Exerice 7

$Mat_B(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Ou $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^{\perp} \right\}$

$Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^{\perp} = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 | x+y=0\} = \begin{cases} x = -y \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

$Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^{\perp} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Vect\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Donc B $= Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Soit la matrice P' de passage de B à B_3

$P' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$(P')^-1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
Mat_{B_3}(P) &= P' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (P')^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Méthode 2: $Vect\{(1,1,0)^T\} = D$

$S_D = 2P_D - Id_3$

$$P_D(x) = \frac{\langle x|(1,1,0)^T\rangle}{\langle(1,1,0)^T|(1,1,0)^T\rangle}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$S_D\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 2P_D\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$S_D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$S_D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\cdot 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Donc $S = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

2- Soit le plan d'eq $x - y + z = 0$

On a alors $v = (1,-1,1)$ un vecteur orthogonal au plan

Soit F $= Vect\{(1,-1,1)\}$

On a $Q_F = 2P_F - Id_3$

$$P_F = \frac{\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{x-y+z}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x}{3}-\frac{y}{3}+\frac{z}{3}\\-\frac{x}{3}+\frac{y}{3}-\frac{z}{3}\\\frac{x}{3}-\frac{y}{3}+\frac{z}{3}\end{pmatrix}$$

On en déduit la matrice $P_F = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3- Une matrice M est orthogonale si $MM^T = M^TM = Id$

On calcule $SS^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule $QQ^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

λ est une valeur propre de M si $det(M - \lambda I) = 0$

On a montré que S est la matrice d'une d'une symétrie orthogonal $\Rightarrow$ donc S diagonalisable:

$Sp(s) \subseteq \{-1, 1\}$. Or si $Sp(s) = \{1\}$ ou $Sp(s) = \{-1\}$, cela voudrait dire que S est semblable à I_3 ou à $-I_3$ et donc $S = \pm I_3$ ce qui n'est pas le cas

Donc $\boxed{Sp(S) = \{-1, 1\}}$

De même pour Q $\boxed{Sp(Q) = \{-1, 1\}}$