Feuille 1
Notations sur les ensembles et dénombrement

A, B désignent des ensembles et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indexée par un ensemble I.

Exercice 1.

Soit E, F et G trois sous-ensembles d'un ensemble Ω. Représenter sur un dessin puis démontrer :

1. $E \cap F \subset E \subset E \cup F$,
2. si $E \subset F$ alors $F^c \subset E^c$,
3. $F \setminus E = F \cap E^c$,
4. $F = (F \cap E) \cup (F \cap E^c)$,
5. $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$ et $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$,
6. $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$ et $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$.

Note : ces formules sont classiques et pourront être utilisées au partiel ou à l'examen sans démonstration (mais en précisant bien à chaque étape quelle est la formule que l'on utilise, comme pour tout résultat du cours).

Exercice 2.

Soit A et B deux sous-ensembles de Ω.

1. Vérifier que $\mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_B$ si et seulement si $A \subset B$. Que peut-on dire des ensembles A et B si $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$?
2. Exprimer les fonctions indicatrices du complémentaire de A, de $A \cap B$ et de $A \times B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B.
3. On suppose dans cette question que A et B sont deux ensembles disjoints. Exprimer la fonction indicatrice de $A \cup B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et de B.
4. Cas général : A et B sont maintenant deux sous-ensembles quelconques de Ω. Déterminer une partition de $A \cup B$ constituée de l'ensemble A et d'un autre ensemble à déterminer. En déduire une expression de la fonction indicatrice de $A \cup B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et de B.
5. Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans Ω. La fonction $\mathbf{1}_A \circ f$ est-elle la fonction indicatrice d'un ensemble ? Si oui lequel ?
6. Soit $\{A_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ une partition d'un ensemble A. Montrer qu'on a $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} = \mathbf{1}_A$.

Exercice 3.

Soit A et B deux ensembles. Donner une expression de la fonction indicatrice de l'ensemble $A^c \cup B^c$ en utilisant les fonctions indicatrices des ensembles A et B.

Exercice 4.

1. Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, on pose $A_i = \{3j + i \,/\, j \in \mathbb{N}\}$. Montrer que les trois ensembles A_0, A_1, A_2 définissent une partition de l'ensemble $\mathbb{N}$.
2. Pour $r \in \mathbb{N}$, on pose $E_r = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \,/\, p + q = r\}$. Montrer que $\{E_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ définit une partition de $\mathbb{N}^2$.

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire à pile ou face n fois.

1. Décrire l'ensemble des résultats possibles comme un produit d'ensembles.
2. Écrire de façon ensembliste l'événement F : « pile n'a jamais été obtenu lors des 2 premiers lancers ».
3. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Décrire les éléments de l'événement E_i : « le résultat du i-ème lancer est pile ».
4. Écrire à l'aide des événements E_i l'événement F.
5. Écrire à l'aide des événements E_i l'événement G : « la pièce est tombée au moins une fois sur pile ».

Exercice 6.

Un enfant fait la collection d'images qu'il trouve dans les tablettes de chocolat. Il les colle au fur et à mesure dans un cahier. La série d'images comporte $N \geqslant 10$ images différentes, chaque image étant diffusée un grand nombre de fois dans le commerce. On numérote de 1 à N les différentes images de la collection. Depuis qu'il a commencé sa collection, il a acheté 10 tablettes et donc possède 10 images.

1. Décrire l'ensemble des collections possibles de l'enfant comme un produit d'ensembles.
2. On suppose que l'enfant n'a pas l'image numéro i. Décrire l'ensemble E_i des collections possibles de l'enfant.
3. On suppose que l'enfant a obtenu l'image numéro i pour la première fois lorsqu'il a acheté la j-ème tablette. Décrire l'ensemble $F_{i,j}$ des collections possibles de l'enfant.
4. Que signifie concrètement pour l'enfant l'ensemble E_i^c ? Exprimer E_i^c à l'aide des ensembles $F_{i,j}$.
5. Soit $k \in \{2, \ldots, 10\}$. On suppose que la k-ième tablette achetée contenait une image qu'il n'avait pas encore dans sa collection. Décrire l'ensemble G_k des collections possibles de l'enfant.
6. Écrire l'ensemble G_k à l'aide de certains ensembles introduits précédemment.
7. Que représentent concrètement pour l'enfant les ensembles $\bigcap_{k=2}^{10} G_k$ et $\bigcup_{k=2}^{10} G_k$?

Exercice 7.

1. Soit A, B et C trois ensembles tels que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$. Montrer qu'alors $A = B$.
2. Soit A et B deux ensembles tels que $A \cap B = A \cup B$. Montrer qu'alors $A = B$.
3. Proposer une solution aux questions précédentes *avec les fonctions indicatrices*.

Exercice 8.

1. Décrire $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.
2. Montrer que si $A \subset B$ alors $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
3. Si A et B sont deux ensembles, comparer $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(A \cap B)$.
4. Même question pour $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(A \cup B)$. Exemple ?

5. Si E est un ensemble et $A \subset E$, trouver tous les sous-ensembles X de E tels que $A \cup X = E$.
6. Si E est un ensemble et $A \subset E$, trouver tous les sous-ensembles X de E tels que $A \cap X = \emptyset$.
7. (Plus difficile) Soit f une application de E dans $\mathcal{P}(E)$. Montrer que $\{f(x) \,/\, x \in E\}$ est strictement inclus dans $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 9.

