11 Markovova nerovnosť. Disperzia, pravidlá počítania s disperziou. Čebyševova nerovnosť, Pravidlo 3σ.

11.1 Markovova nerovnosť.

Príklad 11.1 *Priemerné FRIQ je 120. Na fakulte je 800 študentov.*

a) *Môžu mať všetci študenti* $FRIQ \geq 150$*?*

b) *Môžu mať všetci študenti* $FRIQ > 120$*?*

c) *Môže na fakulte študovať mimozemšťan s* $FRIQ(E.T.) > 100000$*?*

d) *Môže na fakulte študovať mimozemšťan s* $FRIQ(EE.T.) > 10000$*?*

e) *Môžu mať všetci študenti* $FRIQ < 100$*?*

e) *Môžu mať všetci študenti okrem jedného* $FRIQ < 100$*?*

f) *Koľko géniov s* $FRIQ \geq 160$ *môže byť na fakulte?*

g) *Koľko géniov s* $FRIQ \geq 160$ *môže byť na fakulte ak vieme, že najmenšie* $FRIQ = 100$*?*

Veta 11.1 *Nech náhodná premenná X nadobúda iba nezáporné hodnoty, teda pre všetky $x_i \in X$ platí $x_i \geq 0$.*

Potom pre každé kladné číslo $h \in R^+$ platí

$$\Pr(X \geq h) \leq \frac{E(X)}{h}$$

Dôkaz:

$$E(X) = \sum_{x_i \in X} x_i PDF_X(x_i) \geq \sum_{x_i \geq h} h PDF_X(x_i) \geq h \sum_{x_i \geq h} PDF_X(x_i) \geq h \Pr(X \geq h)$$

Po úprave

$$E(X) \geq h \Pr(X \geq h)$$

$$\frac{E(X)}{h} \geq \Pr(X \geq h)$$

alebo po otočení nerovnosti

$$\Pr(X \geq h) \leq \frac{E(X)}{h}$$

□

Nerovnosti odvodené z Markovovej nerovnosti.

a)
$$\Pr(X > h) < \frac{E(X)}{h}$$

b) Pre $h = c \cdot E(X)$
$$\Pr(X \geq c \cdot E(X)) \leq \frac{E(X)}{c \cdot E(X)} = \frac{1}{c}$$

c) Markovova nerovnosť dáva rozumné výsledky iba pre $h > E(X)$ alebo $c > 1$. Inak sa iba dozvieme, že $\Pr \leq 1$, čo však vieme aj bez Markovovej nerovnosti.

d) Nerovnosť
$$\Pr(X \geq h) \leq \frac{E(X)}{h}$$
môžeme upraviť na tvar
$$\Pr(X < h) > 1 - \frac{E(X)}{h}$$

e) Nech náhodná premenná X nadobúda iba hodnoty väčšie alebo rovné ako m, teda pre všetky $x_i \in X$ platí $x_i \geq m$.

Potom pre každé kladné číslo $h \in R^+$ platí
$$\Pr(X \geq h) \leq \frac{E(X - m)}{h - m}$$

11.2 Disperzia

Stredná hodnota, medián, modus sú charakteristiky polohy, umiestnenia, alebo aj centra náhodnej premennej. Okrem nich nás zaujíma aj to, ako naširoko alebo úzko sú hodnoty náhodnej premennej rozložené okolo strednej hodnoty. Jednou z charakteristík rozptýlenosti náhodnej premennej je disperzia (variance) náhodnej premennej.

Disperzia náhodnej premennej $\mathbb{X}$ sa označuje $D(\mathbb{X})$ a vypočíta sa ako
$$D(\mathbb{X}) = \sum_k (x_k - E(\mathbb{X}))^2 \cdot PDF_{\mathbb{X}}(x_k) \tag{1}$$
kde x_k sú hodnoty náhodnej premennej a $PDF_{\mathbb{X}}(x_k) = \Pr(\mathbb{X} = x_k)$ sú pravdepodobnosti ich výskytu.

Pravidlá počítania s disperziou

Vlastnosti disperzie $D(\mathbb{X})$ môžeme odvodiť od vlastností strednej hodnoty.

