Feuille 3
Événements indépendants et probabilités conditionnelles

Exercice 1.

Soit (Ω, P) un espace de probabilité, on considère deux événements A et B.

1. Donner la signification mathématique de : « les événements A et B sont indépendants ».
2. Montrer que si $P(B) \in]0,1[$ et si $P(A|B) = P(A|B^c)$, alors les événements A et B sont indépendants.

Exercice 2.

Considérons l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la probabilité uniforme et les événements $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 3\}$. Montrer que A et B sont indépendants, B et C sont indépendants, A et C sont indépendants, mais que A, B et C ne sont pas indépendants.

Exercice 3.

Dans une famille de deux enfants, quelle est la probabilité que le cadet soit une fille sachant que l'aîné est un garçon ? Sachant que l'un des deux est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ?

Exercice 4.

On lance deux dés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux donne 6 sachant que les deux dés affichent des résultats différents ?

Exercice 5.

On suppose que A, B et C sont des événements indépendants de probabilité respectivement a, b et c. Exprimer en fonction de a, b et c la probabilité de l'événement $F = A \cup (B^c \cap C^c)$.

Exercice 6.

1. Soit (Ω, P) un espace de probabilité. On considère trois événements A, B et C. Donner la signification mathématique de : « les événements A, B et C sont indépendants ».
2. Démontrer que si A, B et C sont indépendants, alors A est indépendant de $B \cup C$.
3. On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces. On considère les événements I_1, I_2 et M suivants :
   - I_1 : « le résultat du premier lancer est impair. »
   - I_2 : « le résultat du deuxième lancer est impair. »
   - M : « les résultats des deux lancers sont de même parité. »

   (a) Calculer la probabilité de chacun de ces trois événements.

   (b) Décrire en français, le plus simplement possible, les événements $I_1 \cup I_2$ et $(I_1 \cup I_2) \cap M$, puis calculer la probabilité de chacun.

   (c) Les événements M et $I_1 \cup I_2$ sont-ils indépendants ?

   (d) Les trois événements I_1, I_2 et M sont-ils indépendants ?

Exercice 7.

Une classe de CP compte 4 garçons et 6 filles. Elle est mélangée avec une classe de CE1 composée de 6 garçons et de n filles, $n \geqslant 0$. Les deux classes sont réunies dans une même salle. Un élève (garçon ou fille) est alors interrogé au hasard. Comment choisir n de sorte que les événements « l'élève est un garçon » et « l'élève est en CP » soient indépendants ?

Exercice 8.

Un jeu télévisé qui fit fureur au États-Unis se déroulait ainsi : un joueur sur le plateau télévisé se trouve devant trois portes fermées. Le joueur gagne une voiture s'il désigne la seule porte derrière laquelle se trouve une voiture. Lorsque le candidat a fait son choix, le présentateur, pour faire durer le suspense, lui ouvre une des autres portes derrière laquelle il n'y a pas de voiture, et lui offre, grand seigneur, la possibilité de refaire son choix. Quel dilemme !
Sur la page web suivante,
`http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Vulgarisation/Hall/hall.html`
on peut faire des simulations d'un grand nombre d'essais à ce jeu en testant chacune des deux stratégies. Qu'est-ce que ces simulations semblent indiquer ?
Expliquer cela mathématiquement.

Exercice 9.

Une personne dispose de trois cartes identiques en tout point sauf en ce qui concerne la couleur. La première carte est rouge sur les deux faces, la deuxième est blanche sur les deux faces et la troisième est rouge d'un côté et blanche de l'autre.

1. Elle tire au hasard une carte et en présente au hasard une des faces. Vous ne voyez que la face présentée et on vous demande de parier sur la couleur de la face cachée. Quel serait votre choix ?
2. Que se passerait-il si en fait, la personne ne choisit pas au hasard la face de la carte qu'elle présente, mais si elle présente toujours la face de couleur rouge lorsque la carte tirée (toujours au hasard) en possède une ?

Exercice 10.

1. Donner une formulation mathématique de l'affirmation suivante : « *un fumeur a plus de chance de développer un cancer du poumon qu'un non fumeur* ».
2. Soit A et B deux événements. On suppose que $P(A) > 0$ et $0 < P(B) < 1$.
   Montrer que les quatre inégalités : $P(A|B) \geqslant P(A)$, $P(B|A) \geqslant P(B)$, $P(A|B^c) \leqslant P(A)$ et $P(A|B) \geqslant P(A|B^c)$ sont équivalentes.
3. Énoncer une phrase en français exprimant chacune de ces inégalités.

Exercice 11.

On dispose d'un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence. On sait que 50 de ces pièces sont équilibrées tandis que les 50 autres sont truquées. Pour une pièce truquée, la probabilité d'apparition de « face » lors d'un jet de cette pièce vaut 3/4.
On prend une pièce au hasard dans ce lot et on la lance. Quelle est la probabilité d'obtenir « face » ?
On lance la pièce et on obtient « face ». Sachant cela, quelle est la probabilité que la pièce était truquée ?

