离散数学 -图论整理

吕铭

1 基本概念

1. 图 (Graph) $G=(V(G),E(G))$
   其中 $V(G)\neq\emptyset$ 是结点 (vertex) 集, $E(G)\subseteq V(G)\times V(G)$ 是边 (edge) 集

   - 有向图 (directed graph), 无向图 (undirected graph), 混合图 (mixed graph)
   - 自环: 只与一个结点关联的边
   - 重边: 若一对结点之间有多条边
   - 多重图: 含有重边的图
   - 孤立点: 没有关联变的结点
   - 简单图: 无重边, 无自环的无向图

2. 图的阶 (order) $|V|=n$ (n 阶图), $|E|=m$

   - 完全图 K_n : $E(K_n)=V(K_n)\times V(K_n)$
   - 空图 N_n (null graph / empty graph): $E(N_n)=\emptyset$
   - 二分图: $\exists X,Y\subset V,X\cap Y=\emptyset.\forall e=(u,v)\in E,(u\in X,v\in Y)\vee(u\in Y,v\in X)$
   - 完全二分图 $K_{m,n}$

3. $e_k=(v_i,v_j)$

   - v_i,v_j 为相邻结点, e_k 分别与之相关联
   - 若 e_k 是有向边
     - v_i 是 v_j 的直接前驱 (direct predecessor)
     - v_j 是 v_i 的直接后继 (direct successor)
   - 若 e_k 是无向边, v_i,v_j 是 e_k 的两个端点

4. (无向图) 临点集: $\Gamma(v)=\{u|(u,v)\in E\}$
   (有向图) 直接后继集 (外邻集): $\Gamma^+(v)=\{u|(v,u)\in E\}$
   (有向图) 直接前趋集 (内邻集): $\Gamma^-(v)=\{u|(u,v)\in E\}$

5. 结点的度 (degree): $d(v)=d^+(v)+d^-(v)$
   正度 $d^+(v)=|\Gamma^+(v)|$

负度 $d^-(v)=|\Gamma^-(v)|$
$\sum_{v\in V(G)} d(v)=2m$
度为奇数的点的个数为偶数个
非空简单图中一定存在度相同的结点

6. 赋权图: 图中每一边 e_k 都赋予一个实数 w_k 作为该边的权
   正权图

7. 子图 $G'(V',E')\subset G: V'\subset V$, $E'\subset E$
   - 支撑子图 (生成子图): $V=V'$
   - 导出子图: $E'=E\cap(V'\times V')$
   - 平凡子图: G , $(V,\emptyset)$

8. 图的计算
   - $G_1\cup G_2=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2)$
   - $G_1\cap G_2=(V_1\cap V_2, E_1\cap E_2)$
   - $G_1\oplus G_2=(V_1\cup V_2, E_1\oplus E_2)$
   - $G-H=(V(G), E(G)-E(H))$ ($H\subset G$)
   - G 的补图: K_n-G
   - $G-v$ 是导出子图, $G-e$ 是支撑子图

9. 同构: 对于 $G_1(V_1,E_1), G_2(V_2,E_2)$, $\exists$双射$f: V_1\to V_2$ 使得 $(u,v)\in E_1 \Leftrightarrow (f(u),f(v))\in E_2$ 记作 $G_1\cong G_2$

2 代数表示

1. 邻接矩阵 (adjacency matrix) $A=[a_{ij}]_{n\times n}$

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (v_i,v_j)\in E\\ 0 & (v_i,v_j)\notin E\end{cases}$$

   不能表示重边
   邻接矩阵的映射含义: 布尔数域上的 n 维度线性空间 $A^n\to A^n$ 的线性映射, A^n 表示认可的结点, 邻接矩阵表示的道理就是认可结点到认可结点的转化映射, 也即边. 这里的加法运算和乘法运算分别是逻辑与和逻辑或. 在道路数量的意义上, 可以推广到正实数运算 (不是完整的域).
   图同构 $\Leftrightarrow G_1=PG_2P^{-1}$ 其中 P 是置换矩阵

