TEÓRIA MNOŽÍN A REÁLNYCH ČÍSEL

A01: Dokaz vety, resp. daného tvrdenia je logický proces, ktorého cieľom je ukázať pravdivosť tvrdenia pomocou axióm, definícií a už predtým dokázaných viet. Dôkazy môžu mať rôznu formu, najznámejšie druhy dôkazov sú priamy dokaz, nepriamy dokaz a dokaz matematickou indukciou. Priamym dokazom sa dokazuje platnosť pôvodnej implikácie p → q. Predpokladáme, že výrok p je pravdivý, potom pomocou definícií, axióm a už dokázaných viet ukážeme, že platí výrok q. Prakticky zostrojíme konečnú postupnosť pravdivých výrokov $p1$, $p2$, . . . pk, ktorú môžeme symbolicky zapísať $p \to p1 \to p2 \to \cdots \to pk \to q$. Nepriamy dokaz sa podobne ako priamy dôkaz používa pri dokazovaní platnosti viet tvaru p ⇒ q. Pri nepriamom dôkaze sa nedokazuje platnosť pôvodného výroku p ⇒ q, ale platnosť nejakého ekvivalentného výroku. Druhá možnosť je, že budeme predpokladať pravdivosť negácie pôvodného výroku, t.j. pravdivosť výroku p ⇒ q, resp. p ∧ q a dokážeme nepravdivosť tejto negácie. Dôkaz pomocou obrátenej implikácie: Pôvodnú implikáciu p ⇒ q nahradíme ekvivalentnou obrátenou implikáciou q ⇒ p a potom ju dokážeme pomocou priameho dôkazu. Dôkaz sporom Budeme predpokladať platnosť negácie výroku p ⇒ q, t.j. platnosť výroku p ∧ q a ukážeme jeho nepravdivosť. Prakticky to znamená,že pri dokazovaní dospejeme k sporu. Matematická indukcia je dôležitý prostriedok na dokazovanie tvrdenia, že prvky nejakej množiny majú určitú vlastnosť. Pomocou matematickej indukcie sa dokazuje pravdivosť výrokov tvaru ∀n∈N, n ≥ n0 : F(n), kde n0 je dané prirodzené číslo.

A02: Pod pojmom množina rozumieme neusporiadaný súbor (skupinu, súhrn) predmetov (vecí, pojmov, čísel...), ktoré nazývame prvky množiny. Množiny sa obvykle označujú veľkými písmenami a ich prvky sa ohraničujú zloženými zátvorkami { }. Ak prvok patrí do danej množiny, vyjadrujeme to symbolom ∈ a ak nepatrí do danej množiny, vyjadrujeme to symbolom /∈. Množinu považujeme za danu vtedy, ak o každom predmete je určené, či do danej množiny patrí alebo nepatrí, t.j. či je alebo nie je prvkom danej množiny. Ak má množina konečný počet prvkov, nazýva sa konečna množina. Ak nie je konečná, nazýva sa nekonečna množina. Hovoríme, že množina A je podmnožinou množiny B ak, každý prvok množiny A patrí aj do množiny B a zapisujeme A ⊂ B. Prienikom množin A a B nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A a zároveň do množiny B, t.j. A ∩ B = {x ; x∈A ∧ x∈B}. Ak pre množiny A, B platí A ∩ B = ∅, potom ich nazývame disjunktne. Zjednotenim (sučtom) množin A a B nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A alebo do množiny B, t.j. A ∪ B = {x ; x∈A ∨ x∈B}. Rozdielom množin A a B nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky patriace do množiny A a zároveň nepatriace do množiny B, t.j. A − B = {x ; x∈A ∧ x /∈B}. Symetrickym rozdielom množin A a B nazývame (A − B) ∪ (B − A), t.j. množinu A△B = (A − B) ∪ (B − A) = {x ; x∈(A − B) ∨ x∈(B − A)} . Nech pre množiny A,X platí A ⊂ X, potom doplnkom (doplnkovou množinou, komplementom, komplementarnou množinou) množiny A do množiny X nazývame množinu A' = X −A. Kartezianskym sučinom množin A a B nazývame A × B = {[x; y] ; x∈A, y∈B}.

