Exerice 5

On étudie $ker(u - Id_E)$ et $Im(u - Id_E)$

soit $x \in ker(u - Id_E)$ et $y \in Im(u - Id_E)$

On va étudier $< x|y >$

$$x \in ker(u - Id_E) \Rightarrow (u - Id_E)(x) = 0$$

$$\Rightarrow u(x) - x = 0$$

$$\Rightarrow u(x) = x$$

$$y \in Im(u - Id_E) \Rightarrow \exists x' \in (u - Id_E) \text{ tq } (u - Id_E)x' = y$$

$$\Rightarrow u(x') - x' = y$$

On a $\langle x|y\rangle = \langle x|u(x') - x'\rangle$

$$= \langle x|u(x')\rangle - \langle x|x'\rangle$$

$$= \langle u(x)|u(x')\rangle - \langle x|x'\rangle$$

Or comme u est une isométrie le produit scalaire reste inchangé.

$$= \langle x|x'\rangle - \langle x|x'\rangle$$

$$= 0$$

Donc $ker(u - Id_E)$ et $Im(u - Id_E)$ sont orthogonaux

Comme $ker(u - Id_E)$ et $Im(u - Id_E)$ sont orthogonaux on a que:

$ker(u - Id_E)$ et $Im(u - Id_E)$ sont libres

$ker(u - Id_E) \cap Im(u - Id_E) = \{0\}$

Et on a que $dim(U - Id_E) = dim(ker(u - Id_E)) + dim(Im(u - Id_E))$

Or $dim(U - Id_E) = dim(E)$, alors $dim(ker(u - Id_E)) + dim(Im(u - Id_E)) = dim(E)$

Donc $ker(u - Id_E) \oplus Im(u - Id_E) = E$