Exerice 6

Soit λ une valeur propre de u et x la vecteur propre associé

On a donc $u(x) = \lambda x$

Étudions $\langle u(x)|u(x)\rangle$

D'une part $\langle u(x)|u(x)\rangle = \langle x|x\rangle$ car u est une isométrie

D'un autre côté $\langle u(x)|u(x)\rangle = \langle \lambda x|\lambda x\rangle$ car x vecteur propre

$\langle \lambda x|\lambda x\rangle = \lambda^2 \langle x|x\rangle = \langle x|x\rangle$

Donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$

u est une symétrie orthogonal $\Leftrightarrow$

$Ker(u - Id_E)$ et $Ker(u + Id_E)$ sont des supplémentaires orthogonaux

Comme u est diagonalisable, il existe une base de E dans laquelle la matrice S est diagonale, càd:

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

De plus $Sp(u) \subseteq \{-1, 1\}$, donc:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & -1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} u(e_1) = e_1 & u(e_{m+1}) = -e_{m+1} \\ u(e_2) = e_2 & u(e_{m+2}) = -e_{m+2} \\ \vdots & \vdots \\ u(e_m) & u(e_n) = -e_n \end{array}$$

Alors: $Ker(u - Id_E) = Vect\{e_1, \dots, e_m\}$

$Ker(u + Id_E) = Vect\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$

Clairement $Ker(u - Id_E) \oplus Ker(u + Id_E) = E$

Il reste à montrer qu'ils sont orthogonaux, il suffit de montrer que

$\langle e_i | e_j \rangle = 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \text{ et } \forall j \in \{m+1, \ldots, n\}$

$\langle e_i | e_j \rangle = \langle u(e_i) | u(e_j) \rangle = \langle e_i | -e_j \rangle = -\langle e_i | e_j \rangle$

$\Rightarrow \langle e_i | e_j \rangle = 0$