Chapitre 4: Isométries vectorielles

$(E, <\mid>)$ espace euclidien de dimension n, $||.||$ norme associée

1 Isométries (vectorielle)

1.1 Définition

Un endomorphisme de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle ssi

$$\forall x \in E,\ ||f(x)|| = ||x||$$

1.2 Remarque

f est un isomorphisme ($\in GL(E)$)

$$f : E \to E$$

$x \in ker f$ $\quad \underbrace{||f(x)||}_{0} = ||x||$

$\Leftrightarrow x = 0_E$

1.3 Théorème:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, Les 4 propositions suivantes sont équivalentes:

1. f est une isométrie
2. f conserve le produit scalaire:
   $\forall (x, y) \in E^2 < f(x)|f(y) >=< x|y >$
3. f transforme une BON en une BON
4. La matrice représentative de f dans une BON est orthogonal

1.4 Preuve:

On va montrer (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1)

- (1) $\Rightarrow$ (2)

  $$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E^2 \qquad & < x|y >= \tfrac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2) \\ \forall (x,y) \in E^2 \qquad & < f(x), f(y) > = \tfrac{1}{2}(||f(x)+f(y)||^2 - ||f(x)||^2 - ||f(y)||^2) \\ & = \tfrac{1}{2}(||f(x+y)||^2 - ||f(x)||^2 - ||f(y)||^2) \text{ (*)} \\ & = \tfrac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2) \text{ (**)} \\ & = < x|y > \end{aligned}$$

- (2) $\Rightarrow$ (3)
  $\{u_1, \dots, u_n\}$ BON de E
  On pose $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ v_i = f(u_i)$
  $||v_i||^2 =< v_i|v_i >=< f(u_i)|f(u_i) >=< u_i|u_i >= 1$
  Si $i \neq j$
  $< v_i|v_j >=< f(u_i)|f(u_j) >=< u_i|u_j >= 0$
  $\{v_1, \dots, v_n\}$ famille orthonormée de $n = dimE$ vecteurs

- (3) $\Rightarrow$ (4)
  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ une BON
  $P = Mat_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} f(u_1) & \dots & f(u_n) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$
  matrice de passage de $\{u_1, \dots, u_n\}$ à $v_1, \dots, v_n$ BON donc la matrice est orthogonale

- (4) $\Rightarrow$ (1)
  Si $P = Mat_{\mathcal{B}} f \in O(n)$
  Si $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ est une BON
  $x \in E \to X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tq $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$
  Si $y = f(x) \to Y = PX$
  Si BON $||x||^2 =< x|x >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^T.X$
  $||f(x)||^2 = ||y||^2 = Y^T \cdot Y = (PX)^T \cdot (PX) = X^T \cdot P^T \cdot P \cdot X = X^T \cdot X = ||x||^2$

(*) Linéarité de f

(**) Isométrie de f

1.5 Théorème:

- Dans E euclidien, l'ensemble des isométries vectorielles de E est noté O(E) et c'est un sous-groupe de GL(E)
- Si B est une BON de E
  $O(E) \to O(n)$
  $f \longmapsto Mat_B(f)$ Est un isomorphisme de groupe

1.6 Propriétés supplémentaire: