

Chapitre 2: Orthogonalité dans \mathbb{R}^n

1 Orthogonale d'un sous espace et projections orthogonales

1.1 Orthogonal d'un sev:

Soit E un espace euclidien et V un sev de E

On note $V^\perp = \{x \in E \text{ tq } \forall v \in V, \langle x|v \rangle = 0\}$

Ce sont les éléments de E qui sont \perp à tous les éléments de V .

Proposition: Si $V = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$ alors

$$x \in V^\perp \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq k \quad \langle x|a_i \rangle = 0$$

Théorème: Si E est un espace euclidien (dimension finie) et V est un sev de E alors V^\perp est un sev et

$$E = V \oplus V^\perp \quad \text{de plus } (V^\perp)^\perp = V$$

Preuve:

- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in V^\perp$ alors:
 $\forall v \in V \quad \langle \lambda x + \mu y|v \rangle = \lambda \langle x|v \rangle + \mu \langle y|v \rangle = 0$ Donc V^\perp est stable par combinaisons linéaire et c'est donc un sev de E .
- V et V^\perp sont toujours en somme directe. Rappel de la définition.
 $\forall x \in V + V^\perp \exists$ un unique couple $(x, y) \in V \times V^\perp$ tel que $z = x + y$
Ce qui équivaut à $V \cap V^\perp = \{0\}$
Si $x \in V \cap V^\perp \quad x \in V^\perp$ et $\forall v \in V \quad \langle x|v \rangle = 0$
d'où $\langle x|x \rangle = 0$ (en prenant $v = x$) $\Rightarrow x = 0$ donc $V \cap V^\perp = \{0\}$
- Reste à montrer que $V + V^\perp = E$ Comme V et V^\perp sont en somme directe, on a:
 $\dim(V + V^\perp) = \dim V + \dim V^\perp$ et $V + V^\perp \subset E$ de dimension n
Il suffit de montrer que $\dim V^\perp = n - \dim V$
car si $F \subset E$ et $\dim F = \dim E$, alors $F = E$
Si $\dim V = k$, soit $\{u_1, \dots, u_k\}$ une base de V .
On sait qu'il existe $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ tq $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ soit une base de E
On orthonormalise par le procédé de Gram-Schmidt et on trouve un BON $\{e_1, \dots, e_n\}$ tq
 $V = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Vect}\{u_1, \dots, u_k\}$
Si $W = \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ alors par construction:

$$\forall x \in W, x \in V^\perp \text{ donc } W \subset V^\perp$$

$$\text{et } n - k = \dim(W) \leq \dim(V^\perp)$$

Comme on a une somme directe et $V \oplus V^\perp \subset E$

$$\dim(V \oplus V^\perp) \leq \dim E = n$$

||

$$k + \dim(V^\perp)$$

Donc $n - k \leq \dim(V^\perp) \leq n - k$

On trouve donc bien que $W = V^\perp$ et $\dim V^\perp = n - k$

Donc $V \oplus V^\perp = E$

C'est une façon de construire l'orthogonal

- Enfin on montre que $V \subset (V^\perp)^\perp$ et de même dimension

Remarque 1: Soit V un sous ensemble (pas un sev forcément) de E , alors on peut définir de la même façon V^\perp et alors $V^\perp = (\text{Vect} V)^\perp$ est un sev

Remarque 2: Si E n'est pas de dimension finie alors on a encore $V + V^\perp = V \oplus V^\perp$ et V^\perp sev mais pas forcément $V \oplus V^\perp = E$

1.2 Exemples et calcul pratique

1.2.1 Orthogonal d'un sev engendré par des vecteurs dans \mathbb{R}^n

Dans \mathbb{R}^4 , soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \text{Vect}\{A, B\} \text{ (dim 2)}$$

On trouve facilement les équations cartésiennes de V^\perp

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = X \in V^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle X|A \rangle = 0 \\ \langle X|B \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + t = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Si on échalonne:

$$X \in V^\perp \Leftrightarrow \exists (z, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } X = \begin{pmatrix} -t \\ \frac{-z}{2} + \frac{t}{2} \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } V^\perp = Vect \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On peut vérifier ici que $\dim V^\perp = 2$ et on pourrait même en donner une BON.
(On peut aussi trouver une BON de V facilement)

