Université Paris-Saclay **MEU251**
Mathématiques **2021-22**

Feuille d'exercices 2 : séries de fonctions

Idée de progression.— Semaine 5 : fin de la feuille 1 (sauf ex 9 qui est facultatif), feuille 2 ex 1, 2, 3 ; semaine 6 : ex 4, 5, 6, 7; semaine 7 fin de la feuille 2.
Remarque : la numérotation des semaines est définie par le fait que la semaine 1 de l'année est celle du 3 janvier 2022. Par exemple les cours et td ont commencé la semaine 3.

Exercice 1.— Soit $u_n : [0,+\infty[\ni x \mapsto \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$ pour $n \geq 1$.
1) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.
2) Soit $a > 0$ quelconque fixé. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
3) (A faire après le cours 4) Si on note S la somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$, montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2.— Soit $u_n : [0,+\infty[\ni x \mapsto nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$.
1) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2) Calculer $\displaystyle\sup_{x\in[0,+\infty[} u_n(x)$. En déduire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.
3) Soit $a > 0$. Montrer que cette série de fonctions converge normalement sur $[a,+\infty[$. Converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?

Exercice 3.— 0) Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x}$, pour $x > 0$. Calculer l'intégrale impropre convergente $I(x)$ par un changement de variable.

Soit $u_n : \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x}$, pour $n \geq 0$.

1) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

On peut donc définir la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ sur $]0,+\infty[$.

2) Montrer que la fonction S est décroissante sur $]0,+\infty[$.

3) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier n_ϵ tel que

$$\forall x \geq 1, \quad 1 \leq S(x) \leq \sum_{n=0}^{n_\epsilon} \frac{1}{1+n^2 x} + \epsilon.$$

En déduire que $S(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.
4) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$\int_0^{n+1} \frac{dt}{1+t^2 x} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \leq 1 + \int_0^{n} \frac{dt}{1+t^2 x}$$

puis que $I(x) \leq S(x) \leq 1 + I(x)$.
5) Donner un équivalent de $S(x)$ en 0^+.
6) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
7) (après le cours 4) Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4.— Soit $u_n : [0, +\infty[\ni x \mapsto \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$ pour $n \geq 2$.
1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2) Montrer qu'elle ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.
3) Montrer qu'elle converge uniformément sur $[0, +\infty[$. (Indic : on pourra montrer que la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est bornée.)

Exercice 5.—(*) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x), \quad x \in [0, 1].$$

1) Montrer la convergence simple sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$.
2) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si $\sum_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{n}$ est une série numérique convergente.
3) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 6.— Soit $u_n : [0, 1] \ni x \mapsto \dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}$, pour $n \geq 2$.
1) Montrer que les fonctions u_n sont continues sur $[0, 1]$ et que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$|u_n(x)| \leq \frac{2}{n^2 - 1}.$$

En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

On définit la fonction $u : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$.

2) Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
3) Montrer que

$$\int_0^1 u(x)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right).$$

4) En déduire $\int_0^1 u(x)\,dx = \ln(2)$.

Exercice 7.— Pour tout $n \geq 1$ entier, on note u_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $u_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(1+nx)}$.
1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

On note désormais S la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$.

2) Soit a un réel > 0.
a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $[a,+\infty[$.
b) Montrer que, par contre, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
c) Montrer que S est continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 8.— Dans ce qui suit, α désigne un paramètre réel > 0. Pour tout $n \geq 1$ entier, on note u_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $u_n(x) := \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2) a) Etudier les variations de la fonction u_n sur $[0,+\infty[$.
b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

On se place désormais dans le cas $\alpha = 1$, donc $u_n(x) := \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ et on note pour tout $x \in [0,+\infty[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ la somme de la série de fonctions.

3)a) Montrer que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$ (avec $a < b$).
b) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
4)a) Montrer que pour tout $p \geq 1$, on a $\sqrt{p}\, S\left(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\right) \geq \sum_{n=1}^{p} \dfrac{1}{n(1+\frac{n}{p})}$.
b) En déduire que S n'est pas dérivable (à droite) en 0.
5)(**Bonus**) a) On pose $v_n(x) = xu_n(x)$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.
b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} xS(x)$ et un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.