2. 权矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$

$$a_{ij}=\begin{cases}w_{ij} & (v_i,v_j)\in E\\ 0 & (v_i,v_j)\notin E\end{cases}$$

   不能表示重边

3. 关联矩阵 $B=[b_{ij}]_{n\times m}$

$$b_{ij}=\begin{cases} 1 & e_j=(v_i,v_k)\in E \\ -1 & e_j=(v_k,v_i)\in E(\text{有向图}) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

   不能表示自环
   秩 $\operatorname{rank} B<n$, 有向图 $\operatorname{rank} B=n-1$, B 的余子式 $\det[B]_{IJ}=0,\pm1$, 行向量的最小线性相关组是一个连通支, 列向量的最小线性相关组是一个回路.

4. 边列表: 对于关联矩阵的列压缩, 两个 m 维向量 A,B

$$e_k=(v_i,v_j)\in E\Rightarrow A_k=i,B_k=j$$

   第三个向量放权 $Z_k=w_k$

5. 正向表: 对邻接矩阵的行压缩, 一个 $n+1$ 维向量 A , 一个 m 维向量 B

$$\Gamma^+(v_i)=\{B_j|A_i\le j<A_{i+1}\},A_{n+1}=m+1$$

   无向图的情形 B 是 $2m$ 维的
   逆向表则将直接前趋集中存放

6. 邻接表: 用单链表结构表示一个图

3 道路与回路

1. (有向) 道路 P : 边序列 $(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_q}),e_{i_k}=(v_{i_{k-1}},v_{i_k})$

2. (有向) 回路

3. 简单道路/回路: 没有重复边

4. 初级道路/回路: 边和结点均不重复, 简称路/回路

5. 弦: 初级回路中不相邻的两个结点间的边
   若 G 中每一点的度大于等于 3, 则 G 中必含带弦的回路

6. 连通图: (无向图) 任意两个结点之间都存在道路. 有向图按不考虑方向计

7. 极大连通子图 (连通支): 连通子图 H 不是 G 的任何连通子图的真子图

8. 欧拉道路 (回路): 无向连通图中的一条经过所有边的简单道路 (回路)

   - 存在欧拉回路 $\Leftrightarrow$ 各顶点的度都是偶数
   - 只有两个奇数度顶点 $\Rightarrow$ 存在欧拉道路
   - 连通图 G 有 k 个奇数度结点 $\Rightarrow$ $E(G)$ 可以划分成 $\frac{k}{2}$ 条简单道路

9. 哈密顿道路 (回路): 无向图连通图的一条过全部结点的初级道路 (回路). 含有 H-回路的图称为哈密顿图

   (a) 简单图 G 中, $\forall u, v \in V.d(u)+d(v) \geq n-1 \Rightarrow \exists$H-道路

   (b) 闭合图 $C(G)$: $u, v \in V, (u, v) \notin E, d(u)+d(v) \geq n$ 则令 $G \leftarrow G+(u, v)$, 迭代至没有这样的结点

      - 简单图 G 的闭合图 $C(G)$ 是唯一的
      - 简单图 G 中, $u, v \in V, (u, v) \notin E, d(u)+d(v) \geq n$ 则 G 存在 H-回路 $\Leftrightarrow$ $G+(u, v)$ 存在 H-回路
      - G 存在 H-回路 $\Leftrightarrow$ $C(G)$ 存在 H-回路

   (c) 存在 H-道路 $\Rightarrow$ 四染色

10. 关键路径

   (a) PT(Potentialtask graph) 图

      - 用结点 i 表示工序 i
      - 用有向边 e_{ij} 表示工序 i 和工序 j 之间的依赖关系
      - 边权 w_{ij} 表示该工序 i 的时长

   (b) PERT(Programme evaluation and review technique) 图

      - 用有向边 e_{ij} 表示工序 (i, j)
      - 边权 w_{ij} 表示该工序花费的时间
      - 结点为工序之间的关系

   最长路径即关键路径

11. G 中不存在有向回路 $\Rightarrow$ $\exists v \in V(G).d^{-}(v)=0$, 存在编号 $v_1', v_2', \cdots, v_n'$ 使得 $\forall (v_i', v_j') \in E(G).i<j$

