Application

Exemple : $(1+x)y' = \frac{1}{2}y$ et $y(0) = 1$ (E)

Je cherche une solution de (E) sous la forme d'une série entière.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ de rayon de convergence $R > 0$

f est C^{∞} sur $]-R, R[$, et $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x_{n-1}$

$(1+x)f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$

Changement d'indice dans la première somme m = n - 1

$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)a_{n+1} + n a_n) x^n$

f est solution de (E) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)a_{n+1} + n a_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} a_n x^n$, $\forall x \in]-R, R[$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1} + n a_n = \frac{1}{2} a_n$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1} = (\frac{1}{2} - n) a_n$$

Je sais que $f(0) = 1 \Rightarrow a_0 = f(0) = 1$

Donc $a_0 = 1$

$a_1 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) a_1 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2}$

$a_n = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2) \ldots (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!}$

Soit $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$

Rayon de convergence $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\frac{1}{2} - n) a_n}{(n+1) a_n} = \frac{n - \frac{1}{2}}{n+1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1 = l$

$R = \frac{1}{l} = 1$

Tous les calculs précedents sont valides

Remarque (E) a une unique solution $\int \frac{y'}{y} = \int \frac{1}{2(1+x)}$

$y : x \longmapsto \sqrt{1+x}$

Par unicité, $\forall x \in]-1,1[, \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$