Ukážka riešenia úlohy Bellmanovým princípom optimality výpočtom *odpredu*

$$\min \frac{9}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{4}{x_3}$$

$$st\ x_1+x_2+x_3 \le 60$$

$$x_j > 0\ \ pre\ i=1,2,3$$

Riešite danú úlohu Bellmanovým princípom optimality. **Za stav s_i** považujete to, **čo zostalo k rozdeleniu zo 60-tich** jednotiek **po použití premennej x_i**.

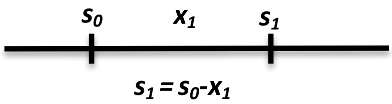
Stavovú množinu diskretizujte po desiatkach.

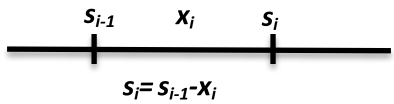
Riešenie:

Index *i* v Bellmanovej rovnici odpovedá premennej, o ktorej sa práve rozhoduje.
Vďaka nerovnosti v podmienke sa jedná o úlohu s voľným začiatkom aj voľným koncom (nemusíme rozdeliť celých 60 jednotiek medzi premenné, a teda nevieme v akom stave začneme a v akom stave skončíme).

Stavová množina: $s_i \in$<0, 60>, po diskretizácii $s_i \in$**{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60}**

Prechodová rovnica (vzťah medzi dvomi nasledujúcim stavmi, odvodený z definície stavu zo zadania úlohy):

Konkrétne: 

všeobecne: 

Prechodová rovnica je teda: $\boxed{s_i = s_{i+1} + x_{i+1}}$.

Spôsob výpočtu: Odpredu (možno vydedukovať z prechodovej rovnice: ak je na ľavej strane index menší ako na pravej, ide o výpočet odpredu).

Pozn. Prechodová rovnica a tiež spôsob výpočtu (odpredu, odzadu) budú iné, ak sa stav definuje inak, ako je v zadaní úlohy. Pri správnom definovaní nás však dovedú k rovnakému výsledku.

Bellmanova rovnica: $B_i(s_i) = \min\left\{\frac{c_i}{x_i} + B_{i-1}(s_{i-1}), s_{i-1} \in D\big(B_{i-1}(s_{i-1})\big),\ x_i > 0\right\}$, teda

$$\boxed{B_i(s_i) = \min\left\{\frac{c_i}{x_i} + B_{i-1}(s_i + x_i), s_i + x_i \in D\big(B_{i-1}(s_{i-1})\big), x_i > 0\right\}\text{, pre } i=1,2,3}$$

Pre jednotlivé *i*=1, 2, 3:

$$B_1(s_1) = \min\left\{\frac{9}{x_1} + B_0(s_1+x_1), s_1+x_1 \in D\big(B_0(s_0)\big), x_1 > 0\right\}$$

$$B_2(s_2) = \min\left\{\frac{1}{x_2} + B_1(s_2+x_2), s_2+x_2 \in D\big(B_1(s_1)\big), x_2 > 0\right\}$$

$$B_3(s_3) = \min\left\{\frac{4}{x_3} + B_2(s_3+x_3), s_3+x_3 \in D\big(B_2(s_2)\big), x_3 > 0\right\}$$

V prípade výpočtu odpredu na začiatku definujeme $B_0(s_0) = 0$, pre $s_0 \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$. S_0=0 možno vynechať, pretože S_0=0 znamená, že hneď na začiatku nemáme nič zo 60 jednotiek na rozdelenie.

