Chapitre 1: Produit scalaire et orthogonalité

1 Produit scalaire dans le plan

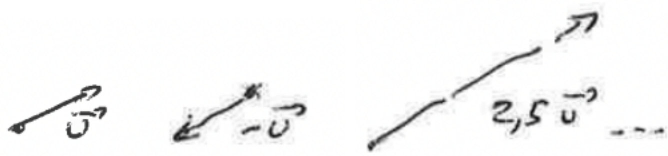
1.1 Le plan vectoriel

Pour mémoire le plan vectoriel est l'ensemble des vecteurs du plan. Un vecteur $\vec{u}$ correspond à une translation et est caractérisé par une direction, un sens, une longueur qu'on note $||\vec{u}||$ (norme de $\vec{u}$)

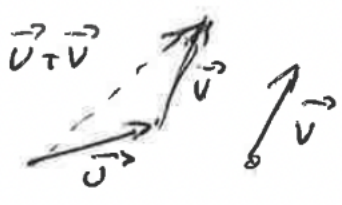
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ (ABCD) parrallélogramme

C'est l'exemple le plus simple et quelque part le plus fondamental d'ev (on peut "voir") qu'on note $\overrightarrow{\vec{O}}$

- $\vec{0} \in \overrightarrow{\vec{O}}$
- Multiplication par scalaire

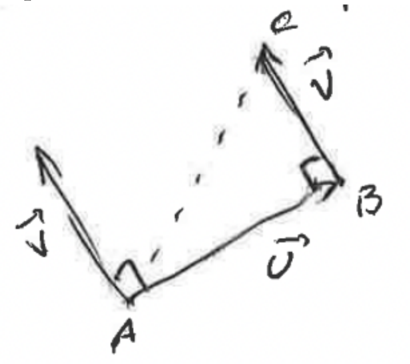


- Somme $\vec{u} \neq \vec{v}$:



Remarque 1: $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (Inégalité triangulaire)

Remarque 2: Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et orthogonaux (i.e. directions perpendiculaire);



Alors $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$ et reciproquement.

1.2 Produit scalaire

Définition: Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ on définit leur produit scalaire par:
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) \in \mathbb{R}$

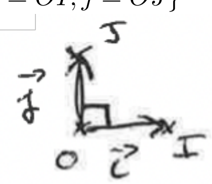
Ce produit défini une application $\overrightarrow{O} x \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}^2 \to \mathbb{R}$ (Qu'on appelle aussi <u>forme</u> car à valeur dans $\mathbb{R}$) notée $< \vec{u}|\vec{v} >$ où plus $f(\vec{u},\vec{v})$ comme une fonction.

Remarque:

- $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \overrightarrow{O} \qquad \vec{u},\vec{v} orthogonaux \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
- $\vec{v}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{v} = 0$ (Tt vecteur est orthogonal au vecteur $\vec{0}$)
- $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow ||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 \qquad | \qquad \vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = ||\vec{u}||^2$

1.3 Repère et base orthonormé

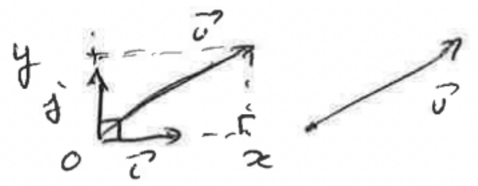
Dans le plan, si on se donne un repère orthonormé (O, I, J) a une base orthonormé du plan vectoriel $= \{\vec{i} = \overrightarrow{OI}, \vec{j} = \overrightarrow{OJ}\}$



$$||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1 \qquad et \qquad \vec{i}.\vec{j} = 0$$

Et tout vecteur$\vec{u}$ s'indetifie à un couple de réels $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

et $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$



Remarque: Il y a ambiguité matriciellement entre

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2 \end{pmatrix} \in M_{1,2}(\mathbb{R}) \text{ et } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$$

On adopte pour $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$ et leurs vecteurs la notation verticale.
$\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{x}^T = \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

Proprieté: Si

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque:

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} x, y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

au sens des matrices !

Preuve:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2$ et $||\vec{v}||^2 = x'^2 + y'^2$
$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2$
d'où $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||u \vec{+} v||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$
$= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = xx' + yy'$

1.4 Proprietés algébriques

$\phi : \overrightarrow{O} \times \overrightarrow{O} \to \mathbb{R}$ est une <u>forme</u>
$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u}.\vec{v}$

- Symétrique (S):
  $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \overrightarrow{O}^2 \qquad \vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

- Bilinéaire (B):
  $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \qquad \forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \overrightarrow{O}^3$
  $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}).\vec{w} = \lambda(\vec{u}.\vec{w}) + \mu(\vec{v}.\vec{w})$
  $\vec{u}.(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v}) + \mu(\vec{u}.\vec{w})$

- Definie positif (P):
  $\forall\vec{x} \in \overrightarrow{O}\backslash\{\vec{0}\} \qquad \vec{x}.\vec{x} > 0$

