Cesty v grafoch

Stanislav Palúch

Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita

22. marca 2011

Sled, ťah, cesta

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf.

Sled (v_1–v_k sled) *v grafe G je ľubovoľná alternujúca (striedavá) postupnosť vrcholov a hrán tvaru*

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k). \qquad (1)$$

Ťah (v_1–v_k ťah) *v grafe G je taký v_1–v_k sled v grafe G, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje.*

Cesta (v_1–v_k cesta) *v grafe G je taký v_1–v_k sled v grafe G, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje.*

Pripúšťame aj tzv. **triviálny sled**, *pre $k = 1$, t. j. sled tvaru (v_1).*

Sled, ťah, cesta

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf.

Sled (v_1–v_k sled) *v grafe G je ľubovoľná alternujúca (striedavá) postupnosť vrcholov a hrán tvaru*

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k). \qquad (1)$$

Ťah (v_1–v_k ťah) *v grafe G je taký v_1–v_k sled v grafe G, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje.*

Cesta (v_1–v_k cesta) *v grafe G je taký v_1–v_k sled v grafe G, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje.*

Pripúšťame aj tzv. **triviálny sled**, *pre $k = 1$, t. j. sled tvaru (v_1).*

Sled, ťah, cesta

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf.

Sled (v_1–v_k **sled)** *v grafe G je ľubovoľná alternujúca (striedavá) postupnosť vrcholov a hrán tvaru*

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k). \qquad (1)$$

Ťah (v_1–v_k **ťah)** *v grafe G je taký v_1–v_k sled v grafe G, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje.*

Cesta (v_1–v_k **cesta)** *v grafe G je taký v_1–v_k sled v grafe G, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje.*

Pripúšťame aj tzv. **triviálny sled**, *pre $k = 1$, t. j. sled tvaru (v_1).*

Sled, ťah, cesta

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf.

Sled (v_1–v_k **sled)** *v grafe G je ľubovoľná alternujúca (striedavá) postupnosť vrcholov a hrán tvaru*

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k). \qquad (1)$$

Ťah (v_1–v_k **ťah)** *v grafe G je taký v_1–v_k sled v grafe G, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje.*

Cesta (v_1–v_k **cesta)** *v grafe G je taký v_1–v_k sled v grafe G, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje.*

Pripúšťame aj tzv. **triviálny sled**, *pre $k = 1$, t. j. sled tvaru (v_1).*

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je digraf.*

Orientovaný sled (orientovaný v_1–v_k*sled***)** *v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *je ľubovoľná alternujúca (striedavá) postupnosť vrcholov a hrán tvaru*

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \dots, (v_{k-1}, v_k), v_k). \qquad (2)$$

Orientovaný ťah *v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *je taký orientovaný* v_1–v_k *sled v digrafe* $\overrightarrow{G}$*, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje.*

Orientovaná cesta *v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *je taký orientovaný* v_1–v_k *sled v digrafe* $\overrightarrow{G}$*, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje.*

Orientovaný sled, orientovaný ťah, orientovaná cesta

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf.

Orientovaný sled (orientovaný v_1–v_k*sled***)** *v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *je ľubovoľná alternujúca (striedavá) postupnosť vrcholov a hrán tvaru*

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \ldots, (v_{k-1}, v_k), v_k). \qquad (2)$$

Orientovaný ťah *v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *je taký orientovaný* v_1–v_k *sled v digrafe* $\overrightarrow{G}$*, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje.*

Orientovaná cesta *v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *je taký orientovaný* v_1–v_k *sled v digrafe* $\overrightarrow{G}$*, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje.*

Orientovaný sled, orientovaný ťah, orientovaná cesta

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf.

Orientovaný sled (orientovaný *v_1–$v_k$sled*) *v digrafe $\overrightarrow{G}$ je ľubovoľná alternujúca (striedavá) postupnosť vrcholov a hrán tvaru*

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \dots, (v_{k-1}, v_k), v_k). \qquad (2)$$

Orientovaný ťah *v digrafe $\overrightarrow{G}$ je taký orientovaný v_1–v_k sled v digrafe $\overrightarrow{G}$, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje.*

Orientovaná cesta *v digrafe $\overrightarrow{G}$ je taký orientovaný v_1–v_k sled v digrafe $\overrightarrow{G}$, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje.*

Polosled, poloťah, polocesta

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je digraf.*

Polosled (v_1–v_k **polosled)** *v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *je ľubovoľná alternujúca (striedavá) postupnosť vrcholov a hrán tvaru*

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, h_1, v_2, h_2, \ldots, v_{k-1}, h_{k-1}, v_k),$$

v ktorej je každá hrana h_i *incidentná s obomi susednými vrcholmi* $v_i,\ v_{i+1}$ *tak, že jeden z nich je začiatočným a druhý koncovým vrcholom hrany h.*

Poloťah (v_1–v_k **poloťah)** *v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *je taký* v_1–v_k *polosled v digrafe* $\overrightarrow{G}$*, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje.*

Polocesta (v_1–v_k **polocesta)** *v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *je taký* v_1–v_k *polosled v digrafe* $\overrightarrow{G}$*, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje.*

Polosled, poloťah, polocesta

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf.

Polosled (v_1–v_k polosled) *v digrafe $\overrightarrow{G}$ je ľubovoľná alternujúca (striedavá) postupnosť vrcholov a hrán tvaru*

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, h_1, v_2, h_2, \dots, v_{k-1}, h_{k-1}, v_k),$$

v ktorej je každá hrana h_i incidentná s obomi susednými vrcholmi v_i, v_{i+1} tak, že jeden z nich je začiatočným a druhý koncovým vrcholom hrany h.

Poloťah (v_1–v_k poloťah) *v digrafe $\overrightarrow{G}$ je taký v_1–v_k polosled v digrafe $\overrightarrow{G}$, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje.*

Polocesta (v_1–v_k polocesta) *v digrafe $\overrightarrow{G}$ je taký v_1–v_k polosled v digrafe $\overrightarrow{G}$, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje.*

Polosled, poloťah, polocesta

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf.

Polosled (v_1–v_k polosled) *v digrafe $\overrightarrow{G}$ je ľubovoľná alternujúca (striedavá) postupnosť vrcholov a hrán tvaru*

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, h_1, v_2, h_2, \dots, v_{k-1}, h_{k-1}, v_k),$$

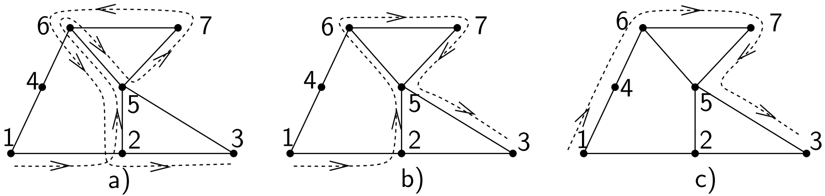
v ktorej je každá hrana h_i incidentná s obomi susednými vrcholmi v_i, v_{i+1} tak, že jeden z nich je začiatočným a druhý koncovým vrcholom hrany h.

Poloťah (v_1–v_k poloťah) *v digrafe $\overrightarrow{G}$ je taký v_1–v_k polosled v digrafe $\overrightarrow{G}$, v ktorom sa žiadna hrana neopakuje.*

Polocesta (v_1–v_k polocesta) *v digrafe $\overrightarrow{G}$ je taký v_1–v_k polosled v digrafe $\overrightarrow{G}$, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje.*

Sledy, ťahy, cesty

V anglickej literatúre sa pre sled, ťah a cestu používajú termíny **walk**, **trail** a **path** (avšak nejednotne, podobne ako v našej slovenskej literatúre).



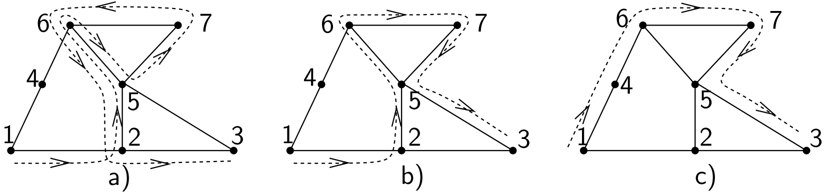
Obr.: Sled, ťah a cesta v grafe.

a) 1–3 sled: $(1, \{1, 2\}, 2, \{2, 5\}, 5,$
$\{5, 6\}, 6, \{6, 5\}, 5, \{5, 7\}, 7, \{7, 6\}, 6, \{6, 5\}, 5, \{5, 2\}, 2, \{2, 3\}, 3)$.

b) 1–3 ťah: $(1, \{1, 2\}, 2, \{2, 5\}, 5, \{5, 6\}, 6, \{6, 7\}, 7, \{7, 5\}, 5, \{5, 3\}, 3)$.

c) 1–3 cesta: $(1, \{1, 4\}, 4, \{4, 6\}, 6, \{6, 7\}, 7, \{7, 5\}, 5, \{5, 3\}, 3)$.

V anglickej literatúre sa pre sled, ťah a cestu používajú termíny **walk**, **trail** a **path** (avšak nejednotne, podobne ako v našej slovenskej literatúre).



Obr.: Sled, ťah a cesta v grafe.

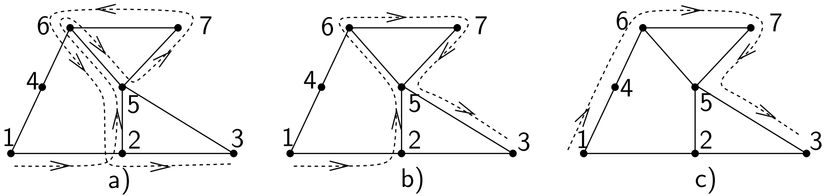
a) 1–3 sled: $(1, \{1,2\}, 2, \{2,5\}, 5, \{5,6\}, 6, \{6,5\}, 5, \{5,7\}, 7, \{7,6\}, 6, \{6,5\}, 5, \{5,2\}, 2, \{2,3\}, 3)$.

b) 1–3 ťah: $(1, \{1,2\}, 2, \{2,5\}, 5, \{5,6\}, 6, \{6,7\}, 7, \{7,5\}, 5, \{5,3\}, 3)$.

c) 1–3 cesta: $(1, \{1,4\}, 4, \{4,6\}, 6, \{6,7\}, 7, \{7,5\}, 5, \{5,3\}, 3)$.

Sledy, ťahy, cesty

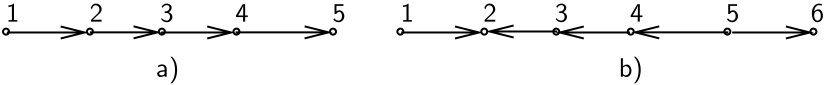
V anglickej literatúre sa pre sled, ťah a cestu používajú termíny **walk**, **trail** a **path** (avšak nejednotne, podobne ako v našej slovenskej literatúre).



Obr.: Sled, ťah a cesta v grafe.

a) 1–3 sled: $(1, \{1,2\}, 2, \{2,5\}, 5, \{5,6\}, 6, \{6,5\}, 5, \{5,7\}, 7, \{7,6\}, 6, \{6,5\}, 5, \{5,2\}, 2, \{2,3\}, 3)$.
b) 1–3 ťah: $(1, \{1,2\}, 2, \{2,5\}, 5, \{5,6\}, 6, \{6,7\}, 7, \{7,5\}, 5, \{5,3\}, 3)$.
c) 1–3 cesta: $(1, \{1,4\}, 4, \{4,6\}, 6, \{6,7\}, 7, \{7,5\}, 5, \{5,3\}, 3)$.

Sledy, cesty ťahy



Obr.: Orientovaná cesta a polocesta v digrafe.

a) 1–5 orientovaná cesta: $(1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 4), 4, (4, 5), 5)$.
b) 1–6 polocesta: $(1, (1, 2), 2, (3, 2), 3, (4, 3), 4, (4, 5), 5, (5, 6), 6)$.

V prípadoch, kedy nedôjde k nedorozumeniu, pripustíme v grafoch a digrafoch namiesto

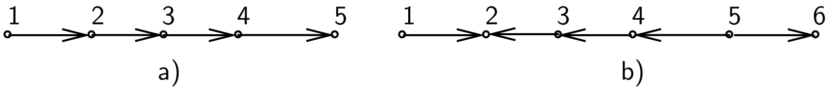
$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, h_1, v_2, h_2, \dots, v_{k-1}, h_{k-1}, v_k),$$

aj skrátený zápis sledu v tvare

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, v_2, \dots, v_k),$$

stále však budeme sled považovať za postupnosť vrcholov a hrán.

Sledy, cesty ťahy



Obr.: Orientovaná cesta a polocesta v digrafe.

a) 1–5 orientovaná cesta: $(1,(1,2),2,(2,3),3,(3,4),4,(4,5),5)$.
b) 1–6 polocesta: $(1,(1,2),2,(3,2),3,(4,3),4,(4,5),5,(5,6),6)$.

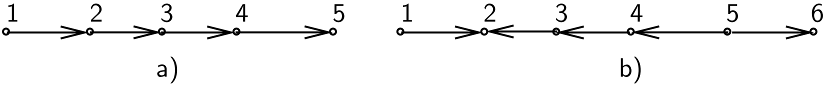
V prípadoch, kedy nedôjde k nedorozumeniu, pripustíme v grafoch a digrafoch namiesto

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, h_1, v_2, h_2, \ldots, v_{k-1}, h_{k-1}, v_k),$$

aj skrátený zápis sledu v tvare

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

stále však budeme sled považovať za postupnosť vrcholov a hrán.



Obr.: Orientovaná cesta a polocesta v digrafe.

a) 1–5 orientovaná cesta: $(1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 4), 4, (4, 5), 5)$.
b) 1–6 polocesta: $(1, (1, 2), 2, (3, 2), 3, (4, 3), 4, (4, 5), 5, (5, 6), 6)$.

V prípadoch, kedy nedôjde k nedorozumeniu, pripustíme v grafoch a digrafoch namiesto

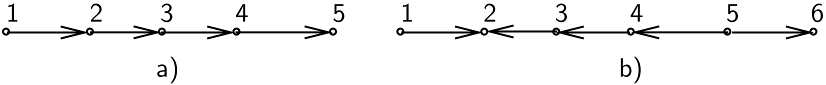
$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, h_1, v_2, h_2, \ldots, v_{k-1}, h_{k-1}, v_k),$$

aj skrátený zápis sledu v tvare

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

stále však budeme sled považovať za postupnosť vrcholov a hrán.

Sledy, cesty ťahy



Obr.: Orientovaná cesta a polocesta v digrafe.

a) 1–5 orientovaná cesta: $(1, (1, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 4), 4, (4, 5), 5)$.
b) 1–6 polocesta: $(1, (1, 2), 2, (3, 2), 3, (4, 3), 4, (4, 5), 5, (5, 6), 6)$.

V prípadoch, kedy nedôjde k nedorozumeniu, pripustíme v grafoch a digrafoch namiesto

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, h_1, v_2, h_2, \dots, v_{k-1}, h_{k-1}, v_k),$$

aj skrátený zápis sledu v tvare

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, v_2, \dots, v_k),$$

stále však budeme sled považovať za postupnosť vrcholov a hrán.

Uzavretý sled

Definícia

Sled (polosled, ťah, poloťah)

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, h_1, v_2, h_2, \dots, v_{k-1}, h_{k-1}, v_k)$$

nazveme **uzavretý**, *ak* $v_1 = v_k$.
Inak sled (polosled, ťah, poloťah) $\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k)$ *nazveme* **otvorený**.

Poznámka

Uzavretú cestu a polocestu nemožno týmto spôsobom definovať, pretože by došlo k sporu s požiadavkou, že jeden vrchol sa v týchto štruktúrach nesmie vyskytovať viackrát.
Namiesto uzavretej cesty a polocesty budeme mať cyklus a polocyklus.

Presná definícia týchto pojmov je nasledujúca:

Uzavretý sled

Definícia

Sled (polosled, ťah, poloťah)

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k) = (v_1, h_1, v_2, h_2, \ldots, v_{k-1}, h_{k-1}, v_k)$$

nazveme **uzavretý**, *ak* $v_1 = v_k$. t.j. začiatočný a koncový vrchol sa rovnajú
Inak sled (polosled, ťah, poloťah) $\boldsymbol{\mu}(v_1, v_k)$ *nazveme* **otvorený**.

Poznámka

Uzavretú cestu a polocestu nemožno týmto spôsobom definovať, pretože by došlo k sporu s požiadavkou, že jeden vrchol sa v týchto štruktúrach nesmie vyskytovať viackrát.
Namiesto uzavretej cesty a polocesty budeme mať cyklus a polocyklus.

Presná definícia týchto pojmov je nasledujúca:

Cyklus (orientovaný cyklus, polocyklus)

Definícia

Cyklus (orientovaný cyklus, polocyklus) *je netriviálny uzavretý ťah (orientovaný ťah, poloťah), v ktorom sa okrem prvého a posledného vrchola žiaden vrchol nevyskytuje viac než raz.*

Zreťazenie sledov

Definícia

Nech

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_r) = (v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \dots, \{v_{r-1}, v_r\}, v_r),$$

$$\boldsymbol{\mu}(w_1, w_s) = (w_1, \{w_1, w_2\}, w_2, \{w_2, w_3\}, w_3, \dots, \{w_{s-1}, w_s\}, w_s),$$

nech $v_r = w_1$. **Zreťazením sledov** $\boldsymbol{\mu}(v_1, v_r)$, $\boldsymbol{\mu}(w_1, w_s)$ *nazveme sled*

$$\boldsymbol{\mu}(v_1, v_r) \oplus \boldsymbol{\mu}(w_1, w_s) =$$

$$= (v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \dots, \{v_{r-1}, v_r\}, v_r = w_1, \{w_1, w_2\}, w_2, \dots, \{w_{s-1}, w_s\}, w_s).$$

Zreťazenie orientovaných sledov a polosledov definujeme analogicky.

Poznámka

Zreťazenie $\boldsymbol{\mu}(u, w) \oplus \boldsymbol{\mu}(w, v)$ *dvoch ciest* $\boldsymbol{\mu}(u, w)$ $\boldsymbol{\mu}(w, v)$ *nemusí byť cesta, vo všeobecnosti môžeme dostať sled.*

Dosiahnuteľnosť

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf, resp. digraf, nech $u,\ v \in V$. Hovoríme, že vrchol v je **dosiahnuteľný** *z vrchola u v grafe, resp. digrafe G, ak v grafe, resp. digrafe G existuje u–v sled, resp. u–v orientovaný sled.*

Veta

Ak v grafe $G = (V, H)$ existuje u–v sled pre niektoré $u, v \in V$, $u \neq v$, potom v ňom existuje aj u–v cesta.

Dosiahnuteľnosť

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf, resp. digraf, nech $u,\ v \in V$. Hovoríme, že vrchol v je **dosiahnuteľný** *z vrchola u v grafe, resp. digrafe G, ak v grafe, resp. digrafe G existuje u–v sled, resp. u–v orientovaný sled.*

Veta

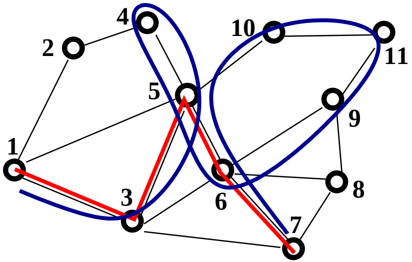
Ak v grafe $G = (V, H)$ existuje u–v sled pre niektoré $u, v \in V$, $u \neq v$, potom v ňom existuje aj u–v cesta.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf, resp. digraf, nech $u, \; v \in V$. Hovoríme, že vrchol v je **dosiahnuteľný** *z vrchola u v grafe, resp. digrafe G, ak v grafe, resp. digrafe G existuje u–v sled, resp. u–v orientovaný sled.*

Veta

Ak v grafe $G = (V, H)$ existuje u–v sled pre niektoré $u, v \in V$, $u \neq v$, potom v ňom existuje aj u–v cesta.



Súvislosť grafov

Definícia

Hovoríme, že graf $G = (V, H)$ je **súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u–v cesta. Inak hovoríme, že graf G je* **nesúvislý**.

Definícia

Komponent grafu *$G = (V, H)$ je jeho ľubovoľný maximálny súvislý podgraf.*

Definícia

Mostom *v grafe $G = (V, H)$ nazveme takú hranu grafu G, po vylúčení ktorej vzrastie počet komponentov.*

Artikuláciou *v grafe G nazveme taký vrchol, po vylúčení ktorého spolu s incidentnými hranami vzrastie počet komponentov.*

Súvislosť grafov

Definícia

Hovoríme, že graf $G = (V, H)$ je **súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u–v cesta. Inak hovoríme, že graf G je* **nesúvislý**.

