Exerice

$\sum_{n\geq 1}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$

$a_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$

Étudion $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}} = (1+\frac{1}{n})^n$

Or $(1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$

Donc d'après Cauchy on a $R = \frac{1}{e} = e^{-1}$

Si $x = e^{-1}$ on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}(1+\frac{1}{n})^{n^2}e^{-n} &= \sum_{n\geq 1} e^{n^2 ln(1+\frac{1}{n})}e^{-n} \\
&= \sum_{n\geq 1} e^{n^2(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}o(\frac{1}{n^2}))-n} \\
&= \sum_{n\geq 1} e^{n+\frac{1}{2}+o(1)-n} \\
&= \sum_{n\geq 1} e^{\frac{1}{2}+o(1)} \text{ Cette série diverge}
\end{aligned}$$