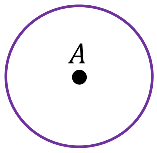
Chapitre 1 : Courbes planes

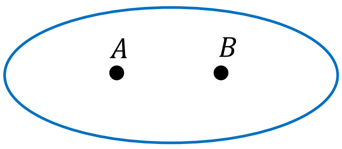
I) Courbes

A) Description géométrique

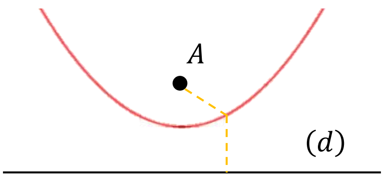
Exemple : "L'ensemble des points à distance r d'un point A" = Cercle de centre A et de rayon r ou "distance aller-retour de A à M vaut $2r$"



Exemple : "Etant donné deux points A et B, l'ensemble des points M tels que $dist(A, M) + dist(M, B) = d$" = ellipse de foyers A et B



Exemple : "Etant donné un point A et une droite (d), l'ensemble des points à égale distance de A et de D" = parabole



B) Courbe représentative d'une fonction

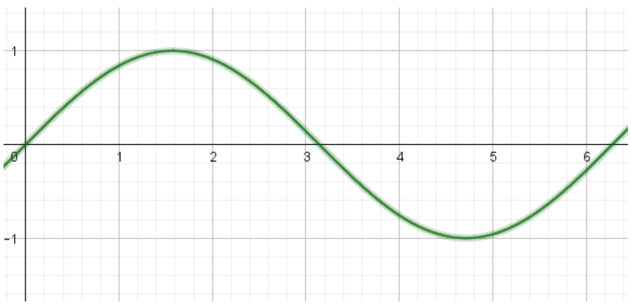
Cadre : I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$

$$\Gamma_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| y = f(x) \right\}$$

Exemple : $\Gamma_{\sin_{[0,2\pi]}}$

$I = [0,2\pi]$

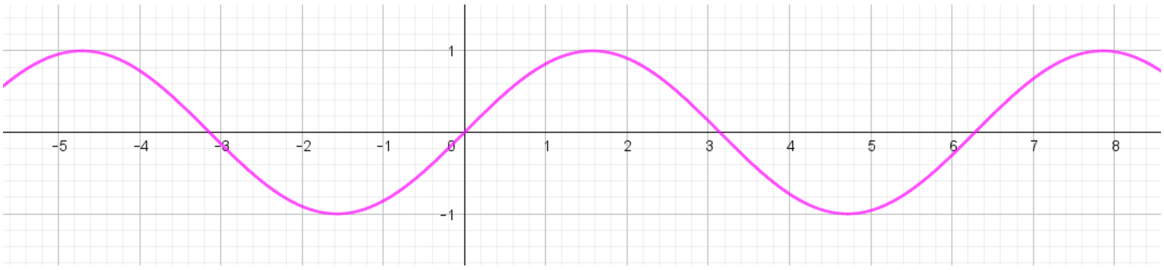
$f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$



$\Gamma_{\sin}$

$I = \mathbb{R}$

$f: I \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$



C) Courbes paramétrées

1) en coordonnées cartésiennes

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle

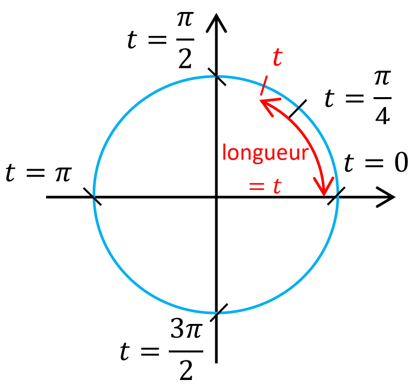
$M: I \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Remarque : se donner une fonction $M: I \to \mathbb{R}^2$ revient à se donner deux fonction

$x: I \to \mathbb{R}$ et $y: I \to \mathbb{R}$

Exemple : on prend $I = \mathbb{R}$ et $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \cos(t)$ et $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sin(t)$



Exemple : $I = \mathbb{R}$, $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$

Quelle courbe obtient-on?

Calculons : $dist\big(0, M(t)\big)$ où $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

On observe que :

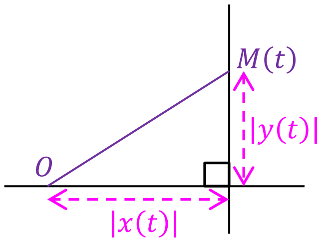
$$x(t) + y(t) = \frac{1 + 2t - t^2}{1 + t^2}$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = \frac{(1-t^2)^2 + (2t)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1 + 2t^2 + (t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

D'après le théorème de Pythagore

$|x(t)|^2 + |y(t)|^2 = d^2$

Donc $d = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = 1$



On est donc sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine

La courbe décrit donc une portion du cercle

Calculons les dérivées de x et y

$$x'(t) = \frac{(-2t)(1+t^2) - (1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