4 连通性

1. 割边: $e \in E(G), G'=G-e$连通支的数量增加
   以下叙述等价:

   - e 是 G 的一个割边
   - $\forall C \subset G.e \notin C$
   - $\exists u, w \in V(G).\forall P_{u,w} \ni e$
   - $\exists U \cup W=V(G), U \cap W=\emptyset.\forall u \in U, w \in W.\forall P_{uw}.e \in P_{uw}$

2. 割集 $S: G'=(V, E-S)$ 的连通支多 1, $\forall S' \subset S, G"=(V, E-S')$ 连通支相同

3. 有向割集, 割集中各边和割集正向或者反向

4. 割点 v : $G-v$ 的连通支数比 G 多
   以下叙述等价:

   - v 是 G 的一个割点
   - $\exists u,w \neq v.\forall P_{u,w} \ni v$
   - $\exists U \cup W = V - v, U \cap W = \emptyset.\forall u \in U, w \in W.\forall P_{uw}.v \in P_{uw}$

5. 块: 没有割点的极大连通子图
   以下叙述等价:

   - G 的一个块
   - $\forall u,w \in V(G).\exists$初级回路$C \in G.u,w \in C$
   - $\forall e,l \in E(G).\exists$初级回路$C \in G.e,l \in C$
   - $\forall e \in E(G), v \in V(G).\exists$初级回路$C \in G.e,v \in C$
   - $\forall u,w \in V(G), e \in E(G).\exists P_{uw}.e \in P_{uw}$
   - $\forall u,v,w \in V(G).\exists P_{uw}.v \in P_{uw}$
   - $\forall u,v,w \in V(G).\exists P_{uw}.v \notin P_{uw}$

6. (点) 断集 A : 连通图 G 在移去这些结点之后至少分为两个连通子图或剩下一个孤立结点

7. 断量: $\kappa(G) = \min|A|$

8. 边断集 B : 连通图 G 移去这些边之后变为非连通的

9. 边断量: $\lambda(G) = \min|B|$

10. $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \min_{v \in V(G)} d(v) \leq \lceil \frac{2m}{n} \rceil$

11. k 连通图: $\kappa(G) \geq k$

12. k 边连通图: $\lambda(G) \geq k$

13. 明格尔定理: 分离两个不相邻结点 u 和 v 的最少结点数, 等于不相交的 $u \to v$ 道路的最多数目
    设 G 的结点数 $n \leq k+1$, G 是 k 连通的充要条件是 G 中任意两个结点之间存在 k 条不相交的道路

5 树

1. 林: 不含回路的图

2. 树 T : 不含回路的连通图

3. 树枝: T 的边
4. 树叶: 度为 1 的结点
5. 树的以下定义等价:
   (a) 连通无回路
   (b) 连通且每条边都是割边
   (c) 连通且有 $n-1$ 条边
   (d) 有 $n-1$ 条边且无回路
   (e) 的任意两结点间有唯一道路
   (f) 无回路，但在任两结点间加上一条边后恰有一个回路
6. 支撑树 (生成树): G 的支撑子图, 且是树
7. 余树: $G-T$, 其中 T 是支撑子树
8. 根树 $\vec{T}$: $\exists v \in V.[d^-(v)=0 \wedge (\forall u \in V-v.d^-(v)=1)]$, 也称以 v 为根的外向树
9. 二叉树: 除树叶外，其余结点的正度最多为 2 的外向树
10. 完全二叉树: 除树叶外，其余结点的正度都是 2 的外向树
11. 赋权二叉树: 二叉树 T 的每一个叶结点 v_i 都分别赋以一个正实数 w_i
12. 带权路径总长度 (WPL): 树根 v_0 到叶结点 v_i 的路径 $P(v_0, v_i)$ 所包含的边数记为路径的长度 l_i ，则二叉树 T 带权的路径长度总长是

$$\mathrm{WPL} = \sum_{d(v_i)=1} l_i w_i$$

13. 最优二叉树: 若给定了树叶树目以及它们的权，可以构造出不同的赋权二叉树，在这些二叉树中，带权路径总长 WPL 最小的二叉树
14. 最短树: 赋权连通图中总长最小的支撑树
    - $T(V,E')$ 是 $G=(V,E)$ 的最短树 $\Leftrightarrow$ $\forall e \in E-E'.\forall a \in C^e.w(e) \geq w(a)$, 这里 C^e 表示余树边 e 对应的回路
    - $V' \subsetneq V, e = \min\{(u,v)|u \in V', v \in V-V'\} \Rightarrow \exists$最短树$T \ni e$
15. 最优组播树 (Steiner 树): 不必包含所有节点而必须包含组播组成员的最短树 (NPC)
16.

