Exerice 2

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} = 0$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge

Soit la série entière $\sum a_n x_n$

R $= sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid a_n x_n$ borné $\}$

Si $x = 1$ on $a_n x^n = a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $a_n x_n$ est borné

Si $x < 1$ donc $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $a_n x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc borné

Si $x > 1$ on a $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ mais $a_n x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ est indeterminé

Mais on sait que $R \geq 1$

On sait aussi que R $= sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \sum |a_n| x_n$ converge $\}$

Comme $\sum a_n$ diverge, $\sum |a_n|$ diverge aussi

or $\sum |a_n| \leq \sum |a_n| x_n$ quand $x > 1$

or comme $\sum |a_n|$ diverge $\sum |a_n| x_n$ diverge aussi quand $x > 1$

Donc on sait que $R \leq 1$

Finalement on obtient $R = 1$