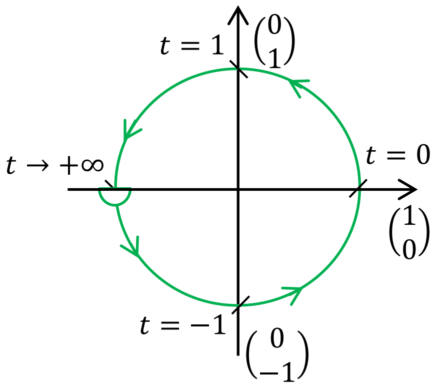
$$x'(t) = \frac{2(1+t^2) - (2t)(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$+$		$-$		$-$	
$x(t)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

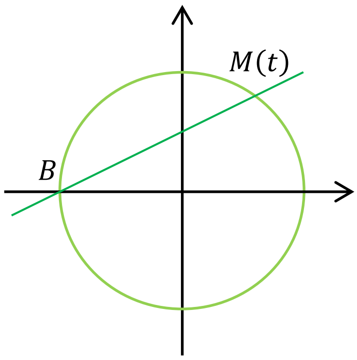
$\lim_{t \to +\infty} x(t) = -1$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$+$		$+$		$-$	
$x(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$



Dans cet exemple, notons B le point $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et calculons la pente de la droite $\big(BM(t)\big)$



Calculons la pente

$$p(t) = \frac{y_{M(t)} - y_B}{x_{M(t)} - x_B}$$

$$= \frac{y(t) - 0}{x(t) - (-1)}$$

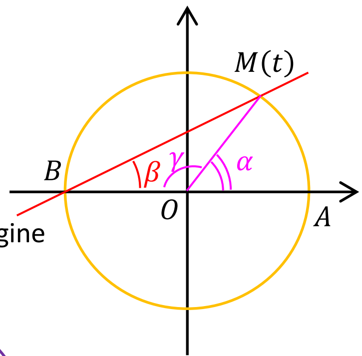
$$= \frac{\frac{2t}{1+t^2} - 0}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1}$$

$$= \frac{2t}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

$$= \frac{2t}{2}$$

$$= t$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ est l'intersection de la droite de pense t passant par B avec le cercle de rayon 1 centré à l'origine



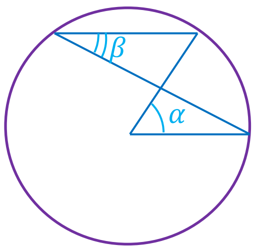
Le triangle $OBM(t)$ est isocèle donc $2\beta + \gamma = \pi$

O est sur la droite (AB) donc $\gamma + \alpha = \pi$

D'où $\alpha = 2\beta$

Comme la droite $\big(BM(t)\big)$ fait un angle $\beta(t)$ avec l'origine

et a une pente $p(t)$, on a :



$p(t) = \tan\big(\beta(t)\big)$

Comme $\beta(t) = \frac{1}{2}\alpha(t)$

$$p(t) = \tan\left(\frac{1}{2}\alpha(t)\right)$$

Donc $t = \tan\left(\frac{\alpha(t)}{2}\right)$

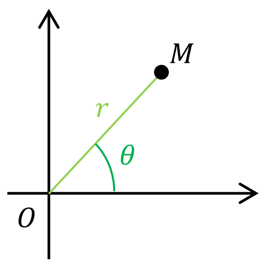
Par ailleurs $\begin{cases} x(t) = \cos(\alpha(t)) \\ y(t) = \sin(\alpha(t)) \end{cases}$ puisque $M(t)$ est sur le cercle unité à l'angle $\alpha(t)$. Donc pour tout angle $\alpha \not\equiv \pi[2\pi]$, on a:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \dfrac{1 - \left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}{1 + \left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} \\ \sin(\alpha) = \dfrac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} \end{cases}$$

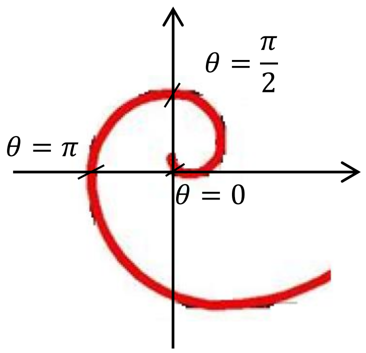
Exercice : Avec $M(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}$

Calculer $M(t)$ pour $t \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$

2) en coordonnées polaires



Exemple : On peut étudier la courbe définie par $r(\theta) = \theta$



On peut se ramener au cas des courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes. En effet, si M a pour coorodnnées polaires (r, θ), alors ses coordonnées cartésiennes sont $\begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$

Exemple : Si $r = r(\theta)$, on obtient $\begin{pmatrix} r(\theta)\cos(\theta) \\ r(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix}$

