价于

$$\lambda(\dot{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{p}-H)=\dot{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{P}-H^*+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

但 λ 表示标度变换, 以下讨论 $\lambda=1$ 的情况 (单价正则变换)

2. 正则变换的几个等价的充要条件

   (a) 存在生成函数

   $$\exists F.\quad \dot{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{p}-H=\dot{\boldsymbol{Q}}\cdot\boldsymbol{P}-H^*+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

   (b) 辛条件

   定义 $2s$ 维矢量 $\boldsymbol{\xi}=(q_1,q_2,\ldots,q_s,p_1,p_2,\ldots,p_s)^{\mathrm{T}}$ 和变换后的 $\boldsymbol{\Xi}=(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$, 正则变换满足条件:

   $$J^{\mathrm{T}}\Omega J=\Omega$$

   其中雅可比矩阵 $J_{ij}=\dfrac{\partial\Xi_i}{\partial\xi_j}$, 辛连结矩阵 $\Omega=\begin{pmatrix}0 & I_{s\times s}\\ -I_{s\times s} & 0\end{pmatrix}$

   (c) 基本泊松不变量

   $$
   \begin{aligned}
   [Q_j,Q_k]=[P_j,P_k]=0\\
   [Q_j,P_k]=-[P_j,Q_k]=\delta_{jk}
   \end{aligned}
   $$

(d) 泊松括号的相等 $\forall f,g.[f,g]_{P,Q}=[f,g]_{p,q}$

3. 常用的四类生成函数 (原则上 F 只要是关于 P,Q 和 p,q 中各 s 个坐标构成的函数即可)

$$\begin{cases} F=F_1(q,Q,t) \\ P=-\dfrac{\partial F_1}{\partial Q} \\ p=\dfrac{\partial F_1}{\partial q} \\ H^*=H+\dfrac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} F=F_2(q,P,t)-\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{P} \\ Q=\dfrac{\partial F_2}{\partial P} \\ p=\dfrac{\partial F_2}{\partial q} \\ H^*=H+\dfrac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F=F_3(p,Q,t)+\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p} \\ P=-\dfrac{\partial F_3}{\partial Q} \\ q=-\dfrac{\partial F_3}{\partial p} \\ H^*=H+\dfrac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} F=F_4(p,P,t)+\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}-\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{P} \\ Q=\dfrac{\partial F_4}{\partial P} \\ q=-\dfrac{\partial F_4}{\partial p} \\ H^*=H+\dfrac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases}$$

1.2.3 通用积分不变量

一类: Poincaré -Cartan 积分不变量:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{C(t)} p\,\mathrm{d}q-H\,\mathrm{d}t=0$$

取 $C(t)$ 在一个时间截面上, 有 Poincaré 线性相对积分不变量:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_{C(t)} p\,\mathrm{d}q=0$$

另一类在正则变换下不变的积分

$$\int_{\Sigma}\mathrm{d}^s q\mathrm{d}^s p=\int_{\Sigma^*}\mathrm{d}^s Q\mathrm{d}^s P$$

1.2.4 作用变量 -角变量 (Action-Angle variables)

是一组适应于周期运动的正则坐标, 作用变量 I 和角变量 Ψ , 使得 I 是常数而 Φ 线性增长且一个周期增长 2π . 一维情形是

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C p\,\mathrm{d}q=\frac{2}{2\pi}\iint\mathrm{d}q\mathrm{d}q$$
$$\dot{\Psi}=\omega=\frac{\partial H}{\partial I}$$

其中 C 是周期运动的闭合相轨迹. 这个结论可以用不含时的第一类生成函数得到.

1.2.5 可积系统, 不变环, 绕数

对于 s 个自由度的系统, 如果有 s 个相容的守恒量 (运动常数), 则称之为可积系统. 哈密顿量不显含时间的一维系统总是可积系统.

1.3 衍生定理

1. 诺特定理 (Noether's theorem): 对称性对应守恒量, 对于 $Q_i(s,t)|_{s=0}=q_i(t)$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}s}=0\Leftrightarrow\sum_i p_i\frac{\partial Q_i}{\partial s}=\text{const.}$$

2. 刘维尔定理 (Liouville's theorem): 哈密顿系统中, 正则变量相空间中的相流体不可压缩.

3. 彭加莱回复定理 (Poincaré recurrence theorem): 有限相空间内的相流体, 在足够长的有限时间内, 能够回到与初始相空间位置差异任意小的位置.

4. 维里定理 (Virial theorem) $U(\alpha\boldsymbol{r}_i)=\alpha^kU(\boldsymbol{r}_i)\Rightarrow k\bar{U}=2\bar{T}$

2 一些数学方法

1. 关于多元函数微分

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{xy}\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{xy}\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{xz}\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xz}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

2. 罗斯函数 (Routhian): 当 $\dfrac{\partial L}{\partial q_i}=0$ 时, 罗斯函数 $R=L-p_i\dot{q}_i$ 是个关于其他广义坐标的拉格朗日量

3. 勒让德变换 (Legendre transform): $f(x,y)\rightarrow g(u,x)=ux-f$ 其中 $u=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, 从而有

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}&=x\\\frac{\partial g}{\partial y}&=-\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

4. 变分法

5. 微扰方法:
对于非线性方程如 $\ddot{q}+\omega_0q+\epsilon q^3=0$, 令

$$\begin{aligned}a&=\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^kq_k\\\omega&=\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k\omega_k\\\tau&=\omega t\end{aligned}$$

关于 ϵ 逐项求解, 并调整 ω_k 使得发散项系数为 0 即可.

