Exerice 4

$f_n(x) = sin(\frac{\pi}{2}e^{-nx})$

• soit $x \in \mathbb{R}_+$

Si $x = 0$ $f_n(0) = sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

Si $x > 0$ $\frac{\pi}{2}e^{-nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Et $sin(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc f_n converge simplement vers la fonction $f := \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

$f_n(x)' = -\frac{n\pi}{2}e^{-nx}cos(\frac{\pi}{2}e^{-nx})$

On a que $0 < e^{-nx} \leq 1$ car $-nx \leq 0$

Donc $0 < \frac{\pi}{2}e^{-nx} \leq \frac{\pi}{2}$

Or $cos(x) \geq 0$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Donc on final on obtient que $f_n(x)'$ est du signe $-\frac{n\pi}{2}e^{-nx}$

$-\frac{n\pi}{2}e^{-nx} \leq 0 \Rightarrow f_n(x)' \leq 0$

$f_n(0) = 1$

$f_n(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} = 0$

x	0 $\qquad\qquad$ ∞
$f_n(x)'$	$-$
$f_n(x)$	$1 \searrow 0$

On a donc que $||f_n(x) - f(x)||_\infty = \underset{x\in\mathbb{R}_+}{Sup}|f_n(x) - f(x)|$

<u>Cas 1</u>: x = 0 on $|f_n(0) - f(0)| = 1 - 1 = 0$

<u>Cas 2</u>: $x \neq 0$ on a $\underset{x\in\mathbb{R}_+^*}{Sup}|f_n(x) - f(x)| = \underset{x\in\mathbb{R}_+^*}{Sup}|f_n(x)|$

Car si $x \neq 0$ on a $f(x) = 0$

Donc $|f_n(x) - f(x)||_\infty = \underset{x\in\mathbb{R}_+^*}{Sup}|f_n(x)|$

Comme $f_n(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a que $\underset{x\in\mathbb{R}_+^*}{Sup}|f_n(x)| = 1 \neq 0$

Donc f_n ne converge pas uniformement vers f sur $\mathbb{R}_+$

Soit $a > 0$

$|f_n(x) - f(x)||_{\infty,[a,+\infty[} = \underset{x\in[a,+\infty[}{Sup} |f_n(x)| = f_n(a)$
Or $f_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc f_n converge uniformement vers f sur $[a, +\infty[$