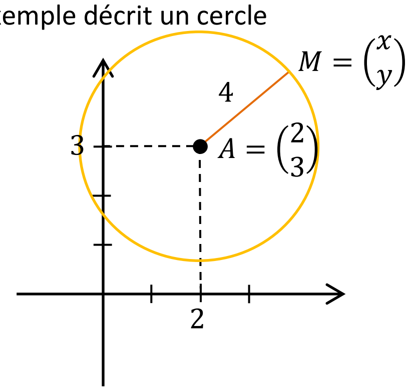
On peut avoir des descriptions en polaires paramétrées par l'angle : $M(\theta)$ de coordonnées polaires $(r(\theta), \theta)$ ou plus généralement, à la fois le rayon et l'angle peuvent dépendre d'un autre paramètre : on considère $M(t)$ de coordonnées polaires $\big(r(t), \theta(t)\big)$

D) description implicite de courbes

On donne une relation entre x et y

Exemple : $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

Cet exemple décrit un cercle



En effet, l'équation $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

peut aussi s'écrire $dist(M, A)^2 = 4^2$

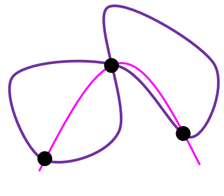
Exemple : $x^5 + 3xy^3 + \sin(xy) + 1 = 0$

La description implicite ne donne pas directement des points de la courbe. Parfois, l'ensemble des solutions n'est pas une courbe

Exemple : $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$

On se concentre sur les courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes

Chaque valeur de t donne un point $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$



Avec quelques points, difficile de savoir à quoi ressemble la courbe

- On peut souvent détecter des symétries de la courbe et restreindre l'intervalle d'étude

- On peut étudier la continuité et la différentiabilité de la courbe

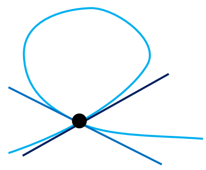
- chaque courbe admet un infinité de paramétrages différents, on peut essayer de trouver le "paramétrage préféré"

Exemple : on a vu que $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{2t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}$ sur $\mathbb{R}$ donnent la même courbe : le cercle de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le rayon 1 privé du point $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, simplement elle n'est pas parcourue à la même vitesse

II) Tangente à une courbe en un point

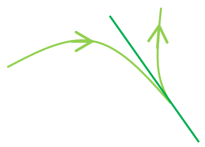
Plusieurs difficultés supplémentaires par rapport à la tangente au graphe d'une fonction :

- La courbe peut passer plusieurs fois par le même point



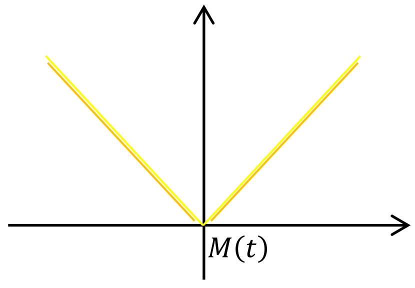
"deux tangentes"

- la courbe peut faire demi-tour



"demi tangentes"

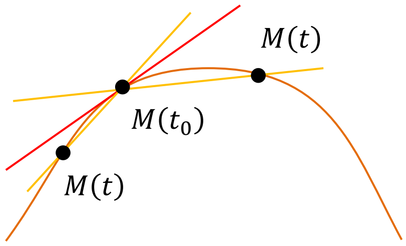
- la courbe peut ralentir, s'arrêter et repartir dans une direction différente



$M(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ |t^3| \end{pmatrix}$

x et y sont dérivables en 0, pourtant la courbe fait un angle en $M(0)$

<u>Définition :</u> on dit que la courbe $t \mapsto M(t)$ admet une tangente au temps t_0 si la droite $\big(M(t_0), M(t)\big)$ admet une position limite lorsque $t \to t_0$



Cela revient à dire que le vecteur $\frac{1}{\left\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\right\|}\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$

admet une limite lorsque $t \to t_0$

A) Le vecteur dérivé

On considère une courbe $M\colon \begin{cases} I \to \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto M(t) \end{cases}$ et on considère $t_0 \in I$

- Le vecteur position au temps t est le vecteur $\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

- le vecteur dérivé au temps t_0 est $M'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$

C'est la limite de $\frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \frac{1}{t-t_0}\big(M(t) - M(t_0)\big)$ (si cette limite existe)

Si la limite n'existe pas, il n'y a pas de vecteur dérivé en t_0. Lorsque le vecteur dérivé $M'(t_0)$ existe et est non nul, c'est-à-dire que ce n'est pas le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, la courbe admet une tangente au temps t_0, de vecteur directeur $M'(t_0)$

Si le vecteur dérivé $M'(t_0)$ existe, mais est nul, on peut soir re-paramétrer la courbe pour éliminer le problème de vitesse nulle en t_0, soit chercher la limite de $\frac{1}{\left\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\right\|}\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$, pour savoir s'il y a une tangente

- Si la limite pour $t \to t_0$ avec $t < t_0$ existe, on a une demi-tangente en t_0^-

- Si la limite pour $t \to t_0$, avec $t > t_0$ existe, on a une dime tangente en t_0^+

