Chapitre 3: Matrices et orthogonalité

On se place ici dans un espace euclidien de dimension n.

1 Écriture dans une base orthonormée.

1.1 Rappel:

Soit $\mathcal{E}$ une BON $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E.

Comme c'est une base on peut à tout vecteur $\vec{x}$ de E associer ses coordonnées X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{E}$: $x = \sum x_i e_i$

Et on a un isomorphisme $\varphi_{\mathcal{E}} : E \to \mathbb{R}^n$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X$$

Mais comme la base est orthonormée, on connait facilement les coordonnées:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} < x|e_i > e_i \text{ ou encore } X = \begin{pmatrix} < x|e_i > \\ \vdots \\ < x|e_n > \end{pmatrix}$$

Et dans ces conditions:

- $< x|y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T.Y = \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
- $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^T.X = \sum_{i=1}^{n} < x|e_i >^2$

Comme déjà vu, l'écriture dans une BON est facile à obtenir et pour ces coordonnées le produit scalaire usuel $\mathbb{R}^n$ qui fait intervenir la transposition.

1.2 Orthogonal et transposition

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ $\quad A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ Donc A $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$, on rappelle que :

$kerA = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ tq } AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$ImA = \{AX \ ; \ x \in \mathbb{R}^p\}$.

Proposition Soit $\{f_1, \dots, f_p\}$ p vecteurs de E
et A la matrice constituée des vecteurs colonnes de $f_1, \dots, f_p$ dans une BON de E. i.e $A = Mat_{\mathcal{E}}(f_1, \dots, f_p)$
Dans la base $\mathcal{E}$: $Vect\{f_1, \dots, f_p\}^{\perp} = ker(A^T)$

Ceci veut dire que $x \in Vect\{f_1, \dots, f_p\}^{\perp}$ SSI ses coordonnées X sont dans $ker(A^T)$

Preuve: Ici $A = ((a_{ij}))$

$$\begin{array}{c} f_1 \dots f_p \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_n. \end{array}$$

Donc $\forall 1 \leq j \leq n \quad f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ on note $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

Si $W = Vect\{f_1, \dots, f_p\}$,

$$x \in W^{\perp} \Leftrightarrow \forall 1 \leq j \leq p \quad < f_j | x >= 0$$

$$x \to \sum x_i e_i x \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq j \leq p \quad A_j^T . X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1^T . X \\ \vdots \\ A_p^T . X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_p$$

Mais ici $A_j^T X = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$ et si $B = A^T alors b_{ji} = aij$

$A_j^T X = \sum b_{ji} x_i$

$$\text{donc } x \in W^\perp \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1^T \\ \dots \\ \dots \\ A_p^T \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow A^T \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in ker A^T$$

On voit ici que dans une BON, l'orthogonalité est liée à la transposition des matrices.
Par ailleurs, cette proposition n'est pas sans rappeler. les matrices de changements de base.

1.3 Rappel sur les changements de base

Si $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ sont des bases d'un ev E de dimension n.
On appelle la matrice de passage $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$ la matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ $P = mat_{\mathcal{E}}(f_1 \ \dots \ f_n)$
Si $P = ((p_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ $f_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$

On rappelle que si x a pour coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{E}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{F}$ alors:

$$\boxed{\text{X = PX'}}$$

De plus si v est un endomorphisme de E de matrice représentative A dans $\mathcal{E}$ et A' dans $\mathcal{F}$ alors

$$\boxed{A' = P^{-1} A P}$$

Que se passe-t-il avec des BON

2 BON et Matrices orthogonalles.

2.1 Résultat préliminaire:

Soit $\mathcal{E}$ une BON de E et $\{f_1, \dots, f_p\}$ p vecteurs de E
De nouveau on pase $A = Mat_{\mathcal{E}}(f_1, \dots, f_p) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$
Si M est la matrice $p \times p$ constituée des produit scalaires $< f_i|f_j >$ alors

$$M = A^T.A = \begin{pmatrix} < f_1|f_1 > & \dots & < f_1|f_p > \\ \vdots & & \vdots \\ < f_p|f_1 > & \dots & < f_p|f_p > \end{pmatrix}$$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad B = A^T = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \dots & b_{p,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} b_{i,j} = a_{j,i}$

d'un côté:
$< f_i|f_j > = \langle \sum_{k=1}^n a_{k,i}e_k \, , \, \sum_{l=1}^n a_{l,j}e_j \rangle$
$= \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{l,j} < e_k|e_l >$
$= \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}$
Si $M = A^T A =$