1. V Bernoulliho procese je pravdepodobnosť výskytu paketu v $1ms$ rovná 0.4

- Aká je pravdepodobnosť, že 5 milisekundách sa vyskytnú aspoň 2 pakety
- Aká je pravdepodobnosť, že medzera medzi paketmi bude 6ms
- Aká je pravdepodobnosť, že sa v 8 milisekundách vyskytnú práve 4 pakety
- Aká je pravdepodobnosť, že medzera medzi paketmi bude práve 6 ms
- Aká je pravdepodobnosť, že medzera medzi paketmi nebude väčšia nez $5ms$
- Aká je pravdepodobnosť, že veľkosť paketového zhluku nie je väčšia ako 2
- Aká je pravdepodobnosť, že nasledujú za sebou práve 3 pakety
- Aká je pravdepodobnosť, že medzera medzi paketmi je minimálne 4 ms
- Aká je pravdepodobnosť, že sa v priebehu 3 ms vyskytne aspoň 1 paket
- Aká je pravdepodobnosť, že sa v priebehu 6 ms vyskytnú 3 pakety
- Aký je stredný počet paketov v 100 ms?
- Aká je pravdepodobnosť, že veľkosť paketového zhluku je väčšia než 3
- Aká je pravdepodobnosť, že veľkosť paketového zhluku je maximálne 5

2. Pravdepodobnosť výskytu paketu v $1ms$ je rovná 0.7.
- Aká je pravdepodobnosť, že v 3 ms budú maximálne 2 pakety?
- Aká je pravdepodobnosť, že 5 ms slot nie je prázdny?
- Aká je prob., že medzera medzi paketmi je minimálne 6 ms a maximálne 8 ms

3. Pravdepodobnosť výskytu kritickej situácie v uzle v priebehu dňa je 0.02 (výskyt považujeme za nezávislý). Určte

1. pravdepodobnosť, že kritická situácia nastane až na druhý deň
2. pravdepodobnosť, že kritická situácia nastane najneskôr na 2 deň
3. pravdepodobnosť, že v prvé 4 dní kritická udalosť nenastala
4. pravdepodobnosť, že počas 5 dní nastala kritická situácia práve 2 krát.

4. Systém sa môže nachádzať v troch stavoch: 1 - funguje, 2 - kritický stav, 3 - nefunguje. Pravdepodobnosť prechodu zo stavu 1 do stavu kritického za čas τ (1 deň) je 0.2, pravdepodobnosť prechodu zo stavu 1 do stavu 3 za čas τ je 0.1. Za čas τ je kríza odstránená isto (prechod z 2 do 1), za čas τ je systém opravený isto (prechod z 3 do 1).

- Nakreslite prechodový graf Markovovho reťazca, ktorý popisuje daný proces.
- Napíšte maticu prechodov pravdepodobnosti.
- Nech na začiatku systém funguje. Aká je pravdepodobnosť, že bude fungovať po troch dňoch?
- Vypočítajte stacionárne rozdelenie reťazca.
- Určte priemerný počet hodín do mesiaca (30 dní), počas ktorých systém nefunguje.

5. Výskyty chybných paketov v toku sú nezávislé, s pravdepodobnosťou 0.2. Určte pravdepodobnosť že

- z prijatých troch paketov je až tretí chybný
- z prijatých piatich paketov je chybný len druhý a piaty
- prvé 4 pakety sú v poriadku
- v zhluku 5 paketov sú práve dva chybné
- Určte priemerný počet chybných paketov v zhluku 50 paketov

6. Tok udalostí je modelovaný Poissonovým procesom s intenzitou 20 udalostí za hodinu. Určte pravdepodobnosť

- medzera medzi udalosťami bude väčšia než 10 minút
- v priebehu štvrť hodiny sa vyskytne najviac 2 udalosti
- v priebehu pol hodiny sa vyskytne práve 5 udalostí
- medzera medzi udalosťami bude dlhšia než 15 minút ale kratšia než 20 minút
- v priebehu 10 minút sa nevyskytne žiadna udalosť

7. V systéme je paralelne zapojených 5 nezávislo pracujúcich liniek. V čase t_0 sú všetky linky obsadené. Pravdepodobnosť, že sa linka za čas τ uvolní, je 0.6. Určte:

- stredný počet obsadených liniek v čase $t_0 + \tau$
- pravdepodobnosť, že v čase $t_0 + \tau$ zostane aspoň jedna linka obsadená
- pravdepodobnosť, že v čase $t_0 + \tau$ ostanú práve 3 linky obsadené
- pravdepodobnosť, že v čase $t_0 + \tau$ sa uvolnia najviac 2 linky
- pravdepodobnosť, že v čase $t_0 + \tau$ budú všetky linky voľné

8. Systém sa môže nachádzať v troch stavoch: 1 - funguje, 2 - kritický stav, 3 - nefunguje. Pravdepodobnosť prechodu zo stavu 1 do stavu kritického za čas τ (1 deň) je 0.2, pravdepodobnosť prechodu zo stavu 1 do stavu 3 za čas τ je 0.1. Za čas τ je kríza odstránená isto (prechod z 2 do 1), za čas τ je systém opravený isto (prechod z 3 do 1).

