Exercice 2

1) Il y a $\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$ façon de choisir 3 chapitres

2) Il y a $\begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ façon de choisir les 2 plus petit chapitres

3) $\begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix} = Card(\{(i_j)_{1\leq j\leq 3} 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 14\})$

$= Card(\cup_{k=3}^{14}(\{(i_j)_{1\leq j\leq 3} 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 = k\}))$

$= \sum_{k=3}^{14} Card(\{(i_j)_{1\leq j\leq 2}, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq k-1\})$

$= \sum_{k=3}^{14} \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) $\varphi : \begin{cases} \{(i_j), 1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n+1\} \to \cap_{p=k}^{n}\{(i_j), 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p\} \times \{i_{k+1} = p+1\}(E \to F) \\ (i_1, \ldots, i_{k+1}) \longmapsto ((i_1, \ldots, i_k), i_{k+1}) \end{cases}$

φ est bien définie ?

Oui car $i_{k+1} \in \{k+1, \ldots, n+1\}$ et si $i_{k+1} = p+1, (i_1, \ldots, i_k) \in \{(i_j), 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p\}$ φ est

injective ? Oui.

φ est surjective ?

Soit $((i_1, \ldots, i_k), i_{k+1}) \in F$

alors $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq i_{k+1} - 1 < i_{k+1} \leq n$

Donc $(i_1, \ldots, i_{k+1}) \in E$

Et $\varphi((i_1, \ldots, i_{k+1})) = ((i_1, \ldots, i_k), i_{k+1})$

Donc φ est surjective

Donc φ est bijective

Finalement on a $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = Card(E)$

$= Card(F)$

$= \sum_{p=k}^{n} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$