

数理方程复习整理

吕铭 物理 21

2014 年 1 月 12 日

1 二阶线性常微分方程

1.1 级数解的一般原理

1. 一般的, 对于常微分方程初值问题

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + p(z) \frac{dw}{dz} + q(z)w = 0$$
$$w(z_0) = c_0, \quad w'(z_0) = c_1$$

如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在圆 $|z - z_0| < R$ 内单值解析, 则有唯一的一个解 $w(z) = c_0 w_1(z) + c_1 w_2(z)$, 且 $w(z)$ 在这个圆内单值解析。而后可以通过解析延拓拓展到圆外。

2. 若 z_0 是方程的奇点, 在 $0 < |z - z_0| < R$ 内, 方程的两个线性无关解是

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$
$$w_2(z) = g w_1 \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$$

其中 ρ_1 、 ρ_2 和 g 都是常数。

3. 当 z_0 是 $p(z)$ 的不超过一阶极点, $q(z)$ 的不超过二阶极点时, 称 z_0 为方程的正则奇点, 此时级数只含有有限个负幂项, 可以写作:

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_0 \neq 0$$
$$w_2(z) = g w_1 \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k, \quad g \neq 0 \text{ 或 } d_0 \neq 0$$

称之为正则解。 $g = 0$ 时, 两个解的形式相同。 ρ_1 和 ρ_2 称为正则解的指标。

4. 对于 $\operatorname{Re} \rho_1 \geq \operatorname{Re} \rho_2$, 则:

当 $\rho_1 - \rho_2 \neq$ 非负整数时 第二解一定不含对数项
 当 $\rho_1 - \rho_2 = 0$ 时 第二解一定含对数项
 当 $\rho_1 - \rho_2 =$ 正整数时 第二解可能不含对数项

1.2 指标方程

$$\rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0 = 0$$

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)p(z), \quad q_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 q(z)$$

1.3 朗斯基行列式 (Wronskian)

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1'(z) & w_2'(z) \end{vmatrix} = w_1 \frac{dw_2}{dz} - w_2 \frac{dw_1}{dz}$$

原方程交叉相乘相减可以得到:

$$\frac{d\Delta(z)}{dz} + p(z)\Delta(z) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(z) = \Delta(z_0)e^{-\int_{z_0}^z p(z) dz}$$

1.4 主项平衡法

对于非正则奇点, 解的形式为:

$$w(z) = Ae^{S(z)} z^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 = 1$$

其中 $Ae^{S(z)} z^\rho$ 称为方程解的主项。每次仅保留方程的主要部分, 分次求的 $S(z) = S_0(z) + S_1(z) + \cdots + S_{n-1}(z)$ 的方法称为主项平衡法。

对于方程的非正则奇点, 通过主项平衡法求解得到的级数不一定是收敛的, 它往往只是渐近级数。

1.5 常微分方程的积分解法

对于二阶线性齐次常微分方程

$$p_0(z) \frac{d^2 u}{dz^2} + p_1(z) \frac{du}{dz} + p_2(z) u = 0$$

定义算符 $L = p_0(z) \frac{d^2}{dz^2} + p_1(z) \frac{d}{dz} + p_2(z)$, 引入积分变换

$$u(z) = \int_C K(z, t) v(t) dt$$

转而求 $v(t)$ 。其中 $K(z, t)$ 称为积分变换的核，路径 C 要根据具体的微分方程选取。

若找到合适的线性微分算子 M_t 使得：

$$L_z[K(z, t)] = M_t[K(z, t)]$$

再利用分部积分，使得

$$L[u] = \int_C K(z, t) \overline{M}_t[v(t)] dt + \{Q[K, v]\}_C$$

其中 \overline{M}_t 称为 M_t 的伴随算子， Q 是作用在 K 和 v 上的双线性伴式， $\{ \}_C$ 表示沿着路径 C 的变化。

当 $\overline{M}_t[v(t)] = 0$ 且 $\{Q[K, v]\}_C = 0$ 时，微分方程的解为：

$$u(z) = \int_C K(z, t) v(t) dt$$

常见的积分变换包括：

1. 拉普拉变换 (Laplace transform): $K(z, t) = e^{zt}$ 用于拉普拉斯型方程：

$$(a_0 z + b_0) \frac{d^2 u}{dz^2} + (a_1 z + b_1) \frac{du}{dz} + (a_2 z + b_2) u = 0$$

2. 欧拉变换 (Euler's transform): $K(z, t) = (z - t)^\mu$ 用于 Fox 型方程：

$$(a_0 z^2 + b_0 z + c_0) \frac{d^2 u}{dz^2} + (b_1 z + c_1) \frac{du}{dz} + c_2 u = 0$$

3. 梅林变换 (Mellin transform): $K(z, t) = z^t$

1.6 一些方程实例

1.6.1 欧拉方程 (Euler equation)

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + pz \frac{dw}{dz} + qw = 0$$

解的形式是 $w = z^\rho$ ，当 $\rho_1 = \rho_2$ 时， $w_2 = z^\rho \ln z$ 。

1.6.2 超几何方程 (Hypergeometric equation)

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)z] \frac{dw}{dz} - \alpha\beta w = 0$$

奇点 $z = 0$ ， $z = 1$ ， $z = \infty$ 。

超几何方程是 Fox 型方程，应用欧拉变换 ($\mu = -\alpha$ 或 $\mu = -\beta$) 得到积分解 ($\mu = -\alpha$ ， $\text{Re}(\gamma) > \text{Re}(\beta) > 0$ 时)：

$$\begin{aligned} w(z) &= A \int_1^\infty t^{\alpha-\gamma} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (z-t)^{-\alpha} dt \\ &= A' \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt \end{aligned}$$

1.6.3 勒让德方程 (Legendre equation)

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)y = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)\frac{dy}{dx} \right] + l(l+1)y = 0$$

