Exerice 4

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n3^n} x^n$

$a_n = \frac{1}{n3^n}$

Étudions $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \frac{n3^n}{(n+1)3^n * 3} = \frac{n}{3(n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$

Le critère de d'Alembert pour les séries entière nous dis que le rayon de convergence est R $= \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

Il nous suffit donc d'étudier $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n3^n} x^n$ en $x = -3$ et $x = 3$

<u>Cas x = 3:</u> $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n3^n} 3^n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

Cette somme diverge, donc $3 \notin O$

<u>Cas x = -3:</u> $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n3^n} 3^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

Cette somme converge, donc $3 \in O$

Donc O $= [-3, 3[$

Soit $S = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n3^n} x^n$, S est de classe C^∞ sur $]-3,3[$

Et on a que $S'(x) = \sum_{n\geq 1} n \frac{1}{n3^n} x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^{n+1}} x^n = \frac{1}{3} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n} x^n = \frac{1}{3} \sum_{n\geq 0} (\frac{x}{3})^n$

On reconnait une suite géométrique de raison $\frac{x}{3}$

Or on a que $\forall x \in]-3,3[, |\frac{x}{3}| < 1$

Donc $S'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-q}$, avec $q = \frac{x}{3}$

Donc $S'(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3-x}$

Or $-ln(3-x)' = \frac{1}{3-x}$

Donc $S(x) = -ln(3-x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$

On sait que $S(0) = 0$

Donc on cherche $c \in \mathbb{R}$ tq $-ln(3-0) + c = 0 \Leftrightarrow c = ln(3)$

Donc $S(x) = -ln(3-x) + ln(3) = -(ln(3-x) - ln(3)) = -ln(\frac{3-x}{3})$

- $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{n+1+1}{n+1} x^n = \sum_{n\geq 0} (\frac{1}{n+1}+1) x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^n + \sum_{n\geq 0} x^n$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^n + \frac{1}{1-x}$$

Si $x \neq 0$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{1}{1-x}$$

$$= -\frac{1}{x} ln(1-x) + \frac{1}{1-x}$$