A03: Nech A 6= ∅, B 6= ∅ sú množiny. Binarnou relaciou medzi množinami A a B nazývame každú podmnožinu karteziánskeho súčinu A×B. Zobrazenim (funkciou) z množiny A do množiny B nazývame každú reláciu f ⊂ A×B s vlastnosťou, že pre každé x∈A existuje najviac jedno y∈B také, že [x; y]∈f. Množinu D(f) všetkých vzorov x ∈A, pre ktoré existuje y =f(x) ∈B, nazývame definičny obor zobrazenia f. Množinu H(f) všetkých obrazov y∈B, pre ktoré existuje vzor x∈A taký, že y=f(x), nazývame obor hodnot zobrazenia f. Hovoríme, že zobrazenie f : A → B je injektivne (injekcia, proste zobrazenie), ak dva rôzne vzory z množiny A majú rôzne obrazy z množiny B, t.j. ak rovnaké obrazy majú rovnaké tiež príslušné vzory (obrátená implikácia). Symbolicky to môžeme vyjadriť ∀x1, x2∈A: x1 6=x2 ⇒ f(x1) 6=f(x2), t.j. ∀x1, x2∈A: f(x1)=f(x2) ⇒ x1=x2. Hovoríme, že zobrazenie f : A → B je surjektivne (surjekcia, zobrazenie na množinu B), ak ku každému obrazu z množiny B existuje vzor z množiny A, t.j. ak f(A) = B. To znamená, ak ∀y∈B ∃x∈A: y = f(x). Hovoríme, že zobrazenie f : A → B je bijektivne (bijekcia, proste zobrazenie na množinu B, jednojednoznačne zobrazenie), ak je injektívne a zároveň surjektívne. Nech M ⊂ D(f) ∩ D(g), potom zobrazenie f, x∈D(f) sa rovna zobrazeniu g, x∈D(g) na množine M práve vtedy, ak pre všetky x∈M platí f(x) = g(x). Nech sú dané zobrazenia f : A → B, g : C → D, pričom H(f) ⊂ C. Potom zobrazenie F : A → D ktoré každému x ∈ A priradí hodnotu z=g(y)∈D, kde y=f(x), nazývame zložene zobrazenie (kompozicia, resp. zloženie) zobrazeni f a g. Ak je zobrazenie y = f(x) : A → B bijektívne, potom existuje zobrazenie x = g(y) : B → A také, že platí [x; y]∈f ⇔ [y; x]∈g. Toto zobrazenie sa nazýva inverznym zobrazenim k zobrazeniu f a označuje sa f^{-1}. Identickym zobrazenim (identitou) nazývame zobrazenie, v ktorom sa každý obraz zhoduje so svojím vzorom, t.j. zobrazenie f(x)=x, x∈D(f). Je zrejmé, že identické zobrazenie je injektívne a zároveň surjektívne, t.j. bijektívne.

A04: Hovoríme, že množina A je ekvivalentna s množinou B, ak existuje bijektívne zobrazenie f : A → B. Tento vzťah označujeme A B. Skutočnosť, že množiny A a B nie sú ekvivalentné, označujeme A 6 B. Ak sú množiny A a B ekvivalentné, hovoríme tiež, že množiny A a B maju rovnaku mohutnosť. V prípade, že existuje injektívne zobrazenie A → B, ale neexistuje bijektívne zobrazenie A → B, hovoríme, že množina A ma menšiu mohutnosť ako množina B. Množina A sa nazýva nekonečne spočitateľna, ak je ekvivalentná s množinou prirodzených čísel, t.j. ak A N. Ak je množina A nekonečne spočítateľná alebo konečná, potom ju nazývame spočitateľna. V opačnom prípade, t.j. ak nie je spočítateľná, ju nazývame nespočitateľna a hovoríme, že ma mohutnosť kontinua. Nech A ⊂ R. Hovoríme, že číslo a ∈ R je horne [resp. dolne] ohraničenie množiny A, ak pre všetky prvky x ∈ A platí x ≤ a [resp. b ≤ x]. Množina A sa nazýva ohraničena zhora [resp. zdola], ak existuje aspoň jedno jej horné [resp. dolné] ohraničenie. Množina A sa nazýva ohraničena, ak je zdola aj zhora ohraničená. Ak množina A nie je ohraničená, nazýva sa neohraničena. Nech A ⊂ R. Ak a ∈ R je horné [resp. dolné] ohraničenie množiny A a zároveň platí a ∈ A, potom a nazývame najvačši prvok (maximum) [resp. najmenši prvok (minimum)] množiny A a označujeme a = maxA [resp. a = minA]. Najmenšie z horných ohraničení množiny nazývame suprémum množiny a najväčšie z dolných ohraničení nazývame infimum množiny. Hovoríme, že α∈R je supremum množiny A a označujeme α=supA, ak platí: i) ∀x∈A: x ≤ α, ii) ∀b∈R: (∀x∈A: x ≤ b) ⇒α ≤ b.Hovoríme, že β ∈R je infimum množiny A a označujeme β =inf A, ak platí: i) ∀x∈A: β ≤ x, ii) ∀b∈R: (∀x∈A: b ≤ x) ⇒ b ≤β.