Definícia

Komponent grafu *$G = (V, H)$ je jeho ľubovoľný maximálny súvislý podgraf.*

Definícia

Mostom *v grafe $G = (V, H)$ nazveme takú hranu grafu G, po vylúčení ktorej vzrastie počet komponentov.*

Artikuláciou *v grafe G nazveme taký vrchol, po vylúčení ktorého spolu s incidentnými hranami vzrastie počet komponentov.*

Súvislosť grafov

Definícia

Hovoríme, že graf $G = (V, H)$ je **súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u–v cesta. Inak hovoríme, že graf G je* **nesúvislý**.

Definícia

Komponent grafu *$G = (V, H)$ je jeho ľubovoľný maximálny súvislý podgraf.*

Definícia

Mostom *v grafe $G = (V, H)$ nazveme takú hranu grafu G, po vylúčení ktorej vzrastie počet komponentov.*

Artikuláciou *v grafe G nazveme taký vrchol, po vylúčení ktorého spolu s incidentnými hranami vzrastie počet komponentov.*

Súvislosť grafov

Definícia

Hovoríme, že graf $G = (V, H)$ je **súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u–v cesta. Inak hovoríme, že graf G je* **nesúvislý**.

Definícia

Komponent grafu *$G = (V, H)$ je jeho ľubovoľný maximálny súvislý podgraf.*

Definícia

Mostom *v grafe $G = (V, H)$ nazveme takú hranu grafu G, po vylúčení ktorej vzrastie počet komponentov.*

Artikuláciou *v grafe G nazveme taký vrchol, po vylúčení ktorého spolu s incidentnými hranami vzrastie počet komponentov.*

Typy súvislosti digrafov, komponent grafu

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf.
Povieme, že digraf $\overrightarrow{G}$ je **neorientovane súvislý**, *alebo* **slabo súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje v G u–v polosled; inak je digraf $\overrightarrow{G}$* **nesúvislý**.

Povieme, že digraf $\overrightarrow{G}$ je **orientovane súvislý**, *alebo* **jednostranne súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje v $\overrightarrow{G}$ u–v sled alebo v–u sled.*

Digraf $\overrightarrow{G}$ je **silne súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje aj orientovaný u–v sled aj orientovaný v–u sled.*

Komponent digrafu $\overrightarrow{G}$ *je maximálny neorientovane súvislý podgraf digrafu $\overrightarrow{G}$.*

Typy súvislosti digrafov, komponent grafu

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ *je digraf.*
Povieme, že digraf $\overrightarrow{G}$ *je* **neorientovane súvislý**, *alebo* **slabo súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov* $u, v \in V$ *existuje v* G u–v *polosled; inak je digraf* $\overrightarrow{G}$ **nesúvislý**.

Povieme, že digraf $\overrightarrow{G}$ *je* **orientovane súvislý**, *alebo* **jednostranne súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov* $u, v \in V$ *existuje v* $\overrightarrow{G}$ u–v *sled alebo* v–u *sled.*

Digraf $\overrightarrow{G}$ *je* **silne súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov* $u, v \in V$ *existuje aj orientovaný* u–v *sled aj orientovaný* v–u *sled.*

Komponent digrafu $\overrightarrow{G}$ *je maximálny neorientovane súvislý podgraf digrafu* $\overrightarrow{G}$.

Typy súvislosti digrafov, komponent grafu

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf.
Povieme, že digraf $\overrightarrow{G}$ je **neorientovane súvislý**, *alebo* **slabo súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje v G u–v polosled; inak je digraf $\overrightarrow{G}$* **nesúvislý**.

Povieme, že digraf $\overrightarrow{G}$ je **orientovane súvislý**, *alebo* **jednostranne súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje v $\overrightarrow{G}$ u–v sled alebo v–u sled.*

Digraf $\overrightarrow{G}$ je **silne súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje aj orientovaný u–v sled aj orientovaný v–u sled.*

Komponent digrafu $\overrightarrow{G}$ *je maximálny neorientovane súvislý podgraf digrafu $\overrightarrow{G}$.*

Typy súvislosti digrafov, komponent grafu

Definícia

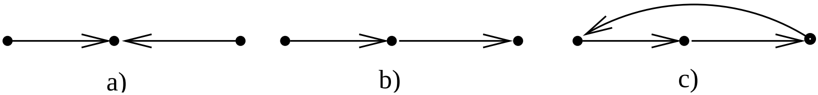
Nech $\overrightarrow{G} = (V, H)$ je digraf.
Povieme, že digraf $\overrightarrow{G}$ je **neorientovane súvislý**, *alebo* **slabo súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje v G u–v polosled; inak je digraf $\overrightarrow{G}$* **nesúvislý**.

Povieme, že digraf $\overrightarrow{G}$ je **orientovane súvislý**, *alebo* **jednostranne súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje v $\overrightarrow{G}$ u–v sled alebo v–u sled.*

Digraf $\overrightarrow{G}$ je **silne súvislý**, *ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje aj orientovaný u–v sled aj orientovaný v–u sled.*

Komponent digrafu $\overrightarrow{G}$ *je maximálny neorientovane súvislý podgraf digrafu $\overrightarrow{G}$.*

Typy súvislosti digrafov



Obr.: Digrafy s rôznymi typmi súvislosti.

a) neorientovane súvislý   b) orientovane súvislý   c) silne súvislý

Algoritmus

Tarryho algoritmus *na konštrukciu takého sledu v grafe $G = (V, H)$, ktorý začína v ľubovoľnom vrchole $s \in V$, prejde všetkými hranami komponentu grafu G a skončí vo vrchole s. Výsledný sled budeme volať* **Tarryho sled**.

- **Krok 1.** *Začni z ľubovoľného vrchola $s \in V$, polož $u := s$, $T = (u)$. $\{$T je inicializačne triviálny sled, obsahujúci jediný vrchol.$\}$*
- **Krok 2.** *Ak môžeš, vyber k poslednému vrcholu u sledu T ďalšiu incidentnú hranu $\{u, v\}$ podľa nižšie uvedených pravidiel* **T1**, **T2** *a zaraď ju do sledu T. Zaznač si smer použitia hrany $\{u, v\}$. Ak doteraz vrchol v ešte nebol zaradený do sledu T, označ hranu $\{u, v\}$ ako hranu prvého príchodu. Pri výbere hrany dodržuj nasledujúce pravidlá:*

  T1: *Každú hranu možno v jednom smere použiť iba raz*
  T2: *Hranu prvého príchodu možno použiť, iba ak niet inej možnosti*

- **Krok 3.** *Ak taká hrana neexistuje – STOP. Inak polož $u := v$ a pokračuj Krokom 2.*

♣

Algoritmus

Tarryho algoritmus *na konštrukciu takého sledu v grafe* $G = (V, H)$*, ktorý začína v ľubovoľnom vrchole* $s \in V$*, prejde všetkými hranami komponentu grafu* G *a skončí vo vrchole* s*. Výsledný sled budeme volať* **Tarryho sled**.

- **Krok 1.** *Začni z ľubovoľného vrchola* $s \in V$*, polož* $u := s$*,* $T = (u)$*.*
  $\{T$ *je inicializačne triviálny sled, obsahujúci jediný vrchol.*$\}$
- **Krok 2.** *Ak môžeš, vyber k poslednému vrcholu* u *sledu* T *ďalšiu incidentnú hranu* $\{u, v\}$ *podľa nižšie uvedených pravidiel* **T1**, **T2** *a zaraď ju do sledu* T*. Zaznač si smer použitia hrany* $\{u, v\}$*. Ak doteraz vrchol* v *ešte nebol zaradený do sledu* T*, označ hranu* $\{u, v\}$ *ako hranu prvého príchodu. Pri výbere hrany dodržuj nasledujúce pravidlá:*

  T1: *Každú hranu možno v jednom smere použiť iba raz*
  T2: *Hranu prvého príchodu možno použiť, iba ak niet inej možnosti*
- **Krok 3.** *Ak taká hrana neexistuje – STOP.*
  Inak polož $u := v$ *a pokračuj Krokom 2.*

♣

Algoritmus

Tarryho algoritmus *na konštrukciu takého sledu v grafe $G = (V, H)$, ktorý začína v ľubovoľnom vrchole $s \in V$, prejde všetkými hranami komponentu grafu G a skončí vo vrchole s. Výsledný sled budeme volať* **Tarryho sled**.

- **Krok 1.** *Začni z ľubovoľného vrchola $s \in V$, polož $u := s$, $T = (u)$.*
  $\{T$ je inicializačne triviálny sled, obsahujúci jediný vrchol.$\}$
- **Krok 2.** *Ak môžeš, vyber k poslednému vrcholu u sledu T ďalšiu incidentnú hranu $\{u, v\}$ podľa nižšie uvedených pravidiel* **T1**, **T2** *a zaraď ju do sledu T. Zaznač si smer použitia hrany $\{u, v\}$. Ak doteraz vrchol v ešte nebol zaradený do sledu T, označ hranu $\{u, v\}$ ako hranu prvého príchodu. Pri výbere hrany dodržuj nasledujúce pravidlá:*

  T1: *Každú hranu možno v jednom smere použiť iba raz*
  T2: *Hranu prvého príchodu možno použiť, iba ak niet inej možnosti*

- **Krok 3.** *Ak taká hrana neexistuje – STOP.*
  Inak polož $u := v$ a pokračuj Krokom 2.

♣

Algoritmus

Tarryho algoritmus *na konštrukciu takého sledu v grafe $G = (V, H)$, ktorý začína v ľubovoľnom vrchole $s \in V$, prejde všetkými hranami komponentu grafu G a skončí vo vrchole s. Výsledný sled budeme volať* **Tarryho sled**.

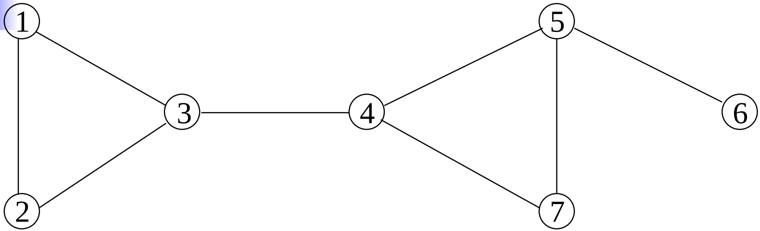
- **Krok 1.** *Začni z ľubovoľného vrchola $s \in V$, polož $u := s$, $T = (u)$.* $\{$*T je inicializačne triviálny sled, obsahujúci jediný vrchol.*$\}$
- **Krok 2.** *Ak môžeš, vyber k poslednému vrcholu u sledu T ďalšiu incidentnú hranu $\{u, v\}$ podľa nižšie uvedených pravidiel* **T1**, **T2** *a zaraď ju do sledu T. Zaznač si smer použitia hrany $\{u, v\}$. Ak doteraz vrchol v ešte nebol zaradený do sledu T, označ hranu $\{u, v\}$ ako hranu prvého príchodu. Pri výbere hrany dodržuj nasledujúce pravidlá:*

  T1: *Každú hranu možno v jednom smere použiť iba raz*
  T2: *Hranu prvého príchodu možno použiť, iba ak niet inej možnosti*

- **Krok 3.** *Ak taká hrana neexistuje – STOP.*
  Inak polož $u := v$ a pokračuj Krokom 2.

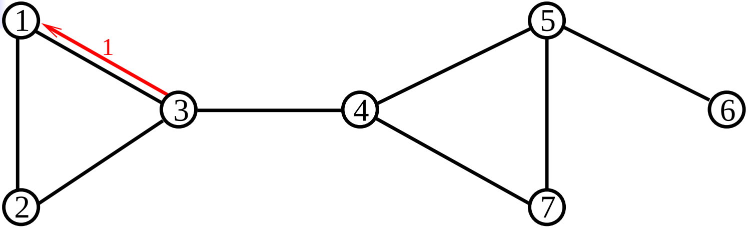
♣

Príklad



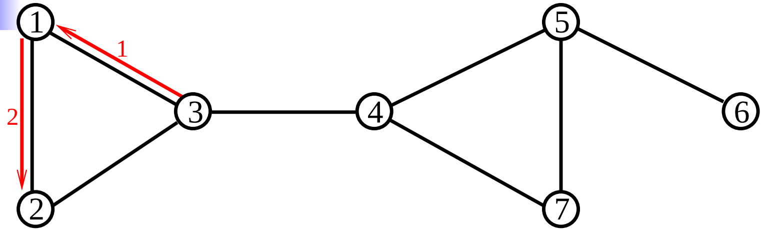
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												$\bullet$				
1	{3,1}		$\Leftarrow$							$\bullet$						
2	{1,2}	$\Rightarrow$									$\bullet$					
3	{2,3}			$\rightarrow$												
4	{3,2}			$\leftarrow$												
5	{2,1}	$\leftarrow$														
6	{1,3}		$\rightarrow$													
7	{3,4}				$\Rightarrow$								$\bullet$			
8	{4,5}					$\Rightarrow$								$\bullet$		
9	{5,6}							$\Rightarrow$							$\bullet$	
10	{6,5}							$\leftarrow$								
11	{5,7}								$\Rightarrow$							$\bullet$
12	{7,4}						$\leftarrow$									
13	{4,7}						$\rightarrow$									
14	{7,5}								$\leftarrow$							
15	{5,4}					$\leftarrow$										
16	{4,3}				$\leftarrow$											

Príklad



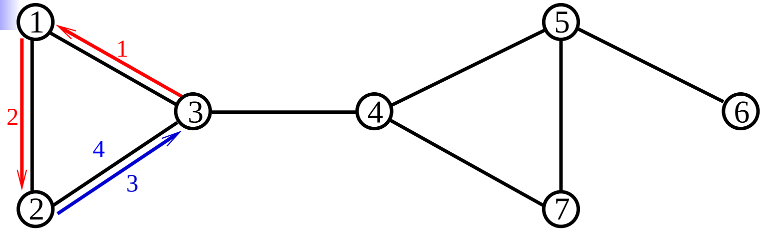
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		⇐							•						
2	{1,2}	⇒									•					
3	{2,3}			→												
4	{3,2}			←												
5	{2,1}	←														
6	{1,3}		→													
7	{3,4}				⇒								•			
8	{4,5}					⇒								•		
9	{5,6}							⇒							•	
10	{6,5}							←								
11	{5,7}								⇒							•
12	{7,4}						←									
13	{4,7}						→									
14	{7,5}								←							
15	{5,4}					←										
16	{4,3}				←											

Príklad



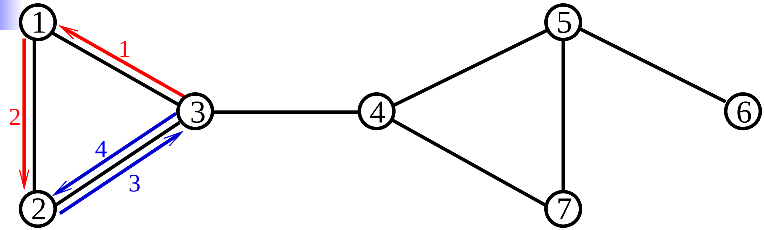
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		⇐							•						
2	{1,2}	⇒									•					
3	{2,3}			→												
4	{3,2}			←												
5	{2,1}	←														
6	{1,3}		→													
7	{3,4}				⇒								•			
8	{4,5}					⇒								•		
9	{5,6}							⇒							•	
10	{6,5}							←								
11	{5,7}								⇒							•
12	{7,4}						←									
13	{4,7}						→									
14	{7,5}								←							
15	{5,4}					←										
16	{4,3}				←											

Príklad



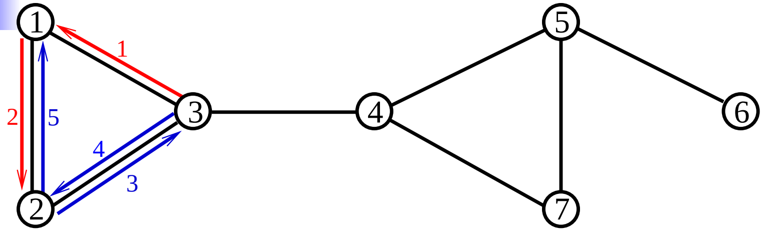
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		⇐							•						
2	{1,2}	⇒									•					
3	{2,3}			→												
4	{3,2}			←												
5	{2,1}	←														
6	{1,3}		→													
7	{3,4}				⇒								•			
8	{4,5}					⇒								•		
9	{5,6}							⇒							•	
10	{6,5}							←								
11	{5,7}								⇒							•
12	{7,4}						←									
13	{4,7}						→									
14	{7,5}								←							
15	{5,4}					←										
16	{4,3}				←											

Príklad



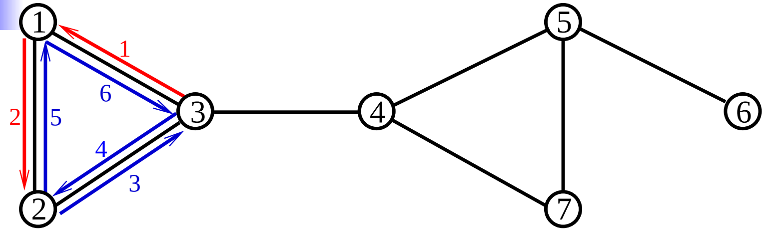
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		⇐							•						
2	{1,2}	⇒									•					
3	{2,3}			→												
4	{3,2}			←												
5	{2,1}	←														
6	{1,3}		→													
7	{3,4}				⇒								•			
8	{4,5}					⇒								•		
9	{5,6}							⇒							•	
10	{6,5}							←								
11	{5,7}								⇒							•
12	{7,4}						←									
13	{4,7}						→									
14	{7,5}								←							
15	{5,4}					←										
16	{4,3}				←											

Príklad



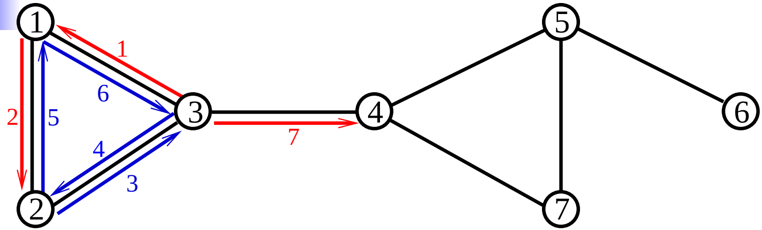
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		$\Leftarrow$							•						
2	{1,2}	$\Rightarrow$									•					
3	{2,3}			$\rightarrow$												
4	{3,2}			$\leftarrow$												
5	{2,1}	$\leftarrow$														
6	{1,3}		$\rightarrow$													
7	{3,4}				$\Rightarrow$								•			
8	{4,5}					$\Rightarrow$								•		
9	{5,6}							$\Rightarrow$							•	
10	{6,5}							$\leftarrow$								
11	{5,7}								$\Rightarrow$							•
12	{7,4}						$\leftarrow$									
13	{4,7}						$\rightarrow$									
14	{7,5}								$\leftarrow$							
15	{5,4}					$\leftarrow$										
16	{4,3}				$\leftarrow$											

Príklad



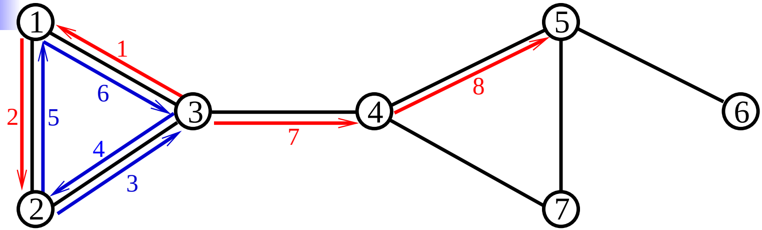
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		⇐							•						
2	{1,2}	⇒									•					
3	{2,3}			→												
4	{3,2}			←												
5	{2,1}	←														
6	{1,3}		→													
7	{3,4}				⇒								•			
8	{4,5}					⇒								•		
9	{5,6}							⇒							•	
10	{6,5}							←								
11	{5,7}								⇒							•
12	{7,4}						←									
13	{4,7}						→									
14	{7,5}								←							
15	{5,4}					←										
16	{4,3}				←											

