Chapitre 4: Isométries vectorielles

$(E, <\ |\ >)$ espace euclidien de dimension n, $||.||$ norme associée

1 Isométries (vectorielle)

1.1 Définition

Un endomorphisme de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle ssi

$$\forall x \in E,\ ||f(x)|| = ||x||$$

1.2 Remarque

f est un isomorphisme ($\in GL(E)$)

$$f : E \to E$$

$x \in ker f \qquad \underbrace{||f(x)||}_{0} = ||x||$

$\Leftrightarrow x = 0_E$

1.3 Théorème:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, Les 4 propositions suivantes sont équivalentes:

1. f est une isométrie
2. f conserve le produit scalaire:
   $\forall (x, y) \in E^2 < f(x)|f(y) >=< x|y >$
3. f transforme une BON en une BON
4. La matrice représentative de f dans une BON est orthogonal

1.4 Preuve:

On va montrer (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1)

- (1) $\Rightarrow$ (2)
  $\forall (x,y) \in E^2 \qquad < x|y >= \frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2)$
  $$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E^2 \qquad < f(x), f(y) > &= \tfrac{1}{2}(||f(x)+f(y)||^2 - ||f(x)||^2 - ||f(y)||^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(||f(x+y)||^2 - ||f(x)||^2 - ||f(y)||^2) \text{ (*)} \\ &= \tfrac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2) \text{ (**)} \\ &= < x|y > \end{aligned}$$

- (2) $\Rightarrow$ (3)
  $\{u_1, \ldots, u_n\}$ BON de E
  On pose $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ v_i = f(u_i)$
  $||v_i||^2 =< v_i|v_i >=< f(u_i)|f(u_i) >=< u_i|u_i >= 1$
  Si $i \neq j$
  $< v_i|v_j >=< f(u_i)|f(u_j) >=< u_i|u_j >= 0$
  $\{v_1, \ldots, v_n\}$ famille orthonormée de $n = dimE$ vecteurs

- (3) $\Rightarrow$ (4)
  $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une BON
  $P = Mat_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} f(u_1) & \ldots & f(u_n) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$
  matrice de passage de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ à $v_1, \ldots, v_n$ BON donc la matrice est orthogonale

- (4) $\Rightarrow$ (1)
  Si $P = Mat_{\mathcal{B}} f \in O(n)$
  Si $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est une BON
  $x \in E \to X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tq $x = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$
  Si $y = f(x) \to Y = PX$
  Si BON $||x||^2 =< x|x >= \sum_{i=1}^n x_i^2 = X^T.X$
  $||f(x)||^2 = ||y||^2 = Y^T \cdot Y = (PX)^T \cdot (PX) = X^T \cdot P^T \cdot P \cdot X = X^T \cdot X = ||x||^2$

(*) Linéarité de f

(**) Isométrie de f

1.5 Théorème:

- Dans E euclidien, l'ensemble des isométries vectorielles de E est noté O(E) et c'est un sous-groupe de GL(E)
- Si B est une BON de E
  $O(E) \to O(n)$
  $f \longmapsto Mat_B(f)$ Est un isomorphisme de groupe

1.6 Propriétés supplémentaire:

1. Si $f \in O(E)$ $detf = \pm 1$, $SO(E) = \{f \in O(E)$ tq $detf = 1\}$ sous groupe de $O(E)$
   $\to$ isométrie positives ou directe

2. Si $detf = -1$
   $\to$ isométrie négative ou indirecte

3. Si $f \in O(E)$ et $F \subset E$ est un sev stable par f
   $F^{\perp}$ est stable par f.
   $f_{|F} F \to F$ bijective $(f : E \to E)$ bijective Soit $z \in F^{\perp}$ on veut montrer que $f(z) \in F^{\perp}$
   $\forall x \in F$, $\exists y \in F$ tq $f(y) = x$
   $\langle f(z)|x\rangle = \langle f(z)|f(y)\rangle = \langle z|y\rangle = 0$, $f(z) \in F^{\perp}$

4. Si f a des valeurs propres réelles. Elles peuvent valoir que 1 où -1
   Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$ tq $f(x) = \lambda x$
   $||f(x)|| = ||x||$
   $\|$
   $||\lambda x|| = |\lambda|\ ||x|| \Rightarrow |\lambda| = 1$

5. $\ker(f - Id_E)$ et $\ker(f + Id_E)$ sont orthogonaux

1.7 Les symétries orthogonales:

F sev de E; $E = F \oplus F^{\perp}$; P_F et $P_{F^{\perp}}$
$S_F = P_F - P_{F^{\perp}} = 2P_F - Id_E = Id_E - 2P_{F^{\perp}}$

Propriétés: S_F est une isométrie vectorielle
$||S_F(x)||^2 = ||P_F(x) - P_{F^{\perp}}(x)||^2 = ||P_F(x)||^2 + ||P_{F^{\perp}}(x)||^2$
$= ||P_F(x) + P_{F^{\perp}}(x)||^2 = ||x||^2$
Si S est une symétries $\perp$. C'est la symétries $\perp$ par rapport à $F = \ker\{S - Id_E\}$ et $F^{\perp} = \ker\{S + Id_E\}$
Si $f \in O(E)$ et $\ker\{f - Id_E\} \oplus \ker\{f + Id_E\} = E$ f est la symétrie $\perp$ par rapport à $\ker\{f - Id_E\}$
Si f est une symétrie $\perp$ il existse une BON $\mathcal{B}$ tq

$$Mat_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & -1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Voc: Une symétrie par rapport à F hyperplan s'appelle réflexion