复变函数公式定理合集

吕铭　物理 21

2013 年 6 月 22 日

1　解析函数

1. 柯西 – 黎曼方程: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ （$\Leftrightarrow \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial z^*}=0$）

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y},-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}\partial v/\partial y\\ -\partial v/\partial x\end{pmatrix}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

函数可导的充要条件是柯西 – 黎曼方程成立且 u 和 v 可微.

2. $\sin \mathrm{i}z=\mathrm{i}\sinh z$; $\cos \mathrm{i}z=\cosh z$

3. $\sinh^{-1} z=\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)$; $\cosh^{-1} z=\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$

4. $\arcsin z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\ln\left(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}\right)$; $\arccos z=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$

5. 黎曼存在定理: 在扩充的复平面上任意两单连通区域存在唯一的（单叶）保角映射使得两区域可以相互变换.

6. 保角变换: 对于 $f(x+\mathrm{i}y)=\xi+\mathrm{i}\eta$;

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u(x,y)=\rho(x,y)\\ \Longleftrightarrow\quad &\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right]u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))=\frac{1}{|f'(z)|^2}\rho(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\end{aligned}$$

2　复变积分

1. 柯西定理: $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$; $\displaystyle\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z$

$f(z)$ 在 $\overline{G}$ 内解析, C 是 $\overline{G}$ 内的一个分段光滑闭合围道, 也可以是 $\overline{G}$ 的边界.

2. $\displaystyle\oint_{\partial G}(z-a)^n\,\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & n=-1,\ a\in G\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$

3. $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}k\,(\theta_2-\theta_1)$

   $\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2$ (闭?); $\lim\limits_{z\to a}(z-a)\,f(z) = k$ (一致地?); $f(z)$ 在 $z=a$ 的（空心）邻域内连续.

4. $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}K\,(\theta_2-\theta_1)$

   当 $\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$ 且 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = K$ (一致地?); $f(z)$ 在 ∞ 的邻域内连续.

5. 柯西积分公式: $f(a) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$

   （有界区域） $f(z)$ 在区域 $\overline{G}$ 内单值解析, $C=\partial G$ 分段光滑, $a\in G$;

   （无界区域） C 顺时针, $f(z)$ 在 C 上和外解析, 且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, a 在 C 外.

6. 均值定理 $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$

7. $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\oint_{\partial G}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$. 要求 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 内解析, $z\in G$

8. 柯西型积分: $\phi(\zeta)$ 是在曲线 C 上的连续函数, 定义 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C \dfrac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$ 是 C 外的解析函数, 有 $f^{(p)}(z) = \dfrac{p!}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}\,\mathrm{d}\zeta$.

9. $F(z) = \displaystyle\int_C f(t,z)\,\mathrm{d}t \Rightarrow F'(z) = \int_C \dfrac{\partial f(t,z)}{\partial z}\,\mathrm{d}t$

   要求 $f(t,z)$ 单值解析, C 分段光滑（可以是实轴的一部分）.

10. $\zeta\in\partial G$; $z\in G$; $|f(\zeta)|\le M$; $|\zeta-z|\ge R$ 有 $\left|f^{(n)}(z)\right| \le \dfrac{n!M}{R^n}$

    最大模定理: 解析函数 $f(z)$ 模 $|f(z)|$ 在定义域的内不存在极值, 除非 $f(z)$ 是常函数（令 $n=0$ ）

    刘维尔定理: 在全平面上解析且有界的函数为常函数（令 $n=1, R\to\infty$ ）

11. * 泊松公式: 对于 $f(x+\mathrm{i}y) = u+\mathrm{i}v$:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yu(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}\xi \\
v(x,y) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yv(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

3 级数展开

1. 绝对收敛判定:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛} \quad &\Leftarrow \quad \exists.\{v_n\} \quad v_n \geq |u_n|, \quad v_n \text{ 收敛} \\ &\Leftarrow \quad \forall.n, \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \rho < 1 \\ &\Leftarrow \quad \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l < 1 \\ &\Leftarrow \quad \varlimsup_{n\to\infty} |u_n|^{1/n} < 1\end{aligned}$$

2. 绝对收敛的性质:
   (a) 改换次序;
   (b) 可以把一个绝对收敛级数拆成几个子级数，每个子级数仍绝对收敛;
   (c) 两个绝对收敛级数之积仍然绝对收敛.

