Exerice 1

Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de cet espace vectoriel.

• Soit $\vec{u} \neq 0_P$, $\vec{v_1} = \lambda\vec{u}$ et $\vec{v_2} = \vec{v} - \vec{v_1}$

On sait que $< \vec{u}|\vec{v_2} >= 0$

or $\vec{v_2} = \vec{v} - \vec{v_1} = \boxed{\vec{v} - \lambda\vec{u}}$

$< \vec{u}|\vec{v_2} >=< \vec{u}|\vec{v} - \lambda\vec{u} >=< \vec{u}|\vec{v} > -\lambda < \vec{u}|\vec{u} >$

Donc $< \vec{u}|\vec{v_2} >= 0 \Leftrightarrow< \vec{u}|\vec{v} > -\lambda < \vec{u}|\vec{u} >= 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{< \vec{u}|\vec{v} >}{< \vec{u}|\vec{u} >}}$$

Donc $\vec{v_1} = \dfrac{< \vec{u}|\vec{v} >}{< \vec{u}|\vec{u} >}\vec{u}$, et $\vec{v_2} = \vec{v} - \dfrac{< \vec{u}|\vec{v} >}{< \vec{u}|\vec{u} >}\vec{u}$

Montrons l'unicité de cette solution:

Supposons par l'absurde qu'il existe une autre solution pour $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$

Soit $\vec{v} = \vec{v_1}' + \vec{v_2}'$

On a alors: $\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v_1}' + \vec{v_2}' \Leftrightarrow \vec{v_1} - \vec{v_1}' = \vec{v_2}' - \vec{v_2}$

Comme $\vec{v_1}$ et $\vec{v_1}'$ collinéaires à $\vec{u}$, $\vec{v_1} - \vec{v_1}'$ est collinéaire a $\vec{u}$

Donc $\vec{v_2}' - \vec{v_2}$ sont aussi collinéaire à $\vec{u}$, donc on peut écrire $\vec{v_2}' - \vec{v_2} = \lambda'\vec{u}$

Or de plus $\vec{v_2}$ et $\vec{v_2}'$ orthogonaux à $\vec{u}$, $\vec{v_2}' - \vec{v_2}$ est orthogonal a $\vec{u}$

Donc on a $< \vec{u}|\vec{v_2}' - \vec{v_2} >= 0 \Leftrightarrow< \vec{u}|\lambda'\vec{u} >= 0 \Leftrightarrow \lambda' < vecu|\vec{u} >= 0$

Or comme $\vec{u}$ est non nul on a que $\lambda' = 0$

Donc $\vec{v_2}' - \vec{v_2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{v_2} = \vec{v_2'}}$

Comme $\vec{v_2}' - \vec{v_2} = 0$ alors $\vec{v_1} - \vec{v_1}' = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{v_1} = \vec{v_1}'}$

Donc on a une contradiction !

$\bullet\ p : P \to P$ $\qquad\qquad\qquad\qquad s : P \to P$

$\vec{v} \longmapsto \vec{v_1}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{v} \longmapsto \vec{v_1} - \vec{v_2} = 2\vec{v_1} - \vec{v} = 2p(\vec{v}) - \vec{v}$

Soit $\vec{a}, \vec{b} \in P$ et $\mu \in \mathbb{R}$

$$p(\mu\vec{a} + \vec{b}) = \frac{< \vec{u}|\mu\vec{a} + \vec{b} >}{< \vec{u}|\vec{u} >}\vec{u} = \frac{\mu < \vec{u}|\vec{a} > + < \vec{u}|\vec{b} >}{< \vec{u}|\vec{u} >}\vec{u} \quad \text{par bilinéarité}$$

$$= \mu\frac{< \vec{a}|\vec{u} >}{< \vec{u}|\vec{u} >}\vec{u} + \frac{< \vec{b}|\vec{u} >}{< \vec{u}|\vec{u} >}\vec{u} = \mu p(a) + p(b) \to \text{p endormorphisme}$$

$$s(\mu\vec{a} + \vec{b}) = 2p(\mu\vec{a} + \vec{b}) - (\mu\vec{a} + \vec{b}) = 2(\mu p(\vec{a}) + p(\vec{b})) - \mu\vec{a} - \vec{b} \quad \text{Comme p est linéaire}$$

$$= \mu(2p(\vec{a}) - \vec{a}) + 2p(\vec{b}) - \vec{b} = \mu s(a) + s(b) \to \text{p endormorphisme}$$