6 图和图的矩阵运算

1. 结点间存在通路的判定: 应用邻接矩阵 A

$$\exists|P|=k: v_i \to v_j \Leftrightarrow A_{ij}^k \neq 0$$
$$\exists P: v_i \to v_j \Leftrightarrow \left(\vee_{k=1}^n A^k\right)_{ij} \neq 0 \quad (O(n^3))$$

2. 基本关联矩阵: 有向图的关联矩阵 B 中去掉任意一个结点 v_k 对应的行, 得到的矩阵 B_k
   - B_k 中线性相关的列代表的边含有回路
   - B_k 的 $n-1$ 阶子阵行列式非零 $\Leftrightarrow$ 这些边构成 G 的支撑树
   - 有向连通图的支撑树书目 $\det(B_k B_k^{\mathrm{T}})$ (应用 Binet-Cauchy 定理)
3. 根树基本关联矩阵
   - 每行每列只有 1 个 -1
   - 去掉所有的 1 行列式值不变, 非根树这样操作后行列式为 0 (记为 $\vec{B}_k$)
4. 图 G 中以 v_k 为根的根树数目是 $\det(\vec{B}_k B_k^{\mathrm{T}})$
5. (XX) 回路矩阵 C_x

$$C_{ij}=\begin{cases} 1 & e_j \in C_i \text{且回路方向一致} \\ -1 & e_j \in C_i \text{且回路方向相反} \\ 0 & e_j \notin C_i \end{cases}$$

   - 完全回路矩阵 C_e , 共 $2^{m-n+1}-1$ 行
   - 基本回路: 余树边 e 和其方向确定的回路
   - 基本回路矩阵 C_f , 共 $m-n+1$ 行, $\operatorname{rank} C_f = m-n+1$
     交换边顺序可以写成 $C_f=(I, C_{f_{12}})=$ (余树边, 树枝边)
   - 回路矩阵 C : 连通图 G 中 $m-n+1$ 个互相独立的回路组成的矩阵
6. 关联矩阵和 (xx) 回路矩阵关系 (边次序相同时): $BC_x^{\mathrm{T}}=0$
7. 连通图 G 的回路矩阵 C 的任一 $m-n+1$ 阶子阵行列式非零 $\Leftrightarrow$ 当且仅当这些列对应于 G 的某一棵余树
8. $B_k=(B_{11}, B_{12})=$ (余树边, 树枝边) , 则 $C_f=(I, -B_{11}^{\mathrm{T}} B_{12}^{-\mathrm{T}})$
9. (xx) 割集矩阵 S_x

$$S_{ij}=\begin{cases} 1 & e_j \in S_i \text{且方向一致} \\ -1 & e_j \in S_i \text{且方向相反} \\ 0 & e_j \notin C_i \end{cases}$$

   - 完全割集矩阵 S_e

- 基本割集: 树枝边 e 和其方向确定的割集
- 基本割集矩阵 S_f , 共 $n-1$ 行, $\operatorname{rank} S_e = \operatorname{rank} S_f = n-1$
  交换边顺序可以写成 $S_f = (S_{f_{12}}, I) =$ (余树边树枝边)
- 割集矩阵 S : 连通图 G 的 $n-1$ 个互相独立的割集构成的矩阵

10. $S_x C_x^{\mathrm{T}} = 0$

11. 对于边次序一致的基本割集矩阵 $S_f = (S_{f_{11}}, I)$ 和基本回路矩阵 $C_f = (I, C_{f_{12}})$, $S_{f_{11}} = -C_{f_{12}}^{\mathrm{T}} = B_{12}^{-1} B_{11}$