Výpočet B_1:

s_1=0: $s_1 + x_1 \in D\big(B_0(s_0)\big) \rightarrow 0 + x_1 \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60\} \rightarrow x_1 \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ & $B_0(s_0) = 0$

$B_1(0) = \min\left\{\frac{9}{x_1}, x_1 \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}, x_1 > 0\right\}$=$\min\left\{\frac{9}{10}, \frac{9}{20}, \frac{9}{30}, \frac{9}{40}, \frac{9}{50}, \frac{9}{60}\right\} = \frac{9}{60}$

$Z_1(0)$ = 60, pretože $B_1(0)$ má minimum pre x_1 =60.

s_1=10: $s_1 + x_1 \in D\big(B_0(s_0)\big) \rightarrow 10 + x_1 \in \{10,20,30,40,50,60\}$ & $x_1 > 0 \rightarrow x_1 \in \{10,20,30,40,50\}$ & $B_0(s_0) = 0$

$B_1(10) = \min\left\{\frac{9}{x_1}, x_1 \in \{10, 20, 30, 40\}\right\}$=$\min\left\{\frac{9}{10}, \frac{9}{20}, \frac{9}{30}, \frac{9}{40}, \frac{9}{50}\right\} = \frac{9}{50}$

$Z_1(10)$ = 50, pretože $B_1(10)$ má minimum pre x_1 =50.

s_1=20: $s_1 + x_1 \in D\big(B_0(s_0)\big) \rightarrow 20 + x_1 \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ & $x_1 > 0 \rightarrow x_1 \in \{10, 20, 30, 40\}$ & $B_0(s_0) = 0$

$B_1(20) = \min\left\{\frac{9}{x_1}, x_1 \in \{10, 20, 30, 40\}\right\}$=$\min\left\{\frac{9}{10}, \frac{9}{20}, \frac{9}{30}, \frac{9}{40}\right\} = \frac{9}{40}$; $Z_1(20)$ = 40

s_1=30: $s_1 + x_1 \in D\big(B_0(s_0)\big) \rightarrow 30 + x_1 \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ & $x_1 > 0 \rightarrow x_1 \in \{10, 20, 30\}$ & $B_0(s_0) = 0$

$B_1(30) = \min\left\{\frac{9}{x_1}, x_1 \in \{10, 20, 30\}\right\}$=$\min\left\{\frac{9}{10}, \frac{9}{20}, \frac{9}{30}\right\} = \frac{9}{30}$; $Z_1(30)$ = 30

s_1=40: $s_1 + x_1 \in D\big(B_0(s_0)\big) \rightarrow 40 + x_1 \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ & $x_1 > 0 \rightarrow x_1 \in \{10, 20\}$ & $B_0(s_0) = 0$

$B_1(40) = \min\left\{\frac{9}{x_1}, x_1 \in \{10, 20\}\right\}$=$\min\left\{\frac{9}{10}, \frac{9}{20}\right\} = \frac{9}{20}$; $Z_1(40)$ = 20

s_1=50: $s_1 + x_1 \in D\big(B_0(s_0)\big) \rightarrow 50 + x_1 \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ & $x_1 > 0 \rightarrow x_1 \in \{10\}$ & $B_0(s_0) = 0$

$B_1(50) = \min\left\{\frac{9}{x_1}, x_1 \in \{10\}\right\} = \min\left\{\frac{9}{10},\right\} = \frac{9}{10};$

$Z_1(50)$ = 10

s_1=60: $60 + x_1 \in \{10, 20, \ldots, 60\}$ & $x_1 > 0 \rightarrow x_1 \in \emptyset$

$B_1(60) = \infty;\;\; Z_1(60) = \infty$

s_i	$B_0(s_0)$	$B_1(s_1)$	$Z_1(s_1)$	$B_2(s_2)$	$Z_2(s_2)$	$B_3(s_3)$	$Z_3(s_3)$
0	∞	9/60	60	11/40	20	3/5	20
10	0	9/50	50	7/20	20	3/4	20
20	0	9/40	40	2/5	10	19/20	10
30	0	9/30	30	11/20	10	7/5	10
40	0	9/20	20	1	10	∞	∞
50	0	9/10	10	∞	∞	∞	∞
60	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Opt. hodnota prvého člena účelovej funkcie

Opt. hodnota prvých dvoch členov účel. fcie

Opt. hodnota účelovej fcie

Výpočet B_2:

s_2=0: $s_2 + x_2 \in D\big(B_1(s_1)\big) \rightarrow 0 + x_2 \in \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$ & $x_2 > 0 \rightarrow x_2 \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$

