Notes de cours du MEU 251

Cours 1

Rappels sur les suites réelles ou complexes

Définition 0.1. *On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ réelle (ou complexe) converge s'il existe un réel (ou complexe) l tel que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon).$$

Proposition-Définition 0.1. *Si un tel réel (ou complexe) l existe, il est unique. On dit que l est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.*

L'ennui, c'est que cela nous oblige à estimer la distance $|u_n - l|$ et il faut donc connaître l a priori. Voici deux critères qui permettent de s'en passer.

Proposition 0.2. *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle croissante et majorée (ou décroissante et minorée), alors elle converge.*

Exercice. Montrer que la suite définie par $u_0 = \pi/2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$ est une suite convergente.

Proposition 0.3. *(Cauchy) La suite réelle (ou complexe) $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si*

$$(*) \qquad \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, (p \geq n_\epsilon \text{ et } q \geq n_\epsilon \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \epsilon).$$

Une suite qui possède la propriété $(*)$ est appelée *suite de Cauchy*. Il est facile de montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy. Ce que dit le théorème précédent, c'est que la réciproque est également vraie lorsqu'on considère des suites réelles ou complexes. Vous avez démontré cela en L1.

1 Suites de fonctions

1.1 Un exemple historique modifié

Newton pose en 1671 ce qui est une des premières équations différentielles ordinaires (EDO). Elle s'écrit avec les notations d'aujourd'hui :

$$y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy.$$

Il cherche la solution de cette équation qui vérifie en outre la condition $y(0) = 0$ par le moyen d'une série infinie dont il obtient les termes récursivement. Pour simplifier les calculs, on va expliquer sa méthode sur un exemple plus simple. On cherche à résoudre

$$(E): \quad y'(x) = y(x), \quad y(0) = 1$$

où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Newton aurait pu écrire successivement : $y(x) = 1 + \cdots$, puis en injectant dans l'équation $y'(x) = 1 + \cdots$ et en intégrant $y(x) = 1 + x + \cdots$. On recommence $y'(x) = 1 + x + \cdots$, donc $y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$, puis $y'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$, ce qui donne en intégrant (toujours avec la condition $y(0) = 0$) $y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \cdots$

On voit surgir les fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. En imitant toujours Newton, on arrête le processus au rang $n = 6$ et on représente les courbes C_n des fonctions f_n pour n allant de 1 à 6 sur, disons, l'intervalle $[-3; 2]$. (Je ne les dessine pas toutes.)

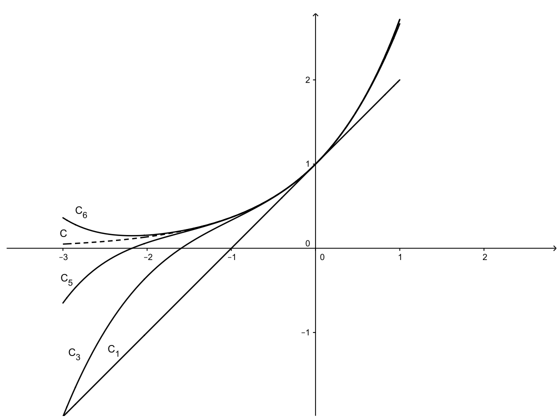


Figure 1: Procédé de Newton

On voit que les courbes C_n semblent de plus en plus proches de la courbe C d'une certaine fonction f. Il va falloir maintenant préciser.
1) Est-ce que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge, dans un sens à préciser, vers une fonction f ?
2) Quelles propriétés la fonction f ainsi obtenue possède-t-elle ? Est-elle continue ? dérivable ?...
3) Est-elle solution de l'équation (E) ?

Dans tout ce qui suit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de fonctions toutes définies sur un même intervalle d'intérieur non vide $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

1.2 La convergence simple

Définition 1.1. *a) On dit que la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en un point x_0 de I si la suite de nombres réels (ou complexes) $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ (ou*

$\mathbb{C}$).
b) On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I *si elle converge en tout point* x_0 *de* I.
c) On peut dans ce cas (dans le cas b)) définir sur I *la fonction* f *en posant pour tout* $x_0 \in I$, $f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$. *On dit alors que la fonction* f *est la limite simple sur* I *de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On dit aussi que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge simplement sur* I *vers la fonction* f. *Mathématiquement, on écrit*

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists n_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}, (n \geq n_{\epsilon,x} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon).$$

Exemple 1

$$\text{Pour } n \geq 1, \quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx + x^2}{n}. \tag{1.1}$$

Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x + \frac{x^2}{n} = x$. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto x$.

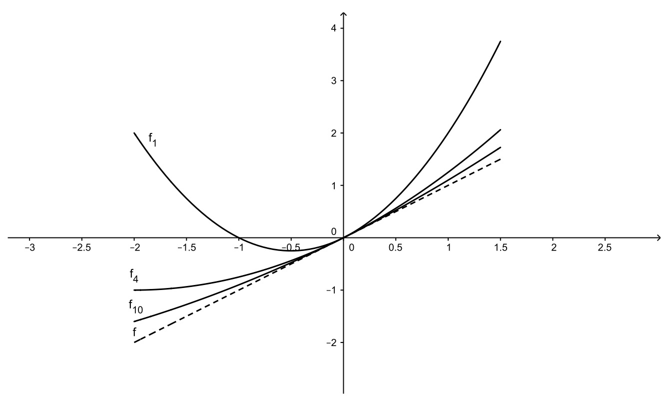


Figure 2: Exemple 1

Exemple 2

$$\text{Pour } n \geq 1, \quad f_n : [0;1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n. \tag{1.2}$$

Pour $x \in [0;1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et pour $x = 1$, bien sûr, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Exemple 3

$$\text{Pour } n \geq 1, \quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}. \tag{1.3}$$

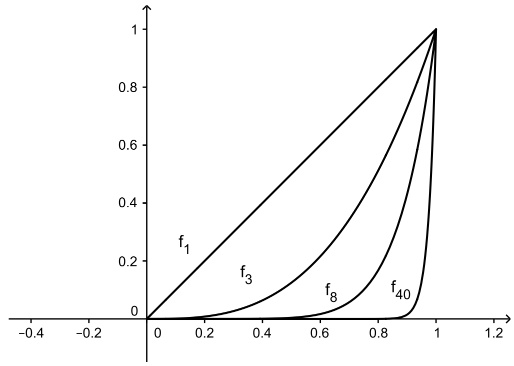


Figure 3: Exemple 2

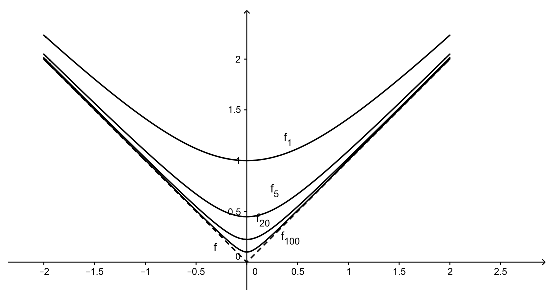


Figure 4: Exemple 3

On voit tout aussi facilement que cette suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$.

Exemple 4

$$\text{Pour } n \geq 1, \quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k. \tag{1.4}$$

On calcule $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour $x \neq 1$ et $f_n(1) = n+1$. Si $|x| < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$. Si $x \notin]-1,1[$, la suite de réels $(f_n(x))_{n\geq 0}$ diverge. Il en résulte que suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Remarque. On remarque que la fonction limite f d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ qui converge simplement sur I peut ne pas hériter des propriétés sympathiques dont jouissaient les fonctions f_n. Ainsi, dans l'exemple 4, les fonctions f_n sont toutes bornées sur $]-1,1[$ mais la fonction limite f n'est pas bornée sur $]-1,1[$ (car $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$). Dans l'exemple 2, la continuité des fonctions f_n n'a pas été transmise à la fonction limite f qui est discontinue en $x = 1$. Dans l'exemple 3, les fonctions f_n sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ mais la fonction limite f n'est pas dérivable en 0.

