Exerice 6

$S(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{\ln(n)}$

$a_n = \frac{1}{\ln(n)}$

Étudions $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)} = \frac{ln(n) + ln(1+\frac{1}{n})}{ln(n)} = 1 + \frac{ln(1+\frac{1}{n})}{ln(n)}$

Or $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc ont peut faire un DL en 0 de $\ln(1+u)$

$\frac{ln(1+\frac{1}{n})}{ln(n)} = \frac{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}{ln(n)} = \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = l$

Donc le critère de d'Alembert nous dis que $R = \frac{1}{l} = 1$

Étudions $S(x)$ en $\{-1, 1\}$

$S(-1) = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{ln(n)}$ or grâce au critère spécial des séries alternées on a que:

$S(-1) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{ln(n)}$ Converge

$S(1) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{ln(n)}$

Or Bertrand nous dis que cette série diverge

Donc le domaine de convergence de cette série est $[-1, 1[$

$S(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{ln(n)}$

$ln(n) < n \ \forall n \geq 2$, donc $\frac{1}{ln(n)} \geq \frac{1}{n}$

$x \in [0, 1[$, donc $\frac{x^n}{ln(n)} \geq \frac{x^n}{n} \ \forall n \geq 2$

Donc $S(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{ln(n)} \geq \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n}$

Or $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n} = -ln(1-x)$, sur $[0, 1[$

Et $-ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \infty$

Donc $S(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \infty$

3- a) $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln(n)}$

Passon par une somme partielle

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\ln(k-1)} - \frac{1}{\ln(k)} &= \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\ln(k-1)} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\ln(k)} \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\ln(k)} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\ln(k)} \\ &= \frac{1}{\ln(2)} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{\ln(k)} - \left(\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{\ln(k)} + \frac{1}{ln(n)}\right) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)}\end{aligned}$$

On a que $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} a_k$

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)}\right) = \frac{1}{ln(2)}$$

b) On a que $a_n \geq 0$, donc $a_n x^n$ est strictement croissant sur $[0,1]$

De plus on a que $|a_n(-x)^n| = |a_n||(-1)^n x^n| = |a_n||(-1)^n||x^n| = |a_n x^n|$

Donc si $\displaystyle\sum_{n\geq 3} a_n x^n$ converge normalement sur $[0,1]$ alors $\displaystyle\sum_{n\geq 3} a_n x^n$ converge sur $[-1,1]$

$\displaystyle\sum_{n\geq 3} a_n x_n$ converge normalement si $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \sup_{x\in[0,1]} |a_n x_n|$ conerge

$\displaystyle\sum_{n\geq 3} \sup_{x\in[0,1]} |a_n x_n| = \sum_{n\geq 3} |a_n| = \sum_{n\geq 3} a_n$ qui converge

Donc $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} a_n x_n$ converge normalement sur $[-1,1]$

4- a) $x \in [-1,1[$

$$\begin{aligned}(x-1)S(X) = (x-1)\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{\ln(n)} &= \sum_{n\geq 2} \frac{x^{n+1}}{\ln(n)} - \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{\ln(n)} \\ &= \sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{\ln(n-1)} - \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{\ln(n)} \\ &= \sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{\ln(n-1)} - \left(\sum_{n\geq 3} \left(\frac{x^n}{\ln(n)}\right) + \frac{x^2}{ln(2)})\right) \\ &= -\frac{x^2}{ln(2)} + \sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{\ln(n-1)} - \frac{x^n}{\ln(n)} \\ &= -\frac{x^2}{ln(2)} + \sum_{n\geq 3} x^n \left(\frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln(n)}\right) \\ &= -\frac{x^2}{ln(2)} + \sum_{n\geq 3} x^n a_n = -\frac{x^2}{ln(2)} + u(x)\end{aligned}$$

b) On a que $u(x)$ est continue sur $[-1,1]$ donc soit $x_n \in \mathbb{R}$ tq $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1^-$

$u(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(1)$

Or $u(1) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n = \frac{1}{\ln(2)}$

Donc
$$\begin{aligned}\underset{x\to 1^-}{lim}(x-1)S(x) &= \underset{x\to 1^-}{lim}\left(-\frac{x^2}{ln(2)} + u(x)\right)\\ &= -\frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(2)} = 0\end{aligned}$$