A05: Najrozsiahlejšou číselnou množinou je množina komplexnych čisel, ktorá obsahuje tzv. imaginárne čísla a označuje sa písmenom C. Najdôležitejšou množinou je jej podmnožina, ktorú nazývame množina realnych čisel. Množinu reálnych čísel definujeme ako celok s reláciami, operáciami a ich vlastnosťami. Zadávame ich pomocou tzv. axiom realnych čisel. Čísla 1, 2=1+1, 3=2+1, 4=3+1, . . . , n=(n−1)+1, . . . nazývame prirodzene. Množinu, ktorá obsahuje všetky prirodzené čísla, nazývame množina prirodzenych čisel a označujeme ju N. Symbolicky ju môžeme vyjadriť N = {1, 2, 3, . . . , n, n+1, n+2, . . .} . Celymi čislami nazývame čísla, ktoré sa dajú zapísať ako rozdiel dvoch prirodzených čísel. Množinu, ktorá obsahuje všetky celé čísla, nazývame množina celych čisel a označujeme ju znakom Z. Do množiny Z patria všetky prirodzené čísla, všetky čísla k nim opačné a číslo 0. To znamená, že platí Z = {m−n ; m, n∈N} = {0,±1,±2,±3, . . . ,±n, . . .} . V množine celých čísel Z nie je pre m, n∈Z, n6=±1 definovaný podiel m/n. Každé číslo, ktoré sa dá vyjadriť ako podiel dvoch celých čísel m/n, n 6= 0, nazývame racionalne čislo. Množinu, ktorá obsahuje všetky racionálne čísla nazývame množina racionalnych čisel a označujeme symbolom Q. Čísla, ktoré nie sú racionálne, nazývame iracionalne. Medzi iracionálne čísla patria napríklad √2, √3, _. Množinu obsahujúcu všetky iracionálne čísla nazývame množina iracionalnych čisel a označujeme symbolom I. Potom platí Q =m/n; m, n∈Z, n≠0, I = R − Q. Rozširenú množinu realnych čisel značíme $R^* = R \cup \{-\infty,\infty\}$. Nech a ∈R, potom absolutnou hodnotou čisla a nazývame číslo |a| = max {−a, a}. To znamená, že platí |a| = a, ak a ≥ 0 a |a| = −a, ak a ≤ 0. Nech a∈R, potom signum čisla a definujeme vzťahom sgn a = −1 pre a < 0, 0 pre a = 0, 1 pre a > 0.

A06: Nech a∈R, potom interval (a − δ ; a + δ), nazývame δ-okolim bodu a (okolim bodu a). Niekedy je výhodné z okolia O(a), a∈R vylúčiť bod a. Množinu O(a) − {a} nazývame prstencovym (rydzim) δ-okolim bodu a∈R a označujeme $P_\delta(a)$, resp. P(a). V matematike majú veľký význam a často sa používajú tzv. jednostranne okolia. Pravym [resp. ľavym] δ-okolim bodu a nazývame interval $O^{+}_{\delta}(a) = <a\ ;\ a+\delta)$ [resp. $O^{-}_{\delta}(a) = (a-\delta\ ;\ a>$]. Analogicky nazývame pravym [resp. ľavym] prstencovym δ-okolim bodu a interval $P^{+}_{\delta}(a) = (a\ ;\ a+\delta)$ [resp. $P^{-}_{\delta}(a) = (a-\delta\ ;\ a)$].

A07: Nech $A \subset R$, $A \neq \emptyset$. Bod $a \in A$ sa nazýva vnutorny bod množiny A, ak existuje okolie O(a) také, že $O(a) \subset A$. Bod $a \in R$ sa nazýva vonkajši bod množiny A práve vtedy, ak je vnútorným bodom doplnku $A' = R - A$. Množinu všetkých vnútorných bodov množiny A nazývame vnutro množiny A a označujeme intA, resp. A^{0}. Množinu všetkýchvonkajších bodov množiny A nazývame vonkajšok množiny A a označujeme extA. Ak bod $a \in R$ nie je ani vnútorným a ani vonkajším bodom množiny A, potom ho nazývame hraničny bod množiny A. Množinu všetkých hraničných bodov množiny A nazývame hranica množiny A a označujeme ∂A. Bod $a \in R$ sa nazýva hromadny bod množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí O(a) leží aspoň jeden bod z množiny A, ktorý je rôzny od bodu a, t.j. v každom jeho prstencovom okolí P(a) leží aspoň jeden bod z množiny A. Uzaverom množiny $A \subset R$ (uzaverom v množine R) nazývame zjednotenie množiny A s množinou všetkých hromadných bodov $a \in R$ množiny A. Uzáver množiny A označujeme symbolom □. Množina $A \subset R$ sa nazýva uzavreta (uzavreta v množine R), ak obsahuje všetky svoje hromadné body $a \in R$, t.j. ak A = □. Bod $a \in A$, ktorý nie je hromadným bodom množiny A sa nazýva izolovany bod množiny A. Množina, ktorá obsahuje iba izolované body sa nazýva izolovana množina. Množina $A \subset R$ sa nazýva otvorena, ak každý jej bod je vnútorný, t.j. ak A = intA.

