Université Paris-Saclay — **MEU251**
Mathématiques — **2021-22**

Feuille d'exercices 4 : séries entières

Exercice 1.— Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{\ln n}$ 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^n}x^{2n+1}$ 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(2^n-n)x^n$ 4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}n^{\sqrt{n}}x^n$ 5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}3^n x^{n!}$

6. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}x^{n^2}$ 7. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\tan(\tfrac{1}{n})-\sin(\tfrac{1}{n}))x^n$ 8. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}a_n x^n$ avec $a_n=\begin{cases} n2^n & \text{si } n \text{ est impair}\\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair}\end{cases}$

Exercice 2.— On suppose que la suite (a_n) tend vers 0 et que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

Exercice 3.— Comparer les rayons de convergence R_1 et R_2 des séries entières $\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0}a_n x^{2n}$.

Exercice 4.— Déterminer le domaine de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle u(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n3^n}x^n$ 2. $\displaystyle v(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{n+2}{n+1}x^n$

Exercice 5.— Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}\cdot$$

1. Calculer le rayon de convergence R et le domaine de convergence de cette série entière.
2. Pourquoi f est-elle C^∞ sur $]-R,R[$? Montrer que pour tout $x\in]-R,R[$ on a : $f'(x)=\ln(1+x^2)$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ pour $x\in]-R,R[$.
4. On pose, pour tout $n\geq 1$, $f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}f_n$ converge normalement sur $[-R,R]$. Montrer que f est continue sur $[-R,R]$.
5. En déduire l'égalité
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}=\ln(2)+\frac{\pi}{2}-2\cdot$$

Exercice 6.— On considère la série entière $S(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{\ln(n)}$.

1. a) Calculer son rayon de convergence R.
   b) Montrer que la série entière $S(x)$ converge en $x = -R$ et diverge en $x = R$. En déduire son domaine de convergence.
2. Montrer que $S(x) \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in [0, 1[$ et en déduire (en justifiant) que $\lim_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$.
3. On note, pour tout $n \geq 3$, $a_n = \frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln(n)}$.
   a) Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 3} a_n$ converge, et calculer sa somme.
   b) En déduire que la série entière $u(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
4. a) Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1[$, on a :
$$(x-1)S(x) = -\frac{x^2}{\ln(2)} + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n = -\frac{x^2}{\ln(2)} + u(x).$$
   b) En déduire que S est continue sur $[-1, 1[$ et qu'elle vérifie
$$\lim_{x\to 1^-} (x-1)S(x) = 0.$$

Exercice 7.— Donner le développement en série entière en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \frac{1}{1-x}$	2. $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$	3. $x \mapsto \ln(1+x)$	4. $x \mapsto e^x$
5. $x \mapsto \cos(x)$	6. $x \mapsto \sin(x)$	7. $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	8. $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$
9. $x \mapsto \arctan(x)$	10. $x \mapsto \sin^2(x)$.		

Dans chaque cas, préciser le rayon de convergence et le domaine de convergence de la série.

Exercice 8.— a) Décomposer en éléments simples la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{(x-1)(x-2)}$ et développer la en série entière en 0. Donner le rayon de convergence de la série obtenue.

b) Même question avec la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$.

Exercice 9.— On considère les polynômes $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On fixe $R > 0$. Montrer qu'il existe un entier n_R tel que pour tous les entiers $n \geq n_R$, P_n n'admet pas de racine réelle dans $[-R, R]$.

Exercice 10.— Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$ puis calculer sa somme.

Exercice 11.—

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer alors que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $]-\pi, \pi[$.

Exercice 12.—. On considère l'équation différentielle $(E) : y' = xy + 1$ avec la condition initiale $y(0) = 0$. On en cherche la solution $y(x)$ sous la forme d'une série entière inconnue $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Montrer soigneusement que si y est solution de l'équation différentielle (E) avec $y(0) = 0$, alors $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,
$$(n+1)a_{n+1} = a_{n-1}.$$
2. Montrer par récurrence que $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{2^p \, p!}{(2p+1)!}$ pour tout $p \geq 0$.
3. Calculer le rayon de convergence R de $y(x)$.

Exercice 13.—. On cherche à résoudre l'équation différentielle
$$(E) \qquad xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0.$$
avec la condition initiale $y(0) = 1$. On en cherche une solution sous la forme d'une série entière inconnue $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, dont on note f la somme.

1. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients a_n pour que f soit solution de (E) sur $]-R, R[$ avec $f(0) = 1$.
2. Calculer alors les coefficients a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer le rayon de convergence R de la série entière obtenue, puis déterminer la fonction f.

Exercice 14.— (Complément au cours 5.) On considère la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. Justifier sa convergence. Converge-t-elle absolument ?
2. On regarde son produit de Cauchy avec elle-même. On note $\sum_{n\geq 0} c_n$ ce produit de Cauchy. En minorant c_{2p}, montrer que ce produit de Cauchy diverge.

Exercice 15.— Soit n un entier ≥ 1. On note d_n le nombre de permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui ne possèdent aucun point fixe (ce sont les dérangements). On pose $d_0 = 1$.

1. Dénombrer les permutations de $\{1, 2, \cdots, n\}$ qui possèdent exactement k points fixes pour montrer la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$.
2. On introduit la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que son rayon de convergence est ≥ 1 et établir que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :
$$e^x . \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

3. En déduire une expression de d_n en fonction de n et la limite de $\dfrac{d_n}{n!}$ quand n tend vers $+\infty$. Interprétation probabiliste ?