Feuille 4
Variables aléatoires, espérance, variance

Exercice 1.
Etant donnés un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et un événement A, donner la loi de la variable aléatoire $1_A : \Omega \to \{0, 1\}$.

Exercice 2.
On procède à N lancers successifs d'une pièce déséquilibrée de paramètre de succès $0 < p < 1$. Donner la loi du nombre de succès.

Exercice 3.
On procède à des lancers successifs d'une pièce déséquilibrée de paramètre de succès $0 < p < 1$. Donner la loi du premier lancer réussi.

Exercice 4.
Une urne contient n boules rouges et $N - n$ noires. On tire, sans remise, p boules parmi les N. Donner la loi du nombre de boules rouges tirées.

Exercice 5.
Calculer de deux façons l'espérance de la somme des lancers de deux dés à 6 faces :

1. en utilisant la loi de la somme des deux lancers,
2. en utilisant la linéarité de l'espérance.

Exercice 6.
Soit X une variable à valeurs dans $\{0, ..., N\}, N \geqslant 1$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k).$$

Application : dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N , on tire avec remise n boules successives. Le numéro de la plus grande boule tirée est modélisé par une variable aléatoire X.

1. Calculer $\mathbb{P}(X > k)$, pour $k \in \{0, ..., N - 1\}$. En déduire l'espérance de X.
2. Donner la loi de X.

Exercice 7.
Le tableau ci-dessous décrit la loi d'une variable aléatoire X qui prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers $\{-3, \dots, 1\}$:

i	-3	-2	-1	0	1
$P(X = i)$	3/13	3/13	4/13	1/13	2/13

1. Calculer la probabilité de l'évènement $\{|X| \leqslant 1\}$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 8.
Une source émet une suite de lettres choisies indépendamment les unes des autres parmi les lettres `a`, `b` et `c` suivant la loi de probabilité décrite par le tableau

Lettre	a	b	c
Probabilité	0.3	0.33	0.37

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lettres émises avant que la lettre a apparaisse. Calculer $P(X \geqslant 6)$ et $E[X]$.

Exercice 9.

Une source émet une suite de 4 lettres choisies indépendamment les unes des autres parmi les lettres a, b et c suivant la loi de probabilité décrite par le tableau

Lettre	a	b	c
Probabilité	0.2	0.42	0.38

1. Si vous deviez parier sur le nombre de fois où la lettre b va être émise par la source, quel serait votre pari ?
2. Quelle est la probabilité que vous gagniez votre pari ?

Exercice 10.

Un dentiste réfléchit à son budget lié à la pose de couronnes. Chaque couronne posée coûte 500 euros au dentiste, et lui rapporte 600 euros (les honoraires payés par le patient). Rarement (une fois sur 100), il y a un problème nécessitant de tout refaire, ce qui coûte donc à nouveau 500 euros au dentiste (qui ne refait pas payer son patient, ce dernier n'étant pas responsable). En un an, le dentiste pose 200 couronnes (sans compter celles qu'il doit refaire en cas de problème). Dans tout l'exercice, on supposera qu'il n'est jamais nécessaire de poser une troisième fois une couronne pour une même dent (le problème ne se pose jamais deux fois de suite).

1. On note X le nombre de couronnes qui sont à refaire en un an. Quelle est la loi de X ?
2. Exprimer ce que gagne le dentiste en un an (pour ces 200 couronnes posées) en fonction de X, puis calculer son espérance.

Exercice 11.

L'entreprise Milvorin, « producteur de graines depuis 1742 », s'intéresse à la reproduction du cerfeuil tubéreux (*chaerophyllum bulbosum*). Elle envoie donc des espions chez un concurrent, et ceux-ci observent que :

— le nombre X de « légumes-descendants » issus de la reproduction d'un même « légume-parent » suit une loi uniforme sur $\{0, .., N-1\}$ (N étant inconnu),

— chaque descendant a 20% de risques d'être stérile.

L'entreprise souhaite connaître le nombre moyen de descendants stériles.

1. Combien le cerfeuil tubéreux a-t-il de descendants en moyenne ?
2. On note Y le nombre de descendants stériles.
   (a) X et Y sont-elles indépendantes ?
   (b) Pour $(n, i) \in \{0, \ldots, N-1\}^2$, calculer $P(Y = i | X = n)$.
   (c) En déduire $P(Y = i \text{ et } X = n)$ puis exprimer $P(Y = i)$ sous forme d'une somme.
   (d) Calculer $E(Y)$. Est-ce surprenant ?

Exercice 12.

