Exerice 9

Soit $R > 0$
$P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

On sait que $\lim_{n\to\infty} P_n$ est la série entière de e^x qui a pour Rayon de convergence $R = +\infty$

Donc P_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction e^x

On a donc que $\exists n_R \in \mathbb{N}$ tq pour tout les entiers $n \geq n_R$, les fonctions $P_n - e$ soit bornée sur [-R, R]
Càd: soit $\epsilon = \exp\left(\frac{-R}{2}\right) > 0$ on a que $\exists n_R \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_R$ on a $||P_n - e||_{\infty,[-R,R]} < \epsilon$
Or e est strictement croissant sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in [-R, R]$, $e^x \geq e^{-R}$

$\epsilon > ||P_n - e||_\infty \geq ||P_n - e^{-R}||_\infty$

$\Rightarrow \forall x \in [-R, R]$ on a que $|P_n(x) - e^{-R}| < \epsilon$

$\Rightarrow e^{-R} - \epsilon < P_n(x) < e^{-R} + \epsilon$

$\Rightarrow e^{-R} - e^{-R/2} < P_n(x) < e^{-R} + e^{-R/2}$

Or $e^{-R} - e^{-R/2} > 0$, donc:

$\Rightarrow 0 < P_n(x) < e^{-R} + e^{-R/2}$

Donc $P_n(x)$ n'admet pas de racine réelle sur $[-R, R]$ $\forall n \geq n_R$