# 5 Funkcie

Skôr, ako sa pustíme do definovania pojmu funkcie, uveďme si príklady, kde sa s nimi môžeme stretnúť. Napríklad každé motorové vozidlo musí mať priradenú ŠPZ-ku. Každá vydaná kniha má priradený ISBN kód.

**Príklad.** Vytvorme množinu $A$, ktorej prvky budú všetci študenti prvého ročníka na vašej fakulte. Priraďme každému študentovi jeho vek. Ak chceme opísať toto priradenie pomocou matematických pojmov, tak máme funkciu (zobrazenie), ktorá každému prvku množiny $A$ (študentovi) priradí práve jedno prirodzené číslo (jeho vek). Zapisujeme to $f : A \longrightarrow N$.

V predchádzajúcom príklade sú dôležité slová **každému** prvku množiny $A$ priradíme **práve jeden** prvok množiny $N$.

Funkcia je pravidlo, ktoré každému prvku nejakej množiny priradí práve jeden prvok inej (alebo tej istej) množiny. Presná definícia je nasledovná:

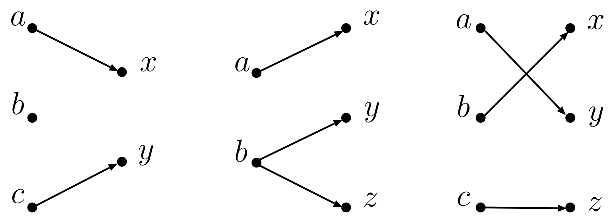
**Definícia.** Binárna relácia $f \subset A \times B$ sa nazýva funkcia z množiny $A$ do množiny $B$ (značíme to $f : A \to B$), ak pre $\forall x \in A$ existuje práve jeden prvok $y \in B$ taký, že $xfy$. Množina $A$ sa nazýva definičný obor (množina vzorov) a množina $B$ sa nazýva obor hodnôt (množina obrazov).

Predpis $xfy$, ktorý sme použili v definícii, sa pri funkciách veľmi nepoužíva. Radšej budeme písať $f(x) = y$.

Miesto slova funkcia sa často používa názov zobrazenie. K slovu funkcia sa prikloníme, pretože je to pojem, ktorý je bližší informatike.

## Grafická reprezentácia funkcií.

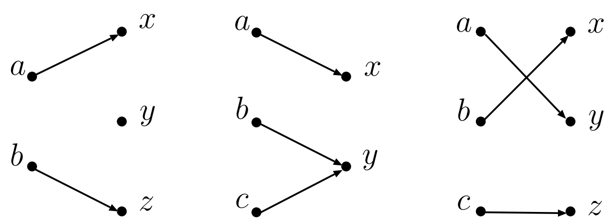
Niektoré funkcie môžeme znázorniť obrázkom. V mnohých prípadoch nám tento obrázok umožňuje ľahšie určiť niektoré vlastnosti takto zobrazenej funkcie. Vezmime si funkciu $f : A \to B$. Ak sú množiny $A$ a $B$ malé, môžeme použiť na znázornenie $f$ šípkový diagram. Na obrázku 1 máme príklad troch diagramov. Prvky množiny $A$, teda definičného oboru sú umiestnené vľavo. Prvky množiny $B$, teda oboru hodnôt vpravo a priradenie je zobrazené šípkou. Vidíme, že len posledný z diagramov zodpovedá funkcii. Prvý nespĺňa podmienku, že každému prvku z $A$ je priradený prvok z $B$. Druhý diagram nespĺňa podmienku, že priraďujeme práve jeden prvok.




Obrázok 1: Čo je a čo nie je funkcia?

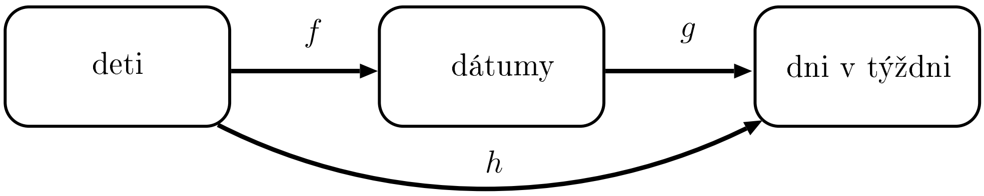
## Niektoré vlastnosti funkcií.