$B_2(0) = \min\left\{\frac{1}{x_2} + B_1(0 + x_2), x_2 \in \{10, 20, 30, 40, 50\},\right\} = \min\left\{\frac{1}{10} + B_1(10), \frac{1}{20} + B_1(20), \frac{1}{30} + \right.$

$\left. + B_1(30), \frac{1}{40} + B_1(40), \frac{1}{50} + B_1(50)\right\} = \min\{\frac{1}{10} + \frac{9}{50}, \frac{1}{20} + \frac{9}{40}, \frac{1}{30} + \frac{9}{30}, \frac{1}{40} + \frac{9}{20}, \frac{1}{50} + \frac{9}{10}\} = \frac{11}{40}$

$Z_2(0)$ = 20, pretože $B_2(0)$ má minimum pre x_2 =20.

s_2=10: $s_2 + x_2 \in D\big(B_1(s_1)\big) \rightarrow 10 + x_2 \in \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$ & $x_2 > 0 \rightarrow x_2 \in \{10, 20, 30, 40\}$

$B_2(10) = \min\left\{\frac{1}{x_2} + B_1(10 + x_2), x_2 \in \{10, 20, 30, 40\}\right\} = \min\left\{\frac{1}{10} + B_1(20), \frac{1}{20} + B_1(30), \frac{1}{30} + \right.$

$\left. + B_1(40), \frac{1}{40} + B_1(50)\right\} = \min\{\frac{1}{10} + \frac{9}{40}, \frac{1}{20} + \frac{9}{30}, \frac{1}{30} + \frac{9}{20}, \frac{1}{40} + \frac{9}{10}\} = \frac{7}{20}$

$Z_2(10)$ = 20, pretože $B_2(10)$ má minimum pre x_2 =20.

s_2=20: $x_2 \in \{10, 20, 30\}$; $B_2(20) = \min\{\frac{1}{10} + \frac{9}{30}, \frac{1}{20} + \frac{9}{20}, \frac{1}{30} + \frac{9}{10}\} = \frac{2}{5};$ $Z_2(20)$ = 10

s_2=30: $x_2 \in \{10, 20\}$; $B_2(30) = \min\{\frac{1}{10} + \frac{9}{20}, \frac{1}{20} + \frac{9}{10}\} = \frac{11}{20};$ $Z_2(30)$ = 10

s_2=40: $x_2 \in \{10\}$; $B_2(40) = \min\{\frac{1}{10} + \frac{9}{10}\} = 1;$ $Z_2(40)$ = 10

s_2=50: $x_2 \in \emptyset;\; B_2(50) = \infty;\; Z_2(50) = \infty$

s_2=60: $x_2 \in \emptyset;\; B_2(60) = \infty;\; Z_2(60) = \infty$

Výpočet B_3:

s_3=0: $s_3 + x_3 \in D\big(B_2(s_2)\big) \rightarrow 0 + x_3 \in \{0, 10, 20, 30, 40\}$ & $x_3 > 0 \rightarrow x_3 \in \{10, 20, 30, 40\}$

$B_3(0) = \min\left\{\frac{4}{x_3} + B_2(0 + x_3), x_3 \in \{10, 20, 30, 40\}\right\} = \min\left\{\frac{4}{10} + B_2(10), \frac{4}{20} + B_2(20), \frac{4}{30} + B_2(30), \frac{4}{40} + \right.$

$\left. + B_2(40)\right\} = \min\{\frac{4}{10} + \frac{7}{20}, \frac{4}{20} + \frac{2}{5}, \frac{4}{30} + \frac{11}{20}, \frac{4}{40} + 1\} = \frac{3}{5}$

$Z_3(0)$ = 20, pretože $B_3(0)$ má minimum pre x_3 =20.

s_3=10: $s_3 + x_3 \in D\big(B_2(s_2)\big) \rightarrow 10 + x_3 \in \{0, 10, 20, 30, 40\}$ & $x_3 > 0 \rightarrow x_3 \in \{10, 20, 30\}$

$B_3(10) = \min\left\{\frac{4}{x_3} + B_2(10 + x_3), x_3 \in \{10, 20, 30\}\right\} = \min\left\{\frac{4}{10} + B_2(20), \frac{4}{20} + B_2(30), \frac{4}{30} + B_2(40)\right\} =$