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme à valeur dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et V une variable aléatoire telle que, conditionnellement à U, V suit une loi de Bernoulli de paramètre U/n. Explicitement, on a $P(V = 1|U = k) = k/n$ et $P(V = 0|U = k) = 1 - k/n$. Donner la loi et l'espérance de V.
2. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, X\}$. Donner un sens mathématique à la phrase précédente ; donner la loi de Y, et calculer l'espérance de Y en fonction de n.
3. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y une variable aléatoire telle que, conditionnellement à X, Y suit une loi binomiale de paramètres X et p. Après avoir donné un sens mathématique à la phrase précédente, montrer que Y est une loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 13.

Un passant est interpellé dans la rue. On lui propose un jeu « exceptionnel » où il peut « faire fortune ». On joue n fois à pile ou face avec une pièce. On gagne un euro à chaque pile et on perd un euro à chaque face.
À la manche k, on empoche (ou débourse) le gain X_k. Les X_k sont toutes indépendantes, et le gain total est $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
On a en fait $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = 1 - p$, avec sans doute $p \neq \frac{1}{2}$...

1. Pour commencer, montrer que si U et V sont deux variables indépendantes, alors $E(UV) = E(U)E(V)$ et que $\operatorname{Var}(U + V) = \operatorname{Var}(U) + \operatorname{Var}(V)$.
2. Donner alors $E(X_k)$, $\operatorname{Var}(X_k)$, $E(S_n)$ et $\operatorname{Var}(S_n)$.
3. Montrer que si $p = \dfrac{1}{2}$, alors $P(|S_n| \geqslant 5\sqrt{n}) \leqslant 4\%$.
4. Le passant, naïf mais obstiné, lance 10000 fois la pièce... et perd plus de 500 euros ! La pièce vous paraît-elle équilibrée ?
5. Donner la loi de S_n. Pour cela, préciser un espace de probabilité associé à l'expérience. Noter alors T_n le nombre de piles et exprimer l'événement $\{T_n = k\}$ à l'aide de S_n.
6. Soit $a > 0$. Montrer que $P(|S_n| < a) \to 0$ quand $n \to +\infty$. À cet effet, on rappelle la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 14.

On désire transmettre un message binaire (une suite de 0 et de 1) par un canal parasité. On s'intéresse dans cet exercice à la transmission d'un bit.

À chaque transmission d'un bit, une erreur, indépendante du bit émis, a une probabilité égale à 0,05 de se produire et dans ce cas le bit arrivant est inversé (on reçoit 0 si on avait émis 1 et réciproquement). Pour réduire les risques de mauvaises interprétations du message, on répète chaque bit n fois indépendamment. À chaque bit émis, on reçoit donc un mot binaire de n lettres (s'il n'y avait pas de parasitage sur le canal, on recevrait n fois 0 pour le bit 0). Pour décoder, on décide simplement de traduire la suite des n bits reçus par le bit le plus fréquent dans cette suite (on choisit un n impair).

1. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'erreurs transmises pour un bit émis. Quelle est la loi de X ? Quelle est la probabilité de ne pas se tromper au décodage lorsque $n = 3$?

2. En réalité, le bit 0 est beaucoup plus rare que le bit 1 : il est émis seulement avec une probabilité $1/10000$. Modéliser sous ces conditions un espace de probabilité (Ω, P) représentant la transmission d'un bit.
3. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de 0 dans le mot reçu. Exprimer Y à l'aide de X et du bit initial. En déduire la loi de Y pour $n = 3$. Que remarquez-vous ?
4. On suppose que $n = 3$. Quelle est la probabilité qu'un mot ne contenant que des 0 provienne quand même du bit 1 ?
5. On voudrait être sûr à 95%, si on reçoit un mot ne contenant que des 0, que la source était bien 0. Combien de fois faut-il répéter le bit pour cela ?

Exercice 15.

Bruno vous propose de jouer au jeu suivant :

— Au départ, un billet de 5 euros est posé sur la table.

— Bruno lance une pièce équilibrée. Si le résultat est « pile », vous gagnez la somme posée sur la table, et le jeu s'arrête. Si le résultat est « face », Bruno double la somme posée sur la table et lance à nouveau sa pièce.

— On continue aussi longtemps que nécessaire.

1. Quelle est la loi du nombre X de lancers de la pièce jusqu'à la fin du jeu ?
2. Combien gagne-t-on d'argent à ce jeu en moyenne ?
3. Si Bruno vous demande 1000 euros pour avoir le droit de participer au jeu, seriez-vous d'accord pour y jouer ?