

Chapitre 1: Produit scalaire et orthogonalité

1 Produit scalaire dans le plan

1.1 Le plan vectoriel

Pour mémoire le plan vectoriel est l'ensemble des vecteurs du plan. Un vecteur \vec{u} correspond à une translation et est caractérisé par une direction, un sens, une longueur qu'on note $\|\vec{u}\|$ (norme de \vec{u})

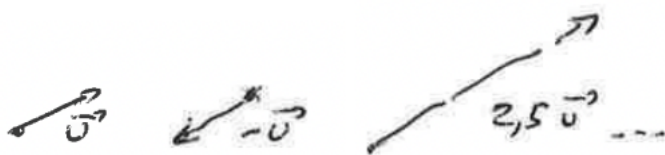


$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

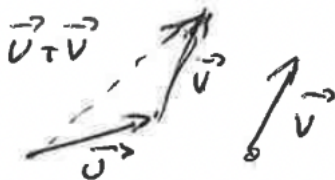
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (ABCD) \text{ parallélogramme}$$

C'est l'exemple le plus simple et quelque part le plus fondamental d'ev (on peut "voir") qu'on note \vec{O}

- $\vec{0} \in \vec{O}$
- Multiplication par scalaire

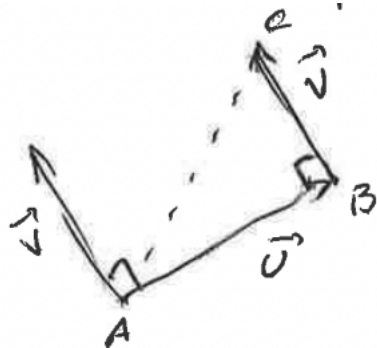


- Somme $\vec{u} \neq \vec{v}$:



Remarque 1: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Inégalité triangulaire)

Remarque 2: Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls et orthogonaux (i.e. directions perpendiculaire);



Alors $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ et réciproquement.

1.2 Produit scalaire

Définition: Pour tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} on définit leur produit scalaire par:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \in \mathbb{R}$$

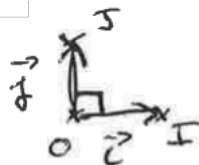
Ce produit définit une application $\vec{O}x\vec{O} = \vec{O}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (Qu'on appelle aussi forme car à valeur dans \mathbb{R}) notée $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$ où plus $f(\vec{u}, \vec{v})$ comme une fonction.

Remarque:

- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{O} \quad \vec{u}, \vec{v} \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $\vec{v} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{v} = 0$ (Tt vecteur est orthogonal au vecteur $\vec{0}$)
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \quad | \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

1.3 Repère et base orthonormé

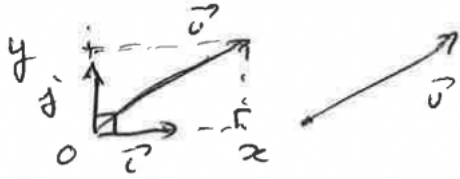
Dans le plan, si on se donne un repère orthonormé (O, I, J) a une base orthonormé du plan vectoriel $= \{\vec{i} = \vec{OI}, \vec{j} = \vec{OJ}\}$



$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

Et tout vecteur \vec{u} s'identifie à un couple de réels $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

et $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$



Remarque: Il y a ambiguïté matriciellement entre

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \in M_{1,2}(\mathbb{R}) \text{ et } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$$

On adopte pour $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$ et leurs vecteurs la notation verticale.

$$\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{x}^T = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \end{pmatrix}$$

Propriété: Si

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

au sens des matrices !

Preuve:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2 \text{ et } ||\vec{v}||^2 = x'^2 + y'^2$$

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) \\ &= \frac{1}{2} (2xx' + 2yy') = xx' + yy' \end{aligned}$$

1.4 Propriétés algébriques

$\phi: \vec{O} \times \vec{O} \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$$

- Symétrique (S):

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{O}^2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- Bilinéaire (B):

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{O}^3 \\ (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \lambda (\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu (\vec{v} \cdot \vec{w}) \\ \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) &= \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) + \mu (\vec{u} \cdot \vec{w}) \end{aligned}$$

- Définie positif (P):

$$\forall \vec{x} \in \vec{O} \setminus \{\vec{0}\} \quad \vec{x} \cdot \vec{x} > 0$$

$$\text{où encore } \begin{cases} \forall \vec{x} \in \vec{O} & \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

Remarque: La symétrie simplifie la bilinéarité.

