Examen partiel du 10 mars 2021

Durée : 2h. Documents, calculatrices et smartphones interdits.
Le barème est donné à titre indicatif. Il est susceptible d'être un peu modifié.

Exercice 1 (6 points). Pour tout entier $n \geq 1$, on note g_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

1) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction g qu'on précisera.

2) a) Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $0 \leq t - \ln(1+t) \leq \dfrac{t^2}{2}$.

b) En déduire que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0, a]$ pour tout réel $a > 0$.

3) Montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2 (6 points). Pour tout $n \geq 1$ entier, on note u_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(1+nx)}.$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

On note désormais S la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$.

2) Soit a un réel > 0.

a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $[a, +\infty[$.

b) Montrer que, par contre, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

c) Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 (9 points). Pour tout $n \geq 1$ entier, on note u_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On note désormais S la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$.

2) Montrer que $S(1) = 1$.
3) a) Etudier les variations de la fonction u_n sur $[0, +\infty[$.
b) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.
c) Montrer que S est continue sur $[0, +\infty[$.
4) a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$ (avec $a < b$).
b) En déduire que S est dérivable sur $]0, +\infty[$.
5) a) Soit p un entier quelconque ≥ 1. Montrer que $\dfrac{S(x)}{x} \geq \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(1+nx^2)}$ pour tout $x > 0$. En déduire que

$$\frac{S\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{p}}} \geq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2n}.$$

b) Montrer alors que S n'est pas dérivable (à droite) en 0.