7 平面图

1. 若能把图 G 画在一个平面上，使任何两条边都不相交，就称 G 可嵌入平面，或称 G 是可平面图
2. 平面图: 可平面图在平面上的一个嵌入
3. 面 (域): 由平面图的若干边所构成的一个内不含任何结点及边的区域
4. 域的边界, 内部域, 无限域. 相邻, 不相邻, 公共边界
5. 可平面 $\Leftrightarrow$ 可球面
6. 欧拉公式: 平面连通图域的数目 $d = m - n + 2$
   推广: 对于有 k 个连通支的平面图: $n - m + d = k + 1$
7. 设平面图没有割边, 且每个域的边界数至少为 t , 则 $m \leq t(n-2)/(t-2)$
8. 极大平面图: $\forall (u,v) \notin E.G + (u,v)$不是平面图
   极大平面图中:
   - 连通的
   - 不存在割边
   - 每个域的边界数都是 3
   - $3d = 2m, m = 3n-6, d = 2n-4$ (对于简单平面图, 等号改为 $\leq$)
9. 简单平面图 G 中存在度小于 6 的结点
10. $K^{(1)} = K_5$ 和 $K^{(2)} = K_{3,3}$ 是不可平面图
11. 库拉图斯基 Kuratowski 定理: G 可平面 $\Leftrightarrow$ G 不存在 K 型子图 ($K^{(1)}$ 和 $K^{(2)}$ 图的边上添加度为 2 的结点)
12. 对偶图 G^* : 通过 D(drawing) 过程产生:
    - G 中每个确定的域 f_i 内设置一个结点 v_i^*

- 对域 f_i 与 f_j 的共同边界 e_k , 有一条边 $e_k^* = (v_i^*, v_j^*) \in E(G^*)$, 并与 e_k 相交一次
- 非共同边界: 若 e_k 处于 f_i 之内，则 v_i^* 有一个自环 e_k^* 与 e_k 相交一次

13. 对偶图的性质:

    (a) G^* 唯一

    (b) 平面连通图

    (c) $(G^*)^* = G$

    (d) $m^* = m, d^* = n, n^* = d$

    (e) G 中初级回路 C 对应的 S^* 是 G^* 的割集

    (f) $\exists G^* \Leftrightarrow G$是平面图

8 染色问题

1. 平面图 5-可着色

2. 平面图有 H-回路, 四色猜想成立

3. 若任何一个 3-正则平面图 (每个结点的度都是 3 的平面图) 的域可 4 着色，则任意平面图的域也可以 4 着色

4. 色数 $\gamma(G)$: 满足相邻结点着以不同颜色的最少颜色数目

$$\begin{array}{lll} \gamma(N_n) = 1, & \gamma(K_n) = n, & \gamma(K_n - e) = n - 1, \\ \gamma(C_{2n}) = 2, & \gamma(C_{2n+1}) = 3, & \gamma(K_{m,n}) = \gamma(T) = 2 \end{array}$$

$$\gamma(G) = 2 \Leftrightarrow \neg\exists |C| = 2n + 1$$

$$\gamma(G^*) = 2 \Leftrightarrow \exists \text{欧拉回路}$$

5. 边色数 $\beta(G)$: 满足相邻边着以不同颜色的最少颜色数目

6. 着色问题: 尽可能少的冲突. (NPC)

9 具体问题和算法

1. 道路存在性的判定

算法 1: 道路存在性的 Warshall 算法

```
for i=1 to n
    for j=1 to n
        for k=1 to n
            p_jk = p_jk ∨ (p_ji ∧ p_ik)
```

2. 旅行商问题: 给定一个正权完全图, 求最短 H-回路 (NP-hard)

- 精确解: 分支定界法 $O(n!)$
- 近似解: ” 便宜” 算法 $O(n^2)$
  设正权完全图的边权满足 $w_{ij}+w_{jk}>w_{ik}$ ，其旅行商问题的最优值为 Q ，便宜算法的值是 T ，则 $T<2Q$ 。