奇点 $x = \pm 1$ 和 $x = \infty$ (都是正则奇点)。

1. 在 $x = 0$ 的邻域内的级数解:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x) \\ y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} \Gamma(n - \frac{l}{2}) \Gamma(n + \frac{l+1}{2})}{(2n)! \Gamma(-\frac{l}{2}) \Gamma(\frac{l+1}{2})} x^{2n} \\ y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} \Gamma(n - \frac{l-1}{2}) \Gamma(n + 1 + \frac{l}{2})}{(2n+2)! \Gamma(-\frac{l-1}{2}) \Gamma(1 + \frac{l}{2})} x^{2n+1} \end{aligned}$$

在奇点 $z = \pm 1$ 处的行为:

$$\begin{aligned} y_1(x) &\sim \text{常数} \times \ln \frac{1}{1-x^2} \\ y_2(x) &\sim \text{常数} \times \ln \frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

因此如果对于 y_1 和 y_2 做解析延拓, 得到的一定是多值函数。

2. 在 $x = 1$ 的邻域内的正则集:

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(l+n+1)}{\Gamma(l-n+1)} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n \\ Q_l(x) &= \frac{1}{2} P_l(x) \left[\ln \frac{x+1}{x-1} - 2\gamma - 2\psi(l+1) \right] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(l+n+1)}{\Gamma(l-n+1)} (\psi(n+1) + \gamma) \left(\frac{x-1}{2} \right)^n \end{aligned}$$

勒让德方程是 Fox 型方程, 应用欧拉变换 ($\mu = -l$), 对于 $l = n$ 为非负整数的清晰, 可以得到勒让德多项式的积分形式 (Schlöfli 公式)

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(t^2-1)^2}{2^n (t-x)^{n+1}} dt$$

根据留数定理可以得到 Rodrigues 公式:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

取围道 $|t-x| = \sqrt{|x^2-1|}$ 可以得到 Laplace 第一积分表示:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2-1} \cos \varphi \right)^n d\varphi$$

1.6.4 连带勒让德方程

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

解为:

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(z) \\ y_1(z) &= (1-z^2)^{m/2} P_l^{(m)}(z) \\ y_2(z) &= (1-z^2)^{m/2} Q_l^{(m)}(z) \end{aligned}$$

$y_1(z)$ 在 $z=1$ 点有界, 在 $z=-1$ 点发散; $y_2(z)$ 在 $z=\pm 1$ 均发散。

1.6.5 超球微分方程

$$(1-z^2)v'' - 2(m+1)zv' + [\lambda - m(m+1)]v = 0$$

1.6.6 贝塞尔方程 (Bessel equation)

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0 \quad (\operatorname{Re} \nu \geq 0)$$

ν 阶贝塞尔方程, $z=0$ 是正则奇点, $z=\infty$ 是非正则奇点。在 $z=0$ 的邻域内的解:

$$\begin{aligned} w &= c_0 J_\nu(z) + c_1 J_{-\nu}(z), \quad (\nu \notin N) \\ &\text{或 } c_0 J_\nu(z) + c_1 N_\nu(z) \\ J_\nu(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n+\nu} \\ N_\nu(z) &= \frac{\cos \pi \nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu} \end{aligned}$$

其中 $J_\nu(z)$ 和 $N_\nu(z)$ 分别称为 ν 阶贝塞尔函数 (Bessel functions) 和诺依曼函数 (Neumann function, 又称第二类贝塞尔函数)。

无穷远处的解

$$w(z) = A \frac{e^{\pm iz}}{\sqrt{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c+k}{z^k}$$

积分解: 做变换 $w = z^\nu u(z)$ 变为拉普拉斯型方程, 应用积分变换得到:

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{izt} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta d\theta \quad (\text{Poisson 积分表达式}) \end{aligned}$$

1.6.7 球贝塞尔方程 (Spherical Bessel equation)

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dy}{dz} \right) + \left[1 - \frac{l(l+1)}{z^2} \right] y = 0$$

$z = 0$ 是正则奇点, $z = \infty$ 是非正则奇点。解:

$$\begin{aligned} y &= c_0 j_l(z) + c_1 n_l(z) \\ j_l(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+l+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+l} \\ n_l(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{l+1/2}(z) \\ &= (-1)^{l+1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-l+1/2)} (z/2)^{2n-l-1} \end{aligned}$$

2 建立模型方程

1. 波动方程 (双曲型方程): 小振动近似和胡克定律下, 可以得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = f$$

2. 热传递方程和扩散方程 (抛物型方程): 似稳近似, 介质各向同性

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = f$$

3. 稳恒状态 (椭圆型方程):

(a) 泊松方程 (Poisson's equation): $\nabla^2 u = -f$

(b) 拉普拉斯方程 (Laplace's equation): $\nabla^2 u = 0$

(c) 亥姆霍兹方程 (Helmholtz equation): $\nabla^2 u + k^2 u = 0$

2.1 边界条件

1. 第一类边界条件: $u|_{\Sigma} = \phi(\Sigma, t)$

2. 第二类边界条件: $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Sigma} = f(\Sigma, t)$

3. 第三类边界条件: $\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu \right]_{\Sigma} = f(\Sigma, t)$

另外对于多种介质还有连接条件。

2.2 方程适定性

考察解的存在性、唯一性和稳定性。通常可以用守恒量，如能量来检验。

3 线性偏微分方程的通解

$$\text{记 } D_i^n \equiv \frac{\partial^n}{\partial i^n}$$

3.1 常系数线性齐次偏微分方程

$$L(D_x, D_y)u \equiv \left(\sum_{0 \leq i, j \leq n} A_{ij} D_x^i D_y^j \right) u = 0$$

分解为 $L(D_x, D_y) = A_{n0} \prod_k (D_x - \alpha_k D_y - \beta_k)^{n_k}$ ，相应的通解为：

$$u = \sum_k \left[\sum_{i=0}^{n_k-1} x^i e^{\beta_k x} \phi_{ik}(y + \alpha_k) \right]$$

3.1.1 波动方程的行波解

波动方程的初值问题：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, t)|_{t=0} &= \phi(x) & -\infty < x < \infty \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(x) & -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

