Exerice 3

$f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$

• Soit $x \in \mathbb{R}_+$ on a que

si $x \neq 0$ $\dfrac{1}{1+nx^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Si $x = 0$ $\dfrac{1}{1+n0^2} = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

Donc f_n converge simplement vers la fonction f := $\begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

• $f_n(x)' = -\dfrac{2nx}{(1+nx^2)^2}$

Or $-2nx \leq 0$ et $(1+nx^2)^2 \geq 0$ donc $f_n(x)' \leq 0$

$f_n(0) = 1$

$f_n(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} = 0$

x	0 $\qquad\qquad$ ∞
$f_n(x)'$	$-$
$f_n(x)$	$1 \searrow 0$

On a donc que $||f_n(x) - f(x)||_\infty = \underset{x\in\mathbb{R}_+}{Sup}|f_n(x) - f(x)|$

<u>Cas 1</u>: x = 0 on $|f_n(0) - f(0)| = 1 - 1 = 0$

<u>Cas 2</u>: $x \neq 0$ on a $\underset{x\in\mathbb{R}_+^*}{Sup}|f_n(x) - f(x)| = \underset{x\in\mathbb{R}_+^*}{Sup}|f_n(x)|$

Car si $x \neq 0$ on a $f(x) = 0$

Donc $|f_n(x) - f(x)||_\infty = \underset{x\in\mathbb{R}_+^*}{Sup}|f_n(x)|$

Comme $f_n(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a que $\underset{x\in\mathbb{R}_+^*}{Sup}|f_n(x)| = 1 \neq 0$

Donc f_n ne converge pas uniformement vers f sur $\mathbb{R}_+$

Soit $a > 0$

$|f_n(x) - f(x)||_{\infty,[a,+\infty[} = \underset{x\in[a,+\infty[}{Sup}|f_n(x)| = f_n(a)$

Or $f_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc f_n converge uniformement vers f sur $[a, +\infty[$