POSTUPNOSTI REÁLNYCH ČÍSEL

A08: Postupnosťou realnych čísel (realnou postupnosťou) nazývame každú postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$, ktorej množina hodnôt (obor hodnôt) je podmnožina množiny R. Postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ zadávame explicitnym (všeobecnym) vyjadrenim člena an ako funkciu premennej n alebo rekurentnym zadanim prvého člena a člena an pomocou predchádzajúcich členov. Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ je zadaná explicitne (všeobecnym vzorcom), resp. rekurentne. Postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ sa nazýva ohraničena zdola [resp. zhora], ak existuje $m \in R$ [resp. $M \in R$] také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n$ [resp. $a_n \leq M$]. Postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ sa nazýva ohraničena, ak je ohraničená zdola a zároveň zhora, t.j. ak existujú $m,M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n \leq M$. Ak nie je postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ ohraničená zdola [resp. zhora], potom sa nazýva neohraničena zdola [resp. zhora]. Ak nie je ohraničená, nazýva sa neohraničena. Postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ sa nazýva monotonna, ak je neklesajúca, nerastúca alebo stacionárna. Ak je $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ rastúca alebo klesajúca, potom sa nazýva rydzo monotonna. Sučtom, rozdielom, sučinom, resp. podielom postupnosti $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ a $\{b_n\}^{\infty}_{n=1}$ nazývame postupnosti $\{a_n+b_n\}^{\infty}_{n=1}$, $\{a_n-b_n\}^{\infty}_{n=1}$, $\{a_nb_n\}^{\infty}_{n=1}$, resp. $\{a_n/b_n\}^{\infty}_{n=1}$. V prípade podielu predpokladáme, že pre všetky $n \in N$ platí $b_n \neq 0$.

A09: Hovoríme, že bod $a \in R^{*}$ je hromadnou hodnotou $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$, ak v každom okolí O(a) existuje nekonečne veľa členov a_n takých, že $a_n \in O(a)$. Ak $a \in R$, potom hovoríme o vlastnej hromadnej hodnote. Ak $a = -\infty$ alebo $a = \infty$, potom hovoríme o nevlastnej hromadnej hodnote. Označme symbolom E množinu všetkych hromadnych hodnot postupnosti $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$. Suprémum množiny E nazývame limes superior (horna limita) postupnosti $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Analogicky infimum množiny E nazývame limes inferior (dolna limita) postupnosti $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Bod $a \in R^{*}$ nazývame limita postupnosti $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ práve vtedy, ak je a jedinou hromadnou hodnotou tejto postupnosti, t.j. ak platí $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Limitu postupnosti $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ označujeme symbolom $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$, potom bod a nazývame vlastna limita postupnosti $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ a hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ konverguje k čislu a.

Postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ nazývame konvergentna postupnosť. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ [resp. $-\infty$], potom bod $\pm\infty$ nazývame nevlastna limita postupnosti $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ a hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ diverguje do ∞, [resp. $-\infty$]. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, potom hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ osciluje.

Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ diverguje, ak osciluje alebo diverguje do $\pm\infty$. Ak $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ konverguje k bodu $a \in R$, potom hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ konverguje.

A10: ekvivalentná definícia vlastnej a nevlastnej limity, konvergecia a divergencia postupnosti, oscilácia postupnosti

Bod $a \in R^{*}$ je hromadným bodom množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak existuje postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ bodov množiny A, kde $a_n \neq a$ pre všetky $n \in N$ taká, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

A11: Nech $c \in R$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in R^{*}$. Ak majú príslušné výrazy zmysel, potom platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} a_n| = |a|$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 / b_n = 1 / \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1 / b$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n / b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n / \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a / b$.

Nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq b_n$. Ak limity existujú, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Nech $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ je postupnosť. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ práve vtedy, ak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

veta o zovretí

Nech pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a \in R^{*}$.Potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

A12: Nech $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ je postupnosť taká, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n > 0$. Potom (pokiaľ uvedené limity existujú) platí rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n+1/\ a_n$.

Nech $a, b \in R$, $a > 0$, potom platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} n! / n^n = 0$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + b/n)^n = e^b$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1)=1$,

h) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} (1+1/1!+1/2!+...+1/n!) = e$.

Každá monotónna postupnosť $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ má limitu.

