Exerice 2

- Symétrie: Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$< X|Y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k =< Y|X >$$

- Bilinéarité: Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} < \alpha X + \beta Y|Z > &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k + \beta y_k) * z_k \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha x_k z_k + \beta y_k z_k \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha x_k z_k + \sum_{k=1}^{n} \beta y_k z_k \\ &= \alpha \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k z_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y_k z_k \\ &= \alpha < X|Z > +\beta < Y|Z > \end{aligned}$$

  Comme on a prouvé la symétrie on a que

$$< X|\alpha Y + \beta Z >=< \alpha Y + \beta Z|X >$$

  Ce qui termine la preuve de la bilinéarité

- Défini positif: Soit $X \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} < X|X > &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k x_k \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2 \text{ Or comme } x_k \in \mathbb{R}, (x_k)^2 \geq 0 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

  Si on a $< X|X >= 0$ alors:

$$\begin{aligned} < X|X >= 0 &\Leftrightarrow \textstyle\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_k)^2 = 0 \ \forall 1 \leq k \leq n \\ &\Leftrightarrow x_k = 0 \ \forall 1 \leq k \leq n \\ &\Leftrightarrow X = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||X+Y||^2 &=< X+Y|X+Y > \\
&=< X|X > + < Y|Y > +2 < X|Y > \\
&= ||X||^2 + ||Y||^2 + 2 < X|Y > \\
&\leq ||X||^2 + ||Y||^2 + 2| < X|Y > | \\
&\leq ||X||^2 + ||Y||^2 + 2(||X||.||Y||) \text{ Inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&= (||X|| + ||Y||)^2
\end{aligned}$$

Or comme $||X+Y||^2 \geq 0$ et $(||X|| + ||Y||)^2 \geq 0$
On a que $||X+Y|| \leq ||X|| + ||Y||$
Montrons que $||x||_2$ est une norme:
• $||x||_2 = \sqrt{< x|x >}$ or $< x|x >$ est défini positif donc on a bien:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}_+ \\
X &\longmapsto ||X||_2
\end{aligned}$$

• Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
||\alpha X|| &= \sqrt{< \alpha X|\alpha X >} \\
&= \sqrt{\alpha^2 < X|X >} \text{ (*)} \\
&= |\alpha|\sqrt{< x|x >} \\
&= |\alpha|||x||_2
\end{aligned}$$

(*) Grâce à la bilinéarité du produit sclaire
• On a montré à la question précendente l'inégalité triangulaire • $Soit X \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
||X||_2 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{< X|X >} = 0 \\
&\Leftrightarrow < X|X >= 0 \\
&\Leftrightarrow X = 0_E \text{ (**)}
\end{aligned}$$

(**) Car le produit sclaire est défini positif