Feuille d'exercices 1 : suites de fonctions

Progression possible.— Semaine 3 : ex 1, 2, 3, 4 ; semaine 4 : ex 5, 6, 7, 8.

Exercice 1.— Déterminer l'ensemble où la suite de fonctions (f_n) converge simplement lorsque

a) $f_n(x) = x^n$ b) $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ c) $f_n(x) = n^x$

d) $f_n(x) = x^n e^n$ e) $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$ f) $f_n(x) = n\sin(\frac{x}{n})$

g) $f_n(x) = n^2(\cos(\frac{x}{n}) - 1)$

Le cas échéant, on donnera la fonction limite simple.

Exercice 2.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$.

1. Montrer que pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge. En déduire que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Pour $n \geq 1$, dresser le tableau de variations de la fonction f_n.
   En déduire la valeur de $||f_n - f||_\infty := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)|$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?
3. Montrer que pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0, a]$.

Exercice 3.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.
2. Pour $n \geq 1$, dresser le tableau de variations de la fonction f_n.
   La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?
3. Pour quels $a \in \mathbb{R}^+$, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

Exercice 4.— Considérons la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ où chaque f_n est une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}e^{-nx}\right).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que, si $n \geq 1$, alors la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 5.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f continue.

1. Montrer que $|f_n(\dfrac{1}{n}) - f(0)| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| + |f(\dfrac{1}{n}) - f(0)|$.
2. En déduire que $f_n(\dfrac{1}{n}) \to f(0)$ quand $n \to +\infty$.
3. Application. Soit $f_n : x \mapsto nx\, e^{-nx\ln^2(1+x)}$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Montrer que cette convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 6.— Soit $\alpha > 0$.
Étudier la convergence simple puis la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par :
a) $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$ (on discutera en fonction du paramètre $\alpha > 0$) ;
b) $f_n(x) = n^2 x(1-nx)$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]\frac{1}{n}, 1]$.

Exercice 7.— Pour tout entier $n \geq 1$, on note g_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$g_n(x) = n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction g qu'on précisera.
2. Montrer que pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a $0 \leq t - \ln(1+t) \leq \dfrac{t^2}{2}$.
3. En déduire que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout réel $a > 0$.
4. Montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 8.—(*) Pour $\alpha > 0$, on définit la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^\alpha x^2}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.
2. Calculer $f_n(\frac{1}{n})$. En déduire que si $\alpha \leq 2$ la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. Monter que si $\alpha > 2$, la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
   On pourra commencer par vérifier que, pour $A > 0$, *on a* $|f_n(x)| \leq nA$ *sur* $[0,A]$ *et* $|f_n(x)| \leq 1/(1+n^\alpha A^2)$ *sur* $[A,+\infty[$.

Exercice 9.—(**) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0,n], \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
   Justifier que l'on a $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \geq 0$.
2. Soit a un réel > 0. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.
3. En écrivant $R^+ = [0,a] \cup [a,+\infty[$ avec un choix convenable de a, montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.