REÁLNA FUNKCIA REÁLNEJ PREMENNEJ

A13: Nech $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je zobrazenie. Ak pre všetky $x \in D(f)$ platí, že $f(x) \in R$, t.j. $H(f) = f[D(f)] = \{f(x) ; x \in D(f)\} \subset R$, potom zobrazenie f nazývame realna funkcia. Množinu D(f) nazývame definičny obor funkcie f a H(f) nazývame obor hodnot funkcie f. Túto množinu, t.j. množinu $\{[x; y] \in R2 ; x \in D(f), y = f(x)\}$ nazývame graf funkcie $y = f(x)$. Príkladom je Dirichletova funkcia χ definovaná $\chi(x) = 1$ pre x racionálne a $\chi(x) = 0$ pre x iracionálne. Jej body ležia na priamkách y=0 a y=1, ale nevypĺňajú tieto priamky úplne. Ak nie je definičný obor funkcie zadaný, resp. ak je ako definičný obor zadaná množina reálnych čísel R, potom budeme pod definičným oborom rozumieť množinu reálnych čísel, pre ktoré má daný vzťah zmysel. Túto množinu nazývame prirodzeny (maximalny) definičny obor funkcie. Výraz, ktorým je daná funkcia definovaná, môže mať rôzne tvary. Najčastejšie a pre účely matematickej analýzy najvhodnejšie je analytické zadanie vzorcom, t.j. rovnicou $y=f(x)$, $x \in D(f)$. Výraz f(x) na pravej strane rovnice obsahuje najviac jednu premennú x a nadobúda pre konkrétne x jednoznačné hodnoty. Hovoríme, že funkcia f je zadaná explicitne. Funkcia môže byť analyticky zadaná ajináč ako vzťahom $y=f(x)$, $x \in D(f)$. Časté je parametricke vyjadrenie, t.j. vyjadrenie dvojicou rovníc $x =\varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, kde φ, ψ sú zobrazenia (funkcie) definované na množine $J \subset R$. Množina J býva obyčajne interval. Ak je relácia f funkciou, potom hovoríme, že funkcia f je definovaná implicitne rovnicou $F(x, y)=0$. Ak uvážime $y = f(x)$, potom
môžeme písať $F(x, f(x))=0$.

A14: Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva ohraničena zdola [resp. ohraničena zhora] na množine $A \subset D(f)$, ak je ohraničená zdola [resp. ohraničená zhora] množina funkčných hodnôt $f(A) = \{f(x) ; x \in A\}$, t.j. ak existuje číslo $m \in R$ [resp. $M \in R$] také, že pre všetky $x \in A$ platí $m \le f(x)$ [resp. $f(x) \le M$]. Funkcia f sa nazýva ohraničena na množine A, ak je ohraničená zdola a aj zhora na množine A, t.j. ak existujú $m,M \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $m \le f(x) \le M$. Ak nie je funkcia f ohraničená zdola [resp. zhora] na množine A, potom sa nazýva neohraničena zdola [resp. zhora] na množine A. Ak funkcia f nie je ohraničená (t.j. nie je ohraničená zdola alebo zhora) na množine A, potom sa nazýva neohraničena na množine A. Funkcia f sa nazýva ohraničena zdola [resp. ohraničena zhora], ak existuje číslo $m \in R$ [resp. $M \in R$] také, že pre všetky $x \in D(f)$ platí $m \le f(x)$ [resp. $f(x) \le M$]. Funkcia f sa nazýva ohraničena, ak je ohraničená zdola a aj zhora na množine, t.j. ak existujú $m,M \in R$ také, že pre všetky $x \in D(f)$ platí $m \le f(x) \le M$. Ak nie je funkcia f ohraničená zdola [resp. zhora], potom sa nazýva neohraničena zdola [resp. zhora]. Ak funkcia f nie je ohraničená (t.j. nie je ohraničená zdola alebo zhora), potom sa nazýva neohraničena. Infimum [resp. suprémum] množiny f(A) nazývame infimum [resp. supremum] funkcie f na množine A a označujeme symbolmi $\inf f(A) = \inf\limits_{x \in A} f(x) = \inf\{f(x) ; x \in A\}$ [resp. $\sup f(A) = \sup\limits_{x \in A} f(x) = \sup\{f(x) ; x \in A\}$].

