Exerice 3

• Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et $P \in O_3(\mathbb{R})$

$< PX|PY >= (PX)^T \cdot PY = X^T P^T \cdot PY$

Or comme $P \in O_3(\mathbb{R})$ $P^T \cdot P = I_3$

Donc $< PX|PY >= X^T Y =< X|Y >$

Comme $< PX|PY >=< X|Y >$

on a $||PX|| = \sqrt{< PX|PX >} = \sqrt{< X|X >} = ||X||$

Si P admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$

Soit U le vecteur propre associé a cette valeur propre

On a d'une part $||PU|| = ||\lambda U|| = |\lambda| \times ||U||$ car U vecteur propre

D'autre part on a $||PU|| = ||U||$ car P est une isométrie

Donc $||U|| = |\lambda| \times ||U|| \Leftrightarrow \lambda \pm 1$

• Soit $Z \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé a la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}$$

$$\overline{Z} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 \\ \vdots \\ a_n - ib_n \end{pmatrix}$$

A) $\overline{Z}^T \circ Z = \sum_{i=1}^{n} z_i \times \overline{z_i} = \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 + (b_i)^2$

B) $(P\overline{Z})^T \circ (PZ) = \overline{Z}^T P^T \circ PZ ? = \overline{Z}^T Z$

C) Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$

$Z \longmapsto \overline{Z}^T \circ Z$

Soit $Z \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, montrons que $f(\lambda Z) = |\lambda|^2 f(Z)$

$f(\lambda Z) = \overline{\lambda Z}^T \circ \lambda Z = (\overline{\lambda} \times \overline{Z})^T \circ (\lambda \times) Z$

$= \overline{\lambda} \times \lambda \times (\overline{Z}^T Z) = |\lambda|^2 f(Z)$

On calcule de deux manière différente $f(PZ)$:

- $f(PZ) = f(Z)$ vu a la question 2
- $f(PZ) = f(\lambda Z) = |\lambda|^2 f(Z)$

Donc $|\lambda|^2 f(Z) = 1 * f(Z) \Leftrightarrow |\lambda|^2 = 1$

Or le module d'un nombre complexe est toujours positif

Donc on a $|\lambda| = 1$