Exerice 2

• Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, $\qquad detM = a * d * f$

Donc si M est inversible alors $a, d, f \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & e & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & 0 & 1 & 0 & -\frac{c}{f} \\ 0 & d & 0 & 0 & 1 & -\frac{e}{f} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 1 & -\frac{b}{d} & -\frac{c}{f} + \frac{be}{fd} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{da} & \frac{be-cd}{fda} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{array}\right)$$

Donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{da} & \frac{be-cd}{fda} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{fd} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$

• Soit $u_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} c \\ e \\ f \end{pmatrix}$ Pour que $M \in O_3(\mathbb{R})$ il faut:

- $||u_1|| = ||u_2|| = ||u_3|| = 1 \Leftrightarrow |u_1||^2 = ||u_2||^2 = ||u_3||^2 = 1$
- $< u_1|u_2 >= 0$
- $< u_1|u_3 >= 0$
- $< u_2|u_3 >= 0$

$||u_1||^2 =< u_1|u_1 >= a^2$

Donc $||u_1||^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -1$

Cherchons b et d

$$\begin{cases} b^2+d^2=1 \\ a*b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2=1 \\ b=0 \ * \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=1 \text{ ou } d=-1 \\ b=0 \ * \end{cases}$$

* Car $a \neq 0$

On a pour l'instant:

$$M = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & c \\ 0 & \pm1 & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Cherchons c, e et f

$$\begin{cases} c^2+d^2+f^2=0 \\ a*c=0 \\ b*e=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f=1 \text{ ou } f=-1 \\ c=0 \\ e=0 \end{cases}$$

Donc toute les matrices triangulaire sup dans $O_3(\mathbb{R})$ sont:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

• Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$

Et $w_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}$

Comme $M \in O_3(\mathbb{R})$ on a:

$v_1 \circ v_2 = v_1 \circ v_3 = v_2 \circ v_3 = 0$

$w_1 \circ w_2 = w_1 \circ w_3 = w_2 \circ w_3 = 0$

<u>cas 1</u> : $a \neq 0$ on a directement

$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$

Puis comme $||v_1|| = 1$ on a, $a = 1$

<u>cas 1.1</u> : $e \neq 0$ on a directement

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

Puis comme $||v_2|| = ||v_3|| = 1$ on a $e = 1$ et $i = 1$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En suivant le même raisonnement on obtient que si $M \in O_3(\mathbb{R})$ il y exactement a 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne

Exemple d'une autre matrice $M \in O_3(\mathbb{R})$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$