Chapitre 2: Orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$

1 Orthogonale d'un sous espace et projections orthogonales

1.1 Orthogonal d'un sev:

Soit E un espace euclidien et V un sev de E
On note $V^\perp = \{x \in E \text{ tq } \forall v \in V, < x|v >= 0\}$
Ce sont les éléments de E qui sont $\perp$ à tous les éléments de V.

Proposition: Si $V = Vect\{a_1, \dots, a_k\}$ alors

$$x \in V^\perp \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq k \qquad < x|a_i >= 0$$

Théorème: Si E est un espace euclidien (dimension finie) et V est un sev de E alors $V^\perp$ est un sev et

$$E = V \oplus V^\perp \qquad \text{de plus } (v^\perp)^\perp = V$$

Preuve:

- Soit $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in V^\perp$ alors:
  $\forall v \in V \qquad < \lambda x + \mu y|v >= \lambda < x|v > +\mu < y|v >= 0$ Donc $V^\perp$ est stable par combinaisions linéaire et c'est donc un sev de E.
- V et $V^\perp$ sont toujours en somme directe. Rappel de la définition.
  $\forall x \in V + V^\perp\ \exists$ un unique couple $(x, y) de V \times V^\perp$ tel que $z = x + y$
  Ce qui équivaut à $V \cap V^\perp = \{0\}$
  Si $x \in V \cap V^\perp \qquad x \in V^\perp$ et $\forall v \in V \qquad < x|v >= 0$
  d'où $< x|x >= 0$ (en prenant v = x) $\Rightarrow x = 0$ donc $V \cap V^\perp = \{0\}$
- Reste à montrer que $V + V^\perp = E$ Comme V et $V^\perp$ sont en somme directe, on a:
  $dim(V + V^\perp) = dimV + dimV^\perp$ et $V + V^\perp \subset E$ de dimension n
  Il suffit de montrer que $dimV^\perp = n - dimV$
  car si $F \subset E$ et dim F = dim E, alors F = E

  Si dim V = k, soit $\{u_1, \dots, u_k\}$ une base de V.
  On sait qu'il existe $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ tq $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ soit une base de E

  On orthonormalise par le procédé de Gram-Schmidt et on trouve un BON $\{e_1, \dots, e_n\}$ tq
  $V = Vect\{e_1, \dots, e_k\} = Vect\{u_1, \dots, u_k\}$
  Si $W = \{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ alors par construction:

  $$\forall x \in W, x \in V^\perp donc W \subset V^\perp$$

$$\text{et } n-k = dim(W) \leq dim(V^\perp)$$

Comme on a une somme directe et V $V \oplus V^\perp \subset E$

$$\begin{array}{c} dim(V \oplus V^\perp) \leq dimE = n \\ \| \\ k + dim(V^\perp) \end{array}$$

Donc $n-k \leq dim(V^\perp) \leq n-k$
On trouve donc vien que $W = V^\perp$ et $dimV^\perp = n-k$
Donc $V \oplus V^\perp = E$
C'est une façon de construire l'orthogonal

- Enfin on montre que $V \subset (V^\perp)^\perp$ et de même dimension

Remarque 1: Soit V un sous ensemble (pas un sev forcément) de E, alors on peut définir de la même façon $V^\perp$ et alors $V^\perp = (VectV)^\perp$ est un sev

Remarque 2: Si E n'est pas de dimension finie alors on à encore $V + V^\perp = V \oplus V^\perp$ et $V^\perp$ sev mais pas forcément $V \oplus V^\perp = E$

1.2 Exemples et calcul pratique

1.2.1 Orthogonal d'un sev engendré par des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^4$, soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = Vect\{A, B\} \text{ (dim 2)}$$

On trouve facilement les équations cartésiennes de $V^\perp$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = X \in V^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} < X|A >= 0 \\ < X|B >= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + t = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Si on échalonne:

$$X \in V^{\perp} \Leftrightarrow \exists (z,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } X = \begin{pmatrix} -t \\ \frac{-z}{2} + \frac{t}{2} \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } V^{\perp} = Vect \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On peut verifier ici que dim $V^{\perp} = 2$ et on pourrait même en donner une BON.
(On peut aussi trouver une BON de V facilement)