- Si les deux coïncident, on a une tangente au temps t_0

Vocabulaire : si $M'(t_0) \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, on dit que la courbe est <u>régulière</u> en t_0 ou que le point $M(t_0)$ est <u>régulier</u>

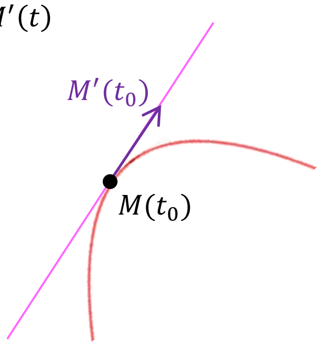
Si $M'(t_0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, on dit que la courbe est <u>singulière</u> en t_0, ou que le point $M(t_0)$ est <u>singulier</u>

On dit que $M = I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe régulière si elle est régulière en tout $t \in I$

<u>Remarque :</u> $M'(t)$ s'appelle le vecteur dérivé ou vecteur vitesse

Point régulier $\Leftrightarrow$ on est pas à l'arrêt

En un point régulier, la courbe admet une droite tangente : la droite passant par $M(t)$ et de vecteur directeur $M'(t)$



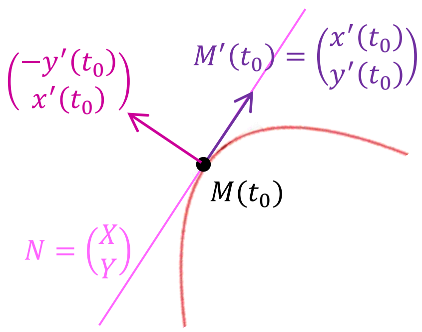
Un paramétrage de cette droite est $T(u) = M(t_0) + uM'(t_0)$

$$= \begin{pmatrix}x(t_0) + ux'(t_0)\\ y(t_0) + uy'(t_0)\end{pmatrix}$$

Pour $u \in \mathbb{R}$

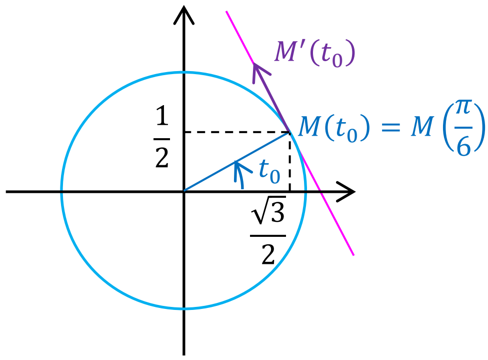
Une équation de la droite tangente à la courbe au point $M(t_0)$ est

$$-y'(t_0).\big(X - x(t_0)\big) + x'(t_0)\big(Y - y(t_0)\big) = 0 \quad (*)$$



Dire que N est sur la droite tangente revient à dire que $\overrightarrow{M(t_0)N}$ est colinéaire à $M'(t_0)$, c'est-à-dire orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix}-y'(t_0)\\ x'(t_0)\end{pmatrix}$ ce qu'on traduit par un produit scalaire nul $\begin{pmatrix}-y'(t_0)\\ x'(t_0)\end{pmatrix}.\overrightarrow{M(t_0)N} = 0$ ce qui donne (*)

Exemple : $M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$



$M'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t_0) \\ \cos(t_0) \end{pmatrix}$

Pour $t_0 = \frac{\pi}{6}$,

$$M(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M'(t_0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Equation de la tangente : $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(Y - \frac{1}{2}\right) = 0$

B) norme du vecteur vitesse

C'est la "vitesse au compteur" ("intensité" du vecteur vitesse en oubliant sa direction)

Son intégrale ebtre $t = a$ et $t = b$ donne la longueur parcourue le long de la courbe entre $t = a$ et $t = b$

Exemple : entre $t = \frac{\pi}{6}$ et $t = \frac{\pi}{3}$, la courbe $M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ parcourt une longueur de

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2}\, dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1\, dt$$

$$= [t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

Le paramétrage $M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ est "à vitesse 1" donc la longueur parcourue est égale à la durée du parcours

Le paramétrage $\begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}$ n'est pas à vitesse 1 et donne des calculs de longueur plus élaborés. Les longueurs parcourues entre les mêmes points coïncident

Pour une courbe régulière, c'est-à-dire dont le vecteur vitesse ne s'annule pas), le vecteur vitesse est horizontale quand $y'(t) = 0$ et on a alors une tangente horizontale. De même , $x'(t) = 0$ correspond à un vecteur vitesse vertical et donc une droite tangente verticale

Pour $M: I \to \mathbb{R}^2$ régulière, les points d'abscisses minimale et maximale correspondent soit aux extrémités de l'intervalle I, soit à des points tangente verticale et donc $x'(t) = 0$

De même , une ordonnée minimale ou maximale peut arriver soit aux extrémités de I, soit lorsque$y'(t) = 0$

Exemple : $M(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}$

Pour $t \in]-\infty, +\infty[$

$\lim_{t\to-\infty} M(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\lim_{t\to+\infty} M(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Annulation de x' et de y'