On a néanmoins le résultat suivant (qu'on verra au cours 2):

Proposition 1.2. *Si les fonctions f_n sont toutes croissantes (respectivement décroissantes) sur l'intervalle I et si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers la fonction f, alors f est croissante (respectivement décroissante) sur I.*

1.3 La convergence uniforme (Weierstrass 1841)

On examinera plus en détails au prochain cours (cours 2) l'exemple 2 et le phénomène qui semble causer la discontinuité en $x = 1$ de la fonction limite.

Pour éviter l'apparition d'une telle discontinuité (alors que toutes les fonctions f_n sont continues), il serait bien d'imposer **une même vitesse de convergence** des suites $(f_n(x))_{n\geq 0}$ vers $f(x)$ **pour tous les** $x \in I$.

Définition 1.3. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers une fonction limite f* **uniformément** *sur I si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon \Rightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon).$$

Il est bien à ce niveau de souligner la différence entre les notions de *convergence simple sur I* et de *convergence uniforme sur I* en mettant en regard les deux définitions mathématiques. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f simplement sur I si

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists n_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon).$$

Ici, le $n_{\epsilon,x}$ dépend a priori de ϵ et de x (voir l'analyse de l'exemple 2 au cours 2). La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon \Rightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon).$$

Ici, le n_ϵ ne dépend plus de x, il dépend seulement de ϵ.

Il est alors facile de démontrer la proposition suivante.

Proposition 1.4. *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur I alors elle converge vers f simplement sur I.*

Un critère de convergence uniforme On remarque que si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers la fonction f alors il existe un certain rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous les entiers $n \geq n_1$ les fonctions $f_n - f$ soient bornées sur I. Pour $n \geq n_1$, on introduit la quantité

$$||f_n - f||_{\infty, I} := \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

On voit alors que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers la fonction f si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty, I} = 0$.

Exercice. Montrer que, dans l'exemple 3, la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Fin du cours 1.

Cours 2

On est revenu sur le fait que, en général, les propriétés des fonctions f_n de la suite considérée ne se transmettent pas à la fonction limite simple de cette suite. On a rappelé néanmoins la proposition 2. Puis on est revenu sur la nécessité d'introduire une nouvelle notion de convergence, **la convergence uniforme**.

Cette nécessité est illustrée par l'examen de l'exemple 2 et du phénomène qui provoque la discontinuité en $x = 1$ de la fonction limite. On remarque que, plus on choisit x proche de 1, plus la suite $(x^n)_{n\geq 1}$ converge *lentement* vers 0. En effet, si on veut pour une précision $\epsilon > 0$ donnée, avoir $0 < x^n \leq \epsilon$, il faut et suffit de choisir $n \geq \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(x)} = n_{\epsilon,x}$. Par exemple, on se donne $\epsilon = 0,01$. Pour $x = 0,9$ il faut imposer $n \geq 44$, mais pour $x = 0,99$ il faut $n \geq 459$!

Pour éviter l'apparition d'une telle discontinuité (alors que toutes les fonctions f_n sont continues), il serait bien d'imposer **une même vitesse de convergence** des suites $(f_n(x))_{n\geq 0}$ vers $f(x)$ **pour tous les** $x \in I$. On a donc rappelé la définition 3 de la convergence uniforme sur un intervalle I d'une suite de fonctions et du critère utile associé.

On a enfin rappelé la proposition 4 qui dit que la convergence uniforme implique la convergence simple.

Remarque. Ainsi, dans la pratique, on peut d'abord chercher à déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée et, si cette limite simple existe, on étudie alors la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers cette limite simple f en calculant la quantité $||f_n - f||_{\infty,I}$ et en regardant sa limite quand n tend vers $+\infty$.

On corrige maintenant l'exercice de la page précédente (à propos de l'exemple 3). La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ est définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ pour tout x réel. On a vu que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f *valeur absolue.* On étudie la convergence uniforme de la suite en majorant la différence :

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{1/n}{1/\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On en déduit que $||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,\mathbb{R}} = 0$. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$. (Voir figure 3.)

On revient maintenant sur l'exemple 2 de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ des fonctions f_n définies par $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrons que $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$ vers sa fonction limite simple f. On sait que $f = 0$ sur $[0,1[$. Et on a $||f_n - f||_{\infty,[0,1[} = \sup\limits_{x\in[0,1[} x^n = 1$. On conclut.

Par contre, si a est un réel dans $]0,1[$, alors cette suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,a]$. En effet, on a $||f_n - f||_{\infty,[0,a]} = \sup\limits_{x\in[0,a]} x^n = a^n$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Il faut retenir ceci : il peut y avoir convergence uniforme sur tous les J sous-intervalles stricts de l'intervalle I sans qu'il y ait convergence uniforme sur I.

Traduction graphique. Pour illustrer la notion de convergence uniforme sur I de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, on représente C le graphe de f et, pour $\epsilon > 0$ donné, la bande B_ϵ centrée sur C définie par $B_\epsilon = \{(x, y)/x \in I, y \in [f(x) - \epsilon; f(x) + \epsilon]\}$. Il existe alors un rang n_ϵ ne dépendant que de ϵ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$ le graphe C_n de f_n soit contenu dans cette bande B_ϵ. (Voir figure 5.)

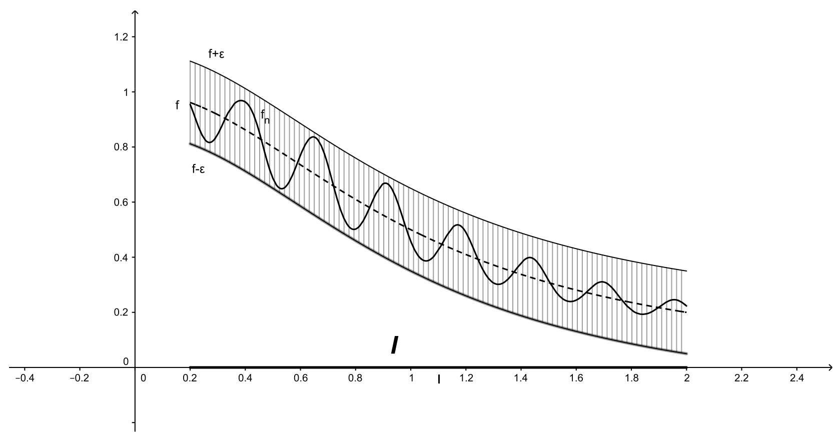


Figure 5: Quand $n \geq n_\epsilon$, le graphe de f_n est dans la bande B_ϵ.

On revient à l'exemple 2 : pour $\epsilon < 1/2$, le graphe C_n de f_n sort toujours de la bande $B_\epsilon = \{(x, y)/x \in [0; 1[, y \in [f(x) - \epsilon; f(x) + \epsilon]\}$ pour tous les entiers $n \geq 1$. On en déduit que la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ vers la fonction limite simple f n'est pas uniforme sur $[0; 1[$.

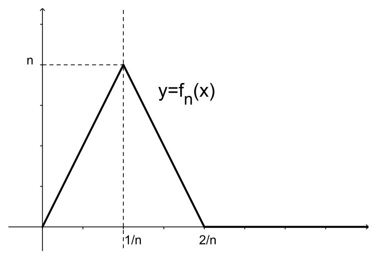
Allez ! Deux derniers petits exemples pour la route.(En cours, on n'a regardé que les triangles qui s'écrasent sur l'axe des ordonnées)

Exemple 5 : des triangles qui s'écrasent sur l'axe des ordonnées ou qui glissent vers l'infini.

