MEU252 **2020–2021**
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

ELÉMENTS DE CORRECTION DU PARTIEL DU 09/03/2021

Exercice 1.

a) On trouve $\|u\| = \|v\| = 3$ et $\langle u, v\rangle = 0$.

b) La résolution du système donne $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) La famille n'est pas ortonormée car, par exemple, $\|u\| = 3$. Par contre, soit en regardant le système d'équations, soit en recalculant les produits scalaires, on voit que : $\langle u, w\rangle = \langle u, w\rangle = 0$. Les trois vecteurs sont donc deux à deux orthogonaux et on a bien une famille orthogonale. Comme les vecteurs sont non nuls, il s'agit d'une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3. C'est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.

1. On applique le procédé de Gram-Scmidt :
   - $v_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\langle v_1, v_1\rangle = \|v_1\|^2 = 4$ et donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.
   - $v_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$ et comme $\langle x_2, v_1\rangle = 4$ on trouve
   $$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \langle v_2, v_2\rangle = \|v_2\|^2 = 4 \text{ et donc } u_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$
   - $v_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle x_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2$ et comme $\langle x_3, v_1\rangle = \langle x_3, v_2\rangle = 4$ on trouve
   $$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \langle v_3, v_3\rangle = \|v_3\|^2 = 4 \text{ et donc } u_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

2. On trouve $v = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$. On peut calculer le produit sacalaire avec u_1, u_2, u_3 pour montrer l'orthogonalité ou remarquer que $v = e - p(e)$ où p est la projection orthogonale de e sur $\mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ ce qui permet de conclure.

3. Comme $W = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ et $W^\perp = \mathrm{Vect}\{v\}$ on peut dire que $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ appartient à W si et seulement si il est orthogonal à $W^\perp = \mathrm{Vect}\{v\}$, c'est à dire qu'il est dans $(W^\perp)^\perp = W$. On doit donc avoir $\langle w, v\rangle = 0$ ce qui donne l'équation cartésienne
$$\frac{1}{4}(x - y + z - t) = 0 \quad \text{ou encore} \quad x - y + z - t = 0.$$

Exercice 3.

1. On a
$$\langle X^k, X^l\rangle = \int_0^1 t^{k+l} dt = \frac{1}{k+l+1}$$

2. La famille $\{1, X, X^2\}$ n'est pas orthogonale puisque, par exemple, $\langle 1, X\rangle = \frac{1}{2} \neq 0$.

3. On trouve $V_1 = 1$ et $V_2 = X - \frac{1}{2}$.

4. Il suffit de calculer les normes de V_1 et V_2 puis de diviser. On a
$$\begin{aligned} \|V_1\|^2 &= \langle 1, 1\rangle = 1 \\ \|V_2\|^2 &= \langle V_2, V_2\rangle = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$
et on a finalement la base orthonormée $U_1 = 1$ et $U_2 = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 4.

1. Pour $v \in E$, le projeté orthogonal sur H est le vecteur $p(v) \in H = \mathrm{Vect}\{u\}^\perp$ tel que $v - p(v) \in H^\perp = \mathrm{Vect}\{u\}$. On vérifie aisément cela en remarquant que $\langle p(v), u\rangle = 0$.

2.

   a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors
   $$X \in P \Longleftrightarrow x - y + z = 0 \Longleftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}^\perp$$
   et si $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P = \mathrm{Vect}\{u\}^\perp$ donc $P^\perp = \mathrm{Vect}\{u\}$.

   b) En utilisant la formule du 1. on trouve que :
   $$p\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \ p\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \ p\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$
   ce qui donne la matrice
   $$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$
   On aurait aussi pu calculer
   $$p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{pmatrix}$$
   et en déduire la matrice.

c) La distance est atteinte pour le prjeté orthogonal de v sur P qui est :

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = w$$

et la distance vaut

$$\|v-w\| = \left\| \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 5.

1. La quantité $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ est bien définie pour tous vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et symétrique par construction : $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle$. On vérifie aisément que cette application est linéaire par rapport au premier argument (car l'expression dépend linéairement des coordonnées du premier vecteur) et, par symétrie, on a une forme bilinéaire.

2. D'une part $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x^2 - xy + y^2$, d'autre part, en développant

$$\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = x^2 - x\,y + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 = x^2 - xy + y^2$$

   et on a bien l'égalité attendue.

   On en déduit que, comme somme de deux carrés, pour tout vecteur $\vec{u}$, $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geqslant 0$ et si $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ alors

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

   donc la forme bilinéaire est définie positive et on a bien un produit scalaire.

3. On a $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = -\frac{1}{2}$ donc les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux.

4. On pose $\vec{k} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et alors $\langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = \alpha - \frac{1}{2}\beta$ doit être nul donc on peut par exemple prendre $\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou $\vec{k} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.