- $x'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{(2t)(1+t^2)-(1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2} = 0$

$\Leftrightarrow -4t = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$

On a bien une tangente verticale

- $y'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{(2t)(1+t^2)-(1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2} = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 - t^{2\circ} = 0$

$\Leftrightarrow t^2 = 1$

$\Leftrightarrow t = 1$ ou $t = -1$

C) points singuliers (où le vecteur vitesse est nul)

Exemple : $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$

$M'(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix}$

- $x'(t) = 6t$ s'annule uniquement en $t = 0$

- $y'(t) = 6t^2$ s'annule uniquement en $t = 0$

On a donc $M'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $M(0)$ est un point singulier

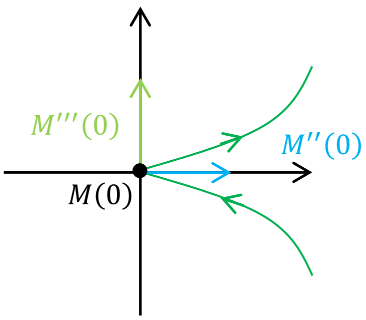
On fait un développement limité de $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ au voisinage de $t = 0$

$$M(t) = \underbrace{M(0)}_{=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + t\,\underbrace{M'(0)}_{=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \frac{t^2}{2} M''(0) + \frac{t^3}{6} M'''(0) + \underbrace{o(t^3)}_{=0}$$

$M''(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 12t \end{pmatrix}$, $M''(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$M'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, $M'''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

$M^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 4$



Le développement limité s'écrit donc :

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

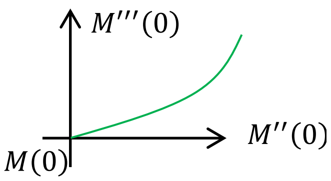
- La direction tangente est donnée par $M''(0)$ car $M'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mais $M''(0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- C'est une demi-tangente car $\frac{t^2}{2}$ est de même signe pour $t < 0$ ou $t > 0$

- La courbe traverse sa demi-tangente car la contribution suivante est $\frac{t^3}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ et t^3 est positif strictement pout $t > 0$ et négatif strictement pour $t < 0$

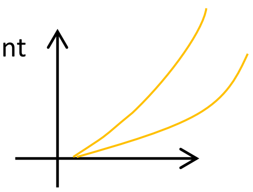
On a un "point de rebroussement de première espèce"

Exemple : $M(t) = \binom{t^2}{t^4} = \binom{0}{0} + t^2 \binom{1}{0} + t^4 \binom{0}{1}$



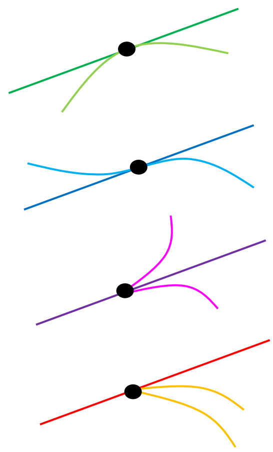
Exemple : point de rebroussement

de deuxième espèce



D) position d'une courbe par rapport à sa tangente

Quand la courbe arrive en $M(t_0)$, le long de sa tangente, plusieurs possibilités :



- La courbe continue dans le même sens, sans traverser sa tangente : point "d'allure ordinaire'

- La courbe continue dans le même sens en traversant sa tangente : point d'inflexion

- La courbe rebrousse chemin, en traversant sa tangente : "rebroussement de première espèce"

- La courbe rebrousse chemin sans traverser sa tangente : "rebroussement de deuxième espèce"

Pour savoir dans quel cas on est, on écrit le développement limité des coordonnées de M en t_0

En $t_0 = 0$, cela donne :

$M(t) = M(0) + t^p \vec{v} + t^q \vec{w} + t^q \vec{\varepsilon}(t)$, avec $\vec{\varepsilon}(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$

Si $t_0 \neq 0$

$M(t) = M(t_0)(t - t_0)^p \vec{v} + (t - t_0)^q \vec{w} + (t - t_0)^q \vec{\varepsilon}(t)$, avec $\vec{\varepsilon}(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$

p et q sont entiers

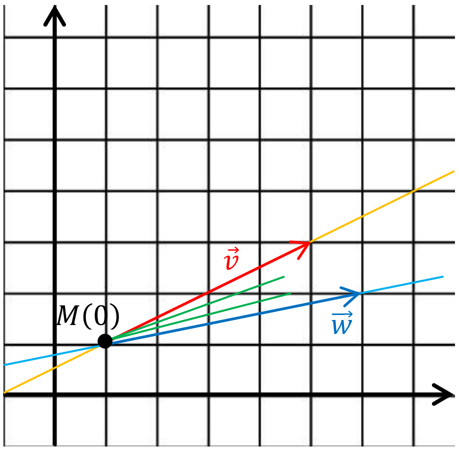
$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs non colinéaires

Exemple :