类似的, 对于受迫振动 $\ddot{q}+\omega_0 q+\epsilon q^3=F_0\cos\omega t$, 令

$$a=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k q_k$$
$$\delta=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k \delta_k$$
$$\tau=\omega t+\delta$$

6. 格林函数方法什么的……(数理方程讲的要深入多了。。)

3 几种模型

3.1 有心力

1. 开普勒运动 (Kapler problem):

$$\mu\ddot{r}=\frac{l^2}{\mu r^3}-\frac{k}{r^2}\xrightarrow{u=\frac{1}{r}}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}+u=\frac{\mu k}{l^2}$$

相关量:

$$r=\frac{p}{1+\epsilon\cos\theta}\qquad p=\frac{l^2}{\mu k}$$
$$\epsilon=\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu k^2}}\qquad a=\frac{p}{1-\epsilon^2}$$
$$E=\frac{k}{2p}(\epsilon^2-1)=-\frac{k}{2a}\qquad \tau=2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}a^{\frac{3}{2}}$$

开普勒方程 (Kepler's Equation)

$$\begin{aligned}T(\mathcal{E}) &= \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}}(\mathcal{E}-\epsilon\sin\mathcal{E})\\ r &= a(1-\epsilon\cos\mathcal{E})\\ x &= a(\cos\mathcal{E}-\epsilon),\quad y=a\sqrt{1-\epsilon^2}\sin\mathcal{E}\end{aligned}$$

2. 微分散射截面 (轴对称入射) $\sigma(\phi)=\dfrac{\rho}{\sin\phi}\left|\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\phi}\right|$

   总截面 $\sigma_{\text{tot}}=\int\sigma(\phi)\,\mathrm{d}\Omega$

3. 卢瑟福散射截面公式 $\sigma(\phi)=\left(\dfrac{k}{2mv_\infty}\right)^2\dfrac{1}{\sin^4\frac{\phi}{2}}$

3.2 微振动

1. 受迫振动 $\ddot{q}+\frac{1}{Q}\dot{q}+\omega_0 q=F(t)$, 对于 $F(t)=F_0\cos\Omega t$,

$$q(t)=\frac{F_0}{\sqrt{\left(\Omega^2-\omega_0^2+\frac{1}{2Q^2}\right)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}}}\cos(\Omega t+\varphi)$$

$$\tan\varphi=\frac{\Omega/Q}{\omega_0^2-\Omega^2}$$

半高宽 (Full width at half maximum, FWHM) $\frac{\Delta\omega}{\omega}=\frac{1}{Q}$ （ $Q\gg 1$ ）

2. 耦合摆

3. 多自由度的简正坐标, 简正模

在平衡点, 势能 $\frac{\partial V}{\partial q}=0$, 因而将势能泰勒展开到二阶, $V=V_0+\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}q_i q_j$, 矩阵 $v_{ij}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}$ 是实对称的矩阵, 对于稳定平衡是正定的.

动能 $T=\sum_i\frac{1}{2}m_i r_i^2=\sum_i\frac{1}{2}m_i\left(\sum_k\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{ij}t_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$, t_{ij} 是正定的实对称矩阵.

代入入相关方程可以得到 $\forall i.\sum_j(t_{ij}\ddot{q}_j+v_{ij}q_j)=0$

解相应的本征值问题 $\det|v-\omega^2 t|=0$ 得到的本征矢量几位简正坐标, 本征值 ω^2 可以得到简正频率.

出现简并会导致对于同一个简正频率有不同的简正坐标写法.

3.3 刚体

1. 转动惯量 $I=\begin{pmatrix}I_{xx}&I_{xy}&I_{xz}\\I_{yx}&I_{yy}&I_{yz}\\I_{zx}&I_{zy}&I_{zz}\end{pmatrix}$ 其中

$$I_{xx}=\int y^2+z^2\,\mathrm{d}m$$

$$I_{xy}=-\int xy\,\mathrm{d}m$$

是正定的实对称矩阵, 可以对角化. 本征矢量是惯量主轴, 本征值是主轴的转动惯量.

2. 转动动能 $T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}I\boldsymbol{\omega}$, 角动量 $\boldsymbol{J}=I\boldsymbol{\omega}$

3. 随体坐标系: 在惯量主轴重合的直角坐标下描述转动最为方便, 但此坐标系的位置和刚体角度有关. 注意: 随体坐标系不是随体参考系, 这仍然是相对质心静止的参考系, 是针对一个特定的角度临时建立的惯性参考系.