Príklad



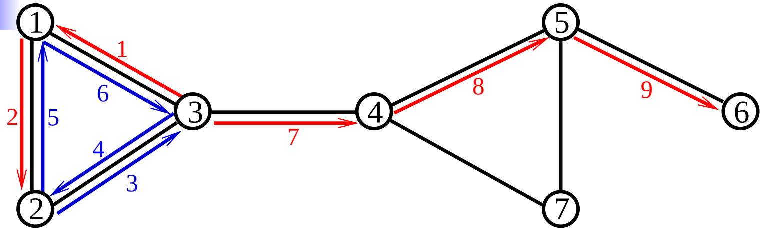
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		$\Leftarrow$							•						
2	{1,2}	$\Rightarrow$									•					
3	{2,3}			$\rightarrow$												
4	{3,2}			$\leftarrow$												
5	{2,1}	$\leftarrow$														
6	{1,3}		$\rightarrow$													
7	{3,4}				$\Rightarrow$								•			
8	{4,5}					$\Rightarrow$								•		
9	{5,6}							$\Rightarrow$							•	
10	{6,5}							$\leftarrow$								
11	{5,7}								$\Rightarrow$							•
12	{7,4}						$\leftarrow$									
13	{4,7}						$\rightarrow$									
14	{7,5}								$\leftarrow$							
15	{5,4}					$\leftarrow$										
16	{4,3}				$\leftarrow$											

Príklad



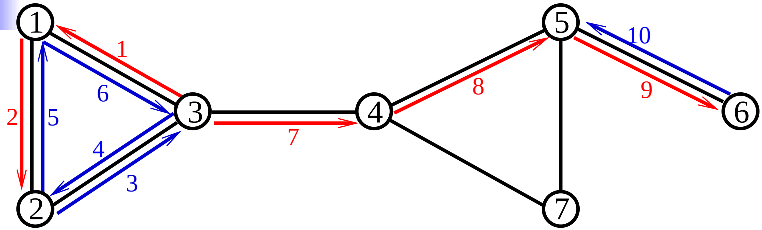
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		⇐							•						
2	{1,2}	⇒									•					
3	{2,3}			→												
4	{3,2}			←												
5	{2,1}	←														
6	{1,3}		→													
7	{3,4}				⇒								•			
8	{4,5}					⇒								•		
9	{5,6}							⇒							•	
10	{6,5}							←								
11	{5,7}								⇒							•
12	{7,4}						←									
13	{4,7}						→									
14	{7,5}								←							
15	{5,4}					←										
16	{4,3}				←											

Príklad



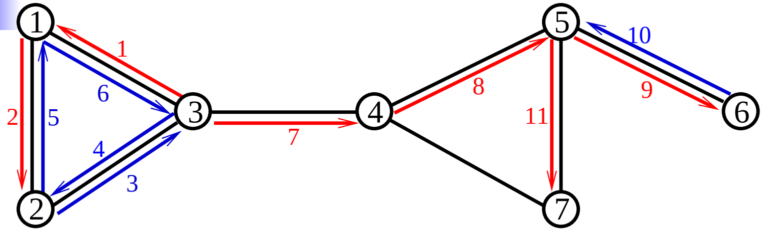
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		⇐							•						
2	{1,2}	⇒									•					
3	{2,3}			→												
4	{3,2}			←												
5	{2,1}	←														
6	{1,3}		→													
7	{3,4}				⇒								•			
8	{4,5}					⇒								•		
9	{5,6}							⇒							•	
10	{6,5}							←								
11	{5,7}								⇒							•
12	{7,4}						←									
13	{4,7}						→									
14	{7,5}								←							
15	{5,4}					←										
16	{4,3}				←											

Príklad



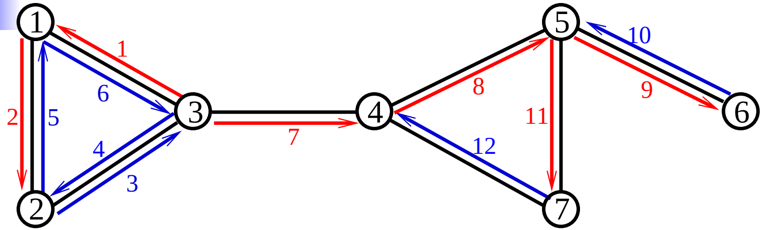
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		$\Leftarrow$							•						
2	{1,2}	$\Rightarrow$									•					
3	{2,3}			$\rightarrow$												
4	{3,2}			$\leftarrow$												
5	{2,1}	$\leftarrow$														
6	{1,3}		$\rightarrow$													
7	{3,4}				$\Rightarrow$								•			
8	{4,5}					$\Rightarrow$								•		
9	{5,6}							$\Rightarrow$							•	
10	{6,5}							$\leftarrow$								
11	{5,7}								$\Rightarrow$							•
12	{7,4}						$\leftarrow$									
13	{4,7}						$\rightarrow$									
14	{7,5}								$\leftarrow$							
15	{5,4}					$\leftarrow$										
16	{4,3}				$\leftarrow$											

Príklad



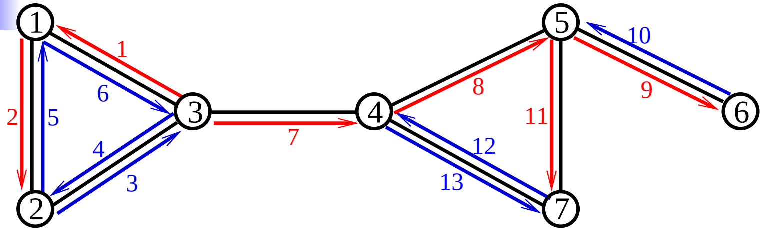
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												●				
1	{3,1}		$\Leftarrow$							●						
2	{1,2}	$\Rightarrow$									●					
3	{2,3}			$\rightarrow$												
4	{3,2}			$\leftarrow$												
5	{2,1}	$\leftarrow$														
6	{1,3}		$\rightarrow$													
7	{3,4}				$\Rightarrow$								●			
8	{4,5}					$\Rightarrow$								●		
9	{5,6}							$\Rightarrow$							●	
10	{6,5}							$\leftarrow$								
11	{5,7}								$\Rightarrow$							●
12	{7,4}						$\leftarrow$									
13	{4,7}						$\rightarrow$									
14	{7,5}								$\leftarrow$							
15	{5,4}					$\leftarrow$										
16	{4,3}				$\leftarrow$											

Príklad



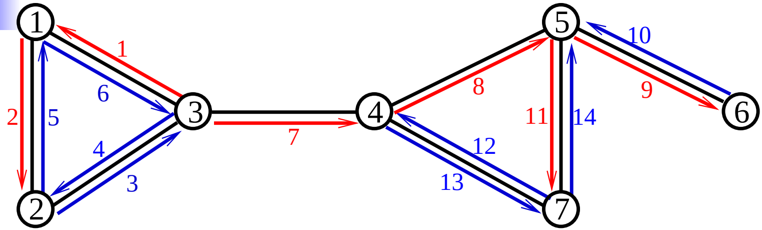
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		$\Leftarrow$							•						
2	{1,2}	$\Rightarrow$									•					
3	{2,3}			$\rightarrow$												
4	{3,2}			$\leftarrow$												
5	{2,1}	$\leftarrow$														
6	{1,3}		$\rightarrow$													
7	{3,4}				$\Rightarrow$								•			
8	{4,5}					$\Rightarrow$								•		
9	{5,6}							$\Rightarrow$							•	
10	{6,5}							$\leftarrow$								
11	{5,7}								$\Rightarrow$							•
12	{7,4}						$\leftarrow$									
13	{4,7}						$\rightarrow$									
14	{7,5}								$\leftarrow$							
15	{5,4}					$\leftarrow$										
16	{4,3}				$\leftarrow$											

Príklad



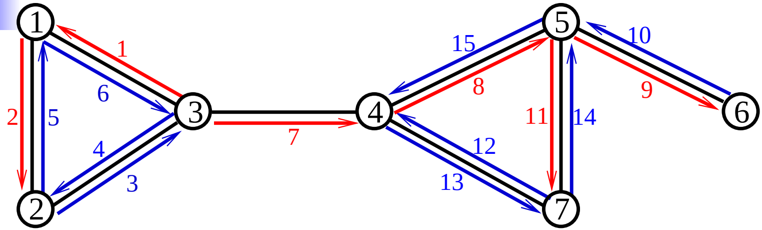
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		$\Leftarrow$							•						
2	{1,2}	$\Rightarrow$									•					
3	{2,3}			$\rightarrow$												
4	{3,2}			$\leftarrow$												
5	{2,1}	$\leftarrow$														
6	{1,3}		$\rightarrow$													
7	{3,4}				$\Rightarrow$								•			
8	{4,5}					$\Rightarrow$								•		
9	{5,6}							$\Rightarrow$							•	
10	{6,5}							$\leftarrow$								
11	{5,7}								$\Rightarrow$							•
12	{7,4}						$\leftarrow$									
13	{4,7}						$\rightarrow$									
14	{7,5}								$\leftarrow$							
15	{5,4}					$\leftarrow$										
16	{4,3}				$\leftarrow$											

Príklad



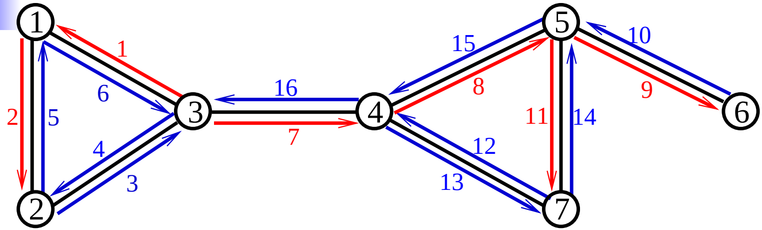
r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												$\bullet$				
1	{3,1}		$\Leftarrow$							$\bullet$						
2	{1,2}	$\Rightarrow$									$\bullet$					
3	{2,3}			$\rightarrow$												
4	{3,2}			$\leftarrow$												
5	{2,1}	$\leftarrow$														
6	{1,3}		$\rightarrow$													
7	{3,4}				$\Rightarrow$								$\bullet$			
8	{4,5}					$\Rightarrow$								$\bullet$		
9	{5,6}							$\Rightarrow$							$\bullet$	
10	{6,5}							$\leftarrow$								
11	{5,7}								$\Rightarrow$							$\bullet$
12	{7,4}						$\leftarrow$									
13	{4,7}						$\rightarrow$									
14	{7,5}								$\leftarrow$							
15	{5,4}					$\leftarrow$										
16	{4,3}				$\leftarrow$											

Príklad



r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												•				
1	{3,1}		$\Leftarrow$							•						
2	{1,2}	$\Rightarrow$									•					
3	{2,3}			$\rightarrow$												
4	{3,2}			$\leftarrow$												
5	{2,1}	$\leftarrow$														
6	{1,3}		$\rightarrow$													
7	{3,4}				$\Rightarrow$								•			
8	{4,5}					$\Rightarrow$								•		
9	{5,6}							$\Rightarrow$							•	
10	{6,5}							$\leftarrow$								
11	{5,7}								$\Rightarrow$							•
12	{7,4}						$\leftarrow$									
13	{4,7}						$\rightarrow$									
14	{7,5}								$\leftarrow$							
15	{5,4}					$\leftarrow$										
16	{4,3}				$\leftarrow$											

Príklad



r		{1,2}	{1,3}	{2,3}	{3,4}	{4,5}	{4,7}	{5,6}	{5,7}	1	2	3	4	5	6	7
0												●				
1	{3,1}		⇐							●						
2	{1,2}	⇒									●					
3	{2,3}			→												
4	{3,2}			←												
5	{2,1}	←														
6	{1,3}		→													
7	{3,4}				⇒								●			
8	{4,5}					⇒								●		
9	{5,6}							⇒							●	
10	{6,5}							←								
11	{5,7}								⇒							●
12	{7,4}						←									
13	{4,7}						→									
14	{7,5}								←							
15	{5,4}					←										
16	{4,3}				←											

Definícia

Nech $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ je u–v sled (resp. orientovaný sled, resp. polosled) v hranovo ohodnotenom grafe $G=(V,H,c)$ (resp. digrafe $\overrightarrow{G}=(V,H,c)$).
Dĺžkou sledu (polosledu) $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ *alebo tiež* **cenou sledu (polosledu)** *nazveme súčet ohodnotení jeho hrán, pričom ohodnotenie každej hrany započítavame toľkokrát, koľkokrát sa táto hrana v slede vyskytuje.*

Dĺžku sledu $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ budeme značiť $d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$.

Poznámka

Podľa definície sledu sa pripúšťa aj triviálny sled s jediným vrcholom a žiadnou hranou. Dĺžka takéhoto sledu je nulová.

Poznámka

Predchádzajúcou definíciou je definovaná i dĺžka ťahu, orientovaného ťahu, cesty, poloťahu a polocesty, pretože všetky tieto pojmy sú špeciálnym prípadom sledu, resp. polosledu.

Dĺžka sledu

Definícia

Nech $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ je u–v sled (resp. orientovaný sled, resp. polosled) v hranovo ohodnotenom grafe $G=(V,H,c)$ (resp. digrafe $\overrightarrow{G}=(V,H,c)$).
Dĺžkou sledu (polosledu) $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ *alebo tiež* **cenou sledu (polosledu)** *nazveme súčet ohodnotení jeho hrán, pričom ohodnotenie každej hrany započítavame toľkokrát, koľkokrát sa táto hrana v slede vyskytuje.*

Dĺžku sledu $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ budeme značiť $d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$.

Poznámka

Podľa definície sledu sa pripúšťa aj triviálny sled s jediným vrcholom a žiadnou hranou. Dĺžka takéhoto sledu je nulová.

Poznámka

Predchádzajúcou definíciou je definovaná i dĺžka ťahu, orientovaného ťahu, cesty, poloťahu a polocesty, pretože všetky tieto pojmy sú špeciálnym prípadom sledu, resp. polosledu.

Dĺžka sledu

Definícia

Nech $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ je u–v sled (resp. orientovaný sled, resp. polosled) v hranovo ohodnotenom grafe $G=(V,H,c)$ (resp. digrafe $\overrightarrow{G}=(V,H,c)$).
Dĺžkou sledu (polosledu) $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ *alebo tiež* **cenou sledu (polosledu)** *nazveme súčet ohodnotení jeho hrán, pričom ohodnotenie každej hrany započítavame toľkokrát, koľkokrát sa táto hrana v slede vyskytuje.*

Dĺžku sledu $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ budeme značiť $d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$.

Poznámka

Podľa definície sledu sa pripúšťa aj triviálny sled s jediným vrcholom a žiadnou hranou. Dĺžka takéhoto sledu je nulová.

Poznámka

Predchádzajúcou definíciou je definovaná i dĺžka ťahu, orientovaného ťahu, cesty, poloťahu a polocesty, pretože všetky tieto pojmy sú špeciálnym prípadom sledu, resp. polosledu.

Dĺžka ťahu, dĺžka cesty

Poznámka

Pre ťah, poloťah, cestu, a polocestu, (v ktorých sa podľa ich definície každá hrana môže vyskytovať len raz), môžeme zjednodušene definovať:

Dĺžka $d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ ťahu (poloťahu, cesty alebo polocesty) $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ je súčet ohodnotení ich hrán, t. j.

$$d(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \sum_{h \in \boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h).$$

Poznámka

Často býva užitočné definovať dĺžku sledu $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ v grafe $G=(V,H)$, resp. digrafe $\overrightarrow{G}=(V,H)$, ktorý nie je hranovo ohodnotený, ako počet hrán sledu $\boldsymbol{\mu}(u,v)$. Takto definovaná dĺžka sledu je totožná s dĺžkou sledu v hranovo ohodnotenom grafe, (resp. digrafe) $G'=(V,H,c)$, kde $c(h)=1$ pre každú hranu $h \in H$.

Dĺžka ťahu, dĺžka cesty

Poznámka

Pre ťah, poloťah, cestu, a polocestu, (v ktorých sa podľa ich definície každá hrana môže vyskytovať len raz), môžeme zjednodušene definovať:

Dĺžka $d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ ťahu (poloťahu, cesty alebo polocesty) $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ je súčet ohodnotení ich hrán, t. j.

$$d(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \sum_{h \in \boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h).$$

Poznámka

Často býva užitočné definovať dĺžku sledu $\boldsymbol{\mu}(u,v)$ v grafe $G = (V,H)$, resp. digrafe $\overrightarrow{G} = (V,H)$, ktorý nie je hranovo ohodnotený, ako počet hrán sledu $\boldsymbol{\mu}(u,v)$. Takto definovaná dĺžka sledu je totožná s dĺžkou sledu v hranovo ohodnotenom grafe, (resp. digrafe) $G' = (V,H,c)$, kde $c(h) = 1$ pre každú hranu $h \in H$.

Najkratšia cesta v grafe a digrafe

Definícia

Najkratšia *u-v* **cesta** *v hranovo ohodnotenom grafe* $G = (V, H, c)$ *(resp. v hranovo ohodnotenom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$*) je tá u-v cesta v G (resp. tá orientovaná u-v cesta v* $\overrightarrow{G}$*), ktorá má najmenšiu dĺžku.*

Dohoda

- *Všetky algoritmy na hľadanie najkratšej cesty (okrem Floydovho algoritmu) budú formulované* **pre hranovo ohodnotené digrafy** $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$*, v ktorých sa predpokladá, že* $c(h) \geq 0$.
- *Predpokladáme, že* $0 \notin V$.

Najkratšia cesta v neorientovanom grafe

Najkratšiu cestu v neorientovanom grafe $G = (V, H, c)$ nájdeme ako najkratšiu cestu v digrafe $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{H}, \overrightarrow{c})$, ktorom $\overrightarrow{H}$ je množina orientovaných hrán obsahujúca pre každú neorientovanú hranu $h = \{u, v \in H\}$ dvojicu orientovaných hrán (u, v), (v, u), obe s rovnakou cenou rovnou $c(h) = c(\{u, v\})$, t.j.

$$\overrightarrow{c}(u, v) = \overrightarrow{c}(v, u) = c(h).$$

Algoritmus

Základný algoritmus *na hľadanie najkratších orientovaných u–v ciest z pevného vrchola $u \in V$ do všetkých dosiahnuteľných vrcholov $v \in V$ v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s nezápornou cenou hrany $c(h)$ (a kde $0 \notin V$).*

- **Krok 1. Inicializácia.**
  Pre každý vrchol $i \in V$ priraď dve značky $t(i)$ a $x(i)$.
  {Značka $t(i)$ predstavuje horný odhad dĺžky doteraz nájdenej najlepšej u–i cesty a $x(i)$ jej predposledný vrchol.}
  Polož $t(u) := 0$, $t(i) := \infty$ pre $i \in V$, $i \neq u$ a $x(i) := 0$ pre každé $i \in V$.
- **Krok 2.** *Zisti, či existuje orientovaná hrana $(i, j) \in H$, pre ktorú platí*
  $$t(j) > t(i) + c(i, j). \qquad (3)$$
  Ak taká hrana $(i, j) \in H$ existuje, potom polož
  $$t(j) := t(i) + c(i, j), \quad x(j) := i$$
  a opakuj Krok 2.
- **Krok 3.** *Ak taká orientovaná hrana (z kroku 2.) neexistuje, STOP.* ♣

Algoritmus

Základný algoritmus *na hľadanie najkratších orientovaných u–v ciest z pevného vrchola* $u \in V$ *do všetkých dosiahnuteľných vrcholov* $v \in V$ *v hranovo ohodnotenom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *s nezápornou cenou hrany* $c(h)$ *(a kde* $0 \notin V$*).*

- **Krok 1. Inicializácia.**
  Pre každý vrchol $i \in V$ *priraď dve značky* $t(i)$ *a* $x(i)$.
  $\{$*Značka* $t(i)$ *predstavuje horný odhad dĺžky doteraz nájdenej najlepšej u–i cesty a* $x(i)$ *jej predposledný vrchol.*$\}$
  Polož $t(u) := 0$, $t(i) := \infty$ *pre* $i \in V$, $i \neq u$ *a* $x(i) := 0$ *pre každé* $i \in V$.
- **Krok 2.** *Zisti, či existuje orientovaná hrana* $(i, j) \in H$, *pre ktorú platí*

$$t(j) > t(i) + c(i, j). \qquad (3)$$

  Ak taká hrana $(i, j) \in H$ *existuje, potom polož*

$$t(j) := t(i) + c(i, j), \quad x(j) := i$$

  a opakuj Krok 2.
- **Krok 3.** *Ak taká orientovaná hrana (z kroku 2.) neexistuje, STOP.* ♣

Algoritmus

Základný algoritmus *na hľadanie najkratších orientovaných u–v ciest z pevného vrchola $u \in V$ do všetkých dosiahnuteľných vrcholov $v \in V$ v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s nezápornou cenou hrany $c(h)$ (a kde $0 \notin V$).*

- **Krok 1. Inicializácia.**
  Pre každý vrchol $i \in V$ priraď dve značky $t(i)$ a $x(i)$.
  $\{$Značka $t(i)$ predstavuje horný odhad dĺžky doteraz nájdenej najlepšej u–i cesty a $x(i)$ jej predposledný vrchol.$\}$
  Polož $t(u) := 0$, $t(i) := \infty$ pre $i \in V$, $i \neq u$ a $x(i) := 0$ pre každé $i \in V$.
- **Krok 2.** *Zisti, či existuje orientovaná hrana $(i, j) \in H$, pre ktorú platí*

$$t(j) > t(i) + c(i, j). \tag{3}$$

  Ak taká hrana $(i, j) \in H$ existuje, potom polož

$$t(j) := t(i) + c(i, j), \quad x(j) := i$$

  a opakuj Krok 2.
- **Krok 3.** *Ak taká orientovaná hrana (z kroku 2.) neexistuje, STOP.*

♣

Algoritmus

Základný algoritmus *na hľadanie najkratších orientovaných u–v ciest z pevného vrchola $u \in V$ do všetkých dosiahnuteľných vrcholov $v \in V$ v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s nezápornou cenou hrany $c(h)$ (a kde $0 \notin V$).*

- **Krok 1. Inicializácia.**
  Pre každý vrchol $i \in V$ priraď dve značky $t(i)$ a $x(i)$.
  $\{$Značka $t(i)$ predstavuje horný odhad dĺžky doteraz nájdenej najlepšej u–i cesty a $x(i)$ jej predposledný vrchol.$\}$
  Polož $t(u) := 0$, $\underline{t(i) := \infty}$ pre $i \in V$, $i \neq u$ a $x(i) := 0$ pre každé $i \in V$.
- **Krok 2.** *Zisti, či existuje orientovaná hrana $(i, j) \in H$, pre ktorú platí*

$$t(j) > t(i) + c(i, j). \tag{3}$$

  Ak taká hrana $(i, j) \in H$ existuje, potom polož

$$t(j) := t(i) + c(i, j), \quad x(j) := i$$

  a opakuj Krok 2.
- **Krok 3.** *Ak taká orientovaná hrana (z kroku 2.) neexistuje, STOP.* ♣

Základný algoritmus pre hľadanie najkratšej cesty

Najkratšiu u–i cestu zostroj potom spätne pomocou značiek $x(i)$ ako cestu prechádzajúcu vrcholmi

$$i, x(i), x(x(i)), x(x(x(i))), \dots, u$$

teda táto najkratšia cesta bude mať tvar

$$(u, \dots, x(x(x(i))), \underbrace{\big(x(x(x(i))), x(x(i))\big)}_{\text{hrana}}, x(x(i)),$$
$$\underbrace{\big(x(x(i)), x(i)\big)}_{\text{hrana}}, x(i), \underbrace{\big(x(i), i\big)}_{\text{hrana}}, i)$$

Po zastavení algoritmu konečná hodnota značky $t(i)$ predstavuje dĺžku najkratšej u–i cesty pre každý vrchol i.