$= \min\{\frac{4}{10} + \frac{2}{5}, \frac{4}{20} + \frac{11}{20}, \frac{4}{30} + 1\} = \frac{3}{4};$ $Z_3(10)$ = 20

s_3=20: $x_3 \in \{10, 20\}$; $B_3(20) = \min\{\frac{4}{10} + \frac{11}{20}, \frac{1}{20} + 1\} = \frac{19}{20};$ $Z_3(20)$ = 10

s_3=30: $x_3 \in \{10\}$; $B_3(30) = \min\{\frac{4}{10} + 1\} = \frac{7}{5};$ $Z_3(30)$ = 10

s_3=40, 50, 60: $x_3 \in \emptyset;\;\; B_3(40) = \infty; Z_3(40) = \infty;\;\; B_3(50) = \infty;\; Z_3(50) = \infty;\;\; B_3(60) = \infty; Z_3(60) = \infty$

Výpočet premenných x_1, x_2, x_3:

Keďže úloha je s voľným koncom, musíme nájsť najmenšiu hodnotu v stĺpci $B_3(s_3)$ (pretože minimalizujeme). Je to hodnota 3/5 (hodnota účelovej funkcie) v riadku so stavom 0, t.j. **optimálny stav s_3=0**. Premenné určíme zo vzťahu $x_i=Z_i(s_i)$.

$x_3=Z_3(s_3)$, s_3=0, $x_3=Z_3(0)$=20

$x_2=Z_2(s_2)$, z prechodovej funkcii máme $s_2=s_3+x_3$=0+20, $x_2=Z_2(20)$=10

$x_1=Z_1(s_1)$, z prechodovej funkcii máme $s_1=s_2+x_2$=20+10, $x_1=Z_1(30)$=30

x=(30, 10, 20) a hodnota účelovej funkcie je 3/5.

Ukážka riešenia úlohy Bellmanovým princípom optimality výpočtom *odzadu*

$$\min \frac{9}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{4}{x_3}$$

$$st\ x_1+x_2+x_3 \le 60$$

$$x_j > 0\ \ pre\ i=1,2,3$$

Riešite danú úlohu Bellmanovým princípom optimality. **Za stav *s*** s_i **považujete to, čo sa už použilo zo 60-tich** jednotiek **pred použitím premennej** x_i.

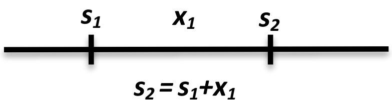
Stavovú množinu diskretizujte po desiatkach.

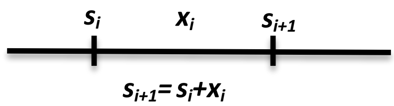
Riešenie:

Index *i* v Bellmanovej rovnici odpovedá premennej, o ktorej sa práve rozhoduje.
Vďaka nerovnosti v podmienke sa jedná o úlohu s voľným začiatkom aj voľným koncom (nemusíme rozdeliť celých 60 jednotiek medzi premenné, a teda nevieme v akom stave začneme a v akom stave skončíme).

Stavová množina: $s_i \in$<0, 60>, po diskretizácii $s_i \in$ **{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60}**

Prechodová rovnica (vzťah medzi dvomi nasledujúcim stavmi, odvodený z definície stavu zo zadania úlohy):

Konkrétne: 

všeobecne: 

Prechodová rovnica je teda: $\boxed{s_{i+1}=s_i+x_i}$.

Spôsob výpočtu: Odzadu (možno vydedukovať z prechodovej rovnice: ak je na ľavej strane index väčší ako na pravej, ide o výpočet odzadu).

Pozn. Prechodová rovnica a tiež spôsob výpočtu (odpredu, odzadu) budú iné, ak sa stav definuje inak, ako je v zadaní úlohy. Pri správnom definovaní nás však dovedú k rovnakému výsledku.