- ak sú $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ nezávislé, potom
$$D(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = D(\mathbb{X}) + D(\mathbb{Y})$$

- ak sú $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots$ po dvoch nezávislé náhodné premenné, potom
$$D(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + \ldots) = D(\mathbb{X}_1) + D(\mathbb{X}_2) + \ldots$$

- ak $\mathbb{X}$ je náhodná premenná a a je nenáhodná konštanta, potom platí

$$D(\mathbb{X}+a) = D(\mathbb{X})$$

- Nech c je nenáhodná hodnota, (alebo inak, táto náhodná premenná nadobúda pri všetkých pokusoch iba jednu hodnotu c), potom platí

$$D(c) = 0$$

- ak $\mathbb{X}$ je náhodná premenná a c je nenáhodná konštanta, potom platí

$$D(c \cdot \mathbb{X}) = c^2 \cdot D(\mathbb{X})$$

- Najprv si odvodíme vzťah pre jednoduchší výpočet disperzie:

$$D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - E^2(\mathbb{X}) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} D(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X} - E(\mathbb{X}))^2 &= E\left(\mathbb{X}^2 - 2 \cdot \mathbb{X} \cdot E(\mathbb{X}) + E^2(\mathbb{X})\right) = \\ &= E\left(\mathbb{X}^2\right) - E\left(2 \cdot \mathbb{X} \cdot E(\mathbb{X})\right) + E\left(E^2(\mathbb{X})\right) = \\ &= E\left(\mathbb{X}^2\right) - 2 \cdot E\left(\mathbb{X}\right) \cdot E\left(\mathbb{X}\right) + E^2\left(\mathbb{X}\right) = E\left(\mathbb{X}^2\right) - E^2\left(\mathbb{X}\right) \end{aligned}$$

Príklad 11.2 *Vypočítajte disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Alt(p)$.*

Riešenie: Disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Alt(p)$ vypočítame:

$$D(\mathbb{X}) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q = p \cdot q = p \cdot (1-p)$$

$\square$

Príklad 11.3 *Vypočítajte disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s binomickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Bi(n,p)$.*

Riešenie: Výsledok dostaneme, keď si uvedomíme, že náhodnú premennú s binomickým rozdelením $\mathbb{X} \sim Bi(n,p)$ dostaneme ako súčet n nezávislých rovnakých náhodných premenných s alternatívnym rozdelením $\mathbb{Y} \sim Alt(p)$.

$$D(\mathbb{X}) = D\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{Y}\right) = n \cdot D(\mathbb{Y}) = n \cdot p \cdot q$$

$\square$

Príklad 11.4 *Vypočítajte disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim R(n)$.*

Riešenie: Disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim R(n)$ vypočítame:

$$
\begin{aligned}
D(\mathbb{X}) &= \sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{1+n}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - k \cdot (1+n) + \frac{(n+1)^2}{4}\right) \cdot \frac{1}{n} = \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(k^2\right) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot (1+n)\right) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(n+1)^2}{4}\right) = \\
&= \frac{1}{n} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n+1)^2}{4} = \\
&= \frac{2 \cdot (n+1) \cdot (2n+1) - 6 \cdot (n+1)^2 + 3 \cdot (n+1)^2}{12} = \\
&= \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}
\end{aligned}
$$

□

Príklad 11.5 *Vypočítajte disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Geo_0(p)$ a $\mathbb{X} \sim Geo_1(p)$.*

Riešenie: Disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti $\mathbb{X} \sim Geo_1(p)$ vypočítame nasledovne:
Najprv označme $q = 1 - p$

$$
\begin{aligned}
D(\mathbb{X}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot q^{k-1} \cdot p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 - 2 \cdot \frac{1}{p} \cdot k + \frac{1}{p^2}\right) \cdot q^{k-1} = \\
&= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} - p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{p} \cdot k \cdot q^{k-1} + p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \cdot q^{k-1} = \\
&= p \cdot q \cdot \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot q^{k-2} - p \cdot (2 \cdot \frac{1}{p} - 1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} + \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \\
&= p \cdot q \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(q^k\right)'' - (2-p) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(q^k\right)' + \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \\
&= p \cdot q \cdot \left(\sum_{k=2}^{\infty} q^k\right)'' - (2-p) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' + \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = \\
&= p \cdot (1-p) \cdot \frac{2}{p^3} + (p-2) \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \\
&= \frac{2-2p}{p^2} + \frac{p-2}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}
\end{aligned}
$$

Pri výpočte sme použili derivovanie radu člen po člene:

$$
\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{p^2}
$$

A druhé derivácie radu člen po člene

$$\left(\sum_{k=2}^{\infty} q^k\right)'' = \left(\frac{q}{1-q}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)' = \frac{2}{p^3}$$

Po nahradení $q = 1 - p$ dostaneme:

$$D(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p^2}$$

Náhodná premenná $\mathbb{Y} \sim Geo_0(p)$ má rovnakú disperziu ako $\mathbb{X} \sim Geo_1(p)$ pretože