Ak $t(i) = \infty$, potom vrchol i nie je dosiahnuteľný z vrchola u.

Zápis najkratšej cesty

Dohoda (o značení)

Majme pole smerníkov $x(\ )$ získané niektorým algoritmom najkratšej cesty.
Rekurzívne možno definovať $x^{(k)}(j)$ pre $j \in V$ takto

- $x^{(1)}(j) = x(j)$
- $x^{(k)}(j) = x(x^{(k-1)}(j))$

$$x^{(k)}(j) = \underbrace{x(x(\ldots x(}_{k\text{-krát}}j)\ldots))$$

Potom možno rovnocenne zapísať vrcholy najkratšej u-j cesty v opačnom poradí (t.j. odzadu) takto

$$j,\ x^{(1)}(j),\ x^{(2)}(j),\ \ldots\ x^{(k)}(j) \equiv u,$$

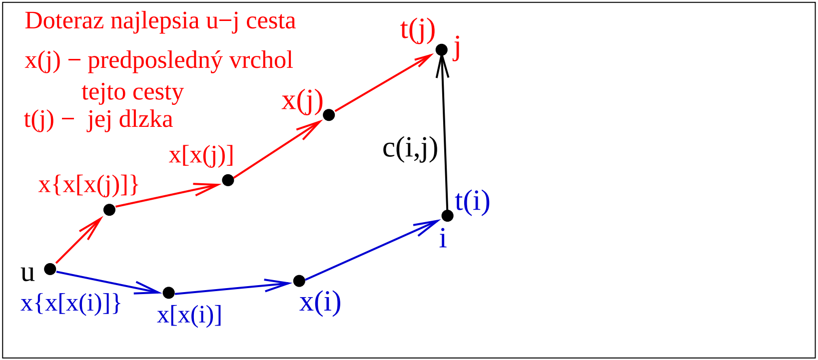
najkratšia u-j cesta teda prechádza postupne vrcholmi

$$u \equiv x^{(k)}(j),\ x^{(k-1)}(j),\ \ldots,\ x^{(2)}(j),\ x^{(1)}(j),\ j$$

Princíp základného algoritmu

Veta

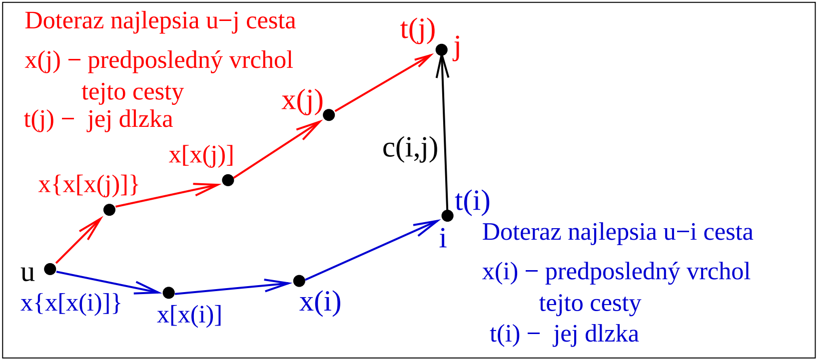
V digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s nezápornou cenou hrany sa základný algoritmus zastaví po konečnom počte krokov.



Princíp základného algoritmu

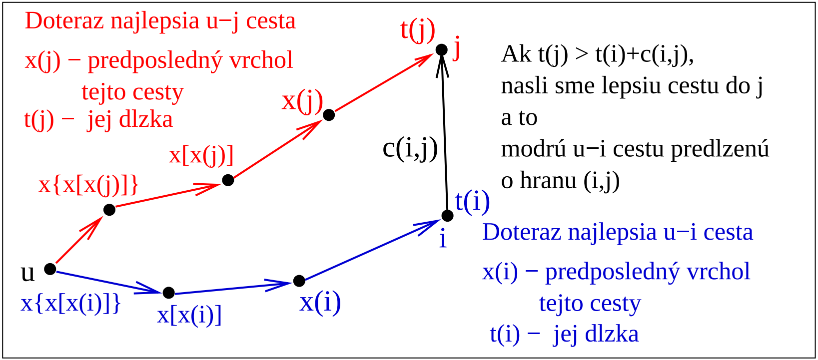
Veta

V digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s nezápornou cenou hrany sa základný algoritmus zastaví po konečnom počte krokov.



Veta

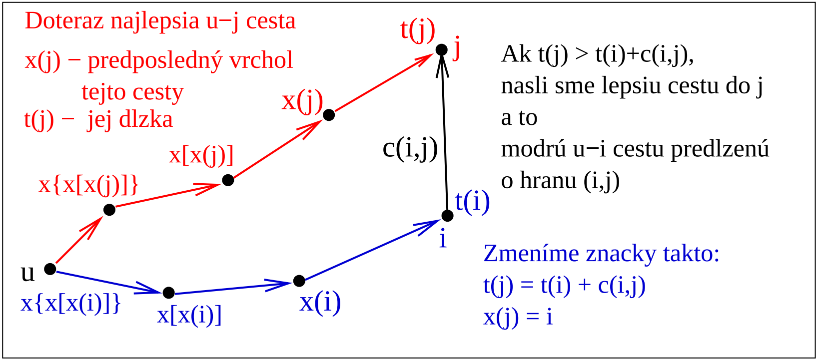
V digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s nezápornou cenou hrany sa základný algoritmus zastaví po konečnom počte krokov.



Princíp základného algoritmu

Veta

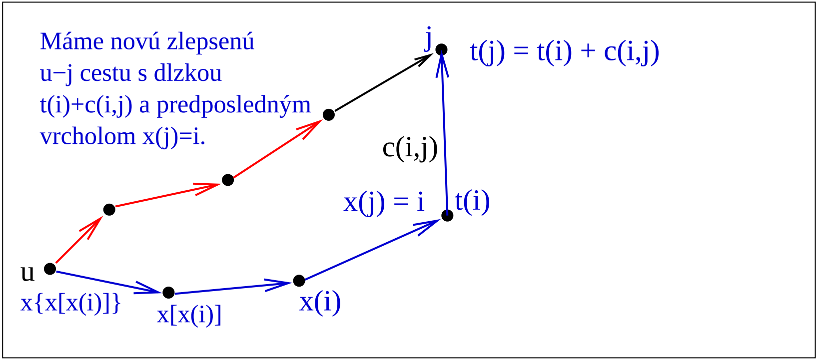
V digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s nezápornou cenou hrany sa základný algoritmus zastaví po konečnom počte krokov.



Princíp základného algoritmu

Veta

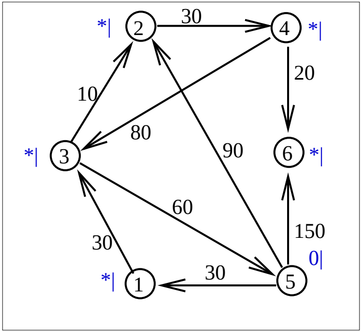
V digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s nezápornou cenou hrany sa základný algoritmus zastaví po konečnom počte krokov.



Príklad. Hľadanie všetkých najkratších ciest z vrchola 5.

Tabuľka ohodnotení hrán digrafu $\overrightarrow{G}$

h	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$
$c(h)$	30	30	10	60	80	20	30	90	150

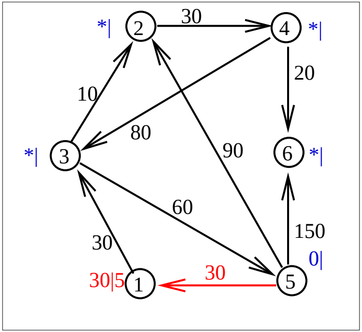


$h=(i,j)$	$t(i)$	c(h)	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-			$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$0\|$	$\infty\|$
$(5,1)$	0	30	$30\|5$					
$(5,2)$	0	90		$90\|5$				
$(5,6)$	0	150						$150\|5$
$(1,3)$	30	30			$60\|1$			
$(2,4)$	90	30				$120\|2$		
$(3,2)$	60	10		$70\|3$				
$(4,6)$	120	20						$140\|4$
$(2,4)$	70	30				$100\|2$		
$(4,6)$	100	20						$120\|4$

Príklad. Hľadanie všetkých najkratších ciest z vrcholu 5.

Tabuľka ohodnotení hrán digrafu $\overrightarrow{G}$

h	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$
$c(h)$	30	30	10	60	80	20	30	90	150

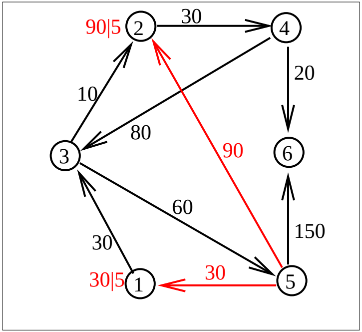


$h=(i,j)$	$t(i)$	c(h)	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-			$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$0\|$	$\infty\|$
$(5,1)$	0	30	$30\|5$					
$(5,2)$	0	90		$90\|5$				
$(5,6)$	0	150						$150\|5$
$(1,3)$	30	30			$60\|1$			
$(2,4)$	90	30				$120\|2$		
$(3,2)$	60	10		$70\|3$				
$(4,6)$	120	20						$140\|4$
$(2,4)$	70	30				$100\|2$		
$(4,6)$	100	20						$120\|4$

Príklad. Hľadanie všetkých najkratších ciest z vrchola 5.

Tabuľka ohodnotení hrán digrafu $\overrightarrow{G}$

h	(1, 3)	(2, 4)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 3)	(4, 6)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 6)
$c(h)$	30	30	10	60	80	20	30	90	150

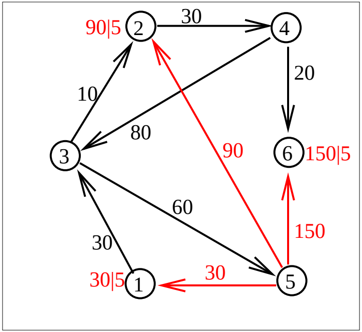


$h = (i, j)$	$t(i)$	c(h)	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-			$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$0\|$	$\infty\|$
(5, 1)	0	30	30|5					
(5, 2)	0	90		90|5				
(5, 6)	0	150						150|5
(1, 3)	30	30			60|1			
(2, 4)	90	30				120|2		
(3, 2)	60	10		70|3				
(4, 6)	120	20						140|4
(2, 4)	70	30				100|2		
(4, 6)	100	20						120|4

Príklad. Hľadanie všetkých najkratších ciest z vrchola 5.

Tabuľka ohodnotení hrán digrafu $\overrightarrow{G}$

h	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$
$c(h)$	30	30	10	60	80	20	30	90	150

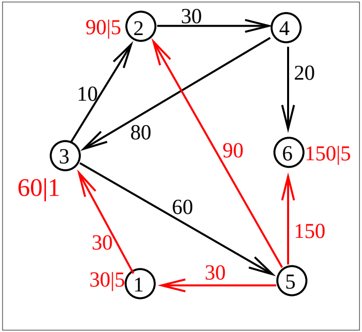


$h=(i,j)$	$t(i)$	c(h)	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-			$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$0\|$	$\infty\|$
$(5,1)$	0	30	30|5					
$(5,2)$	0	90		90|5				
$(5,6)$	0	150						150|5
$(1,3)$	30	30			60|1			
$(2,4)$	90	30				120|2		
$(3,2)$	60	10		70|3				
$(4,6)$	120	20						140|4
$(2,4)$	70	30				100|2		
$(4,6)$	100	20						120|4

Príklad. Hľadanie všetkých najkratších ciest z vrchola 5.

Tabuľka ohodnotení hrán digrafu $\overrightarrow{G}$

h	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$
$c(h)$	30	30	10	60	80	20	30	90	150

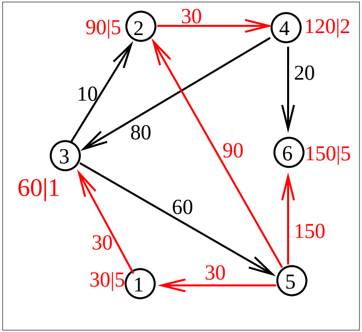


$h=(i,j)$	$t(i)$	c(h)	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-			$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$0\|$	$\infty\|$
$(5,1)$	0	30	$30\|5$					
$(5,2)$	0	90		$90\|5$				
$(5,6)$	0	150						$150\|5$
$(1,3)$	30	30			$60\|1$			
$(2,4)$	90	30				$120\|2$		
$(3,2)$	60	10		$70\|3$				
$(4,6)$	120	20						$140\|4$
$(2,4)$	70	30				$100\|2$		
$(4,6)$	100	20						$120\|4$

Príklad. Hľadanie všetkých najkratších ciest z vrchola 5.

Tabuľka ohodnotení hrán digrafu $\overrightarrow{G}$

h	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$
$c(h)$	30	30	10	60	80	20	30	90	150

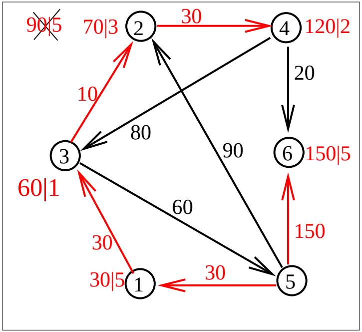


$h=(i,j)$	$t(i)$	c(h)	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-			$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$0\|$	$\infty\|$
$(5,1)$	0	30	30|5					
$(5,2)$	0	90		90|5				
$(5,6)$	0	150						150|5
$(1,3)$	30	30			60|1			
$(2,4)$	90	30				120|2		
$(3,2)$	60	10		70|3				
$(4,6)$	120	20						140|4
$(2,4)$	70	30				100|2		
$(4,6)$	100	20						120|4

Príklad. Hľadanie všetkých najkratších ciest z vrchola 5.

Tabuľka ohodnotení hrán digrafu $\overrightarrow{G}$

h	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$
$c(h)$	30	30	10	60	80	20	30	90	150

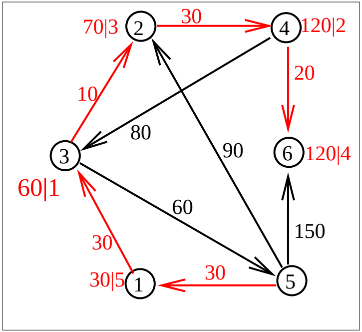


$h=(i,j)$	$t(i)$	c(h)	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-			$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$0\|$	$\infty\|$
$(5,1)$	0	30	$30\|5$					
$(5,2)$	0	90		$90\|5$				
$(5,6)$	0	150						$150\|5$
$(1,3)$	30	30			$60\|1$			
$(2,4)$	90	30				$120\|2$		
$(3,2)$	60	10		$70\|3$				
$(4,6)$	120	20						$140\|4$
$(2,4)$	70	30				$100\|2$		
$(4,6)$	100	20						$120\|4$

Príklad. Hľadanie všetkých najkratších ciest z vrchola 5.

Tabuľka ohodnotení hrán digrafu $\overrightarrow{G}$

h	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$
$c(h)$	30	30	10	60	80	20	30	90	150

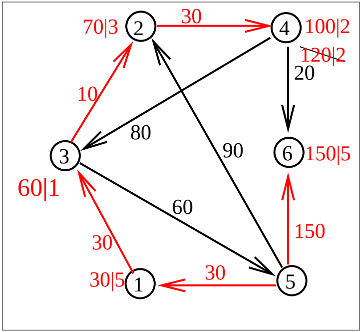


$h=(i,j)$	$t(i)$	c(h)	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-			$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$0\|$	$\infty\|$
$(5,1)$	0	30	30|5					
$(5,2)$	0	90		90|5				
$(5,6)$	0	150						150|5
$(1,3)$	30	30			60|1			
$(2,4)$	90	30				120|2		
$(3,2)$	60	10		70|3				
$(4,6)$	120	20						140|4
$(2,4)$	70	30				100|2		
$(4,6)$	100	20						120|4

Príklad. Hľadanie všetkých najkratších ciest z vrchola 5.

Tabuľka ohodnotení hrán digrafu $\overrightarrow{G}$

h	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$
$c(h)$	30	30	10	60	80	20	30	90	150

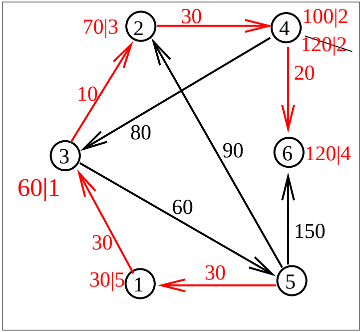


$h=(i,j)$	$t(i)$	c(h)	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-			$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$	$0\|$	$\infty\|$
$(5,1)$	0	30	30|5					
$(5,2)$	0	90		90|5				
$(5,6)$	0	150						150|5
$(1,3)$	30	30			60|1			
$(2,4)$	90	30				120|2		
$(3,2)$	60	10		70|3				
$(4,6)$	120	20						140|4
$(2,4)$	70	30				100|2		
$(4,6)$	100	20						120|4

Príklad. Hľadanie všetkých najkratších ciest z vrcholu 5.

