数理方程记忆手册

吕铭　物理 21

2014 年 1 月 12 日

1　本征值问题与特殊函数

1.1　拉普拉斯算符（Laplace operator）

坐标系	坐标表示
三维柱坐标系	$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$
三维球坐标系	$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$

1.2　亥姆霍兹方程（Helmholtz equation）的分离变量

1. 柱坐标系

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+ku=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}+\lambda^2 Z=0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\nu^2\Phi=0 \quad \text{（}2\pi\text{ 周期条件）}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda^2-\dfrac{\nu^2}{r^2}\right)R=0 \quad \cdots\cdots\text{贝塞尔方程}\end{cases}$$

2. 球坐标系

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+m^2\Phi=0 \quad \text{（}2\pi\text{ 周期条件）}\\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\dfrac{l(l+1)}{r^2}\right)R=0 \quad \cdots\cdots\text{球贝塞尔方程}\\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(l(l+1)-\dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0 \quad \cdots\cdots\text{连带勒让德方程}\end{cases}$$

1.3 常用本征函数表

对于 $\boldsymbol{L}u+\lambda u=0$ ，其中 $\boldsymbol{L}=\dfrac{1}{\rho(x)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)$ 可以确定权重。

1.3.1 （连带）勒让德多项式

$\boldsymbol{L}$	边界条件	本征函数	本征值	归一化系数
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]$	$u\vert_{x=\pm1}$ 有界	$\mathrm{P}_l\,(x)$ [1]	$l(l+1)$	$\sqrt{\dfrac{2l+1}{2}}$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]-\dfrac{m^2}{1-x^2}$	$u\vert_{x=\pm1}$ 有界	$\mathrm{P}_l^m(x)$	$l(l+1)$	$\sqrt{\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}\dfrac{2l+1}{2}}$

1.3.2 贝塞尔函数与球贝塞尔函数

$\boldsymbol{L}$	边界条件	本征函数	本征值	归一化系数
$\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\dfrac{\nu^2}{r^2}$	$u\vert_{r=0}$有界$,u\vert_{r=a}$	$\mathrm{J}_\nu\,(k_ir)$		
	$u\vert_{r=a,b}$的齐次条件	$\mathrm{J}_\nu,\mathrm{N}_\nu$	k_i^2	略
$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\dfrac{l(l+1)}{r^2}$	$u\vert_{r=0}$有界$,u\vert_{r=a}$	$\mathrm{j}_l(k_ir)$	k_i^2	
	$u\vert_{r=a,b}$的齐次条件	$\mathrm{j}_l,\mathrm{n}_l$	k_i^2	略

1.3.3 二元本征值问题

归一化系数为 1。

$\boldsymbol{L}$	边界条件	本征函数	本征值
$\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right]+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}$	$u\vert_{\theta=0,\pi}$ 有界$,u\vert_\phi$周期2π	$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$ [2]	$l(l+1)$

1. $\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)=\sqrt{\dfrac{2l+1}{4\pi}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$
2. $\mathrm{Y}_l^{m*}(\theta,\phi)=(-)^m\mathrm{Y}_l^{-m}(\theta,\phi)$

[1] $l=0,1,2,\cdots$ ，后同

[2] $m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm l$ ， $2l+1$ 重简并。权重因子 $\sin\theta$ 。

1.4 特殊函数

1.4.1 勒让德多项式（Legendre polynomials）

1. $\mathrm{P}_l(x) = \sum_{n=0}^{l} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

2. $\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left[(x^2-1)^l\right]$

3. $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=\infty}^{\infty} \mathrm{P}_l(x)\, t^l$

1.4.2 连带勒让德函数（Associated Legendre polynomials）

1. $\mathrm{P}_l^m(x) = (-)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \mathrm{P}_l(x)$

2. 相同阶但不同次的连带勒让德函数在区间 $[-1,1]$ 上正交

3. $\mathrm{P}_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \mathrm{P}_l^m(x)$

4. $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x) \mathrm{P}_{l'}^{-m}(x)\, \mathrm{d}x = (-)^m \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1}$

1.4.3 贝塞尔函数（Bessel functions）和诺依曼函数（Neumann function）

1. $\mathrm{J}_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$

2. $\mathrm{N}_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi \mathrm{J}_\nu(z) - \mathrm{J}_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$

3. 线性相关性（朗斯基行列式）：

$$\begin{aligned} \Delta[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{J}_{-\nu}(z)] &= -\frac{2}{\pi z} \sin\pi\nu \\ \Delta[\mathrm{J}_\nu(z), \mathrm{N}_\nu(z)] &= \frac{2}{\pi z} \end{aligned}$$

4. 递推公式

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\nu \mathrm{J}_\nu(z)] &= z^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(z) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu} \mathrm{J}_\nu(z)\right] &= -z^{-\nu} \mathrm{J}_{\nu+1}(z) \end{aligned}$$