的行波解，又称达朗贝尔解（d'Alembert's formula）：

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

3.2 常系数线性非齐次方程

$$L(D_x, D_y)u = f(x, y)$$

形式地 $u_0 = \frac{1}{L(D_x, D_y)} f(x, y)$

1. $f(x, y) = e^{ax+by}$

$$\frac{1}{L(D_x, D_y)} e^{ax+by} = \frac{1}{L(a, b)} e^{ax+by}$$

例外的 $L(a, b) = 0$ 的情况：

$$\frac{1}{bD_x - aD_y} e^{ax+by} = \frac{x}{b} e^{ax+by}$$

$$2. f(x, y) = e^{ax+by} g(x, y)$$

$$\frac{1}{L(D_x, D_y)} e^{ax+by} = e^{ax+by} \frac{1}{L(D_x + a, D_y + b)}$$

$$3. f(x, y) = x^m y^n$$

将 $\frac{1}{L(D_x, D_y)}$ 展开成幂级数形式求解。

$$4. f(x, y) = g^{(n)}(ax + by) \text{ 且 } L(D_x, D_y) \text{ 是 } n \text{ 次齐次的}$$

$$\frac{1}{L(D_x, D_y)} g^{(n)}(ax + by) = \frac{1}{L(a, b)} g^{(n)}(ax + by)$$

例外的 $L(a, b) = 0$ 的情况:

$$\frac{1}{(D_x - \alpha D_y)^n} f^{(n)}(x) \psi(y + \alpha x) = f(x) \psi(y + \alpha x)$$

3.3 特殊的变系数线性齐次偏微分方程

对于 $L(D_x, D_y)$ 由形如 $x^m y^n D_x^m D_y^n$ 组成的, 可以通过变换:

$$x = e^t, \quad y = e^s$$

变为常系数微分方程。

4 内积空间与函数空间

4.1 内积空间

1. 矢量空间
2. 内积空间
3. 欧几里德空间 (Euclidean space): 有内积的实矢量空间
4. 酉空间 (unitary space): 具有内积的复矢量空间
5. 希尔伯特空间 (Hilbert space): 完备的内积空间, 也即 Cauchy 序列的极限仍保持在该空间内的内积空间
6. $\{\hat{x}_i\}$ 是一组完备基的充要条件:

$$(a) \quad \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \forall i. (\hat{x}_i, \mathbf{x}) = 0$$

$$(b) \quad \forall \mathbf{x}. \mathbf{x} = \sum_i (\hat{x}_i, \mathbf{x}) \hat{x}_i$$

$$(c) \quad \text{贝塞尔不等式 (Bessel's inequality) 取等号: } \forall \mathbf{x}. \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_i |(\hat{x}_i, \mathbf{x})|^2$$

$$(d) \quad \text{帕塞瓦尔定理 (Parseval's theorem) 成立: } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}. (\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \sum_i (\mathbf{y}, \hat{x}_i) (\hat{x}_i, \mathbf{x})$$

4.2 函数空间

1. 函数空间：元素是定义在一定区间（可以是有界区间、无界区间或半无界区间，为确定起见，以下不妨写为 $a \leq x \leq b$ ）上的复值平方可积函数。
2. $f(x)$ 是零函数 $\Leftrightarrow (f, f) = 0$
3. 逐点收敛：展开式应该对区间 $[a, b]$ 内的每一点 x 都成立
4. 平均收敛：展开式左右两端可以相差一个广义的零函数
5. 广义函数：给定一组正交归一完备集 $\{f_i(x)\}$ ，任意具有良好收敛性质的系数序列 c_i 都定义了唯一的函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

4.3 δ 函数

（形式的，后取极限）

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$ （定义）
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(-x) dx = -f'(0)$
- $\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|g'(x_0)|} \Big|_{g(x_0)=0}$
- $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx$ （形式的，后做积分）

5 分离变量方法

5.1 一般理论

1. 伴算符： $\forall u, v. (v, Lu) = (Mv, u) \Leftrightarrow M$ 与 L 互为伴算符。伴算符都是互伴的。
2. 自伴算符：伴算符是自身的算符。
3. 允许函数类：
 - (a) 定义在给定区间上
 - (b) 具有一定的连续性（属于某一个 Hilbert 空间）
 - (c) 满足一定的边界条件（通常是一二三类边界条件或者周期性边界条件）

* 不能脱离边界条件的约束来讨论算符的互伴和自伴性。

4. 自伴算符的本征值问题：方程 $\mathbf{L}y(x) = \lambda y(x)$ (边界条件定义在 \mathbf{L} 中)

- (a) 自伴算符的本征值是实数
- (b) 自伴算符不同本征值的本征函数相互正交
- (c) 自伴算符的本征值问题与泛函

$$\lambda[y] = \frac{(y^*(x), \mathbf{L}y(x))}{(y^*(x), y(x))}$$

的变分极值问题 $\delta\lambda[y] = 0$ 等价。

- (d) 如果自伴算符的本征值可数，最小本征值有限，并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \rightarrow +\infty$ 则其本征函数的序列是完备的
- (e) 可以通过变分法在有限函数集中获得本征值问题的逼近。这样逼近获得的本征值总是比真实值偏大。

5.2 斯图姆-刘维尔型方程 (Sturm-Liouville equation)

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda \rho(x) - q(x)]y = 0$$

1. 定义算符 $\mathbf{L} = \frac{1}{\rho(x)} \left\{ -\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \right\}$
2. 定义内积 $(y_1, y_2) \equiv \int_a^b y_1^*(x) y_2(x) \rho(x) dx$ (要求 $\rho(x) \geq 0$ 且不恒为零)
3. 边界条件 (使得 \mathbf{L} 是自伴的): 当 $p(x), q(x) \in \mathbb{R}(x)$ 时

$$(y_1, \mathbf{L}y_2) - (\mathbf{L}y_1, y_2) = p(x) \left(y_1^* \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1^*}{dx} y_2 \right) \Big|_{a_1}^{a_2} = 0$$

(a) 非周期性条件: $p(x) \left(y_1^* \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1^*}{dx} y_2 \right) \Big|_{x=a_i} = 0$

- $p(x)|_{x=a_i} \neq 0$, 第一二三类边界条件等价于 $\left[y_1^* \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1^*}{dx} y_2 \right]_{x=a_i} = 0$
- $p(x)|_{x=a_i} = 0$, 如果 a_i 点是方程正则奇点, 边界条件通常是有界条件
- $p(x)|_{x=a_i} = 0$, 且 a_i 点是方程非正则奇点, 可通过要求函数平方可积 (即 “归一化条件”) 而确定本征值