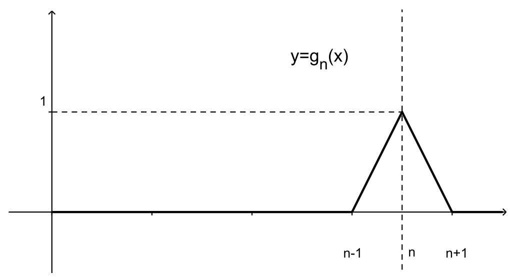
On considère les fonctions f_n et g_n définies sur $\mathbb{R}^+$ représentées ci-dessous et définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n}[\\ -n^2 x + 2n & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ; g_n(x) = \begin{cases} x - n + 1 & \text{si } x \in [n-1; n[\\ n + 1 - x & \text{si } x \in [n; n+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.5)$$

Il n'est pas difficile de voir que les suites $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ convergent toutes les deux simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle. En effet, on note que $f_n(0) = 0$ pour



(a) Des triangles qui s'écrasent sur l'axe des ordonnées



(b) Des triangles qui glissent vers l'infini

Figure 6: Exemple 5

tout $n \geq 1$ et $f_n(x) = 0$ pour $x > 0$ dès que $n \geq 2/x$ d'une part, et d'autre part $g_n(x) = 0$ pour $x \geq 0$ dès que $n \geq x + 1$. En revanche, on a $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - 0| = f_n(1/n) = n$ et $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |g_n(x) - 0| = g_n(n) = 1$, et on en déduit que la convergences de ces deux suites n'est pas uniformes sur $\mathbb{R}^+$.

1.4 Propriétés d'une limite uniforme

1.4.1 Bornitude

On laisse à titre d'exercice la démonstration du résultat suivant.

Proposition 1.5. *On suppose que les fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}($ ou $\mathbb{C})$ sont bornées sur I et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction f. Alors f est bornée sur I.*

En conséquence, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ de l'exemple 4 ne converge pas uniformément sur $]-1;1[$. En effet, on a pour tout $x \in]-1;1[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x} := f(x)$. Les f_n sont bornées sur $]-1;1[$ mais f n'est pas bornée sur ce même intervalle $]-1;1[$.

1.4.2 Continuité

Le théorème suivant est important.

Proposition 1.6. *On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On fait les hypothèses suivantes.*
(H1) : les fonctions f_n sont continues en un point c de I.
(H2) : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur I.
Alors f est continue au point c.

Si les fonctions f_n sont continues sur I et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur I alors f est continue sur I.

Preuve. On veut démontrer la continuité de f en c. On se donne donc $\epsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe un voisinage de c tel que pour tout x dans ce voisinage on ait $|f(x) - f(c)| \leq \epsilon$. La démonstration se fait en cassant $|f(x) - f(c)|$ *en trois morceaux.* (On dit aussi qu'*on coupe les epsilons en trois.*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(c)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c)| \\
&\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| \\
&\leq \|f - f_n\|_{\infty,I} + |f_n(x) - f_n(c)| + \|f - f_n\|_{\infty,I} \\
&\leq 2\,\|f - f_n\|_{\infty,I} + |f_n(x) - f_n(c)|. \quad (*)
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $(H2)$ (hypothèse de convergence uniforme sur I), il existe N (ne dépendant que de ϵ) tel que

$$\|f - f_N\|_{\infty,I} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Mais cette fonction f_N est continue en c (hypothèse $(H1)$), donc il existe $\eta > 0$ (ne dépendant que de ϵ et du point c) tel que pour tout $x \in I$, si on impose $|x - c| \leq \eta$ alors

$$|f_N(x) - f_N(c)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

On choisit alors $n = N$ dans l'inégalité $(*)$ et on en déduit que, pour tout $x \in I$, si $|x - c| \leq \eta$ alors

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(c)| &\leq 2\,\|f - f_N\|_{\infty,I} + |f_N(x) - f_N(c)| \\
&\leq 2\,\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que f est continue en c. La deuxième partie du théorème s'en déduit. □

Remarques i) Il est intéressant de considérer la contraposée. Elle dit que si les f_n sont continues sur I et si la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas continue sur I alors la convergence ne peut pas être uniforme sur I. (Voir l'exemple 2.)

ii) Attention ! On peut avoir la situation suivante (voir entre autres l'exemple 5) : les f_n sont continues sur I, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue, mais la convergence n'est pas uniforme sur I.

1.4.3 Interversion limite-intégrale

On peut montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f, alors celle-ci est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Mais ici, on va considérer un cas élémentaire, celui des fonctions continues. Le problème qui nous préoccupe est illustré par l'exemple suivant.

Exemple. Imaginez que l'on veuille calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\,dx$. On a envie d'intervertir la limite quand n tend vers l'infini et le signe intégrale et d'écrire

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\,dx &= \int_0^1 \lim_{n\to+\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\,dx\\ &= \int_0^1 |x|\,dx\\ &= [x^2/2]_0^1 = 1/2.\end{aligned}$$

Cette manipulation est-elle autorisée ? Pas toujours ! Pensez à l'exemple 5 des triangles s'écrasant sur l'axe des ordonnées. Dans cet exemple, les intégrales $\int_0^2 f_n(t)\,dt$ valent toutes 1 et pourtant la limite simple de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est la fonction nulle dont l'intégrale $\int_0^2 f(t)\,dt$ vaut donc 0.

Le théorème suivant nous donne une condition suffisante pour que l'interversion soit licite.

Proposition 1.7 (Permutation limite-intégrale)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On suppose que cette suite converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f qui est donc continue sur $[a, b]$. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt.$$

Fin du cours 2

Cours 3

On est revenu sur la proposition 7 dont voici une démonstration.

Preuve. On écrit simplement :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| &\leq \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,dt,\\ &\leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|,\end{aligned}$$

et on conclut en faisant tendre n vers $+\infty$. □

Remarque. L'hypothèse de convergence uniforme est importante. Dans l'exemple 5, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,2]$ vers la fonction f nulle, mais pas uniformément sur $[0,2]$. On a $\displaystyle\int_0^2 f_n(t)\,dt = 1$ pour tout $n \geq 1$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^2 f_n(t)\,dt \neq \int_0^2 f(t)\,dt$.

1.4.4 Dérivabilité

Comme indiqué dans une remarque qui suivait les exemples 1, 2, 3 et 4, la convergence simple (et même uniforme !) d'une suite de fonctions dérivables ne suffit pas à préserver le caractère dérivable de la fonction limite (voir l'exemple 3). Mais on a le théorème suivant.

Proposition 1.8. *On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions f_n définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On fait les hypothèses suivantes.*
(H1) : les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
(H2) : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction f ;
(H3) : la suite des dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une certaine fonction g .
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et (bonus !) sa dérivée f' est égale à g.

Preuve. Soit a un point fixé dans I. Pour tout x dans I, on écrit (voir l'hypothèse (H1))

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)\,dt.$$

L'hypothèse (H2) dit que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$f_n(a) \to f(a) \quad \text{et} \quad f_n(x) \to f(x),$$

tandis que les hypothèses (H1) et (H3) permettent d'affirmer que g est continue comme limite uniforme sur I des fonctions continues f'_n. On permute limite et intégrale (proposition 7) et on obtient

$$\int_a^x f'_n(t)\,dt \to \int_a^x g(t)\,dt.$$

On en déduit

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Ce qui prouve que f est une primitive sur I de la fonction continue g. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a $f' = g$. □

Remarque On voit que la définition 3 de la convergence uniforme suppose qu'on connaisse la fonction limite simple. On va donner un critère de convergence uniforme qui ne nécessite pas de connaitre cette limite a priori.

1.4.5 Critère de Cauchy uniforme

Proposition 1.9 (Critère de Cauchy uniforme)**.** *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Elle converge uniformément sur I vers une certaine fonction f si et seulement si*

(P) $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, (n \geq n_\epsilon$ *et* $m \geq n_\epsilon \Rightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon)$.

Si une suite de fonctions vérifie (P), on dit que c'est une suite uniformément de Cauchy sur I.

Preuve. L'implication directe est facile. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_ϵ tel que pour tout entier $n \geq n_\epsilon$, on a pour tout $x \in I$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/2$ et donc, pour tous les entiers $n, m \geq n_\epsilon$, on a pour tout $x \in I$ $|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. On a utilisé l'inégalité triangulaire. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniformément de Cauchy sur I.

