

Kapitola 1

Periodické vlastnosti procesov

1.1 Periodické modely

V prípade, že sa v modeli pre zovšeobecnenú lineárnu regresiu ?? použijú ako funkcie $\varphi_n(t_k)$ niektoré z funkcií sínus, alebo kosínus, budú analyzované periodické vlastnosti tohto procesu.

$$\varphi(t_k) = c_0\varphi_0(t_k) + c_1\varphi_1(t_k) + \dots + c_n\varphi_{N-1}(t_k)$$

Príkladom modelu lineárnej regresie, ktorou je možné aproximovať proces s približne periodickým priebehom je funkcia:

$$\varphi(t_k) = c_0 \cdot \sin(\omega_0 t_k) + c_1 \cdot \cos(\omega_1 t_k)$$

Hodnoty ω_0 a ω_1 zvolíme vopred podľa períód, ktoré sa v procese vyskytujú. Pomocou postupov z predchádzajúcej kapitoly potom vypočítame koeficienty c_0 a c_1 , ktoré určujú najlepšiu aproximáciu procesu pomocou krivky takéhoto tvaru.

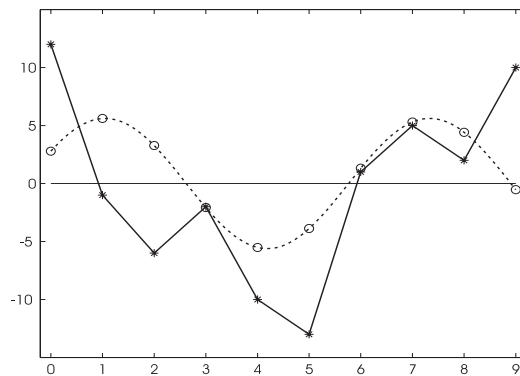
Príklad 1.1.1 *Aproximujte proces $\mathbf{f} = (12, -1, -6, -2, -10, -13, 1, 5, 2, 10)$ regresnou krivkou tvaru $\varphi(t_k) = c_0 \cdot \sin(\omega_0 t_k) + c_1 \cdot \cos(\omega_1 t_k)$.*

Riešenie:

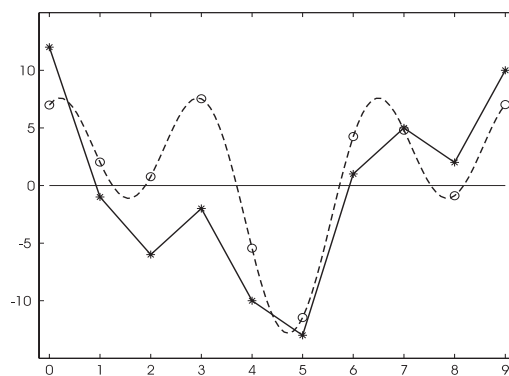
Metódou lineárnej regresie vypočítame koeficienty c_0 a c_1 , ktoré sú najlepšie pri aproximácii funkciou $\varphi(t_k)$. Hodnoty ω_0 a ω_1 treba zvoliť vopred, pretože sú vo vnútri funkcií sínus a kosínus a nie je možné na ich výpočet použiť lineárne metódy, nie je možné ich exaktne vypočítať. Na obrázkoch ??, ?? a ?? sú vykreslené aproximácie pri intuitívne odhadnutých hodnotách ω_0 a ω_1 . Veľkosti chýb odhadu sú postupne $\|\mathbf{e}_1\| = 20.85$, $\|\mathbf{e}_2\| = 14.89$ a $\|\mathbf{e}_3\| = 10.7$.

Z obrázkov aj z výpočtu veľkosti chyby vidíme, že koeficienty ω_0 a ω_1 podstatne ovplyvňujú tvar funkcie $\varphi(t_k)$ a teda aj úspešnosť a akou je proces \mathbf{f} aproximovaný.

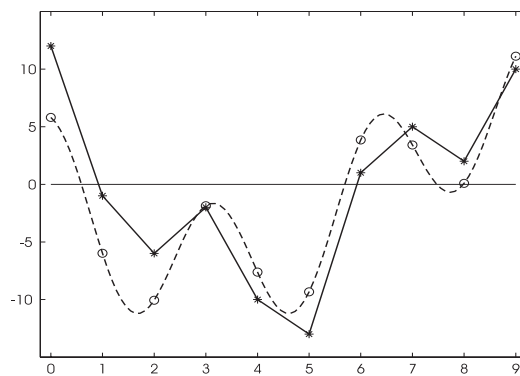
Lepšiu aproximáciu by sme mohli dostať, keby sme okrem parametrov ω_0 a ω_1 , ktoré ovplyvňujú dĺžku periódy, zaviedli ďalšie dva parametre α_0 a α_1 , ktoré budú ovplyvňovať miesto, kde funkcie sínus a kosínus prechádzajú nulou. Týmito parametrami posunieme obe funkcie po časovej osi. Na obrázku ?? je vykreslená aproximácia pri intuitívne odhadnutých hodnotách ω_0 , ω_1 , α_0 a α_1 . Veľkosť chyby odhadu je v tomto prípade $\|\mathbf{e}_4\| = 7.3$.



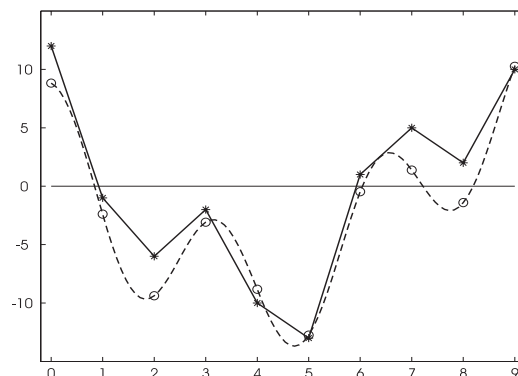
Obrázok 1.1: Aproximácia procesu f krivkou $\varphi(t_k) = c_0 \cdot \sin(1 t_k) + c_1 \cdot \cos(1 t_k)$



Obrázok 1.2: Aproximácia procesu f krivkou $\varphi(t_k) = c_0 \cdot \sin(1 t_k) + c_1 \cdot \cos(2 t_k)$



Obrázok 1.3: Aproximácia procesu f krivkou $\varphi(t_k) = c_0 \cdot \sin(0.5 t_k) + c_1 \cdot \cos(2 t_k)$