1.1. Nakreslite prechodový graf Markovovho reťazca, ktorý popisuje daný proces.

1.2. Napíšte maticu prechodov pravdepodobnosti.

1.3. Nech na začiatku systém funguje. Aká je pravdepodobnosť, že bude fungovať po troch dňoch?

1.4. Vypočítajte stacionárne rozdelenie reťazca.

1.5. Určte priemerný počet hodín do mesiaca (30 dní), počas ktorých systém nefunguje.

9. Stredá intenzita toku je 13 p/s, špičková intenzita toku je 50 p/s.

- Určte parametre pre Bernoulliho tok.
- Určte parametre pre 2-stavový On/Off zdroj, resp. Markovov modulovaný regulárny proces MMRP.

10. Pravdepodobnosť, že sa zariadenie v priebehu dňa pokazí je 0.1. Pravdepodobnosť, že zariadenie bude v priebehu dňa opravené je 0.7. Nech chyby zariadenia sú navzájom nezávislé. Na začiatku systém funguje. Aký je stredný počet dní v mesiaci, počas ktorých systém funguje?

3. Príklad - Výherný automat

Do automatu hodíme guličku jedným z piatich otvorov s_1, s_3, s_5, s_7, s_9. Vzápätí sa gulička ocitne na jednej s ďalších pozícií s_2, s_4, s_6, s_8. Symbol $\circ$ predstavuje pozíciu guličky, szmbol $+$ rozbočovač, symbol $\bullet$ pozíciu, kde nakoniec gulička skončí:

s_1	$+$	s_3	$+$	s_5	$+$	s_7	$+$	s_9
$+$	s_2	$+$	s_4	$+$	s_6	$+$	s_8	$+$
$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$
$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$
$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$
$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$
$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$	$\circ$
$+$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$+$
$+$	1.	$+$	2.	$+$	3.	$+$	4.	$+$

Aký je rozdiel v dopade guličky, ak ju vhodíme do automatu prvým otovorom s_1, alebo stredným otovrom s_5?

Bernoulliho proces

Náhodné premenné a_i sú Bernoulliho, majú altrnatívne rozdelenie:

$$a_i \sim Alt(p); \quad PDF(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

Náhodný proces $A(n)$ má Binomické rozdelenie:

$$A(n) \sim Bi(n, p); \quad PDF_n(k) = \Pr(A(n) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n$$

Stredný počet vysielaných paketov za n-časových slotov je $EA(n) = np$.

Nech n.pr. T modeluje medzery v Bernoulliho toku, potom

$$T \sim Geo(p); \quad PDF_T(t) = \Pr(T = t) = q^t p, \quad t = 0, 1, 2, ...$$

Nech n.pr. Z modeluje paketové zhluky v Bernoulliho toku, potom

$$Z \sim Geo(q); \quad PDF_Z(z) = \Pr(Z = z) = p^z q, \quad z = 0, 1, 2, ...$$

Pre Bernoulliho proces platí:

$$ET = \frac{q}{p}, \quad EN = \frac{p}{q} \Rightarrow ET = \frac{1}{EN}$$

2. On/Off proces

Zdroj IP prevádzky sa nachádza v dvoch stavoch, On (s_1) - zdroj vysiela pakety (jednotky), a Off (s_1) - zdroj nevysiela (nuly). Nech α a β predstavujú pravdepodobnosti, že sa zdroj prepne z On do Off, resp. z Off do On. Ak prepínania medzi stavmi predstavujú nezávislé udalosti, zdroj môžeme modelovať 2-stavovým Markovoým reťazcom s maticou prechodov:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Vypočítame stacionárne rozdelenie:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_2 = \frac{\alpha}{\beta}\,\pi_1 \Rightarrow \pi_1 + \frac{\alpha}{\beta}\,\pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Stredný počet vysielaných paketov za n-časových slotov je $EA(n) = n\pi_1 = n\frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

Vysvetliť simulovanie.

Nech n.pr. T modeluje medzery pre On/Off proces

$$PDF_T(1) = \beta, \quad PDF_T(k) = \beta(1-\alpha)^{k-1}\alpha$$

Nech n.pr. N modeluje paketové zhluky v Bernoulliho toku, potom

$$N \sim G_1(q); \quad PDF_N(k) = \Pr(N=k) = p^k q, \quad k = 1, 2, ...$$