Bellmanova rovnica: $B_i(s_i)=\min\left\{\frac{c_i}{x_i}+B_{i+1}(s_{i+1}), s_{i+1}\in D\big(B_{i+1}(s_{i+1})\big),\ x_i>0\right\}$, teda

$$\boxed{B_i(s_i)=\min\left\{\frac{c_i}{x_i}+B_{i+1}(s_i+x_i), s_i+x_i\in D\big(B_{i+1}(s_{i+1})\big), x_i>0\right\}\text{, pre } i=1,2,3}$$

Pre jednotlivé *i*=1, 2, 3: $B_3(s_3)=\min\left\{\frac{4}{x_3}+B_4(s_3+x_3), s_3+x_3\in D\big(B_4(s_4)\big), x_3>0\right\}$

$$B_2(s_2)=\min\left\{\frac{1}{x_2}+B_3(s_2+x_2), s_2+x_2\in D\big(B_3(s_3)\big), x_2>0\right\}$$

$$B_1(s_1)=\min\left\{\frac{9}{x_1}+B_2(s_1+x_1), s_1+x_1\in D\big(B_2(s_2)\big), x_1>0\right\}$$

V prípade výpočtu odzadu na začiatku definujeme $B_4(s_4)=0$, pre $s_4\in\{10,20,30,40,50,60\}$. s_4=0 možno vynechať, pretože s_4=0 znamená, že sme pridelili nulové hodnoty všetkým premenným, ale x_i>0.

Výpočet B_3:

S_3=0: $s_3+x_3\in D\big(B_4(s_4)\big)\rightarrow 0+x_3\in\{10,20,30,40,50,60\}\rightarrow x_3\in\{10,20,30,40,50,60\}$ & $B_4(s_4)=0$

$B_3(0)=\min\left\{\frac{4}{x_3}, x_3\in\{10,20,30,40,50,60\}, x_3>0\right\}$=$\min\left\{\frac{4}{10},\frac{4}{20},\frac{4}{30},\frac{4}{40},\frac{4}{50},\frac{4}{60}\right\}=\frac{4}{60}$

$Z_3(0)$ = 60, pretože $B_3(0)$ má minimum pre x_3 =60.

S_3=10: $s_3+x_3\in D\big(B_4(s_4)\big)\rightarrow 10+x_3\in\{10,20,30,40,50,60\}\rightarrow x_3\in\{10,20,30,40,50\}$ & $B_4(s_4)=0$

$B_3(10)=\min\left\{\frac{4}{x_3}, x_3\in\{10,20,30,40,50\}, x_3>0\right\}$=$\min\left\{\frac{4}{10},\frac{4}{20},\frac{4}{30},\frac{4}{40},\frac{4}{50}\right\}=\frac{4}{50}$

$Z_3(10)$ = 50, pretože $B_3(10)$ má minimum pre x_3 =50.

S_3=20: $s_3+x_3\in D\big(B_4(s_4)\big)\rightarrow 20+x_3\in\{10,20,30,40,50,60\}\rightarrow x_3\in\{10,20,30,40\}$ & $B_4(s_4)=0$

$B_3(20)=\min\left\{\frac{4}{x_3}, x_3\in\{10,20,30,40\}, x_3>0\right\}$=$\min\left\{\frac{4}{10},\frac{4}{20},\frac{4}{30},\frac{4}{40}\right\}=\frac{4}{40}$; $Z_3(20)$ = 40

S_3=30: $s_3+x_3\in D\big(B_4(s_4)\big)\rightarrow 30+x_3\in\{10,20,30,40,50,60\}\rightarrow x_3\in\{10,20,30\}$ & $B_4(s_4)=0$

$B_3(30)=\min\left\{\frac{4}{x_3}, x_3\in\{10,20,30\}, x_3>0\right\}$=$\min\left\{\frac{4}{10},\frac{4}{20},\frac{4}{30}\right\}=\frac{4}{30}$; $Z_3(30)$ = 30

S_3=40: $s_3+x_3\in D\big(B_4(s_4)\big)\rightarrow 40+x_3\in\{10,20,30,40,50,60\}\rightarrow x_3\in\{10,20\}$ & $B_4(s_4)=0$

