Exerice 5

Soit $(E, <.|.>)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et u un vecteur non nul de E
$V = \{x \in E, <x|u>= 0\}$
On veut montrer que V et $Vect\{u\}$ sont en somme directe
Soit $U = Vect\{u\}$

- $U \cap V = 0_E$?
  Soit $x \in U \cap V$ alors $x \in U$ et $x \in V$
  Comme $x \in U, \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $x = \alpha u$
  Comme $x \in U$, on a $<x|u>= 0$
  Donc on a $<\alpha u|u>= 0 \Leftrightarrow \alpha <u|u>= 0$ or u est un vecteur non nul donc $<u|u>\neq 0$
  Finalement on a que $\alpha = 0$, donc que $x = 0$ et donc que $U \cap V = 0_E$
  Donc U et V sont en somme directe

- Soit φ une application de $E \to \mathbb{R}$, qui à tout vecteur x associe $<x|u>$
  Soit $(x, y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$
  $\varphi(\alpha x + y) =<\alpha x + y|u>= \alpha <x|u> + <y|u>= \alpha\varphi(x) + \varphi(y)$
  Donc φ est une forme linéaire
  $ker\varphi = \{x \in E, \varphi(x) = 0\} = \{x \in E, <x|u>= 0\} = V$
  Comme φ est une application linéaire on a que $dim(E) = dim(ker\varphi) + dim(im\varphi)$
  Or φ va de $E \to \mathbb{R}$, donc $dim(im\varphi) = 1$
  Donc $dim(ker\varphi) = dim(V) = dim(E) - dim(im\varphi) = n - 1$

- On a vu que et U et V était en somme directe de plus $dim(U) + dim(V) = 1 + N - 1 = N = Dim(E)$, donc on a que $U \bigoplus V = E$
  Donc on peut définir la projection orthogonal