Exercice 2.1 On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. On pose

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour les vecteurs $\{a, b\}$.

b) Faire de même avec $\{b, a\}$. Qu'observe-t-on par rapport à la question précédente ?

c) Que se passe-t-il quand on utilise le procédé de Gram-Schmidt pour les vecteurs $\{a, b, c\}$?

Exercice 2.2 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ correspondant, appliquer l'orthonormalisation de Gram-Scmidt aux vecteurs suivants.

1. $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Exercice 2.3 On munit l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle P|Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

1) Calculer, pour $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, le produit scalaire $\langle X^k | X^l \rangle$.

2) Donner une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\{1, X, X^2\}$.

3) **Facultatif** Retrouver pourquoi on a bien défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.4 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ on considère l'espace vectoriel V d'équation cartésienne $x + y + z = 0$.

a) Donner (sans calculs !) une base de l'orthogonal de V.

b) A partir de l'équation cartésienne de V, montrer que $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ est une base de V et en déduire une base orthogonale de V.

c) Ecrire dans la base canonique les matrices représentatives de projections orthogonales sur V et $V^\perp$

d) En utilisant le résultat du 4. dans l'exercice 2.2, retrouver une base orthogonale de V.

Exercice 2.5 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ on considère l'espace vectoriel V engendré par les vecteurs $a = (1, -1, 0, 0)^T$ et $b = (3, 1, 1, 0)^T$.

1. Trouver un système d'équations cartésiennes de $V^\perp$.

2. En déduire une base de $V^\perp$. Calculer alors une base orthonormée de $V^\perp$.

3. Trouver un système d'équations cartésiennes de V

4. Si $c = (0,0,0,1)^T$ et $d = (0,0,1,1)^T$, montrer que $\mathcal{B} = \{a,b,c,d\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

5. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt sur $\mathcal{B}$, on trouve la base orthogonale

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/9 \\ -2/9 \\ 8/9 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   En déduire rapidement des réponses aux questions 1,2 et 3.

6. **Facultatif** Appliquer le procédé de Gram-Scmidt pour retrouver $\mathcal{B}'$.

Exercice 2.6 Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le plan P d'équation cartésienne $x + y - 2z = 0$.

1. Donner un vecteur qui engendre $P^\perp$.

2. Soit $v = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$, calculer son projeté orthogonal sur $P^\perp$ puis en déduire celui sur P.

3. Trouver la distance euclidienne de $(1,1,1)$ au plan P.

4. Ecrire dans la base canonique les matrices représentatives de projections orthogonales sur P et $P^\perp$.

Exercice 2.7 En utilisant les résultats de l'exercice **2.3**, calculer

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt.$$

Exercice 2.8 Soit E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$.

2. En déduire que $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

3. * On suppose que $E = F \oplus G$. Montrer que $F^\perp$ et $G^\perp$ sont en somme directe puis que $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Exercice 2.9 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

1) *Question préliminaire :* Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ est tel que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, montrer, en résolvant un système, que P est le polynôme nul.

2) Pour tous P, Q dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$f(P,Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

   Montrer que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Grâce au procédé de Gram-Schmidt, orthonormaliser la base $\{1, X, X^2\}$. On note $\{U_1, U_2, U_3\}$ la base obtenue.

4) Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}^2[X]$, $f(U_1, P) = P(1)$, $f(U_2, P) = P'(1)$, $f(U_3, P) = P''(1)$. Comment s'appelle l'écriture de P dans la base $\{U_1, U_2, U_3\}$.

5) * **Facultatif** Généraliser ces résultats à $\mathbb{R}_n[X]$ et en remplaçant 1 par un nombre réel a quelconque (On pourra s'aider dès le départ de la formule de Taylor).