Infimum [resp. suprémum] funkcie f na celom definičnom obore D(f) nazývame infimum [resp. supremum] funkcie f a označujeme $\inf f(x)$ [resp. $\sup f(x)$]. Ak existuje najmenší [resp. najväčší] prvok množiny f(A), potom ho nazývame najmenšia hodnota (minimalna hodnota, minimum) [resp. najvačšia hodnota (maximalna hodnota, maximum)] funkcie f na množine A a označujeme symbolom $\min f(x) = \min\{f(x) ; x \in A\}$ [resp. $\max f(x) = \max\{f(x) ; x \in A\}$]. Je zrejmé, že pre aspoň jedno $x_0 \in A$ platí $f(x_0) = \min f(A)$ [resp. $f(x_0) = \min f(A)$]. Ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x_0) \le f(x)$ [resp. $f(x) \ge f(x_0)$], potom hovoríme, že funkcia f nadobuda (ma) v bode x_0 na množine A minimum [resp. maximum]. Ak platia ostré nerovnosti, t.j. ak pre všetky $x \in A$, $x \neq x_0$ platí $f(x_0) < f(x)$ [resp. $f(x) > f(x_0)$], potom hovoríme, že funkcia f nadobuda (ma) v bode x_0 na množine A ostre minimum [resp. ostre maximum]. Minimum a maximum funkcie f na množine A nazývame súhrnne (ostre) extremy funkcie f na množine A. Ak $A = D(f)$, potom hovoríme o globalnych (absolutnych) extremoch funkcie f a označujeme ich symbolmi $\min f(x)$, resp. $\max f(x)$. Ak $A = O(x_0)$, kde $O(x_0) \subset D(f)$ je nejaké okolie, potom hovoríme o lokalnych extremoch funkcie f. To znamená, že funkcia f ma v bode x_0 lokalne minimum [resp. maximum], ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$ platí $f(x_0) \le f(x)$ [resp. $f(x_0) \ge f(x)$]. Funkcia f ma v bode x_0 ostre lokalne minimum [resp. maximum], ak existuje $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $f(x_0) < f(x)$ [resp. $f(x_0) > f(x)$]. Funkcia f sa nazýva monotonna, ak je neklesajúca alebo nerastúca (t.j. aj rastúca, klesajúca alebo konštantná). Ak je funkcia f iba rastúca alebo klesajúca, potom sa nazýva rydzo (ostro) monotonna. Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva parna [resp. neparna], ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a navyše $f(x) = f(-x)$ [resp. $f(x) = -f(-x)$]. Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y a graf nepárnej funkcie je súmerný podľa počiatku súradnicového systému. Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva periodicka, ak existuje $p \in R$, $p \neq 0$ také, že $x \in D(f)$ práve vtedy, ak $x + p \in D(f)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x + p) = f(x)$, t.j ak platí
$x \in D(f) \Leftarrow\Rightarrow x + p \in D(f)$, $\forall x \in D(f) : f(x + p) = f(x)$. Funkcia f sa nazýva konvexna [resp. konkavna] na intervale $I \subset D(f)$, ak pre všetky $x, x1, x2 \in I$ také, že $x1 < x < x2$ platí

$$f(x) \le r(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) \qquad [\text{resp. } f(x) \ge r(x)].$$

A15: Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ sa rovna funkcii $y = g(x)$, ak $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$. Rovnosť funkcií f a g symbolicky zapisujeme $f = g$. V opačnom prípade hovoríme, že funkcia f sa nerovna funkcii g a zapisujeme $f \neq g$. Hovoríme, že funkcia f sa rovna funkcii g na množine A, ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x)=g(x)$. Zapisujeme $f =g$, $x \in A$, resp. $f =g$ na množine A. Nech množina $A \subset D(f) \cap D(g)$. Hovoríme, že funkcia f je menšia [resp. vačšia] ako funkcia g na množine A, ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) < g(x)$ [resp. $f(x) > g(x)$]. Funkcie môžeme sčítavať, odčítavať, násobiť a deliť. Nech $y = f(x)$, $y = g(x)$ sú funkcie definované na množine $A \subset R$, potom sučet $f+g$, rozdiel $f-g$, sučin fg, podiel f/g, kde $g(x) \neq 0$ pre $x \in A$, funkcii f a g na množine A definujeme vzťahmi: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$,
$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $x \in A$. Absolutnu hodnotu $|f|$ funkcie f na množine A definujeme $|f|(x) = |f(x)|$, $x \in A$. Uvažujme funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množinu $A \subset D(f)$. Hovoríme, že funkcia $y = h(x)$, $x \in A$ je zuženim (reštrikciou) funkcie f na množinu A, ak pre všetky $x \in A$ platí $h(x) = f(x)$. Označujeme $h = f|_A$. Je zrejmé, že graf funkcie h je časťou grafu f. Nech $y = f(x)$, $x \in A$ a $y = g(x)$, $x \in B$ sú funkcie také, že $H(f) \subset B$. Potom funkcia $y = F(x)$, $x \in A$ definovaná pre všetky $x \in A$ vzťahom $F(x) = g[f(x)]$, sa nazýva zložena funkcia f a g a označuje sa $g(f)$, resp. $f \circ g$. K f existuje inverzna funkcia $x = f^{-1}(y)$, $y \in H(f)$ taká, že $x = f^{-1}(y)$ práve vtedy, ak $y = f(x)$. Je zrejmé, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$. Špeciálne pre $n \in N$ definujeme n-tu mocninu f^n funkcie f vzťahom $f^n(x) = [f(x)]^n$.