Voyons l'implication réciproque et supposons que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniformément de Cauchy. On voit que pour tout x fixé dans I, la suite de réels (ou de complexes) $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$) et elle est donc convergente (grâce au caractère complet de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$) vers une limite qu'on note $f(x)$. On a donc montré que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers la fonction f qui à x associe la limite $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Montrons maintenant que la convergence de $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniforme sur I. Soit $\epsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniformément de Cauchy, il existe un entier n_ϵ tel que pour tous les $n \geq n_\epsilon$ et tous les $m \geq n_\epsilon$, on a pour tout $x \in I$, $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$. On fait tendre m vers $+\infty$ et on obtient : pour tout $x \in I$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ dès que $n \geq n_\epsilon$. Ce qui conclut. □

On est revenu alors sur la notion de norme de la convergence uniforme.

Définition et notation Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur I à valeurs réelles. (On peut considérer de même $\mathcal{B}(I, \mathbb{C})$.) Pour toute fonction f dans $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, on note $\|f\|_{\infty,I} := \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$.

Remarques 1) L'application de $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à f associe $\|f\|_{\infty,I}$ est une norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ appelé norme de la convergence uniforme sur I. En particulier, on a l'inégalité triangulaire (démontrez-la !) $\|f + g\|_{\infty,I} \leq \|f\|_{\infty,I} + \|g\|_{\infty,I}$.

2) La distance uniforme entre deux fonctions f et g de $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ est définie par $d_{\infty,I} := \|f - g\|_{\infty,I}$. On illustre cette notion dans le cas particulier où I est un segment fermé $[a; b]$ et f et g sont des fonctions continues sur I. Comme la fonction différence $f - g$ est continue sur $I = [a; b]$, elle y est bornée et y atteint ses bornes. Il existe donc (au moins un) $x_0 \in [a; b]$ tel que $d_{\infty,I}(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$. (Voir la figure 7.)

3) Ainsi, une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ converge uniformément sur I vers f (on sait alors que f est dans $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ par la proposition 5) si et seulement si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans l'espace vectoriel $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur I.

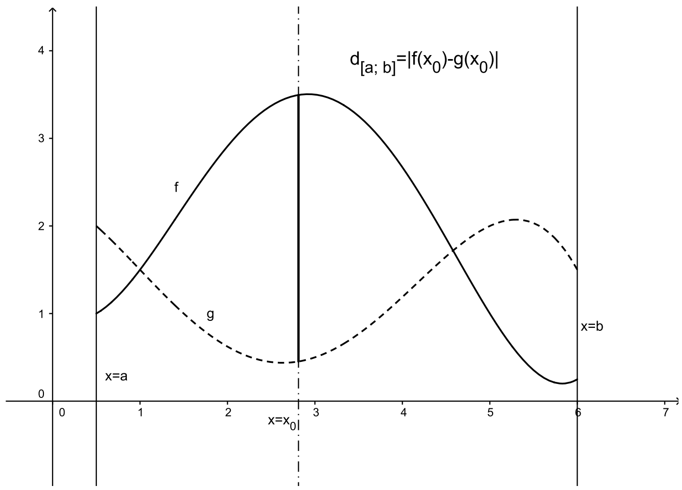


Figure 7: Distance entre deux graphes de fonctions continues

4) On a montré (voir la proposition 9) que l'espace vectoriel $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur I est complet.

Exercice. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ deux suites dans $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Montrer que la suite $(f_n g_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers fg.

2 Séries de fonctions

2.1 Convergence simple, convergence uniforme

Définition 2.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions toutes définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle série de fonctions de terme général f_n, notée $\sum_{n\geq 0} f_n$, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où*

$$S_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.2. *a) On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I. Cela revient à dire que, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge.*

Lorsque c'est le cas, la limite simple de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la fonction S qui à $x \in I$ associe la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$. On a, pour tout $x \in I$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

b) On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers S.

Remarque pratique. On peut d'abord essayer de montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers S, c'est-à-dire que la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge pour tout $x \in I$. Dans ce cas, on peut définir sur I le reste R_n d'ordre n de la série de fonctions en posant, pour tout $x \in I$, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

On a alors $S(x) - S_n(x) = S(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = R_n(x)$ pour tout $x \in I$.
Et la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ convergera uniformément sur I si et seulement si $\|S - S_n\|_{\infty,I} = \|R_n\|_{\infty,I}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exemple 6 Soit $f_n(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Pour tout x dans $]-1,1[$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge. Autrement dit, la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$. Plus précisément, on a $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Si $x \in]-1,1[$, on a $S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}$. Il en résulte $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$. Puisqu'on a $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x^{n+1}}{1-x} = +\infty$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, il est clair que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

Par contre pour $a \in]0,1[$, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$

$$\|R_n\|_{\infty,[-a,a]} = \sup_{x\in[-a,a]} |R_n(x)| = \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Comme $\frac{a^{n+1}}{1-a}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniforme sur $[-a,a]$.

On a le critère nécessaire suivant.

Proposition 2.3. *Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I alors nécessairement la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle, c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\infty,I} = 0$.*

Attention ! Ceci n'est pas une condition suffisante pour que la série converge uniformément sur I.

2.2 Convergence normale

Il n'est pas toujours facile de montrer qu'une série de fonctions converge uniformément. Weierstrass a donc inventé une notion plus maniable.

Définition 2.4 (Convergence normale)**.** *On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I si*

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur I ;*
- *et la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.*

Le théorème qui suit montre l'utilité de la notion de convergence normale.

Proposition 2.5. *Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur I, alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur I.*

Fin du cours 3

Cours 4

Avant de donner la démonstration de la proposition 2.5, on donne une définition de la convergence normale équivalente (je ne refais pas ici la démonstration de cette équivalence) à celle de la définition 2.4.
Définition 2.4 bis (convergence normale) On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I quand il existe une suite de réels positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$, on a $|f_n(x)| \leq a_n$;
- la série numérique des majorants $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

Exemple 7 Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$, $n \geq 1$. On a pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq 1/n^2$. Comme la série des majorants $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ est une série de Riemann convergente, on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On démontre la proposition 2.5.

Preuve. On suppose que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I. Il existe donc une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs telle que pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in I$ on ait $|f_n(x)| \leq a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergente. Grâce à l'inégalité triangulaire, on a pour $m > n$, $|S_m(x) - S_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^m f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m a_k$, donc

$$\|S_m - S_n\|_{\infty,I} \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k = A_m - A_n$$

où $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Comme la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m > n \geq n_\epsilon$, on ait $\|S_m - S_n\|_{\infty,I} \leq A_m - A_n \leq \epsilon$. On a donc montré que la suite des sommes partielles de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ est uniformément de Cauchy sur I. On conclut. $\square$

On note donc les implications suivantes.

CV normale sur $I \Longrightarrow$ CV uniforme sur $I \Longrightarrow$ CV simple sur I

Attention ! Une série de fonctions peut converger uniformément sur I sans pour autant converger normalement sur I. Pour illustrer cela, on considère l'exemple suivant.

Exemple 8 Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{x+n}$, $n \geq 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{x+n}$ est une série qui vérifie les hypothèses du critère des séries alternées : elle est alternée, le terme $|f_n(x)| = \frac{1}{x+n}$ décroit en n et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}^+$. On considère maintenant le reste d'ordre n de cette série. On a, grâce au bonus du critère des séries alternées,

$$|R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x+k}| \leq \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit $\|R_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leq 1/(n+1)$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

En revanche, on a : $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |(-1)^n \frac{1}{x+n}| = \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Ce qui montre que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

2.3 Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Dans cette partie, on énonce dans le cadre des séries de fonctions les résultats démontrés dans le chapitre précédent à propos des suites de fonctions. Il s'agit donc d'un rappel. Les démonstrations se font en appliquant à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ les théorèmes correspondants.

Proposition 2.6 (Continuité). *On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On fait les hypothèses suivantes.*
(H1) : les fonctions f_n sont continues en un point c de I.
(H2) : la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge vers S uniformément sur I.
Alors la fonction S somme de la série est continue au point c.

Si les fonctions f_n sont continues sur I et si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge vers S uniformément sur I alors la fonction somme S est continue sur I.