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 + 4t^2 + 4t^3 + 5t^6 + t^7 \\ 2 + 2t^2 + 2t^3 + t^6 + 2t^8 \end{pmatrix}$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (t^2 + t^3)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t^6 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t^6 \vec{\varepsilon}(t)$$

(ici $\vec{\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t^2 \end{pmatrix}$)



III) Branches infinies

$M : I \to \mathbb{R}^2$ intervalle

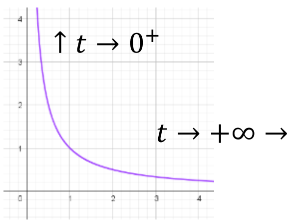
$\mathcal{C}$ la courbe $M(I)$

t_0 une des bornes de I non continues dans I

Exemple : $I =]-\infty, 1[$, $t_0 = -\infty$

$I = [0,1[$, $t_0 = 1$

Exemple : $x(t) = t$, $y(t) = \frac{1}{t}$

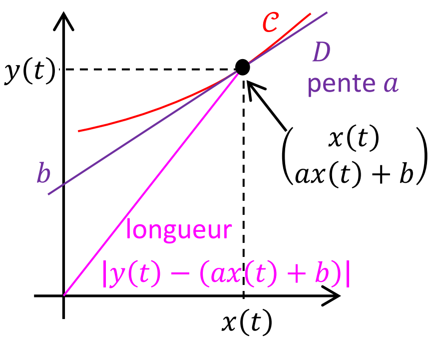


$I =]0, +\infty[$

On a des branches infinies aux deux extrémités de I

Pour chaque branche infinie, on cherche s'il y a une asymptote. On dit qu'une droite D est symptote)
$\mathcal{C}$ si $dist(M(t), D) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\|\overrightarrow{OM}(t)\| \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} +\infty$

Cas des droites non verticales : elles ont une équation $y = ax + b$



D la droit d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}$ quand

$t \to t_0$ si et seulement si $y(t) - (ax(t) + b) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0$

En pratique, il faut d'abord trouver a et b

Si $\mathcal{C}$ est asymptote à D, alors

(1) $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} a$ (la pente $\overrightarrow{OM}(t)$ tend vers cette de D)

(2) $y(t) - ax(t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} b$

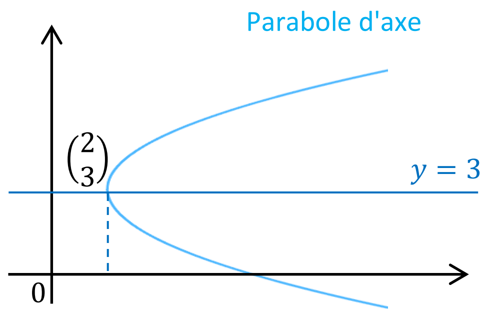
La condition (1) indique une "direction asymptotique" et la condition (2) une droite asymptote

- Si asymptote, $y = ax + b$, alors (1) et (2)

- Si (1) et (2), alors asymptote $y = ax + b$

On peut avoir (1) sans (2)

Exemple : $\begin{cases} x(t) = 2 + t^2 \\ y(t) = 3 + t \end{cases}$



On a une direction asymptotique mais sans droite asymptote

Asymptote verticale :

Conditions : $y(t) \to +\infty$ ou $y(t) \to -\infty$

- $x(t) \to$ constante

Bilan : étude d'une courbe paramétrée : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

- Domaine de définition

- Restreindre le domaine d'étude grâce aux symétries de la courbe

- Vecteur dérivé (vecteur vitesse) $= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

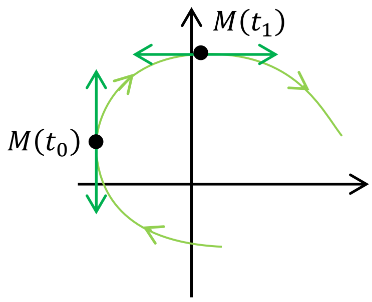
  → annulations de x' où $y' \neq 0$: tangentes verticales

  → annulations de y' où $x' \neq 0$: tangente horizontales

  → annulations de x' et y' ensemble : points singuliers

- tableau de variations :

t	$-\infty$		t_0		t_1		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$		$+$	
y'		$+$		$+$	0	$-$	
x		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
y		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
M		$\nwarrow$		$\nearrow$		$\searrow$	



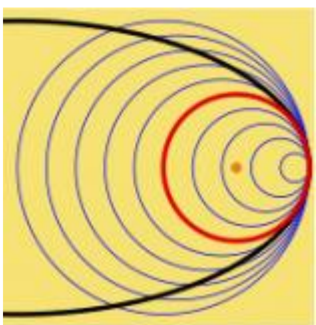
  → étude des points singuliers

  → étude des branches infinies

  → points multiples

  → tracé

Définitions : On appelle cercle osculateur à une courbe $\mathcal{C}$ en un point M le cercle qui "colle le mieux à la courbe en ce point, c'est-à-dire qu'il a un contact d'ordre 2 (au moins)



On appelle rayon de courbure de $\mathcal{C}$ en M le rayon du cercle osculateur

On appelle courbure l'inverse du rayon de courbure. Quand $\mathcal{C}$ est très courbée, elle a un très petit rayon de courbure mais une grande courbure. Quand $\mathcal{C}$ est peu courbée, elle a un très grand rayon de courbure mais une petite courbure.