Tabuľka ohodnotení hrán digrafu $\overrightarrow{G}$

h	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$
$c(h)$	30	30	10	60	80	20	30	90	150



$h=(i,j)$	$t(i)$	c(h)	1	2	3	4	5	6
			$t(v) \mid x(v)$					
-			$\infty \mid$	$\infty \mid$	$\infty \mid$	$\infty \mid$	$0 \mid$	$\infty \mid$
$(5,1)$	0	30	$30 \mid 5$					
$(5,2)$	0	90		$90 \mid 5$				
$(5,6)$	0	150						$150 \mid 5$
$(1,3)$	30	30			$60 \mid 1$			
$(2,4)$	90	30				$120 \mid 2$		
$(3,2)$	60	10		$70 \mid 3$				
$(4,6)$	120	20						$140 \mid 4$
$(2,4)$	70	30				$100 \mid 2$		
$(4,6)$	100	20						$120 \mid 4$

Dijkstrov algoritmus

Algoritmus

Dijkstrov algoritmus *Algoritmus pre zostrojenie najkratšej orientovanej u–v cesty v hranovo ohodnotenom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *s nezáporným ohodnotením hrán (a kde* $0 \notin V$*).*

- **Krok 1.** *Inicializácia. Pre každý vrchol* $i \in V$ *priraď dve značky* $t(i)$ *a* $x(i)$*. Značky* $t(i)$ *budú dvojakého druhu, a to dočasné (ktoré sa ešte v priebehu výpočtu môžu zmeniť) a definitívne (ktoré sa už nemôžu zmeniť).*

  Polož $t(u) = 0$, $t(i) = \infty$ *pre* $i \in V$, $i \neq u$ *a* $x(i) = 0$ *pre každé* $i \in V$*. Zvoľ riadiaci vrchol* $r := u$ *a značku* $t(\ )$ *pri vrchole* $r = u$ *prehlás za definitívnu, ostatné značky za dočasné.*

- **Krok 2.** *Ak je* $r = v$*, STOP. Ak* $t(v) < \infty$*, značka* $t(v)$ *predstavuje dĺžku najkratšej u–v cesty, ktorú zostroj spätne z* v *pomocou smerníkov* $x(i)$*. Inak pre všetky hrany tvaru* $(r, j) \in H$*, kde* j *je vrchol s dočasnou značkou, urob:*

  Ak $t(j) > t(r) + c(r,j)$*, potom* $t(j) := t(r) + c(r,j)$, $x(j) := r$ *.*

  Ponechaj zmenené značky ako dočasné.

Algoritmus

Dijkstrov algoritmus *Algoritmus pre zostrojenie najkratšej orientovanej u–v cesty v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s nezáporným ohodnotením hrán (a kde $0 \notin V$).*

- **Krok 1.** *Inicializácia. Pre každý vrchol $i \in V$ priraď dve značky $t(i)$ a $x(i)$. Značky $t(i)$ budú dvojakého druhu, a to dočasné (ktoré sa ešte v priebehu výpočtu môžu zmeniť) a definitívne (ktoré sa už nemôžu zmeniť).*

  Polož $t(u) = 0$, $t(i) = \infty$ pre $i \in V$, $i \neq u$ a $x(i) = 0$ pre každé $i \in V$. Zvoľ riadiaci vrchol $r := u$ a značku $t(\ )$ pri vrchole $r = u$ prehlás za definitívnu, ostatné značky za dočasné.

- **Krok 2.** *Ak je $r = v$, STOP. Ak $t(v) < \infty$, značka $t(v)$ predstavuje dĺžku najkratšej u–v cesty, ktorú zostroj spätne z v pomocou smerníkov $x(i)$. Inak pre všetky hrany tvaru $(r, j) \in H$, kde j je vrchol s dočasnou značkou, urob:*

  Ak $t(j) > t(r) + c(r, j)$, potom $t(j) := t(r) + c(r, j)$, $x(j) := r$.

  Ponechaj zmenené značky ako dočasné.

Algoritmus

Dijkstrov algoritmus *Algoritmus pre zostrojenie najkratšej orientovanej u–v cesty v hranovo ohodnotenom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *s nezáporným ohodnotením hrán (a kde* $0 \notin V$*).*

- **Krok 1.** *Inicializácia. Pre každý vrchol* $i \in V$ *priraď dve značky* $t(i)$ *a* $x(i)$. *Značky* $t(i)$ *budú dvojakého druhu, a to dočasné (ktoré sa ešte v priebehu výpočtu môžu zmeniť) a definitívne (ktoré sa už nemôžu zmeniť).*

  Polož $t(u) = 0$, $t(i) = \infty$ *pre* $i \in V$, $i \neq u$ *a* $x(i) = 0$ *pre každé* $i \in V$. *Zvoľ riadiaci vrchol* $r := u$ *a značku* $t(\ )$ *pri vrchole* $r = u$ *prehlás za definitívnu, ostatné značky za dočasné.*

- **Krok 2.** *Ak je* $r = v$, *STOP. Ak* $t(v) < \infty$, *značka* $t(v)$ *predstavuje dĺžku najkratšej u–v cesty, ktorú zostroj spätne z v pomocou smerníkov* $x(i)$. *Inak pre všetky hrany tvaru* $(r, j) \in H$, *kde j je vrchol s dočasnou značkou, urob:*

  Ak $t(j) > t(r) + c(r, j)$, *potom* $t(j) := t(r) + c(r, j)$, $x(j) := r$.

  Ponechaj zmenené značky ako dočasné.

Algoritmus (- pokračovanie)

- **Krok 3.** *Zo všetkých dočasne označených vrcholov nájdi ten vrchol i, ktorý má značku $t(i)$ minimálnu.*

  Značku pri tomto vrchole i prehlás za definitívnu a zvoľ za nový riadiaci vrchol $r := i$.
  {Pokiaľ existuje viac vrcholov s rovnakou minimálnou značkou, akú má vrchol i, za definitívnu značku môžeme prehlásiť len značku pri jednom z týchto vrcholov – ten potom berieme za riadiaci. Na tie ďalšie dôjde v nasledujúcich krokoch výpočtu.}
  GOTO Krok 2.

♣

Poznámka

Ak upravíme podmienku zastavenia v Kroku 2. na podmienku:
Ak sú značky všetkých vrcholov definitívne, STOP,
dostaneme verziu algoritmu, ktorá hľadá najkratšie cesty z vrchola u do všetkých dosiahnuteľných vrcholov.

Algoritmus (- pokračovanie)

- **Krok 3.** *Zo všetkých dočasne označených vrcholov nájdi ten vrchol i, ktorý má značku $t(i)$ minimálnu.*

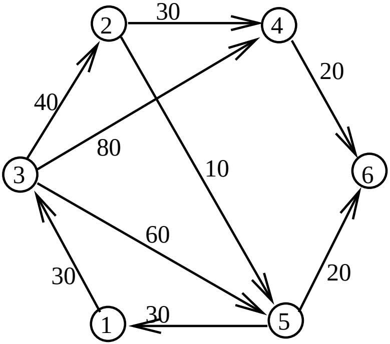
  Značku pri tomto vrchole i prehlás za definitívnu a zvoľ za nový riadiac vrchol $r := i$.
  {Pokiaľ existuje viac vrcholov s rovnakou minimálnou značkou, akú má vrchol i, za definitívnu značku môžeme prehlásiť len značku pri jednom z týchto vrcholov – ten potom berieme za riadiaci. Na tie ďalšie dôjde v nasledujúcich krokoch výpočtu.}
  GOTO Krok 2.

♣

Poznámka

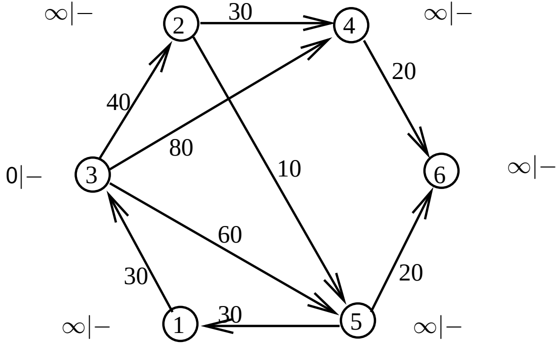
Ak upravíme podmienku zastavenia v Kroku 2. na podmienku:
Ak sú značky všetkých vrcholov definitívne, STOP,
dostaneme verziu algoritmu, ktorá hľadá najkratšie cesty z vrchola u do všetkých dosiahnuteľných vrcholov.

Príklad



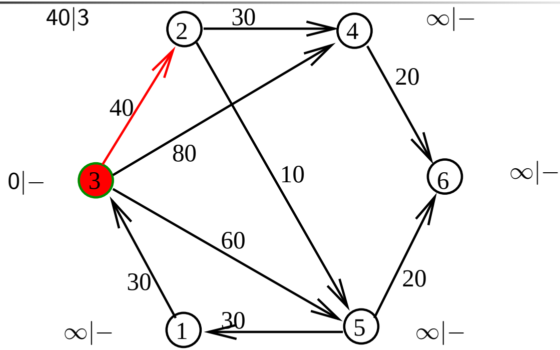
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v) \mid x(v)$					
-	-	-	$\infty \mid$	$\infty \mid$	**$0 \mid$**	$\infty \mid$	$\infty \mid$	$\infty \mid$
3	-	0	$\infty \mid$	**$40 \mid 3$**		$80 \mid 3$	$60 \mid 3$	$\infty \mid$
2	3	40	$\infty \mid$			$70 \mid 2$	**$50 \mid 2$**	$\infty \mid$
5	2	50	$80 \mid 5$			**$70 \mid 2$**		$70 \mid 5$
4	2	70	$80 \mid 5$					**$70 \mid 5$**
6	5	70	**$80 \mid 5$**					
1	5	80						

Príklad

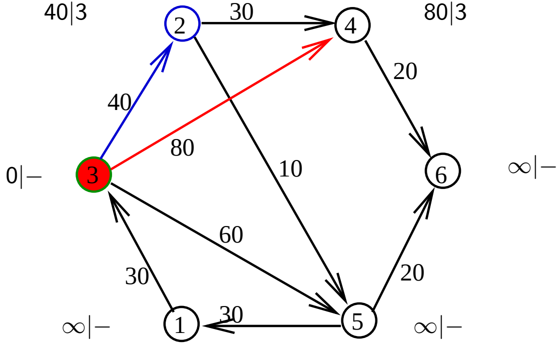


r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-	-	-	∞|	∞|	**0**|	∞|	∞|	∞|
3	-	0	∞|	**40|3**		80|3	60|3	∞|
2	3	40	∞|			70|2	**50|2**	∞|
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Príklad

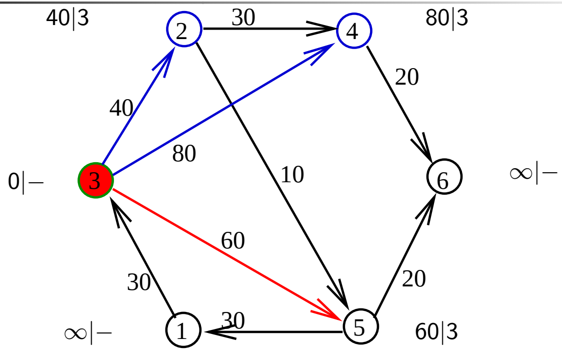


r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0**|	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						



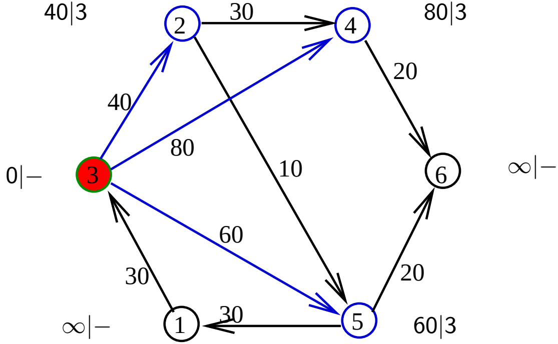
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0|**	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Príklad



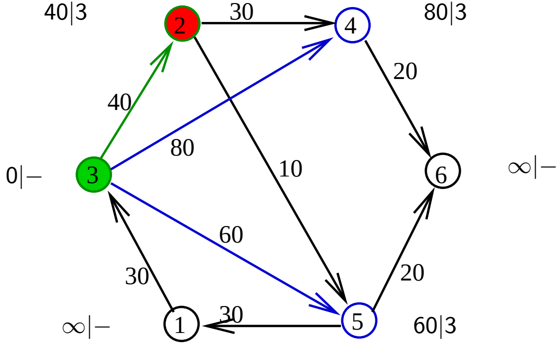
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0**|	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Príklad



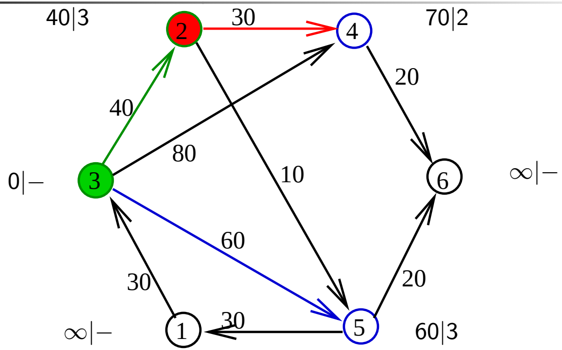
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\vert x(v)$					
-	-	-	$\infty\vert$	$\infty\vert$	**0**$\vert$	$\infty\vert$	$\infty\vert$	$\infty\vert$
3	-	0	$\infty\vert$	**40$\vert$3**		$80\vert 3$	$60\vert 3$	$\infty\vert$
2	3	40	$\infty\vert$			$70\vert 2$	**50$\vert$2**	$\infty\vert$
5	2	50	$80\vert 5$			**70$\vert$2**		$70\vert 5$
4	2	70	$80\vert 5$					**70$\vert$5**
6	5	70	**80$\vert$5**					
1	5	80						

Príklad



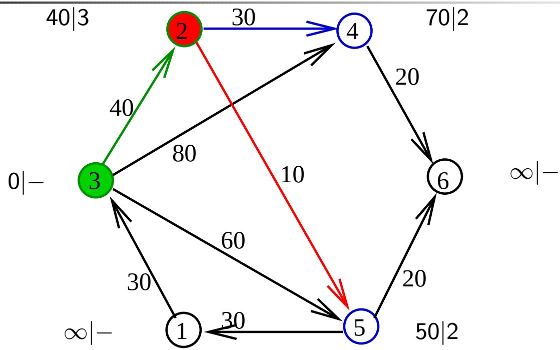
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
					$t(v) \vert x(v)$			
-	-	-	$\infty \vert$	$\infty \vert$	$\mathbf{0} \vert$	$\infty \vert$	$\infty \vert$	$\infty \vert$
3	-	0	$\infty \vert$	$\mathbf{40 \vert 3}$		$80 \vert 3$	$60 \vert 3$	$\infty \vert$
2	3	40	$\infty \vert$			$70 \vert 2$	$\mathbf{50 \vert 2}$	$\infty \vert$
5	2	50	$80 \vert 5$			$\mathbf{70 \vert 2}$		$70 \vert 5$
4	2	70	$80 \vert 5$					$\mathbf{70 \vert 5}$
6	5	70	$\mathbf{80 \vert 5}$					
1	5	80						

Príklad



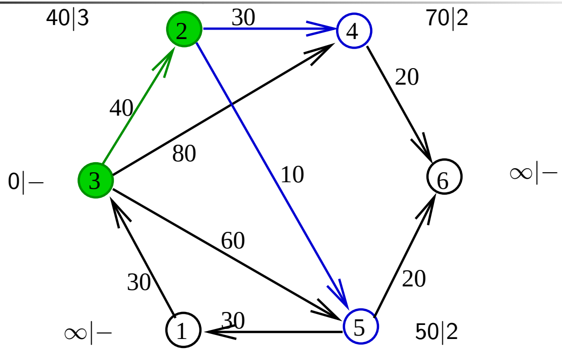
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0**|	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Príklad



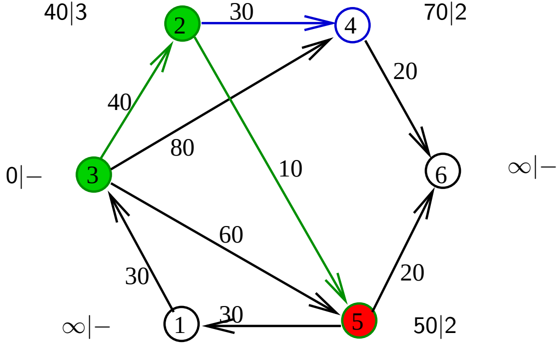
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0**|	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Príklad



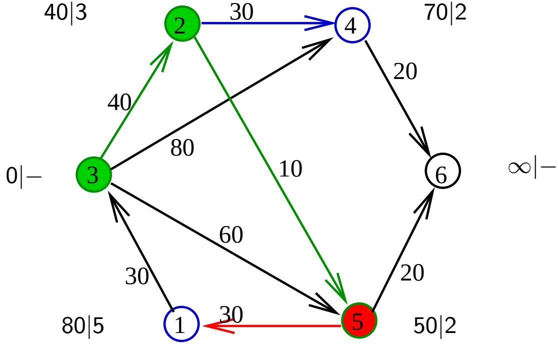
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\vert x(v)$					
-	-	-	$\infty\vert$	$\infty\vert$	$\mathbf{0}\vert$	$\infty\vert$	$\infty\vert$	$\infty\vert$
3	-	0	$\infty\vert$	$\mathbf{40}\vert\mathbf{3}$		$80\vert 3$	$60\vert 3$	$\infty\vert$
2	3	40	$\infty\vert$			$70\vert 2$	$\mathbf{50}\vert\mathbf{2}$	$\infty\vert$
5	2	50	$80\vert 5$			$\mathbf{70}\vert\mathbf{2}$		$70\vert 5$
4	2	70	$80\vert 5$					$\mathbf{70}\vert\mathbf{5}$
6	5	70	$\mathbf{80}\vert\mathbf{5}$					
1	5	80						

Príklad



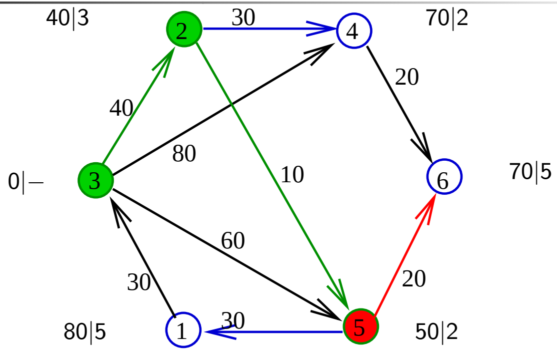
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\vert x(v)$					
-	-	-	$\infty\vert$	$\infty\vert$	$\mathbf{0}\vert$	$\infty\vert$	$\infty\vert$	$\infty\vert$
3	-	0	$\infty\vert$	$\mathbf{40\vert 3}$		$80\vert 3$	$60\vert 3$	$\infty\vert$
2	3	40	$\infty\vert$			$70\vert 2$	$\mathbf{50\vert 2}$	$\infty\vert$
5	2	50	$80\vert 5$			$\mathbf{70\vert 2}$		$70\vert 5$
4	2	70	$80\vert 5$					$\mathbf{70\vert 5}$
6	5	70	$\mathbf{80\vert 5}$					
1	5	80						

Príklad

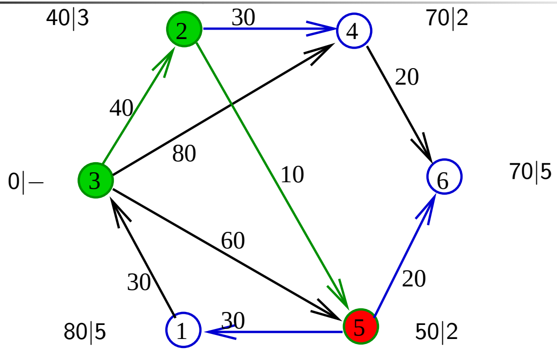


r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0**|	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Príklad

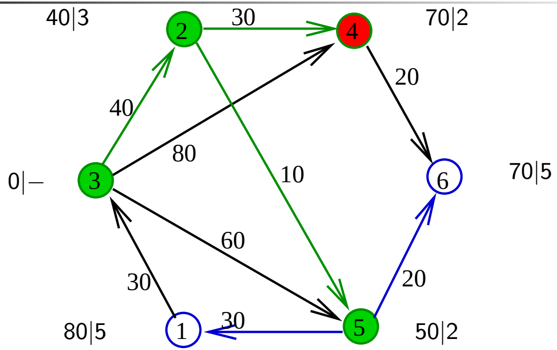


r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\vert x(v)$					
-	-	-	$\infty\vert$	$\infty\vert$	$\mathbf{0}\vert$	$\infty\vert$	$\infty\vert$	$\infty\vert$
3	-	0	$\infty\vert$	$\mathbf{40}\vert\mathbf{3}$		$80\vert 3$	$60\vert 3$	$\infty\vert$
2	3	40	$\infty\vert$			$70\vert 2$	$\mathbf{50}\vert\mathbf{2}$	$\infty\vert$
5	2	50	$80\vert 5$			$\mathbf{70}\vert\mathbf{2}$		$70\vert 5$
4	2	70	$80\vert 5$					$\mathbf{70}\vert\mathbf{5}$
6	5	70	$\mathbf{80}\vert\mathbf{5}$					
1	5	80						



