II. OBYČAJNÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE

Tento text obsahuje stručný prehľad základných teoretických pojmov, ktoré budeme používať pri štúdiu obyčajných diferenciálnych rovníc. Sú v ňom uvedené tie typy obyčajných diferenciálnych rovníc, ktoré sú v aktuálnych sylaboch predmetu Matematika II. Riešené príklady nájdete na www. stránke FCHPT, v e-learning, Moodle, Matematika II, Cvičenia 7-9.

9 Základné pojmy

Rovnicu, v ktorej je neznámou nejaká funkcia jednej premennej, a v ktorej vystupuje aspoň jedna z jej derivácií, nazývame ***obyčajnou diferenciálnou rovnicou****.*

Ak neznáma funkcia, pre ktorú je zostavená diferenciálna rovnica, vyjadruje závislosť veličiny y od veličiny x, tak hovoríme, že hľadáme funkciu y premennej x, a zapisujeme v tvare $y = y(x)$. Všimnime si, že písmeno y označuje v zápise aj funkciu a aj hodnoty závisle premennej veličiny. Ďalej, keďže vieme funkciu akej premennej hľadáme, v zadaní diferenciálnych rovníc a pri ich riešení kvôli prehľadnosti zvyčajne argumenty funkcií nevypisujeme, značíme ich napr. y, y', y'', ... a pod.

Všeobecný tvar obyčajnej diferenciálnej rovnice pre funkciu $y = y(x)$ je

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

kde $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ je nejaký výraz premenných $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. Výraz nemusí obsahovať všetky vypísané premenné, ale nutne musí obsahovať aspoň jeden zo symbolov označujúcich derivácie neznámej funkcie. Rád najvyššej derivácie vystupujúcej v diferenciálnej rovnici sa nazýva ***rád diferenciálnej rovnice***. Diferenciálna rovnica je teda n–tého rádu, ak v nej vystupuje derivácia $y^{(n)}$ a derivácie s vyšším rádom už neobsahuje. Napr.,

- $y'' - x\,y' + e^x\,y - \sin\,x = 0$ je diferenciálna rovnica druhého rádu pre funkciu $y = y(x)$;
- $x^{(4)} - 2\,t^2\,x'' - 5 = 0$ je diferenciálna rovnica štvrtého rádu pre funkciu $x = x(t)$.

Parciálne diferenciálne rovnice sú rovnice, v ktorých je neznámou nejaká funkcia viac premenných, a v ktorých vystupujú nejaké parciálne derivácie tejto funkcie.

V ďalšom sa budeme zaoberať len obyčajnými diferenciálnymi rovnicami, a budeme hovoriť ich nazývať len "diferenciálnymi rovnicami" (skratka DR).

Riešením diferenciálnej rovnice n–tého rádu tvaru (1) na intervale $\mathcal{I} = (a, b)$ je každá funkcia $y = y(x)$, ktorá je na intervale $\mathcal{I}$ definovaná, má na ňom derivácie $y', \dots, y^{(n)}$ a po dosadení funkcie a jej derivácií do diferenciálnej rovnice pre každé $x \in \mathcal{I}$ platí

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Riešiť diferenciálnu rovnicu znamená nájsť všetky jej riešenia. Graf riešenia diferenciálnej rovnice sa nazýva ***integrálna krivka***.

Ak riešenia DR n–tého rádu (1) sa dajú vyjadriť v tvare $y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, kde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné konštanty, tak funkciu y vyjadrenú pomocou všeobecných konštánt $c_1, \ldots, c_n$ nazývame ***všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice***. Voľbou konkrétnych čísel za konštanty $c_1, \ldots, c_n$ vo všeobecnom riešení dostávame tzv. ***partikulárne riešenia*** diferenciálnej rovnice.

Napr., všeobecné riešenie y diferenciálnej rovnice $y'' = 3\,x^2$ má tvar

$$y(x) = \frac{x^4}{4} + c_1\,x + c_2, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ak dosadíme za $c_1 = -\,2$ a za $c_2 = 4$, dostaneme konkrétnu funkciu, ktorá je partikulárnym riešením tejto DR. Ak ju označíme y_p, tak

$$y_p(x) = \frac{x^4}{4} - 2\,x + 4, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

V praktických úlohách potrebujeme nájsť všetky riešenia diferenciálnej rovnice, ktoré charakterizujú určitú situáciu, t.j. riešenia diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňajú určité podmienky. Najčastejšie sú to tzv. ***začiatočné podmienky*** (alebo cauchyovské): pre diferenciálnu rovnicu n–tého rádu sa zadá n podmienok, ktorými sa predpíšu hodnoty hľadaného riešenia y a jeho derivácií $y', \ldots, y^{(n-1)}$ v jednom bode x_0, t.j., určí sa n–tica reálnych čísel $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ a žiada sa, aby

$$y(x_0) = b_0, \quad y'(x_0) = b_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}.$$

10 Diferenciálne rovnice 1. rádu

Diferenciálne rovnice 1. rádu majú vo všeobecnosti tvar $F(x, y, y') = 0$. Budeme zaoberať len dvoma typmi, a to tzv. separovateľnými diferenciálnymi rovnicami a lineárnymi diferenciálnymi rovnicami 1. rádu.

10.1 Separovateľné diferenciálne rovnice

► **Definícia 16** ***Separovateľná diferenciálna rovnica*** *má základný tvar*

$$\boxed{y' = g(x)\,h(y)} \tag{2}$$

pričom funkcia g je spojitá na intervale (a, b), funkcia h je spojitá na intervale (c, d).

Názov "separovateľná" súvisí s tým, že výraz na pravej strane je súčinom funkcie g len premennej x a funkcie h len premennej y, a preto ich možno od seba oddeliť, čiže separovať. Ak premenné odseparujeme, dostávame separovanú diferenciálnu rovnicu $\frac{1}{h(y)} y' = g(x)$.

