Exerice 1

$u_n : [0,\infty[\ni x \longmapsto \dfrac{arctan(nx)}{n^2}$, $n \geq 1$

Pour montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement il faut montrer que:

$\sum\limits_{n\geq 1} \underset{x\in\mathbb{R}_+}{Sup}|u_n|$ converge, or on a que $0 < arctan(x) \nearrow \dfrac{\pi}{2}$

Donc $\underset{x\in\mathbb{R}_+}{Sup}|u_n| = \dfrac{\pi}{2n^2}$

Or $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\pi}{n^2}$ converge d'après Riemann, donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement

$(u_n)' = n\dfrac{1}{1+n^2x^2} * \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n+n^3x^2}$

Soit $a > 0$ On a que $0 < (u_n)'$ décroissant sur $\mathbb{R}_+$

Donc $\underset{x\in[a,\infty[}{Sup}|(u_n)'| = (u_n)'(a) = \dfrac{1}{n+a^2n^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{a^2n^3}$

$\sum\limits_{n\geq 1} \underset{x\in[a,\infty[}{Sup}|(u_n)'|$ a le même comportement que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{a^2n^3}$

Or d'après Riemann cette série converge, donc $(u_n)'$ converge normalement sur $[0,\infty[$

Soit $S = \sum\limits_{n\geq 1} u_n$

On a: $\begin{cases} \text{S converge normalement sur } \mathbb{R}_+ \\ u_n \in C^0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \end{cases} \Rightarrow S$ est de la classe C^0 sur $\mathbb{R}_+$

On a: $\begin{cases} \text{S converge simplement sur } [a,+\infty[\\ \text{S' converge normalement sur } [a,+\infty[\\ u_n \in C^1 \text{ sur } [a,+\infty[\end{cases} \Rightarrow S$ est de la classe C^1 sur $[a,+\infty[$

Comme S est de classe C^1 sur tout intervalle $[a,+\infty[$ on a que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$