Obrázok 1.4: Aproximácia procesu f krivkou $\varphi(t_k) = c_0 \cdot \sin(0.5 t_k - 0.39) + c_1 \cdot \cos(2 t_k - 0.19)$

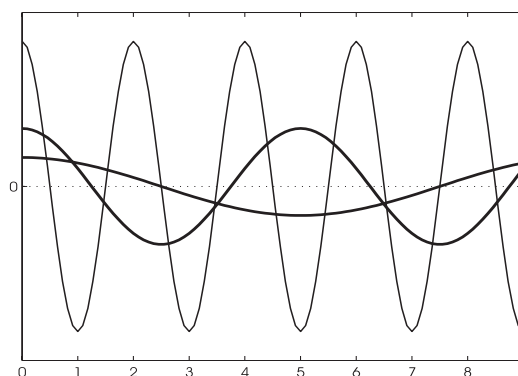
Dá sa dosiahnuť aj omnoho lepšia aproximácia, s veľkosťou chyby $\|\mathbf{e}_5\| = 1$, ale tento výsledok uvedieme až po vybudovaní potrebného matematického aparátu v príklade ??.

Úloha 1.1.1 *S pomocou výpočtovej techniky nájdite také hodnoty parametrov ω_0 , ω_1 , α_0 a α_1 pre funkciu*

$$\varphi(t_k) = c_0 \cdot \sin(\omega_0 t_k) + c_1 \cdot \cos(\omega_1 t_k)$$

aby veľkosť chyby odhadu $\|\mathbf{e}\| < 7$.

Problém, ktorý riešený v príklade ?? však môžeme formulovať aj iným spôsobom. Metódou lineárnej regresie vypočítame koeficienty procesu v báze, ktorá pozostáva z veľkého počtu kosínusových priebehov, pričom každý z týchto priebehov má inú periódu. Na obrázku ?? sú zobrazené tri takéto funkcie s rôznou periódou aj amplitúdou.



Obrázok 1.5: Funkcie kosínus s rôznymi periódami a rôznymi amplitúdami

Podľa toho, aké veľké budú koeficienty pri jednotlivých funkciách sa dá určiť, ktoré sú viac a ktoré menej významné periódy procesu. Báza, ktorá sa na vydeľovanie periodických trendov z procesu používa sa nazýva **harmonická báza** a takáto zmena bázy sa nazýva aj **diskrétna Fourierova transformácia**.

Riešime úlohu aproximovať proces ako lineárnu kombináciu funkcií kosínus. Amplitúdy a fázy (= max. výška a posun) týchto funkcií sa vypočítajú ako koeficienty rozkladu procesu do harmonickej bázy.

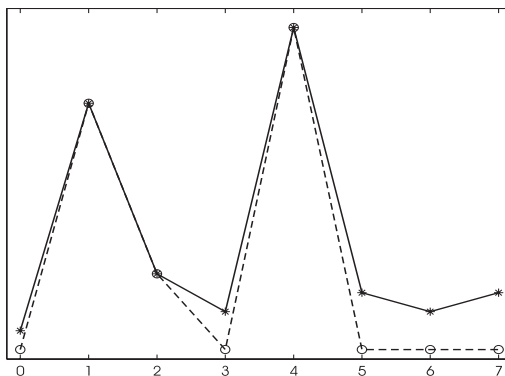
Odhad $\tilde{\mathbf{f}}$ procesu \mathbf{f} vyjadríme v takom podpriestore \mathcal{S} pôvodného priestoru, ktorý bude generovaný báзовými vektormi s najväčšími koeficientami v rozklade procesu \mathbf{f} . Rozmer podpriestoru \mathcal{S} určíme podľa požiadaviek v zadaní problému. Na ilustráciu tejto myšlienky uvidíme príklad o výbere troch vektorov z jednotkovej bázy vektorového priestoru.

Príklad 1.1.2 Rozložme vektor $\mathbf{f} = (1, 13, 4, 2, 17, 3, 2, 3)$ do jednotkovej bázy. Vyberme z bázy tri báзовé vektory, tak, že v priemet do podpriestoru určeného týmito vektormi bude najlepšie vyjadrovať pôvodný vektor.

Vidíme, že takými vektormi budú vektory

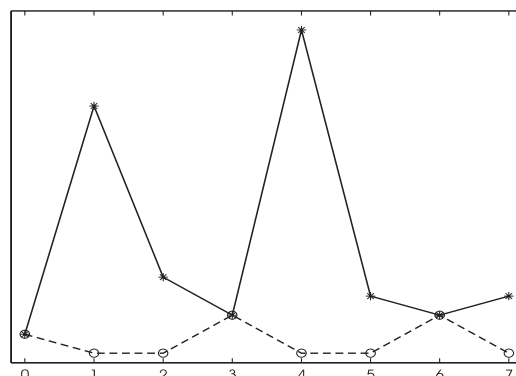
$$\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), \mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Priemet vektora \mathbf{f} do podpriestoru určeného báзовými vektormi \mathbf{e}_4 , \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 je vektor $\tilde{\mathbf{f}} = (0, 13, 4, 0, 17, 0, 0, 0)$, ktorý je najlepšou aproximáciou vektora \mathbf{f} spomedzi všetkých trojrozmerných podpriestorov určených trojprvkovou bázou $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{E}$. Teda najlepšie bude zobrať do trojrozmernej bázy vektory s najväčšími koeficientami $c_1 = 13$, $c_2 = 4$ a $c_4 = 17$. Na obrázku ?? použitá báza $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$, teda báza s najväčšími koeficientami. Na obrázku ?? je použitá báza $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_6\}$, teda báza s najmenšími koeficientami. \square



Obrázok 1.6: Aproximácia (dobrá) procesu \mathbf{f} v podpriestore s bázou z vektorov s najväčšími koeficientami

Úloha 1.1.2 V príklade ?? je ukázané, že najbližší vektor k vektoru \mathbf{f} (v podpriestore generovanom trojrozmernou bázou, ktorá je podmnožinou bázy \mathcal{B} celého priestoru), je vektor $\tilde{\mathbf{f}}$, ktorého koeficienty sú tri najväčšie z koeficientov v báze \mathcal{B} . Do bázy \mathcal{B}_3 sú vybrané báзовé vektory zodpovedajúce týmto trom najväčším



Obrázok 1.7: Aproximácia (zlá) procesu \mathbf{f} v podpriestore s bázou z vektorov s najmenšími koeficientami

koeficientom. Nájdite takú bázu štvorrozmerného priestoru, v ktorom týmto postupom nenájdeme najlepší trojrozmerný podpriestor. Teda vektor $\tilde{\mathbf{f}}$ s najväčšími koeficientami nebude najlepšou aproximáciou spomedzi všetkých priemetov do všetkých podpriestorov generovaných bázami $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}$.

Úloha 1.1.3 Akú podmienku musí spĺňať báza, aby bolo možné použiť postup z príkladu ???

Rovnaký princíp ako v príklade ?? použijeme aj pri výbere významných koeficientov pri rozklade do harmonickej bázy. Čím väčšia bude absolútna hodnota koeficientu rozkladu vektora \mathbf{f} do bázy, tým lepšie bude daný bázový vektor (vynásobený príslušným koeficientom) aproximovať vektor \mathbf{f} . Že je to naozaj pravda dokážeme tak, že v odseku ?? ukážeme, že veľkosť chyby odhadu \mathbf{f} je pri tomto postupe najmenšia.

1.1.1 Skalárny súčin v komplexnom obore

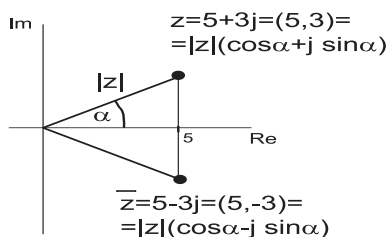
Aj v tejto kapitole budeme analyzovať procesy, ktorých hodnoty sú reálne čísla. Na ich spracovanie však budeme potrebovať komplexné čísla a komplexné vektory. Preto teraz vysvetlíme matematický aparát potrebný na spracovanie vektorov s komplexnými hodnotami.

Komplexné číslo je číslo, ktoré má okrem reálnej zložky navyše zložku imaginárnu, teda je popísané dvomi hodnotami. Geometricky môžeme čísla znázorniť na priamke (napr. prirodzené, celé, reálne), na znázornenie komplexných čísel je potrebný väčší rozmer, teda rovina. Na obrázku ?? je znázornená Gaussova rovina, na ktorej je vyznačený bod zodpovedajúci komplexnému číslu

$$z = 5 + j 3 = 5.83 (\cos(0.54) + j \sin(0.54)) = 5.83 e^{j 0.54}$$

Číslo j vo vyjadrení komplexného čísla sa nazýva komplexná jednotka. Jeho najvýznamnejšia vlastnosť je, že na rozdiel od reálnych čísel, je jeho druhá mocnina číslo záporné.

$$j^2 = -1$$

Obrázok 1.8: Komplexné číslo $z = 5 + j 3$

Každé komplexné číslo z môžeme zapísať v algebraickom, geometrickom, goniometrickom alebo exponenciálnom tvare:

- **Algebraický tvar** je súčet

$$z = a + j b$$

kde a je reálna zložka a b je imaginárna zložka komplexného čísla z .

$$\operatorname{Re}\{z\} = a, \quad \operatorname{Im}\{z\} = b$$

- **Geometrický tvar** je usporiadaná dvojica, ktorá udáva súradnice komplexného čísla v Gaussovej rovine, pričom prvá zložka udáva hodnotu reálnej časti (os x) a druhá zložka udáva hodnotu imaginárnej časti (os y)

$$z = (a, b)$$

- **Goniometrický tvar** je vyjadrenie komplexného čísla pomocou jeho veľkosti $|z|$ a uhla α . V Gaussovej rovine je hodnota $|z|$ rovná vzdialenosti bodu $z = (a, b)$ od bodu $o = (0, 0)$, a uhol α je uhol, ktorý zvierá úsečka \overline{oz} s kladnou reálnou polosou (kladnou polosou x).

$$z = |z| \cdot (\cos(\alpha) + j \sin(\alpha)); \quad \text{kde} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

- **Exponenciálny tvar** používa rovnako ako goniometrický tvar veľkosť $|z|$ a uhol α .

$$z = |z| \cdot e^{j\alpha} \quad \text{kde} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Operáciu sčítania je najjednoduchšie vykonať (s najnižšími nárokmi na pamäť počítača) vtedy, keď sú komplexné čísla v algebraickom tvare.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + j b_1) + (a_2 + j b_2) = (a_1 + a_2) + j (b_1 + b_2)$$

Operáciu násobenia je najjednoduchšie vykonať, keď sú komplexné čísla v goniometrickom, alebo exponenciálnom tvare.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot (\cos(\alpha_1) + j \sin(\alpha_1)) \cdot |z_2| \cdot (\cos(\alpha_2) + j \sin(\alpha_2)) =$$

$$= |z_1||z_2| \cdot (\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + j \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + j \cos(\alpha_1)\sin(\alpha_2) +$$

$$+ j \sin(\alpha_1)j \sin(\alpha_2)) = |z_1||z_2| \cdot (\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2)) +$$

$$+ j (\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_1)\sin(\alpha_2)) = |z_1||z_2| \cdot (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + j \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$
 respektíve

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot e^{j\alpha_1} \cdot |z_2| \cdot e^{j\alpha_2} = |z_1| \cdot |z_2| e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Komplexne združené číslo k číslu $z = a + j b = |z| \cdot e^{j\alpha}$ nazveme číslo

$$\bar{z} = a - j b = |z| \cdot e^{-j\alpha}$$

Definujeme skalárny súčin vektorov, ktorých hodnoty môžu byť aj komplexné čísla. Urobíme to tak, aby zúženie tejto definície na reálne vektory bolo skalárnym súčinom podľa definície v odseku ??.