Vráťme sa k príkladu s ŠPZ-kami. Vieme, že dve rôzne autá nemôžu mať rovnakú ŠPZ-ku. Ak zobrazenie $f : A \to B$ priradí každej dvojici navzájom rôznych prvkov z množiny $A$ dva rôzne prvky z $B$, tak hovoríme, že $f$ je **prostá** (alebo injektívna) funkcia.
Zoberme si množinu všetkých detí narodených na Slovensku v roku 2004. Priraďme každému dieťaťu dátum jeho narodenia. Toto priradenie je funkcia, pretože každé dieťa (prvok množiny A) má priradený práve jeden dátum narodenia (prvok množiny B). Je známe, že každý deň spomenutého roka sa narodilo aspoň jedno dieťa (v skutočnosti to bolo v priemere 136 detí za deň).
Ak ku každému prvku $y$ množiny $B$ existuje prvok $x$ množiny $A$ taký, že $f(x) = y$, potom túto funkciu nazývame **surjektívna**.
Ak je nejaká funkcia súčasne injektívna aj surjektívna, potom takúto funkciu nazývame **bijektívna**.
Na obrázku 2 sú po poradí príklady funkcií: prostej, ale nie surjektívnej; surjektívnej, ale nie prostej; bijektívnej.




Obrázok 2: Prostá, surjektívna a bijektívna funkcia.

Zoberme opäť množinu detí narodených na Slovensku v roku 2004 a funkciu $f$, ktorá priradí každému dieťaťu dátum jeho narodenia. Definujme funkciu $g$, ktorá každému dňu v roku 2004 priradí deň v týždni, ktorý zodpovedal tomuto dátumu. Spojením týchto funkcií v poradí: najprv aplikujeme $f$, potom $g$, dostávame zloženú funkciu $h$, ktorá každému dieťaťu priradí názov toho dňa v týždni, kedy sa narodilo (pozri obrázok 3).




Obrázok 3: Príklad zloženej funkcie.

Všeobecne hovoríme, že pre dvojicu funkcií $f : A \to B$ a $g : B \to C$ je funkcia $h : A \to C$, kde pre ľubovoľné $x \in A$ platí $h(x) = g(f(x))$, **zloženou funkciou**.
Ak je funkcia $f : A \to B$ bijektívna, potom k nej môžeme definovať **inverznú funkciu** $f^{-1} : B \to A$ takú, že pre ľubovoľné $y \in B$ platí:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y \ .$$

Zjednodušene povedané, inverznú funkciu vytvoríme otočením šípok. Ak sa vrátime k obrázku 2, hneď vidíme, prečo inverzná funkcia existuje len k bijektívnej funkcii. V iných prípadoch nedostávame otočením šípok vôbec funkciu.

## Mohutnosť množín a funkcie

Venujme pozornosť otázke: aký je vzťah medzi počtom prvkov dvojice konečných množín, ak existuje medzi nimi injektívna, surjektívna alebo bijektívna funkcia. Pozrime sa na obrázok 2.
**Pozorovanie.** i) Ak existuje injekcia z $A$ do $B$ (prvý a tretí príklad na zmieňovanom obrázku), tak pre počet prvkov oboch množín platí vzťah $|A| \leq |B|$.
ii) Ak existuje surjekcia z $A$ do $B$ (druhý a tretí príklad na zmieňovanom obrázku), tak pre počet prvkov oboch množín platí vzťah $|A| \geq |B|$.
iii) Ak existuje bijekcia z $A$ do $B$ (tretí príklad na zmieňovanom obrázku), tak pre počet prvkov oboch množín platí vzťah $|A| = |B|$.
*Zdôvodnenie.* i) Z definície funkcie vieme, že každému prvku množiny $A$ je priradený práve jeden prvok. Z každého prvku množiny $A$ vychádza práve jedna šípka. Máme teda $|A|$ šípok. Z definície injektívnej funkcie vyplýva, že do každého prvku množiny $B$ smeruje najviac jedna šípka, čiže prvkov $B$ nemôže byť menej, ako je šípok.
ii) Do každého prvku množiny $B$ smeruje najmenej jedna šípka. Potom prvkov $B$ nemôže byť viac, ako je šípok.

iii) Spojením nerovností z i) a ii) dostávame $|A| = |B|$.