Soit $f : E \to F$ une application, A et B deux sous-ensembles de E, et C et D deux sous-ensembles de F. Comparer les ensembles suivants (donner des exemples s'il n'y a pas égalité) :

1. $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$,
2. $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$,
3. A et $f^{-1}(f(A))$,
4. $f^{-1}(C \cap D)$ et $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$,
5. $f^{-1}(C \cup D)$ et $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,
6. $f\big(f^{-1}(D)\big)$ et D,
7. $f^{-1}(D^c)$ et $\big(f^{-1}(D)\big)^c$.

Exercice 10.

Soit X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application, et A et B tels que $A \subset X$ et $B \subset Y$. Simplifiez les expressions : $f\big(f^{-1}(f(A))\big)$ et $f^{-1}\big(f(f^{-1}(B))\big)$.

Exercice 11.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \min(x, 4)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les ensembles suivants : $f^{-1}(\{4\})$, $f^{-1}(\{5\})$ et $f^{-1}([-4, 4])$.

Exercice 12.

Soit E un ensemble de cardinal fini n. Trouver le cardinal des ensembles suivants :

1. $F = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \,/\, A \cup B = E,\ A \cap B = \emptyset\}$.
2. $G_A = \{B \in \mathcal{P}(E) \,/\, A \cup B = E\}$, où $A \in \mathcal{P}(E)$ est fixé (de cardinal p).
3. $H = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \,/\, A \cup B = E\}$.

Exercice 13.

Une urne contient 3 boules noires indiscernables au toucher numérotées de 1 à 3 et 5 boules blanches indiscernables au toucher numérotées de 1 à 5. Dénombrer, dans chacun des cas suivants, les façons de tirer 4 boules :

— successivement avec remise,

— successivement sans remise,

— simultanément.

Exercice 14.

Un clavier de 12 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 4 chiffres distincts ou non.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

1	2	3
4	5	6
7	8	9
A	B	C

FIGURE 1 – Le clavier de l'Exercice 14.

Exercice 15.

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. sans imposer de contrainte sur les cartes ?
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques ?
3. contenant 2 carreaux et 3 piques ?
4. contenant au moins un roi ?
5. contenant au plus un roi ?
6. contenant 2 rois et 3 piques ?

Exercice 16.

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématique, 6 livres de physique et 3 de chimie. Les livres sont tous distincts. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. sans contrainte ?
2. si les livres doivent être groupés par matière ?
3. si seuls les livres de mathématique doivent être groupés ?

Exercice 17.
On rappelle qu'une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres (répétées le même nombre de fois). On considère que ESEIVR est un anagramme de EVIERS même si ce mot n'a aucun sens. Compter le nombre d'anagrammes de ANE, CANNE et ANANAS.

Exercice 18.
Soient k, n deux entiers positifs avec $k \leqslant n-1$. Montrer de deux façons différentes

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$ montrer

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

Exercice 19.
Étant donné deux entiers $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, justifier que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. En déduire, par un raisonnement de dénombrement,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 20.
Harry, Hermione et Ron se répartissent un paquet de dragées surprises de Bertie Crochue contenant $n \geqslant 3$ bonbons, de manière à ce que chacun ait au moins un bonbon. Combien de manières ont-ils pour le faire, sachant que bien sûr chaque dragée a un goût différent, et donc que les bonbons sont considérés comme distincts ?

Ensuite, ils distribuent entre eux $m \geqslant 3$ chocograinouilles, qui sont indistinguables (encore une fois, de manière à ce que Harry, Hermione et Ron aient chacun au moins une chocograinouille). Combien de possibilités y a-t-il cette fois ?

Exercice 21.
Un groupe de 9 snowboarders, dont Lila et Louis, et 3 skieurs arrivent en bas de pistes. Ils décident de prendre des télésièges 4 places et ne laissent aucune place vide (c'est-à-dire qu'ils remplissent 3 télésièges).

·	·	·	·

Les 4 places d'un télésiège.

1. Combien ont-ils de façons de se répartir dans les 12 places des 3 télésièges ?
2. Quelle est la probabilité que Lila et Louis soient assis sur le même télésiège ?
3. Lila et Louis sont dans le premier télésiège. Quelle est la probabilité qu'ils soient côte à côte ? (*voir la disposition des 4 places du télésiège sur la figure en début d'exercice*)

Exercice 22.

On considère l'ensemble E des couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, tels que $1 \leqslant i \leqslant 7$ et $1 \leqslant j \leqslant 10$ et tels que $2 < i + j < 8$.

Dessiner l'ensemble E comme un ensemble de points dans le plan.

Exercice 23.

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle dérangement de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. On note D_n le nombre de dérangements de E, avec $D_0 = 1$.

1. Si E comporte un seul élément, y a-t-il des dérangements de E ? En déduire D_1.
2. Si E comporte deux éléments, combien y a-t-il de dérangements de E ? En déduire D_2.
3. On suppose n quelconque et on écrit $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Soit f une permutation de E. On suppose que f laisse k éléments invariants. Combien y a-t-il de telles permutations ? En déduire la formule suivante (où l'on rappelle que $D_0 = 1$ par convention) :
$$n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_j \,.$$
4. En déduire D_3, D_4 et D_5.
5. Cinq personnes se rendent au Club des Gens Étourdis. Elles laissent leur chapeau à l'entrée. En sortant du club, aucune ne se souvient quel chapeau elle avait en entrant. Elles se répartissent donc les chapeaux complètement au hasard.
   (a) Si on numérote les personnes de 1 à 5, et également les chapeaux correspondant, combien y a-t-il d'associations possibles ?
   (b) Donner la probabilité pour que personne ne reparte avec son chapeau initial.
   (c) Déterminer la probabilité pour qu'une seule personne reparte avec son chapeau initial.
   (d) Déterminer la probabilité pour qu'il y ait plus de personnes repartant sans leur chapeau initial, que de personnes repartant avec.