Exerice 1

- $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{ln(n)}$

$a_n = \frac{1}{ln(n)}$

Calculons $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ln(n+1)}{ln(n)}$

Or $ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} ln(n)$

Donc $\frac{ln(n+1)}{ln(n)} \underset{n\to\infty}{\to} 1$

Le critère de d'Alembert pour les séries entière nous dis que le rayon de convergence est R = $\frac{1}{1} = 1$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^n} x^{2n+1}$

$$\begin{cases} b_n = \dfrac{(-1)^n}{n^n} \text{ si } n = 2k+1 \text{ avec } k \geq 1 \\ b_n = 0 \text{ si sinon} \end{cases}$$

Calculons $\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ou $\sqrt[n]{0} = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Le critère de Cauchy nous dit que le rayon de convergence R est égale à $\frac{1}{0}$

Qui par convention $= \infty$

- $\sum_{n\geq 1} (2^n - n)x^n$

$c_n = 2^n - n$

Calculons $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1} - (n+1)}{2^n - n} = \frac{2 * 2^n - n + 1}{2^n - n} = 2\frac{2^n}{2^n - n} - \frac{n-1}{2^n - n}$

Or $2^n - n \underset{n\to\infty}{\sim} 2^n$ par croissance comparé

Donc $\frac{c_{n+1}}{c_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$

Le critère de d'Alembert pour les séries entière nous dis que le rayon de convergence est R = $\frac{1}{2}$

- $\sum_{n\geq 0} n^{\sqrt{n}} x^n$

$d_n = n^{\sqrt{n}}$

Calculons $\sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}} = (n^{\sqrt{n}})^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = exp(\frac{ln(n)}{\sqrt{n}})$

Or $\frac{ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} = 0$, donc $exp(\frac{ln(n)}{\sqrt{n}}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Le critère de Cauchy nous dit que le rayon de convergence R est égale à $\frac{1}{1} = 1$

- $\sum_{n\geq 0} 3^n x^{n!}$

$$\begin{cases} f_n = 3^k \text{ si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } n = k! \\ f_n = 0 \text{ si sinon} \end{cases}$$

Donc $a_k x_k$ est borné ssi $3^k x^{k!} = (3x)^k * x^{(k-1)!}$ est borné

Étudions $sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid a_n x_n \text{ borné } \}$

Si $x = 1$ on $a_k x_k = 3^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et donc $a_k x_k$ n'est pas borné

Si $x > 1$ on $(3x)^k * x^{(k-1)!} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, donc $a_k x_k$ n'est pas borné

Si $x < 1$ donc $x^{(k-1)!} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparé on a $a_k x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc est borné

$sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid a_n x_n \text{ borné } \} = 1$

$R = 1$

- $\sum_{n\geq 0} x^{n^2}$

$$\begin{cases} f_n = 1 \text{ si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } n = k^2 \\ f_n = 0 \text{ si sinon} \end{cases}$$

Donc $a_n x_n$ est borné ssi x^n est borné

Étudions $sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid a_n x_n \text{ borné } \}$

Si $x = 1$ on a $a_n x_n = 1$ et donc $a_n x_n$ est borné

Si $x > 1$ on a $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, donc $a_n x_n$ n'est pas borné

Si $x < 1$ on a $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $a_n x_n$ est borné

$sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid a_n x_n \text{ borné } \} = 1$

$R = 1$

- $\sum_{n\geq 1}(tan(\frac{1}{n})-sin(\frac{1}{n}))x^n$

$g_n = tan(\frac{1}{n}) - sin(\frac{1}{n})$

$\sqrt[n]{g_n} = (tan(\frac{1}{n}) - sin(\frac{1}{n}))^{\frac{1}{n}}$

$= (\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3}) - (\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})))^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n^3} + o(\frac{1}{n^3})}$

$\underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt[n]{\frac{1}{2n^3}} = \frac{1}{2n^{3/n}} = \frac{1}{exp(\frac{3ln(2n)}{n})}$

or $\frac{3ln(2n)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ croissance comparé

donc $exp(\frac{3ln(2n)}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{1}{exp(\frac{3ln(2n)}{n})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Le critère de Cauchy nous dit que le rayon de convergence R est égale à $\frac{1}{1} = 1$

- $\sum_{n\geq 1} a_n x_n$

$$a_n = \begin{cases} n2^n & \text{si n est impair} \\ \frac{1}{n} & \text{si n est pair} \end{cases}$$

Calculons $\sqrt[n]{a_n}$

<u>Cas 1</u>: n pair

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

Or $\sqrt[n]{n} = exp(\frac{ln(n)}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Donc $\sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

<u>Cas 2</u>: n impair

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^n n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$

On a que $2 \neq 1$, donc cette méthode ne marche pas, autre méthode page suivant

Étudions $sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid a_n x_n \text{ borné } \}$

<u>Cas 1</u>: n pair

$a_n x_n = n 2^n x^n = n(2x)^n$

Si $x = \frac{1}{2}$ on $a_n = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et donc $a_n x_n$ n'est pas borné

Si $x > \frac{1}{2}$ on $2x > 1$ donc $(2x)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ alors $a_n x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et donc $a_n x_n$ n'est pas borné

Si $x < \frac{1}{2}$ on $2x < 1$ donc $(2x)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et par croissance comparé $n(2x)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors $a_n x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $a_n x_n$ est borné

$sup\{x \in \mathbb{R}_+, \text{ n pair } \mid a_n x_n \text{ borné } \} = \frac{1}{2}$

<u>Cas 2</u>: n impair

$a_n x_n = \frac{1}{n} x^n$

Si $x = 1$ on $a_n = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et donc $a_n x_n$ n'est pas borné

Si $x > 1$ on $2x > 1$ donc $(x)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ alors $a_n x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et donc $a_n x_n$ n'est pas borné

Si $x < 1$ donc $(x)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et par croissance comparé $n(x)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors $a_n x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $a_n x_n$ est borné

$sup\{x \in \mathbb{R}_+, \text{ n impair } \mid a_n x_n \text{ borné } \} = 1$

Donc dans le cas généarl on a:

$sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid a_n x_n \text{ borné } \}$

$= min(sup\{x \in \mathbb{R}_+, \text{ n impair } \mid a_n x_n \text{ borné } \}, sup\{x \in \mathbb{R}_+, \text{ n pair } \mid a_n x_n \text{ borné } \}) = \frac{1}{2}$

Donc $R = \frac{1}{2}$