Skalárny súčin je zobrazenie: $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow F$, pre ktoré:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{f}, \mathbf{f}) &\geq 0, \text{ naviac } (\mathbf{f}, \mathbf{f}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f} = 0 && \text{pozitívnosť} \\
 (\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= \overline{(\mathbf{g}, \mathbf{f})} && \text{symetria} \\
 (\mathbf{g} + \mathbf{h}, \mathbf{f}) &= (\mathbf{g}, \mathbf{f}) + (\mathbf{h}, \mathbf{f}) && \\
 (k\mathbf{f}, \mathbf{g}) &= k \cdot (\mathbf{f}, \mathbf{g}) && \text{bilinearita}
 \end{aligned}$$

Predchádzajúca definícia dáva viacero možností ako definovať skalárny súčin v konkrétnom vektorovom priestore. My budeme pracovať s vektorovým priestorom, ktorého prvkami budú usporiadané N -tice komplexných čísel a skalárny súčin pre ľubovoľné dva komplexné vektory \mathbf{f}, \mathbf{g} bude:

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}), \quad \mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1}) \quad \text{kde } f_i, g_i \in \mathbb{C}$$

Potom skalárny súčin \mathbf{f} a \mathbf{g} je

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \overline{g_k}, \quad \text{kde } \overline{g_k} \text{ je číslo komplexne združené ku } g_k$$

Úloha 1.1.4 Dokážte, že takto definovaný súčin, je naozaj skalárny súčin. Teda sú splnené vlastnosti uvedené v definícii skalárneho súčinu.

Úloha 1.1.5 Vynásobte dve komplexné čísla v algebraickom tvare.

Úloha 1.1.6 Sčítajte dve komplexné čísla v goniometrickom, resp. exponenciálnom tvare.

Úloha 1.1.7 Zvoľte si dve komplexné čísla v a w . Do Gaussovej roviny zakreslite súčet aj súčin týchto komplexných čísel.

1.2 Harmonická báza

Na analýzu periodických vlastností v procese budeme používať harmonickú bázu, ktorá bude reprezentovať postupne periódou dĺžky N , $N/2$, $N/3$ až po najkratšiu periódou dĺžky $N/(N-1)$. Všeobecný tvar n -tého vektora **harmonickéj bázy** \mathcal{H}_N v N -rozmernom vektorovom priestore je

$$\mathbf{h}_n = \left(\dots, e^{j \frac{2\pi}{N} n \cdot k}, \dots \right) \quad \text{kde } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.2.1)$$

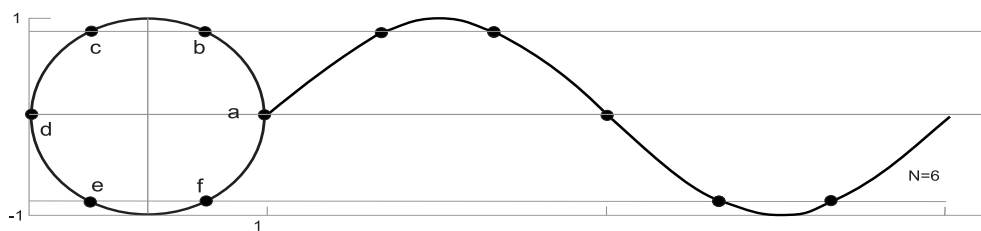
Jednotlivé vektory N -prvkovej harmonickej bázy majú tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 &= (1, 1, \dots, 1) \\ \mathbf{h}_1 &= \left(1, e^{j\frac{2\pi}{N}}, e^{j\frac{2\pi}{N}2}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{N}k}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)}\right) \\ \mathbf{h}_2 &= \left(1, e^{j\frac{2\pi}{N}2}, e^{j\frac{2\pi}{N}2\cdot2}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{N}2\cdot k}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{N}2\cdot(N-1)}\right) \\ &\vdots \\ \mathbf{h}_n &= \left(1, e^{j\frac{2\pi}{N}n}, e^{j\frac{2\pi}{N}n\cdot2}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{N}n\cdot k}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{N}n\cdot(N-1)}\right) \\ &\vdots \\ \mathbf{h}_{N-1} &= \left(1, e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)}, e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)\cdot2}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)\cdot k}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)\cdot(N-1)}\right) \end{aligned}$$

Príklad 1.2.1 Nakreslite hodnoty vektorov harmonickej bázy \mathcal{H}_6 do komplexnej roviny a potom nakreslite imaginárnu zložku každého báзовého vektora ako sínusový priebeh.

Riešenie:

Na obrázku ?? sú na jednotkovej kružnici nakreslené jednotlivé hodnoty a, b, c, d, e, f , ktoré sú zložkami vektorov harmonickej bázy \mathcal{H}_6 . Ak vykreslíme proces, ktorého hodnoty budú iba imaginárne zložky báзовých vektorov, dostaneme sínusové priebehy. Na obrázku ?? je vykreslený sínusový priebeh zodpovedajúci vektoru \mathbf{h}_1 . Pre hodnoty a, b, c, d, e, f platí, že $b = \bar{f}$ a $c = \bar{e}$.



Obrázok 1.9: Komplexné čísla a, b, c, d, e, f sú zložky vektora harmonickej bázy \mathcal{H}_6

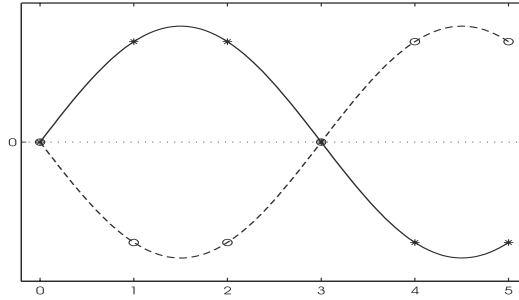
Navyše uhol α_c zodpovedajúci komplexnému číslu c je dvojnásobný v porovnaní s uhlom α_b , ktorý zodpovedá komplexnému číslu b .

Harmonické báзовé vektory 6-rozmerného vektorového priestoru majú teda tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ \mathbf{h}_1 &= (1, b, c, -1, \bar{c}, \bar{b}) \\ \mathbf{h}_2 &= (1, c, \bar{c}, 1, c, \bar{c}) \\ \mathbf{h}_3 &= (1, -1, 1, -1, 1, -1) \\ \mathbf{h}_4 &= (1, \bar{c}, c, 1, \bar{c}, c) \\ \mathbf{h}_5 &= (1, \bar{b}, \bar{c}, -1, c, b) \end{aligned}$$

Vektory \mathbf{h}_1 a \mathbf{h}_5 sú komplexne združené. Rovnako sú komplexne združené vektory \mathbf{h}_2 a \mathbf{h}_4 . Priebehy, ktoré zodpovedajú komplexne združeným vektorom \mathbf{h}_1 a \mathbf{h}_5 sú na obrázku ??.

