$$\mathbf{f} = (f_o, f_1, \ldots, f_{N-1})$$

Systém diskrétnych exponenciálnych funkcií

$$def(n) = \left\{ def\,(n,k) = e^{j\frac{2\pi}{N}k.n} \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \right\}$$

tvorí ortogonálnu bázu.

Dôkaz:

Presvedčte sa, že platí

$$\left(def(n),\, def(m)\right) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ N, & n = m \end{cases}$$

rozpísaním skalárneho súčinu

$$def(n),\, def(m) = \sum_{k=0}^{N-1} def(n,k).\overline{def}\,(m,k) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k.n}\; e^{-j\frac{2\pi}{N}k.m}$$

Pretože φ je konečnorozmerný priestor, ortogonálny systém signálov $\{b_n = def(n),\ n = 0, 1, \ldots, N-1\}$ tvorí ortogonálnu bázu. Podľa vety o Fourierových radoch potom každý signál z uvedeného signálového priestoru možno napísať v tvare

$$\mathbf{f} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n\, def(n)$$

t.j. pre k-tu zložku signálu $\mathbf{f} = (f_o, f_1, \ldots, f_{N-1})$ platí

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} c_n\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Koeficienty rozkladu signálu do systému diskrétnych exponenciálnych funkcií budú

$$c_n = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{b}_n)}{(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n)} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

alebo po dosadení

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad , \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Tento vzťah voláme diskrétnou Fourierovou transformáciou. Pre jeho praktickú dôležitosť venujeme neskôr zvláštnu kapitolu algoritmu jeho rýchleho výpočtu - rýchlej Fourierovej transformácii.

Koeficienty rozkladu $\{c_n , n = 0, 1, \dots, N-1\}$ sú komplexné čísla a voláme ich spektrum signálu $\mathbf{f}$. Ak ich napíšeme v tvare

$$c_n = |c_n| e^{j\varphi n} , \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

potom postupnosť $\{|c_n|\}$ voláme amplitúdovým spektrom a postupnosť $\{\varphi_n\}$ fázovým spektrom signálu.

Ďalším systémom ortogonálnych signálov, do ktorého sa rozkladajú deterministické diskrétne signály definované na konečnom časovom intervale sú Walshove funkcie. Ich hlavnou výhodou je, že sú prvkami reálneho signálového priestoru.

Definícia:

Nech (φ , d) je reálny signálový priestor deterministických diskrétnych signálov $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, kde $N = 2^m$ a m je prirodzené číslo. Signál voláme n-tou Walshovou funkciou a píšeme $\{f_k, k = 0, 1, \dots, N-1\} = \{\mathrm{wal}(n,k), \; n,k = 0, 1, \dots, N-1\}$ resp. $\mathbf{f} = \mathrm{wal}(n)$ ak

$$\mathrm{wal}(n,k) = (-1)^{\sum_{i=0}^{m-1} n_i k_i}$$

kde n_i, k_i sú i-te koeficienty binárneho vyjadrenia n,k t.j.

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} n_i 2^i , \quad k = \sum_{i=0}^{m-1} k_i 2^i$$

a $n_i, k_i \in \{0, 1\}$ pre $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Systém Walshových funkcií je človeku jednoduchšie vytvárať rekurentne podľa nasledujúceho predpisu:

1.) $\mathbf{H}_0 = [1]$

2.) $$H_\ell = \left[\begin{array}{c|c} H_{\ell -1} & H_{\ell -1} \\ \hline H_{\ell -1} & -H_{\ell -1} \end{array} \right] , \quad \ell = 1, 2, \dots, m$$

kde $\mathbf{H}_{\ell -1}$ sú submatice matice $\mathbf{H}_\ell$. Walshove funkcie sú potom riadkami v matici $\mathbf{H}_m$.

Všimnite si, že štruktúra submatíc je symetrická podľa hlavnej diagonály, takže riadok a odpovedajúci stĺpec budú v matici zhodné.

