Exerice 7

1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ $\qquad f''(0) = 2$

$f^{(3)}(x) = \dfrac{2*3}{(1-x)^4}$ $\qquad f^{(3)}(0) = 6$

$f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^n}$ $\qquad f^{(n)}(0) = n!$

On a que $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} \dfrac{n!}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} x^n$

Étudions son rayon de convergence:

On a $a_n = 1$

Donc $\sqrt[n]{1} = 1$

Donc d'après Riemann le rayon de convergence $R = \dfrac{1}{1} = 1$

$f(1) = \sum_{n\geq 0} 1^n = \sum_{n\geq 0} 1$ diverge

$f(-1) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n = \sum_{n\geq 0} 1$ diverge

Donc le domaine de convergence est $]-1,1[$

2) $(\dfrac{1}{1-x})' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Soit $x \in]-1,1[$

Donc $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)' = \sum_{n\geq 0} n x^{n-1}$

On a donc que le rayon de convergence de cette série est le même que celui de $\sum_{n\geq 0} x^n$

$f(1) = \sum_{n\geq 0} n$ diverge

$f(-1) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n n$ diverge, car n ne tend pas vers 0

Donc le domaine de convergence est $]-1,1[$

3) $ln(1+x)' = \dfrac{1}{1+x}$

Soit $x \in]-1,1[$

On fait un changement de variable $x' = -x$

$\dfrac{1}{1-x'} = \sum_{n \geq 0} x'^n$

$\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-x)^n$

$\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$

On a que $ln(1+x) - ln(1) = \int_0^x \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^n dt = \sum_{n \geq 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$

$ln(1+x) = \sum_{n \geq 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$

4) Le développement en série entière de e^x est connu:

On a $e^x = \sum_{n \geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$

Son rayon de convergence est $R = +\infty$

Et son domaine de convergence est $\mathbb{R}$

5) $\cos(x)$

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n \geq 0} \frac{(i\theta)^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-i\theta)^n}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n \geq 0} \frac{(i\theta)^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(i\theta)^n}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n \geq 0} \frac{(i\theta)^n}{n!} + \left(\sum_{n \text{ impair}} -\frac{(i\theta)^n}{n!} + \sum_{n \text{ pair}} \frac{(i\theta)^n}{n!} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2 * \sum_{n \text{ pair}} \frac{(i\theta)^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{i^{2n}\theta^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Même rayon de convergence que $e(x)$ $R = \infty$, et le domaine de convergence est $\mathbb{R}$

6) $\sin(x)$

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(i\theta)^n}{n!} - \sum_{n\geq 0}\frac{(-i\theta)^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(i\theta)^n}{n!} - \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(i\theta)^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(i\theta)^n}{n!} - \left(\sum_{n \text{ impair}} -\frac{(i\theta)^n}{n!} + \sum_{n \text{ pair}}\frac{(i\theta)^n}{n!}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(i\theta)^n}{n!} - \left(-\sum_{n \text{ impair}}\frac{(i\theta)^n}{n!} + \sum_{n \text{ pair}}\frac{(i\theta)^n}{n!}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(i\theta)^n}{n!} + \sum_{n \text{ impair}}\frac{(i\theta)^n}{n!} - \sum_{n \text{ pair}}\frac{(i\theta)^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(2 * \sum_{n \text{ impair}}\frac{(i\theta)^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{i}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\
&= \frac{1}{i}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{i^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\
&= \frac{1}{i}\sum_{n\geq 0} i\frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

Même rayon de convergence que $e(x)$ $R = \infty$, et le domaine de convergence est $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
7)\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0}\frac{(-x)^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2 * \sum_{\text{n pair}}\frac{x^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Même rayon de convergence que $e(x)$ $R = \infty$, et le domaine de convergence est $\mathbb{R}$

8) $\cosh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\dfrac{x^n}{n!} - \sum_{n\geq 0}\dfrac{(-x)^n}{n!}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(2 * \sum_{\text{n impair}} \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Même rayon de convergence que $e(x)$ $R = \infty$, et le domaine de convergence est $\mathbb{R}$

9) $arctan(x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Soit $x \in]-1,1[$

On fait un changement de variable $X = -x^2$

$\dfrac{1}{1-X} = \sum_{n\geq 0} X^n = \sum_{n\geq 0}(-x^2)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$

On a que: $\arctan(x) - \arctan(0) = \displaystyle\int_0^x \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$

Donc $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Même rayon de convergence que $\dfrac{1}{1-x}$, donc $R = 1$

Étude en $x = 1$

$\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ Converge critère des séries alternées

Étude en $x = -1$

$\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{-1}{2n+1}$ Converge critère des séries alternées

Donc le domaine de convergence est $[-1, 1]$

10) $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$$\begin{aligned}
\sin(\theta)^2 &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 \\
&= -\frac{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} \\
&= -\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2}{4} \\
&= -\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\cos(2\theta) - 1\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (2\theta)^{2n}}{(2n)!} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n (2\theta)^{2n}}{(2n)!}\right)
\end{aligned}$$