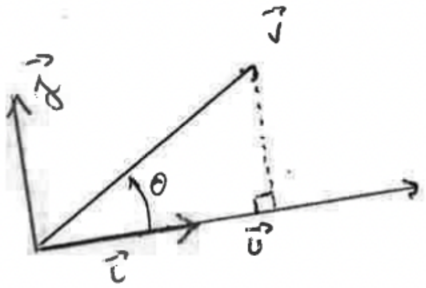
$$\text{où encore} \begin{cases} \forall\vec{x} \in \overrightarrow{O} & \vec{x}.\vec{x} \geq 0 \\ \vec{x}.\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

Remarque: La symétrie simplifie la bilinéarité.
Si $\vec{x} = \vec{0}$ $\qquad \vec{x}.\vec{x} = \vec{0}$ aussi d'après la bilinéarité

1.5 Angle et produits scalaire

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs <u>non nuls</u> et $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$
Alors $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.cos(\theta)$

Preuve: On regarde les coordonnées dans la base orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ formé de $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ et $\vec{j}$ de norme 1 tq $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = \frac{\pi}{2}$



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} ||\vec{u}|| \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} ||\vec{v}|| * cos(\theta) \\ ||\vec{v}|| * sin(\theta) \end{pmatrix}$$

On en déduit ici une inégalité importante.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in \overrightarrow{O}$ $|\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}||.||\vec{v}||$ On a égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2 Produit scalaire dans un $\mathbb{R}$ev

Soit E un $\mathbb{R}$ev quelconque (pas forcément de dimension finie)

2.1 Définition

Un produit scalaire sur E est une application $f : ExE \to \mathbb{R}$ qui vérifie les Proprieté (S), (B), (P)

C'est a dire une forme bilinéaire, défini positif et symétrique

Si $(x, y) \in E^2$, ce produit scalaire peut s'écrire comme une fonction $f(x, y)$ (ou $g(x, y)$ ou autre) ou comme un produit $x.y$ ou encore $< x|y >$

Un espace E muni d'un produit scalaire est appelé un espace prehilbertien. Si E est de dimension finie, on appelle cette espace un espace euclidien.

Exemple fondamental:

$$\text{Sur } \mathbb{R}^n \text{ on définit pour tous } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$< a|b >= a^T.b = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^n a_ib_i$

C'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ qu'on appellera le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$

Preuve à connaitre

Autres exemples (voir exercices)

$$\text{Dans } \mathbb{R}^2 \qquad < \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} >= xx' + \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{2}x'y + yy'$$

Dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ $\quad < f|g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ $\quad < P|Q >= P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$

2.2 Norme associée

Dans un espace prehilbertien $(E, < | >)$ on définit la norme euclidienne associée: $\forall x \in E$ $\quad ||x|| = \sqrt{< x|x >}$ C'est une application de E dans $\mathbb{R}^+ (\vec{x} \longmapsto ||x||)$ qui vérifie

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad ||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$
- $\forall x \in E \qquad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $\forall (x,y) \in E^2 \qquad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

Ces 3 proprietés définissent ce qu'on appelle une norme.
Le point 3 le plus délicat à montrer et se base sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

Théorème: Soit $(E, <\mid>)$ un espace prehilbertien
$\forall (x,y) \in E^2 \qquad |<x|y>| \leq ||x||.||y||$ et on a égalité ssi x et y sont colinéaires

Preuve à connaitre !:

- Si $y = 0$ alors c'est évident (on a même égalité car $<x|0_E> = 0$)
- Sinon on regarde, pour $t \in \mathbb{R}$
  $0 \leq ||x+ty||^2$
  $= <x+ty|x+ty> = <x|x> + t<x,y> + t<y|x> + t^2<y|y>$
  $= ||x||^2 + 2t<x|y> + t^2||y||^2 = P(t)$ p un polynôme du second degré toujours positif
  donc
  $\triangle = 4<x|y>^2 - 4||x||^2||y||^2 \leq 0$
  et $|<x|y>| \leq ||x||.||y||$
  - Si x et y sont colinéaires alors $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tq $x = t_0 * y$
    et $P(-t_0) = 0$ d'où $\triangle = 0$ et donc $|<x|y>| = ||x||.||y||$
  - Si $|<x|y> = ||x||.||y||$ alors $\triangle = 0$ et $\exists \alpha$ tq $P(\alpha) = 0$
    donc $0 = ||x+\alpha y||^2$ d'où $x + \alpha y = 0$ CQFD

Grâce à cette inégalité on retrouve l'inégalité triangulaire
$\forall (x,y) \in E^2 ||x+y||^2 = ||x||^2 + 2<x|y> + ||y||^2$
$\leq ||x||^2 + 2||x||.||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$
Donc $\forall (x,y) \in E^2 ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

2.3 Orthogonalité des vecteurs

Comme dans le plan, dans $(E, <\mid>)$, deux vecteurs x et y sont orthogonaux ssi $<x|y> = 0 \qquad x \perp y$
On a de nouveau l'égalité de Pythagore:
$x \perp y$
$Leftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$