□



Obrázok 1.10: Kosínusové priebehy, zodpovedajúce komplexne združeným báзовým vektorom \mathbf{h}_1 a \mathbf{h}_5 bázy \mathcal{H}_6

Ako vidno na obrázku ?? priebehy, ktoré zodpovedajú komplexne združeným vektorom môžu byť interpretované ako priebehy s rôzne dlhými periódami, ale aj ako priebehy s rovnakou periódou a fázovým posunom o hodnotu π .

Tvrdenie 1.2.1 *Pre vektory harmonickej bázy \mathcal{H}_N platí, že*

$$\mathbf{h}_n = \overline{\mathbf{h}_{N-n}} \quad (1.2.2)$$

Dôkaz:

Vyjadíme k -tu zložku vektora \mathbf{h}_n :

$$\mathbf{h}_n(k) = e^{j \frac{2\pi}{N} n \cdot k}$$

Vyjadíme k -tu zložku vektora \mathbf{h}_{N-n} :

$$\mathbf{h}_{N-n}(k) = e^{j \frac{2\pi}{N} (N-n) \cdot k} = e^{j \frac{2\pi}{N} N \cdot k} \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} (-n) \cdot k} = \underbrace{e^{j 2\pi \cdot k}}_{=1+j \ 0} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} n \cdot k} = \overline{\mathbf{h}_n(k)}$$

Teda naozaj platí vzťah ??.

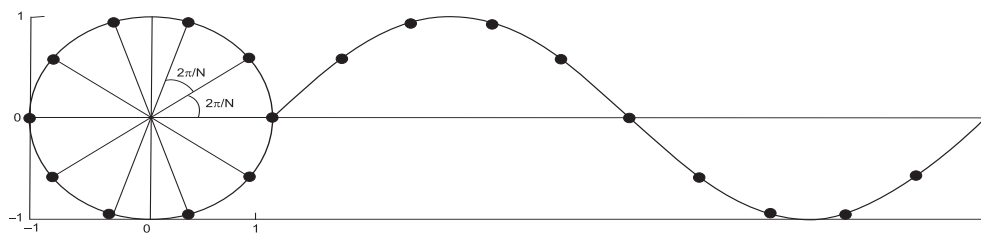
□

Príklad 1.2.2 *Aký priebeh má proces, ktorého hodnoty sú imaginárne zložky vektora harmonickej bázy?*

Vykreslite hodnoty tohoto procesu v časoch $\mathbf{t} = (0, 1, \dots, N-1)$.

Riešenie:

Harmonická báza \mathcal{H}_N reprezentuje N -zložkové procesy s rôzne veľkými periódami. Harmonická báza N -rozmerného vektorového priestoru má N prvkov. Každý z básových vektorov možno interpretovať ako niekoľko obehov po jednotkovej kružnici, respektíve bude reprezentovať niekoľko periód funkcie kosínus, ktoré môžeme vykresliť v závislosti od času v intervale $\langle 0, N-1 \rangle$. Jednotlivé zložky básových vektorov sú komplexné čísla, ktoré ležia na jednotkovej kružnici a dve susedné spomedzi týchto komplexných čísel sa líšia o uhol $\frac{2\pi}{N}$ ako vidno na obrázku ??, kde je vykreslený kosínusový priebeh zodpovedajúci vektoru \mathbf{h}_1 harmonickej bázy \mathcal{H}_N . Vektor \mathbf{h}_0 predstavuje konštantnú zložku, respektíve priamku rovnobežnú s osou x .

Obrázok 1.11: Zložky vektora \mathbf{h}_1 harmonickej bázy \mathcal{H}_N

Vektor \mathbf{h}_1 predstavuje jeden obeh po jednotkovej kružnici, respektíve jednu celú periódu funkcie kosínus v intervale $\langle 0, N - 1 \rangle$.

Vektor \mathbf{h}_2 predstavuje dva obehy po jednotkovej kružnici, respektíve dve periódy funkcie kosínus v intervale $\langle 0, N - 1 \rangle$. Pritom „rýchlosť“, akou obehne jednotkovú kružnicu, bude dvojnásobná oproti „rýchlosti“ obehu v prípade vektora \mathbf{h}_1 .

Vektor \mathbf{h}_n predstavuje n obehov po jednotkovej kružnici, respektíve n periód funkcie kosínus v intervale $\langle 0, N - 1 \rangle$. \square

Okrem dĺžky periódy môže byť periodické chovanie procesu popísané frekvenciou.

Frekvencia je počet obehov (periód), ktoré sa vykonajú za jednotku času, v našom prípade počas celého priebehu procesu. Základnou frekvenciou pre harmonickú bázu je jeden obeh za N časových intervalov, teda

$$\Delta f = \frac{1}{N}$$

Jednotky, v ktorých sa meria frekvencia, môžu byť napr. $[s^{-1}]$, $[rok^{-1}]$. Frekvenciou pre n -tý bazový vektor \mathbf{h}_n je frekvencia

$$f_n = n \Delta f = \frac{n}{N}$$

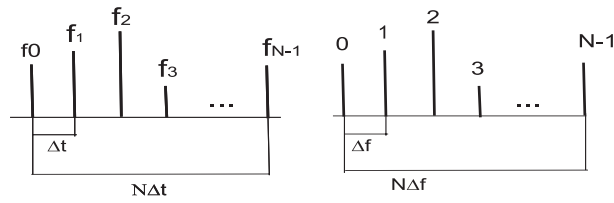
a znamená to, že n -tý bazový vektor reprezentuje n periód počas celého svojho priebehu.

Na obrázku ?? je zobrazená súvislosť medzi časovými intervalmi Δt medzi jednotlivými hodnotami procesu a intervalmi Δf medzi frekvenciami procesu.

$$\Delta f = \frac{1}{N \Delta t}$$

Vektory harmonickej bázy reprezentujú rôzne dlhé periódy, resp. frekvencie zastúpené v procese. Pre $n = 1$ je to jedna perióda (jeden obeh), pre $n = 2$ sú to 2 periódy (obehy), ale pre $n = N - 1$ je to jedna perióda, pre $n = N - 2$ sú to dve periódy ako to vidno na obrázku ??.

Tvrdenie 1.2.2 Najvyššia frekvencia (resp. najkratšia) perióda zastúpená v harmonickej báze N -rozmerného priestoru je perióda vektora \mathbf{h}_n , kde $n = \frac{N}{2}$ (resp. celá časť $\frac{N}{2}$ ak je N nepárne).