$B_3(40)=\min\left\{\frac{4}{x_3}, x_3\in\{10,20\}, x_3>0\right\}$=$\min\left\{\frac{4}{10},\frac{4}{20}\right\}=\frac{4}{20}$; $Z_3(40)$ = 20

S_3=50: $s_3 + x_3 \in D\big(B_4(s_4)\big) \rightarrow 50 + x_3 \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60\} \rightarrow x_3 \in \{10\}$ & $B_4(s_4) = 0$

$B_3(50)$=min$\left\{\frac{4}{x_3}, x_3 \in \{10\}\right\}$ min$\left\{\frac{4}{10}\right\} = \frac{4}{10}$;

$Z_3(50)$ = 10

S_3=60: $60 + x_3 \in \{10, \dots, 60\} \rightarrow x_3 \in \emptyset$

$B_3(60) = \infty$; $Z_3(60)$ = ∞

S_i	$B_1(s_1)$	$Z_1(s_1)$	$B_2(s_2)$	$Z_2(s_2)$	$B_3(s_3)$	$Z_3(s_3)$	$B_4(s_4)$
0	3/5	30	3/20	20	4/60	60	∞
10	3/4	20	11/60	20	4/50	50	0
20	19/20	20	7/30	10	4/40	40	0
30	7/5	10	3/10	10	4/30	30	0
40	∞	∞	1/2	10	4/20	20	0
50	∞	∞	∞	∞	4/10	10	0
60	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

Opt. hodnota účelovej fcie

Opt. hodnota druhého a tretieho člena účel. funkcie dohromady

Opt. hodnota tretieho člena účelovej fcie

Výpočet B_2:

s_2=0: $s_2 + x_2 \in D\big(B_3(s_3)\big) \rightarrow 0 + x_2 \in \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$ & $x_2 > 0 \rightarrow x_2 \in \{10, 20, 30, 40, 50\}$

$B_2(0) = \min\left\{\frac{1}{x_2} + B_3(0 + x_2), x_2 \in \{10, 20, 30, 40, 50\},\right\}$=min$\Big\{\frac{1}{10} + B_3(10), \frac{1}{20} + B_3(20), \frac{1}{30} +$

$+B_3(30), \frac{1}{40} + B_3(40), \frac{1}{50} + B_3(50)\Big\} = \min\{\frac{1}{10} + \frac{4}{50}, \frac{1}{20} + \frac{4}{40}, \frac{1}{30} + \frac{4}{30}, \frac{1}{40} + \frac{4}{20}, \frac{1}{50} + \frac{4}{10}\} = \frac{3}{20}$

$Z_2(0)$ = 20, pretože $B_2(0)$ má minimum pre x_2 =20.

s_2=10: $s_2 + x_2 \in D\big(B_3(s_3)\big) \rightarrow 10 + x_2 \in \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$ & $x_2 > 0 \rightarrow x_2 \in \{10, 20, 30, 40\}$

$B_2(10) = \min\left\{\frac{1}{x_2} + B_3(10 + x_2), x_2 \in \{10, 20, 30, 40\right\}$=min$\Big\{\frac{1}{10} + B_3(20), \frac{1}{20} + B_3(30), \frac{1}{30} +$

$+B_3(40), \frac{1}{40} + B_3(50)\Big\} = \min\{\frac{1}{10} + \frac{4}{40}, \frac{1}{20} + \frac{4}{30}, \frac{1}{30} + \frac{4}{20}, \frac{1}{40} + \frac{4}{10}\} = \frac{11}{60}$

$Z_2(10)$ = 20, pretože $B_2(10)$ má minimum pre x_2 =20.