▶ **Veta 8**

Riešenia separovateľnej diferenciálnej rovnice (2) sú

- *funkcie určené rovnicou*

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy - \int g(x)\,dx = C, \quad \textit{kde } C \in \mathbb{R},$$

  na vhodných podintervaloch intervalu (a, b)*;*

- *konštantné funkcie* $y = k$ *na intervale* (a, b)*, pričom* $k \in (c, d)$ *sú čísla určené z rovnice* $h(y) = 0$*.*

V príkladoch nebudeme používať predchádzajúci vzorec, budeme ich riešiť postupne.

Formálny postup riešenia separovateľnej diferenciálnej rovnice:

1. Separácia premenných, ak $h(y) \neq 0$:

$y' = g(x)\,h(y) \qquad /\cdot \frac{1}{h(y)},$

$\frac{1}{h(y)}\,y' = g(x)$

$\frac{1}{h(y)}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \qquad$ resp. $\qquad \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$

2. Integrovanie:

$\int \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

3. Diskusia riešení v prípadoch, keď $h(y) = 0$.

▶ **Príklad 6**

Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y' = y \operatorname{cotg} x\,.$$

Riešenie.

Zadaná diferenciálna rovnica je separovateľná. Funkcia $h: \ h(y) = y$ je spojitá na intervale $(-\infty, \infty)$ a funkcia $g: \ g(x) = \operatorname{cotg} x$ je spojitá na intervaloch typu $I_n = (0 + n\,\pi, \pi + n\,\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

a) Nech $y \neq 0$. Za tejto podmienky premenné x a y od seba odseparujeme. Po separácii premenných dostaneme separovanú diferenciálnu rovnicu, ktorá je na množinách $I_n \times (-\infty, 0)$ a $I_n \times (0, \infty)$ ekvivalentná s pôvodnou rovnicou.

Formálny postup riešenia:

$y' = y \operatorname{cotg} x \qquad /\cdot \frac{1}{y},$

$\frac{1}{y}\,y' = \operatorname{cotg} x$

$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$

$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Uvedenou rovnicou sú určené všetky riešenia separovanej diferenciálnej rovnice. Skúsme ich vyjadriť v explicitnom tvare.

Pretože $\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y|$ a $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x|$, dostávame

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Každé reálne číslo C sa dá vyjadriť ako logaritmus vhodného kladného čísla, t.j., $C = \ln k$, kde $k > 0$, a preto

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln k, \qquad \text{po úprave} \quad \ln|y| = \ln(k\,|\sin x|),\ k > 0.$$

Logaritmická funkcia je prostá, preto predchádzajúca rovnosť platí práve vtedy, keď

$$|y| = k\,|\sin x|, \quad k > 0.$$

Výrazy v absolútnej hodnote môžu byť kladné alebo záporné, po uvážení jednotlivých možností a po odstránení absolútnych hodnôt dostaneme, že riešenia majú tvar

$$y = \pm\, k \sin x, \quad k > 0.$$

Konštantná funkcia $y = 0$ je tiež na každom intervale I_n riešením tejto diferenciálnej rovnice. Nulová funkcia sa dá formálne získať z predchádzajúceho predpisu pre konštantu $k = 0$, takže všetky riešenia zadanej diferenciálnej rovnice možno zapísať jedným zápisom (koeficienty $+k$, $-k$, 0 označíme spolu ako c)

$$y(x) = c \sin x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nájdené funkcie sú riešeniami na jednotlivých intervaloch I_n.

◀

10.2 Lineárne diferenciálne rovnice 1. rádu

▶ **Definícia** **17** ***Lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu*** *má základný tvar*

$$\boxed{y' + p(x)\,y = f(x),} \tag{3}$$

kde p, f sú spojité funkcie na nejakom intervale $\mathcal{I} = (a, b)$.

Názov "lineárna diferenciálna rovnica" budeme označovať skratkou LDR. Funkcia p sa nazýva ***koeficient*** uvedenej LDR, funkcia f sa nazýva zjednodušene "***pravá strana***" LDR.

▶ **Poznámka** 1

Všeobecný tvar LDR 1. rádu je $u_0(x)\,y' + u_1(x)\,y = v(x)$, kde u_0, u_1, v sú spojité funkcie na nejakom intervale $\mathcal{I}$. Pre $u_0(x) \neq 0$, po vydelení rovnice výrazom $u_0(x)$ dostávame LDR 1. rádu v základnom tvare $y' + p(x)\,y = f(x)$, kde $p(x) = \frac{u_1(x)}{u_0(x)}$ a $f(x) = \frac{v(x)}{u_0(x)}$. Túto úpravu budeme nazývať normovaním diferenciálnej rovnice. Základným tvarom LDR 1. rádu bude v teoretických úvahách jej ***normovaný tvar*** (3).

Rozdelenie LDR 1. rádu podľa tvaru pravej strany:

- Ak pre každé $x \in (a, b)$ je $f(x) = 0$, tak LDR $y' + p(x)\,y = 0$ je ***lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu bez pravej strany*** (alebo homogénna).
- Ak funkcia f nie je nulová na celom intervale $\mathcal{I}$, tak ide o ***lineárnu diferenciálnu rovnicu 1. rádu s pravou stranou*** (alebo nehomogénnu).

Základným krokom pri riešení LDR 1. rádu je určenie všeobecného riešenia LDR bez pravej strany.

Riešenie LDR 1. rádu bez pravej strany

Uvažujme LDR 1. rádu bez pravej strany

$$y' + p(x)\,y = 0, \tag{4}$$

kde p je spojitá funkcia na intervale $\mathcal{I} = (a, b)$. Táto diferenciálna rovnica je separovateľná diferenciálna rovnica. Riešime ju teda separovaním a integrovaním, ako sme ukázali v predchádzajúcej časti. Všeobecné riešenie y LDR bez pravej strany dostaneme v tvare

$$y(x) = c\,e^{-\int p(x)\,dx}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Pre ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$ je funkcia y s uvedeným predpisom riešením LDR bez pravej strany na $\mathcal{I}$ a naopak, každé jej riešenie sa dá vyjadriť jednoznačne v takomto tvare.