Obrázok 1.12: Súvislosť medzi časovým priebehom procesu $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ a frekvenciami

Tvrdenie ?? je možné formulovať aj opačne. Ak chceme dobre popísať diskretný proces, treba interval Δt v ktorom meriame hodnoty procesu (vzorkovací interval) zvoliť tak, aby jeho prevrátená hodnota bola aspoň dvojnásobkom maximálnej frekvencie procesu. Teda aby platil vzťah:

$$\frac{1}{\Delta t} \geq 2 \cdot f_{Max}$$

Toto tvrdenie sa nazýva aj Shanon Koteľnikova veta. □

Úloha 1.2.1 Nájdite na internete, alebo v literatúre presné znenie Shanon Koteľnikovej vety a vysvetlite ho.

Na začiatku tejto kapitoly sme zaviedli pojem harmonická báza, ale zatiaľ sme nedokázali, že sa skutočne jedná o bázu. Na to, aby množina N vektorov tvorila bázu N -rozmerného vektorového priestoru, musia byť tieto vektory lineárne nezávislé.

Tvrdenie 1.2.3 Harmonické procesy (vektory) definované vzťahom ?? tvoria ortogonálnu bázu nejakého N -rozmerného vektorového priestoru. Norma každého z vektorov \mathbf{h}_n je rovná N .

Dôkaz:

Najprv dokážeme, že vektory harmonickej bázy \mathbf{h}_n , kde $n = 0, 1, \dots, N-1$ sú na seba kolmé a potom, že kolmé vektory sú lineárne nezávislé.

Počítajme skalárny súčin vektorov \mathbf{h}_n a \mathbf{h}_m :

$$(\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_m) = \begin{cases} 0 & \text{ak je } n \neq m \\ N & \text{ak je } n = m \end{cases}$$

$$n = m$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_m) &= (\mathbf{h}_m, \mathbf{h}_m) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \cdot \overline{b_k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} n \cdot k} \cdot \overline{e^{j \frac{2\pi}{N} n \cdot k}} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} n \cdot k} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} n \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N \end{aligned}$$

$$n \neq m$$

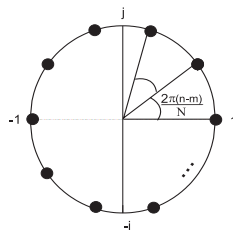
$$(\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_m) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} n \cdot k} \cdot \overline{e^{j \frac{2\pi}{N} m \cdot k}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (n-m) \cdot k}, \quad \text{kde } n - m \neq 0$$

Označme

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} (n-m) \cdot k} \quad \text{pre } n - m \neq 0 \quad (1.2.3)$$

Potrebuje ukázať, že $S = 0$.

Komplexné čísla $e^{j \frac{2\pi}{N} (n-m) \cdot k}$, pre $k = 0, 1, \dots, N-1$ ležia na jednotkovej kružnici ako vidíme na obrázku ??.



Obrázok 1.13: Komplexné čísla $e^{j \frac{2\pi}{N} (n-m) \cdot k}$, pre $k = 0, 1, \dots, N-1$

Keď vynásobíme rovnicu ?? číslom $e^{j \frac{2\pi}{N} (n-m)} \neq 0$, dostaneme komplexné čísla, ktorých umiestnenie je na jednotkovej kružnici, len každé číslo je posunuté o uhol $\frac{2\pi}{N} (n-m)$ oproti svojej predchádzajúcej pozícii, preto je na mieste iného čísla (po kružnici vľavo). Umiestnenie čísel je teda rovnaké ako na obrázku ??, preto platí

$$S \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} (n-m)} = S$$

Pretože sme násobili nenulovým číslom, musí byť $S = 0$, aby posledná rovnosť platila.

Teda naozaj pre $n \neq m$ je $(\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_m) = 0$ a platí, že vektory $\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_m$ sú na seba kolmé. Podľa nasledujúcej lemy sú aj lineárne nezávislé.

Lema 1.2.1 Ak sú dva vektory na seba kolmé, potom sú lineárne nezávislé.

Dôkaz:

Predpokladáme

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = 0$$

hľadáme riešenie rovnice

$$c_1 \cdot \mathbf{f} + c_2 \cdot \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

celú rovnicu vynásobíme skalárne vektorom \mathbf{f} . Dostaneme

$$(c_1 \cdot \mathbf{f} + c_2 \cdot \mathbf{g}, \mathbf{f}) = (\mathbf{0}, \mathbf{f})$$

po úpravách

$$c_1(\mathbf{f}, \mathbf{f}) + c_2(\mathbf{g}, \mathbf{f}) = 0$$

$$c_1(\mathbf{f}, \mathbf{f}) + 0 = 0$$

posledná rovnosť nastane, len keď $c_1 = 0$. Podobne

$$(c_1 \cdot \mathbf{f} + c_2 \cdot \mathbf{g}, \mathbf{g}) = (\mathbf{0}, \mathbf{g})$$

$$c_1(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + c_2(\mathbf{g}, \mathbf{g}) = 0$$

$$0 + c_2(\mathbf{g}, \mathbf{g}) = 0$$

a zase rovnosť nastane, len keď $c_2 = 0$.

Teda riešenie rovnice

$$c_1 \cdot \mathbf{f} + c_2 \cdot \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

je jediné a to $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, čo je vlastne podmienka nezávislosti, ktorú sme mali dokázať. \square

Ukázali sme, že harmonická báza má niekoľko užitočných vlastností.

- $\mathbf{h}_n \perp \mathbf{h}_m$ pre $n \neq m$
- $(\mathbf{h}_m, \mathbf{h}_m) = N$
- $\mathbf{h}_n = \overline{\mathbf{h}_{N-n}}$

1.3 Diskrétna Fourierova transformácia

Nech je daný proces

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$$

Tento proces je vyjadrený v jednotkovej báze N -rozmerného vektorového priestoru. Hodnoty procesu v jednotkovej báze \mathcal{E} sú namerané hodnoty procesu.

Vyjadriť teraz tento proces v tom istom N -rozmernom vektorovom priestore, ktorého báza bude určená harmonickými vektormi tvaru

$$\mathbf{h}_n = \left(\dots, e^{j \frac{2\pi}{N} n \cdot k}, \dots \right) \quad \text{kde } n = 0, 1, \dots, N-1$$

Z priebehu procesu môžeme pomocou rozkladu do harmonickej bázy určiť, ktoré z periód v harmonickej báze sú v danom procese zastúpené výraznejšie, teda ktoré majú v rozklade do harmonickej bázy väčšie koeficienty. Hovoríme, že pomocou harmonickej bázy môžeme analyzovať periodické chovanie sa procesu.