Presvedčili sme sa, že pomocou funkcií s danými vlastnosťami môžno porovnávať počet prvkov konečných množín. (Neskôr využijeme tieto fakty pri kombinatorickom počítaní možností.) Ako je to s nekonečnými množinami? Dali by sa napríklad injekcia a bijekcia využiť na porovnávanie nekonečných množín?
Nielen dali, ale sa to tak aj robí. Pri nekonečných množinách však radšej, ako o počte prvkov, hovoríme o mohutnosti množiny.
Nech teda $A$ a $B$ sú ľubovoľné množiny.
1) Ak existuje injekcia z $A$ do $B$, tak $A$ má menšiu, nanajvýš rovnakú mohutnosť ako $B$, čiže $|A| \leq |B|$.
2) Ak existuje bijekcia z $A$ do $B$, tak $A$ a $B$ majú rovnakú mohutnosť, čiže $|A| = |B|$.
3) Ak existuje injekcia z $A$ do $B$, ale neexistuje bijekcia, tak $A$ má menšiu mohutnosť ako $B$, čiže $|A| < |B|$.

**Príklad.** Označme množinu všetkých párnych prirodzených čísel $N_p$. Nie je ťažké si uvedomiť, že funkcia $f_1$ z množiny $N_p$ do množiny všetkých prirodzených čísel $N$ daná predpisom $f_1(k) = k$ je injekcia. Platí teda, že $|N_p| \leq |N|$. Toto sme asi očakávali, pretože množina párnych prirodzených čísel je podmnožinou množiny prirodzených čísel. Na druhej strane funkcia $f_2$ z množiny $N$ do množiny $N_p$ daná predpisom $f_2(k) = 2k$ je bijekcia. (Prečo?)

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & \longrightarrow & 4 \\ 3 & \longrightarrow & 6 \\ & \vdots & \\ \mathrm{k} & \longrightarrow & 2\mathrm{k} \\ & \vdots & \end{array}$$

Potom dostávame, že $|N_p| = |N|$. Narazili sme na jav, ktorý pri konečných množinách nepozorujeme. Podmnožina $N_p$ množiny $N$ má rovnakú mohutnosť, ako samotná $N$. Zdalo by sa, že všetkých prirodzených čísel je viac, ako párnych, ale bijekcia $f_2$ nám umožňuje popárovať ich tak, že každému prirodzenému číslu vieme priradiť práve jedno párne číslo.

**Príklad.** Porovnajme množiny prirodzených a celých čísel. Použime nasledujúcu funkciu z $N$ do $Z$:

$$
\begin{array}{lcr}
1 & \longrightarrow & 0 \\
2 & \longrightarrow & 1 \\
3 & \longrightarrow & -1 \\
4 & \longrightarrow & 2 \\
5 & \longrightarrow & -2 \\
 & \vdots & \\
2k & \longrightarrow & k \\
2k+1 & \longrightarrow & -k \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Nie je ťažké si uvedomiť, že ľubovoľné dve rôzne prirodzené čísla majú rôzne obrazy v $Z$ a každé celé číslo má svoj vzor v množine $N$ (premyslite si to). Z existencie bijekcie vyplýva, že $|N| = |Z|$.

Toto boli pomerne prekvapujúce výsledky, ktoré nám hovoria, že nekonečné množiny sa správajú inak ako konečné a budeme musieť pri práci s nimi postupovať opatrnejšie.

**Príklad.** Ešte väčšie prekvapenie nastane, keď porovnáme množinu prirodzených a kladných racionálnych čísel. Zrejme väčšina z vás očakáva, že kladných racionálnych čísel je viac. V tomto (mylnom) názore nás môže utvrdiť takáto úvaha:
Vieme, že $N \subset Q^+$. Ak zoberieme ľubovoľné dve za sebou idúce prirodzené čísla $n$, $n+1$ (ktoré sú samozrejme aj z $Q^+$), určite nájdeme racionálne číslo $q$, pre ktoré $n < q < n+1$ (dokonca existuje nekonečne veľa takých čísel). Takže kladných racionálnych čísel by malo byť oveľa viac. Ako sme naznačili, táto úvaha je nesprávna! Zrada spočíva v tom, že sme sa intuitívne snažili previesť skúsenosti, ktoré máme s konečnými množinami, na množiny nekonečné. Ak máme množiny $A = \{1, 2\}$ a $B = \{1, 3/2, 2\}$, tak je jasné, že prvky množiny $B$ nemožno očíslovať číslami z $A$ tak, aby mal každý prvok z $B$ priradené iné číslo. Ak by $A$ bola množina všetkých prirodzených čísel, mohli by sme do nej znova a znova "načrieť" a vybrať ďalšie číslo použiteľné na očíslovanie prvkov množiny $B$.