Proposition 2.7 (Dérivabilité). *On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On fait les hypothèses suivantes.*

(H1) : les fonctions f_n sont de classe C^1 sur I.
(H2) : la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I. On note S sa fonction somme.
(H3) : la série des dérivées $\sum_{n\geq 0} f'_n$ converge uniformément sur I vers une certaine fonction g.
Alors S est de classe C^1 sur I et sa dérivée S' est égale à g ; autrement dit, on peut écrire que pour tout $x \in I$, on a $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

Exemple 8(le retour) Les fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{x+n}$, pour $n \geq 1$, sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. On a $f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$ donc $\|f'_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = 1/n^2$. La série $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge donc la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$, donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que la fonction somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout x dans $\mathbb{R}^+$, on a $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$.

On a également un résultat concernant la permutation série-intégrale.

Proposition 2.8 (Permutation série-intégrale). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers sa somme S qui est donc continue. Alors*

- *la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$ converge,*
- *on peut intervertir série et intégrale*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Remarque. Dans les 3 théorèmes précédents, on peut remplacer l'expression *converge uniformément sur I* par *converge normalement sur I*.

Fin du cours 4.

Cours 5

2.4 Quelques applications

Application 1 : la fonction exponentielle On revient à l'exemple qui introduisait le chapitre I. Pour approcher la solution du problème $(E) : y' = y$, $y(0) = 1$, on a utilisé une méthode due à Newton. (En fait, à ce niveau, on ne sait pas que ce problème a une solution et que celle-ci est unique, mais on fait comme si c'était le cas.) On a vu apparaître la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$.

a) On peut voir cette suite de fonctions comme la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ où $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ (par convention, on note $0! = 1$ et donc on a $f_0(x) = 1$). Or pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge grâce au critère de d'Alembert. En effet, pour $x \neq 0$ le quotient $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}/\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui montre que la série numérique converge absolument, donc converge. Pour $x = 0$, la série converge évidemment. Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On peut alors définir sur $\mathbb{R}$ la fonction S somme de la série de fonctions en posant $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. On appelle cette fonction *la fonction exponentielle*. Remarquez qu'on peut définir la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ en posant, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ puisque cette série converge absolument. On va pour le moment s'intéresser à la fonction de la variable réelle $x \mapsto S(x)$.

b) On fixe un réel $a > 0$ et on constate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| = |x^n/n!| \leq a^n/n!$ pour tout $x \in [-a, a]$. Or le terme $a_n = a^n/n!$ est le terme d'une série convergente. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge donc normalement sur $[-a, a]$. Comme les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction exponentielle S est continue sur tous les segments $[-a, a]$, donc S est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Les fonctions f_n sont de classe C^1 et $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f_{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$, tandis que $f_0'(x) = 0$. On montre donc facilement que la série $\sum_{n\geq 0} f_n' = \sum_{n\geq 1} f_n' = \sum_{n\geq 0} f_{n-1} = \sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$. Il en résulte que S est de classe C^1 sur tous les $[-a, a]$. On en déduit que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a $S'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x) = S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) On a par ailleurs $S(0) = 1$. La fonction S est donc solution du problème introductif (E).

e) C'est même l'unique solution de de (E). Montrons l'unicité. Si U est également une solution de (E), on considère la fonction $P : x \mapsto U(x)S(-x)$. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $P'(x) = U'(x)S(-x) - U(x)S'(-x) = U(x)S(-x) - U(x)S(-x) = 0$. On a donc $P(x) = Cte = P(0) = U(0)S(0) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a montré que, pour toute solution U de (E), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x)S(-x) = 1. \tag{1}$$

En particulier, si on applique ce petit résultat préliminaire au cas $U = S$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x)S(-x) = 1. \tag{2}$$

Dans l'égalité (1), on multiplie les deux membres par $S(x)$, et en utilisant (2) on obtient : $U(x) = U(x)S(-x)S(x) = S(x)$. On a démontré l'unicité. On résume en énonçant la proposition suivante.

Proposition 2.9. *Il existe une unique fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui vérifie (E) : $y' = y$, $y(0) = 1$. On l'appelle fonction exponentielle et elle est donnée pour tout x réel par*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On liste maintenant quelques propriétés de la fonction exponentielle S.

f) On a vu (voir l'égalité (2)) que $S(x)S(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que S ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Comme de plus elle est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors qu'elle ne change pas de signe, et qu'elle est donc strictement positive puique $S(0) = 1$.

e) On a donc $S'(x) = S(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et S est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

g) On a, pour tout entier $m \geq 1$ et tout réel $x \geq 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} \geq \frac{x^m}{m!}$. On en déduit que $S(x)$ tend vers $+\infty$ plus vite que toute puissance de x quand x tend vers $+\infty$. On en déduit, grâce à (2), que $\lim\limits_{x \to -\infty} S(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} S(-x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{S(x)} = 0$.

g) Il en résulte que S est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ grâce au théorème de la bijection.

On va démontrer maintenant la relation fondamentale suivante.

Proposition 2.10. *Pour tous complexes x et y, on a :*

$$S(x + y) = S(x)S(y).$$

Pour démontrer cette relation dans $\mathbb{C}$, on va faire un pas de côté et définir le produit de Cauchy de deux séries numériques.

Définition 2.11 (Produit de Cauchy)**.** *Soient $\sum_{i\geq 0} a_i$ et $\sum_{j\geq 0} b_j$ deux séries dont les termes sont réels ou complexes. On appelle* **produit de Cauchy** *de ces deux séries la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ où*

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i+j=n} a_i b_j.$$

Quel est l'intérêt ? Voyez la proposition 13, et d'abord la proposition 12 en guise de hors d'oeuvre.

Proposition 2.12. *Soient $\sum_{i\geq 0} a_i$ et $\sum_{j\geq 0} b_j$ deux séries* **à termes réels positifs**. *Si ces deux séries convergent alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} c_n$ converge et*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \times \sum_{j=0}^{+\infty} b_j = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

On en déduit :

Proposition 2.13. *Soient $\sum_{i\geq 0} a_i$ et $\sum_{j\geq 0} b_j$ deux séries à termes réels ou complexes. Si ces deux séries convergent* **absolument** *alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} c_n$ converge (et même converge absolument) et*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \times \sum_{j=0}^{+\infty} b_j = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

On commence par la démonstration de la proposition 12.

Preuve. On multiplie sans se préoccuper de convergence $(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots)(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots) = a_0b_0 + a_0b_1 + a_0b_2 + \cdots + a_1b_0 + a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_2b_0 + \cdots$. On dispose les produits a_ib_j dans le tableau infini ci-après, le terme c_n apparaissant comme la somme des produits a_ib_j sur la $n+1$ ième diagonale : $c_0 = a_0b_0$, $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$, $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$, etc ... On a supposé que les deux séries à termes réels positifs $\sum_{i\geq 0} a_i$ et $\sum_{j\geq 0} b_j$ convergent et on note $A = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ et $B = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ leurs sommes. On a donc, pour tout $n \geq 0$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \leq A$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_j \leq B$.