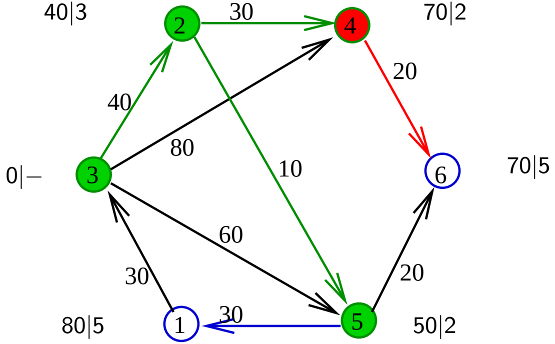
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
					$t(v)\|x(v)$			
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0**|	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Príklad



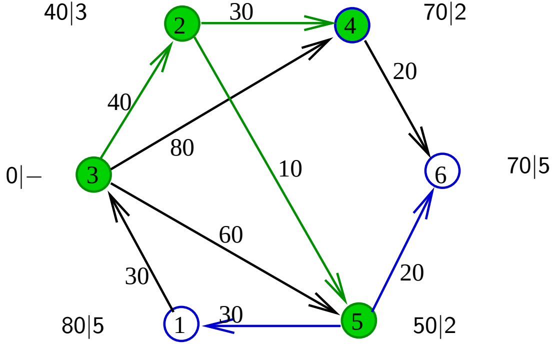
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0**|	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Príklad



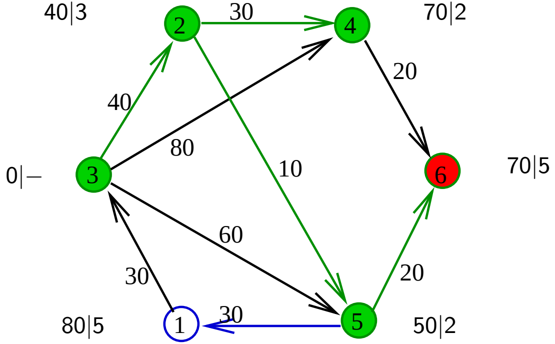
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v) \mid x(v)$					
-	-	-	$\infty \mid$	$\infty \mid$	$\mathbf{0} \mid$	$\infty \mid$	$\infty \mid$	$\infty \mid$
3	-	0	$\infty \mid$	$\mathbf{40 \mid 3}$		$80 \mid 3$	$60 \mid 3$	$\infty \mid$
2	3	40	$\infty \mid$			$70 \mid 2$	$\mathbf{50 \mid 2}$	$\infty \mid$
5	2	50	$80 \mid 5$			$\mathbf{70 \mid 2}$		$70 \mid 5$
4	2	70	$80 \mid 5$					$\mathbf{70 \mid 5}$
6	5	70	$\mathbf{80 \mid 5}$					
1	5	80						

Príklad



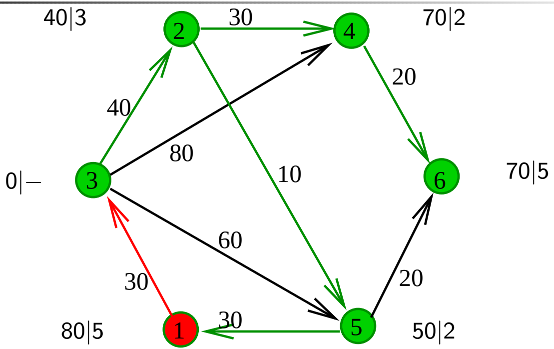
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0**|	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Príklad



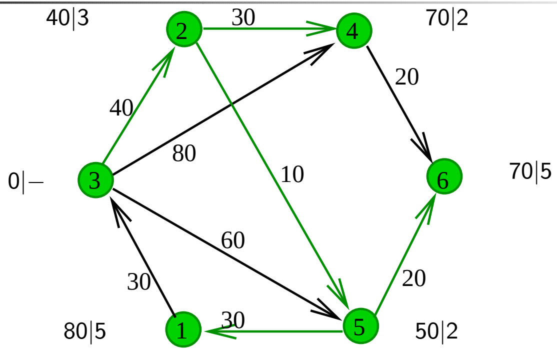
r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0**|	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Príklad



r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
					$t(v)\|x(v)$			
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0**|	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Príklad



r	$x(r)$	$t(r)$	1	2	3	4	5	6
			$t(v)\|x(v)$					
-	-	-	$\infty\|$	$\infty\|$	**0**|	$\infty\|$	$\infty\|$	$\infty\|$
3	-	0	$\infty\|$	**40|3**		80|3	60|3	$\infty\|$
2	3	40	$\infty\|$			70|2	**50|2**	$\infty\|$
5	2	50	80|5			**70|2**		70|5
4	2	70	80|5					**70|5**
6	5	70	**80|5**					
1	5	80						

Výpočet matice vzdialeností

Definícia

Reálna funkcia d definovaná na kartézskom súčine $V \times V$ sa nazýva **metrikou na množine** V*, ak platí:*

1. *1. Pre každé $u, v \in V$ je $d(u, v) \geq 0$ a rovnosť nastáva práve vtedy, keď u=v.*
2. *2. Pre každé $u, v \in V$ platí $d(u, v) = d(v, u)$.*
3. *3. Pre každé $u, v, w \in V$, je $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.*

Definícia

Nech $G = (V, H, c)$ je súvislý hranovo ohodnotený graf alebo silne súvislý digraf, $c(h) > 0$.
Vzdialenosť vrcholov $u, v \in V$ $d(u, v)$ *je dĺžka najkratšej u–v cesty.*

Výpočet matice vzdialeností

Definícia

Reálna funkcia d definovaná na kartézskom súčine $V \times V$ sa nazýva **metrikou na množine** V, *ak platí:*

1. *1. Pre každé $u, v \in V$ je $d(u, v) \geq 0$ a rovnosť nastáva práve vtedy, keď u=v.*
2. *2. Pre každé $u, v \in V$ platí $d(u, v) = d(v, u)$.*
3. *3. Pre každé $u, v, w \in V$, je $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.*

Definícia

Nech $G = (V, H, c)$ je súvislý hranovo ohodnotený graf alebo silne súvislý digraf, $c(h) > 0$.
Vzdialenosť vrcholov $u, v \in V$ $d(u, v)$ *je dĺžka najkratšej u–v cesty.*

Vzdialenosť vrcholov

Poznámka

Keďže sme pripustili triviálnu u–u cestu (obsahujúcu iba vrchol u), ktorej dĺžka je nulová, z definície vzdialenosti vrcholov vyplýva, že pre každé $u \in V$ platí $d(u, u) = 0$.

Veta

Ak v súvislom grafe $G = (V, H, c)$ je $c(h) > 0$ pre každú hranu $h \in H$, potom je funkcia vzdialenosti $d : V \times V \to \mathbb{R}$ metrikou na množine vrcholov V.

Poznámka

V digrafoch predchádzajúce veta neplatí (nemusí platiť vzťah $d(u, v) = d(v, u)$).

Poznámka

Ak graf G nie je súvislý, resp. digraf $\overrightarrow{G}$ nie je silne súvislý, potom možno pre $u \in V$, $v \in V$ také, že v nie je dosiahnuteľný z u doplniť definíciu vzdialenosti tak, že položíme $d(u, v) = \infty$.

Poznámka

Keďže sme pripustili triviálnu u–u cestu (obsahujúcu iba vrchol u), ktorej dĺžka je nulová, z definície vzdialenosti vrcholov vyplýva, že pre každé $u \in V$ platí $d(u,u) = 0$.

Veta

Ak v súvislom grafe $G = (V, H, c)$ je $c(h) > 0$ pre každú hranu $h \in H$, potom je funkcia vzdialenosti $d : V \times V \to \mathbb{R}$ metrikou na množine vrcholov V.

Poznámka

V digrafoch predchádzajúce veta neplatí (nemusí platiť vzťah $d(u,v) = d(v,u)$).

Poznámka

Ak graf G nie je súvislý, resp. digraf $\overrightarrow{G}$ nie je silne súvislý, potom možno pre $u \in V$, $v \in V$ také, že v nie je dosiahnuteľný z u doplniť definíciu vzdialenosti tak, že položíme $d(u,v) = \infty$.

Vzdialenosť vrcholov

Poznámka

Keďže sme pripustili triviálnu u–u cestu (obsahujúcu iba vrchol u), ktorej dĺžka je nulová, z definície vzdialenosti vrcholov vyplýva, že pre každé $u \in V$ platí $d(u, u) = 0$.

Veta

Ak v súvislom grafe $G = (V, H, c)$ je $c(h) > 0$ pre každú hranu $h \in H$, potom je funkcia vzdialenosti $d : V \times V \to \mathbb{R}$ metrikou na množine vrcholov V.

Poznámka

V digrafoch predchádzajúce veta neplatí (nemusí platiť vzťah $d(u, v) = d(v, u)$).

Poznámka

Ak graf G nie je súvislý, resp. digraf $\overrightarrow{G}$ nie je silne súvislý, potom možno pre $u \in V$, $v \in V$ také, že v nie je dosiahnuteľný z u doplniť definíciu vzdialenosti tak, že položíme $d(u, v) = \infty$.

Vzdialenosť vrcholov

Poznámka

Keďže sme pripustili triviálnu u–u cestu (obsahujúcu iba vrchol u), ktorej dĺžka je nulová, z definície vzdialenosti vrcholov vyplýva, že pre každé $u \in V$ platí $d(u,u) = 0$.

Veta

Ak v súvislom grafe $G = (V, H, c)$ je $c(h) > 0$ pre každú hranu $h \in H$, potom je funkcia vzdialenosti $d : V \times V \to \mathbb{R}$ metrikou na množine vrcholov V.

Poznámka

V digrafoch predchádzajúce veta neplatí (nemusí platiť vzťah $d(u,v) = d(v,u)$).

Poznámka

Ak graf G nie je súvislý, resp. digraf $\overrightarrow{G}$ nie je silne súvislý, potom možno pre $u \in V$, $v \in V$ také, že v nie je dosiahnuteľný z u doplniť definíciu vzdialenosti tak, že položíme $d(u,v) = \infty$.

Polomer, priemer a excentricita grafu

Definícia

Nech $G = (V, H, c)$ je hranovo ohodnotený graf, $c(h) > 0$. Definujeme:

$$\begin{array}{rl} \textbf{excentricita vrchola } v \in V & e(v) = \max\{d(u,v) \mid u \in V\} \\ \textbf{polomer – rádius grafu } G & r(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\} \\ \textbf{priemer – diameter grafu } G & d(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\} \end{array}$$

Každý vrchol grafu G s minimálnou excentricitou $e(v)$ nazveme **centrálnym vrcholom** *grafu G, množinu všetkých centrálnych vrcholov grafu nazveme* **centrom** *grafu G.*

Poznámka

Dá sa ľahko ukázať, že pre priemer $d(G)$ grafu G platí

$$d(G) = \max\{d(u,v) \mid u \in V, v \in V\}.$$

Polomer, priemer a excentricita grafu

Definícia

Nech $G = (V, H, c)$ *je hranovo ohodnotený graf,* $c(h) > 0$*. Definujeme:*

excentricita vrchola $v \in V$	$e(v) = \max\{d(u, v) \mid u \in V\}$
polomer – rádius grafu G	$r(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$
priemer – diameter grafu G	$d(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\}$

Každý vrchol grafu G *s minimálnou excentricitou* $e(v)$ *nazveme* **centrálnym vrcholom** *grafu* G*, množinu všetkých centrálnych vrcholov grafu nazveme* **centrom** *grafu* G*.*

Poznámka

Dá sa ľahko ukázať, že pre priemer $d(G)$ *grafu* G *platí*

$$d(G) = \max\{d(u, v) \mid u \in V, v \in V\}.$$

Algoritmus

Floydov algoritmus *na výpočet matice vzdialeností vrcholov v hranovo ohodnotenom grafe, resp. digrafe* $G = (V, H, c)$*, kde* $c(h) \geq 0$*.*

- **Krok 1.** *Zostroj maticu* $\mathbf{C} = (c_{ij})$*, ktorej prvky sú definované nasledovne:*

$$c_{ii} = 0 \quad \textit{pre všetky} \quad i \in V$$

a pre všetky i, j*, také, že* $i \neq j$

$$c_{ij} = \begin{cases} c(i,j), & \textit{ak } \{i,j\} \in H, \textit{ resp. } (i,j) \in H \\ \infty, & \textit{ak } \{i,j\} \notin H, \textit{ resp. } (i,j) \notin H \end{cases}$$

Zostroj aj maticu $\mathbf{X} = (x_{ij})$*, kde*

$$x_{ii} = i \quad \textit{pre všetky} \quad i \in V$$

a pre všetky i, j*, také, že* $i \neq j$

$$x_{ij} = \begin{cases} i \quad , & \textit{ak } \{i,j\} \in H, \textit{ resp. } (i,j) \in H \\ \infty, & \textit{ak } \{i,j\} \notin H, \textit{ resp. } (i,j) \notin H \end{cases}$$

Algoritmus (- pokračovanie)

- **Krok 2.** *Urob pre všetky* $k = 1, 2, \ldots, n = |V|$*:*
  Pre všetky $i \neq k$ *také, že* $c_{ik} \neq \infty$*, a pre všetky* $j \neq k$ *také, že* $c_{kj} \neq \infty$*, urob:*
  Ak $c_{ij} > c_{ik} + c_{kj}$*, potom polož:*

$$c_{ij} := c_{ik} + c_{kj}$$

$$x_{ij} := x_{kj}$$

♣

Po skončení Floydovho algoritmu je matica $\mathbf{C}$ maticou vzdialeností vrcholov grafu, resp. digrafu G.

Matica $\mathbf{X}$ obsahuje pre každú dvojicu vrcholov i, j takú, že j je dosiahnuteľný z i, predposledný vrchol najkratšej i–j cesty.

Ak potrebujeme nájsť najkratšiu i–j cestu, využijeme maticu smerníkov $\mathbf{X}$ nasledovne:
Pre predposledný vrchol j_1 najkratšej i–j cesty je $j_1 = x_{ij}$. Ďalší vrchol tejto cesty (odzadu) je $j_2 = x_{ij_1}$, ďalší $j_3 = x_{ij_2}$ atď., pokiaľ nedôjdeme do vrchola i.

Algoritmus (- pokračovanie)

- **Krok 2.** *Urob pre všetky* $k = 1, 2, \dots, n = |V|$*:*
  Pre všetky $i \neq k$ *také, že* $c_{ik} \neq \infty$*, a pre všetky* $j \neq k$ *také, že* $c_{kj} \neq \infty$*,*
  urob:
  Ak $c_{ij} > c_{ik} + c_{kj}$*, potom polož:*

$$c_{ij} := c_{ik} + c_{kj}$$
$$x_{ij} := x_{kj}$$

♣

Po skončení Floydovho algoritmu je matica **C** maticou vzdialeností vrcholov grafu, resp. digrafu G.

Matica **X** obsahuje pre každú dvojicu vrcholov i, j takú, že j je dosiahnuteľný z i, predposledný vrchol najkratšej i–j cesty.

Ak potrebujeme nájsť najkratšiu i–j cestu, využijeme maticu smerníkov **X** nasledovne:
Pre predposledný vrchol j_1 najkratšej i–j cesty je $j_1 = x_{ij}$. Ďalší vrchol tejto cesty (odzadu) je $j_2 = x_{ij_1}$, ďalší $j_3 = x_{ij_2}$ atď., pokiaľ nedôjdeme do vrchola i.

Algoritmus (- pokračovanie)

- **Krok 2.** *Urob pre všetky* $k = 1, 2, \dots, n = |V|$*:*
  Pre všetky $i \neq k$ *také, že* $c_{ik} \neq \infty$*, a pre všetky* $j \neq k$ *také, že* $c_{kj} \neq \infty$*, urob:*
  Ak $c_{ij} > c_{ik} + c_{kj}$*, potom polož:*

$$c_{ij} := c_{ik} + c_{kj}$$
$$x_{ij} := x_{kj}$$

♣

Po skončení Floydovho algoritmu je matica **C** maticou vzdialeností vrcholov grafu, resp. digrafu G.

Matica **X** obsahuje pre každú dvojicu vrcholov i, j takú, že j je dosiahnuteľný z i, predposledný vrchol najkratšej i–j cesty.

Ak potrebujeme nájsť najkratšiu i–j cestu, využijeme maticu smerníkov **X** nasledovne:
Pre predposledný vrchol j_1 najkratšej i–j cesty je $j_1 = x_{ij}$. Ďalší vrchol tejto cesty (odzadu) je $j_2 = x_{ij_1}$, ďalší $j_3 = x_{ij_2}$ atď., pokiaľ nedôjdeme do vrchola i.

Algoritmus (- pokračovanie)

- **Krok 2.** *Urob pre všetky* $k = 1, 2, \ldots, n = |V|$*:*
  Pre všetky $i \neq k$ *také, že* $c_{ik} \neq \infty$*, a pre všetky* $j \neq k$ *také, že* $c_{kj} \neq \infty$*, urob:*
  Ak $c_{ij} > c_{ik} + c_{kj}$*, potom polož:*

$$c_{ij} := c_{ik} + c_{kj}$$
$$x_{ij} := x_{kj}$$

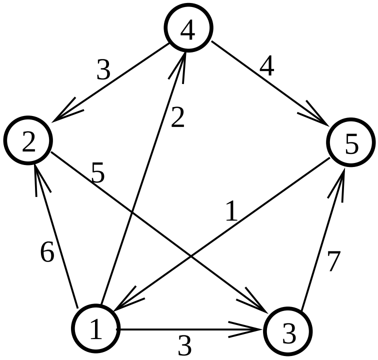
♣

Po skončení Floydovho algoritmu je matica **C** maticou vzdialeností vrcholov grafu, resp. digrafu G.

Matica **X** obsahuje pre každú dvojicu vrcholov i, j takú, že j je dosiahnuteľný z i, predposledný vrchol najkratšej i–j cesty.

Ak potrebujeme nájsť najkratšiu i–j cestu, využijeme maticu smerníkov **X** nasledovne:
Pre predposledný vrchol j_1 najkratšej i–j cesty je $j_1 = x_{ij}$. Ďalší vrchol tejto cesty (odzadu) je $j_2 = x_{ij_1}$, ďalší $j_3 = x_{ij_2}$ atď., pokiaľ nedôjdeme do vrchola i.

Je daný digraf $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ diagramom z nasledujúceho obrázku.
Vypočítame maticu vzdialeností pomocou Floydovho algoritmu.



Obr.: Digraf k príkladu.