Ukážme si najskôr niektoré vlastnosti Walshových funkcií.

Lema

a) Walshova funkcia wal(n), pre $n \neq 0$ má nulovú strednú hodnotu, t.j.

$$\sum_{k=0}^{N-1} wal(n,k) = 0 , \quad n \neq 0$$

b) Súčin Walshových funkcií po zložkách je opäť Walshovou funkciou, t.j.

$$wal(n,k) \, . \, wal(r,k) = wal(s,k)$$

kde $n,k,r = 0, 1, \ldots, N-1$ a s je také číslo, že ak

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} n_i \, 2^i , \quad r = \sum_{i=0}^{m-1} r_i \, 2^i , \quad s = \sum_{i=0}^{m-1} s_i \, 2^i ,$$

$n_i, r_i, s_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$,

potom

$$s_i = n_i \underset{2}{\oplus} r_i , \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1$$

c) Energia Walshových funkcií je rovnaká, t.j.

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[wal(n,k) \right]^2 = N , \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Dôkaz:

a) Z iteračnej konštrukcie matice Walshových funkcií vyplýva, že wal(n), $n \neq 0$ má hodnotu 1 práve v takom množstve časových okamihoch ako hodnota -1. Súčet všetkých hodnôt je potom nulový.

b) $$\sum_{k=0}^{N-1} wal(n,k) \, wal(r,k) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{\sum_{i=0}^{m-1} n_i k_i} \, . \, (-1)^{\sum_{i=0}^{m-1} r_i k_i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{\sum_{i=0}^{m-1} (n_i + r_i) k_i} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{\sum_{i=0}^{m-1} (n_i \underset{2}{\oplus} r_i) k_i} = wal\,(s,k)$$

c) Pretože Walshova funkcia nadobúda len hodnoty +1, -1, bude $wal^2(n,k) = 1$, teda

$$\sum_{k=0}^{N-1} wal^2(n,k) = N$$

Veta:

Nech (φ, d) je reálny signálový priestor deterministických diskrétnych signálov $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$, kde $N = 2^m$ a m je prirodzené číslo. Systém Walshových funkcií $\{ wal(n), n = 0, 1, \ldots, N-1 \}$ je ortogonálnou bázou v tomto priestore.

Dôkaz:

Ukážme, že Walshove funkcie $wal(n)$ vytvárajú ortogonálny systém signálov.

Podľa vlastnosti b) predchádzajúcej lemy, ak $n \neq r$ platí pre skalárny súčin

$$(wal(n), wal(r)) = \sum_{k=0}^{N-1} wal(n,k).wal(r,k) = \sum_{k=0}^{N-1} wal(s,k)$$

Použitím vlastností a) dostávame

$$(wal(n), wal(r)) = 0 , \quad n \neq r, \quad n,r = 0, 1, \ldots, N-1$$

Ak $n = r$, potom z vlastnosti c) vyplýva

$$(wal(n), wal(n)) = N , \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Walshove funkcie teda vytvárajú ortogonálny systém signálov. Pretože signálový priestor je konečný, sú zároveň jeho bázou.

Keď Walshove funkcie vytvárajú ortogonálnu bázu, podľa vety o Fourierových radoch, každý deterministický diskrétny signál z reálneho signálového priestoru, ktorého počet hodnôt je mocninou dvojky sa rovná svojmu rozvoju do systému Walshových funkcií

$$f = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \, wal(n)$$

resp.

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \, wal(n,k)$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N} (f, wal(n))$$

t.j.

