Exerice 2

• Soit
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$
, $det M = a * d * f$

Donc si M est inversible alors $a, d, f \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 & 1 & 0 & -\frac{c}{f} \\ 0 & d & 0 & 0 & 1 & -\frac{e}{f} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 & -\frac{b}{d} & -\frac{c}{f} + \frac{be}{fd} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{da} & \frac{be-cd}{fda} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Donc
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{da} & \frac{be-cd}{fda} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

Donc
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{da} & \frac{be-cd}{fda} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Soit } u_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix} u_3 = \begin{pmatrix} c \\ e \\ f \end{pmatrix} \text{ Pour que } M \in O_3(\mathbb{R}) \text{ il faut:}$$

•
$$||u_1|| = ||u_2|| = ||u_3|| = 1 \Leftrightarrow |u_1||^2 = ||u_2||^2 = ||u_3||^2 = 1$$

$$\bullet < u_1|u_2> = 0$$

$$\bullet < u_1|u_3>=0$$

$$\bullet < u_2|u_3>=0$$

$$||u_1||^2 = \langle u_1|u_1 \rangle = a^2$$

Donc
$$||u_1||^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$$
 ou $a = -1$

Cherchons b et d

$$\begin{cases} b^2 + d^2 = 1 \\ a * b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \text{ ou } d = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

* Car $a \neq 0$

On a pour l'instant:

$$M = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & c \\ 0 & \pm 1 & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Cherchons c, e et f

$$\begin{cases} c^2 + d^2 + f^2 = 0 \\ a * c = 0 \\ b * e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = 1 \text{ ou } f = -1 \\ c = 0 \\ e = 0 \end{cases}$$

Donc toute les matrices triangulaire sup dans $O_3(\mathbb{R})$ sont:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

• Soit
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$

Et $w_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & c \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & c \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & c \end{pmatrix}$

Comme $M \in O_3(\mathbb{R})$ on a:

$$v_1 \circ v_2 = v_1 \circ v_3 = v_2 \circ v_3 = 0$$

$$w_1 \circ w_2 = w_1 \circ w_3 = w_2 \circ w_3 = 0$$

 $\underline{\operatorname{cas}\ 1}: a \neq 0 \text{ on a direct ement}$

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$$

Puis comme $||v_1|| = 1$ on a, a = 1

 $cas 1.1 : e \neq 0$ on a directement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Puis comme
$$||v_2|| = ||v_3|| = 1$$
 on a $e = 1$ et $i = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En suivant le même raisonnement on obtient que si $M \in O_3(\mathbb{R})$ il y exactement a 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne

Exemple d'une autre matrice $M \in O_3(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$