2.4 MODELY SIGNÁLU

Zameriame sa na modely deterministického signálu, pretože ako sme uviedli, model náhodného signálu môže byť určený modelom ohraničeného deterministického signálu (realizácie náhodného signálu) a vhodným pravdepodobnostným priestorom. Najskôr uvedieme modely signálov s diskrétnym časom. Model signálu s diskrétnym časom musí vyjadrovať hodnoty signálu v daných časových okamihoch. Tieto hodnoty môžeme oddeľovať čiarkami, napr.

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$$

alebo nejakým iným prvkom, napr. x alebo z^{-1} (prvok x je používanejší u číslicových signálov, prvok z^{-1} u diskrétnych signálov). Potom časť $f\ z^{-n}$ znamená, že signál v čase n má hodnotu f.

<u>Definícia:</u>

Nech je daný obor integrity $(F, \oplus, \odot)$, časová množina $T = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$ (kde N je prirodzené číslo) a prvok z^{-1}, ktorý nepatrí do daného oboru integrity. Ak $f_i \in F$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$, potom výraz

$$f(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \ldots + f_{N-1} t^{-(N-1)}$$

voláme polynómom (alebo podrobnejšie polynómom s neurčitou z^{-1} nad daným oborom integrity) a číslo $N-1$ voláme stupňom polynómu, čo zapisujeme

$$\deg f(z^{-1}) = N-1$$

Pre signály s diskrétnym časom, ktorých časová množina je nespočetná zavádzame iný model - formálny mocninný rad.

<u>Definícia:</u>

Nech je daný obor integrity $(F, \oplus, \odot)$, časová množina $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ a prvok z^{-1}, ktorý nepatrí do daného oboru integrity. Ak $f_i \in F$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, potom výraz

$$f(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \ldots$$

voláme formálnym mocninným radom.

Formálny mocninný rad nazveme rekurentným, ak existujú nezáporné celé čísla r, s a prvky $k_1, \ldots, k_r \in F$ tak, že

$$f_{j+r} = k_1 \odot f_{j+r-1} \oplus k_2 \odot f_{j+r-2} \oplus \ldots \oplus k_r \odot f_j$$

pre $j = n+s, n+s+1, \ldots$.

Dva polynómy $f'(z^{-1}) = f_o + f_1 z^{-1} + \dots + f_{N-1} z^{-(N-1)}$ a $f'(z^{-1}) = f'_o + f'_1 z^{-1} + \dots + f_{N-1} z^{-(N-1)}$ považujeme za rovné, t.j. $f(z^{-1}) = f'(z^{-1})$ práve ak $f_i = f'_i$ pre $i = 0,1, \dots, N-1$.

Podobne chápeme rovnosť dvoch formálnych mocninných radov. Pre spojité signály budeme predpokladať, že existuje funkčný predpis $f(t)$, ktorý každému času t z časovej množiny $T = \langle t_1, t_2)$ priradí prvok $f \in R$ v obore integrity $(R,+,.)$ tak, že $f = f(t)$. Spojité signály budeme označovať v tvare $f(t)$.

2.5 ZÁKLADNÉ OPERÁCIE S DETERMINISTICKÝMI SIGNÁLMI

Súčet signálov s diskrétnym časom

Nech $(F, \oplus, \odot)$ je obor integrity a $T \subset N_o$ je časová množina. Nech $\phi(z^{-1})$ je množina všetkých signálov

$f(z^{-1}) = \sum_{i \in T} f_i z^{-i}$ takých, že $f_i \in F$, $i \in T$ a nech sú dané signály

$f(z^{-1}), f'(z^{-1}) \in \phi(z^{-1})$. Signál $g(z^{-1}) = \sum_{i \in T} g_i z^{-i}$ nazývame súčtom

signálov $f(z^{-1}) = \sum_{i \in T} f_i z^{-i}$ a $f'(z^{-1}) = \sum_{i \in T} f'_i z^{-i}$ ak platí

$$g_i = f_i \oplus f'_i, \quad i \in T$$

a píšeme

$$g(z^{-1}) = f(z^{-1}) \oplus f'(z^{-1})$$

Súčet spojitých signálov

Je daná časová množina $T = \langle t_1, t_2)$ a $f(t)$, $f'(t)$ pre $t \in T$ sú dané spojité signály. Signál $g(t)$, $t \in T$ nazývame súčtom signálov $f(t)$, $f'(t)$ ak

$$f(t) = f(t) \oplus f'(t), \quad t \in T$$

a píšeme

$$g(t) = f(t) \oplus f'(t)$$

Súčin diskrétnych a číslicových signálov

Nech abeceda signálu tvorí pole $(F, \oplus, \odot)$ a $T \subset N_o$. Nech je daná množina signálov ϕ taká, že pre každý signál $f \in F$, $g \in \phi$ existuje signál $h \in \phi$, že pre všetky $i \in T$ platí

$$h_i = \sum_{j \in T} f_{i-j} \odot g_j$$

Budeme písať $\mathbf{h} = \mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ a hovoriť, že signál $\mathbf{h}$ je súčinom signálov $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$.

Poznámky:

1. V prípade konečného intervalu $T = \{0,1,2, \ldots, N-1\}$ budeme konvolučnú sumu chápať tak, že k signálu $\mathbf{f} = \{f_i, i \in T\}$ zostrojíme periodické pokračovanie, alebo rozdiel j-j nahradíme rozdielom modulo N , t.j. $i \ominus_N j$.
2. Znak sumácie $\sum_{i=0}^{N-1} f_i$ budeme chápať ako $f_o \oplus f_1 \oplus \ldots \oplus f_{N-1}$.
3. Súčin signálov ako sme ho vyššie definovali sa zvykne nazývať tiež konvolúciou alebo v prípade ohraničenej alebo konečnej časovej množiny kruhovou konvolúciou.

