Exercice 1

1) A et B indépendant si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

2) A, B et C indépendant si

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

3) Le nombre de parties a p éléments de n éléments est $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

4) On sait que $Card(P(E)) = 2^n$

donc $Card(P(E)\backslash\emptyset) = 2^n - 1$

On peut aussi dire $Card(P(E)\backslash\emptyset) = \sum_{p=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 2^n - 1$

5) $f : E \to F$

Si $\forall y \in F, card(f^{-1}(\{y\})) = n$

Alors $Card(E) = ncard(F)$

6) $card(\{(i_j)_{1 \leq j \leq n} \in \{1, \ldots, n\}^p, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n\}) = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

7) $card(\{(i_j)_{1 \leq j \leq n} \in \{1, \ldots, n\}^p, 1 \leq i_1 \leq i_2 < \cdots < i_p \leq n\})$

$= card(\{(i_j)_{1 \leq j \leq n} \in \{1, \ldots, n\}^p, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n\}) +$

$card(\{(i_j)_{1 \leq j \leq n} \in \{1, \ldots, n\}^p, 1 \leq i_1 = i_2 < \cdots < i_p \leq n\})$

$= \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ p-1 \end{pmatrix}$

8) Le nombre de façon de choisir les 3 pile est $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et le cardinal total est 2^6

Donc la probabilité est $\frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}}{2^6} = \frac{20}{2^6}$