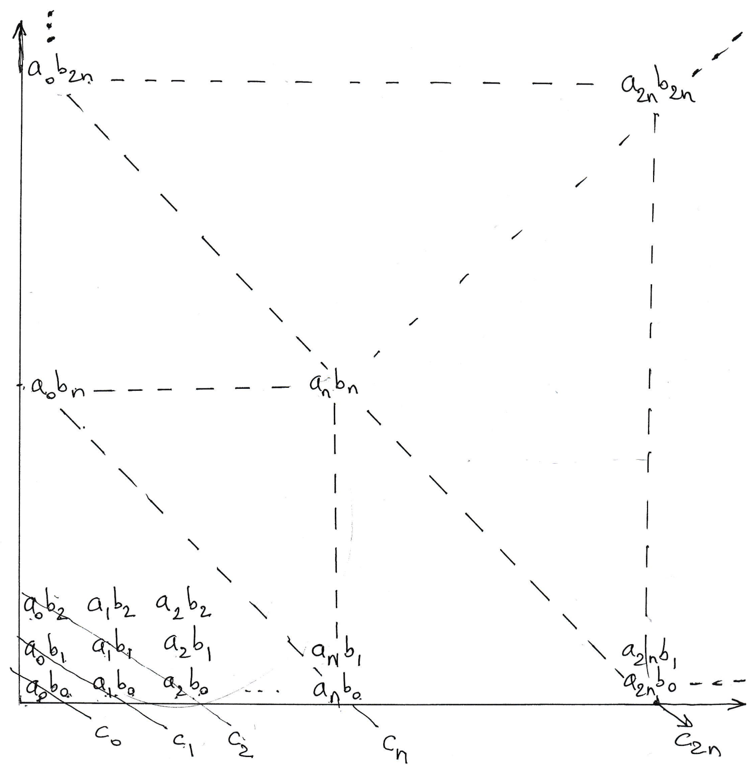


Figure 8: Tableau pour le produit de Cauchy

On a, en regardant le tableau et en n'oubliant pas que les termes a_ib_j sont positifs,

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_ib_j = \sum_{i=0}^{n} a_i \times \sum_{j=0}^{n} b_j \leq A \times B.$$

Comme les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k$ sont bornées, la séries à termes positifs $\sum_{k\geq 0} c_k$ converge. On appelle C la somme de cette série. On va calculer C.

On regarde encore le tableau et on voit l'encadrement suivant :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{i=0}^{n} a_i \times \sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k.$$

On fait alors tendre n vers $+\infty$ et on obtient $C \leq A \times B \leq C$. □

On en vient à la démonstration de la proposition 13. (On avait admis cette proposition 13 en cours.)

Preuve. Celle-ci s'appuie sur la proposition 12. On définit les réels positifs d_n en posant

$$d_n = |a_0||b_n| + |a_1||b_{n-1}| + |a_2||b_{n-2}| + \cdots + |a_n||b_0| = \sum_{i=0}^{n} |a_i||b_{n-i}| = \sum_{i+j=n} |a_i||b_j|.$$

Grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient la majoration $|c_n| = \left|\sum_{i+j=n} a_i b_j\right| \leq \sum_{i+j=n} |a_i||b_j| = d_n$. Comme les séries $\sum_{i\geq 0} |a_i|$ et $\sum_{j\geq 0} |b_j|$ convergent (hypothèse de convergence absolue), leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} d_n$ converge. Par comparaison, le produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} c_n$ converge absolument et donc il converge.

Toujours en s'aidant du tableau, on a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n} a_i b_j - \sum_{k=0}^{n} c_k\right| &= \left|\sum_{\substack{i=0\\ i+j\geq n+1}}^{2n}\sum_{j=0}^{2n} a_i b_j\right| \\
&\leq \sum_{\substack{i=0\\ i+j\geq n+1}}^{2n}\sum_{j=0}^{2n} |a_i||b_j| = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n} |a_i||b_j| - \sum_{k=0}^{n} d_k.
\end{aligned}$$

Mais toujours grâce à la proposition 12, le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En effet, $\sum_{k\geq 0} d_k$ est le produit de Cauchy des deux séries convergentes $\sum_{i\geq 0} |a_i|$ et $\sum_{j\geq 0} |b_j|$. On en déduit que le membre de gauche tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui conclut la démonstration. □

On termine par la démonstration de la proposition 10.

Preuve. Soient x et y des complexes. On sait que les deux séries $\sum_{i\geq 0} \frac{x^i}{i!}$ et $\sum_{j\geq 0} \frac{y^j}{j!}$ sont absolument convergentes. (On avait montré cela avec le critère de d'Alembert dans a) de ce cours.) D'après la proposition 13, on sait que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} \times \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{y^j}{j!} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

avec

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i y^{n-i} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

grâce à la formule du binôme de Newton. On a bien montré que $S(x)S(y) = S(x+y)$. $\square$

On rappelle que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (raisonnement par analyse-synthèse). La partie paire de la fonction exponentielle S s'appelle le cosinus hyperbolique (on le note ch ou cosh) et s'écrit $\cosh(x) = \frac{S(x)+S(-x)}{2} = \sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$ pour tout x réel. La partie impaire de la fonction exponentielle S s'appelle le sinus hyperbolique (on le note sh ou sinh) et s'écrit $\sinh(x) = \frac{S(x)-S(-x)}{2} = \sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$ pour tout x réel.

Fin du cours 5.

Cours 6

On va donner une seconde application.

Application 2 : un développement en série entière.

Je développerai la notion de **série entière** et de **développement en série entière** un peu plus loin, mais je vais démontrer tout de suite, à titre d'introduction, la proposition suivante.

Proposition 2.14. *On a l'égalité :*

$$\forall x \in [-1, 1[, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

En particulier, on a $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

Preuve. On sait que pour tout $t \in]-1, 1[$ la série $\sum_{n\geq 0} t^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$. On définit $f_n : t \mapsto t^n$.

On vérifie que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur tous les segments $[-a, a]$ où a est un réel dans $]0, 1[$.

On fixe x dans $]-1, 1[$. Comme la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[-|x|, |x|]$, on a $\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f_n(t)\, dt$. On intègre et on obtient

$$(\star) : -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m}$$

pour tout $x \in]-1,1[$. On travaille un peu plus pour obtenir l'égalité en $x=-1$. Voyons cela.

On pose $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$. Pour tous $x \in [-1,-\frac{1}{2}]$, la série $\sum_{n\geq 1} g_n(x)$ est alternée car $g_n(x) = (-1)^n \frac{|x|^n}{n}$, et comme elle vérifie les hypothèses du critère des séries alternées (vérifiez-les !), elle converge. De plus, grâce au bonus du critère des séries alternées, on peut majorer uniformément la valeur absolue du reste de rang n de cette série de fonctions :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{|x|^k}{k} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

pour tout $x \in [-1,-\frac{1}{2}]$. On en déduit que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ converge uniformément sur $[-1,-\frac{1}{2}]$. Comme les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}$ donc en $x=-1$, on en déduit que la fonction somme S de cette série de fonctions est continue en -1. La fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$ est également continue en -1. On peut donc faire tendre x vers $(-1)^+$ dans l'égalité $(\star)$, et celle-ci est donc aussi valable en $x=-1$. Ce qui conclut. $\square$

Remarque. Si on fixe $a \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-\frac{1}{2}, a]$. On a montré qu'elle converge uniformément sur $[-1,-\frac{1}{2}]$. Il en résulte donc que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ converge uniformément sur $[-1,a]$, ceci pour tout $a \in]0,1[$.

3 Séries entières

3.1 Domaine de convergence et rayon de convergence

Définition 3.1. *Une série entière (de la variable réelle) est une série de fonctions $\sum_{k\geq 0} f_k$ où les fonctions f_k sont définies par $f_k(x) = a_k x^k$, la suite $(a_k)_{k\geq 0}$ étant une suite de réels (ou de complexes). On note $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ une telle série de fonctions.*

Définition 3.2. *L'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ converge}\}$ est appelé* **domaine de convergence** *de la série entière $\sum_{\geq 0} a_n x^n$.*

Exemples 1) On a déjà rencontré la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$. Celle-ci converge sur $E=\mathbb{R}$, ce qui nous a permis de définir sur $\mathbb{R}$ sa fonction somme qu'on a appelée fonction exponentielle.

2) La série entière $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge seulement sur $E =]-1,1[$ et sa somme est $S(x) = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

3) La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge seulement sur $E = [-1,1[$. Et sa somme est $S(x) = -\ln(1-x)$ pour tout $x \in [-1,1[$.

Bien sûr, E n'est jamais vide car il contient toujours 0. Pour décrire l'ensemble E, on a besoin du lemme technique suivant.