4. 欧拉角: 进动角 ϕ , 章动角 θ 和自转角 θ , 从 K' 系 (实验室系) $x'y'z'$ 到 K 系 (随体坐标系) xyz 的变换为:

$$K' \xrightarrow{U_1} K_1 \xrightarrow{U_2} K_2 \xrightarrow{U_3} K$$

其中:

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$U_3 = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. 欧拉运动学方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= U_3U_2U_1(0,0,\dot{\phi})^{\mathrm{T}} + U_3U_2(\dot{\theta},0,0)^{\mathrm{T}} + U_3(0,0,\dot{\psi})^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\psi\sin\theta \\ -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\cos\psi\sin\theta \\ \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\omega}' &= U_1^{\mathrm{T}}(0,0,\dot{\phi})^{\mathrm{T}} + U_1^{\mathrm{T}}U_2^{\mathrm{T}}(\dot{\theta},0,0)^{\mathrm{T}} + U_1^{\mathrm{T}}U_2^{\mathrm{T}}U_3^{\mathrm{T}}(0,0,\dot{\psi})^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\phi}\sin\phi\sin\theta \\ \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\phi}\cos\phi\sin\theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

6. 欧拉动力学方程: 在随体坐标系下,

$$\boldsymbol{M} = \dot{\boldsymbol{J}} = \dot{J}\hat{\boldsymbol{J}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_{11}\dot{\omega}_1 - (I_{22}-I_{33})\omega_2\omega_3 = M_1 \\ I_{22}\dot{\omega}_2 - (I_{33}-I_{11})\omega_3\omega_1 = M_2 \\ I_{33}\dot{\omega}_3 - (I_{11}-I_{22})\omega_1\omega_2 = M_3 \end{cases}$$

其中 $1,2,3$ 分别代表三个惯量主轴.

7. 刚体的自由转动 (欧拉 -潘索情况, Poinsot’s construction)
也即 $\boldsymbol{M} = 0$

   (a) 守恒量 $T = \dfrac{1}{2}\sum_i I_{ii}\omega_i^2 = \text{const.}$, $\boldsymbol{J} = \sum_i I_{ii}\omega_i\hat{\boldsymbol{i}} = \text{const.}$

(b) 惯性椭球

$$F(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\omega_1^2}{2T/I_{11}} + \frac{\omega_2^2}{2T/I_{22}} + \frac{\omega_3^2}{2T/I_{33}} = 1$$

椭球上的点表示角速度, 满足:

点的法向 $\boldsymbol{n} = \nabla_{\boldsymbol{\omega}} F = \frac{\boldsymbol{J}}{T} = \text{const.}$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{2T}{|\boldsymbol{J}|} = \text{const.}$

相应的几何阐释为自由刚体的转动等效于中心到一固定平面距离 $\frac{2T}{|\boldsymbol{J}|}$ 的惯量椭球的滚动.

(c) 本体瞬心迹, 切点在惯量椭球上的轨迹, 也即随体坐标系下的 $\boldsymbol{\omega}$ 轨迹.

(d) 空间瞬心迹, 切点在平面上的轨迹, 也即实验室系下的 $\boldsymbol{\omega}$ 轨迹.

(e) 对称刚体的两个瞬心迹是圆.

(f) 这个几何阐释并未给出运动方程, 只是指明了运动轨迹, 或者说放弃了时间信息.

8. 拉格朗日陀螺 (有一个固定点的对称陀螺)

对称陀螺 $I_{11} = I_{22} = I_1$ 受到重力力矩, $\boldsymbol{M} = mg\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{z}}$

(a) 拉格朗日量 $L = T - V = \frac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta$

(b) 守恒量 $p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3\omega_3 = J_3 = \text{const.}$, $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = \text{const.}$,

$E = \frac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 + mgl\cos\theta = \text{const.}$

(c) 运动方程

$$\begin{aligned}
\dot\phi &= \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} \\
\dot\psi &= \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cos\theta \\
E &= \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_1\left(\frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin\theta}\right)^2 + mgl\cos\theta + \frac{p_\psi^2}{2I_3}
\end{aligned}$$

$u = \cos\theta$, $\alpha = \frac{2E}{I_1} - \frac{p_\psi^2}{I_1 I_3}$, $\beta = \frac{2mgl}{I_1}$, $a = \frac{p_\psi}{I_1}$, $b = \frac{p_\phi}{I_1}$ 有

$$\begin{aligned}
\dot u^2 &= (1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 \equiv f(u) \\
\dot\phi &= \frac{b - au}{1 - u^2}
\end{aligned}$$

(d) 运动情况分类:

$u \in [-1, 1]$, 同时, $\lim_{u\to\pm\infty} f(u) = \pm\infty$, $f(\pm 1) = -(b \pm a)^2 \le 0$, 而在运动过程中有 $f(u) = u^2 \ge 0$, 因此允许的运动范围和运动情况定性地决定于 $f(u)$ 在 $[1, -1]$ 区间零点的性质 (决定章动) 和 $f(u) > 0$ 处的 $b - au$ 符号 (决定进动).