Exerice 4

- Soit $(E, <.|.>)$ un espace euclidien et $(x, y) \in E^2$

$$
\begin{aligned}
<x+y|x+y> &=<x|x+y>+<y|x+y> \text{ (*)} \\
&=<x|x>+<x|y>+<y|x>+<y|y> \text{ (*)} \\
&=<x|x>+<x|y>+<x|y>+<y|y> \text{ (**)} \\
&||x||^2+||y||^2+2<x|y>
\end{aligned}
$$

(*) Bilinéarité du produit sclaire (**) Symétrie du produit sclaire

$$
\begin{aligned}
<x-y|x-y> &=<x|x-y>-<y|x-y> \\
&=<x|x>-<x|y>-(<y|x>-<y|y>) \\
&=<x|x>-<x|y>-<x|y>+<y|y> \\
&||x||^2+||y||^2-2<x|y> \\
<x+y|x-y> &=<x|x-y>+<y|x-y> \\
&=<x|x>-<x|y>+<y|x>-<y|y> \\
&=<x|x>-<x|y>+<x|y>-<y|y> \\
&||x||^2-||y||^2
\end{aligned}
$$

- Soit $(x, y) \in E^2$

$$
\begin{aligned}
||x+y||^2+||x-y||^2 &=<x+y|x+y>+<x-y|x-y> \\
&= ||x||^2+||y||^2+2<x|y>+||x||^2+||y||^2-2<x|y> \\
&= 2*(||x||^2+||y||^2)
\end{aligned}
$$

- Soit $(x, y) \in E^2$

$$
\begin{aligned}
2+||x+y||^2 &= 2+<x+y|x+y> \\
&= 2+||x||^2+||y||^2+2<x|y> \\
&\leq 2+||x||^2+||y||^2+2<x|y> \\
&= 2*(1+||x||^2+||y||^2+<x|y>) \\
&\leq 2*(1+||x||^2+||y||^2+||x||^2||y||^2) \\
&= 2*(1+||x||^2)*(1+||y||^2)
\end{aligned}
$$