Exerice 5

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions qui converge uniformement sur [0, 1] vers une fonction f continue.

- $$\begin{aligned}|f_n(\frac{1}{n}) - f(0)| &= |f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n}) + f(\frac{1}{n}) - f(0)| \\ &\leq |f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| + |f(\frac{1}{n}) - f(0)| \\ &\leq \underset{x\in[0,1]}{Sup} |f_n(x) - f(x)| + |f(\frac{1}{n}) - f(0)|\end{aligned}$$

- On sait que (f_n) converge uniformement sur [0, 1] donc on a que $\underset{x\in[0,1]}{Sup} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Comme f est continue sur [0, 1] f est continue en 0

Donc on a que $|f(\frac{1}{n}) - f(0)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Comme $|f_n(\frac{1}{n}) - f(0)| \leq \underbrace{\underset{x\in[0,1]}{Sup} |f_n(x) - f(x)|}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{|f(\frac{1}{n}) - f(0)|}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $|f_n(\frac{1}{n}) - f(0)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

donc on a bien que $f_n(\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)$

- $f_n : x \longmapsto nxe^{-nxln^2(1+x)}$

Soit $x \in [0,1]$

Si x = 0, $f_n(0) = 0$

Si $x \in]0,1]$, $-nxln^2(1+x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc $e^{-nxln^2(1+x)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Et par croissance comparé on a $nxe^{-nxln^2(1+x)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc f_n converge simplement vers la fonction nulle

On a vu a la question précédente que si on avait convergence uniforme vers [0, 1]

alors $f_n(\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)$

Or $f_n(\frac{1}{n}) = n * \frac{1}{n} exp(-n\frac{1}{n} ln(1 + \frac{1}{n}))$

$= exp(-ln(1 + \frac{1}{n}))$

$\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on peut faire un DL en 0 de $ln(1 + x)$

$= exp(-(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Or $f(0) = 0 \neq 1$ donc $f_n(\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\not\rightarrow} f(0)$