Proposition 3.3 (lemme d'Abel)**.** *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière. Si elle converge en $x_0 \neq 0$, alors elle converge absolument (au moins) sur l'intervalle ouvert $]-|x_0|, |x_0|[$. En particulier, le domaine de convergence est un intervalle.*

Preuve. Comme la série $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ converge , son terme général tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il est donc borné, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n x_0^n| \leq M$. On écrit alors :

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \Big(\frac{|x|}{|x_0|}\Big)^n \leq M \Big(\frac{|x|}{|x_0|}\Big)^n.$$

Lorsque $x \in]-|x_0|, |x_0|[$, le membre de droite est le terme général d'une série géométrique convergente . Par comparaison, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument. □

Définition 3.4. *On définit le domaine de convergence absolue E_a de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ en posant*

$$E_a = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n\geq 0} |a_n||x|^n \textit{ converge}\}$$

Bien sûr, on a l'inclusion $E_a \subset E$ car la convergence absolue implique la convergence.

Proposition 3.5. *Le domaine de convergence absolue E_a est un intervalle centré en* 0*.*

Preuve. Soit $x_0 \in E_a$. Pour tout $x \in [-|x_0|, |x_0|]$, on a $|a_n x^n| \leq |a_n||x_0|^n$ et par comparaison la série $\sum |a_n x^n|$ converge. On a montré $[-|x_0|, |x_0|] \subset E_a$. On conclut. □

Le domaine E_a est donc de la forme $]-R, R[$ ou $[-R, R]$.

Définition 3.6. *La borne supérieure R du domaine de convergence absolue E_a de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est appelé* **rayon de convergence** *de cette série entière. Le rayon R est donc soit un réel ≥ 0 soit $+\infty$.*

On a la description suivante.

Proposition 3.7. *Soit une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R. On introduit les domaines supplémentaires suivants : $E_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to+\infty} |a_n||x|^n = 0\}$ et $E_b = \{x \in \mathbb{R} \mid (a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$. Si R est > 0, on a les inclusions :*

$$]-R, R[\subset E_a \subset E \subset E_0 \subset E_b \subset [-R, R]$$

et si R est nul, on a $E = E_a = E_b = E_0 = \{0\}$. En particulier, dans les deux cas on a les égalités : $R = \sup E_a = \sup E = \sup E_0 = \sup E_b$.

Remarques. 1) Si R vaut $+\infty$ les ensembles E, E_a, E_0 et E_b sont tous égaux à $\mathbb{R}$.

2) L'intervalle $]-R, R[$ est appelé domaine ouvert de convergence de la série entière.

Exemples. 1) Le domaine de convergence de $\sum_{n\geq 0} x^n$ est $]-1,1[$ donc le rayon de convergence de cette série entière vaut $R=1$. Remarquez les égalités $E = E_a = E_0 =]-1,1[$ et $E_b = [-1,1]$.

2) Pour trouver le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, on considère la série numérique des valeurs absolues $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}|x|^n$ pour $x \neq 0$ et on veut utiliser le critère de d'Alembert. On calcule $\frac{1}{\sqrt{n+1}}|x|^{n+1}/\frac{1}{\sqrt{n}}|x|^n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}|x| \to |x|$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$. Il en résulte $R = 1$. Remarquez que $E_a =]-1,1[$, $E = [-1,1[$ (car $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge), $E_0 = E_b = [-1,1]$.

Fin du cours 6.

Cours 7 du MEU 251

On revient sur la proposition 7 qui décrit le domaine de convergence d'une série entière, et on en fait la démonstration.

Preuve. On suppose donc que le rayon de convergence de la série entière considérée est > 0. La première inclusion $]-R, R[\subset E_a$ résulte de la définition de R (c'est le sup de l'intervalle E_a !) Puis on rappelle que si x appartient à E_a, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument, donc la série converge et x appartient à E. Mais alors le terme général de la série tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et x appartient à E_0. Il en résulte que la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc x appartient à E_b. On a montré les quatre premières inclusions.

Voyons la dernière : on prend x non nul dans E_b. En reprenant la démonstration du lemme d'Abel, on a pour tout $u \in]-|x|, |x|[$

$$|a_n||u|^n = |a_n||x|^n \left(\frac{|u|}{|x|}\right)^n \leq M \left(\frac{|u|}{|x|}\right)^n$$

où M est un majorant de $|a_n||x|^n$. Comme la série géométrique de terme général $\left(\frac{|u|}{|x|}\right)^n$ converge, la série $\sum_{n\geq 0} |a_n||u|^n$ converge et u appartient à E_a donc $|u| \leq R$. On a montré l'inclusion $]-|x|, |x|[\subset [-R, R]$ donc l'inégalité $|x| \leq R$. Ce qui conclut. $\square$

On a vu que le critère de d'Alembert peut être utile pour calculer le rayon de convergence d'une série entière (voir l'exemple 2). Le critère de Cauchy peut aussi être utilisé.

Proposition 3.8 (Deux méthodes pour calculer un rayon de convergence). *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière.*

(d'Alembert) On suppose que les a_n ne s'annulent pas à partir d'un certain rang n_0. On suppose de plus que $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in [0,+\infty]$. Alors le rayon de convergence de cette série entière vaut $R = 1/l$.

(Cauchy) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = l \in [0,+\infty]$. Alors le rayon de convergence de cette série entière vaut $R = 1/l$.

Dans cette proposition, on a convenu que $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Preuve. On montre juste le point 2 à titre d'exemple. On étudie la convergence de la série numérique à termes positifs $\sum_{n\geq 0} |a_n||x|^n$ à l'aide du critère de Cauchy pour les séries numériques. On a $(|a_n||x|^n)^{1/n} = |a_n|^{1/n}|x|$ qui tend vers $l|x|$ quand n tend vers $+\infty$. Le critère de Cauchy dit que, si cette limite $l|x|$ est < 1, la série converge et, si $l|x|$ est > 1, la série diverge. On en déduit que $R = 1/l$. $\square$

Exemples (suite). 3) En utilisant la règle de Cauchy, on montre que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ vaut $R = 1/e$ car $a_n^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

Mais cela ne règle pas tous les cas. Voyons un exemple d'utilisation de la proposition 7.

Exemples (suite). 4) Pour déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \sin(n) x^n$, on peut noter que $1 \in E_b$ donc $R \geq 1$ mais $1 \notin E_0$ donc $R \leq 1$. On en déduit $R = 1$.

Remarque On insiste sur le fait qu'on ne peut rien dire a priori sur le comportement de la série entière en les points $x = \pm R$ (points d'incertitude). Examinez le comportement en $x = \pm 1$ des séries $\sum_{n\geq 1} x^n$, $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$, toutes de rayon de convergence $R = 1$. Vérifiez que le domaine de convergence de la première série entière est $E =]-1,1[$, le domaine de convergence de la deuxième est $E = [-1,1[$ et le domaine de convergence de la troisième est $E = [-1,1]$.

3.2 Opérations sur les séries entières

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_1 et R_2 (on suppose ces deux rayons > 0).

Proposition 3.9 (Somme de séries entières). *La série entière $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n$ (appelée somme des deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$) admet un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2) = \rho$, et on a :*

$$\forall x \in]-\rho,\rho[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Si $R_1 \neq R_2$, on a précisément $R = \min(R_1, R_2)$.

Exercice. Calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-1}{n!}x^n$. (On trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!}x^n = (x^2+x-1)e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

Proposition 3.10 (Produit de deux séries entières)**.** *La série produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ qu'on note $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ où les coefficients c_n sont définies par $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est une série entière de rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2) = \rho$, et on a :*

$$\forall x \in]-\rho, \rho[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

3.3 Propriétés des séries entières

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, et on suppose $R > 0$ (éventuellement $R = +\infty$). On note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction somme de cette série entière. Elle est bien définie sur le domaine ouvert de convergence $]-R, R[$ (au moins !)

Proposition 3.11 (Continuité)**.** *La série entière converge normalement sur tous les segments fermés $[-r, r]$ inclus dans $]-R, R[$. Et S est continue sur $]-R, R[$.*

Proposition 3.12 (Dérivabilité)**.** *S est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et, pour tout $x \in]-R, R[$,*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

De plus, la série dérivée $\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence R que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Proposition 3.13 (Régularité)**.** *S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et, pour tout entier $p \geq 0$,*

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

De plus, ces séries dérivées d'ordre p ont toutes le même rayon de convergence R.