A16: Elementarnou funkciou nazývame každú funkciu, ktorú dokážeme utvoriť z funkcií y = konšt., $y = x$, $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = \sin x$, $y = \arcsin x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$ pomocou sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania funkcií. Polynomom nazývame funkciu $f_n : y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$, $n \in N \cup \{0\}$. Racionalnou lomenou funkciou nazývame funkciu $f : y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$,

kde f_n, f_m sú polynómy stupňov n a m, pričom $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$, $b_0, b_1, \dots, b_m \in R$, $n, m \in N - \{0\}$. Mocninnou funkciou nazývame funkciu $f : y = x^r$, kde $r \in R$. Exponencialnou funkciou so zakladom a, $a > 0$ nazývame funkciu $f : y = a^x$. Funkcia $f : y = \log_a x$, $x > 0$ sa nazýva logaritmicka funkcia so zakladom a. Funkcia f je inverzná k exponenciálnej funkcii $y = a^x$, $x \in R$. Základné goniometricke funkcie sú sínus, kosínus, tangens, kotangens. Definujú sa pomocou jednotkovej kružnice v rovine R^2. $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú prosté na svojom definičnom obore. Keď ich zúžime na vhodné intervaly, potom k nim inverzné funkcie utvoriť môžeme. Tieto funkcie sa nazývajú cyklometricke funkcie(arkussinus, arkuskosinus, arkustangens, arkuskotangens).

Sinus hyperbolicky a kosinus hyperbolicky, definujeme vzťahmi

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$, $x \in R$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$, $x \in R$.

Tangens hyperbolicky a kotangens hyperbolicky definujeme vzťahmi

$\mathrm{tgh}\, x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $x \in R$, $\mathrm{cotgh}\, x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $x \in R - \{0\}$.

Funkcie sinh x, tgh x a cotgh x sú bijektívne na celom svojom definičnom obore, funkcia cosh x je bijektívna na intervale $\langle 0 ; \infty)$. Inverzné funkcie k týmto funkciám nazývame hyperbolometricke funkcie.

Pre všetky $x, y \in R$ platí: a) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$, b) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$.

A17: Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ ma v bode $a \in R^*$ limitu rovnu $b \in R^*$ (limita funkcie f v bode a sa rovna bodu b) a označujeme $\lim_{x \to a} f(x) = b$, ak: a) Bod a je hromadným bodom množiny D(f).

b) Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \to b$

(t.j. pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ také, že $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$).

Hovoríme, že funkcia f ma v bode $a \in R^*$ limitu rovnu $b \in R^*$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$, ak má v bode a limitu rovnú b jej zúženie $f|_A$. Limitu funkcie f v bode $a \in R^*$ vzhľadom na množinu $D(f) \cap (-\infty; a)$ [resp. na množinu $D(f) \cap (a ; \infty)$] nazývame limita zľava[resp. sprava] funkcie f v bode a a označujeme $\lim_{x \to a-} f(x)$ [resp. $\lim_{x \to a+} f(x)$].

A18: Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je spojita v bode $a \in D(f)$, ak pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \to f(a)$, t.j. pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

Ak funkcia f nie je spojitá v bode a, potom sa nazýva nespojita v bode a. Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je spojita v bode $a \in D(f)$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$, ak je spojité v bode a jej zúženie $f|_A$, t.j. ak pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ také, že $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

Ak je funkcia f spojitá vzhľadom na množinu $D(f) \cap (-\infty; a\rangle$ [resp. na množinu $D(f) \cap \langle a ; \infty)$], potom sa nazýva spojita zľava [resp. spojita sprava] v bode a. Hovoríme, že funkcia f ma v bode a bod odstraniteľnej nespojitosti, ak existuje konečná limita $\lim_{x \to a} f(x)$, ale $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Funkcia f ma v bode a bod neodstraniteľnej nespojitosti 1. druhu, ak existujú konečné jednostranné limity $\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$.

Funkcia f ma v bode a bod neodstraniteľnej nespojitosti 2. druhu, ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim_{x \to a-} f(x)$, $\lim_{x \to a+} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná.

Ak je funkcia f spojitá v bode $a \in D(f)$, potom je lokálne ohraničená, t.j. existuje okolie O(a) také, že f je ohraničená na $O(a) \cap D(f)$.

Nech $r \in R$. Ak sú funkcie f, g spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$, potom sú v bode a spojité tiež funkcie $|f|$, $f \pm g$, rf, fg, a pre $g(a) \neq 0$ aj funkcie $1/g$, f/g.