算法 2: 旅行商问题的分支定界法

```
sort w_i in increasing order
d_0 = ∞
DFS n edges (s_i):
    if d(s_i) < d_0
        d_0 = d(s_i)
    if for the next n edges d(s) ≥ d_0
        pop
```

算法 3: 旅行商问题的便宜算法

```
S̄ = {2,3,⋯,n}, w(1,1) = 0, k = 1, T = (1,1)
for i ∈ S̄
    w(i,k) = w_{i1}
while S̄ ≠ ∅
    find min_{i∈S̄,k∈T} w(i,k) = w(j,k)
    find (t_1,t), (t,t_2) ∈ T
    if w(j,t_1) − w(t,t_1) ≤ w(j,t_2) − w(t,t_2)
        insert j between t_1 and t
    else
        insert j between t and t_2
    S̄ = S̄ − j
    for i ∈ S̄
        w(i,k) = min(w(i,k), w(i,j))
```

3. 最短路径:

- 正边权 Dijkstra 算法 $O(m+n\log n)$
- 任意边权 Ford 算法: 对于 $\pi(i)$ 反复迭代至不变

算法 4: 最短路径的 Dijkstra 算法

```
S̄ = {2,3,⋯,n}, π(1) = 0, π(i) = w_{1i}
while S̄ ≠ ∅
```

find $\min_{i \in \bar{S}} \pi(i) = \pi(j)$
　　$\bar{S} = \bar{S} - j$
　　for $i \in \bar{S} \cap \Gamma^{+}(j)$
　　　　$\pi(i) = \min(\pi(i), \pi(j) + w_{ji})$

4. 中国邮路 (最佳邮路): 在一个正权连通图 G 中，从某点出发经过每条边至少一次最后返回出发点的最短回路

   - 欧拉回路
   - 欧拉道路和起点和终点间的最短路径
   - $\Leftrightarrow$ 每边最多重复一次, 且重复遍的长度之和不超过回路长度的一半
   - 最小权匹配算法 (Edmonds)
     确定 G 中度为奇的结点，构成 $V_0(G)$
     求 $V_0(G)$ 各结点之间在 G 中的最短路径 P_{ij} 及其长度 $\pi(v_i, v_j)$
     对 $V_0(G)$ 的结点进行最小权匹配，即选出 $|V_0(G)|/2$ 个 $\pi(v_i, v_j)$ ，保证每个结点在 $P_i j$ 中只出现一次，并且这些 $\pi(v_i, v_j)$ 的总和最小
     在最小权匹配里各 $\pi(v_i, v_j)$ 所对应的路径 P_{ij} 中的各边在 G 中重复一次，得到 G'
     G' 是欧拉图，它的一条欧拉回路即为解

5. Huffman 树 $O(n \log n)$

算法 5: Huffman 树

while $n \neq 1$
　　sort w_i in increasing order
　　$w_i = w_1 + w_2$
　　make a new node with l-child v_1 , r-child v_2 and weight w_i
　　delete w_1 and w_2 and add w_i
　　$n = n - 1$

6. 最短树求解的 Kruskal 算法 $O(m \log 2m)$

算法 6: Kruskal 算法

$T = \emptyset$
while $|T| < n - 1 \wedge E \neq \emptyset$
　　$e = \min E$
　　$E = E - e$
　　if no cycle in $T + e$
　　　　$T = T + e$
if $|T| < n - 1$
　　G is not connected

else
    output T

7. 最短树求解的 Prim 算法 $O(n^2)$

算法 7: Prim 算法

$t = v_1, T = \emptyset, U = \{t\}$
while $U \neq V$
    $w(t,u) = \min_{v \in V-U} w(t,v)$
    $T = T + e(t,u)$
    $U = U + u$
    for $v \in V - U$
        $w(t,v) = \min\{w(t,v), w(u,v)\}$

8. 图的平面性检测:

   (a) 若 G 是非连通的, 则分别检测每个连通支

   (b) 如果 G 中存在割点 v , 这时可将图 G 从割点处分离, 构成若干个不含割点的块, 然后检测每一块

   (c) 移去自环

   (d) 移去度为 2 的结点 v_i 及其关联的边, 而在它的两个邻点 v_j, v_k 之间加入边 (vj, vk) ,

   (e) 移去重边

   (f) 上两步并判断:

