Exerice 2

$f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$

• Soit $x \in \mathbb{R}_+$ $\qquad \dfrac{x}{x+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc f_n converge simplement vers la fonction 0

• $f_n(x)' = \dfrac{x+n-x}{(x+n)^2} = \dfrac{n}{(x+n)^2}$

Or $n \geq 0$ et $(x+n)^2 \geq 0$ donc $f_n(x)' \geq 0$

$f_n(0) = \dfrac{0}{0+n} = 0$

$f_n(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} = 1$

x	0 $\qquad\qquad$ ∞
$f_n(x)'$	$+$
$f_n(x)$	$0 \nearrow 1$

$||f_n(x) - f(x)||_\infty = \underset{x\in\mathbb{R}_+}{Sup} |f_n(x) - f(x)| = \underset{x\in\mathbb{R}_+}{Sup} f_n(x) = 1$

Donc $||f_n(x) - f(x)||_\infty \neq 0$ donc la suite (f_n) ne converge pas uniformement vers 0

Soit $a \in \mathbb{R}$ on a que $\underset{x\in[a,\infty[}{Sup} = f_n(a) = \dfrac{a}{a+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc on a bien $||f_n(x) - f(x)||_\infty = 0$ sur $[a, \infty[$

La suite converge uniformement vers 0 sur $[a, \infty[$