Exerice 8

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit sclaire $< .|. >$ usuel
Soit $u, v \in \mathbb{R}^n$

i) $c \in \mathbb{R} \qquad < u|cv >= c < u|v >$
Vrai car le produit sclaire est bilinéaire

ii) $c \in \mathbb{R} \qquad ||cu|| = c||u||$
Faux contre exemple $c = -1$ $||-u|| = -||u|| < 0$ impossible car une norme est toujours positif
On a par contre $||cu|| = |c| * ||u||$

iii) $< u|v > - < v|u >= 0$
Vrai car le produit sclaire est symétrique donc $< u|v >=< v|u > \Leftrightarrow < u|v > - < v|u >= 0$

iv) $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$ alors u et v sont orthogonaux
Vrai c'est Pythagore
Preuve: $||u+v||^2 =< u+v|u+v >$
$=< u|u > + < u|v > + < v|u > + < v|v >$ Bilinéarité du produit sclaire
$= ||u||^2 + ||v||^2 + 2 < u|v >$ or $< u|v >= 0$ ssi u et v sont orthogonaux
donc $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$ ssi u et v sont orthogonaux

v) Un famille libre de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcement orthogonale
Vrai exemple la famille $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ de $\mathbb{R}^2$ est libre et $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1*1+1*0 = 1 \neq 0$

vi) Une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcement libre.
Vrai Si dans la famille orthogonal il y a des vecteurs nuls alors la famille n'est pas libre
Par contre si la famille orthogonal n'a aucun vecteur nul, alors la famille est libre

vii) Si on norme des vecteurs orthogonaux (non nuls), alors les vecteurs obtenus ne sont pas forcement orthogonaux.
Faux Soit u, v deux vecteurs orthogonaux non nul
On a $< \frac{u}{||u||} | \frac{v}{||v||} >= \frac{<u|v>}{||u||*||v||} = \frac{0}{||u||*||v||} = 0$
Donc normaliser ne change pas que deux vecteurs soit orthogonaux

viii) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendre par n vecteurs non nuls deux a deux orthogonaux, alors W = $\mathbb{R}^n$.
Vrai on a vu au vi) que une famille orthogonale est libre donc W est famille de n vecteurs libre, donc W est une base de $\mathbb{R}^n$