Exerice 7

• $\mathbb{R}_2[x]$ est un espace vectorielle de dimension 3 car une base $\mathbb{R}_2[x]$ est $Vect\{1, X, X^2\}$
• Soit $aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[x]$

On veut $\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \\ P(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a * 0^2 + b * 0 + c = 0 \\ a * 1^2 + b * 1 + c = 0 \\ a * 2^2 + b * 2 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -b \\ -4b + 2b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

• $f : \mathbb{R}_2[X]^2 \to \mathbb{R}$
$\quad P, Q \longmapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$

Montrons que f est un produit sclaire:
Symétire: soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$
$f(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) = Q(0)P(0) + Q(1)P(1) + Q(2)P(2) = f(Q, P)$

Bilinéarité: soit $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Comme nous avons prouvé la symétire il suffit de montre que:
$f(\alpha P + \beta Q, R) = f(R, \alpha P + \beta Q) = \alpha f(P, R) + \beta f(Q, R)$ pour la bilinéarité

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q, R) &= (\alpha P + \beta Q)(0)R(0) + (\alpha P + \beta Q)(1)R(1) + (\alpha P + \beta Q)(2)R(2) \\ &= \alpha P(0)R(0) + \beta Q(0)R(0) + \alpha P(1)R(1) + \beta Q(1)R(1) + \alpha P(2)R(2) + \beta Q(2)R(2) \\ &= \alpha(P(0)R(0) + P(1)R(1) + P(2)R(2)) + \beta(Q(0)R(0) + Q(1)R(1) + Q(2)R(2) \\ &= \alpha f(P, R) + \beta f(Q, R) \end{aligned}$$

Définis positif: soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$

$$\begin{aligned} f(P, P) &= P(0)P(0) + P(1)P(1) + P(2)P(2) \\ &= P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(P, P) = 0 &\Leftrightarrow P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow P(0)^2 = P(1)^2 + P(2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow P(0) = P(1) + P(2) = 0 \end{aligned}$$

Or on a vu a la question 1 que le seul polynome respectant cette condition est le polynome nul

• $f(1, X) = 1 * 0 + 1 * 1 + 1 * 1 = 2 \neq 0$
donc la famille $\{1, X, x^2\}$ n'est pas orthogonal

• Soit $P_0 = (X-1)(X-2), P_1 = X(X-2), P_0 = X(X-1)$
$f(P_0, P_1) = P_0(0)P_1(0) + P_0(1)P_1(1) + P_0(2)P_1(2) = 0$
$f(P_0, P_2) = P_0(0)P_2(0) + P_0(1)P_2(1) + P_0(2)P_2(2) = 0$
$f(P_1, P_2) = P_1(0)P_2(0) + P_1(1)P_2(1) + P_1(2)P_2(2) = 0$
Donc la famille $\{P_0, P_1, P_2\}$ est orthogonal
$||P_0|| = \sqrt{f(P_0, P_0)} = \sqrt{4} = 2$
$||P_1|| = \sqrt{f(P_1, P_1)} = \sqrt{1} = 1$
$||P_2|| = \sqrt{f(P_2, P_2)} = \sqrt{4} = 2$
Donc la famille $\{\frac{P_0}{2}, P_1, \frac{P_2}{2}\}$ est orthonormée