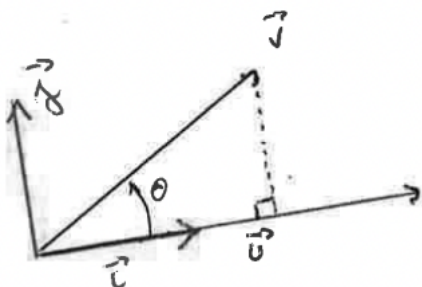
Si $\vec{x} = \vec{0}$ $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$ aussi d'après la bilinéarité

1.5 Angle et produits scalaire

Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs non nuls et $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$

Preuve: On regarde les coordonnées dans la base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ formée de $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et \vec{j} de norme 1 tq $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = \frac{\pi}{2}$



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\| * \cos(\theta) \\ \|\vec{v}\| * \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

On en déduit ici une inégalité importante.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{O} \quad |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ On a égalité si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

2 Produit scalaire dans un $\mathbb{R}ev$

Soit E un $\mathbb{R}ev$ quelconque (pas forcément de dimension finie)

2.1 Définition

Un produit scalaire sur E est une application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les Propriété (S), (B), (P)

C'est à dire une forme bilinéaire, défini positif et symétrique

Si $(x, y) \in E^2$, ce produit scalaire peut s'écrire comme une fonction $f(x, y)$ (ou $g(x, y)$ ou autre) ou comme un produit $x \cdot y$ ou encore $\langle x | y \rangle$

Un espace E muni d'un produit scalaire est appelé un espace prehilbertien. Si E est de dimension finie, on appelle cette espace un espace euclidien.

Exemple fondamental:

$$\text{Sur } \mathbb{R}^n \text{ on définit pour tous } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\langle a | b \rangle = a^T \cdot b = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

C'est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n qu'on appellera le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n

Preuve à connaître

Autres exemples (voir exercices)

$$\text{Dans } \mathbb{R}^2 \quad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{2}x'y + yy'$$

$$\text{Dans } C^0([0, 1], \mathbb{R}) \quad \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

$$\text{Dans } \mathbb{R}_2[X] \quad \langle P | Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

2.2 Norme associée

Dans un espace prehilbertien $(E, \langle | \rangle)$ on définit la norme euclidienne associée: $\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ C'est une application de E dans \mathbb{R}^+ ($x \mapsto \|x\|$) qui vérifie

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
- $\forall x \in E \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $\forall (x, y) \in E^2 \quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Ces 3 propriétés définissent ce qu'on appelle une norme.

Le point 3 le plus délicat à montrer et se base sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

Théorème: Soit $(E, < | >)$ un espace préhilbertien

$\forall (x, y) \in E^2 \quad | < x|y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$ et on a égalité ssi x et y sont colinéaires

Preuve à connaître !:

- Si $y = 0$ alors c'est évident (on a même égalité car $< x|0_E > = 0$)
- Sinon on regarde, pour $t \in \mathbb{R}$
 $0 \leq ||x + ty||^2$
 $= < x + ty|x + ty > = < x|x > + t < x, y > + t < y|x > + t^2 < y|y >$
 $= ||x||^2 + 2t < x|y > + t^2 ||y||^2 = P(t)$ p un polynôme du second degré toujours positif
donc
 $\Delta = 4 < x|y >^2 - 4||x||^2 ||y||^2 \leq 0$
et $| < x|y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$
 - Si x et y sont colinéaires alors $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tq $x = t_0 * y$
et $P(-t_0) = 0$ d'où $\Delta = 0$ et donc $| < x|y > | = ||x|| \cdot ||y||$
 - Si $| < x|y > | = ||x|| \cdot ||y||$ alors $\Delta = 0$ et $\exists \alpha$ tq $P(\alpha) = 0$
donc $0 = ||x + \alpha y||^2$ d'où $x + \alpha y = 0$ CQFD

Grâce à cette inégalité on retrouve l'inégalité triangulaire

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad ||x + y||^2 = ||x||^2 + 2 < x|y > + ||y||^2 \\ \leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

$$\text{Donc } \forall (x, y) \in E^2 \quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

2.3 Orthogonalité des vecteurs

Comme dans le plan, dans $(E, < | >)$, deux vecteurs x et y sont orthogonaux ssi $< x|y > = 0 \quad x \perp y$

On a de nouveau l'égalité de Pythagore:

$$x \perp y \Leftrightarrow ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$