(b) 周期性条件: $[p(x), q(x), \rho(x), y(x), y'(x)]_{a_1}^{a_2} = 0$

这样的定义下, S-L 方程的本征值问题满足上面的一般性讨论。

5.2.1 实系数 S-L 方程的简并

1. 若本征函数是复的，且实部和虚部线性无关，则此本征值问题二重简并（实部和虚部都是本征函数）
2. 满足上述非周期性边界条件的两个线性无关的实本征函数对应不同的本征值

5.2.2 实系数 S-L 方程的其他细节

1. 第一类和第二类边界条件下，当 $p(x), q(x), \rho(x) \geq 0$ 时，本征值有下界，上界 ∞ ，本征函数是完备的。
2. 第一类边界条件下，本征值有下界时，令 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ，则 λ_n 对应的本征函数在端点以外有 $n - 1$ 个零点（也称节点），特别的，最小的本征值对应的本征函数没有节点
3. 对于分段 + 连接条件的情况，可能会需要一个分段的权重因子。因子在每段内可以是常数。

5.3 分离变量方法的要求

1. 定解问题是线性的（偏微分方程、边界条件、初始条件）
2. 定解问题有齐次的边界条件
3. 本征函数构成完备正交基
4. 级数具有较好的收敛性

6 本征值问题与特殊函数

6.1 拉普拉斯算符（Laplace operator）

坐标系

坐标表示

二维直角坐标系 $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

二维极坐标系 $\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$

三维直角坐标系 $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

三维柱坐标系 $\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

三维球坐标系 $\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$

6.2 亥姆霍兹方程 (Helmholtz equation) 的分离变量

1. 柱坐标系

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + ku = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda^2 Z = 0 \\ \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \nu^2 \Phi = 0 \quad (2\pi \text{ 周期条件}) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R = 0 \quad \dots\dots \text{贝塞尔方程} \end{cases}$$

2. 球坐标系

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (2\pi \text{ 周期条件}) \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0 \quad \dots\dots \text{球贝塞尔方程} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad \dots\dots \text{连带勒让德方程} \end{cases}$$

6.3 常用本征函数表

对于 $\mathbf{L}u + \lambda u = 0$ ^①, 其中 $\mathbf{L} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x)$ 可以确定权重。

6.3.1 非特殊函数

\mathbf{L}	边界条件	本征函数	本征值	归一化系数 ^②
$\frac{d^2}{dx^2}$	$u _{x=0,l} = 0$	$\sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$ ^③	$\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2$	$\sqrt{\frac{2}{l}}$
	$\frac{du}{dx} \Big _{x=0,l} = 0$	$1; \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$	$0; \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2$	$\sqrt{\frac{1}{l}}; \sqrt{\frac{2}{l}}$
	第三类	$\sin(\lambda_n x + \phi)$	$-\lambda_n^2$ ^④	略
	周期性	$1; e^{\pm i \frac{2\pi}{T} nx}$	$0; \left(\frac{2n\pi}{T} \right)^2$	$\sqrt{\frac{1}{T}}$

^① 此处对于本征值定义和上面的相差一个符号

^③ $n = 1, 2, 3, \dots$, 后同。

^④ λ_n 是边界条件相关的超越方程的根。

L	边界条件	本征函数	本征值	归一化系数 ^②
$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right)$	$u _{r=a,b} = 0$	$\sin \left(n\pi \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \right)$	$\left(\frac{n\pi}{\ln(b/a)} \right)^2$	$\left(\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} \right)^{-\frac{1}{2}}$
$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$	$u _{r=a,b} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{r}} \sin \left(n\pi \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \right)$	$\left(\frac{n\pi}{\ln(b/a)} \right)^2 + \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} \right)^{-\frac{1}{2}}$

6.3.2 (连带) 勒让德多项式

L	边界条件	本征函数	本征值	归一化系数
$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} \right]$	$u _{x=\pm 1}$ 有界	$P_l(x)$ ^①	$l(l+1)$	$\sqrt{\frac{2l+1}{2}}$
$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right)$	$u _{\theta=0,\pi}$ 有界	$P_l(\cos \theta)$	$l(l+1)$	$\sqrt{\frac{2l+1}{2}}$
$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} \right] - \frac{m^2}{1-x^2}$	$u _{x=\pm 1}$ 有界	$P_l^m(x)$	$l(l+1)$	$\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2l+1}{2}}$
$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}$	$u _{\theta=0,\pi}$ 有界	$P_l^m(\theta)$	$l(l+1)$	$\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2l+1}{2}}$

6.3.3 贝塞尔函数与球贝塞尔函数

L	边界条件	本征函数	本征值	归一化系数
$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{\nu^2}{r^2}$	$u _{r=0}$ 有界, $u _{r=a} = 0$	$J_\nu(k_i r)$ ^②	k_i^2	$\left[\frac{a^2}{2} J_\nu'^2(k_i a) \right]^{-\frac{1}{2}}$
	$u _{r=0}$ 有界, $\left. \frac{du}{dr} \right _{r=a} = 0$	$J_\nu(k_i r)$	k_i^2	$\left[\frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{a^2 k_i^2} \right) J_\nu^2(k_i a) \right]^{-\frac{1}{2}}$
	$u _{r=0}$ 有界, 第三类	$J_\nu(k_i r)$	k_i^2	$\left[\frac{a^2}{2} J_\nu'^2 + \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{a^2 k_i^2} \right) J_\nu^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$
	$u _{r=a,b}$ 的齐次条件	J_ν, N_ν	k_i^2	略
$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2}$	$u _{r=0}$ 有界, $u _{r=a} = 0$	$j_l(k_i r)$	k_i^2	$\left[\frac{a^3}{2} j_l'^2(k_i a) \right]^{-\frac{1}{2}}$
	$u _{r=0}$ 有界, $u _{r=a}$	$j_l(k_i r)$	k_i^2	$\left[\frac{a^3}{2} \left(j_l'^2 - j_l j_l'' - \frac{1}{k_i a} j_l j_l' \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$
	$u _{r=a,b}$ 的齐次条件	j_l, n_l	k_i^2	略