3. 收敛判定:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall.\epsilon > 0, \quad \exists.n, \quad \forall.p > 0, |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon \\ &\Leftarrow \quad u_n = v_n w_n, \{S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k\} \text{ 有界}, v_n \text{ 正项递减}, \lim_{n\to\infty} v_n = 0 \\ &\Leftarrow \quad u_n = v_n w_n, \{S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k\} \text{ 收敛}, v_n \text{ 单调有界}\end{aligned}$$

4. 维尔斯特拉斯的 M 判别法:

$$\forall.z \in G, |u_k(z)| < a_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) \text{ 绝对而且一致收敛}$$

5. 一致收敛级数的性质:
   (a) $u_k(z)$ 连续 $\Rightarrow S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 连续
   (b) $\int_C \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C u_k(z)\,\mathrm{d}z$ (C 分段光滑)
   (c) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right)^{(p)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$

6. 渐近级数（在一定辐角范围内） $w(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(z) \Leftrightarrow w(z) - \sum_{k=1}^{n-1} \psi_k(z) \sim \psi_n(z)$

7. 阿贝尔定理:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 $z=z_0$ 收敛, 则它在 $|z-a|<|z_0-a|$ 上绝对收敛, 内闭一致收敛

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在收敛圆 G 内收敛到 $f(z)$ 且在收敛圆上一点 z_0 也收敛（到 S ）, 则 $\lim_{z\to z_0, z\in G} f(z)=S$

8. 收敛半径 $R=\dfrac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

9. 泰勒展开: $f(z)$ 在以 a 为圆心的元 C 内解析, 则在圆内

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \\
a_n &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}
$$

10. 洛朗展开: $f(z)$ 在 $G=\{z|R_z<|z-b|<R_2\}$ 内单值解析, 则 $\forall . z\in G$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \\
a_n &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \quad (C\subset G)
\end{aligned}
$$

11. 解析函数的零点孤立性定理: 若 $f(z)$ 不恒等于零, 且在包含 $z=a$ 在内的区域内解析, 则必能找到圆 $|z-a|<\rho$, 使在圆内除了 $z=a$ 可能为零点外, $f(z)$ 再无其他零点.
推论包括解析函数的唯一性定理, 解析延拓的意义等.

12. 奇点:

- 非孤立奇点（含枝点）
- 孤立奇点
  - 可去奇点: 展开式不含负幂项（ ∞ 点为正幂项）, 在该点存在有限的极限.
  - 极点: 展开式含有限个负幂项（ ∞ 点为正幂项）, 阶数与倒数的零点阶数相同, 在该点的极限是 ∞ .
  - 本性奇点: 展开式含无穷多负幂项（ ∞ 点为正幂项）, 在本性奇点的任意一个小邻域内, 可以取（并且取无穷多次）任意的有限数值, 顶多可能有一个例外.

13. * 伯努利数 $\dfrac{z}{\mathrm{e}^z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{B}_n}{n!}z^n, \quad |z|<2\pi$

$$\mathrm{B}_{2n+1} = -\frac{1}{2}\delta_{n0}$$
$$\sum_{n=0}^{[k/2]} \frac{k!}{(k-2n+1)!} \frac{\mathrm{B}_{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{B}_2 = \frac{1}{6}, \qquad \mathrm{B}_4 = -\frac{1}{30}, \qquad \mathrm{B}_6 = \frac{1}{42}, \qquad \mathrm{B}_8 = -\frac{1}{30},$$
$$\mathrm{B}_{10} = \frac{5}{66} \qquad \mathrm{B}_{12} = -\frac{691}{2730} \qquad \mathrm{B}_{14} = \frac{7}{6} \qquad \mathrm{B}_{16} = -\frac{3617}{510}, \qquad \cdots$$

