Exerice 6

E $= C^0([-1,1],\mathbb{R})$
$\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$
$(f,g) \longmapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$

<u>Symétrie</u> $Soit f, g \in E$
$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)dt = \varphi(g,f)$ ✓

<u>Bilinéarité</u> $Soit f, g, h \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha f + \beta g, h) &= \int_{-1}^{1} (\alpha f + \beta g)(t)h(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} (\alpha f)(t)h(t) + (\beta g)(t)h(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} \alpha f(t)h(t) + \beta g(t)h(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} \alpha f(t)h(t) + \int_{-1}^{1} \beta g(t)h(t)dt \\
&= \alpha \int_{-1}^{1} f(t)h(t) + \beta \int_{-1}^{1} g(t)h(t)dt \\
&= \alpha\varphi(f,h) + \beta\varphi(g,h)
\end{aligned}$$

Commme on a montré la symétrie cela suffit pour montrer la bilinéarité ✓

<u>Définis</u> $Soit f \in E$
$\varphi(f,f) = \int_{-1}^{1} f(t)f(t) = \int_{-1}^{1} f(t)^2$ or $f(t)^2 \geq 0$ donc $\int_{-1}^{1} f(t)^2 \geq 0$
Si $\varphi(f,f) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(t)^2 = 0$ or comme $\forall t \in [-1,1] f(t)^2 \geq 0$
si on veut que l'intégral soit nul Il faut que $f(t)^2 = 0$ $\forall t \in [-1,1]$
donc $f(t) = 0,\ \forall t \in [-1,1] \Leftrightarrow f(t) = 0_E$ ✓