$\vec{w} \in Vect\{\vec{u}\}$

$||\vec{v} - p(\vec{v})|| = ||\vec{v} - \vec{v_1}|| = ||\vec{v_2}||$

Et $||\vec{v} - \vec{w}|| = ||\vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{w}|| = \sqrt{< \vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{w}|\vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{w} >}$

$$= \sqrt{< \vec{v_1}|\vec{v_1} > + \underbrace{< \vec{v_1}|\vec{v_2} >}_{0} - < \vec{v_1}|\vec{w} > + \underbrace{< \vec{v_2}|\vec{v_1} >}_{0} + < \vec{v_2}|\vec{v_2} > - \underbrace{< \vec{v_2}|\vec{w} >}_{0} - < \vec{w}|\vec{v_1} > - \underbrace{< \vec{v_2}|\vec{w} >}_{0} + < \vec{w}|\vec{w} >}$$

$= \sqrt{< \vec{v_1}|\vec{v_1} > - < \vec{v_1}|\vec{w} > + < \vec{v_2}|\vec{v_2} > - < \vec{w}|\vec{v_1} > + < \vec{w}|\vec{w} >}$

$= \sqrt{< \vec{v_1}|\vec{v_1} > - < \vec{v_1}|\vec{w} > + < \vec{v_2}|\vec{v_2} > - < \vec{w}|\vec{v_1} > + < \vec{w}|\vec{w} >}$

$= \sqrt{||v_1||^2 + ||v_2||^2 + ||w||^2 - 2 < \vec{v_1}|\vec{w} >}$

Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v_1} = \lambda_1\vec{u}$

Et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{w} = \lambda_2\vec{u}$

$= \sqrt{(\lambda_1||u||)^2 + ||v_2||^2 + (\lambda_2||u||)^2 - 2\lambda_1\lambda_2||u||^2}$

$= \sqrt{||u||^2((\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2) + ||v_2||^2}$

$= \sqrt{||u||^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + ||v_2||^2}$

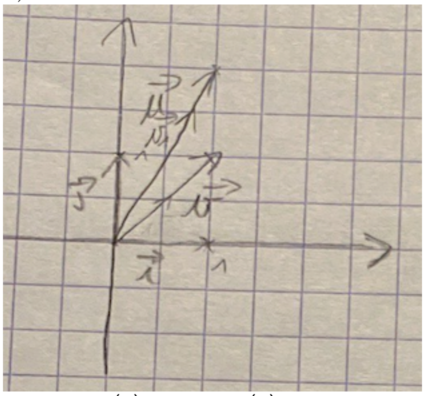
Or $||u||^2 \geq 0$ et $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq 0$

Donc $= \sqrt{||u||^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + ||v_2||^2} \geq \sqrt{||v||^2} = ||v||$

On a bien finalement que $||\vec{v} - \vec{w}|| \geq ||v_2|| = ||\vec{v} - p(\vec{v})||$

• Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a)



b) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$p(e_1) = \dfrac{< \vec{u} | \vec{e_1} >}{< \vec{u} | \vec{u} >} \vec{u}$

$< \vec{u} | \vec{u} > = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 5$

$< \vec{e_1} | \vec{u} > = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$

$p(e_1) = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5} e_1 + \dfrac{2}{5} e_2$

$p(e_2) = \dfrac{< \vec{u} | \vec{e_2} >}{< \vec{u} | \vec{u} >} \vec{u}$

$< \vec{e_2} | \vec{u} > = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2$

$p(e_1) = \dfrac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{2}{5} e_1 + \dfrac{4}{5} e_2$

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

Soit $\vec{w} \in P$

On a que $s(w) = 2p(\vec{w}) - \vec{w}$

Donc $S = 2P - I_2$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

c) On a que $P^2 = P \rightarrow$ projection

On a que $S^2 = I_2 \rightarrow$ symétrie