14. * 欧拉数 $\dfrac{2\mathrm{e}^{z/2}}{\mathrm{e}^z+1} = \dfrac{1}{\cos\frac{z}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{E}_n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad |z| < \pi$

$$\mathrm{E}_{2n+1} = 0,$$
$$\sum_{l=0}^{k} \frac{(2k)!}{(2l)!(2k-2l)!}\mathrm{E}_{2l} = 0,$$
$$\mathrm{E}_0 = 1, \qquad \mathrm{E}_2 = -1, \qquad \mathrm{E}_4 = 5, \qquad \mathrm{E}_6 = -61, \qquad \cdots$$

15. 常用展开:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$
$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < \infty$$
$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (\ln(1-z)|_{z=0} = 0) \qquad |z| < 1$$
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| < \infty$$
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| < \infty$$
$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad ((1+z)^\alpha|_{z=0} = 1) \qquad |z| < 1$$

$$\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\mathrm{B}_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \qquad |z| < 2\pi$$
$$\frac{z}{2}\tan\frac{z}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n-1} \frac{2^{2n}-1}{(2n)!} \mathrm{B}_{2n} z^{2n} \qquad |z| < \pi$$
$$z\csc = \frac{z}{\sin z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^{n-1} \frac{2(2^{2n-1}-1}{(2n)!} \mathrm{B}_{2n} z^{2n} \qquad |z| < \pi$$
$$\ln\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{2^{2n-1}}{n(2n)!} \mathrm{B}_{2n} z^{2n} \qquad |z| < \pi$$

$$\ln\cos z = \sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{n(2n)!}\mathrm{B}_{2n}z^{2n} \qquad |z|<\frac{\pi}{2}$$

$$\ln\frac{\tan z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)}{n(2n)!}\mathrm{B}_{2n}z^{2n} \qquad |z|<\frac{\pi}{2}$$

$$\tan z = z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^4}{15}+O\left(z^6\right) \qquad |z|<\frac{\pi}{2}$$

$$\cot z = \frac{1}{z}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}-\frac{2z^5}{945}+O\left(z^6\right) \qquad 0<|z|<\pi$$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7z^3}{360}+\frac{31z^5}{15120}+O\left(z^6\right) \qquad 0<|z|<\pi$$

$$\frac{1}{\cos z} = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+O\left(x^6\right) \qquad 0<|z|<\frac{\pi}{2}$$

4 留数定理

1. $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}\ f(b_k)$, b_k 为 $f(z)$ 在 C 内的奇点

2. $z=b$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-b)^m f(z)\Big|_{z=b}$

3. $z=b$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，$a_{-1}=\lim\limits_{z\to b}(z-b)f(z)$

4. $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ ，$z=b$ 是 $Q(z)$ 的一阶零点，$a_{-1}=\frac{P(z)}{Q'(z)}$

5. ∞ 点的留数是 $-a_{-1}$, 不要求为奇点

6. 对于有限个奇点的解析函数，$\sum\limits_{\text{扩充复平面}}\mathrm{res}\ f(b)=0$

7. 约当引理：在 $0\le\arg z\le\pi$ 范围内，$|z|\to\infty$ 时 $Q(z)$ 一致地趋近于 0，则 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}Q(z)e^{\mathrm{i}pz}\,\mathrm{d}z=0$, 其中 $p>0$ ，C_R 是以原点为圆心，R 为半径的半圆弧.

   在不同辐角范围内满足相似条件也可成立.

8. $I_n\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^n x}{x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{k}\left(\frac{n-2k}{2}\right)^{n-1}$

   $$I_1=\pi,\quad I_2=\pi,\quad I_3=\frac{3}{4}\pi,\quad I_4=\frac{2}{3}\pi,\quad I_5=\frac{115}{192}\pi,\quad I_6=\frac{11}{20}\pi,\cdots$$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

10. $\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\alpha-1)}$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$
$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+2x\cos\varphi+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\frac{\sin(1-\alpha)\varphi}{\sin\varphi}$$

11. 辐角原理 $w(z)$ 满足: 在简单闭合曲线 C 内除极点外解析; 在 C 上解析且不为零, 则
$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{w'(z)}{w(z)}\,\mathrm{d}z = N(w,C)-P(w,c) = \frac{\Delta_C \arg w(z)}{2\pi}$$
其中其中 $N(w,C)$ 与 $P(w,C)$ 分别表示 $w(z)$ 在 C 内零点与极点的个数（一个 m 阶零点算作 m 个零点; 一个 n 阶极点算 n 个极点）.