1.2.2 Orthogonal d'un sev donné par des équations cartésiennes

$$\text{Dans } \mathbb{R}^4, \text{ si } F = \left\{ (x, y, z, t)^T \text{ tq } \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \right\} \text{ soit } U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X \in F \Leftrightarrow \langle X|U \rangle = 0 \text{ et } \langle X|V \rangle = 0 \Leftrightarrow X \in \{U, V\}^\perp \\ \Leftrightarrow X \in Vect\{U, V\}^\perp \text{ d'où}$$

$$F = Vect\{U, V\}^\perp \text{ et donc } F^\perp = (Vect\{U, V\}^\perp)^\perp = Vect\{U, V\}$$

On peut aussi orthonormaliser $\{u, v\}$ et on peut aussi trouver comme précédemment des équations cart de F^\perp en choisissant une base de F

$$X \in F \Leftrightarrow X = (x, y, z, t)^T \text{ tq } \begin{cases} x = -y - z - t \\ y = -2z - 3t \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} x = z + 2t \\ y = -2z - 3t \end{cases}$$

$$\text{d'où } F = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1.3 Projection et symétries orthogonales

Rappel: Soit E un espace vectoriel qui se décompose en somme directe

$E = F \oplus G$ (ie $E = F + G$ et $F \cap G = 0$)

Cela équivaut à dire que pour tout $x \in E$ il existe un unique $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$

On nomme $y = p(x)$ le projeté sur F parallèlement à G . Et $z = q(x)$ le projeté de x sur G parallèlement à F .

On montre alors que $P : E \rightarrow E$ et $q : E \rightarrow E$ sont bilinéaire, $p + q = id_E$ et $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ (projections)

Définition: Soit E un espace euclidien et F un sous ev de E .

La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à F^\perp ($E = F \oplus F^\perp$), On la note P_F

Théorème: Si E euclidien et F est un sev de E

- pour tout $x \in E$, $P_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que:

$$\|x - P_F(x)\| = \inf_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F)$$

- Si $\{u_1, \dots, u_k\}$ est une BON de F alors.

$$P_F(x) = \langle x | u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle x | u_k \rangle u_k$$

Preuve: Soit $y \in F$

$$\|x - y\|^2 = \underbrace{\|x - P_F(x)\|}_{F^\perp}^2 + \underbrace{\|P_F(x) - y\|}_F^2 \text{ donc}$$

$$\|x - y\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y\|^2$$

$$\|x - y\|^2 \geq \|x - P_F(x)\|^2 \text{ et est égal si } y = P_F(x)$$

On remarque que $y = \langle x | u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle x | u_k \rangle u_k \in F$

si $z = x - y$ alors pour $1 \leq i \leq k$ $\langle z | u_i \rangle = \langle x | u_i \rangle - \langle y | u_i \rangle = \langle x | u_i \rangle - \langle x | u_i \rangle = 0$

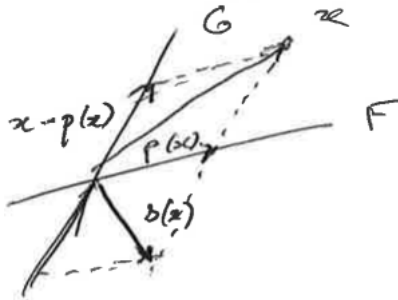
d'où $z \in \text{Vect}\{u_1, \dots, u_k\}^\perp = F^\perp$ donc $x = y + z$ et $y = P_F(x)$

Exemple pratique: si $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer la distance de x à $Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ soit encore (au carré)

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} (1-a)^2 + (1-a-b)^2 + (a-b)^2 + 1 \dots$$

Pour finir:

Si $E = F \oplus G$ et p est la projection sur F parallèlement à G , on a $s = 2p - id_E$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G



on a toujours $s \circ s = id_E$

Si $E = F \oplus F^\perp$ alors on parle de symétrie orthogonale et dans ce cas on a une formule dans une BON

pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} \|s_F(x)\|^2 &= \|P_F(x) + P_F(x) - x\|^2 \\ &= \|P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - x\|^2 \\ &= \|P_F(x)\| + \|x - P_F(x)\|^2 = \|x\|^2 \end{aligned}$$

C'est ce qu'on appelle une isométrie.