Exerice 1

a) $f_n(x) = x^n$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Si $x > 1 \Rightarrow x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ donc f_n ne converge pas simplement

Si $x = 1 \Rightarrow x^n = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ donc f_n converge simplement

Si $0 \leq x < 1 \Rightarrow x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc f_n converge simplement

Si $-1 < x < 0 \Rightarrow x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc f_n converge simplement

Si $x \leq -1 \Rightarrow x^n$ n'admet pas de limite et donc f_n ne converge pas simplement

Donc f_n converge simplement si $x \in]-1, 1]$

b) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Si $x > 1 \Rightarrow x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et par croissance comparé on a que $\dfrac{x^n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

Si $x = 1 \Rightarrow x^n = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Si $0 \leq x < 1 \Rightarrow x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Si $-1 < x < 0 \Rightarrow x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Si $x = -1 \Rightarrow \dfrac{x^n}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Si $x \leq 1 \Rightarrow x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et par croissance comparé on a que $\dfrac{x^n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$

Donc f_n converge simplement si $x \in [-1, 1]$

c) $f_n(x) = n^x$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Si $x > 0 \Rightarrow n^x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, donc f_n ne converge pas simplement

Si $x = 0 \Rightarrow n^0 = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ donc f_n converge simplement

Si $x < 0$ soit $k = |x|$ on a $n^x = \dfrac{1}{n^k}$ or $k \geq 0$ donc $n^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow f_n(x) = \dfrac{1}{n^k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc f_n converge simplement si $x \in]-\infty, 0]$

d) $f_n(x) = x^n e^n = (xe)^n$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a vu a la question que $f_n(x) = x^n$ converge simplement si $x \in]-1, 1]$

Donc $-1 < ex \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{e} < x \leq \frac{1}{e}$

Donc f_n converge simplement si $x \in]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$

e) $f_n(x) = \frac{sin(n^2x)}{n}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a que $\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq sin(n^2x) \leq 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{sin(n^2x)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc f_n converge simplement si $x \in \mathbb{R}$

f) $f_n(x) = nsin(\frac{x}{n})$ Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $\frac{x}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on peut faire un DL de sin en 0

$sin(\frac{n}{x}) = \frac{x}{n} + o(\frac{1}{n})$

$f_n(x) = n(\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n}) = x + o(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

Donc f_n converge simplement si $x \in \mathbb{R}$

g) $f_n(x) = n^2(cos(\frac{x}{n}) - 1)$ Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $\frac{x}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on peut faire un DL de cos en 0

$cos(\frac{n}{x}) = 1 - \frac{x^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

$f_n(x) = n^2(\frac{x^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = \frac{x^2}{2} + o(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{x^2}{2}$

Donc f_n converge simplement si $x \in \mathbb{R}$

a) $f_n(x) \Rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si x} \in]-1,1[\\ 1 \text{ si x} = 1 \end{cases}$

b) $f_n(x) \Rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si x} \in [-1,1] \end{cases}$

c) $f_n(x) \Rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si x} \in]-\infty,0[\\ 1 \text{ si x} = 0 \end{cases}$

d) $f_n(x) \Rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si x} \in]-\frac{1}{e},\frac{1}{e}[\\ 1 \text{ si x} = \frac{1}{e} \end{cases}$

e) $f_n(x) \Rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si x} \in \mathbb{R} \end{cases}$

f) $f_n(x) \Rightarrow \begin{cases} x \text{ si x} \in \mathbb{R} \end{cases}$

g) $f_n(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} \text{ si x} \in \mathbb{R} \end{cases}$