Partiel du 11 Mars 2021 – 9h30 à 11h30

A lire attentivement :
- *Documents non autorisés.*
- *Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.*

Remarques : dans vos réponses, la justification du résultat compte autant que le résultat lui-même. Le sujet est long, il comporte 4 exercices (approximativement de même "poids") et totalisera *plus de* 20 points. Le total des points obtenus sera la note finale (sur 20).

Chaque exercice doit être rédigé sur une copie indépendante (au total, 4 copies donc). Chaque copie doit comporter votre nom écrit très lisiblement. Elle n'a pas besoin d'être cachetée.

Exercice 1. (Questions proches du cours). On ne justifiera pas sauf mention contraire. Les nombres n et p qui apparaissent dans l'intitulé sont des entiers, et on précisera bien pour quelles valeurs de n et de p les formules proposées valent.

1. Quel est le nombre d'injections de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$?
2. Quel est le cardinal de l'ensemble : $\{(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, n\}^p : 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n\}$?
3. Quelle est la formule dite "du triangle de Pascal" qui lie les trois quantités $\binom{n}{p}, \binom{n-1}{p}$ et $\binom{n-1}{p-1}$?
4. Exprimer $\mathbb{1}_{A\cup(B^c)}$ en fonction de $1, \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B$ et des opérations $+/\times$. (Justifier).
5. Quel est le nombre de surjections[1] de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2\}$? (Justifier).

Exercice 2. (Jeu de cartes). On tire au hasard, *successivement et sans remise*, deux cartes dans un jeu de 52 cartes.[2]

1. Construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ adapté à cet expérience.

On détaillera bien dans la suite à quel sous-ensemble de l'univers Ω les différents événements ci-dessous correspondent. On ne calculera pas les fractions qui apparaissent dans les résultats des questions suivantes.

2. Quelle est la probabilité pour que la couleur des deux cartes soit pique ?
3. Quelle est la probabilité pour que les deux cartes ne soient pas de la même couleur (pique, coeur, carreau, trèfle) ?
4. Quelle est la probabilité pour que la première carte soit un pique et la seconde un coeur ?
5. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un pique et un coeur ?
6. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait un pique et un as ?

1. on pourra regarder le complémentaire dans l'ensemble des applications.
2. un jeu de 52 cartes comporte 13 cartes de chacune des 4 *couleurs* (carreau, coeur, pique et trèfle) ; pour chaque couleur, il y a 10 cartes numérotées de 1 à 10, puis les 3 cartes valet, dame, roi. Le 1 est aussi appelé "as".

Exercice 3. (Jeu de pile ou face). Eugène et Diogène ont l'habitude de se retrouver chaque semaine autour d'un verre. Pour décider qui paie, Diogène propose la règle suivante : "Eugène, tu vas lancer la pièce cinq fois et tu ne paieras que si on observe une suite d'au moins trois piles consécutifs ou d'au moins trois faces consécutifs".

1. Construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$ adapté à cette expérience.
2. Quel est le cardinal de l'événement $A = \{\text{il existe trois piles consécutifs}\}$? (On pourra expliciter cet ensemble afin de l'énumérer). En déduire la probabilité de cet événement.
3. En déduire la probabilité de l'événement $A \cup B$, avec $B = \{\text{il existe trois faces consécutifs}\}$.
4. Eugène se félicite d'avoir un si bon ami. À tort ou à raison ?

Exercice 4. (Jeu de dés). Le joueur A possède deux dés équilibrés[3] à six faces, et les lance.

1. Soit $k \in \{2, \ldots, 12\}$. Calculer[4] le cardinal de $\{(\omega_1, \omega_2) \in \{1, \ldots, 6\}^2 : \omega_1 + \omega_2 = k\}$.
2. Construire un espace de probabilité adapté à cette expérience, et en déduire la probabilité que la somme des deux dés vaille k, pour $k \in \{2, \ldots, 12\}$. .

Le joueur B possède un dé équilibré à douze faces, et le lance. On suppose les deux lancers indépendants. On dit que le joueur A *gagne* si la somme de ses 2 dés (à six faces) est *strictement* plus grande que le résultat obtenu par le joueur B (avec son dé à douze faces), et qu'il y *match nul* si la somme des 2 dés du joueur A est égale au résultat obtenu par le joueur B.

3. Calculer le cardinal de $\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{1, \ldots, 6\}^2 \times \{1, \ldots, 12\} : \omega_1 + \omega_2 = \omega_3\}$.
4. Construire un espace de probabilité adapté à ces deux expériences, et en déduire la probabilité d'avoir un match nul entre A et B.
5. Calculer[5] le cardinal de $\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{1, \ldots, 6\}^2 \times \{1, \ldots, 12\} : \omega_1 + \omega_2 > \omega_3\}$.
6. En déduire la probabilité que le joueur A gagne. Le jeu est-il équilibré ?

---

3. c'est-à-dire dont les faces sont supposées équiprobables

4. on pourra donner les 11 valeurs associées aux différentes valeurs de k, ou des formules générales, auquel cas on distinguera $k \leq 7$ de $k > 7$

5. on pourra calculer $\sum_{1 \leq \omega_1, \omega_2 \leq 6} \sum_{1 \leq \omega_3 \leq 12} \mathbb{1}_{\omega_1 + \omega_2 > \omega_3}$