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X} - 1$$

$\square$

Príklad 11.6 *Vypočítajte disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Po(\lambda)$.*

Riešenie: Disperziu $D(\mathbb{X})$ náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, $\mathbb{X} \sim Po(\lambda)$ vypočítame:

$$D(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{n} (k-\lambda)^2 \cdot \tfrac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot (k-1) \cdot \tfrac{\lambda^{k-1}}{k!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \tfrac{\lambda^{k-1}}{k!} -$$

$$- \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot k \cdot \lambda \cdot \tfrac{\lambda^{k-1}}{k!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{n} \lambda^2 \cdot \tfrac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \tfrac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} \tfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} -$$

$$- \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \lambda \cdot \tfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \cdot \tfrac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \left(\lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda}\, 2 \cdot \lambda \cdot + \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda} \cdot\right) = \lambda$$

Ale stačí, keď si zapamätáme

$$D(\mathbb{X}) = \lambda$$

$\square$

Smerodajná odchýlka

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej $\mathbb{X}$ sa označuje $\sigma_{\mathbb{X}}$ a vypočíta sa ako

$$\sigma_{\mathbb{X}} = \sqrt{D(\mathbb{X})}$$

11.3 Čebyševova nerovnosť

Tvrdenie 11.1 (Čebyševova nerovnosť a) *Pre disperziu náhodnej premennej* $\mathbb{X}$ *a pre ľubovoľné kladné číslo* v *platí:*

$$\Pr[(\mathbb{X} \leq E(\mathbb{X}) - v) \vee (\mathbb{X} \geq E(\mathbb{X}) + v)] = \Pr[\mathbb{X} \notin (E(\mathbb{X}) - v; E(\mathbb{X}) + v)] =$$

$$= \Pr[d(\mathbb{X}; E(\mathbb{X})) \geq v] \leq \frac{D(\mathbb{X})}{v^2} \tag{3}$$

Dôkaz:

$$D(\mathbb{X}) = \sum_{x_i} (x_i - E(\mathbb{X}))^2 \cdot PDF_{\mathbb{X}}(x_i) \geq$$

$$\geq \sum_{i;\, d(\mathbb{X};E(\mathbb{X}))\geq v} (x_i - E(\mathbb{X}))^2 \cdot PDF_{\mathbb{X}}(x_i) \geq$$

$$\geq \sum_{i;\, d(\mathbb{X};E(\mathbb{X}))\geq v} v^2 \cdot PDF_{\mathbb{X}}(x_i) = v^2 \cdot \Pr[d(\mathbb{X}; E(\mathbb{X})) \geq v]$$

Ak vydelíme obe strany nerovnosti parametrom v, dostaneme dokazovanú nerovnosť (3). $\square$

Tvrdenie 11.2 (Čebyševova nerovnosť b) *Pre disperziu náhodnej premennej* $\mathbb{X}$ *a pre ľubovoľné kladné číslo* v *platí:*

$$\Pr[d(\mathbb{X}; E(\mathbb{X})) > v] < \frac{D(\mathbb{X})}{v^2}$$

Tvrdenie 11.3 (Čebyševova nerovnosť c) *Pre disperziu náhodnej premennej* $\mathbb{X}$ *a pre ľubovoľné kladné číslo* v *platí:*

$$\Pr[d(\mathbb{X}; E(\mathbb{X})) \leq v] \geq 1 - \frac{D(\mathbb{X})}{v^2}$$

Tvrdenie 11.4 (Čebyševova nerovnosť d) *Pre disperziu náhodnej premennej* $\mathbb{X}$ *a pre ľubovoľné kladné číslo* v*, ak za* v *v nerovnosti (3)*

$$\Pr[d(\mathbb{X}; E(\mathbb{X})) \geq v] \leq \frac{D(\mathbb{X})}{v^2}$$

dosadíme hodnotu $v = c^2 \cdot D(\mathbb{X})$ *dostaneme nerovnosť:*

$$\Pr[d(\mathbb{X}; E(\mathbb{X})) \geq c \cdot \sigma] \leq \frac{1}{c^2} \tag{4}$$