Ukážme, ako možno zoradiť a očíslovať všetky racionálne čísla. Pomôžeme si nasledujúcou tabuľkou:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1/1 | | | | |
| 1/2 | 2/1 | | | |
| 1/3 | 2/2 | 3/1 | | |
| 1/4 | 2/3 | 3/2 | 4/1 | |
| 1/5 | 2/4 | 3/3 | 4/2 | 5/1 |

$$\vdots$$

V prvom riadku je zlomok $a/b$ $(a, b \in N)$, v ktorom platí: $a + b = 2$, v druhom riadku sú zlomky, pre ktoré máme $a + b = 3$, v $k$-tom riadku sú zlomky, pre ktoré platí $a + b = k + 1$. Číslovať (zoraďovať) tieto zlomky môžeme po riadkoch, pričom pri číslovaní vynechávame zlomky, ktoré nie sú v základnom tvare. Začiatok číslovania vyzerá nasledovne:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{1}{5} & \frac{5}{1} & \end{array}$$

Takto by sme mohli pokračovať. Dá sa dokázať, že funkcia, ktorej začiatok je v predchádzajúcej tabuľke, je bijekcia - to znamená, že $|N| = |Q^+|$. Podobne sa dá dokázať, že $|Z| = |Q|$, z čoho môžeme odvodiť $|N| = |Q|$.

**Príklad.** Porovnajme teraz množiny prirodzených a reálnych čísel. Ukážeme, že reálnych čísel je viac, ako prirodzených, čiže množina reálnych čísel má väčšiu mohutnosť, ako množina prirodzených čísel (podobne celých aj racionálnych). Ukážeme, že prirodzených čísel je dokonca menej, ako reálnych čísel z intervalu $\langle 0, 1)$. Budeme postupovať sporom. Predpokladajme, že ich je rovnako. Čiže existuje bijekcia z $N$ do $\langle 0, 1)$ (ktorá nám usporiadala čísla z $\langle 0, 1)$ v nejakom poradí). Napríklad:

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 0{,}\mathrm{a}_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots \\
2 & \longrightarrow & 0{,}\mathrm{a}_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\dots \\
3 & \longrightarrow & 0{,}\mathrm{a}_{31}a_{32}a_{33}\dots a_{3n}\dots \\
 & \vdots & \\
\mathrm{n} & \longrightarrow & 0{,}\mathrm{a}_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn}\dots \\
 & \vdots & ,
\end{array}
$$

kde $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ predstavuje $j$-tu cifru $i$-teho čísla. Niektoré reálne čísla môžu mať dva zápisy, napríklad: $0,1$ a $0,099999\dots$ predstavujú to isté číslo. Všeobecne platí, že $0, a_1a_2a_3 \dots a_k000\dots = 0, a_1a_2a_3 \dots (a_k-1)999\dots$, kde $a_k \neq 0$. V takýchto prípadoch budeme brať do úvahy zápis s nulami namiesto zápisu, kde sú od istého desatinného miesta samé deviatky. Vezmime teraz číslo $0, b_1b_2b_3 \dots b_n \dots$, ktoré zostrojíme nasledovne: vezmeme prvé reálne číslo a jeho prvú cifru $a_{11}$. Ak je táto cifra rovná 1, tak $b_1 = 2$, ak $a_{11} \neq 1$, tak položíme $b_1 = 1$. Teraz zoberieme druhé reálne číslo a jeho druhú cifru $a_{22}$ a urobíme to isté: ak $a_{22} = 1$, tak $b_2 = 2$, ak $a_{22} \neq 1$, tak položíme $b_2 = 1$. Podobne zostrojíme cifru $b_3$ z cifry $a_{33}$ a pre ľubovoľné $n \in N$ máme

$$
b_n = \begin{cases} 2 & \text{ak } a_{nn} = 1 \\ 1 & \text{ak } a_{nn} \neq 1 \end{cases}
$$

Objasnime si to na príklade:

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 0{,}165481\dots \\
2 & \longrightarrow & 0{,}459283\dots \\
3 & \longrightarrow & 0{,}231873\dots \\
4 & \longrightarrow & 0{,}112211\dots \\
5 & \longrightarrow & 0{,}111117\dots \\
6 & \longrightarrow & 0{,}543267\dots
\end{array}
$$

Potom číslo $b$ bude začínať nasledovne: $0, 212121\dots$ Číslo $b \in \langle 0, 1)$ sa v zozname čísel, ktoré sú spomenutou bijekciou priradené číslam $1, 2, 3, \dots$ nenachádza, pretože sa od každého z nich odlišuje aspoň na jednom desatinnom mieste. Od prvého sa odlišuje cifrou na prvom desatinnom mieste, od druhého na druhom desatinnom mieste, od tretieho na treťom, všeobecne od $n$-tého čísla na $n$-tom desatinnom mieste atď. Dospeli sme k sporu, že uvedené zobrazenie je bijekcia. Takáto bijekcia nemôže existovať. Platí teda, že $|N| < |\langle 0, 1)|$. Potom nie je ťažké odvodiť, že $|N| < |R|$.

