

Pri riešení úloh použite metódu Monte Carlo. Zabezpečte, čo najvyššiu presnosť výsledkov (žiadne generované hodnoty nezaokrúhľujte, ale modelujte ich presne podľa zadania)!

Zadanie 1. príkladu na cvičenie 12

Odhad čísla π

Odhadnite hodnotu π . Generujte rovnomerne body z jednotkového štvorca – teda x-ovú súradnicu z rovnomerného rozdelenia nad intervalom $[0, 1]$ a y-ovú súradnicu z rovnomerného rozdelenia nad intervalom $[0, 1]$. Určite, aký podiel z nich padol do kruhu so stredom $[0.5, 0.5]$ a polomerom $r = 0.5$. Na základe tohto podielu a vzorca pre výpočet obsahu kruhu spravte odhad čísla π . Zistite, koľko bodov bolo potrebné vo Vašom experimente náhodne umiestniť do štvorca, aby chyba odhadu hodnoty π bola menšia ako 10^{-6} .

Pomôcky: Kruh so stredom $[x_0, y_0]$ a polomerom r je množina všetkých bodov $[x, y]$ vyhovujúcich nerovnici $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$.

Hodnotu π môžeme odhadnúť: $\pi \cong \frac{\text{Obsah kruhu (podiel bodov, ktoré padli do kruhu)}}{r^2}$.

Zadanie 2. príkladu na cvičenie 12

Opitý námorník (alebo Brownov pohyb)

1. Opitý námorník sa postaví do bodu 0. V každom kroku sa pohne buď o krok dopredu (+1) alebo o krok dozadu (-1). Týchto krokov vykoná 1000. Kde sa bude potom nachádzať? Vykonajte 100000 replikácií a zistite jeho priemernú (konečnú) vzdialenosť od bodu 0.

Pomôcka na kontrolu výsledku: Teoretický odhad pre N krokov v je $\sqrt{\frac{2N}{\pi}}$.

2. Opitý námorník sa teraz pohybuje v dvojrozmernom priestore. Začína v bode $[0, 0]$. V každom kroku sa pohne buď v x-ovom smere krok dopredu (+1) alebo o krok dozadu (-1), prípadne v y-ovom smere krok dopredu (+1) alebo o krok dozadu (-1). (Môže sa pohybovať “doprava”, “doľava”, “hore”, “dolu”, ale nikdy nie “šikmo”.) Týchto krokov spraví 1000. Vykonajte 100000 replikácií a zistite, priemerne na koľko krokov by sa vtedy mohol najkratšou cestou do bodu $[0, 0]$ vrátiť?

Pomôcka na kontrolu výsledku: Teoretický odhad pre N krokov v je $\sqrt{\frac{4N}{\pi}}$.

3. Opitý námorník sa teraz pohybuje v trojrozmernom priestore. Začína v bode $[0, 0, 0]$. Má na výber vždy práve jeden zo šiestich smerov a chodí v každom smere o +1 alebo o -1, tak ako v predchádzajúcich prípadoch. Týchto krokov spraví 1000. Vykonajte 100000 replikácií a zistite, priemerne na koľko krokov by sa vtedy mohol najkratšou cestou do bodu $[0, 0, 0]$ vrátiť?

Pomôcka na kontrolu výsledku: Teoretický odhad pre N krokov v je $\sqrt{\frac{6N}{\pi}}$.

Zadanie 3. príkladu na cvičenie 12

Veštice (zadanie inšpirované filmom Minority Report)

Máme tri veštice, ktorých sa môžeme pýtať áno/nie otázky o budúcnosti. Každá z nich má v 80% prípadov pravdu. Predpokladajme, že sme im položili otázku a prvá veštica a druhá veštica na ňu odpovedali rovnako. Aká je pravdepodobnosť, že majú pravdu? Vykonajte 100000 replikácií a určte túto pravdepodobnosť [94.1%]. Ak všetky tri odpovedia rovnako, aká je pravdepodobnosť, že majú pravdu? [98.4%]

Ako sa zmenia odpovede na predchádzajúce dve otázky, ak sa úspešnosť každej veštice bude správať ako náhodná premenná s trojuholníkovým rozdelením $\text{TRIA}(60; 80; 100)$? [93.3%, 98.0%]