6.3.4 二元本征值问题

归一化系数为 1。

^① $l = 0, 1, 2, \dots$, 后同

^② k_i 满足边界条件, 下同。

L	边界条件	本征函数	本征值
$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$	$u _{\theta=0, \pi}$ 有界, $u _{\phi}$ 周期 2π	$Y_l^m(\theta, \phi)^{\textcircled{1}}$	$l(l+1)$

6.4 特殊函数

6.4.1 勒让德多项式 (Legendre polynomials)

1. l 次勒让德多项式 $P_l(x)$ 定义

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^l \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

2. 罗德里格公式 (Rodrigues's formula)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l]$$

3. 另一个显明表达式

$$P_l(x) = \sum_{r=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^r (2l-2r)!}{2^l r! (l-r)! (l-2r)!} x^{l-2r}$$

4. $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$

5. $P_{2l}(0) = (-1)^l \frac{(2l)!}{(2^l l!)^2}, \quad P_{2l+1}(0) = 0$

6. 零点均在 $(-1, 1)$

7. 生成函数:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=\infty}^{\infty} P_l(x) t^l \quad |t| < |x \pm \sqrt{x^2 - 1}|$$

8. 递推关系:

$$\begin{aligned} (2l+1)xP_l(x) &= (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x) \\ P_l(x) &= P'_{l+1}(x) - 2xP'_l(x) + P'_{l-1}(x) \\ P'_{l+1}(x) &= xP'_l(x) + (l+1)P_l(x) \\ P'_{l-1}(x) &= xP'_l(x) - lP_l(x) \end{aligned}$$

9. 前 6 次:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

^① $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, $2l+1$ 重简并。权重因子 $\sin \theta$ 。

6.4.2 连带勒让德函数 (Associated Legendre polynomials)

1. 定义: m 阶 l 次连带勒让德函数定义

$$P_l^m(x) = (-)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

2. 相同阶但不同次的连带勒让德函数在区间 $[-1, 1]$ 上正交

$$3. P_l^{-m}(x) = (-)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

4. 正交性:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^{-m}(x) dx &= (-)^m \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \\ \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^{m'}(x) \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{mm'} \\ \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^{-m'}(x) \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{(-)^m}{m} \delta_{mm'} \end{aligned}$$

6.4.3 球面调和函数 (球谐函数)

1. 归一化的球面调和函数定义 (课件定义):

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

其中 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

$$2. Y_l^{m*}(\theta, \phi) = (-)^m Y_l^{-m}(\theta, \phi)$$

3. 展开:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \begin{cases} \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta', \phi') \left(\frac{r}{r'}\right)^l, & r < r' \\ \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta', \phi') \left(\frac{r'}{r}\right)^l, & r > r' \end{cases}$$

4. 加法公式: 改变上式极轴方向可以得到

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta', \phi')$$

其中 $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$

6.4.4 贝塞尔函数 (Bessel functions) 和诺依曼函数 (Neumann function)

1. ν 阶贝塞尔函数 $J_\nu(z)$ (第一类柱函数) 定义

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \quad |\arg z| < \pi$$

2. ν 阶诺依曼函数 $N_\nu(z)$ (第二类柱函数) 定义

$$N_\nu(z) = \frac{\cos \nu \pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu \pi} \quad |\arg z| < \pi$$

3. $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ 其中 n 为整数

4. 线性相关性 (朗斯基行列式):

$$\begin{aligned} \Delta[J_\nu(z), J_{-\nu}(z)] &= -\frac{2}{\pi z} \sin \pi \nu \\ \Delta[J_\nu(z), N_\nu(z)] &= \frac{2}{\pi z} \end{aligned}$$

5. 诺依曼函数的整数极限:

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(z) \\ &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-z)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} [\psi(n+k+1) + \psi(k+1)] \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \end{aligned}$$

当 $n=0$ 时, 需去掉表达式中第二项的有限和

6. 递推公式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [z^\nu J_\nu(z)] &= z^\nu J_{\nu-1}(z) \\ \frac{d}{dz} [z^{-\nu} J_\nu(z)] &= -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z) \\ J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) &= 2J'_\nu(z) \\ J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} J_\nu(z) \\ \left(\frac{\nu^2}{z^2} - 1\right) J_\nu(z) - \frac{1}{z} J'_\nu(z) &= J''_\nu(z) \end{aligned}$$

诺依曼函数形式完全相同。

7. $J'_0(z) = -J_1(z)$

8. $\nu > -1$ 或为整数时, $J_\nu(x)$ 有无穷多零点, 零点都是实数且对称地分布在实轴上

9. 渐近展开

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} J_\nu(z) &\sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu + O(z^{\nu+1}) \\ \lim_{z \rightarrow 0} N_\nu(z) &\sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \quad \nu \neq 0 \\ \lim_{z \rightarrow 0} N_0(z) &\sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} \\ \lim_{z \rightarrow \infty} J_\nu(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad |\arg z| < \pi \\ \lim_{z \rightarrow \infty} N_\nu(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad |\arg z| < \pi\end{aligned}$$

10. 整数阶特有的性质:

(a) 生成函数

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n, \quad 0 < |t| < \infty$$

令 $t = ie^{i\theta}$, $z = kr$ 得到平面波按柱面波展开式:

$$e^{ikr \cos \theta} = J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr) \cos n\theta$$

(b) 积分表示

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta - n\theta) d\theta$$

(c) 加法公式

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{n-k}(y)$$

11. 一些积分式:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \int_0^1 (1-x^2) J_0(\mu x) x dx \Big|_{J_0(\mu)=0} &= \frac{2}{\mu^2} J_2(\mu) \frac{4}{\mu^3} J_1(\mu)\end{aligned}$$

12. 虚宗量贝塞尔函数

(a) 第一类虚宗量贝塞尔函数定义

$$\begin{aligned}I_\nu(x) &= e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(ix) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}\end{aligned}$$