Riešenie LDR 1. rádu s pravou stranou

Nasledujúca veta hovorí o štruktúre všeobecného riešenia LDR rovníc s pravou stranou.

Kvôli rozlíšeniu budeme v ďalšom všeobecné riešenie LDR bez pravej strany označovať znakom y_L a všeobecné riešenie celej LDR s pravou stranou budeme označovať y.

▶ **Veta** 9

Všeobecné riešenie y LDR 1. rádu s pravou stranou je súčtom všeobecného riešenia y_L príslušnej LDR bez pravej strany a partikulárneho riešenia y^* LDR s pravou stranou, t.j.,

$$\boxed{y = y_L + y^*}.$$

Postup hľadania všeobecného riešenia LDR 1. rádu s pravou stranou :

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Nájdeme všeobecné riešenie y_L LDR bez pravej strany.

$\boxed{\mathbf{2.}}$ Nájdeme partikulárne riešenie y^* LDR s pravou stranou.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ Zostavíme všeobecné riešenie LDR s pravou stranou : $y = y_L + y^*$.

Tento trojkrokový spôsob riešenia sa uplatňuje aj pri riešení LDR vyšších rádov.

Venujme sa 2. kroku. Partikulárne riešenie LDR bez pravej strany budeme hľadať tzv. (Lagrangeovou) metódou variácie konštanty.

Metóda variácie konštanty

Podstata metódy variácie konštanty spočíva v nahradení všeobecnej konštanty c vo všeobecnom riešení y_L LDR bez pravej strany vhodnou funkciou,

$$c \mapsto c(x),$$

a v hľadaní partikulárneho riešenia y^* LDR s pravou stranou v tvare

$$\boxed{y^*(x) = c(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}.} \tag{6}$$

Dosadením navrhnutej funkcie y^* a jej derivácie $y^{*\,\prime}$ do LDR s pravou stranou dostaneme, že funkcia y^* je riešením LDR s pravou stranou na intervale $\mathcal{I}$ práve vtedy, keď funkcia $c(x)$ má tvar

$$c(x) = \int f(x)\, e^{\int p(x)\, dx}\, dx. \tag{7}$$

(Pretože hľadáme partikulárne riešenie, tento integrál budeme chápať ako jednu ľubovoľnú primitívnu funkciu.) Dosadením nájdenej funkcie $c(x)$ do vzťahu (6), dostaneme hľadané partikulárne riešenie y^*.

V konkrétnych príkladoch sa aplikuje len základná myšlienka metódy variácie konštanty $c \mapsto c(x)$, úlohy sa riešia postupne.

▶ **Príklad 7**

Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y' + \frac{1}{x}\, y = \sin\, x.$$

Riešenie.

Zadaná diferenciálna rovnica je LDR 1. rádu s pravou stranou a je v normovanom tvare. Obe funkcie p, f, kde $p(x) = \frac{1}{x}$ a $f(x) = \sin\, x$, sú spojité na intervale $\mathcal{I}_1 = (-\infty, 0)$ alebo na intervale $\mathcal{I}_2 = (0, \infty)$. Integrálne krivky preto môžu ležať v polrovinách $x < 0$ resp. $x > 0$.

Krok $\boxed{\mathbf{1.}}$ Riešme LDR bez pravej strany $y' + \frac{1}{x}\, y = 0$. Jedným jej riešením na uvažovaných intervaloch je funkcia $y = 0$. Pre $y \neq 0$ rovnicu separujeme a integrujeme:

$y' + \frac{1}{x}\, y = 0 \qquad / \cdot \frac{1}{y},$

$\frac{1}{y}\, y' + \frac{1}{x} = 0$

$\frac{1}{y}\, dy + \frac{1}{x}\, dx = 0,$

$\int \frac{1}{y}\, dy + \int \frac{1}{x}\, dx = C, \quad \text{kde } C \in \mathbb{R},$

$\ln\, |y| + \ln\, |x| = \ln\, k, \;\; \text{kde } k > 0,\; C = \ln\, k,$

$\ln\, |y| = \ln\, \frac{k}{|x|}, \qquad \text{resp. } y = \pm\, \frac{k}{x}.$

Ak zoberieme do úvahy aj riešenie $y = 0$, ktoré sa dá získať formálne z predchádzajúceho pre $k = 0$, môžeme všeobecné riešenie y_L LDR bez pravej strany vyjadriť v tvare

$$y_L(x) = \frac{c}{x}, \quad \text{kde} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Krok $\boxed{\textbf{2.}}$ Metódou variácie konštanty hľadajme partikulárne riešenie y^* LDR s pravou stranou v tvare

$$y^*(x) = \frac{c(x)}{x},$$

kde $c(x)$ je vhodná, ale neznáma funkcia premennej x. Dosadíme funkciu y^* do rovnice s pravou stranou, t.j.

$$y^{*\,\prime} + \frac{1}{x}\, y^* = \sin\, x,$$

a konkrétne dostaneme

$$\frac{c'(x)\, x - c(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\, \frac{c(x)}{x} = \sin\, x,$$

t.j.

$$\frac{c'(x)}{x} = \sin\, x, \quad \text{a nakoniec} \quad c'(x) = x\, \sin\, x.$$

Tým sme dostali podmienku pre deriváciu neznámej funkcie c. Funkciu c určíme ako ľubovoľnú primitívnu funkciu k funkcii $x\, \sin\, x$, t.j.

$$c(x) = \int x\, \sin\, x\, \mathrm{d}x.$$

Integrál vypočítame metódou per-partes (použijeme "základnú primitívnu funkciu" pre nulovú integračnú konštantu), t.j.

$$c(x) = \int x\, \sin\, x\, \mathrm{d}x = -x\, \cos\, x + \int \cos\, x\, \mathrm{d}x = -x \cos\, x + \sin\, x.$$

Zostavíme hľadané partikulárne riešenie y^*:

$$y^*(x) = \frac{c(x)}{x}, \quad \text{t.j.} \quad y^*(x) = -\cos\, x + \frac{1}{x}\, \sin\, x.$$

Krok $\boxed{\textbf{3.}}$ Všeobecné riešenie y LDR s pravou stranou má tvar $y = y_L + y^*$, t.j.

$$y(x) = \frac{c}{x} - \cos\, x + \frac{1}{x}\, \sin\, x.$$

◄

11 Lineárne diferenciálne rovnice 2. rádu

▶ **Definícia 18** *Základný tvar lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu je*

$$\boxed{y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x)} \tag{8}$$

kde funkcie p, q a f sú spojité na nejakom intervale (a, b).

