1 Kombinatorika

1.1 Pravidlo sčítania:

Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú disjunktné množiny, potom platí

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$$

Príklad 1.1 (Hrady z kociek) *:*
Hrady z kociek staváme tak, že vedľa seba staváme veže, rovnakej alebo rôznej výšky. Podmienkou je, že veža vľavo je vyššia nanajvýš rovnako vysoká ako veža vpravo od nej. Teda výška veží pri pohľade zľava doprava klesá, alebo zostáva rovnaká. Aký je počet navzájom rôznych hradov, vyhovujúcich týmto pravidlám?

Riešenie úlohy spočíva v rozdelení úlohy na niekoľko dizjunktných úloh. Budeme postupne počítať, koľko je 9-poschodových hradov, koľko 8-poschodových atď. až po to, koľko je jednoposchodových hradov. Jednotlivé počty potom sčítame. Hradov je 30.

Dobré rady pri riešení problémov:
Ak je problém príliš ťažký, rozdeľte ho na niekoľko jednoduchších problémov.
Pri riešení kombinatorických úloh vypisovaním všetkých možností je vhodné urobiť si v tom nejaký systém, podľa ktorého budem vedieť, či už sa daná možnosť vyskytla, alebo ešte nie.

1.2 Pravidlo násobenia:

Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú disjunktné množiny, potom platí

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$$

Príklad 1.2 (Prípustné heslá) *:*
Prípustné heslá sú tvorené sekvenciou 6 až 8 znakov, prvé musí byť písmeno, ostatné písmená alebo čísla

$$F = \{a, b, ..., z, A, B, ..., Z\}, \qquad S = \{a, b, ..., z, A, B, ..., Z, 0, 1, ..., 9\}$$

$$\begin{aligned}
|(F \times S^5) \cup (F \times S^6) \cup (F \times S^7)| &= |(F \times S^5) \cup (F \times S^6) \cup (F \times S^7)| \\
&= |(F \times S^5)| + |(F \times S^6)| + |(F \times S^7)| \\
&= |F| \cdot |S^5| + |F| \cdot |S^6| + |F| \cdot |S^7| \\
&= 1.8 \cdot 10^{14}
\end{aligned}$$

1.3 Zobrazenie medzi množinami, mapovanie:

Príklad 1.3 (Mapovanie na binárne postupnosti:) *Majme množinu* $\{x_1, x_2, x_3\}$*, vymenujeme všetky podmnožiny:*

$$\{\emptyset\},\ \{x_1\},\ \{x_2\},\ \{x_3\},\ \{x_1, x_2\},\ \{x_1, x_3\},\ \{x_2, x_3\},\ \{x_1, x_2, x_3\}$$

Vyjadriť v bitových sekvenciách:

$$(0,0,0), \quad (1,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,1)$$

$$(1,1,0), \quad (1,0,1), \quad (1,0,1), \quad (1,1,1)$$

Majme množinu $\{x_1, x_2, ..., x_8\}$*, vyjadrenie podmnožín ako 8 bitové slová*

$$\{x_2, x_3, x_6, x_7, x_8\} \quad \rightarrow \quad (0,1,1,0,0,1,1,1)$$

Koľko podmnožín má n- prvková množina?

$$\{0,1\} \times \{0,1\} \times ... \times \{0,1\} = \{0,1\}^n \quad \Rightarrow \quad |\times\{0,1\}^n| = |\times\{0,1\}|^n = 2^n$$

Výsledok hokejového zápasu CAN:SVK je 6:3, vyjadrite všetky jeho možné priebehy ako postupnosť núl a jednotiek.

Cesta do školy v NY vedie v mriežkovej sieti streets a avenues smerom 3 krát na sever a 5 krát na východ. Koľko rôznych možností je, ako sa dostať do školy? Vyjadrite tieto cesty ako postupnosť núl a jednotiek.

Príklad 1.4 (Šišky a polevy) *:*
Na šišky môžeme dávať 5 rôznych poliev (glazúr). Koľko je všetkých možných tuctov?

H - čokoláda, L - lemon, C - cukor, N - nugát, B - bez. Jedna možnosť: HHHLLLLCCNBBB, druhá: HHLCCCCCCBBBB. Možnosti namapujeme do 16 bitových slov, zachováme poradie H L C N B, a jednotkami oddelíme jednotlivé polevy:

$$\text{HHHLLLLCCNBB} \quad \rightarrow \quad 0001000010010100$$

$$\text{HHLCCCCCCBBB} \quad \rightarrow \quad 0010100000011000$$

Čo donesie poslíček, keď mu povieme 15?
15 = 0000000000001111 - 12 šišiek s čokoládou.

Udiala sa bijekcia medzi tuctami šišiek a 16bit slovami so 4 - jednotkami.

1.4 Pravidlo bijekcie:

Ak $f : A \rightarrow B$ je bijekcia, potom $|A| = |B|$.

Platí aj:
Ak $f : A \rightarrow B$ je injekcia, potom $|A| \leq |B|$.
Ak $f : A \rightarrow B$ je surjekcia, potom $|A| \geq |B|$.

Príklad 1.5 (Každý s každým) *Na turnaji hralo 5 mužstiev systémom každý s každým, koľko zápasov sa na turnaji odohralo?*
Koľko leteckých lineik medzi piatimi mestami je možné vytvoriť?
Koľko hrán má úplný graf s piatimi vrcholmi?
Na stretnutí si päť politikov pripilo na úspech. Každý si štrngol s každým, koľko štrngnutí sa ozvalo?

1.5 Pravidlo delenia:

Ak f je zobrazenie $A \to B$, ktoré mapuje k prvkov z A do jedného prvku z B, $(k - do - 1)$, potom platí

$$|A| = k|B| \qquad |B| = \frac{|A|}{k}$$

Príklad 1.6 (Súťaž krásy) *V súťaži o najkrajšieho študenta na FRI sa spomedzi 12 uchádzačov umiestnili traja medailisti. Koľko ke možností, ako vybrať zlatého, strieborného a brondzového krásavca? Prví traja potom získali mesačnú stáž na Fakulte humanitných vied. Koľko je možností ako vybrať troch spomedzi 12 finalistov, ktorí pôjdu na stáž?*

Príklad 1.7 (Šachovnica) *Aký je počet všetkých možností ako umiestniť 2 veže na šachovnici bez kolízie? Pozícia* (r_1, s_1, r_2, s_2) *je rovnaká, ako* (r_2, s_2, r_1, s_1).

$$\frac{8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7}{2}$$