Nech je f spojitá v bode $a \in D(f)$, g spojitá v bode $b = f(a) \in D(g)$ a nech $H(f) \subset D(g)$. Potom je zložená funkcia $F = g(f)$ spojitá v bode a.

DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE REÁLNEJ PREMENNEJ

B01: Hovoríme, že funkcia f ma v bode x_0 derivaciu, ak existuje (aj nevlastná) limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ktorú označujeme $f'(x_0)$, resp. $f'(x)|_{x=x_0}$ a nazývame derivacia funkcie f v bode x_0. Podľa toho, či je limita vlastná alebo nevlastná, hovoríme o vlastnej alebo nevlastnej derivacii funkcie f v bode x_0. Nech f je funkcia definovaná v nejakom ľavom okolí bodu $x_0 \in D(f)$. Hovoríme, že funkcia f ma v bode x_0 derivaciu zľava, ak existuje limita

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ktorú nazývame derivacia funkcie f zľava v bode x_0. Nech f je funkcia definovaná v nejakom pravom okolí bodu $x_0 \in D(f)$. Hovoríme, že funkcia f ma v bode x_0 derivaciu sprava, ak existuje limita

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ktorú nazývame derivacia funkcie f sprava v bode x_0. Deriváciu zľava a sprava súhrnne nazývame jednostranne derivacie funkcie f v bode x_0 a deriváciu nazývame obojstrannou derivaciou funkcie f v bode x_0. Uvažujme reálnu funkciu $y = f(x)$. Označme $M \subset D(f)$ množinu všetkých bodov, v ktorých má funkcia f (konečnú) deriváciu. Ak $M \neq \emptyset$, potom môžeme definovať pre všetky $x_0 \in M$ funkciu g vzťahom $g(x_0) = f'(x_0)$. Funkciu g nazývame derivacia funkcie f na množine M a označujeme f', y', resp. $y = f'(x)$, $x \in M$, resp. df/dx, dy/dx. Ak má funkcia f na množine M deriváciu f', potom je na množine M spojitá.

B02: Nech majú funkcie f, g derivácie na množine $M \neq \emptyset$ a nech $c \in R$. Potom existujú derivácie funkcií cf, $f \pm g$, fg na množine M a derivácia funkcie f/g na množine $M_1 = \{x \in M ; g(x) \neq 0\}$. Navyše pre všetky $x \in M$, resp. $x \in M_1$ platí:

a) $(cf)'(x) = cf'(x)$,
b) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,
c) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
d) $(f/g)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Nech $y = f(x)$ je spojitá a rýdzomonotónna funkcia na intervale $I \subset R$. Nech x_0 je vnútorný bod intervalu I a nech existuje $f'(x_0) \neq 0$. Označme $y_0 = f(x_0)$. Potom inverzná funkcia $x = f^{-1}(y)$ má deriváciu v bode y_0 a platí $[f^{-1}]'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}\Big|_{x_0 = f^{-1}(y_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Nech $F(x) = g(f(x))$, $x \in M \subset R$ je zložená funkcia s vnútornou zložkou $u = f(x)$, $x \in M$ a vonkajšou zložkou $y = g(u)$, $u \in M_1$, kde $f(M) \subset M_1$. Nech $x_0 \in M$, $u_0 = f(x_0)$. Ak existujú derivácie $f'(x_0)$, $g'(u_0)$, potom tiež existuje derivácia $F'(x_0)$ a platí $F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(u_0) \cdot f'(x_0)$.

Nech $y = f(x)$, $x \in M$ je reálna funkcia. Nech $x_0 \in M$ je také, že existuje $f'(x_0)$. Ak $f(x_0) > 0$, potom platí $f'(x_0) = f(x_0) \cdot [\ln f(x_0)]'$.

B03: Nech $y = f(x)$, $x \in M$ je reálna funkcia a nech $x_0 \in M$ je vnútorný bod. Hovoríme, že funkcia f ma v bode x_0 diferencial, ak existuje lineárna funkcia $\lambda(h) = ah$, $h \in R$ taká, že platí vzťah. Lineárnu funkciu λ nazývame diferencial funkcie f v bode x_0 a označujeme symbolom $df(x_0)$. Ak má funkcia f diferenciál v bode x_0, potom ju nazývame diferencovateľna funkcia v bode x_0. Využitie pri výpočte približnej chyby.

O najlepšej lokalnej linearnej aproximacii funkcie

Nech f je diferencovateľná funkcia v bode x_0. Nech $c \in R$ je také, že $\neq f'(x_0)$. Označme $\varphi: y = f(x_0) + c(x - x_0)$, $g : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Potom existuje prstencové okolie $P(x_0)$ také, že pre všetky $x \in P(x_0)$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - \varphi(x)|$.