1 Isométrie en dim 2

E euclidien de dim $E = 2$ par exemple

1.1 Orientation du plan

Dans le plan une BON $(\vec{i}, \vec{j})$ est directe si l'angle orienté $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = +\frac{\pi}{2}$ BOND

Propriété : Si $\mathcal{B}_0 = ((\vec{i}, \vec{j}))$ BOND

$\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ BOND ssi $Mat_{\mathcal{B}_0}(\vec{u}, \vec{v}) \in SO(2)$

$\vec{u} = cos\theta\vec{i} + sin\theta\vec{j}$

$\vec{v} = -sin\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j}$

P = $\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$

Définition : Si E un espace euclidien. Alors, on oriente l'espace en choisissant une BON $\mathcal{B}_0$ qu'on définit comme directe.

Une BON $\mathcal{B}$ est directe (resp. indirecte) si $Mat_{\mathcal{B}_0}B \in SO(n)$ (resp $\in O(n) \backslash SO(n)$)

$\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B}_0$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$ $\mathcal{B}_0$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Dans l'espace on verra.

1.2 Description de O(2)

Théorème : Si $P \in O(2)$, P s'écrit

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ si $P \in SO(2)$

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ sinon

Preuve: Si P $= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ dc + bd = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

tq $a = cos(\alpha)$ $\qquad b = sin(\alpha)$

tq $c = cos(\beta)$ $\qquad b = sin(\beta)$

$cos(\alpha)cos(\beta) + sin(\alpha)sin(\beta) = cos(\alpha - \beta) = 0$

$\Leftrightarrow$ P $= \begin{pmatrix} cos\alpha & cos\beta \\ sin\alpha & sin\beta \end{pmatrix}$

et $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}[\pi]$

$\Leftrightarrow$ P $= \begin{pmatrix} cos\alpha & cos\beta \\ sin\alpha & sin\beta \end{pmatrix}$

et $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}[\pi]$

$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$$P \in O(2) \Leftrightarrow P = \underbrace{\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}}_{det=1} \text{ ou } \underbrace{\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ sin\alpha & -cos\alpha \end{pmatrix}}_{det=-1}$$

1.3 Classification en dimension 2

Théorème : Soit E euclidien de dim 2 et $f \in O(E)$, $\mathcal{B}$ une BOND

1. $f \in SO(E) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$ tq
   $Mat_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta$ Dans ce cas f est une "rotation d'angle θ et si $f \neq Id_E$ et $f \neq -Id_E$ f n'a pas de vap réelle

2. $f \in O(E) \backslash SO(E) \Leftrightarrow \theta \in \mathbb{R}$ tq

   $Mat_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}$

   Donc dans ce cas f est une réflexion par rapport à la droite vectorielle $D = Ker(f - Id_E)$

   De plus il existe une BOND $\mathcal{B}'$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. $Mat_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$

   $$\chi_f(x) = \begin{vmatrix} x - cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & X - cos\theta \end{vmatrix}$$
   $$= X^2 - 2Xcos\theta + cos^2\theta + sin^2\theta$$
   $$= X^2 - 2Xcos\theta + 1$$
   $$= (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

   Donc X est valeur propre réelle ssi $e^{i\theta} \in \mathbb{R}$

$$P = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det\ (XI_2 - P) = \begin{vmatrix} X - cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & X + cos\theta \end{vmatrix} = X^2 - 1$$

$E = Ker(f - Id_E) \oplus Ker(f + Id_E)$

De plus il existe une BOND $\mathcal{B}'$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.4 Compléments

- SO(2) $= \{\alpha \in \mathbb{R} | R_\alpha\}$
- $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta} = R_\beta R_\alpha$
- $R_0 = I_2$
- Si $f \in SO(E)$ $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ BOND

  Alors $R_\theta = Mat_{\mathcal{B}} f = Mat_{\mathcal{B}'} f = R'_\theta$ (*)

(*) La matrice de passage d'une BOND a une autre est dans SO(E) donc

$P^{-1}R_\theta P = R_{\theta'}$

$R_{-\alpha}R_\theta R_\alpha = R_{\theta'}$

$R_{-\alpha}R_\alpha R_\theta = R_{\theta'}$

$R_\theta = R_{\theta'}$

$f \in O(E)\backslash SO(E)$

P = $\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}$

D = $Ker(f - Id_E)$

Soit $u_\alpha = cos(\alpha)\vec{i} + sin(\alpha)\vec{j}$

$(P - I_2) \cdot \begin{pmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \end{pmatrix}$

$P \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix}$