Exercice 1.1 Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de cet espace vectoriel.

1) Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan. Pour tout vecteur $\vec{v}$ du plan on cherche à montrer que $\vec{v}$ s'écrit de manière unique $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ où $\vec{v}_1$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}_2$ est orthogonal à $\vec{u}$. Exprimer $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$ en fonction de $\vec{v}$, $\vec{u}$ et de certains produits scalaires (on pourra commencer par chercher $\vec{v}_1$ sous la forme $\lambda\vec{u}$).

2) On note respectivement p et s les applications qui à tout vecteur $\vec{v}$ associent respectivement $\vec{v}_1$ et $\vec{v_1} - \vec{v_2}$. Montrer que p et s sont des endomorphismes de $\mathcal{P}$.

3) Montrer que pour tout $\vec{w} \in \mathrm{Vect}\{\vec{u}\}$, $\quad \|\vec{v} - p(\vec{v})\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|$.

4) On se donne maintenant dans $(\vec{i}, \vec{j})$ le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   a) Dessiner le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi que $p(\vec{v})$ et $s(\vec{v})$.
   b) Ecrire les matrices représentatives P et S des endomorphismes p et s dans la base canonique.
   c) Calculer P^2 et S^2. Le résultat est-il surprenant ? Comment s'appellent p et s ?

Exercice 1.2 *Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.*

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ on définit "produit scalaire usuel" de deux vecteurs $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ par

$$\langle X|Y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k = X^T.Y \in \mathbb{R}.$$

On note $\|X\|_2 = \sqrt{X.X}$ (la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$).

1. Redémontrer rapidement les propriétés du produit scalaire
   - Symétrie :Pour tous vecteurs X, Y, $\langle X|Y\rangle = \langle Y|X\rangle$.
   - Bilinéarité : Pour tous vecteurs X, Y, Z et tous nombres réels λ, μ,
   $$\begin{array}{rcl} \langle \lambda X + \mu Y|Z\rangle & = & \lambda\langle X|Z\rangle + \mu\langle Y|Z\rangle \\ \langle X|\lambda Y + \mu Z\rangle & = & \lambda\langle X|Y\rangle + \mu\langle X|Z\rangle \end{array}$$
   - Le produit scalaire est défini positif : pour tout X, $\langle X|X\rangle \geq 0$ et si $\langle X|X\rangle = 0$ alors $X = 0 = (0, \dots, 0)^T$.
2. Rappeler pourquoi, pour tous X, Y, la norme euclidienne vérifie *l'inégalité triangulaire* :
   $$\|X + Y\|_2 \leq \|X\|_2 + \|Y\|_2.$$
3. Vérifier que l'application qui à X associe $\|X\|_2$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^n$:
   - L'application $X \mapsto \|x\|_2$ est définie sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
   - Pour tout vecteurs X et tout réel λ : $\|\lambda X\|_2 = |\lambda|\|X\|_2$.
   - Pour tous vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$, $\|X + Y\|_2 \leq \|X\|_2 + \|Y\|_2$
   - $\|X\|_2 = 0$ si et seulement si $X = 0 = (0, \dots, 0)^T$.

Exercice 1.3 Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $u = (2, -5, -1)^T$ et $v = (-7, -4, 6)^T$. Calculer $\|u\|^2$, $\|v\|^2$, $\|u+v\|^2$ et $u \cdot v$. Est-ce logique ? Que peut-on tout de suite dire sur la dimension de $\mathrm{Vect}\{u, v\}$?

Exercice 1.4 Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace euclidien.

1) Pour tout $(x, y) \in E^2$, développez les produits scalaires suivants :

$$\langle x+y|x+y \rangle, \ \langle x-y|x-y \rangle \text{ et } \langle x+y|x-y \rangle.$$

On pourra faire apparaitre certaines normes ...

2) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.
En s'aidant d'un dessin dans la plan vectoriel, comprend-on pourquoi cette identité s'appelle l'identité du parallélogramme ?

3) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\quad 2 + \|x+y\|^2 \leq 2\left(1 + \|x\|^2\right)\left(1 + \|y\|^2\right)$.

Exercice 1.5 Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et u un vecteur non nul de E.

1. Soit $V = \{x \in E \ ; \ \langle x|u \rangle = 0\}$. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de E, en somme directe avec le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{u\}$.
2. Montrer que l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout vecteur x associe $\langle x|u \rangle$ est une forme linéaire. Comparer V et $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Quelle est la dimension de V ?
3. En s'inspirant du premier exercice, définir sur E la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\{u\}$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\{u\}$

Exercice 1.6 Montrer que sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, l'application qui à $(f, g) \in E^2$ associe

$$\langle f|g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

définit un produit scalaire sur E.

