# Feuille 2
# Dénombrement et espaces de probabilité

**Exercice 1.**
Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis tels que $\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(F)$. Une application de $E$ dans $F$ peut-elle être injective ? surjective ? bijective ?

**Exercice 2.**
Quel est le cardinal de l'ensemble $\{-2, 4, 6, 9\}^3 \times \{0, 2, 7, 9, 12\}^6$ ?

**Exercice 3.**
On dispose de 3 bus, 3 conducteurs et 3 contrôleurs. Combien de façons y a-t-il d'attribuer les conducteurs et contrôleurs aux bus de manière à ce que chaque bus ait un conducteur et un contrôleur ?

**Exercice 4.**
Une école a une salle informatique avec 8 ordinateurs numérotés. Un groupe de 4 élèves fait un cours dans cette salle. Combien de façons différentes y a-t-il d'attribuer chaque élève à un ordinateur (distinct) ?

**Exercice 5.**
On lance six dés équilibrés et discernables (par exemple, ils sont de couleurs différentes). Quelle est la probabilité que les six donnent des chiffres différents ?

**Exercice 6.**
On dispose de $M$ jetons numérotés de 1 à $M$. On effectue $N$ tirages successifs avec remise. Quelle est la probabilité que l'on n'obtienne jamais deux fois le même jetons ?

Application : un groupe de $N$ étudiantes sont réunies dans une même salle. On suppose qu'aucune n'est née le 29 février et que $N$ est inférieur à 365. Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiantes aient leur anniversaire le même jour ? Estimer cette quantité pour $N = 10, 20, 30, 40$.

**Exercice 7.**
Soit $f : X \to Y$ une application entre deux ensembles.

1. Montrer que $\left(f^{-1}(\{y\})\right)_{y \in Y}$ définit une partition de l'ensemble $X$.
2. Démontrer le résultat suivant :
   *Lemme du berger.* On suppose que $Y$ est un ensemble fini de cardinal $p$, et que pour tout $y$ dans $Y$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est de cardinal $q$. Alors, $X$ est fini, de cardinal $pq$.
3. Utiliser ce résultat pour montrer par récurrence que le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à $n$ éléments est $2^n$.

**Exercice 8.**
Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{X}_{m,k}$ l'ensemble :

$$\mathcal{X}_{m,k} = \left\{(r_1, \ldots, r_k) \in \mathbb{N}^k,\ r_1 + \cdots + r_k = m\right\}.$$

On considère l'application $f$ définie sur $\mathcal{X}_{m,k}$ par

$$f(r_1, \ldots, r_k) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r_1 \text{ fois}}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r_2 \text{ fois}}, 1, 0, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r_k \text{ fois}}).$$

Montrer que $f$ est une bijection de $\mathcal{X}_{m,k}$ sur un ensemble que l'on déterminera. En déduire le cardinal de $\mathcal{X}_{m,k}$.

**Exercice 9.**

On étudie le nombre de personnes qui séparent deux amis, Pierre et Jean, dans une file d'attente constituée de $n$ personnes au total.

1. Décrire un espace de probabilité associé à cette expérience.
2. Soit $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Calculer la probabilité, notée $q_r$, que les deux amis soient distants de $r$ places (i.e., séparés par $r-1$ personnes).
3. Combien de personnes est-il le plus probable de trouver entre les deux amis ?

**Exercice 10.**

Soit $n \geqslant 3$.

1. Combien de nombres entiers positifs ont une écriture en base trois constituée d'exactement $n$ chiffres ?
2. Parmi ces nombres, on cherche combien contiennent les trois chiffres 0, 1 et 2. On considère donc les ensembles $A_0, A_1$ et $A_2$, où $A_i$ est l'ensemble des nombres dont l'écriture en base 3 est constitué d'exactement $n$ chiffres et comprend le chiffre $i$.
   (a) Exprimer en fonction des $A_i$ l'ensemble dont on cherche le cardinal.
   (b) Calculer $\mathrm{Card}(A_0^c)$, $\mathrm{Card}(A_1^c)$ et $\mathrm{Card}(A_2^c)$.
   (c) Lorsqu'on considère trois sous-ensembles $A$, $B$ et $C$ d'un ensemble $E$, expliquer pourquoi le cardinal de l'union de ces trois ensembles se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) \\ &\quad - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C)\,.\end{aligned}$$

   (d) En déduire $\mathrm{Card}(A_0^c \cup A_1^c \cup A_2^c)$.
   (e) Répondre enfin à la question de départ.

**Exercice 11.**

On considère un train constitué de trois wagons, chaque wagon comportant 50 sièges. Le système de réservation attribue au hasard les places, parmi celles qui sont libres au moment où une personne réserve sa place. Pour ce train, $n$ personnes ont réservé leur place ($0 \leqslant n \leqslant 150$).

1. Décrire un ensemble $\Omega$ contenant tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire (c'est-à-dire l'attribution des $n$ places réservées) et définir la mesure de probabilité $P$ sur $\Omega$ qui est associée à cette expérience aléatoire.
   On note pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ l'événement $A_i$ : « toutes les places du $i$-ème wagon sont réservées ».
2. Quelle est la probabilité que toutes les places du premier wagon soient réservées ?
3. On note $E$ l'événement « Il y a au moins une place non réservée dans chaque wagon ». Exprimer $E$ et $E^c$ en fonction des événements $A_1, A_2, A_3$ et des opérations ensemblistes.
4. En déduire $P(E)$.

**Exercice 12.**

On considère l'expérience aléatoire « lancer trois dés ».

1. Écrire l'ensemble $\Omega$ des résultats possibles comme un produit de trois ensembles puis préciser la mesure de probabilité associée à l'expérience et définie sur $\Omega$.
2. Les trois dés sont identiques, si bien qu'on ne connaît pas leur ordre. Montrer qu'il existe 6 façons différentes d'obtenir une somme égale à 10, et 6 façons aussi pour une somme égale à 9.
3. Montrer qu'il est malgré cela plus probable de faire un lancer ayant une somme égale à 10. Pourquoi ?

**Exercice 13.**

On considère l'expérience aléatoire « lancer deux dés équilibrés ».

1. Écrire l'ensemble $\Omega$ des résultats possibles comme un produit de deux ensembles puis préciser la mesure de probabilité associée à l'expérience et définie sur $\Omega$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité d'obtenir, lorsqu'on lance deux dés, une somme égale à $k$ ? (On pourra distinguer le cas $k \leqslant 7$ du cas $k \geqslant 8$.)
3. Donner un nouvel espace de probabilité correspondant à l'expérience du lancer de deux dés lorsqu'on s'intéresse uniquement à la somme des numéros tirés.