On appelle "courbure algébrique" la courbure enrichie d'un signe qui dit dans quel sens on tourne

IV) Reparamétrage

A) définition

Définition : Soit $\alpha:]a,b[\to \mathbb{R}^2$ et $\beta:]a,b[\to \mathbb{R}^2$ deux courbes paramétrées. On dit que β est un reparamétrage de α s'il existe une fonction lisse $h:]c,d[\to]a,b[$ telle que $\beta = \alpha\ o\ h$ et $\forall u \in]c,d[$, $h'(u) \neq 0$

C'est un reparamétrage positif si $\forall u \in]c,d[, h'(u) > 0$

C'est un reparamétrage négatif si $\forall u \in]c,d[, h'(u) < 0$

Lien entre les vecteurs vitesses pour une courbe α et un reparamétrage de cette courbe

Lemme : dérivée de fonctions composées pour les courbes

Si α est un reparamétrage de α, on écrit $\beta = \alpha\ o\ h$ où $h:]c,d[\to]a,b[$ est lisse. Alors pour $u \leftarrow]c,d[$

$$\beta' = h'(u) \times \alpha'\big(h(u)\big)$$

Démonstration : voir cela coordonnée par coordonnées

Exemple : - Droite passant par $A = \binom{x_A}{y_A}$ et dirigée par $\vec{u} = \binom{x_u}{y_u}$, $t, s \in \mathbb{R}$

Paramétrage habituel : $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x_A + tx_u \\ y_A + ty_u \end{pmatrix}$

Paramétrage à vitesse 1 : $\beta(s) = \begin{pmatrix} x_A + \frac{sx_u}{\sqrt{x_u^2+y_n^2}} \\ y_A + \frac{sy_u}{\sqrt{x_u^2+y_n^2}} \end{pmatrix}$

- Cercle de rayon r centré en $P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$, $t \in [0,2\pi]$, $s \in [0,2\pi r]$

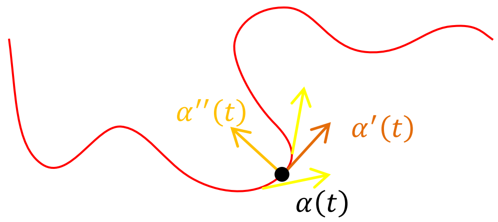
Paramétrage habituel : $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x_p + r\cos(t) \\ y_P + r\sin(t) \end{pmatrix}$

Paramétrage à vitesse 1 : $\beta(s) = \begin{pmatrix} x_p + r\cos\left(\frac{s}{r}\right) \\ y_P + r\sin\left(\frac{s}{r}\right) \end{pmatrix}$

B) champ de vecteurs le long d'une courbe

Définition : si $\alpha:]a,b[\to \mathbb{R}^2$ est une courbe, un champ de vecteur le long de α est une application $Y:]a,b[\to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto Y(t)$. On voit $Y(t)$ comme vecteur "barré en $\alpha(t)$"

Exemple : - le vecteur vitesse :



- Le vecteur accélération :

Les champs de vecteurs peuvent être additionnés, mis à l'échelle, dérivés, …

On peut aussi multiplier un champ de vecteurs le long d'une courbe ($\alpha:]a,b[\to \mathbb{R}^2$) par une fonction $f:]a,b[\to \mathbb{R}$

On définit pour cela le champ de vecteur

$f\underline{Y}$ par $(f\underline{Y})(t) = \left(f(t)\underline{Y}(t)\right)$

On définit la matrice J de rotation d'un quart de tour : $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On peut multiplier un champ de vecteur $\underline{Y}$ le long d'une courbe $\alpha:]a,b[\to \mathbb{R}^2$ par J : on définit $J\underline{Y}$ par $(J\underline{Y})(t) = J\underline{Y}(t)$

On dérive comme on s'y attend

Lemme : $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ des champs de vecteurs le long d'une courbe et J la matrice de rotation d'un quart de tour

- $(f\underline{Y})'(t) = f'(t)\underline{Y}(t) + f(t)\underline{Y'}(t)$

- $(\underline{X} + \underline{Y})' = \underline{X'} + \underline{Y'}$

- $(\underline{X}.\underline{Y})' = \underline{X'}.\underline{Y} + \underline{X}.\underline{Y'}$

- $(J\underline{Y'}) = J\underline{Y'}$

- La norme d'un champ de vecteur $\underline{Y}$ est le champ scalaire $\mapsto \|\underline{Y}(t)\|$. On a $\|\underline{Y}(t)\|^2 = \underline{Y}(t).\underline{Y}(t)$