Exercice 1.7 On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 2,

1) Rappeler pourquoi $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel de dimension 3.

2) Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$, trouver les triplés (a, b, c) tels que $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ (on résoudra un système...).

3) Pour tous P, Q dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$f(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

Montrer que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

4) La famille $\{1, X, X^2\}$ est elle orthogonale ?

5) On pose $P_0 = (X-1)(X-2)$, $P_1 = X(X-2)$ et $P_2 = X(X-1)$. La famille $\{P_0, P_1, P_2\}$ est-elle orthogonale ? En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

6) * **Facultatif** et culturel. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ nombres réels distincts. Montrer que l'on peut de la même manière définir sur $\mathbb{R}_n[X]$ un produit scalaire par :

$$f(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k).$$

Quel est alors l'analogue de la base orthonormée trouvée précédemment ? Un indice : google polynômes de Lagrange ...

Exercice 1.8 Vrai/Faux pour réviser le cours On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $\langle . | . \rangle$. Les vecteurs u, v appartiennent à $\mathbb{R}^n$. Dire si les énoncés suivant sont vrais ou faux et justifier la réponse.*

i) Pour tout réel c, $\langle u|cv \rangle = c\langle u|v \rangle$.

ii) Pour tout réel c, $\|cu\| = c\|u\|$.

iii) $\langle u|v \rangle - \langle v|u \rangle = 0$.

iv) Si $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, alors u et v sont orthogonaux.

v) Une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcément orthogonale.

vi) Une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcément libre.

vii) Si on norme des vecteurs orthogonaux (non nuls), alors les vecteurs obtenus ne sont pas forcément orthogonaux.

viii) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par n vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux, alors $W = \mathbb{R}^n$.

Exercice 1.9 Facultatif On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Pour tous vecteurs $\vec{u}_1 = (x_1, y_1)^T$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2)^T$ de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$\langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle = x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}y_1x_2 + y_1y_2.$$

1. On se donne un nombre réel b et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_b qui à t associe $f_b(t) = t^2 + bt + b^2$. Montrer que

(i) Si $b \neq 0$, alors, pour tout réel t, $f_b(t) > 0$.

(ii) Si $b = 0$, alors pour tout réel $t \neq 0$, $f_b(t) > 0$.

2. Si $\vec{u} = (x, y)^T$, exprimer $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle$ à l'aide des fonctions définies précédemment.

3. Montrer que l'application qui à tout $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ associe $\langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Trouver la matrice A telle que

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}^T .A. \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

4. Les vecteurs $\vec{i} = (1,0)^T$ et $\vec{j} = (0,1)^T$ sont-il orthogonaux dans cet espace euclidien ? Trouver $\vec{k} = (\alpha, \beta)^T$ tel que $\{\vec{i}, \vec{k}\}$ soit une famille orthonormée.

Exercice 1.10 * Facultatif On note $\ell_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la suite associée $S_n(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2$ converge.

1. Soit u et v deux suite de $\ell_2(\mathbb{R})$. Montrer que la suite définit pour $n \geq 0$ par $p_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k$ converge. En déduire que $\ell_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

2. Montrer que l'application qui à deux suites u, v associe $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_k$ definit une produit scalaire sur $\ell_2(\mathbb{R})$.

Exercice 1.11 **Facultatif** Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée du plan vectoriel $\mathcal{P}$. Pour tout réel θ, on appelle $\vec{u}_\theta$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

1) Soient a et b deux réels, représenter $\vec{u}_a$ et $\vec{u}_b$ dans le plan (on pourra prendre $a = \pi/6$ et $b = \pi/4$).

2) En calculant de deux manières différentes $\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b$, retrouver la formule :

$$\cos(b - a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

3) En déduire des formules similaires pour $\cos(a + b)$, $\sin(a + b)$ et $\sin(b - a)$.

Exercice 1.12 * **Facultatif** Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application qui à $(f, g) \in E^2$ associe

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

définit un produit scalaire sur E.

2. On définit les fonction de E : Si $k \in \mathbb{N}$, c_k est la fonction qui à t associe $\cos(kt)$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, s_k est la fonction qui à t associe $\sin(kt)$. Montrer que la famille

$$\{c_0, c_1, c_2, \dots, s_1, s_2, \dots\}$$

est orthonormée.

3. Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}\{c_0, c_1, c_2, s_1, s_2\}$?