Príklad 1.3.1 *Nájdite na internete príklady konkrétnych procesov, ktoré majú výraznú niektorú periódu.*

Riešenie:

Príkladom je záznam predaja Coca-coly má periódu približne 1 rok, výskyt slnečných škvrn, ktorý má periódu cca 13 rokov, ekonomické procesy, ktoré majú periody rok, mesiac, deň, (sezónne trendy), procesy popisujúce priebeh niektorých samohlások v ľudskej reči majú periódu cca 5 milisekúnd. \square

Harmonická báza je bázou N -rozmerného vektorového priestoru, preto riešime úlohu zmeny bázy (jednotkovej, \mathbf{f} je časový priebeh procesu) v tom istom N -rozmernom priestore. Koeficienty procesu \mathbf{f} v ortogonálnej harmonickej báze vypočítame pomocou vzorca pre výpočet koeficientov v ortogonálnej báze, tak ako sme ich odvodili v kapitole o lineárnej regresii.

$$c_n = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{h}_n)}{(\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j \frac{2\pi}{N} n \cdot k} \quad (1.3.1)$$

Vyjadrenie procesu pomocou týchto koeficientov je

$$\mathbf{f} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \mathbf{h}_n \quad \text{t.j.} \quad f_k = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} n \cdot k} \quad (1.3.2)$$

Vzťah ?? nazývame **diskrétna Fourierova transformácia**.

Vzťah ?? nazývame **spätná diskrétna Fourierova transformácia**.

$$\mathbf{f} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})_{\mathcal{H}}$$

Vektor koeficientov \mathbf{c} sa nazýva spektrum procesu v harmonickej báze, často aj len **spektrum** procesu.

$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$$

Vektor absolútnych hodnôt $\mathbf{ca} = (c_0, |c_1|, \dots, |c_{N-1}|)$ spektra procesu nazývame **amplitúdové spektrum** procesu.

Vektor $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$ uhlov α_k spektra procesu, kde $c_k = |c_k| e^{j \alpha_k}$ nazývame **fázové spektrum** procesu.

Poznámka:

Koeficient c_0 má vždy reálnu hodnotu. V amplitúdovom spektre môže ako jediný nadobudnúť aj zápornú hodnotu. Zodpovedajúci uhol fázového spektra α_0 má hodnotu 0. Koeficient c_0 je koeficient bazového vektora $\mathbf{h}_0 = \left(\dots, e^{j \frac{2\pi}{N} 0 \cdot k}, \dots \right) = (1, 1, \dots, 1)$. Príslušný výpočet je

$$c_0 = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{h}_0)}{(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_0)} = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} f_k}{\sum_{k=1}^{N-1} 1} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} f_k$$

Posledný vzťah je aritmetický priemer hodnôt procesu \mathbf{f} , preto je koeficient c_0 nazývaný **stredná hodnota procesu**.

Úloha 1.3.1 Ak by sme v amplitúdovom spektre požadovali kladnú hodnotu záporného koeficientu c_0 , zmenila by sa jeho fáza α_0 . Akú hodnotu by mala táto fáza?

Tvrdenie 1.3.1 Pre spektrálne koeficienty procesu podobne ako pre vektory harmonickej bázy platí, že

$$c_n = \overline{c_{N-n}}$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{h}_n \rangle}{\langle \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j \frac{2\pi}{N} n k} \\ c_{N-n} &= \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{h}_{N-n} \rangle}{\langle \mathbf{h}_{N-n}, \mathbf{h}_{N-n} \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j \frac{2\pi}{N} (N-n) k} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j \frac{2\pi}{N} N k} e^{-j \frac{2\pi}{N} (-n) k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{j \frac{2\pi}{N} n k} = \overline{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j \frac{2\pi}{N} n k}} \end{aligned}$$

□

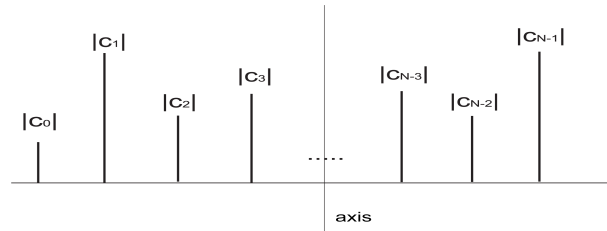
Tvrdenie 1.3.2 *Pre amplitúdové spektrum procesu platí $|c_n| = |c_{N-n}|$.*

Dôkaz:

Podľa tvrdenia ?? platí $c_n = \overline{c_{N-n}}$.

$$|c_n| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{c_n\})^2 + (\operatorname{Im}\{c_n\})^2} = \sqrt{(\operatorname{Re}\{c_n\})^2 + (-\operatorname{Im}\{c_n\})^2} = |\overline{c_n}|$$

Amplitúdové spektrum je symetrické (podľa osi) tak, ako to vidno na obrázku ??.



Obrázok 1.14: Amplitúdové spektrum je symetrické (okrem hodnoty c_0)

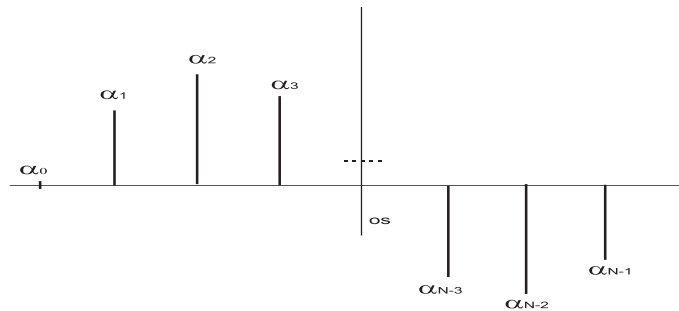
Tvrdenie 1.3.3 *Pre fázové spektrum procesu platí $\alpha_n = -\alpha_{N-n}$*

Dôkaz:

Podľa tvrdenia ?? platí $c_n = \overline{c_{N-n}}$. Odtiaľ už priamo vyplýva

$$\alpha_n = -\alpha_{N-n}$$

Fázové spektrum je symetrické (podľa stredu) tak, ako to vidno na obrázku ??.