s_2=20: $x_2 \in \{10, 20, 30\}$; $B_2(20)$=min$\{\frac{1}{10} + \frac{4}{30}, \frac{1}{20} + \frac{4}{20}, \frac{1}{30} + \frac{9}{10}\} = \frac{7}{30}$; $Z_2(20)$ = 10

s_2=30: $x_2 \in \{10, 20\}$; $B_2(30)$=min$\{\frac{1}{10} + \frac{4}{20}, \frac{1}{20} + \frac{4}{10}\} = \frac{3}{10}$; $Z_2(30)$ = 10

s_2=40: $x_2 \in \{10\}$; $B_2(40)$=min$\{\frac{1}{10} + \frac{4}{10}\} = \frac{1}{2}$; $Z_{12}(40)$ = 10

s_2=50: $x_2 \in \emptyset$; $B_2(50) = \infty$; $Z_2(50)$ = ∞

s_2=60: $x_2 \in \emptyset$; $B_2(60) = \infty$; $Z_2(60)$ = ∞

Výpočet B_1:

s_1=0: $s_1 + x_1 \in D\big(B_2(s_2)\big) \rightarrow 0 + x_1 \in \{0, 10, 20, 30, 40\}$ & $x_1 > 0 \rightarrow x_1 \in \{10, 20, 30, 40\}$

$B_1(0) = \min\left\{\frac{9}{x_1} + B_2(0 + x_1), x_1 \in \{10, 20, 30, 40\}\right\}$=min$\Big\{\frac{9}{10} + B_2(10), \frac{9}{20} + B_2(20), \frac{9}{30} + B_2(30), \frac{9}{40} +$

$+B_2(40)\Big\} = \min\{\frac{9}{10} + \frac{11}{60}, \frac{9}{20} + \frac{7}{30}, \frac{9}{30} + \frac{3}{10}, \frac{9}{40} + \frac{1}{2}\} = \frac{3}{5}$

$Z_1(0)$ = 20, pretože $B_1(0)$ má minimum pre x_{11} =30.

s_1=10: $s_1 + x_1 \in D\big(B_2(s_2)\big) \rightarrow 10 + x_1 \in \{0, 10, 20, 30, 40\}$ & $x_1 > 0 \rightarrow x_1 \in \{10, 20, 30\}$

$B_1(10) = \min\left\{\frac{9}{x_1} + B_2(10 + x_1), x_1 \in \{10, 20, 30\}\right\}$=min$\left\{\frac{9}{10} + B_2(20), \frac{9}{20} + B_2(30), \frac{9}{30} + B_2(40)\right\} =$

$= \min\{\frac{9}{10} + \frac{7}{30}, \frac{9}{20} + \frac{3}{10}, \frac{4}{30} + \frac{1}{2}\} = \frac{3}{4}$; $Z_1(10)$ = 20

s_1=20: $x_1 \in \{10, 20\}$; $B_1(20)$=min$\{\frac{9}{10} + \frac{3}{10}, \frac{9}{20} + \frac{1}{2}\} = \frac{19}{20}$; $Z_1(20)$ = 20

s_1=30: $x_1 \in \{10\}$; $B_1(30)$=min$\{\frac{9}{10} + \frac{1}{2}\} = \frac{7}{5}$; $Z_1(30)$ = 10

s_1=40, 50, 60: $x_1 \in \emptyset$; $B_1(40)$=∞; $Z_1(40)$ = ∞; $B_1(50)$=∞; $Z_1(50)$ = ∞; $B_1(60)$=∞; $Z_1(60)$ = ∞

Výpočet premenných x_1, x_2, x_3:

Keďže úloha je s voľným začiatkom, musíme nájsť najmenšiu hodnotu v stĺpci $B_1(s_1)$ (pretože minimalizujeme). Je to hodnota 3/5 (hodnota účelovej funkcie) v riadku so stavom 0, t.j. **optimálny stav s_1=0**. Premenné určíme zo vzťahu $x_i = Z_i(s_i)$.

$x_1 = Z_1(s_1)$, s_1=0, $x_1 = Z_1(0)$=30

$x_2 = Z_2(s_2)$, z prechodovej funkcii máme $s_2 = s_1 + x_1$=0+30, $x_2 = Z_2(30)$=10

$x_3 = Z_3(s_3)$, z prechodovej funkcii máme $s_3 = s_2 + x_2$=30+10, $x_3 = Z_3(40)$=20

$\boldsymbol{x}$=(30, 10, 20) a hodnota účelovej funkcie je 3/5.