- Si $\underline{Y}$ est un champ de vecteur de norme constante, alors $\underline{Y'}(t)$ reste orthogonal à $\underline{Y}(t)$

Démonstration : on a $\|\underline{Y}(t)\|^2 =$ constante, c'est-à-dire $\underline{Y}.\underline{Y}$ est constant

Donc $(\underline{Y}.\underline{Y})' = 0$

Mais $(\underline{Y}.\underline{Y})' = \underline{Y}'.\underline{Y} + \underline{Y}.\underline{Y}'$

$= 2\underline{Y}.\underline{Y}'$

Or $\underline{Y}.\underline{Y}'$ vaut toujours 0

Donc $\underline{Y}$ et $\underline{Y}'$ restent orthogonaux

Montrons que la longueur d'une courbe ne dépend pas du paramétrage

Rappel : si $\underline{\alpha}:]a, b[\to \mathbb{R}^2$

$$longueur(\underline{\alpha}) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

On note parfois $longueur_{]a,b[}(\underline{\alpha})$ pour insister sur l'intervalle

Théorème : la longueur ne dépend pas du paramétrage

Démonstration : pour un reparamétrage positif. Soit $\underline{\beta} = \underline{\alpha}\ o\ h$ où $h:]c, d[\to]a, b[$ où h est lisse et $\forall u \in]c, d[, h'(u) > 0$

Alors $\left\|\underline{\beta}(u)\right\| = \|\alpha'(h(u))h'(u)\|$

$= h'(u)\|\alpha'(h(u))\|$

$$\int_a^b \|\underline{\alpha}'(t)\|\,dt = \int_c^d \left(\|\alpha'(h(u))\|h'(u)\right) du$$

Par changement de variable

$$= \int_c^d \|\beta'(u)\|\,du$$

Dans ce reparamétrage, $\lim_c h = a$ et $\lim_d h = b$

Cas d'un reparamétrage négatif :

- $\lim_c h = b$ et $\lim_d h = a$
- $h'(u) < 0$ donc $\|\alpha'(h(u))h'(u)\| = \|\alpha'(h(u))\|(-h'(u))$
- $\int_d^c -(\dots)\,du = \int_c^d +(\dots)\,du$

V) Abscisse curviligne

Définition : Soit $\underline{\alpha}:]a, b[\to \mathbb{R}^2$ une courbe. La fonction abscisse curviligne de $\underline{\alpha}$ d'origine c (où $c \in]a, b[$ notée $s_{\underline{\alpha}}$ est définie pour tout $t \in]a, b[$ par $s_{\underline{\alpha}} = longueur_{]x,t[}(\underline{\alpha}) = \int_c^t \|\alpha'(u)\|\,du$

Sauf risque de confusion, on note s pour $s_{\underline{\alpha}}$

Théorème : Si $\underline{\alpha}:]a, b[\to \mathbb{R}^2$ est une courbe régulière (c'est-à-dire dont le vecteur vitesse ne s'annule pas). Alors il existe un reparamétrage de $\underline{\alpha}$ à vitesse 1

Démonstration : toute fonction abscisse curviligne pour $\underline{\alpha}$ vérifie $\frac{ds}{dt}(t) = s'(t) = \|\alpha'(t)\|$

Comme $\underline{\alpha}$ est régulière, α' ne s'annule jamais. Donc s' reste strictement positive

Il existe donc une bijection réciproque $t: s \mapsto t(s)$

Avec $\left.\frac{dt}{ds}\right|_{s(t)} = \left.\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\right|_{t(s)}$

OU s^{-1}

$$(s^{-1})'(v) = \frac{1}{s'(s^{-1}(v))}$$

Définissons $\underline{\beta}$ par $\underline{\beta}(s) = \underline{\alpha}(t(s))$

$$\underline{\beta'}(s) = \frac{dt}{ds}(s)\alpha'(t(s))$$

$$\left\|\underline{\beta'}(s)\right\| = \frac{dt}{ds}(s)\|\underline{\alpha'}(t(s))$$

$$= \frac{dt}{dt}(s).\frac{ds}{dt}(t(s))$$

$$= 1$$

$$\beta(v) = \underline{\alpha}(s^{-1}(v))$$

$$\underline{\beta'}(v) = (s^{-1})'(v).\underline{\alpha'}(s^{-1}(v))$$

$$\left\|\underline{\beta'}(v)\right\| = (s^{-1})'(v)\|\alpha'(s^{-1}(v))\|$$

$$= (s^{-1})'(v).s'(s^{-1}(v))$$

$$= 1$$

Pour une courbe parcourue à vitesse 1, l'abscisse curviligne et le temps écoulé coïncident

Plus précisément si $\underline{\alpha}:]a, b[\to \mathbb{R}^2$ est parcourue à vitesse 1 et s est la fonction abscisse curviligne de $\underline{\beta}$ d'origine $c \in]a, b[$. Alors $\forall t \in]a, b[$

$$s(t) = t - c$$

"longueur parcourue" = "temps écoulé"