(b) $I_n(x) = I_{-n}(x)$

(c) 第二类虚宗量贝塞尔函数 (McDonald function) 定义

$$\begin{aligned}
K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)] \\
K_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&\quad + (-)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left[\ln \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \psi(n+k+1) - \frac{1}{2} \psi(k+1) \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}
\end{aligned}$$

(d) 渐近行为 (约定 $\nu \geq 0$):

$$\begin{aligned}
&I_\nu(0) \text{有界} \quad K_\nu(x) \text{无界} \\
\lim_{x \rightarrow \infty} I_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}
\end{aligned}$$

13. 半奇数阶的贝塞尔函数

$$\begin{aligned}
J_{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \\
J_{-1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \\
J_{n+1/2}(z) &= z^{n+1/2} \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{z} \\
J_{-n+1/2}(z) &= z^{n-1/2} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z \\
N_{n+1/2}(z) &= (-)^{n+1} J_{-n-1/2}(z)
\end{aligned}$$

6.4.5 汉克尔函数 (Hankel function)

又称第三类柱函数, 第一种汉克尔函数 $H_\nu^{(1)}(z)$ 和第二种汉克尔函数 $H_\nu^{(2)}(z)$ 定义如下:

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(1)}(z) &\equiv J_\nu(z) + iN_\nu(z) \stackrel{z \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[i \left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
H_\nu^{(2)}(z) &\equiv J_\nu(z) - iN_\nu(z) \stackrel{z \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[-i \left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]
\end{aligned}$$

配合相应的时间因子 $e^{-i\omega t}$ 可以分别表示发散波和会聚波。

6.4.6 球贝塞尔函数 (Spherical Bessel function)

1. l 阶球贝塞尔函数和 l 阶球诺依曼函数定义

$$\begin{aligned} y &= c_0 j_l(z) + c_1 n_l(z) \\ j_l(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+l+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+l} \\ n_l(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{l+1/2}(z) \\ &= (-1)^{l+1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-l+1/2)} (z/2)^{2n-l-1} \end{aligned}$$

2. 前 3 阶

$$\begin{aligned} j_0(z) &= \frac{\sin z}{z}, \quad j_1(z) = \frac{1}{z^2}(\sin z - z \cos z), \quad j_2(z) = \frac{1}{z^3}[(3 - z^2) \sin z - 3z \cos z] \\ n_0(z) &= -\frac{\cos z}{z}, \quad n_1(z) = -\frac{1}{z^2}(\cos z + z \sin z), \quad n_2(z) = -\frac{1}{z^3}[(3 - z^2) \cos z + 3z \sin z] \end{aligned}$$

3. 平面波按球面波展开

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

4. $r=0$ 处 $j_l(r)$ 有界, $n_l(r)$ 无界

5. $r \rightarrow \infty$ 渐进行为:

$$\begin{aligned} j_l(r) &\sim \frac{1}{r} \sin\left(r - \frac{l\pi}{2}\right) \\ n_l(r) &\sim -\frac{1}{r} \cos\left(r - \frac{l\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

7 积分变换方法

7.1 拉普拉斯变换 (Laplace transform)

1. 定义:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

$F(p)$ 称为 $f(t)$ 的拉普拉斯换式, 两者也分别称为像函数与原函数。 e^{-pt} 是拉普拉斯变换的核, 简写为:

$$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{或} \quad F(p) \doteq f(t) \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} \quad \text{或} \quad f(t) \doteq F(p) \end{aligned}$$

注意: $f(t)$ 应该理解为 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$

2. 变换存在的充分条件:

(a) $f(t)$ 在区间 $[0, \infty)$ 中除了有限的第一类间断点外连续, 而且有连续导数;

(b) $f(t)$ 增长不超过指数函数, 即: 存在正数 $M > 0$ 及 $s' \geq 0$, 使

$$\forall t. |f(t)| < Me^{s't}$$

s' 的下界称为收敛横标, 记为 s_0

3. 拉普拉斯换式的极限

$$\begin{aligned}\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} F(p) &= 0 \\ \lim_{\operatorname{Im} p \rightarrow \pm\infty} F(p) &= 0\end{aligned}$$

4. 解析性: 满足上面的条件, 则 $F(p)$ 在 $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ 的半平面中解析

5. 导数性质

$$\begin{aligned}f'(t) &\doteq pF(p) - f(0) \\ f^{(n)}(t) &\doteq p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0)\end{aligned}$$

6. 初值定理和终值定理

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) &= f(0) \\ \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) &= f(\infty)\end{aligned}$$

7. 积分的拉普拉斯变换

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$$

8. 像函数的导数反演

$$F^{(n)}(p) \doteq (-t)^n f(t)$$

9. 像函数的积分反演

$$\int_p^\infty F(q) dq \doteq \frac{f(t)}{t}$$

$p = 0$ 时由定义可以得到:

$$\int_0^\infty F(q) dq = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$$

10. 卷积定理

$$F_1(p)F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau$$

11. 普遍反演公式:

- (a) $F(p)$ 在区域 $\operatorname{Re} p > s_0$ 中解析, 且 $|p| \rightarrow \infty$ 时 $F(p)$ 一致趋于 0
 (b) 对于所有的 $\operatorname{Re} p = s > s_0$, 沿直线 $L: \operatorname{Re} p = s$ 的积分

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(p)| d\sigma$$

收敛, 则对于 $\operatorname{Re} p = s > s_0$

$$F(p) \doteq f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

12. 公式

$$\frac{1}{\sqrt{p}} F(\sqrt{p}) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\tau^2/4t} d\tau$$

13. 变换表

$$\begin{aligned} 1 &\doteq \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0 \\ e^{\alpha t} &\doteq \frac{1}{p - \alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha \\ \delta(t - \tau) &\doteq e^{-\tau p} \\ t &\doteq \frac{1}{p^2} \\ \frac{1}{2} t^2 &\doteq \frac{1}{p^3} \\ \frac{1}{n!} t^n &\doteq \frac{1}{p^{n+1}} \\ \sin \omega t &\doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \\ \cos \omega t &\doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2} \\ \frac{\sin \omega t}{t} &\doteq \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{p}{\omega} \\ \operatorname{erfc} \frac{\alpha}{2\sqrt{t}} &\doteq \frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}} \end{aligned}$$