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, wal(n,k)$$

Ďalej si ukážeme možnosti rozkladu spojitého deterministického signálu $\mathbf{f} = f(t)$ zo signálového priestoru $L_2(t_1,t_2)$. Ak spojitý signál (t.j. signál so spojitou abecedou a spojitým časom) je spojitý aj v zmysle spojitosti funkcie (t.j. nemá body nespojitosti), potom podľa Weierstrasovej vety existuje polynóm $P(t)$ tak, že $|f(t)-P(t)| < \varepsilon$ pre každé $\varepsilon > 0$ a $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$. To môžeme vzhľadom na lineárnu nezávislosť funkcií $\mathbf{b}_n = t^n$, $n = 0, 1, \dots, t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ interpretovať aj tak, že systém

$$\left\{ \mathbf{b}_n = t^n, \quad n = 0, 1, \dots, t \in \langle t_1, t_2 \rangle \right\}$$

tvorí bázu priestoru $L_2(t_1,t_2)$ spojitých deterministických signálov bez bodov nespojitosti. Ako sa však môžete presvedčiť, táto báza nie je ortogonálna. Ortogonálnu bázu však z nej môžeme odvodiť pomocou Grahamovho-Schmidtovho ortogonalizačného procesu. Výsledok môžeme trocha zovšeobecniť. Ak systém $\{\mathbf{b}_n = t^n\}$ je bázou signálového priestoru a $v(t)$ je spojitý deterministický signál bez bodov nespojitosti z priestoru $L_2(t_1,t_2)$ tak, že platí

$$\int_{t_1}^{t_2} |t^n| \, v(t) \, dt < +\infty$$

potom aj systém

$$\left\{ \mathbf{f}_n = v(t).t^n \, ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, t \in \langle t_1, t_2 \rangle \right\}$$

bude bázou tohto signálového priestoru. Ak na tieto bázy aplikujeme Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces, dostaneme rôzne ortogonálne bázy. Najznámenšie z nich uvádzame v nasledujúcom prehľade (predpokladáme signály bez bodov nespojitosti).

1. $v(t) = 1$, $L_2(-1,1)$

   ortogonálnu bázu tvoria Legendrove polynómy

$$P_o(t) = 1 \, , \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n \, n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n \, ; \quad n = 1, 2, \dots$$

2. $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $L_2(-1,1)$

   ortogonálnu bázu tvoria Čebyševove polynómy

$$T_o(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t) = t^n - \binom{n}{2} t^{n-2} (1-t^2) + \binom{n}{4} t^{n-4} (1-t^2)^2 - \dots \, ; \quad n = 1, 2, \dots$$

3. $v(t) = e^{-t}$, $L_2 \langle 0, \infty)$

ortogonálnu bázu tvoria Laguerrove polynómy

$$L_o(t) = 1$$

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \; ; \quad n = 1, 2, \dots$$

4. $v(t) = e^{-t^2}$, $L_2 (-\infty, \infty)$

ortogonálnu bázu tvoria Hermitove polynómy

$$H_o(t) = 1$$

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2} \right) \; ; \quad n = 1, 2, \dots$$

Ortogonálne bázy odvodené zo systému $\{ \mathbf{b}_n = t^n \}$ sme uviedli len pre pochopenie súvislostí a dokumentáciu vlastností signálového priestoru spojitých deterministických signálov. Najväčší význam pre štúdium procesu prenosu signálov majú v súčasnosti iné dva rozklady signálu.

Veta:

V komplexnom signálovom priestore $L_2 \langle t_1, t_2 \rangle$ spojitých deterministických signálov, kde $|t_1|$, $t_2 < +\infty$, tvorí systém signálov

$$\left\{ \mathbf{b}_n = e^{jn\omega_o t} \; ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

ortogonálnu bázu, kde

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} , \quad T = t_2 - t_1$$

Dôkaz:

Presvedčme sa o ortogonálnosti signálov zo systému.
Nech $n \neq m$, potom

$$(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_m) = \int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_o t} \; \overline{e^{jm\omega_o t}} \; dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{j(n-m)\omega_o t} \; dt = 0$$

pretože $t_2 - t_1$ je násobkom periódy $\dfrac{T}{n-m}$.
Ak $n = m$, potom

$$(b_n, b_n) = \int_{t_1}^{t_2} \left| e^{jn\omega_0 t} \right|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 \, dt = T$$

Dôkaz úplnosti systému však nie je takýto triviálny, preto prípadných záujemcov odkazujeme na literatúru, napr. [11] .