Pomocou nerovnosti (4) sa dá dokázať, že takmer 90 % realizácií náhodnej premennej $\mathbb{X}$ leží v intervale $\langle E(\mathbb{X}) - 3 \cdot \sigma, E(\mathbb{X}) + 3 \cdot \sigma \rangle$.
Dosaďme do nerovnosti (4) hodnotu $c = 3$. Dostaneme:

$$\Pr[d(\mathbb{X}; E(\mathbb{X})) \geq 3 \cdot \sigma] \leq \frac{1}{9}$$

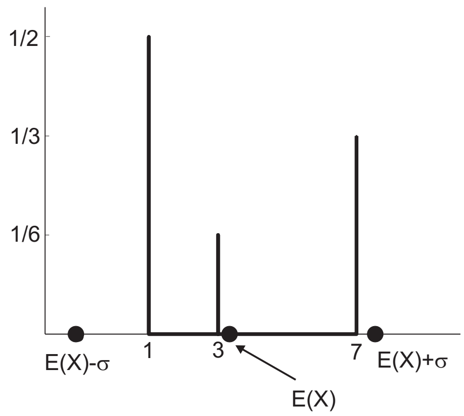
To znamená, že pravdepodobnosť, že hodnota ľubovoľnej náhodnej premennej bude od strednej hodnoty ďalej ako $3 \cdot \sigma$ je menej ako 1/9.

Teda 8/9 všetkých hodnôt ľubovoľnej náhodnej premennej je v intervale $\langle E(\mathbb{X}) - 3 \cdot \sigma, E(\mathbb{X}) + 3 \cdot \sigma\rangle$.
Dosaďme do nerovnosti (4) hodnotu $c = 2$.
Dostaneme:

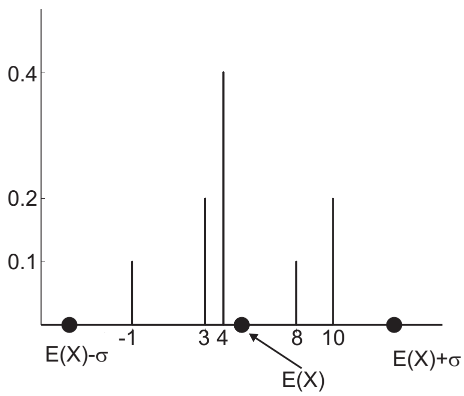
$$\Pr[d(\mathbb{X}; E(\mathbb{X})) \geq 2 \cdot \sigma] \leq \frac{1}{4}$$

To znamená, že pravdepodobnosť, že hodnota ľubovoľnej náhodnej premennej bude od strednej hodnoty ďalej ako $2 \cdot \sigma$ je menej ako 1/4. Teda 3/4 všetkých hodnôt náhodnej premennej sú v intervale $\langle E(\mathbb{X}) - 2 \cdot \sigma, E(\mathbb{X}) + 2 \cdot \sigma\rangle$.

Na obrázkoch 1, 2 a 3 sú znázornené rôzne náhodné premenné so svojimi rozdeleniami pravdepodobnosti, vyznačenou strednou hodnotou a smerodajnou odchýlkou σ.

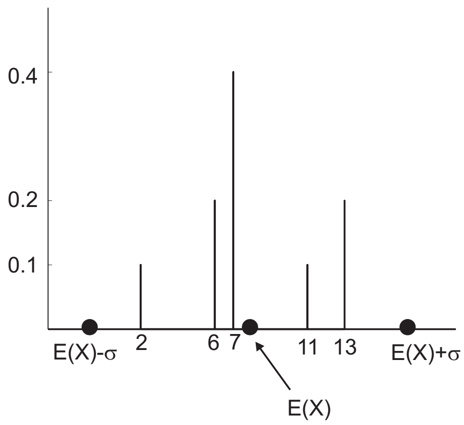


Obr. 1: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s hodnotami 1, 3, 7, pravdepodobnosťami 1/2, 1/6, 1/3 a jej stredná hodnota $E(\mathbb{X})$ a interval $(E(\mathbb{X}) - \sigma, E(\mathbb{X}) + \sigma)$



Obr. 2: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s hodnotami -1, 3, 4, 8, 10, pravdepodobnosťami 0.1, 0.2, 0.4, 0.1, 0.2, jej stredná hodnota $E(\mathbb{X})$ a interval $(E(\mathbb{X}) - \sigma, E(\mathbb{X}) + \sigma)$

Porovnajte obrázky 2 a 3. Náhodné premenné na týchto obrázkoch majú rovnakú smerodajnú odchýlku. Prečo?



Obr. 3: Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s hodnotami 2, 6, 7, 11, 13, pravdepodobnosťami 0.1, 0.2, 0.4, 0.1, 0.2, jej stredná hodnota $E(\mathbb{X})$ a interval $(E(\mathbb{X}) - \sigma, E(\mathbb{X}) + \sigma)$