其中 $\operatorname{erfc} x$ 称为余误差函数, 定义 $\operatorname{erfc} x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi$ 。相关的还有误差函数 $\operatorname{erf} x \equiv 1 - \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$

7.2 傅里叶变换 (Fourier transform)

1. 定义

- (a) 无界区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 在任意有限区间上只有有限个极值点和有限个第一类间断点

(b) 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

绝对收敛，则它的傅里叶变换存在

$$F(k) = \mathcal{F}[f(x)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

逆变换（反演）

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

(c) 简记作 $f(x) \equiv F(k)$

2. 傅里叶变换可以看作是按正交完备集 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, k \in \mathbb{R} \right\}$ 展开，实际上是无界区域的分离变量法。类似的方法可以把傅里叶变换推广到其他本征值问题中。

3. 卷积定理

$$\begin{aligned} F_1(k)F_2(k) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \\ f_1(x)f_2(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\kappa) F_2(k - \kappa) d\kappa \end{aligned}$$

4. 导数公式

$$f'(x) \equiv ikF(k), \quad F'(k) \equiv -ixf(x)$$

5. 积分的变换

$$\int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi \equiv \frac{F(k)}{ik}, \quad \int_{-\infty}^k F(\kappa) d\kappa \equiv -\frac{f(x)}{ix}$$

6. 变换表

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \sqrt{2\pi} \delta(k) \\ \delta(x - x') &\equiv \frac{e^{-ikx'}}{\sqrt{2\pi}} \\ e^{ik'x} &\equiv \sqrt{2\pi} \delta(k - k') \\ e^{\alpha x^2} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}} \\ \frac{1}{|x|} &\equiv \frac{1}{\sqrt{|k|}} \\ e^{a|t|} &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2} \\ x^n &\equiv i^n \sqrt{2\pi} \delta^{(n)}(k) \\ x^{-n} &\equiv -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(-ik)^{n-1}}{(n-1)!} \text{sgn}(k) \\ \text{sgn}(x) &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{ik} \end{aligned}$$

8 格林函数 (Green's function) 方法

8.1 不含时的格林函数

1. 格林第二公式

$$\iiint_V [u(\mathbf{r}) \nabla^2 v(\mathbf{r}) - v(\mathbf{r}) \nabla^2 u(\mathbf{r})] dV = \oint_{\partial V} [u(\mathbf{r}) \nabla(\mathbf{r}) - v(\mathbf{r}) \nabla u(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{S}$$

2. 稳定问题的格林函数

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2) u(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V \\ \left[\alpha u(\mathbf{r}) + \beta \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right]_{\Sigma} = f(\Sigma) & \Sigma = \partial V \end{cases}$$

$k = \rho = 0$ 称为拉普拉斯方程, $k = 0$ 称为泊松方程, $\rho = 0$ 称为亥姆霍兹方程。
相应的格林函数满足的方程:

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \left[\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right]_{\mathbf{r} \in \Sigma} = 0 \end{cases}$$

此时方程的解:

$$u(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') dV' - \iint_{\Sigma} \frac{f(\Sigma')}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \left[\alpha^* \frac{\partial G(\mathbf{r}'; \mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - \beta^* G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \right] d\Sigma'$$

其中 α, β 可以是关于 σ 的函数。上面的式子实质是

$$u(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') dV' - \iint_{\Sigma} \left[u(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}'; \mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] d\Sigma'$$

而根据边界条件,

$$\begin{aligned} \alpha \left[u(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}'; \mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] &= f(\Sigma) \frac{\partial G(\mathbf{r}'; \mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \\ \beta \left[u(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}'; \mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] &= -f(\Sigma) G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \end{aligned}$$

3. 无界空间的解:

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{C e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + (1-C) e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

系数与无穷远条件有关。通常表示为发散波即 $C = 1$ 。 $C = 0$ 是会聚波。

4. 基尔霍夫公式 (Kirchhoff's diffraction formula) 对于亥姆霍兹方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) &= 0 \\ u(\mathbf{r})|_{\Sigma}, \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \Big|_{\Sigma} &\text{ 已知} \end{aligned}$$

Σ 外无界空间的解为（因为计算的是边缘之外的发散波，因而与上面有界范围的差一个符号）：

$$u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikR}}{R} \left[u(\mathbf{r}') \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right] d\Sigma'$$

其中 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。在 \mathbf{r}' 变化远小于 r 线度和变化，且 $Rk \gg 1$ ，有：

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= k \frac{\mathbf{R}}{R} \\ u(\mathbf{r}') &= A(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \\ \nabla' u &\simeq A(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} i\mathbf{k}' \\ R &\simeq R_0 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}{k} \end{aligned}$$

代入得到

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= -\frac{ie^{ikR}}{4\pi R} \iint_{\Sigma} A(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}'} (\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot d\Sigma' \\ &= -\frac{ike^{ikR}}{4\pi R} \iint_{\Sigma} A(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}'} (\cos \theta + \cos \theta') d\Sigma' \end{aligned}$$

其中 $\cos \theta + \cos \theta'$ 为倾斜因子

5. 广义格林函数

对于泊松方程， $\alpha = 0, \beta = 1$ 时上面的格林函数满足的方程无解，因而需要引入广义的格林函数。

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= -[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - c(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r})] \\ \left. \frac{\partial G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right| &= 0 \end{aligned}$$

其中 $u_0(\mathbf{r})$ 是方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_0(\mathbf{r}) &= 0 \\ \left. \frac{\partial u_0(\mathbf{r})}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right|_{\mathbf{r} \in \Sigma} &= 0 \end{aligned}$$

的非零解。

因而有

$$c(\mathbf{r}') = \frac{u_0(\mathbf{r}')}{\iiint_V u_0^2(\mathbf{r}) dV}$$

方程的解

$$u(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') dV' + \iint_{\Sigma} f(\Sigma') G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) d\Sigma' + c(\mathbf{r}) \iiint_V u(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}') dV$$

对于静电场，可以取 $u_0 = 1$ ，上式最后一项就是电势 $u(\mathbf{r})$ 在区域 V 内的平均值。

6. 三维格林函数点源附近的行为:

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \sim \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

二维泊松方程的情形

$$G(x, y; x', y') \sim -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

7. 格林函数的对称性 $G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) = G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ (取决于具体方程, 此处对于上述稳恒问题成立)

8. 用电像法求圆形区域的格林函数

$$\begin{aligned} (\nabla_2)^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad |\mathbf{r}|, |\mathbf{r}'| < a \\ G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')|_{r=a} &= 0 \\ \Rightarrow G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= -\frac{1}{2\pi} \left[\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln \left| \mathbf{r} - \left(\frac{a}{r'} \right)^2 \mathbf{r}' \right| + \ln \frac{a}{r'} \right] \end{aligned}$$

8.2 含时的格林函数

1. 空间上的对称性与时间上的倒易性 (取决于具体问题, 此处对于波动方程和扩散问题成立)

$$G(x', t'; x, t) = G(x, -t; x', -t')$$

在这个关系式中, 将 t 和 t' 对换位置时出现的负号, 正好保证了时间的先后次序不变, 否则就会有悖于因果律的要求

2. 一维波动方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= f(x, t) \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, t)|_{x=0} &= \mu(t), \quad u(x, t)|_{x=l} = \nu(t) \quad t > 0 \\ u(x, t)|_{t=0} &= \phi(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \quad 0 < x < l \end{aligned}$$

格林函数满足 (先是 $G(x, -t; x', -t')$ 满足的方程再利用对称性与倒易性得到):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(x', t'; x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 G(x', t'; x, t)}{\partial x^2} &= \delta(x - x') \delta(t - t') \quad 0 < x, x' < l, t, t' > 0 \\ G(x', t'; x, t)|_{x=0} &= 0, \quad G(x', t'; x, t)|_{x=l} = 0 \quad t, t' > 0 \\ G(x', t'; x, t)|_{t' < t} &= 0, \quad \frac{\partial G(x', t'; x, t)}{\partial t} \Big|_{t' < t} = 0 \quad 0 < x, x' < l \end{aligned}$$

从而方程的解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^l dx' \int_0^t G f(x', t') dt' - \int_0^l \left[G \psi(x') - \phi(x') \frac{\partial G}{\partial t'} \right]_{t'=0} dx' \\ &\quad - a^2 \int_0^t \left[\nu(t') \frac{\partial G}{\partial t'} - \mu(t') \frac{\partial G}{\partial x'} \right]_{x'=0} dt' \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} G &= G(x, t; x', t') \\ &= \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x'\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} a(t' - t)\right) \eta(t' - t) \end{aligned}$$

3. 三维无界空间波动方程

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \right] u(\mathbf{r}, t) &= f(\mathbf{r}, t), \quad t > 0 \\ u(\mathbf{r}, t)|_{t=0} &= \phi(\mathbf{r}), \quad \left. \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

相应的格林函数满足的方程

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \right] G(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}, t) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \\ G(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}, t)|_{t > t'} &= 0 \\ \left. \frac{\partial G(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t > t'} &= 0 \end{aligned}$$

经过傅里叶变换方法可以得到：

$$G(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - a(t' - t))$$

(δ 函数内体现了推迟势的物理意义)

方程的解

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{V=\{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|<at\}} \frac{f(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|/a)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV \\ &\quad + \frac{1}{4\pi a} \left[\iint_{\partial V} \frac{\psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d\sigma' + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\partial V} \frac{\phi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d\Sigma' \right] \end{aligned}$$

9 其他

9.1 行波解与驻波解的关系

在有限范围内分离变量得到的是驻波解。先做奇延拓再做周期延拓可以得到行波解。反之，行波解也可以通过驻波解叠加出来。

9.2 波

1. 平面波：等相位面是平面的波， $\psi = kx - \omega t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\ \text{行波解（通解）} \quad u &= f(x - at) + g(x + at) \end{aligned}$$

2. 柱面波：等相位面是柱面的波， $\psi = kr - \omega t$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial^2(\sqrt{r}u)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2(\sqrt{r}u)}{\partial r^2} + \frac{\sqrt{r}u}{r^2} = 0 \\ r \rightarrow \infty \text{ 时 } & \frac{\partial^2(\sqrt{r}u)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2(\sqrt{r}u)}{\partial r^2} = 0 \\ \text{近似行波解 } & u \approx \frac{1}{\sqrt{r}} [f(x - at) + g(x + at)] \end{aligned}$$

3. 球面波：等相位面是球面的波， $\psi = kr - \omega t$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} = 0 \\ \text{行波解 (通解)} & u = \frac{1}{r} [f(x - at) + g(x + at)] \end{aligned}$$

惠更斯原理与推迟势

9.3 泊松公式 (Poisson formula)

泊松方程的通解

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 0 < r < a, 0 < \phi < 2\pi \\ u|_{\phi=0} = u|_{\phi=2\pi} & 0 < r < a \\ \frac{\partial u}{\partial \phi}|_{\phi=0} = \frac{\partial u}{\partial \phi}|_{\phi=2\pi} & 0 < r < a \\ u|_{r=0} \text{ 有界} & 0 < \phi < 2\pi \\ u|_{r=a} = f(\phi) & 0 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi')}{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\phi - \phi')} d\phi'$$

9.4 勒让德展开公式

若 $w(z)$ 和 $\varphi(z)$ 在围道 C 上和内解析， $z = a$ 是 C 内一点，如果对于 C 上的任意点 ξ 都有参数 t 满足 $|t\varphi(\xi)| < |\xi - a|$ ，则：

1. 方程 $z = a + t\varphi(z)$ 在 C 内有且只有一根
2. 函数 $w(z)$ 可以按照 t 展开成幂级数：

$$w(z) = w(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{w'(a)[\varphi(a)]^n\}$$

令 $\varphi(z) = (z^2 - 1)/2$ ，且 $z = x + t\varphi(z)$ ，可以解出

$$z = \frac{1}{t} \left(1 - \sqrt{1 - 2tx + t^2} \right)$$

利用上面的展开公式，两边同时对 x 求导得到 Rodrigues 公式。