Súčin spojitých signálov

Je daná časová množina $T = \langle t_1, t_2)$ a množina $\phi(t) = \{f(t), t \in T\}$ spojitých signálov integrovateľných v zmysle Riemanovho kritéria. Signál $g(t)$ nazývame súčinom (resp. konvolúciou) signálov $f(t)$, $f'(t) \in \phi(t)$, ak

$$g(t) = \int_T f(T - \tau) \cdot f'(\tau)\, d\tau , \quad t \in T$$

a píšeme

$$g(t) = f(t) \odot f'(t) , \quad \text{resp.} \quad g(t) = f(t) * f'(t).$$

2.6 ZÁKLADNÉ OPERÁCIE S NÁHODNÝMI SIGNÁLMI

Označme kvôli jednoduchosti distribučnú funkciu náhodného signálu $f(\omega, t)$

$$F(\mathbf{x}) = F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Súčet náhodných signálov

Nech $\{F^T, \varphi , P^T\}$ je pravdepodobnostný priestor, na ktorom sú definované náhodné signály $f_1(\omega, t)$, $f_2(\omega, t)$ s distribučnými funkciami $F_1(\mathbf{x})$, $F_2(\mathbf{x})$. Súčtom náhodných signálov budeme rozumieť taký náhodný signál

$$f_3(\omega, t) = f_1(\omega, t) + f_2(\omega, t)$$

že v prípade spojitých distribučných funkcií

$$F_3(\mathbf{x}) = \int_{R^T} F_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}/\mathbf{y})\ f_2(\mathbf{y})\ d\mathbf{y}$$

alebo v prípade diskrétneho a číslicového náhodného signálu

$$F_3(\mathbf{x}) = \sum_{F^T} F_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}/\mathbf{y})\ .\ p_2(\mathbf{y})$$

kde $F(\mathbf{x}/y)$ je podmienená distribučná funkcia

$$F(\mathbf{x}/\mathbf{y}) = P\left[f_1(\omega,t_1) < x_1,\dots,\ f_1(\omega,t_n) < x_n/f_2(\omega,t_1) = y_1,\dots,f_2(\omega,t_n) = \right.$$

$$\left. = y_n\right]$$

a $f_2(\mathbf{y})$ je hustota rozdelenia pravdepodobnosti.

Veta:

Ak náhodné signály $f_1(\omega,\ t),\ f_2(\omega,\ t)$ majú stredné hodnoty $E_1(t)$, $E_2(t)$, potom náhodný signál $f_1(\omega,\ t) + f_2(\omega,\ t)$ má strednú hodnotu $E_1(t) + E_2(t)$.

Dôkaz vyplýva z definície strednej hodnoty náhodného signálu a odpovedajúcej vlastnosti rezov náhodnými signálmi.

Nech $R_{12}(t_1,t_2)$ označuje krížovú kovariančnú funkciu centrovaných náhodných signálov $f_1(\omega,\ t),\ f_2(\omega,\ t)$

$$R_{12}(t_1,t_2) = \mathcal{E}\left\{ f_1(\omega,\ t_1)\ .\ f_2(\omega,\ t_2)\right\}$$

Potom kovariančná funkcia súčtu dvoch náhodných signálov s kovariančnými funkciami $R_1(t_1,t_2),\ R_2(t_1,t_2)$ je

$$R(t_1,t_2) = R_1(t_1,t_2) + 2R_{12}(t_1,t_2) + R_2(t_1,t_2)$$

Dôkaz dostaneme rozpísaním definičného vzťahu pre kovariančnú funkciu súčtu dvoch náhodných signálov.

2.7 ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI SIGNÁLOV

Veta:

Nech $(F,\ \oplus\ ,\ \odot)$ je obor integrity. Potom $(\mathcal{F}(x),\ \oplus\ ,\ \odot)$, kde $\mathcal{F}(x) = \left\{ f_0 + f_1x + \dots + f_{n-1}x^{n-1},\ n \in N\right\}$ je oborom integrity, ale nie poľom.

Dokážte, že $(\mathcal{F}(x) + , \cdot)$ je oborom integrity a nájdite polynóm, ktorý nemá inverzný polynóm.

Pre rekurentné signály platí silnejšie tvrdenie.

Veta:

Nech $(F, \oplus, \odot)$ je obor integrity. Potom $(\mathcal{F}, \oplus, \odot)$,

kde $\mathcal{F} = \left\{ \dfrac{f(z^{-1})}{g(z^{-1})} \; ; \; f(z^{-1}) \in \mathcal{F}(z^{-1}), \; g(z^{-1}) \neq 0 \right\}$ je pole.

Dôkaz je uvedený v [2].

U číslicových signálov s konečnou časovou množinou a množinou hodnôt je možné zaviesť štruktúru poľa podobne ako sme to urobili v množine hodnôt, zavedením súčtu a súčinu modulo $q(x)$, kde $q(x)$ je ireducibilný polynóm.

Nech $(\mathcal{F}(x), \oplus, \odot)$ je Euklidovský odbor integrity, v ktorom normou δ je stupeň polynómu a polynóm $q(x) \in \mathcal{F}(x)$. Ak platí

$$f(x) = q(x) \odot r(x) \oplus h(x) ,$$

potom píšeme

$$f(x) = h(x) \pmod{q(x)}$$

Odbor integrity $(\mathcal{F}(x), \underset{q(x)}{\oplus}, \underset{q(x)}{\odot})$, v ktorom $q(x)$ je ireducibilný polynóm a pre všetky $f(x) \in \mathcal{F}(x)$ je $\deg f(x) < \deg q(x)$ je poľom (nazývame ho Galoisove pole).