Funkcie p, q sa nazývajú ***koeficienty diferenciálnej rovnice***, funkcia f sa stručne nazýva ***pravá strana diferenciálnej rovnice***.

Podľa funkcie na pravej strane budeme rozlišovať dva typy lineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu, a to

- ***lineárnu diferenciálnu rovnicu 2. rádu bez pravej strany*** (alebo homogénnu), ak pre $\forall\, x \in (a, b)$ je $f(x) = 0$;
- ***lineárnu diferenciálnu rovnicu 2. rádu s pravou stranou*** (alebo nehomogénnu), ak funkcia f nie je nulová na celom intervale (a, b).

Príkladom lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu s pravou stranou je napríklad rovnica

$$y'' - (x + 1)\, y' + (\ln\, x)\, y = x, \qquad x \in (0, \infty),$$

rovnica

$$y'' - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, y' + (x - 1)\, y = 0, \qquad x \in (-1, 1)$$

je lineárnou diferenciálnou rovnicou 2. rádu bez pravej strany.

Postup riešenia LDR 2. rádu je podobný ako postup riešenia LDR 1. rádu. Preto sa budeme najskôr zaoberať riešením LDR 2. rádu bez pravej strany.

11.1 Lineárne diferenciálne rovnice 2. rádu bez pravej strany

Začnime dôležitou vlastnosťou riešení lineárnych diferenciálnych rovníc bez pravej strany:

▶ **Veta 10**

Ak funkcie y_1, y_2 sú na intervale $\mathcal{I} = (a, b)$ riešeniami LDR bez pravej strany, tak aj funkcia $y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$, kde c_1, c_2 sú ľubovoľné reálne čísla, je na intervale $\mathcal{I}$ riešením tejto diferenciálnej rovnice.

Ináč povedané, každá lineárna kombinácia nejakých riešení uvedenej LDR je opäť jej riešením. Veta platí pre ľubovoľný konečný počet funkcií $y_1, \ldots, y_k$.

V ďalšom ukážeme, že každé riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu bez pravej strany je lineárnou kombináciou nejakých vhodných "základných" riešení. Preto sa budeme zaoberať najskôr problémom, čo je "základné" alebo tzv. "fundamentálne" riešenie takýchto diferenciálnych rovníc. Z tohoto dôvodu si zavedieme pojem lineárne nezávislých resp. lineárne závislých funkcií na intervale $\mathcal{I}$.

▶ **Definícia** **19**

Funkcie $y_1, y_2, \ldots, y_k$ *sú **lineárne nezávislé funkcie na intervale** $\mathcal{I}$, ak žiadna z nich sa na tomto intervale nedá vyjadriť ako lineárna kombinácia ostatných. V opačnom prípade sú lineárne závislé.*

V prípade dvoch funkcií definícia hovorí, že funkcie y_1, y_2 sú lineárne nezávislé na intervale $\mathcal{I}$, ak ani jedna nie je na uvažovanom intervale konštantným násobkom druhej.
$\boxed{!}$ Funkcie $y_1(x) = e^{rx}$ a $y_2(x) = e^{sx}$, ak $r \neq s$, sú na intervale $(-\infty, \infty)$ lineárne nezávislé, lebo žiadna z funkcií y_1, y_2 nie konštantným násobkom druhej.

Nech funkcie y_1, y_2 majú na intervale $\mathcal{I}$ derivácie y_1', y_2'. Pre funkcie y_1, y_2 a každé $x \in \mathcal{I}$ zaveďme determinant

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x).$$

Pre každé $x \in \mathcal{I}$ je $w(x)$ reálne číslo. Takto zostavený determinant sa nazýva ***wronskián*** funkcií y_1 a y_2 na intervale $\mathcal{I}$.
Ak funkcie y_1 a y_2 sú riešeniami LDR 2. rádu bez pravej strany, tak sa dá dokázať nasledujúce tvrdenie.

▶ **Veta** **11**

Riešenia y_1, y_2 *lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu bez pravej strany sú lineárne nezávislé na intervale* $\mathcal{I}$ *práve vtedy, ak ich wronskián* $w(x)$ *je v každom bode intervalu nenulový, t.j., práve vtedy, ak*

$$\forall\, x \in \mathcal{I}: \quad w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) \neq 0.$$

Veta dáva prostriedok na zistenie lineárnej nezávislosti riešení LDR, a súčasne dôležitú informáciu, že z lineárnej nezávislosti *riešení* y_1, y_2 LDR bez pravej strany vyplýva nenulovosť ich wronskiánu $w(x)$ pre každé $x \in \mathcal{I}$.

▶ **Definícia** **20** *Ak funkcie* y_1, y_2 *sú ľubovoľné dve lineárne nezávislé riešenia LDR 2. rádu bez pravej strany na intervale* $\mathcal{I}$*, tak množina* $\mathcal{F} = \{y_1, y_2\}$ *sa nazýva jej **fundamentálnym systémom riešení na intervale** $\mathcal{I}$**.***

▶ **Príklad** **8**

Funkcie y_1, y_2, kde $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = x\, e^{2x}$ sú na intervale $(-\infty, \infty)$ riešeniami lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu $y'' - 4\, y' + 4\, y = 0$ (overte). Na základe Vety 11 sú to lineárne nezávislé riešenia, a teda tvoria fundamentálny systém riešení tejto diferenciálnej rovnice na uvedenom intervale, t.j. $\mathcal{F} = \{e^{2x}, x\, e^{2x}\}$.