Signály $b_n = e^{jn\omega_0 t}$ voláme komplexnými harmonickými signálmi. Keďže tieto tvoria ortogonálnu bázu, potom podľa vety o Fourierových radoch každý spojitý deterministický signál z priestoru $L_2 \langle t_1, t_2 \rangle$, kde $\langle t_1, t_2 \rangle$ je konečný interval, bude sa rovnať svojmu rozkladu

$$\mathbf{f} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \mathbf{b}_n \qquad \text{kde} \quad c_n = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{b}_n)}{(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n)}$$

$$\text{t.j.} \quad f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

Postupnosť komplexných čísel $\{c_n, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ voláme spektrom signálu $\mathbf{f} = f(t)$, $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, poprípade postupnosť $\{|c_n|, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ voláme amplitúdovým spektrom a postupnosť $\{\varphi_n, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ fázovým spektrom signálu $f(t)$, kde

$$c_n = |c_n| \, e^{j\varphi n} \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Spektrum, ktoré je dané postupnosťou čísel voláme čiarovým spektrom. To čo sme doposiaľ napísali o signáloch z priestoru $L_2 \langle t_1, t_2 \rangle$, ktoré sú definované na konečnom intervale $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, platí aj pre signály z priestoru $L_2(-\infty, \infty)$, ktoré sú periodické s periódou T. Pre neperiodické spojité deterministické signály z priestoru $L_2(-\infty, \infty)$ existuje tiež spočítateľná ortogonálna báza (napr. tvorená Hermitovými polynómami). Z hľadiska praktických aplikácií a fyzikálnej názornosti je žiadúce ponechať komplexné harmonické signály aj v báze signálov definovaných na neohraničenom intervale $t \in (-\infty, \infty)$. Skôr než tak urobíme, zavedieme niektoré ďalšie užitočné pojmy.

Tak ako existujú rôzne postupnosti racionálnych čísel, ktoré konvergujú k tomu istému reálnemu číslu, existujú aj rôzne postupnosti reálnych funkcií $q_n(t)$, ktoré pri konvergencii

$$\lim_{n \to \infty} q_n(t)$$

vykazujú rovnaké vlastnosti. Množinu ekvivalentných postupností funkcií $\{q_n(t),\ n = 1, 2, \dots\}$ voláme zovšeobecnenou funkciou. Príkladom zovšeobecnenej funkcie je Diracova funkcia $\delta(t)$. Niektoré postupnosti z množiny postupnosti tvoriacich Diracovu funkciu sú

$$q_n(t) = \begin{cases} n & , \quad 0 < t < \frac{1}{n} \\ 0 & , \quad t \notin \left(0, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

$$q_n(t) = \frac{1}{\pi(1+n^2t^2)}$$

$$q_n(t) = \frac{\sin n\, t}{\pi\, t}$$

Doporučujeme čitateľovi, aby si niekoľko členov týchto postupností nakreslil. Ak označíme

$$\delta(t) = \lim_{n \to \infty} q_n(t)$$

potom platia dve základné vlastnosti Diracovej funkcie

$$\delta(t) = 0 \,, \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Okrem toho, keďže $\delta(t - \tau) \neq 0$ len pre $t = \tau$, platí

$$f(t)\ \delta(t - \tau) = f(\tau)\ \delta(t - \tau)$$

Túto vlastnosť použijeme pre nasledujúci výpočet

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ \delta(t - \tau)\ d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \delta(t - \tau)\ d\tau =$$

$$= f(t) \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau)\ d\tau = f(t)$$