On verra une démonstration de ces deux dernières propositions au prochain cours. On s'intéressera au développement en série entière de certaines fonctions et à des applications des séries entières.

Fin du cours 7.

Cours 8 du MEU 251

On a commencé ce cours 8 en résolvant l'exercice : calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2-10n+1}{n!} x^n$ et calculer la somme de cette série entière. On a établi grâce au critère de d'Alembert que son rayon de convergence est $R = +\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-10n+1}{n!} x^n = (x^2 - 9x + 1)e^x$. (Indication : on commence par écrire $n^2 - 10n + 1 = n(n-1) - 9n + 1$.)

On a continué en démontrant les trois propositions énoncées à la fin du cours 7. Voyons d'abord une démonstration de la proposition 11.

Preuve. On note $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Ces fonctions monômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Soit r fixé dans $]0, R[$. Pour tout $x \in [-r, r]$, on a $|f_n(x)| = |a_n||x|^n \leq |a_n|r^n$. Or la série des majorants $\sum_{n\geq 0} |a_n|r^n$ converge car $0 < r < R$ (et R est le sup de E_a). Donc $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[-r, r]$.

On en déduit que S est continue sur $[-r, r]$, ceci pour tout $r < R$. Donc S est continue sur $]-R, R[$. $\square$

On passe à la démonstration de la proposition 12.

Preuve. On note R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} na_n x^{n-1}$ (qu'on appelle série dérivée de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$) et on commence par montrer que $R_1 = R$.

Montrons pour commencer que $R_1 \leq R$ (ce qui semble bien naturel car $n|a_n|$ est plus gros que $|a_n|$). Pour tout $n \geq 1$, on a $|a_n||x|^n \leq |x|\, n|a_n||x|^{n-1}$. Si $|x| < R_1$ alors $\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$ converge et donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 0} |a_n||x|^n$ converge, on en déduit $|x| \leq R$. On en déduit $]-R_1, R_1[\subset [-R, R]$ donc $R_1 \leq R$.

On montre maintenant que $R \leq R_1$. Pour tout $x \in]-R, R[-\{0\}$, on choisit un réel r tel que $|x| < r < R$. La série de terme général $|a_n|r^n$ est donc convergente (car $r < R$). D'un autre côté, par les croissances comparées, on sait que la suite $\left(\left(\frac{|x|}{r}\right)^n\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0 et donc c'est une suite positive bornée par un certain $M > 0$. On en déduit (en copiant l'astuce du lemme d'Abel) :

$$n|a_n||x|^{n-1} = \frac{1}{|x|} |a_n|r^n \left(\frac{|x|}{r}\right)^n \leq \frac{M}{|x|} |a_n|r^n$$

Il en résulte par comparaison que la série $\sum_{n\geq 1} n|a_n||x|^{n-1}$ converge. Ce qui se traduit par $|x| \leq R_1$. On a donc montré que $]-R, R[\subset [-R_1, R_1]$ et donc $R \leq R_1$.

On en déduit que $R_1 = R$.

On note encore $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]-R, R[$. La série dérivée $\sum_{n\geq 0} f_n'$ est la série entière $\sum_{n\geq 0} na_n x^{n-1}$. On vient de montrer que son rayon de convergence est aussi R. Elle converge donc normalement sur tous les intervalles $[-r, r]$ où $r < R$ (voir la proposition 11 appliquée à la série entière dérivée $\sum_{n\geq 0} na_n x^{n-1}$). D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, $S = \sum_{n\geq 0} f_n$ est donc de classe C^1 sur $[-r, r]$ et $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ pour tout $x \in [-r, r]$, ceci pour tout $r < R$.

Donc S est C^1 sur $]-R,R[$ et, pour tout $x \in]-R,R[$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. $\square$

La proposition 13 se démontre par récurrence en utilisant la proposition 12.

Exemple. Les séries entières $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ ont un rayon de convergence égal à 1 comme celui de $\sum_{n\geq 0} x^n$ et on a, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Exercice. Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+3)x^n$, puis calculer la somme de cette série entière. On corrigera dans le cours 9.

Voyons quelques conséquences de ces théorèmes.

Proposition 3.14. *Pour tout entier p, le coefficient a_p de la série entière $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ vaut $a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}$. On dit que la série entière est égale à la série de Taylor en 0 de sa somme.*

Si deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ ont des rayons de convergences > 0 et si elles sont égales sur $]-\eta,\eta[$ un voisinage ouvert de 0, alors on a l'égalité des coefficients $a_n = b_n$ pour tous les indices $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.15 (Intégration)**.** *Soit toujours une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et S sa somme. Alors pour tout tous réels c et d dans $]-R,R[$, on a :*

$$\int_c^d S(t)\,dt = \int_c^d (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{n+1}.$$

En particulier, pour tout $x \in]-R,R[$, on a :

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

et la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ possède le même rayon de convergence R que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

3.4 Première application : résolution d'équation différentielle linéaire

Pour illustrer la méthode, on considère un exemple simple. Soit à résoudre l'équation

$$(E) \qquad (1+x)y' = \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1.$$

On cherche une solution de cette équation différentielle (E) sous la forme d'une série entière $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ dont on suppose le rayon de convergence R non nul. La fonction y est donc de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ et on a, pour tout $x \in]-R, R[$, $y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned}(1+x)y'(x) &= \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} n a_n x^n \\ &= \sum_{m\geq 0}(m+1)a_{m+1}x^m + \sum_{m\geq 0} m a_m x^m \\ &= \sum_{m\geq 0}\big((m+1)a_{m+1} + m a_m\big)x^m.\end{aligned}$$

pour tout $x \in]-R, R[$. La fonction y est alors solution de (E) si et seulement si $\sum_{n\geq 0}\big((n+1)a_{n+1} + n a_n\big)x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2} a_n x^n$ sur $]-R, R[$. D'après la proposition 14, deux séries entières égales sur un voisinage ouvert de 0 ont leurs coefficients égaux. Donc, la fonction y est solution de (E) si et seulement si $(n+1)a_{n+1} + n a_n = \dfrac{1}{2} a_n$ pour tout $n \geq 0$, autrement dit si et seulement si

$$\text{pour tout } n \geq 0, \quad a_{n+1} = \frac{(\frac{1}{2} - n)a_n}{n+1}.$$

Comme $a_0 = y(0) = 1$, on peut calculer récursivement les a_n.

On montre par récurrence sur n que $a_n = \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$ pour tout $n \geq 1$. On a donc $y(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n$. Pour déterminer son rayon de convergence, on peut utiliser le critère de d'Alembert :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{\frac{1}{2} - n}{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Le rayon de convergence de la série entière vaut donc $R = 1$.

On en déduit que $y(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n$ est solution de l'équation différentielle sur $]-1, 1[$.

On pourra tester la méthode sur des exemples moins simples. Car vous allez me dire : "mais, je sais résoudre cette équation, pas besoin de série entière !" Allons-y ! Elle est à variables séparables et on l'écrit sous la forme $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2(1+x)}$. On l'intègre et on obtient $y = C\sqrt{1+x}$. Comme $y(0) = 1$, on a $C = 1$ et donc $y(x) = \sqrt{1+x}$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$. L'unique solution de cette équation (E) s'écrit donc, lorsque $x \in]-1, 1[$:

$$y(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n.$$

On a obtenu ce qu'on appelle le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

Pour bien comprendre la méthode, je vous recommande de refaire la démonstration avec le paramètre α réel non entier naturel à la place de $1/2$ dans l'équation (E). Vous établirez alors un résultat du à Newton qu'on appelle la formule du binôme de Newton généralisée :

$$\text{pour tout } x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Remarque. Si α est un entier ≥ 0, vous retrouvez la formule du binôme de Newton que vous connaissez bien (la somme est alors finie car les termes d'indices $n \geq \alpha+1$ sont tous nuls, et bien sûr, dans ce cas, la formule est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$).