Matica **C**

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	2	∞
2	∞	0	5	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	∞	0	4
5	1	∞	∞	∞	0

Matica **X**

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	∞
2	∞	2	2	∞	∞
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	∞	4	4
5	5	∞	∞	∞	5

Floydov algoritmus – príklad

Matica **C**

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	2	∞
2	∞	0	5	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	∞	0	4
5	1	∞	∞	∞	0

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 1$

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	2	∞
2	∞	0	5	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	∞	0	4
5	1	7	4	3	0

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 2$

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	2	∞
2	∞	0	5	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	8	0	4
5	1	7	4	3	0

Matica **X**

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	∞
2	∞	2	2	∞	∞
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	∞	4	4
5	5	∞	∞	∞	5

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 1$

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	∞
2	∞	2	2	∞	∞
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	∞	4	4
5	5	1	1	1	5

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 2$

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	∞
2	∞	2	2	∞	∞
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	2	4	4
5	5	1	1	1	5

Floydov algoritmus – príklad

Matica **C**

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	2	∞
2	∞	0	5	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	∞	0	4
5	1	$\boxed{\infty}$	$\boxed{\infty}$	$\boxed{\infty}$	0

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 1$

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	2	∞
2	∞	0	5	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	$\boxed{\infty}$	0	4
5	1	7	4	3	0

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 2$

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	2	$\boxed{\infty}$
2	∞	0	5	∞	$\boxed{\infty}$
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	8	0	4
5	1	7	4	3	0

Matica **X**

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	∞
2	∞	2	2	∞	∞
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	∞	4	4
5	5	$\boxed{\infty}$	$\boxed{\infty}$	$\boxed{\infty}$	5

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 1$

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	∞
2	∞	2	2	∞	∞
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	$\boxed{\infty}$	4	4
5	5	1	1	1	5

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 2$

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	$\boxed{\infty}$
2	∞	2	2	∞	$\boxed{\infty}$
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	2	4	4
5	5	1	1	1	5

Floydov algoritmus – príklad

Matica **C**

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	2	∞
2	∞	0	5	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	∞	0	4
5	1	∞	∞	∞	0

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 1$

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	2	∞
2	∞	0	5	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	∞	0	4
5	1	7	4	3	0

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 2$

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	2	∞
2	∞	0	5	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	8	0	4
5	1	7	4	3	0

Matica **X**

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	∞
2	∞	2	2	∞	∞
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	∞	4	4
5	5	∞	∞	∞	5

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 1$

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	∞
2	∞	2	2	∞	∞
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	∞	4	4
5	5	1	1	1	5

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 2$

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	∞
2	∞	2	2	∞	∞
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	2	4	4
5	5	1	1	1	5

Floydov algoritmus – príklad

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 3$

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	2	10
2	∞	0	5	∞	12
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	8	0	4
5	1	7	4	3	0

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 3$

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	3
2	∞	2	2	∞	3
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	2	4	4
5	5	1	1	1	5

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 4$

	1	2	3	4	5
1	0	5	3	2	6
2	∞	0	5	∞	12
3	∞	∞	0	∞	7
4	∞	3	8	0	4
5	1	6	4	3	0

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 4$

	1	2	3	4	5
1	1	4	1	1	4
2	∞	2	2	∞	3
3	∞	∞	3	∞	3
4	∞	4	4	4	4
5	5	4	1	1	5

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 5$

	1	2	3	4	5
1	0	5	3	2	6
2	13	0	5	15	12
3	6	13	0	10	7
4	5	3	8	0	4
5	1	6	4	3	0

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 5$

	1	2	3	4	5
1	1	4	1	1	4
2	5	2	2	1	3
3	5	4	3	1	3
4	5	4	2	4	4
5	5	4	1	1	5

Floydov algoritmus – príklad

Matica **C** po kroku 2 s $k = 3$

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	**2**	10
2	∞	0	5	**∞**	12
3	∞	∞	0	**∞**	7
4	**∞**	**3**	**8**	**0**	**4**
5	1	7	4	**3**	0

Matica **C** po kroku 2 s $k = 4$

	1	2	3	4	**5**
1	0	5	3	2	**6**
2	∞	0	5	∞	**12**
3	∞	∞	0	∞	**7**
4	∞	3	8	0	**4**
5	**1**	**6**	**4**	**3**	**0**

Matica **C** po kroku 2 s $k = 5$

	1	2	3	4	5
1	0	5	3	2	6
2	13	0	5	15	12
3	6	13	0	10	7
4	5	3	8	0	4
5	1	6	4	3	0

Matica **X** po kroku 2 s $k = 3$

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	**1**	3
2	∞	2	2	**∞**	3
3	∞	∞	3	**∞**	3
4	**∞**	**4**	**2**	**4**	**4**
5	5	1	1	**1**	5

Matica **X** po kroku 2 s $k = 4$

	1	2	3	4	**5**
1	1	4	1	1	**4**
2	∞	2	2	∞	**3**
3	∞	∞	3	∞	**3**
4	∞	4	4	4	**4**
5	**5**	**4**	**1**	**1**	**5**

Matica **X** po kroku 2 s $k = 5$

	1	2	3	4	5
1	1	4	1	1	4
2	5	2	2	1	3
3	5	4	3	1	3
4	5	4	2	4	4
5	5	4	1	1	5

Floydov algoritmus – príklad

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 3$

	1	2	3	4	5
1	0	6	3	**2**	10
2	∞	0	5	**∞**	12
3	∞	∞	0	**∞**	7
4	**∞**	**3**	**8**	**0**	**4**
5	1	7	4	**3**	0

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 4$

	1	2	3	4	**5**
1	0	5	3	2	**6**
2	∞	0	5	∞	**12**
3	∞	∞	0	∞	**7**
4	∞	3	8	0	**4**
5	**1**	**6**	**4**	**3**	**0**

Matica **C**
po kroku 2 s $k = 5$

	1	2	3	4	5
1	0	5	3	2	6
2	13	0	5	15	12
3	5	13	0	10	7
4	5	3	8	0	4
5	1	6	4	3	0

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 3$

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	**1**	3
2	∞	2	2	**∞**	3
3	∞	∞	3	**∞**	3
4	**∞**	**4**	**2**	**4**	**4**
5	5	1	1	**1**	5

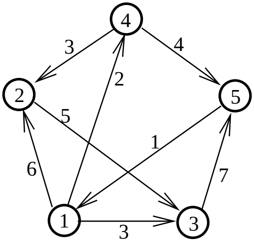
Matica **X**
po kroku 2 s $k = 4$

	1	2	3	4	**5**
1	1	4	1	1	**4**
2	∞	2	2	∞	**3**
3	∞	∞	3	∞	**3**
4	∞	4	4	4	**4**
5	**5**	**4**	**1**	**1**	**5**

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 5$

	1	2	3	4	5
1	1	4	1	1	4
2	5	2	2	1	3
3	5	4	3	1	3
4	5	4	2	4	4
5	5	4	1	1	5

Floydov algoritmus - výsledky príkladu



Matica **C**
po kroku 2 s $k = 5$

	1	2	3	4	5
1	0	5	3	2	6
2	13	0	5	15	12
3	6	13	0	**10**	7
4	5	3	8	0	4
5	1	6	4	3	0

Matica **X**
po kroku 2 s $k = 5$

	1	2	3	4	5
1	1	4	1	1	4
2	5	2	2	1	3
3	**5**	4	3	**1**	**3**
4	5	4	2	4	4
5	5	4	1	1	5

i-tý riadok výslednej matice **X** obsahuje smerníky pre konštrukcieu všetkých najkratších i-j ciest.

Hľadajme najkratšiu 3-4 cestu.

$x_{3,4} = 1$ – predposledný vrchol hľadanej cesty je vrchol 1

$x_{3,1} = 5$ – ďalší vrchol odzadu je vrchol 5

$x_{3,5} = 3$ – vrchol 3 je začiatočný vrchol hľadanej cesty

Najkratšia 3-4 cesta je $(\mathbf{3}, (3,5), \mathbf{5}, (5,1), \mathbf{1}, (1,4), \mathbf{4})$ a má dĺžku $c_{3,4} = \mathbf{10}$.

Algoritmus

Label-set a Label-correct implementácia algoritmu *na hľadanie najkratších orientovaných u–v ciest z pevného vrchola* $u \in V$ *do všetkých ostatných vrcholov* $v \in V$ *v hranovo ohodnotenom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *s nezápornou cenou orientovanej hrany* $c(h)$*, kde* $0 \notin V$.

- **Krok 1: Inicializácia.**
  Polož $t(u) := 0$, $t(i) := \infty$ *pre* $i \in V$, $i \neq u$ *a* $x(i) := 0$ *pre každé* $i \in V$. *Polož* $\mathcal{E} := \{u\}$.

- **Krok 2:** *Vyber* $r \in \mathcal{E}$, *polož* $\mathcal{E} := \mathcal{E} - \{r\}$.
  Pre všetky orientované hrany tvaru $(r, j) \in H$ *urob:*
  Ak $t(j) > t(r) + c(r, j)$, *potom*
  $$t(j) := t(r) + c(r, j),\ x(j) := r,\ \mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}.$$

- **Krok 3:** *Ak* $\mathcal{E} \neq \emptyset$, *choď na Krok 2.*
  Ak $\mathcal{E} = \emptyset$, *potom* $t(i)$ *predstavuje dĺžku najkratšej orientovanej u–i cesty pre každý vrchol* i. *Najkratšiu orientovanú u–i cestu zostroj potom spätne pomocou značiek* $x(i)$ *ako v predchádzajúcich dvoch algoritmoch.*

♣

Algoritmus

Label-set a Label-correct implementácia algoritmu *na hľadanie najkratších orientovaných u–v ciest z pevného vrchola $u \in V$ do všetkých ostatných vrcholov $v \in V$ v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s nezápornou cenou orientovanej hrany $c(h)$, kde $0 \notin V$.*

- **Krok 1: Inicializácia.**
  Polož $t(u) := 0$, $t(i) := \infty$ pre $i \in V$, $i \neq u$ a $x(i) := 0$ pre každé $i \in V$. Polož $\mathcal{E} := \{u\}$.

- **Krok 2:** *Vyber $r \in \mathcal{E}$, polož $\mathcal{E} := \mathcal{E} - \{r\}$.*
  Pre všetky orientované hrany tvaru $(r, j) \in H$ urob:
  Ak $t(j) > t(r) + c(r, j)$, potom
  $$t(j) := t(r) + c(r, j),\ x(j) := r,\ \mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}.$$

- **Krok 3:** *Ak $\mathcal{E} \neq \emptyset$, choď na Krok 2.*
  Ak $\mathcal{E} = \emptyset$, potom $t(i)$ predstavuje dĺžku najkratšej orientovanej u–i cesty pre každý vrchol i. Najkratšiu orientovanú u–i cestu zostroj potom spätne pomocou značiek $x(i)$ ako v predchádzajúcich dvoch algoritmoch.

♣

Algoritmus

Label-set a Label-correct implementácia algoritmu *na hľadanie najkratších orientovaných u–v ciest z pevného vrchola $u \in V$ do všetkých ostatných vrcholov $v \in V$ v hranovo ohodnotenom digrafe $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ s nezápornou cenou orientovanej hrany $c(h)$, kde $0 \notin V$.*

- **Krok 1: Inicializácia.**
  Polož $t(u) := 0$, $t(i) := \infty$ pre $i \in V$, $i \neq u$ a $x(i) := 0$ pre každé $i \in V$. Polož $\mathcal{E} := \{u\}$.

- **Krok 2:** *Vyber $r \in \mathcal{E}$, polož $\mathcal{E} := \mathcal{E} - \{r\}$.*
  Pre všetky orientované hrany tvaru $(r, j) \in H$ urob:
  Ak $t(j) > t(r) + c(r, j)$, potom
  $$t(j) := t(r) + c(r, j),\ x(j) := r,\ \mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}.$$

- **Krok 3:** *Ak $\mathcal{E} \neq \emptyset$, choď na Krok 2.*
  Ak $\mathcal{E} = \emptyset$, potom $t(i)$ predstavuje dĺžku najkratšej orientovanej u–i cesty pre každý vrchol i. Najkratšiu orientovanú u–i cestu zostroj potom spätne pomocou značiek $x(i)$ ako v predchádzajúcich dvoch algoritmoch.

♣

Label-set a Label-correct implementácia

Ak v druhom kroku posledného algoritmu vyberáme $r \in \mathcal{E}$ ľubovoľne, dostávame implementáciu základného algoritmu, ktorú voláme **label correct algoritmus**.

Ak za prvok $r \in \mathcal{E}$ vyberáme prvok z najmenšou značkou $t()$, potom dostaneme implementáciu Dijkstrovho algoritmu, ktorú voláme **label set algoritmus**.
Ak potrebujeme len jednu u-v cestu, label set algoritmus zastavíme v okamihu vybratia vrchola v z množiny $\mathcal{E}$.

Pre label correct algoritmus je výhodné organizovať $\mathcal{E}$ ako zásobník, pre label set algoritmus sa $\mathcal{E}$ organizuje ako prioritný front, prípadne ako halda.

Aby sme do zásobníka, resp. do prioritného frontu $\mathcal{E}$ nevkladali ten istý vrchol viackrát, je vhodné ku každému vrcholu $v \in V$ udržiavať indikátor hovoriaci, či vrchol v je v množine $\mathcal{E}$.

Label-set a Label-correct implementácia - Príklad

h	$(1,3)$	$(1,7)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$	$(6,1)$	$(7,3)$
$c(h)$	20	120	30	10	60	80	10	30	90	150	20	40

	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	6	7	
							$t(v)\|x(v)$			množina $\mathcal{E}$
	-		$\infty\|0$	$\infty\|0$	$0\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	3
1.	3	0		10|3			60|3			2 5
2.	2	10				40|2				5 4
3.	5	60	90|5					210|5		4 1 6
4.	4	40						50|4		1 6
5.	1	90							210|1	6 7
6.	6	50	70|6							7 1
7.	7	210								1
8.	1	70							190|1	7
9.	7	190								

Label-set a Label-correct implementácia - Príklad

h	$(1,3)$	$(1,7)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$	$(6,1)$	$(7,3)$
$c(h)$	20	120	30	10	60	80	10	30	90	150	20	40

	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	6	7	
							$t(v)\|x(v)$			množina $\mathcal{E}$
	-		$\infty\|0$	$\infty\|0$	$0\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	3
1.	3	0		$10\|3$			$60\|3$			2 5
2.	2	10				$40\|2$				5 4
3.	5	60	$90\|5$					$210\|5$		4 1 6
4.	4	40						$50\|4$		1 6
5.	1	90							$210\|1$	6 7
6.	6	50	$70\|6$							7 1
7.	7	210								1
8.	1	70							$190\|1$	7
9.	7	190								

Label-set a Label-correct implementácia - Príklad

h	$(1,3)$	$(1,7)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$	$(6,1)$	$(7,3)$
$c(h)$	20	120	30	10	60	80	10	30	90	150	20	40

	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	6	7	
						$t(v)\|x(v)$				množina $\mathcal{E}$
	-		$\infty\|0$	$\infty\|0$	$0\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	3
1.	3	0		$10\|3$			$60\|3$			2 5
2.	2	10				$40\|2$				5 4
3.	5	60	$90\|5$					$210\|5$		4 1 6
4.	4	40						$50\|4$		1 6
5.	1	90							$210\|1$	6 7
6.	6	50	$70\|6$							7 1
7.	7	210								1
8.	1	70							$190\|1$	7
9.	7	190								

Label-set a Label-correct implementácia - Príklad

h	$(1,3)$	$(1,7)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$	$(6,1)$	$(7,3)$
$c(h)$	20	120	30	10	60	80	10	30	90	150	20	40

	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	6	7	
						$t(v)\|x(v)$				množina $\mathcal{E}$
	-		$\infty\|0$	$\infty\|0$	$0\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	3
1.	3	0		$10\|3$			$60\|3$			2 5
2.	2	10				$40\|2$				5 4
3.	5	60	$90\|5$					$210\|5$		4 1 6
4.	4	40						$50\|4$		1 6
5.	1	90							$210\|1$	6 7
6.	6	50	$70\|6$							7 1
7.	7	210								1
8.	1	70							$190\|1$	7
9.	7	190								

Label-set a Label-correct implementácia - Príklad

h	$(1,3)$	$(1,7)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$	$(6,1)$	$(7,3)$
$c(h)$	20	120	30	10	60	80	10	30	90	150	20	40

	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	6	7	
							$t(v)\|x(v)$			množina $\mathcal{E}$
	-		$\infty\|0$	$\infty\|0$	$0\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	3
1.	3	0		$10\|3$			$60\|3$			2 5
2.	2	10				$40\|2$				5 4
3.	5	60	$90\|5$					$210\|5$		4 1 6
4.	4	40						$50\|4$		1 6
5.	1	90							$210\|1$	6 7
6.	6	50	$70\|6$							7 1
7.	7	210								1
8.	1	70							$190\|1$	7
9.	7	190								

Label-set a Label-correct implementácia - Príklad

h	$(1,3)$	$(1,7)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$	$(6,1)$	$(7,3)$
$c(h)$	20	120	30	10	60	80	10	30	90	150	20	40

	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	6	7	
							$t(v)\|x(v)$			množina $\mathcal{E}$
	-		$\infty\|0$	$\infty\|0$	$0\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	3
1.	3	0		$10\|3$			$60\|3$			2 5
2.	2	10				$40\|2$				5 4
3.	5	60	$90\|5$					$210\|5$		4 1 6
4.	4	40						$50\|4$		1 6
5.	1	90							$210\|1$	6 7
6.	6	50	$70\|6$							7 1
7.	7	210								1
8.	1	70							$190\|1$	7
9.	7	190								

Label-set a Label-correct implementácia - Príklad

h	$(1,3)$	$(1,7)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$	$(6,1)$	$(7,3)$
$c(h)$	20	120	30	10	60	80	10	30	90	150	20	40

	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	6	7	
			$t(v)\|x(v)$							množina $\mathcal{E}$
	-		$\infty\|0$	$\infty\|0$	$0\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	3
1.	3	0		$10\|3$			$60\|3$			2 5
2.	2	10				$40\|2$				5 4
3.	5	60	$90\|5$					$210\|5$		4 1 6
4.	4	40						$50\|4$		1 6
5.	1	90							$210\|1$	6 7
6.	6	50	$70\|6$							7 1
7.	7	210								1
8.	1	70							$190\|1$	7
9.	7	190								

Label-set a Label-correct implementácia - Príklad

h	$(1,3)$	$(1,7)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$	$(6,1)$	$(7,3)$
$c(h)$	20	120	30	10	60	80	10	30	90	150	20	40

	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	6	7	
			$t(v)\|x(v)$							množina $\mathcal{E}$
	-		$\infty\|0$	$\infty\|0$	$0\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	3
1.	3	0		10|3			60|3			2 5
2.	2	10				40|2				5 4
3.	5	60	90|5					210|5		4 1 6
4.	4	40						50|4		1 6
5.	1	90							210|1	6 7
6.	6	50	70|6							7 1
7.	7	210								1
8.	1	70							190|1	7
9.	7	190								

Label-set a Label-correct implementácia - Príklad

h	$(1,3)$	$(1,7)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$	$(6,1)$	$(7,3)$
$c(h)$	20	120	30	10	60	80	10	30	90	150	20	40

	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	6	7	
			$t(v)\|x(v)$							množina $\mathcal{E}$
	-		$\infty\|0$	$\infty\|0$	$0\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	3
1.	3	0		10|3			60|3			2 5
2.	2	10				40|2				5 4
3.	5	60	90|5					210|5		4 1 6
4.	4	40						50|4		1 6
5.	1	90							210|1	6 7
6.	6	50	70|6							7 1
7.	7	210								1
8.	1	70							190|1	7
9.	7	190								

Label-set a Label-correct implementácia - Príklad

h	$(1,3)$	$(1,7)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(3,5)$	$(4,3)$	$(4,6)$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,6)$	$(6,1)$	$(7,3)$
$c(h)$	20	120	30	10	60	80	10	30	90	150	20	40

	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	6	7	
							$t(v)\|x(v)$			množina $\mathcal{E}$
	-		$\infty\|0$	$\infty\|0$	$0\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	$\infty\|0$	3
1.	3	0		$10\|3$			$60\|3$			2 5
2.	2	10				$40\|2$				5 4
3.	5	60	$90\|5$					$210\|5$		4 1 6
4.	4	40						$50\|4$		1 6
5.	1	90							$210\|1$	6 7
6.	6	50	$70\|6$							7 1
7.	7	210								1
8.	1	70							$190\|1$	7
9.	7	190								

Algoritmus

Algoritmus na na hľadanie cyklu zápornej ceny *v hranovo ohodnotenom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *so všeobecnou cenou hrán.*

- **Krok 1: Inicializácia.**
  Polož $t(i) := 0$ *pre všetky* $i \in V$ *a* $x(i) := 0$ *pre každé* $i \in V$.
  Polož $\mathcal{E} := V$.
- **Krok 2:** *Vyber* $r \in \mathcal{E}$, *polož* $\mathcal{E} := \mathcal{E} - \{r\}$.
  Pre všetky orientované hrany tvaru $(r, j) \in H$ *urob:*
  Ak $t(j) > t(r) + c(r, j)$, *potom*
  polož $t(j) := t(r) + c(r, j)$, $x(j) := r$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}$ *a vyskúšaj či sa v postupnosti*
  $$x(j), x(x(j)), x(x(x(j))), \ldots$$
  vyskytuje vrchol j. *Ak áno, našiel si cyklus obsahujúci vrchol* j. *STOP.*
  Ak nie, pokračuj krokom 3.
- **Krok 3:** *Ak* $\mathcal{E} \neq \emptyset$, *choď na Krok 2.*

  Ak $\mathcal{E} = \emptyset$, *STOP, v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *neexistuje cyklus.*

Algoritmus

Algoritmus na na hľadanie cyklu zápornej ceny *v hranovo ohodnotenom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *so všeobecnou cenou hrán.*

- **Krok 1: Inicializácia.**
  Polož $t(i) := 0$ *pre všetky* $i \in V$ *a* $x(i) := 0$ *pre každé* $i \in V$.
  Polož $\mathcal{E} := V$.
- **Krok 2:** *Vyber* $r \in \mathcal{E}$, *polož* $\mathcal{E} := \mathcal{E} - \{r\}$.
  Pre všetky orientované hrany tvaru $(r, j) \in H$ *urob:*
  Ak $t(j) > t(r) + c(r, j)$, *potom*
  polož $t(j) := t(r) + c(r, j)$, $x(j) := r$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}$ *a vyskúšaj či sa v postupnosti*
  $$x(j), x(x(j)), x(x(x(j))), \ldots$$
  vyskytuje vrchol j. *Ak áno, našiel si cyklus obsahujúci vrchol* j. *STOP.*
  Ak nie, pokračuj krokom 3.
- **Krok 3:** *Ak* $\mathcal{E} \neq \emptyset$, *choď na Krok 2.*

  Ak $\mathcal{E} = \emptyset$, *STOP, v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *neexistuje cyklus.*

Algoritmus

Algoritmus na na hľadanie cyklu zápornej ceny *v hranovo ohodnotenom digrafe* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *so všeobecnou cenou hrán.*

- **Krok 1: Inicializácia.**
  Polož $t(i) := 0$ *pre všetky* $i \in V$ *a* $x(i) := 0$ *pre každé* $i \in V$.
  Polož $\mathcal{E} := V$.