诺依曼函数形式完全相同。

5. 渐近展开

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \mathrm{N}_0(z) &\sim \frac{2}{\pi} \ln\frac{x}{2} \\ \lim_{z\to\infty} \mathrm{J}_\nu(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ \lim_{z\to\infty} \mathrm{N}_\nu(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

6. $\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(z)\, t^n,$

7. 一些积分式：

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \mathrm{J}_0(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (1-x^2)\mathrm{J}_0(\mu x)\, x\, \mathrm{d}x \Big|_{\mathrm{J}_0(\mu)=0} \\ &\qquad = \frac{2}{\mu^2}\mathrm{J}_2(\mu) \frac{4}{\mu^3}\mathrm{J}_1(\mu) \end{aligned}$$

8. $\mathrm{J}_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$

1.4.4 球贝塞尔函数（Spherical Bessel function）

1. l 阶球贝塞尔函数和 l 阶球诺依曼函数定义

$$\begin{aligned} \mathrm{j}_l(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \mathrm{J}_{l+1/2}(z) \\ \mathrm{n}_l(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \mathrm{N}_{l+1/2}(z) \end{aligned}$$

2. $r=0$ 处 $\mathrm{j}_l(r)$ 有界， $\mathrm{n}_l(r)$ 无界

3. $r\to\infty$ 渐近行为：

$$\begin{aligned} \mathrm{j}_l(r) &\sim \frac{1}{r} \sin\left(r - \frac{l\pi}{2}\right) \\ \mathrm{n}_l(r) &\sim -\frac{1}{r} \cos\left(r - \frac{l\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

2 积分变换方法

2.1 拉普拉斯变换（Laplace transform）

1. 定义：

$$F(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$F(p)$ 称为 $f(t)$ 的拉普拉斯换式，两者也分别称为像函数与原函数。 e^{-pt} 是拉普拉斯变换的核，简写为：

$$F(p)=\mathscr{L}\{f(t)\}\quad 或\quad F(p)\risingdotseq f(t)$$
$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}\quad 或\quad f(t)\fallingdotseq F(p)$$

2. 导数性质

$$\begin{aligned} f'(t) &\fallingdotseq pF(p)-f(0)\\ f^{(n)}(t) &\fallingdotseq p^nF(p)-\sum_{k=1}^n p^{n-k}f^{(k-1)}(0)\end{aligned}$$

3. 卷积定理

$$F_1(p)F_2(p)\risingdotseq\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

4. 变换表

$$\begin{aligned}
1 &\fallingdotseq \frac{1}{p},\quad \operatorname{Re}p>0\\
\mathrm{e}^{\alpha t} &\fallingdotseq \frac{1}{p-\alpha},\quad \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\alpha\\
\delta(t-\tau) &\fallingdotseq \mathrm{e}^{-\tau p}\\
\frac{1}{n!}t^n &\fallingdotseq \frac{1}{p^{n+1}}\\
\sin\omega t &\fallingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\\
\cos\omega t &\fallingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}\\
\frac{\sin\omega t}{t} &\fallingdotseq \frac{\pi}{2}-\arctan\frac{p}{\omega}\\
\operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} &\fallingdotseq \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}
\end{aligned}$$

其中 erfc x 称为余误差函数，定义 erfc $x\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$ 。相关的还有误差函数 erf $x\equiv 1-$ erfc $x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$

2.2 傅里叶变换（Fourier transform）

1. 定义

$$F(k)=\mathscr{F}[f(x)]\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$

逆变换（反演）

$$f(x)=\mathscr{F}^{-1}[F(k)]\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

简记作 $f(x)\fallingdotseq F(k)$

2. 卷积定理

$$\begin{aligned}
F_1(k)F_2(k) &\risingdotseq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f_1(\xi)f_2(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
f_1(x)f_2(x) &\fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty F_1(\kappa)F_2(k-\kappa)\,\mathrm{d}\kappa
\end{aligned}$$

3. 导数公式

$$f'(x)\fallingdotseq \mathrm{i}kF(k),\quad F'(k)\risingdotseq -\mathrm{i}xf(x)$$

4. 变换表

$$\begin{aligned}
1 &\fallingdotseq \sqrt{2\pi}\delta(k)\\
\delta(x-x') &\fallingdotseq \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'}}{\sqrt{2\pi}}\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} &\fallingdotseq \sqrt{2\pi}\delta(k-k')\\
\mathrm{e}^{\alpha x^2} &\fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\alpha}}\\
\frac{1}{|x|} &\fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{|k|}}\\
\mathrm{e}^{a|t|} &\fallingdotseq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+k^2}\\
x^n &\fallingdotseq \mathrm{i}^n\sqrt{2\pi}\delta^{(n)}(k)\\
x^{-n} &\fallingdotseq -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(-\mathrm{i}k)^{n-1)}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(k)\\
\operatorname{sgn}(x) &\fallingdotseq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\mathrm{i}k}
\end{aligned}$$