12. 儒歇定理 函数 $w(z)$ 和 $\varphi(z)$ 在简单闭合曲线 C 内以及 C 上解析, 且在 C 上恒满足 $|w(z)|>|\varphi(z)|$, 则函数 $w(z)$ 与 $w(z)+\varphi(z)$ 在 C 内有同样多的零点（几阶算几个）.

13. 威尔斯特拉斯定理 设整函数（在复平面上无奇点） $f(z)$ 只有不为 0 的一阶零点 $\{a_1,a_2,\cdots\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, 且存在围道序列 C_m （围道内包含 m 个零点 a1; $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ ），在其上满足 $\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|<M$ ， M 为与 m 无关的正数，则 $f(z)$ 可以展为无穷乘积
$$f(z)=f(0)\mathrm{e}^{\frac{f'(0)z}{f(0)}}\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1-\frac{z}{a_n})\mathrm{e}^{\frac{z}{a_n}}\right]$$

5 Γ 函数

1. $\Gamma(z)=\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\frac{1}{n+z} \overset{\mathrm{Re}\ z>0}{=\!=\!=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t$
也可以将积分范围改为 Re $t\to+\infty$ 的一个曲线.
2. $\Gamma(1)=1 \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{(}\pi)$
3. $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$
4. $\Gamma(n)=(n-1)!$
5. 互余宗量定理 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$
6. $\Gamma(z)\neq 0$
7. 倍乘公式 $\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma(z+\dfrac{1}{2})$

8. 斯特林公式（ $|z| \to \infty, \quad |\arg z| < \pi$ ）

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &\sim z^{z-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}+\cdots\right)\\
\Gamma(z+1) &\sim \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{\mathrm{e}}\right)^z\\
\ln\Gamma(z) &\sim \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi)+\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1260z^5}-\cdots\\
\ln n! &\sim n\ln n - n
\end{aligned}$$

9. 外氏无穷乘积 $\dfrac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\dfrac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}\right]$

10. $\psi(z) = \dfrac{\mathrm{d}\ln\Gamma(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$

11. $z = 0, -1, -2, \cdots$ 都是 $\psi(z)$ 的一阶极点, 留数均为 -1 ; 除了这些点以外, $\psi(z)$ 在全平面解析.

12. $\psi(z+n) = \psi(z) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z}{z+k}$

13. $\psi(1-z) = \psi(z) + \pi\cot\pi z$

14. $\psi(z) - \psi(-z) = -\dfrac{1}{z} - \pi\cot\pi z$

15. $\psi(2z) = \dfrac{1}{2}\psi(z) + \dfrac{1}{2}\psi(z+\dfrac{1}{2}) + \ln 2$

16. $\psi(z) \sim \ln z - \dfrac{1}{2z} - \dfrac{1}{12z^2} + \dfrac{1}{120z^4} - \dfrac{1}{252z^6} + \cdots \quad (z\to\infty, |\arg z| < \pi)$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}[\psi(z+n) - \ln n] = 0$

18. $\psi(z)$ 的特殊值

$$\begin{aligned}
\psi(1) &= -\gamma, & \psi'(1) &= \frac{\pi^2}{6},\\
\psi\left(\frac{1}{2}\right) &= -\gamma - 2\ln 2, & \psi'\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{2},\\
\psi\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\gamma - 2\ln 2 + 2, & \psi'\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{2} + 4,\\
\psi\left(\frac{1}{4}\right) &= -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\ln 2, & \psi\left(\frac{3}{4}\right) &= -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3\ln 2,\\
\psi\left(\frac{1}{3}\right) &= -\gamma - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3, & \psi\left(\frac{3}{4}\right) &= -\gamma + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3,
\end{aligned}$$

19. 欧拉常数 $\gamma = -\psi(1) = 0.57721566\cdots$

20. $\mathrm{B}(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$
要求 (Re $p > 0$, Re $q > 0$)

21. $\mathrm{B}(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ （延拓到全平面）