Exercice 12.

Un laboratoire a mis au point un alcootest dont les propriétés sont les suivantes :

— il se révèle positif pour quelqu'un qui n'est pas en état d'ébriété dans 2% des cas,

— il se révèle positif pour quelqu'un qui est en état d'ébriété dans 96% des cas.

Dans un département donné, on estime que 3% des conducteurs sont en état d'ébriété.

1. Un contrôle dans ce département avec cet alcootest s'est révélé positif. Quelle est la probabilité que le conducteur ne soit pas malgré tout en état d'ébriété ?
2. Si un contrôle se révèle négatif, quelle est la probabilité que le conducteur contrôlé ne soit effectivement pas en état d'ébriété ?

Exercice 13.

Pierre a une chaussette mais a égaré la deuxième. Celle-ci a une probabilité p ($p > 0.1$) d'être dans sa commode, qui comporte n tiroirs, et peut être dans n'importe quel tiroir. Pierre décide d'ouvrir k tiroirs ($1 \leqslant k \leqslant n$) : s'il trouve sa chaussette, c'est qu'elle était dans la commode ; s'il ne la trouve pas, il se dit que sans doute elle n'y était pas. On aimerait connaître le nombre minimum de tiroirs à ouvrir pour que Pierre se trompe avec une probabilité inférieure à 0.1.

1. En posant T l'événement « Pierre se trompe. » et C l'événement « La chaussette est dans la commode. », déterminer $P(T|C)$ et $P(T|C^c)$. En déduire la probabilité de T en fonction de p, k, n.
2. Répondre alors à la question.
3. Question subsidiaire : pourquoi avoir supposé que $p > 0.1$?

Exercice 14.

Une compagnie d'assurance estime que les gens peuvent être répartis en deux classes ; ceux qui sont enclins aux accidents et ceux qui ne le sont pas. Ses statistiques montrent qu'un individu enclin aux accidents a une probabilité de $0,4$ d'en avoir un dans l'espace d'un an ; cette probabilité tombe à $0,2$ pour les gens à risque modéré. On suppose que 30% de la population appartient à la classe à haut risque.

1. Quelle est alors la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident durant l'année qui suit la signature de son contrat ?
2. Un nouveau signataire a un accident dans l'année qui suit la signature de son contrat. Quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à haut risque ?
3. En supposant que le fait qu'une personne ait un accident ne modifie pas sa façon d'agir, quelle est la probabilité qu'un individu ayant eu un accident dans l'année qui suit la signature de son contrat ait aussi un accident la deuxième année (on explicitera et commentera les hypothèses utilisées) ?

Exercice 15.

Un accident a eu lieu dans le nuit : un taxi a renversé un piéton. Mais le taxi a disparu sans laisser de traces.

Le commissaire Locard enquête pour essayer d'identifier ce taxi. Il sait qu'il n'y a que deux compagnies de taxis dans la ville : les taxis rouges et les taxis jaunes. Et il y a cinq fois plus de taxis jaunes que de taxis rouges. Le commissaire dispose aussi d'un témoin, Élodie, qui a vu la scène. Malheureusement, il sait que les témoins ne sont pas parfaitement fiables (il estime qu'ils se trompent une fois sur cinq).

1. Traduire cet énoncé de manière probabiliste.
2. Quelle est la probabilité pour qu'Élodie affirme avoir vu un taxi rouge ?
3. Élodie témoigne. Elle affirme avoir vu un taxi rouge. Quelle est la probabilité pour que le taxi impliqué dans l'accident soit un taxi rouge ? Le commissaire Locard doit-il tout de suite contacter la compagnie des taxis rouges ?

Suite à un appel à témoins, Nicolas se présente à la police : lui aussi a vu la scène. Le commissaire Locard l'isole soigneusement d'Élodie pour qu'ils ne puissent pas discuter ensemble de ce qu'ils ont vu. « Je préfère avoir des témoignages indépendants », dit-il.

4. Expliquer ce que signifie mathématiquement cette phrase prononcée par le commissaire Locard.
5. Les événements « Élodie affirme avoir vu un taxi rouge » et « Nicolas affirme avoir vu un taxi rouge » sont-ils indépendants ? (*Justifier soigneusement la réponse.*)
6. Du point de vue du commissaire Locard, qui connaît le témoignage d'Élodie, quelle est la probabilité pour que Nicolas affirme avoir vu un taxi rouge ?
7. Nicolas affirme avoir vu un taxi rouge. Quelle est la probabilité pour que le taxi impliqué dans l'accident soit rouge ? Que conseilleriez-vous maintenant au commissaire Locard ?