◀

▶ **Veta 12**
Nech $\{y_1, y_2\}$ *je fundamentálny systém riešení LDR 2. rádu bez pravej strany na intervale* $\mathcal{I}$. *Ak funkcia* y *je riešením tejto diferenciálnej rovnice na intervale* $\mathcal{I}$, *tak sa na tomto intervale dá jednoznačne vyjadriť v tvare*

$$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2\,,$$

kde $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$.

Z Vety 10 a Vety 12 už vyplýva nasledujúce dôležité tvrdenie o štruktúre všeobecného riešenia LDR 2. rádu bez pravej strany.

▶ **Veta 13** *Všeobecné riešenie* y *LDR 2. rádu bez pravej strany má tvar*

$$\boxed{y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2},$$

pričom $y_1,\, y_2$ *sú ľubovoľné dve lineárne nezávislé riešenia tejto rovnice a* $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ *sú ľubovoľné konštanty.*

Už zostáva len otázka, ako určiť nejaké dve lineárne nezávislé riešenia LDR 2. rádu bez pravej strany. Určenie fundamentálneho systému je pri riešení všeobecných LDR 2. rádu kameňom úrazu. Preto sa budeme venovať riešeniu tzv. LDR s konštantnými koeficientami, kde tento problém nie je, a naviac, sú veľmi dôležité pre aplikácie.

11.2 Lineárne diferenciálne rovnice 2. rádu s konštantnými koeficientami bez pravej strany

Lineárne diferenciálne rovnice 2. rádu s konštantnými koeficientami, sú špeciálnym typom lineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu. Ich koeficienty sú konštantné funkcie.

▶ **Definícia 21** *Základný tvar lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu s konštantnými koeficientami je*

$$\boxed{y'' + p\,y' + q\,y = f(x),} \tag{9}$$

pričom $p,\, q \in \mathbb{R}$ *a* f *je spojitá funkcia na nejakom intervale* (a, b).

Kvadratickú rovnicu

$$\boxed{r^2 + p\,r + q = 0}$$

prislúchajúcu LDR (9) nazývame ***charakteristická rovnica*** LDR 2. rádu s konštantnými koeficientami bez pravej strany.

Keďže charakteristická rovnica k LDR 2. rádu s konštantnými koeficientami je kvadratická rovnica, tak má buď dva rôzne reálne korene alebo jeden dvojnásobný reálny koreň alebo dvojicu komplexne združených koreňov.

I. Charakteristická rovnica má dva rôzne reálne korene

Nech diskriminant charakteristickej rovnice $r^2 + p\,r + q = 0$ je $D = p^2 - 4q > 0$. Charakteristická rovnica má dva rôzne reálne korene $r_1,\, r_2 = \frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}$. Na základe predchádzajúcej teórie dostávame:

▶ **Veta 14**

Ak charakteristická rovnica LDR $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ má dva rôzne reálne korene $r_1,\, r_2$, tak systém $\{e^{r_1 x},\, e^{r_2 x}\}$ je fundamentálnym systémom riešení diferenciálnej rovnice na intervale $(-\infty, \infty)$. Jej všeobecné riešenie y je dané vzťahom

$$y(x) = c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, e^{r_2 x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

II. Charakteristická rovnica má dvojnásobný reálny koreň

Nech charakteristická rovnica $r^2 + p\,r + q = 0$ má diskriminant $D = p^2 - 4q = 0$, t.j., má dvojnásobný (reálny) koreň, a to $r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$. Označme si tento koreň krátko r. Platí:

▶ **Veta 15**

Ak charakteristická rovnica LDR $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ má (reálny) dvojnásobný koreň r, tak systém $\{e^{r x},\, x\,e^{r x}\}$ je fundamentálnym systémom riešení diferenciálnej rovnice na intervale $(-\infty, \infty)$. Jej všeobecné riešenie y je dané vzťahom

$$y(x) = c_1\, e^{r x} + c_2 x\; e^{r x}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

III. Charakteristická rovnica má komplexné korene

Ak charakteristická rovnica $r^2 + p\,r + q = 0$ má diskriminant $D = p^2 - 4q < 0$, tak má dva komplexne združené korene $r_1,\, r_2 = \frac{-p\pm i\sqrt{|D|}}{2}$. Označme $\alpha = \frac{-p}{2}$ a $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2}$, takže korene sú $r_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$, pričom $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ a $\beta \neq 0$. Vieme, že pre koreň $r_1 = \alpha + i\,\beta$ je funkcia y_{kompl},

$$y_{kompl}(x) = e^{(\alpha + i\,\beta)\,x} = e^{\alpha\,x}\,\cos\,\beta\,x + i\,e^{\alpha\,x}\,\sin\,\beta\,x$$

je riešením LDR $y'' + p\,y' + q\,y = 0$. Index *kompl* znamená, že funkcia y_{kompl} je komplexná funkcia reálnej premennej. Označme reálnu časť funkcie y_{kompl} ako y_1, imaginárnu y_2, t.j.,

$$y_1(x) = e^{\alpha\,x}\,\cos\,\beta\,x, \qquad y_2(x) = e^{\alpha\,x}\,\sin\,\beta\,x\,.$$

Funkcie y_1 a y_2 sú reálne funkcie reálnej premennej a sú tiež riešeniami LDR $y'' + p\,y' + q\,y = 0$. Sú lineárne nezávislé na intervale $(-\infty, \infty)$, čo znamená, že riešenia $y_1,\, y_2$ tvoria už fundamentálny systém riešení uvažovanej diferenciálnej rovnice, a tým už komplexne združený koreň $r_2 = \alpha - i\,\beta$ nemusíme vyšetrovať. Zhrňme výsledky získané pre tento prípad:

▶ **Veta 16**

Ak charakteristická rovnica LDR $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ má komplexné korene $\alpha \pm i\,\beta$, tak systém $\{e^{\alpha x} \cos \beta x,\ e^{\alpha x} \sin \beta x\}$ je fundamentálnym systémom riešení diferenciálnej rovnice na intervale $(-\infty, \infty)$. Jej všeobecné riešenie y je dané vzťahom

$$y(x) = c_1\, e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2\, e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

11.3 Lineárne diferenciálne rovnice 2. rádu s pravou stranou

Uvažujme opäť všeobecnú LDR 2. rádu s pravou stranou. Dá sa ukázať, že pre štruktúru jej všeobecného riešenia platí analogická veta ako pre LDR 1. rádu s pravou stranou.

▶ **Veta 17**

Všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu s pravou stranou (8) má tvar

$$y = y_L + y^*,$$

kde y_L je všeobecné riešenie príslušnej diferenciálnej rovnice bez pravej strany a y^* je ľubovoľné partikulárne riešenie LDR s pravou stranou.

Pripomeňme, že všeobecné riešenie y_L lineárnej diferenciálnej rovnice 2. rádu bez pravej strany má tvar $y_L = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$, kde c_1, c_2 s ľubovoľné reálne konštanty a y_1, y_2 sú dve lineárne nezávislé riešenia tejto DR.

Veta nás vedie k nasledujúcemu postupu pri riešení LDR s pravou stranou:

Postup riešenia LDR 2. rádu s pravou stranou:

1. Nájdeme fundamentálny systém $\{y_1,\ y_2\}$ riešení LDR bez pravej strany a zapíšeme jej všeobecné riešenie y_L, $y_L = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$.

2. Nájdeme partikulárne riešenie y^* LDR s pravou stranou.

3. Zostavíme všeobecné riešenie LDR s pravou stranou, $y = y_L + y^*$.

Zostáva nám ešte ukázať, ako nájdeme v 2. kroku partikulárne riešenie y^* pre LDR s pravou stranou. Jednou z možných metód je tzv. metóda variácie konštánt.

Metóda variácie konštánt

Metóda variácie konštánt je všeobecná metóda na určenie partikulárneho riešenia LDR s pravou stranou, ktorú môžeme použiť pre ľubovoľnú spojitú funkciu f na pravej strane DR.

Princíp metódy variácie konštánt je rovnaký ako princíp metódy variácie konštanty, s ktorou sme sa stretli pri riešení LDR 1. rádu. Vychádzame zo všeobecného riešenia $y_L = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ LDR bez pravej strany, ktorá prislúcha zadanej LDR s pravou stranou. Konštanty

c_1 a c_2 v predpise funkcie y_L nahradíme neznámymi funkciami, $c_1 \mapsto c_1(x)$, $c_2 \mapsto c_2(x)$ a partikulárne riešenie y^* LDR s pravou stranou navrhneme v tvare

$$y^*(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)\,.$$

Funkcie c_1, c_2 môžu byť ľubovoľné, ale také, že horeuvedená funkcia y^* je riešením celej LDR aj s pravou stranou. Dosadením funkcie y^* do LDR aj s pravou stranou dostaneme pre derivácie $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$ hľadaných funkcií nasledujúci systém rovníc

$$\begin{aligned} c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Z podmienky lineárnej nezávislosti riešení y_1 a y_2 a na základe Cramerovho pravidla dostaneme, že uvedený systém má jediné riešenie. Označme si

$$w_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \qquad w_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Potom to jediné riešenie uvedeného systému rovníc je dvojica derivácií hľadaných funkcií

$$c_1'(x) = \frac{w_1(x)}{w(x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{w_2(x)}{w(x)}.$$

Funkcie $c_1(x)$ a $c_2(x)$ sa určia nakoniec integrovaním.
Spolu platí

▶ **Veta 18**

Ak $\{y_1, y_2\}$ je fundamentálny systém riešení LDR 2. rádu bez pravej strany na intervale $\mathcal{I}$, tak partikulárne riešenie y^* LDR 2. rádu s pravou stranou na tomto intervale má tvar

$$y^*(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x),$$

kde

$$c_1(x) = \int \frac{w_1(x)}{w(x)}\, \mathrm{d}x, \qquad c_2(x) = \int \frac{w_2(x)}{w(x)}\, \mathrm{d}x, \tag{10}$$

pričom

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad w_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad w_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Takto sformulovaná veta sa dá jednoducho rozšíriť aj pre LDR vyšších rádov.

11.4 LDR 2. rádu s konštantnými koeficintami so špeciálnou pravou stranou

Pretože LDR 2.rádu s konštatnými koeficientami s pravou stranou sú len špeciálnym typom LDR 2.rádu s pravou stranou, na ich riešenie môžeme použiť postup uvedený v časti 11.3. Hľadanie partikulárnych riešení metódou variácie konštánt môže byť kvôli počítaniu integrálov náročné. Partikulárne riešenia LDR s konštatnými koeficientami, ktoré majú tzv. špeciálny tvar pravej strany, sa dajú hľadať aj jednoduchším spôsobom - bez integrovania. Zdôraznime, že ide o metódu použiteľnú len v prípade LDR s konštantnými koeficientami a so špeciálnym tvarom pravej strany.
Budeme hovoriť, že LDR s konštantnými koeficientami má ***špeciálny tvar pravej strany***, ak funkcia f na pravej strane rovnice má tvar

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I.} & f(x) = P(x)\, e^{\alpha\, x} \\ \text{II.} & f(x) = P(x)\, e^{\alpha\, x} \cos \beta\, x \\ \text{III.} & f(x) = P(x)\, e^{\alpha\, x} \sin \beta\, x \end{array}}$$

kde α, β sú reálne čísla a P je nejaký polynóm.
Všetky uvedené pravé strany sú len zvláštnymi prípadmi pravej strany typu

$$f(x) = e^{\alpha\, x}\, \left(P(x) \cos \beta\, x + Q(x) \sin \beta\, x\right).$$

Prípad I. dostaneme pre $\beta = 0$, prípad II. pre $Q(x) \equiv 0$ a prípad III. pre $P(x) \equiv 0$. Pretože prakticky sa často vyskytujú pravé strany práve v tvaroch uvedených v tabuľke, budeme sa zaoberať špeciálnymi pravými stranami v týchto tvaroch. Všeobecný prípad môžeme riešiť napr. pomocou princípu superpozície, viď ďalej.