- **Krok 2:** *Vyber* $r \in \mathcal{E}$, *polož* $\mathcal{E} := \mathcal{E} - \{r\}$.
  Pre všetky orientované hrany tvaru $(r, j) \in H$ *urob:*
  Ak $t(j) > t(r) + c(r, j)$, *potom*
  polož $t(j) := t(r) + c(r, j)$, $x(j) := r$, $\mathcal{E} := \mathcal{E} \cup \{j\}$ *a vyskúšaj či sa v postupnosti*
  $$x(j), x(x(j)), x(x(x(j))), \ldots$$
  vyskytuje vrchol j. *Ak áno, našiel si cyklus obsahujúci vrchol* j. *STOP.*
  Ak nie, pokračuj krokom 3.

- **Krok 3:** *Ak* $\mathcal{E} \neq \emptyset$, *choď na Krok 2.*

  Ak $\mathcal{E} = \emptyset$, *STOP, v digrafe* $\overrightarrow{G}$ *neexistuje cyklus.* ♣

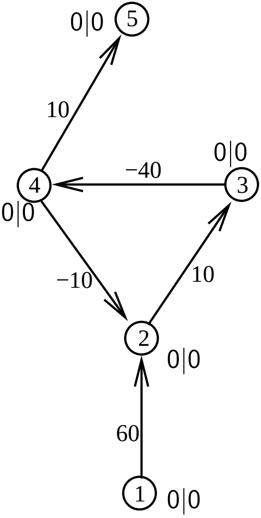
Cyklus zápornej ceny v digrafe

Poznámka

Postupnosť

$$x(j), x(x(j)), x(x(x(j))), ...$$

v druhom kroku počítame pokiaľ sa v nej vyskytne prvok j, alebo taký vrchol $k = x(x(\dots x(j)\dots))$, pre ktorý $x(k) = 0$.

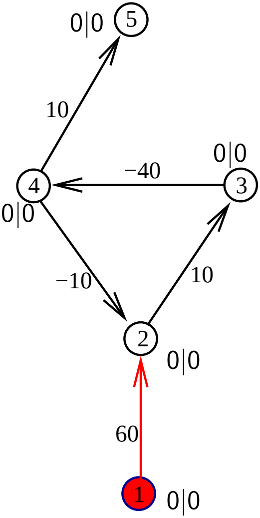


	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	
			$t(v)\|x(v)$					množina $\mathcal{E}$
	-		0|0	0|0	0|0	0|0	0|0	1 2 3 4 5
1.	1	0						2 3 4 5
2.	2	0						3 4 5
3.	3	0				−40|3		4 5
4.	4	−40		−50|4			−30|4	5 2
5.	5	0						2
6.	2	−50			−40|2			3

$$x^{(k)}(j) = \underbrace{x(x(\dots x(}_{k\text{-krát}} j)\dots x(j)\dots))$$

	j	$x(j)$	$x^{(2)}(j)$	$x^{(3)}(j)$	$x^{(4)}(j)$	$x^{(5)}(j)$
1.	-					
2.	-					
3.	4	3	0			
4.	2	4	3	0		
4.	5	4	3	0		
5.	-					
6.	3	2	4	3		

Hľadanie cyklu zápornej ceny

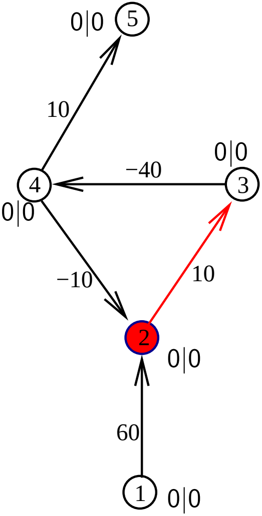


	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	
			$t(v) \mid x(v)$					množina $\mathcal{E}$
	-		$0 \mid 0$	$0 \mid 0$	$0 \mid 0$	$0 \mid 0$	$0 \mid 0$	1 2 3 4 5
1.	1	0						2 3 4 5
2.	2	0						3 4 5
3.	3	0				$-40 \mid 3$		4 5
4.	4	-40		$-50 \mid 4$			$-30 \mid 4$	5 2
5.	5	0						2
6.	2	-50			$-40 \mid 2$			3

$$x^{(k)}(j) = \underbrace{x(x(\dots x(}_{k\text{-krát}} j)\dots x(j)\dots))$$

	j	$x(j)$	$x^{(2)}(j)$	$x^{(3)}(j)$	$x^{(4)}(j)$	$x^{(5)}(j)$
1.	-					
2.	-					
3.	4	3	0			
4.	2	4	3	0		
4.	5	4	3	0		
5.	-					
6.	3	2	4	3		

Hľadanie cyklu zápornej ceny

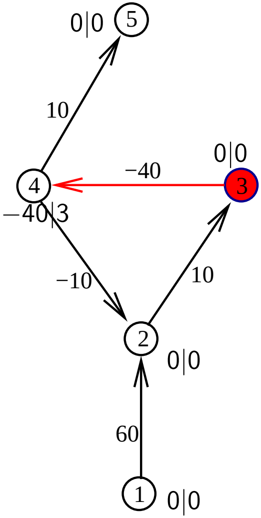


	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	
			$t(v)\|x(v)$					množina $\mathcal{E}$
	-		0|0	0|0	0|0	0|0	0|0	1 2 3 4 5
1.	1	0						2 3 4 5
2.	2	0						3 4 5
3.	3	0				−40|3		4 5
4.	4	−40		−50|4			−30|4	5 2
5.	5	0						2
6.	2	−50			−40|2			3

$$x^{(k)}(j) = \underbrace{x(x(\ldots x(}_{k\text{-krát}} j)\ldots x(j)\ldots))$$

	j	$x(j)$	$x^{(2)}(j)$	$x^{(3)}(j)$	$x^{(4)}(j)$	$x^{(5)}(j)$
1.	-					
2.	-					
3.	4	3	0			
4.	2	4	3	0		
4.	5	4	3	0		
5.	-					
6.	3	2	4	3		

Hľadanie cyklu zápornej ceny

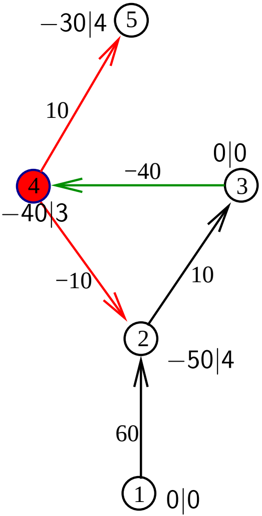


	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	
			$t(v) \mid x(v)$					množina $\mathcal{E}$
	-		$0\mid 0$	$0\mid 0$	$0\mid 0$	$0\mid 0$	$0\mid 0$	1 2 3 4 5
1.	1	0						2 3 4 5
2.	2	0						3 4 5
3.	3	0				$-40\mid 3$		4 5
4.	4	-40		$-50\mid 4$			$-30\mid 4$	5 2
5.	5	0						2
6.	2	-50			$-40\mid 2$			3

$$x^{(k)}(j) = \underbrace{x(x(\ldots x(}_{k\text{-krát}} j) \ldots x(j) \ldots))$$

	j	$x(j)$	$x^{(2)}(j)$	$x^{(3)}(j)$	$x^{(4)}(j)$	$x^{(5)}(j)$
1.	-					
2.	-					
3.	4	3	0			
4.	2	4	3	0		
4.	5	4	3	0		
5.	-					
6.	3	2	4	3		

Hľadanie cyklu zápornej ceny

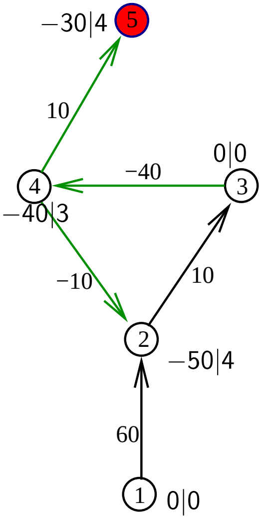


	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	
			$t(v)\|x(v)$					množina $\mathcal{E}$
	-		0|0	0|0	0|0	0|0	0|0	1 2 3 4 5
1.	1	0						2 3 4 5
2.	2	0						3 4 5
3.	3	0				−40|3		4 5
4.	4	−40		−50|4			−30|4	5 2
5.	5	0						2
6.	2	−50			−40|2			3

$$x^{(k)}(j) = \underbrace{x(x(\dots x(}_{k\text{-krát}}j)\dots x(j)\dots))$$

	j	$x(j)$	$x^{(2)}(j)$	$x^{(3)}(j)$	$x^{(4)}(j)$	$x^{(5)}(j)$
1.	-					
2.	-					
3.	4	3	0			
4.	2	4	3	0		
4.	5	4	3	0		
5.	-					
6.	3	2	4	3		

Hľadanie cyklu zápornej ceny

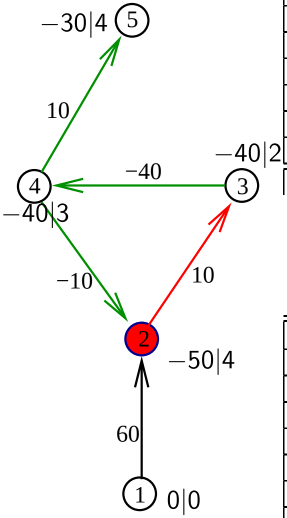


	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	
					$t(v)\|x(v)$			množina $\mathcal{E}$
	-		0|0	0|0	0|0	0|0	0|0	1 2 3 4 5
1.	1	0						2 3 4 5
2.	2	0						3 4 5
3.	3	0				−40|3		4 5
4.	4	−40		−50|4			−30|4	5 2
5.	5	0						2
6.	2	−50			−40|2			3

$$x^{(k)}(j) = \underbrace{x(x(\dots x(}_{k\text{-krát}} j)\dots x(j)\dots))$$

	j	$x(j)$	$x^{(2)}(j)$	$x^{(3)}(j)$	$x^{(4)}(j)$	$x^{(5)}(j)$
1.	-					
2.	-					
3.	4	3	0			
4.	2	4	3	0		
4.	5	4	3	0		
5.	-					
6.	3	2	4	3		

Hľadanie cyklu zápornej ceny



	r	$t(r)$	1	2	3	4	5	
					$t(v)\mid x(v)$			množina $\mathcal{E}$
	-		$0\mid 0$	$0\mid 0$	$0\mid 0$	$0\mid 0$	$0\mid 0$	1 2 3 4 5
1.	1	0						2 3 4 5
2.	2	0						3 4 5
3.	3	0				$-40\mid 3$		4 5
4.	4	-40		$-50\mid 4$			$-30\mid 4$	5 2
5.	5	0						2
6.	2	-50			$-40\mid 2$			3

$$x^{(k)}(j) = \underbrace{x(x(\dots x(}_{k\text{-krát}}j)\dots x(j)\dots))$$

	j	$x(j)$	$x^{(2)}(j)$	$x^{(3)}(j)$	$x^{(4)}(j)$	$x^{(5)}(j)$
1.	-					
2.	-					
3.	4	3	0			
4.	2	4	3	0		
4.	5	4	3	0		
5.	-					
6.	3	2	4	**3**		

Floyd

Floydov algoritmus 5 (str. 117) možno tiež modifikovať tak, že v prípade všeobecného digrafu nájde záporný cyklus.
Stačí v kroku 1. definovať začiatočnú maticu **C** nasledovne

$$c_{ij} = \begin{cases} c(i,j), & \text{ak } \{i,j\} \in H, \quad \text{resp.} \quad (i,j) \in H \\ \infty, & \text{ak } \{i,j\} \notin H, \quad \text{resp.} \quad (i,j) \notin H \end{cases}$$

Matica **C** má na rozdiel od štandardného Floydovho algoritmu na hlavnej diagonále ∞. Matica **X** je bez zmeny. Krok 2. je rovnaký.
Pozor! Treba meniť aj prvky hlavnej diagonály!!!

Po ukončení práce tohto algoritmu budú prvky c_{ii} na diagonále rovné dĺžke najkratšieho i–i cyklu.

Ak sa na hlavnej diagonále matice **C** v priebehu výpočtu Floydovým algoritmom objaví záporné číslo c_{jj} , objavili sme tým cyklus zápornej ceny obsahujúci vrchol j.

Tento cyklus určíme pomocou matice smerníkov **X**.

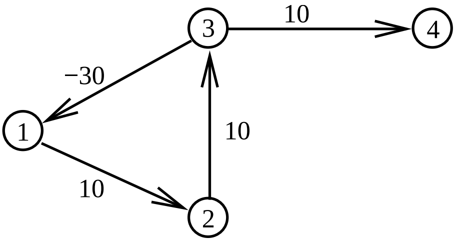
Príklad

Treba zistiť, či digraf z nasledujúceho obrázku obsahuje cyklus zápornej ceny.

Zostavíme matice **C** *a* **X** *a postupne urobíme Krok 2. Floydovho algoritmu pre* $k = 1, 2, 3$.

Vývoj matíc **C** *a* **X** *vidíme postupne v tabuľkách na nasledujúcej fólii.*

Keďže v poslednom riadku matice **C** *pre* $k = 3$ *sú samé* ∞, *pre* $k = 4$ *sa už matice* **C** *a* **X** *nezmenia.*



Obr.: Digraf k príkladu 1.

Príklad

C

∞	10	∞	∞
∞	∞	10	∞
-30	$\boxed{\infty}$	∞	10
∞	∞	∞	∞

C po $k = 1$

∞	10	$\boxed{\infty}$	∞
∞	∞	10	∞
-30	-20	$\boxed{\infty}$	10
∞	∞	∞	∞

C po $k = 2$

∞	10	20	∞
∞	∞	10	∞
-30	-20	**-10**	10
∞	∞	∞	∞

C po $k = 3$

-10	0	20	30
-20	**-10**	10	20
-30	-20	**-10**	10
∞	∞	∞	∞

X

-	1	-	-
-	-	2	-
3	-	-	3
-	-	-	-

X po $k = 1$

-	1	-	-
-	-	2	-
3	1	-	3
-	-	-	-

X po $k = 2$

-	1	2	-
-	-	2	-
3	**1**	**2**	3
-	-	-	-

X po $k = 3$

3	1	2	3
3	1	2	3
3	1	2	3
-	-	-	-

Už po vypočítaní tretej dvojice tabuliek sa na diagonále matice **C** objavilo na mieste c_{33} záporné číslo -10, čo stačí na konštatovanie, že skúmaný digraf obsahuje cyklus so zápornou cenou, ktorý obsahuje vrchol 3.
Tretí riadok matice smerníkov **X** hovorí, že predposledný vrchol tohto cyklu je $x_{33} = \mathbf{2}$, bezprostredne pred vrcholom 2 leží na hľadanom cykle vrchol $x_{32} = \mathbf{1}$ a pred ním je vrchol $x_{31} = \mathbf{3}$, v ktorom sa cyklus uzaviera.
Hľadaný cyklus so zápornou cenou je teda

$$3, (3, 1), 1, (1, 2), 2, (2, 3), 3.$$

Cesta maximálnej spoľahlivosti

Definícia

Majme hranovo ohodnotený graf $G = (V, H, c)$ kde ohodnotenie c predstavuje spoľahlivosť hrany (pravdepodobnosť úspešného prechodu hranou), t. j. $0 \leq c(h) \leq 1$.
Nech $\boldsymbol{\mu}(u, v)$ je u–v cesta.
Spoľahlivosť $s(\boldsymbol{\mu}(u, v))$ **cesty** $\boldsymbol{\mu}(u, v)$ *definujeme:*

$$s(\boldsymbol{\mu}(u, v)) = \prod_{h \in \boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h) \; .$$

u–v **cesta maximálnej spoľahlivosti** *je tá u–v cesta $\boldsymbol{\mu}(u, v)$, ktorá má zo všetkých u–v ciest najväčšiu spoľahlivosť.*

Veta

Nech $G = (V, H, c)$, kde $c(h) > 0$ je spoľahlivosť hrany $h \in H$. u–v cesta $\boldsymbol{\mu}(u, v)$ je cestou maximálnej spoľahlivosti v grafe $G = (V, H, c)$ práve vtedy, ak $\boldsymbol{\mu}(u, v)$ je najkratšou cestou v grafe $\overline{G} = (V, H, \overline{c})$, kde pre cenu hrany $\overline{c}$ platí $\overline{c}(i, j) = -\log_z(c(i, j))$, (kde $z > 1$).

Cesta maximálnej spoľahlivosti

Najspoľahlivejšia u-v cesta

Cieľ: maximalizovať

$$s(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \prod_{h \in \boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h)$$

$d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ je maximálne $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ je maximálne.

Cieľ: maximalizovať

$$\log s(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \log \prod_{h \in \boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h) = \sum_{h \in \boldsymbol{\mu}(u,v)} \log c(h)$$

$\sum_{h \in \boldsymbol{\mu}(u,v)} \log c(h)$ je maximálne $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{h \in \boldsymbol{\mu}(u,v)} -\log c(h)$ je minimálne.

Cieľ: minimalizovať $\sum_{h \in \boldsymbol{\mu}(u,v)} -\log c(h)$

Najkratšia u-v cesta

Cieľ: minimalizovať

$$d(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \sum_{h \in \boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h)$$

Cesta maximálnej spoľahlivosti

Najspoľahlivejšia u-v cesta

Cieľ: maximalizovať

$$s(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \prod_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h)$$

$d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ je maximálne $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ je maximálne.

Cieľ: maximalizovať

$$\log s(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \log \prod_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h) = \sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} \log c(h)$$

$\sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} \log c(h)$ je maximálne $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} -\log c(h)$ je minimálne.

Cieľ: minimalizovať $\sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} -\log c(h)$

Najkratšia u-v cesta

Cieľ: minimalizovať

$$d(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h)$$

Cesta maximálnej spoľahlivosti

Najspoľahlivejšia u-v cesta

Cieľ: maximalizovať

$$s(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \prod_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h)$$

$d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ je maximálne $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ je maximálne.

Cieľ: maximalizovať

$$\log s(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \log \prod_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h) = \sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} \log c(h)$$

$\sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} \log c(h)$ je maximálne $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} -\log c(h)$ je minimálne.

Cieľ: minimalizovať $\sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} -\log c(h)$

Najkratšia u-v cesta

Cieľ: minimalizovať

$$d(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h)$$

Cesta maximálnej spoľahlivosti

Najspoľahlivejšia *u*-*v* cesta

Cieľ: maximalizovať

$$s(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \prod_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h)$$

$d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ je maximálne $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ je maximálne.

Cieľ: maximalizovať

$$\log s(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \log \prod_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h) = \sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} \log c(h)$$

$\displaystyle\sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} \log c(h)$ je maximálne $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} -\log c(h)$ je minimálne.

Cieľ: minimalizovať $\displaystyle\sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} -\log c(h)$

Najkratšia *u*-*v* cesta

Cieľ: minimalizovať

$$d(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h)$$

Cesta maximálnej spoľahlivosti

Najspoľahlivejšia u-v cesta

Cieľ: maximalizovať

$$s(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \prod_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h)$$

$d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ je maximálne $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log d(\boldsymbol{\mu}(u,v))$ je maximálne.

Cieľ: maximalizovať

$$\log s(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \log \prod_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h) = \sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} \log c(h)$$

$\sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} \log c(h)$ je maximálne $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} -\log c(h)$ je minimálne.

Cieľ: minimalizovať $\sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} -\log c(h)$

Najkratšia u-v cesta

Cieľ: minimalizovať

$$d(\boldsymbol{\mu}(u,v)) = \sum_{h\in\boldsymbol{\mu}(u,v)} c(h)$$