   - $m < 9 \vee n < 5$, G 可平面
   - $m > 3n - 6$, G 不可平面
   - 其他情况, 进一步测试 (DMP 算法等)

9. 哈拉里构造方法: 构造边数 $f(k,n) = \lceil \frac{kn}{2} \rceil$ 最少的 k 连通图

   (a) $k = 2r$
   $E = \{(v_i, v_j) | i - j \leq r \pmod n\}$

   (b) $k = 2r+1, n = 2l$
   $E = \{(v_i, v_j) | i - j \leq r \pmod n \vee i - j = l\}$

   (c) $k = 2r+1, n = 2l+1$
   $E = \{(v_i, v_j) | i - j \leq r \pmod n \vee i - j = l+1\} + (v_0, v_l)$

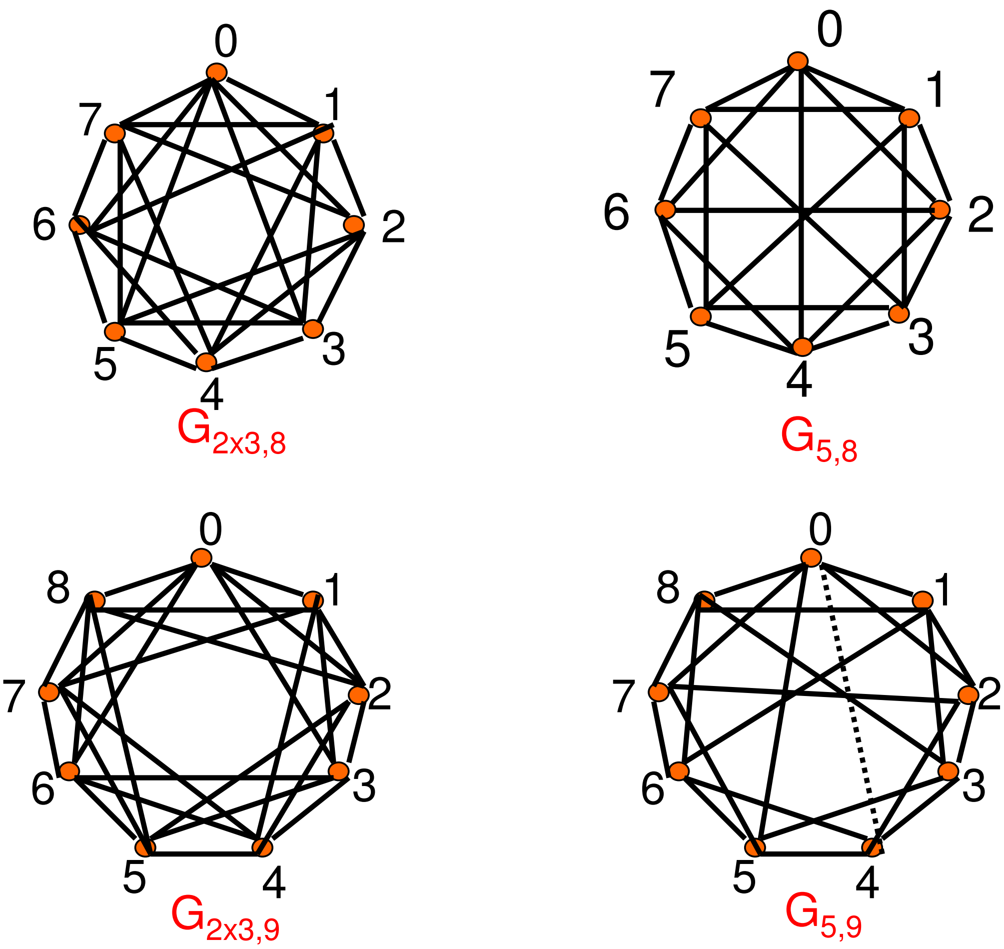

图 1: 由哈拉里的方法构造的一些图 $G_{k,n}$