Exerice 4

$E = \mathbb{R}_2[X]$

$Soit P, Q \in E$ on a $< P|Q >= \int_{-1}^{1} P(T)Q(T)\ \mathrm{d}t$

Soit $\varphi : E \to E$

$\varphi(P)(X) \longmapsto P(-X)$

• Soit $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\varphi(P + \lambda Q)(X) = (P + \lambda Q)(-X) = P(-X) + \lambda Q(-X) = \varphi(P)X + \lambda\varphi(Q)(X)$

Donc φ est linéaire

Calculon $< \varphi(P)|\varphi(Q) >= \int_{-1}^{1} \varphi(P)(t)\varphi(Q)(t)\ \mathrm{d}t$

$$= \int_{-1}^{1} P(-t)Q(-t)\ \mathrm{d}t$$

On fait un changement de variable

$u = -t$

$du = -1dt \Rightarrow dt = -du$

$t = 1 \Rightarrow u = -1$

$t = -1 \Rightarrow u = 1$

$$\int_{-1}^{1} P(-t)Q(-t)\ \mathrm{d}t = \int_{1}^{-1} -P(u)Q(u)\ \mathrm{d}u = -\int_{-1}^{1} -P(u)Q(u)\ \mathrm{d}u$$
$$= \int_{-1}^{1} P(u)Q(u)\ \mathrm{d}u =< P|Q >$$

Donc on a bien $< \varphi(P)|\varphi(Q) >=< P|Q >$ φ conserve le produit scalaire, donc φ est une isométrie

Montrons que φ est une symétrie, et comme φ est une isométrie sa matrice représentative dans une BON sera orthogonal

$\varphi(\varphi(P))(X) = \varphi(P)(-X) = P(X)$ donc $\varphi \circ \varphi = Id$

Donc φ est une symétrie orthogonal

Calculons $ker\varphi - Id$ et $ker\varphi + Id$

$(\varphi - Id)(P)(X) = \varphi(P)(X) - P(X) = P(-X) - P(X)$

$P \in ker\varphi - Id \Leftrightarrow P(-X) - P(X) = 0_E$

$\Leftrightarrow (a(-X)^2 + b - X + c) - (aX^2 + bX + c) = 0$

$\Leftrightarrow aX^2 + b - X + c - aX^2 - bX - c = 0$

$\Leftrightarrow -bX - bX = 0$

$\Leftrightarrow -2bX = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$

Donc les polynomes de la forme $aX^2 + c$, sont dans $ker(\varphi - Id)$

$(\varphi + Id)(P)(X) = \varphi(P)(X) + P(X) = P(-X) + P(X)$

$P \in ker\varphi + Id \Leftrightarrow P(-X) + P(X) = 0_E$

$\Leftrightarrow (a(-X)^2 + b - X + c) + (aX^2 + bX + c) = 0$

$\Leftrightarrow aX^2 - bX + c + aX^2 + bX + c = 0$

$\Leftrightarrow 2aX^2 + 2c = 0$

$\Leftrightarrow 2aX^2 = -2c$

$\Leftrightarrow aX^2 = -c$

Donc il faut que aX^2 soit constant ce qui est possible que si $a = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ et $c = 0$

Donc les polynomes de la forme bx, sont dans $ker(\varphi + Id)$

Avec $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$

$\varphi(1)(x) = 1(-x) = 1 = 1(x)$

$\varphi(X)(x) = X(-x) = -x = -X(x)$

$\varphi(X^2)(x) = X^2(-x) = x^2 = X^2(x)$

$$Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$det\varphi = -1$

Valeur propre de $\varphi = \{-1, 1\}$