Pravá strana typu I.

▶ **Veta 19**

LDR 2. rádu s konštantnými koeficientami

$$y'' + p\, y' + q\, y = P(x)\, e^{\alpha\, x},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$, a P je nejaký polynóm, má partikulárne riešenie y^* tvaru

$$y^*(x) = x^k\, Q(x)\, e^{\alpha\, x},$$

kde číslo $k \in \{0, 1, 2\}$ vyjadruje násobnosť čísla α medzi koreňami charakteristickej rovnice (prislchajúcej k diferenciálnej rovnice bez pravej strany) a Q je neznámy polynóm, ktorý je rovnakého stupňa ako polynóm P.

Ak reálne číslo α nie je koreňom charakteristickej rovnice, kladieme $k = 0$, pre jednoduchý koreň je $k = 1$ a ak α je dvojnásobným koreňom charakteristickej rovnice, položíme $k = 2$. Neznáme polynómy Q stupňa 0 sú konštanty, budeme ich zapisovať v tvare $Q(x) = a$, polynómy 1. stupňa v tvare $Q(x) = a\,x + b$, polynómy 2. stupňa ako $Q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, kde a, b, c sú vhodné reálne čísla, atď.

▶ **Príklad 9**

Riešme diferenciálnu rovnicu $y'' - 2y' = x^2 + 5$.

Riešenie.

Zadaná diferenciálna rovnica je LDR 2. rádu s konštantnými koeficientami a špeciálnym tvarom pravej strany.

1. Riešime najskôr LDR bez pravej strany $y'' - 2y' = 0$. Charakteristická rovnica má korene $r_1 = 0$ a $r_2 = 2$, a preto všeobecné riešenie y_L na intervale $(-\infty, \infty)$ je

$$y_L(x) = c_1 + c_2\,e^{2\,x}, \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Pravá strana diferenciálnej rovnice má špeciálny tvar. Dá sa predstaviť v tvare $f(x) = (x^2 + 5)\,e^{0\,x}$, t.j. $P(x) = x^2 + 5$ je polynóm 2. stupňa, $\alpha = 0$. Pretože $\alpha = 0$ je jednoduchý koreň charakteristickej rovnice, položíme $k = 1$, za neznámy polynóm Q použijeme polynóm rovnakého stupňa ako bol polynóm P, teda $Q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$. Preto návrh partikulárneho riešenia je

$$y^*(x) = x^1\,(a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{0\,x}, \quad \text{po úprave} \quad y^*(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x.$$

Postupne vypočítame derivácie $y^{*\,\prime}$, $y^{*\,\prime\prime}$ a dosadíme do rovnice s pravou stranou a určíme koeficienty a, b, c neznámeho polynómu Q. Po úprave dostaneme

$$6\,a\,x + 2\,b - 2\,(3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c) = x^2 + 5,$$

resp.

$$-6\,a\,x^2 + (6a - 4b)\,x + (2b - 2c) = x^2 + 5.$$

Z rovnosti dvoch polynómov - porovnaním koeficientov stojacich pri rovnakých mocninách - dostaneme systém 3 rovníc s neznámymi a, b, c :

$$-6\,a = 1, \quad 6a - 4b = 0, \quad 2b - 2c = 5,$$

ktorého riešením je jediná trojica $a = -\frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{11}{4}$, a preto hľadané partikulárne riešenie y^* je

$$y^*(x) = -\frac{1}{6}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{11}{4}\,x.$$

3. Všeobecné riešenie zadanej diferenciálnej rovnice je $y = y_L + y^*$, t.j.

$$y(x) = c_1 + c_2\,e^{2\,x} - \frac{1}{6}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{11}{4}\,x \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R},$$

pričom jednotlivé funkcie sú riešeniami na intervale $(-\infty, \infty)$.

◀

Pravé strany typu II. a III.

Prípad špeciálnych strán typu II. a III. sa rieši na základe nasledujúcej vety.

▶ **Veta 20**

LDR s konštantnými koeficientami

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x),$$

kde pravá strana má špeciálny tvar

$$f(x) = P(x)\,e^{\alpha\,x}\cos\beta\,x \qquad \textit{alebo} \quad f(x) = P(x)\,e^{\alpha\,x}\sin\beta\,x,$$

pričom α, $\beta \in \mathbb{R}$, a P je nejaký polynóm, má partikulárne riešenie y^* tvaru

$$y^*(x) = x^k\,e^{\alpha\,x}\,(Q(x)\cos\beta\,x + R(x)\sin\beta\,x),$$

kde číslo $k \in \{0,1\}$ vyjadruje násobnosť komplexného čísla $\alpha + i\,\beta$ medzi koreňami charakteristickej rovnice (prislúchajúcej k LDR) a Q, R sú polynómy rovnakého stupňa ako je polynóm P.

Ak číslo $\alpha + i\,\beta$ nie je koreňom charakteristickej rovnice, kladieme $k = 0$, ak je jednoduchým koreňom, tak $k = 1$. (Pretože charakteristická rovnica rovníc 2. rádu je vždy kvadratická, iné možnosti nie sú.)