## Dôsledky predchádzajúcich úvah v informatike

Venujme sa otázke, čo vlastne vieme pomocou počítačov vypočítať. Funkciu nazveme **vypočítateľnou**, ak existuje algoritmus (program), pomocou kto-

rého možno vypočítať pre ľubovoľný jej vstup funkčné hodnoty. Sú všetky funkcie vypočítateľné? Určite nie. Napríklad funkcia, ktorá priradí každej hviezde vo vesmíre (v niektorom okamihu) počet atómov, z ktorých sa skladá, bude len ťažko vypočítateľná pomocou počítača. Zamerajme sa radšej len na funkcie, ktorých definičný obor a obor hodnôt sú číselné množiny, alebo ešte lepšie - vezmime len funkcie, ktorých definičný obor aj obor hodnôt sú prirodzené čísla. Označme množinu všetkých takýchto funkcií $F$ - čiže $F = \{f : N \to N | f je funkcia\}$. Aká je mohutnosť tejto množiny? Ukážeme, že existuje injekcia z $\langle 0, 1)$ do $F$. Nech $x \in \langle 0, 1)$, pričom $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$. Tomuto číslu priradíme funkciu $f_x : N \to N$ danú predpisom $f_x(n) = a_n$. To znamená, že číslu 1 priradí $f_x$ cifru $a_1$, číslu 2 cifru $a_2$, atď. Takéto priradenie $x \to f_x$ je injekcia, pretože dvom rôznym číslam $x$, $y$ (odlišujúcim sa napríklad v $k$-tej cifre) priradíme dve rôzne funkcie $f_x$, $f_y$ (musia byť rôzne, pretože $f_x(k) \neq f_y(k)$). Keďže existuje injekcia z $\langle 0, 1)$ do $F$, tak platí $|\langle 0, 1)| \leq |F|$.
Zaoberajme sa teraz otázkou, koľko konečných programov (konečných postupností inštrukcií - nebudeme skúmať, či tie programy majú zmysel) existuje? Množinu takýchto programov označme $P$. Každý program vieme zapísať, ako postupnosť núl a jednotiek a každej takejto postupnosti vieme priradiť prirodzené číslo. Navyše to priradenie vieme uskutočniť tak, že rôznym programom priraďujeme rôzne čísla, čiže máme injekciu z $P$ do $N$.
Platí teda:

$$|P| \leq |N| < |\langle 0, 1)| \leq |F|.$$

To znamená, že všetkých programov, ktoré vieme zapísať (vrátane tých nezmyselných) je menej, ako funkcií z $N$ do $N$. Takže je možné medzi nimi nájsť také funkcie (je ich dokonca nekonečne veľa), pre ktoré neexistuje konečný program, ktorý pre ľubovoľný vstup z $N$ vypočíta funkčnú hodnotu.

Pri podrobnom skúmaní nevypočítateľných funkcií a problémov sa napríklad zistilo, že nie je možné vytvoriť v žiadnom programovacom jazyku konečný program, ktorý by mal na vstupe program (v ľubovoľnom pevne zvolenom programovacom jazyku) a na výstupe by sme mali jednu z odpovedí (tú pravdivú samozrejme):

- áno - program, ktorý je na vstupe, skončí vždy v konečnom čase,
- nie - program, ktorý je na vstupe, neskončí vždy v konečnom čase.

Tento problém sa nazýva: " problém zastaveniaä má dôležité postavenie najmä v teoretickej informatike.

# Referencie


[1] MacLane, S., Birkhoff, G.:*Algebra*, ALFA, Bratislava, 1974

[2] Manna, Z.:*Matematická teória programov*, SNTL, Praha, 1981

[3] Meyer, A., R.:*Mathematics for Computer Science*, Lecture notes, class problems, problem sets, Massachusetts Institute of Technology, 2007

[4] Palumbíny, D., Vrábel, P.:*Teoretická aritmetika*, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Nitra, ISBN 80-88738-38-5, 1994

[5] Vilenkin, N.:*Množiny a všeličo okolo nich*, SPN, Bratislava, 1972

[6] Matiaško, K. a kolektív:*Základy informatiky*, Žilinská univerzita, Žilina, ISBN 80-8070-186-5