Exerice 5

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$

Le rayon de convergence $R = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tq converge } \sum |a_n| x^n \right\}$

$a_n = \begin{cases} 0 \text{ si k = 2n} \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} \text{ sinon} \end{cases}$

Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tq converge } \sum |a_n| x^n \right\} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tq converge } \sum \frac{1}{n(2n+1)} x^n \right\}$

Si $x = 1$ on $a_n x^n = \frac{1}{n(2n+1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\sum |a_n|$ converge par Riemann

Si $x < 1$ donc $a_n x^n \leq a_n$, et $\sum |a_n|$ converge par Riemann

Si $x > 1$ on $x^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, Et par croissance comparé $|a_n| x^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ donc $\sum |a_n| x^n$ diverge

Donc R = 1

Étudions $f(1)$ et $f(-1)$ pour connaitre le domaine de convergence

$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(2n+1)}$ converge absolument d'après Riemann

$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^{2n+1}}{n(2n+1)}$ converge absolument d'après Riemann

Donc le domaine de convergence est $[-1, 1]$

$f(x)$ est une séries entière, et une séries entière est C^{∞} sur $]-R, R[$

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+1) x^{2n}}{n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} = \ln(1 + x^2)$

$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x ln(1 + t^2) dt$

$$\int_0^x ln(1+t^2) dt = \int_0^x 1 * ln(1+t^2) + \frac{t}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1} dt$$
$$= \left[t ln(1+t^2) \right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{t^2+1} dt$$

Étudions $\int_0^x \frac{2t^2}{t^2+1} dt = 2 \int_0^x \frac{t^2}{t^2+1} = 2 \int_0^x 1 - \frac{1}{t^2+1} dt$

$$= 2 \left(\int_0^x 1 - \int_0^x \frac{1}{t^2+1} \right)$$
$$= 2 \left([t]_0^x - [arctan(t)]_0^x \right)$$
$$= 2x - 2arctan(x)$$

Donc $\int_0^x ln(1+t^2) dt = x ln(1+x^2) + 2arctan(x) - 2x$

$f_n(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$

$\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[-R, R]$ ssi $\sum\limits_{n\geq 1} \sup\limits_{x\in[-R,R]} |f_n(x)|$ CV

$|f_n(x)| = \dfrac{|x^{2n+1}|}{n(2n+1)}$

On a que $|f_n(-x)| = \dfrac{|(-x)^{2n+1}|}{n(2n+1)} = \dfrac{|-x^{2n+1}|}{n(2n+1)} = \dfrac{|x^{2n+1}|}{n(2n+1)} = |f_n(x)|$

Donc $\sup\limits_{x\in[-R,R]} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,R]} |f_n(x)| = |f_n(R)|$ car $|f_n|$ est strictement croissant

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[-R,R]} |f_n(x)| &= \sum_{n\geq 1} |f_n(R)| \\ &= \sum_{n\geq 1} |f_n(1)| \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(2n+1)} \text{ converge d'après Riemann}\end{aligned}$$

Donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement

Or $f_n(x)$ est C^0

Donc $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur $[-R, R]$

On a que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \ln(1 + x^2) + 2(arctan(x)) - 2x$ sur $]-1, 1[$

Or on a vu que $f(x)$ était continue sur $[-1, 1]$ donc on a que:

Soit $x_n \in]-1, 1[$ tq $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)) = f(1)$ Par continuité de la limite en 1

Or comme x_n ¡ 1, on a que $f(x_n) = \ln(1 + x_n^2) + 2(\arctan(x_n)) - 2x_n$

Or $\ln, \arctan,$ et x sont continue en 1, donc:

$\ln(1 + x_n^2) + 2(\arctan(x_n)) - 2x_n \underset{x_n\to 1}{\longrightarrow} ln(1 + 1^2) + 2\arctan(1) - 2 * 1 = ln(2) + \dfrac{\pi}{2} - 2$

$f(1) = ln(2) + \dfrac{\pi}{2} - 2$