Zápis

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ \delta(t - \tau)\ d\tau$$

budeme interpretovať ako rozklad signálu $f(t)$ do ortogonálnej bázy tvorenej posunutými Diracovými funkciami

$$\left\{ \delta (t - \tau), \quad t, \tau \in (-\infty, \infty) \right\}$$

Báza je ortogonálna, pretože

$$\left(\delta (t - \tau_1), \ \delta (t - \tau_2) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta (t - \tau_1) \ \delta (t - \tau_2) \ dt = 0, \ \tau_1 \neq \tau_2$$

čo vyplýva z vyššie uvedených vlastností Diracovej funkcie. Rozklad spojitého signálu do nespočetného systému bázických signálov, ktoré sú tvorené Diracovými funkciami je analógiou rozkladu diskrétneho signálu v reálnom signálovom priestore

$$\mathbf{f} = (\ldots f_{-1}, f_o, f_1, \ldots)$$

do systému jednotkových signálov $(\ldots 0, 1, 0 \ldots) = \boldsymbol{\delta}$

$$\boldsymbol{\delta}_n = \left\{ \delta_{(k-n)}, \ k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \right\}, \quad n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

kde $$\delta(k-n) = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 1, & k = n \end{cases}$$

Kvôli jednoduchosti názvov budeme postupnosť $\left\{ \delta (k), \ k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \right\}$ volať diskrétnou Diracovou funkciou. Je zrejmé, že platí

$$\mathbf{f} = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n \ \boldsymbol{\delta}_n$$

resp.

$$f_k = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n \ \delta (k-n)$$

čo je zápis rozkladu diskrétneho signálu do ortogonálnej bázy, ktorá je tvorená diskrétnymi Diracovými funkciami.

Vidíme, že deterministické spojité signály z komplexného signálového priestoru $L_2 (-\infty, \infty)$ môžeme rozložiť do nespočetnej bázy Diracových funkcií. K rozkladu do nespočetnej bázy tvorenej komplexnými harmonickými signálmi môžeme prirovnať Fourierovu transformáciu signálu $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \ e^{j\omega t} \ d\omega$$

kde $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \ e^{-j\omega t} \ dt$$

Ide však len o formálnu podobnosť, pretože komplexné harmonické funkcie nemajú Fourierov obraz. Pripomíname, že k signálu $f(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ existuje Fourierov obraz $F(\omega)$, ak funkcia $f(t)$ a jej derivácia $f'(t)$ sú na intervale $(-\infty, \infty)$ po častiach spojité a integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty$$

t.j. má konečnú hodnotu.

Fourierov obraz $F(\omega)$ signálu $f(t)$ voláme jeho spektrom a funkcie $|F(\omega)|$, $\varphi(\omega)$, kde

$$F(\omega) = |F(\omega)| \, e^{j\varphi(\omega)}$$

voláme po rade amplitúdovým spektrom a fázovým spektrom signálu $f(t)$. Spojitý signál $f(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, ktorý splňuje podmienky existencie Fourierovho obrazu má spojité spektrum $F(\omega)$.

4.4 RÝCHLA FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA

Pod názvom rýchla Fourierova transformácia budeme rozumieť algoritmus rýchleho výpočtu diskrétnej Fourierovej transformácie

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad , \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \, e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad , \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Pri výpočte N koeficientov rozkladu diskrétneho signálu $\mathbf{f} = \{ f(k), \; k = 0, 1, \ldots, N-1 \}$ je potrebné N^2 násobení a sčítaní, čo ďalej vyžaduje N^2 prevodov medzi zložkovým a vektorovým tvarom komplexného čísla. Spracovanie hovorových signálov v reálnom čase vyžaduje tieto počty (najmä násobení) zmenšiť.

Princíp urýchlenia ukážeme pre prípad $N=2^r$, kde r je celé číslo. Ak časové okamihy $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ rozdelíme na párne a nepárne, a označíme

$$C_r(n) = Nc_n$$

t.j.

$$C_r(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, e^{-j \frac{2\pi}{N} k.n} \quad , \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$