1.2.2 Orthogonal d'un sev donné par des equations cartésiennes

Dans $\mathbb{R}^4$, si $F = \left\{ (x,y,z,t)^T \text{ tq } \begin{array}{c} x+y+z+t=0 \\ y+2z+3t=0 \end{array} \right\}$ soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$X \in F \Leftrightarrow < X|U >= 0$ et $< X|V >= 0 \Leftrightarrow X \in \{U,V\}^{\perp}$
$\Leftrightarrow X \in Vect\{U,V\}^{\perp}$ d'où
F $= Vect\{U,V\}^{\perp}$ et donc $F^{\perp} = (Vect\{U,V\}^{\perp})^{\perp} = Vect\{U,V\}$
On peut aussi orthonormaliser $\{u,v\}$ et on peut aussi trouver comme précédement des équations cart de $F^{\perp}$ en choisissant une base de F
$X \in F \Leftrightarrow X = (x,y,z,t)^T$ tq $\begin{cases} x = -y-z-t \\ y = -2z-3t \end{cases}$ ie $\begin{cases} x = z+2t \\ y = -2z-3t \end{cases}$

d'où $F = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

1.3 Projection et symetries orthogonales

Rappel: Soit E un espace vectoriel qui se décompose en somme directe
$E = F \oplus G$ (ie $E = F + G$ et $F \cap G = 0$)
Cela équivaut à dire que pour tout $x \in E$ il existe un unique $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$
On nomme $y = p(x)$ le projeté sur F parallèlement à G. Et $z = q(x)$ le projeté de x sur G parallèlement à F.
On montre alors que $P : E \to E$ et $q : E \to E$ sont bilinéaire, p + q = id_E et $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ (projections)

Définition: Soit E un espace euclidien et F un sous ev de E.
La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ ($E = F \oplus F^\perp$), On la note P_F

Théorème: Si E euclidien et F est un sev de E

- pour tout $x \in E, P_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que:

$$||x - P_F(x)|| = \underset{y \in F}{inf}||x - y|| = d(x, F)$$

- Si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ est une BON de F alors.

$$P_F(x) =< x|u_1 > u_1 + \cdots + < x|u_k > u_k$$

Preuve: Soit $y \in F$

$$||x - y||^2 = ||\underbrace{x - P_F(x)}_{F^\perp} + \underbrace{P_F(x) - y}_{F}||^2 \text{ donc}$$

$$||x - y||^2 = ||x - P_F(x)||^2 + ||P_F(x) - y||^2$$

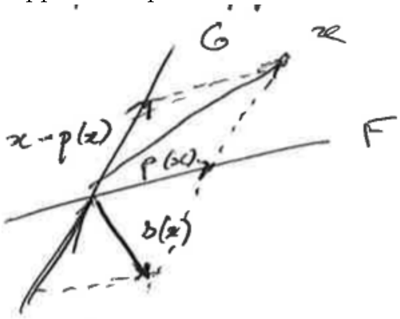
$$||x - y||^2 \geq ||x - P_F(x)||^2 \text{ et est égal si } y = P_F(x)$$

On remarque que $y =< x|u_1 > u_1 + \cdots + < x|u_k > u_k \in F$
si $z = x - y$ alors pour $1 \leq i \leq k$ $\quad < z|u_i >=< x|u_i > - < y|u_i >=< x|u_i > - < x|u_i >= 0$
d'où $z \in Vect\{u_1, \ldots, u_k\}^\perp = F^\perp$ donc $x = y + z$ et $y = P_F(x)$

Exemple pratique: si $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer la distance de x à $Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ soit encore (au carré)

$$\underset{a,b \in R}{inf} (1-a)^2 + (1-a-b)^2 + (a-b)^2 + 1 \dots$$

Pour finir:
Si $E = F \oplus G$ et p est la projection sur F parallèlement à G, on a $s = 2p - id_E$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G



on a toujours $s \circ s = id_E$

Si $E = F \oplus F^{\perp}$ alors on parle de symetrie orthogonale et dans ce cas on a une formule dans une BON

pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} ||s_F(x)||^2 &= ||P_F(x) + P_F(x) - x||^2 \\ &= ||P_F(x)||^2 + ||P_F(x) - x||^2 \\ &= ||P_F(x)|| + ||x - P_F(x)||^2 = ||x||^2 \end{aligned}$$

C'est ce qu'on appelle une isométrie.