Un corrigé de l'examen partiel 2022

Exercice 1. 1)a) On fixe x dans $\mathbb{R}$. La limite quand n tend vers $+\infty$ de $x^2 + \frac{1}{n}$ est x^2 et, comme la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ est $\sqrt{x^2} = |x|$.

On a montré que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, en multipliant haut et bas par la quantité conjuguée,

$$\begin{aligned} 0 \leq f_n(x) - f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} &= \frac{x^2 + 1/n - x^2}{\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2}} \\ &\leq \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

On en déduit que $||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}} = 0$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

2) a) La fonction $x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et à valeurs > 0. La fonction racine carrée est C^1 sur $]0, +\infty[$. La fonction f_n qui est la composée de ces deux fonctions est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On fixe x dans $\mathbb{R}$. Si $x = 0$, on a $f_n'(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n'(0) = 0$. Si $x \neq 0$, on montre comme au 1a) que $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \frac{x}{|x|}$.

On a montré que la suite de fonctions $(f_n')_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) Les fonctions f_n' sont continues sur $\mathbb{R}$. Si la suite de fonctions $(f_n')_{n\geq 1}$ convergeait uniformément sur $\mathbb{R}$, sa limite g serait donc continue sur $\mathbb{R}$ ce qui n'est visiblement pas le cas.

c) Pour tous les x dans $[1, +\infty[$, on a (toujours par la méthode de la quantité conjuguée)

$$\begin{aligned} |f_n'(x) - g(x)| &= \left|\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n}} - 1\right| \\ &= \frac{|x - \sqrt{x^2 + 1/n}|}{\sqrt{x^2 + 1/n}} \\ &= \frac{|x^2 - x^2 - \frac{1}{n}|}{\sqrt{x^2 + 1/n}\left(x + \sqrt{x^2 + 1/n}\right)} \\ &\leq \frac{1}{n\sqrt{1 + 1/n}\left(1 + \sqrt{1 + 1/n}\right)} \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

On en déduit que $||f'_n - g||_{\infty,[1,+\infty[} = \sup_{x\in[1,+\infty[} |f'_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} ||f'_n - g||_{\infty,[1,+\infty[} = 0$. Ainsi, la suite de fonctions $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

Exercice 2. 1) Pour $x = 0$, on a $v_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, donc la série $\sum_{n\geq 1} v_n(0)$ converge.

Pour $x > 0$ fixé, comme la quantité $\frac{x}{1+nx^2}$ est > 0, la série $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$ est alternée. La suite $\left(\frac{x}{1+nx^2}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante en n et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Le critère des séries alternées s'applique et on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$ converge.

On a donc montré que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2) a) On fixe $n \geq 1$ dans cette sous-question a). On note w_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $w_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} = |v_n(x)|$. On la dérive pour étudier ses variations. On a $w'_n(x) = \frac{1-nx^2}{1+nx^2}$. On en déduit que w_n est croissante sur $[0, 1/\sqrt{n}]$ à valeurs dans $[w_n(0), w_n(1/\sqrt{n})]$ et décroissante sur $[1/\sqrt{n}, +\infty[$ à valeurs dans $]0, w_n(1/\sqrt{n})]$ (car $\lim_{x\to+\infty} w_n(x) = 0$).

b) On en déduit que $\|v_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = w_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

c) Pour $x \in [0, +\infty[$, on note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x}{1+kx^2}$ le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$. D'après le bonus du critère des séries alternées, on a la majoration suivante

$$|R_n(x)| \leq \frac{x}{1 + (n+1)x^2} = w_{n+1}(x)$$

D'après 2a) et 2b), on sait que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $|R_n(x)| \leq \|w_{n+1}\|_{\infty,[0,+\infty[} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$. On en déduit que $\|R_n\|_{\infty,[0,+\infty[} \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = 0$. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge donc uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3. 1)a) On remarque que pour tout $n \geq 1$ entier et tout $x \geq 0$ réel, on a $0 \leq \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$. En particulier, elle converge simplement, ce qui permet de définir la fonction somme S sur $[0, +\infty[$.

b) Comme les fonctions u_n sont continues sur $[0, +\infty[$ et comme la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$, on déduit que la somme S est une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

2) Les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (au moins) et $u'_n(x) = \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx}$. Si on fixe $a > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, +\infty[, |u'_n(x)| \leq e^{-na}$$

car $n^2 + 1 \geq n$ (cela résulte de $n^2 + 1 - n > n^2 + 1 - 2n = (n-1)^2 \geq 0$).

Comme e^{-na} est le terme général d'une série géométrique de raison $0 < e^{-a} < 1$ qui converge, on en déduit que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} u'_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

b) Comme les u_n sont toutes de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, comme la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et comme la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} u'_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, on en déduit que S est C^1 sur $[a, +\infty[$, cela pour tout $a > 0$. Il en résulte que S

est alors C^1 sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx}$$

3)a) On rappelle le développement en série entière $\ln(1-u) = -\sum_{n\geq 1} \frac{u^n}{n}$ pour $|u| < 1$. On sait aussi que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $S'(x) = \sum_{n\geq 1} u_n'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx}$. On remarque $\frac{1}{n(n^2+1)} = \frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+1}$ et donc, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{n(n^2+1)} &= \sum_{n\geq 1} \frac{\left(e^{-x}\right)^n}{n} - \sum_{n\geq 1} \frac{ne^{-nx}}{n^2+1} \\ &= -\ln(1-e^{-x}) + S'(x). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $e^{-x} \in]0,1[\subset]-1,1[$ quand $x > 0$. On en déduit l'égalité demandée.

b) On note $v_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n(n^2+1)}$. On a :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leq \frac{e^{-nx}}{n(n^2+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

et on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$. Comme les v_n sont continues sur $[0,+\infty[$, la fonction somme T de cette série de fonctions est aussi continue sur $[0,+\infty[$, et en particulier $\lim_{x\to 0^+} T(x) = T(0)$.

D'autre part, on écrit le DL : $1 - e^{-x} = 1 - (1 - x + x\epsilon(x)) = x + x\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. On a $S'(x) = \ln(1-e^{-x}) + T(x) = \ln(x(1+\epsilon(x))) + T(x) = \ln(x)\left(1 + \frac{\ln(1+\epsilon(x))+T(x)}{\ln(x)}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$ (car $\lim_{x\to 0^+} \ln(1+\epsilon(x)) + T(x) = T(0)$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln x = +\infty$).

On a montré que $S'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$.