Chapitre 2: Orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$

On notera $x.y$ ou $< x|y >$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$
Pour mémoire, si $(E, f(,))$ est un espace euclidien de dimension n, alors E admet une base orthonormée $\{u_1, \dots, u_n\} = U$ et on a un isomorphisme:

$$\varphi : E \to \mathbb{R}$$

$$a = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\text{On a alors que si (a, b) } \in E^2 \text{ et } \varphi(a) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \varphi(b) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$f(a, b) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Dans tout espace euclidien est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.
Cela signifie qu'on peut se contenter de travailler dans $\mathbb{R}^n$ mais aussi que tout ce qui est énoncé s'applique dans n'importe quel espace euclidien

1 Retour sur les bases orthogonales et orthonormées

1.1 Coordonnées:

Proposition: Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthogonale de $(\mathbb{R}^n, < | >)$ (ou $(E, < | >)$) alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad x = \frac{< x|e_1 >}{< e_1|e_1 >} e_1 + \cdots + \frac{< x|e_n >}{< e_n|e_n >} e_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{< x|e_k >}{< e_k|e_k >} e_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{< x|e_k >}{||e_k||^2} e_k$$

Remarque: Dnas une base quelconque $\mathbb{R}^n$ un telle décomposition n'est pas si facile ! On écrit : $P = (e_1 \vdots \dots \vdots e_n)$, $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ revient à résoudre

$$P \circ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Preuve: Puisque $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base, on sait qu'il existe, pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, un unique n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tel que

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

pour $1 \leq k \leq n$ on a alors

$$< x|e_k > = < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i | e_k > = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < e_i|e_k >$$

d'où

$$< x|e_k > = \alpha_k < e_k|e_k > \text{ et donc}$$

$$\alpha_k = \frac{< x|e_k >}{< e_k|e_k >} = \frac{< x|e_k >}{||e_k||^2}$$

Corollaire 1: Soit B une base orthonormée $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad x = \sum_{k=1}^{n} < x|u_k > u_k$$

Corollaire 2: Si F est un sev de $\mathbb{R}^n$ et F $= Vect\{u_1, \dots, u_n\}$ où $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille orthonormée, alors :

$$\forall x \in F \qquad x = \sum_{k=1}^{n} < x|u_k > u_k$$

On commence à voir ici l'intérêt des bases orthonormées mais comment en construire, par exemple dans un sous espace vectoriel ?

1.2 Le procédé de Gram-Schmidt:

Théorème: Soit $\{x_1, \dots, x_p\}$ une base d'un sev non nul W de $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq k \leq n)$: On définit successivement

$$v_1 = x_1 \qquad \text{et} \qquad u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$$

$$v_2 = x_2 - \frac{< x_2|v_1 >}{< v_1|v_1 >} v_1 \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{v_2}{||v_2||}$$

$$\vdots$$

$$v_p = x_p - \frac{< x_p|v_1 >}{< v_1|v_1 >} v_1 - \frac{< x_p|v_2 >}{< v_2|v_2 >} v_2 - \cdots - \frac{< x_p|v_{p-1} >}{< v_{p-1}|v_{p-1} >} v_{p-1}$$

$$\text{et } u_p = \frac{v_p}{||v_p||}$$

Alors $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une base orthogonale de W.
$\{u_1, \dots, u_p\}$ est une base orthonormé de W et
$\forall 1 \leq k \leq p \qquad Vect\{u_1, \dots, u_k\} = Vect\{v_1, \dots, v_k\} = Vect\{x_1, \dots, x_k\}$

Remarque: On sait aussi que
$v_k = x_k - < x_k|u_1 > u_1 - \cdots - < x_k|u_{k-1} > u_{k-1}$ et $u_k = \frac{v_k}{||v_k||}$

- Partant d'une base quelconque de W, on construit explicitement une base orthonormée
- Ce théorème est valide dans n'importe quel espace euclidien. Ceci fournit une seconde preuve de l'existence de bases orthonormée dans un espace euclidien

Démonstration: Montrons d'abord par récurrence finie
$H_k, \{u_1, \dots, u_k\}$ est une base orthogonale de $W_k = Vect\{x_1, \dots, x_k\} pour tout 1 \leq k \leq p$

- Pour $k = 1$ $\quad v_1 = x_1 \neq 0 donc Vect\{v_1\} = Vect\{x_1\} = W_1 et v_1 est une base de W_1$ $\quad$ $\underline{H_1 \text{ vrai}}$
- Supposons pour $1 \leq k < p$, qu'on a construit $\{v_1, \dots, v_k\}$
  base orthogonale de $W_k = Vect\{x_1, \dots, x_k\}$ (et donc $= Vect\{v_1, \dots, v_k\}$)
  On pose $v_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{<x_{k+1}|v_j>}{<v_j|v_j>} v_j$
  v_{k+1} n'est pas nul car sinon $x_{k+1} \in W_k$ or c'est impossible
  Si $v_{k+1} \in W_{k+1}$ (ainsi que $v_1, \dots, v_k$)
  $< v_{k+1}|v_l > = < x_{k+1}|v_l > - \sum_{j=1}^{k} \frac{<x_{k+1}|v_j>}{<v_j|v_j>} < v_j|v_l >$
  $= < x_{k+1}|v_l > - \frac{<x_{k+1}|v_l>}{<v_l|v_l>} < v_l|v_l >$
  $= 0$
  La famille $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nul.
  $Vect\{v_1, \dots, v_{k+1}\} \subset W_{k+1}$ de dim $k + 1$

$Vect\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ est aussi de dimension k + 1 car libre

On en déduit donc que $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ est une base orthogonale de W_{k+1}

- On conclut par principe de récurrence, car pour tout $1 \leq k < p \qquad H_k \Rightarrow H_{k+1}$

Le passage à la base orthonormée est une évidence.

<u>Exemple:</u> Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $x_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$V_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad ||v_1||^2 =< v_1|v_1 >= 3$ donc $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{<x_2|v_1>}{<v_1|v_1>}v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix}\frac{-2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} \qquad ||v_2||^2 =< v_2|v_2 >= \frac{2}{3} \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

$v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{<x_3|v_1>}{<v_1|v_1>}v_1 - \frac{<x_3|v_2>}{<v_2|v_2>}v_2$

$v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{-2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$||v_3||^2 =< v_3|v_3 >= \frac{1}{2} \qquad u_3 = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$