▶ **Príklad 10**

Riešme diferenciálnu rovnicu

$$y'' - 4\,y' + 3\,y = 2\sin 3\,x.$$

Riešenie.

1. Riešme najskôr LDR bez pravej strany. Jej charakteristická rovnica $r^2 - 4\,r + 3 = 0$ má korene $r_1 = 1$, $r_2 = 3$. Všeobecné riešenie LDR y_L bez pravej strany má tvar

$$y_L(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{3\,x}, \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Hľadajme partikulárne riešenie y^* LDR s pravou stranou. Pravá strana rovnice má špeciálny tvar $f(x) = 2\sin 3\,x$. Môžeme si ju predstaviť v tvare $f(x) = 2\,e^{0\,x}\sin 3\,x$, takže $P(x) = 2$ je polynóm stupňa 0, $\alpha = 0$ a $\beta = 3$. Komplexné číslo $\alpha + i\,\beta = 3\,i$ nie je koreňom charakteristickej rovnice, preto položíme $k = 0$. Polynómy Q a R budú tak ako polynóm

P nultého stupňa, teda nejaké konštanty, vo všeobecnosti rôzne, $Q(x) = a$, $R(x) = b$. Na základe predchádzajúcej vety budeme hľadať partikulárne riešenie y^* v tvare

$$y^*(x) = x^0\, e^{0\,x}\, (a\, \cos\, 3\,x + b\, \sin\, 3\,x) = a\, \cos\, 3\,x + b\, \sin\, 3\,x.$$

Jeho derivácie sú:
$y^*{}'(x) = -\,3\,a\, \sin\, 3\,x + 3\,b\, \cos\, 3\,x, \qquad y^*{}''(x) = -\,9\,a\, \cos\, 3\,x - 9\,b\, \sin\, 3\,x.$
Dosadením do rovnice s pravou stranou dostaneme

$$-\,9\,a\, \cos\, 3\,x - 9\,b\, \sin\, 3\,x + 12\,a\, \sin\, 3\,x - 12\,b\, \cos\, 3\,x + 3\,a\, \cos\, 3\,x + 3\,b\, \sin\, 3\,x = 2\, \sin\, 3\,x.$$

Zodpovedajúce si členy na ľavej strane združíme a nakoniec usporiadame vzhľadom na výrazy $\cos\, 3\,x$ a $\sin\, 3\,x$. Dostaneme

$$(-6\,a - 12\,b)\, \cos\, 3\,x + (12\,a - 6\,b)\, \sin\, 3\,x = 2\, \sin\, 3\,x.$$

Uvedená rovnosť platí pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ práve vtedy, ak

$$-6\,a - 12\,b = 0 \quad \text{a} \quad 12\,a - 6\,b = 2,$$

(t.j. ak sa rovnajú koeficienty stojace pri výrazoch $\cos\, 3\,x$ resp. $\sin\, 3\,x$). Zostavený systém rovníc má jediné riešenie: $a = \frac{2}{15}$ a $b = -\,\frac{1}{15}$. Hľadané partikulárne riešenie y^* na intervale $(-\infty, \infty)$ je

$$y^*(x) = \frac{2}{15}\, \cos\, 3\,x - \frac{1}{15}\, \sin\, 3\,x.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Všeobecné riešenie y danej diferenciálnej rovnice má tvar

$$y(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{3\,x} + \frac{2}{15}\, \cos\, 3\,x - \frac{1}{15}\, \sin\, 3\,x, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Všetky funkcie sú riešeniami na intervale $(-\infty, \infty)$.

◀

11.5 Princíp superpozície

Princíp superpozície je vlastnosť, ktorá umožňuje rozložiť pravú stranu rovnice na súčet jednoduchších funkcií, a partikulárne riešenie celej rovnice hľadať ako súčet partikulárnych riešení prislúchajúcim k týmto jednoduchším pravým stranám. Uveďme si vetu pre LDR s konštantnými koeficientami, v najjednoduchšom prípade rozkladu pravej strany na súčet dvoch funkcií.

▶ **Veta 21**

Uvažujme LDR s konštantnými koeficientami s pravou stranou tvaru

$$y'' + p\,y' + q\,y = f_1(x) + f_2(x), \tag{11}$$

kde f_1, f_2 sú spojité funkcie na nejakom intervale $\mathcal{I}$. Ak funkcia y_1^* je partikulárnym riešením LDR

$$y'' + p\,y' + q\,y = f_1(x)$$

a funkcia y_2^* je partikulárnym riešením LDR

$$y'' + p\,y' + q\,y = f_2(x)$$

na intervale $\mathcal{I}$, tak funkcia $y^* = y_1^* + y_2^*$ je partikulárnym riešením rovnice (11) na tomto intervale.

Napr., LDR $y'' - 4\,y' + 4\,y = 1 + x + e^{2x}$ je diferenciálna rovnica, ktorá nemá špeciálny tvar pravej strany. Ak budeme uvažovať pravú stranu ako jednu funkciu danú vzťahom $f(x) = 1 + x + e^{2x}$, tak partikulárne riešenie môžeme hľadať len metódou vhodnou pre všeobecný prípad - metódou variácie konštánt. Ak si však pravú stranu rozdelíme na súčet dvoch funkcií, a to $f_1(x) = 1 + x$ a $f_2(x) = e^{2x}$, obe diferenciálne rovnice

$$\text{(A)}\quad y'' - 4\,y' + 4\,y = 1 + x \qquad \text{a} \qquad \text{(B)}\quad y'' - 4\,y' + 4\,y = e^{2x}$$

majú pravú stranu špeciálneho tvaru, čo môžeme využiť pri hľadaní ich partikulárnych riešení. Všeobecné riešenie celej zadanej DR má tvar $y = y_L + y_1^* + y_2^*$, kde y_L je všeobecné riešenie DR $y'' - 4\,y' + 4\,y = 0$, y_1^* je partikulárne riešenie DR (A), y_2^* je partikulárne riešenie DR (B).