Obrázok 1.15: Fázové spektrum je symetrické (okrem hodnoty α_0)

Pomocou spektrálnych koeficientov je možné vypočítať veľkosť procesu tak, ako to uvádza nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 1.3.4 (Veľkosť procesu) *Je daný proces \mathbf{f} s nameranými hodnotami $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, nech jeho spektrum v harmonickej báze je $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$. Potom platí*

$$\|\mathbf{f}\|^2 = N \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2$$

Dôkaz:

Dosaďme za \mathbf{f} jeho rozklad do harmonickej bázy.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f}) &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} c_n \mathbf{h}_n, \sum_{m=0}^{N-1} c_m \mathbf{h}_m \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} c_n \cdot \overline{c_m} \underbrace{(\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_m)}_{=0 \text{ (pre } n \neq m)} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 (\mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n) = N \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 \end{aligned}$$

□

Vlastnosti z tvrdení ??, ?? a ?? znamenajú, že na presné určenie spektra procesu (= koeficientov procesu v harmonickej báze) stačí vypočítať polovicu koeficientov. Ostatné je možné určiť, pretože sú komplexne združené k už vypočítaným koeficientom. V každom z koeficientov sú však uložené dve informácie o báзовom vektore. Jeho amplitúda a posun. V nasledujúcej kapitole uvedieme, ako analyzovať proces pomocou jeho koeficientov v harmonickej báze.

1.4 Priemet do podpriestoru určeného DFT

Úlohy, ktoré môžeme riešiť pomocou harmonickej bázy procesu sú napríklad

- odhaľovanie periodických vlastností procesu (periodických trendov)
- filtrácia procesu

Úloha 1.4.1 *Spomedzi všetkých M -rozmerných vektorových podpriestorov, generovaných vektormi harmonickej bázy, N -rozmerného vektorového priestoru, nájdite taký v ktorom bude proces \mathbf{f} najlepšie aproximovaný.*

Označme \mathcal{H}_N harmonicú bázu N -rozmerného vektorového priestoru a \mathcal{H}_M jej M -prvkovú podmnožinu.

$$\mathcal{H}_M \subset \mathcal{H}_N$$

Proces \mathbf{f} môžeme presne vyjadriť v báze \mathcal{H}_N a v báze \mathcal{E} :

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})_{\mathcal{E}} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})_{\mathcal{H}_N}$$

Priemet procesu \mathbf{f} do podpriestoru generovaného bázou \mathcal{H}_M označíme $\tilde{\mathbf{f}}$:

$$\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})_{\mathcal{H}_N}$$

pričom M hodnôt spomedzi \tilde{c}_k bude rovných pôvodným koeficientom c_k a $N-M$ koeficientov \tilde{c}_k bude rovných nule. Nule budú rovné tie koeficienty, pre ktoré

bude vzdialenosť $d(\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}})$ minimálna. Chceme, aby $\|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\| \rightarrow \min$.
To nastane vtedy, keď

$$\|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\|^2 \rightarrow \min$$

Pre priemet $\tilde{\mathbf{f}}$ platí

$$(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}) \perp \tilde{\mathbf{f}}$$

Podľa Pytagorovej vety

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|^2 &= \|\tilde{\mathbf{f}}\|^2 + \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\|^2 \\ \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\|^2 &= \|\mathbf{f}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{f}}\|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f}) - (\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{f}}) = \\ &= N \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 - N \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{c}_n|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} (|c_n|^2 - |\tilde{c}_n|^2) \rightarrow \min \end{aligned}$$

Hodnota $N \sum_{n=0}^{N-1} (|c_n|^2 - |\tilde{c}_n|^2)$ bude minimálna ak do bázy vyberieme tie bázo-
vé funkcie \mathbf{h}_n , pre ktoré sú absolútne hodnoty koeficientov $|\tilde{c}_n|$ čo najväčšie.
Hodnota normy rozdielu $\|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\|^2$ bude potom najmenšia, spomedzi všetkých
priemetov do podpriestorov pozostávajúcich z rovnakého počtu vektorov har-
monickej bázy.

Vektory harmonickej bázy majú komplexné hodnoty, rovnako koeficienty
sú komplexné čísla. Vo všeobecnosti môže byť ich lineárna kombinácia vektor
s hodnotami, ktoré nie sú reálne čísla. Ukážeme, že môžeme vybrať vektory z
harmonickej bázy a im zodpovedajúce koeficienty tak, aby ich lineárna kombiná-
cia bol reálny vektor. Ukázali sme už, že pre vektory a koeficienty harmonickej
bázy platí

$$\mathbf{h}_n = \overline{\mathbf{h}_{N-n}} \quad \text{a} \quad c_n = \overline{c_{N-n}}$$

Tvrdenie 1.4.1 Súčet $c_n \mathbf{h}_n + c_{N-n} \mathbf{h}_{N-n}$ je reálny a navyše platí

$$c_n \mathbf{h}_n + c_{N-n} \mathbf{h}_{N-n} = 2\operatorname{Im}\{c_n\} \cos\left(\frac{2\pi}{N} n t\right) - 2\operatorname{Re}\{c_n\} \sin\left(\frac{2\pi}{N} n t\right) \quad (1.4.1)$$

Dôkaz:

Vypočítajme k -tu zložku vektora $c_n \mathbf{h}_n + c_{N-n} \mathbf{h}_{N-n}$:

$$\begin{aligned} (c_n \mathbf{h}_n + c_{N-n} \mathbf{h}_{N-n})_k &= (c_n \mathbf{h}_n + \overline{c_n} \overline{\mathbf{h}_n})_k = \\ &= (\operatorname{Re}\{c_n\} + j \operatorname{Im}\{c_n\}) \cdot e^{j \frac{2\pi}{N} n \cdot k} + (\operatorname{Re}\{c_n\} - j \operatorname{Im}\{c_n\}) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} n \cdot k} = \\ &= (\operatorname{Re}\{c_n\} + j \operatorname{Im}\{c_n\}) \cdot (\cos(\frac{2\pi}{N} n \cdot k) + j \sin(\frac{2\pi}{N} n \cdot k)) + \\ &+ (\operatorname{Re}\{c_n\} - j \operatorname{Im}\{c_n\}) \cdot (\cos(-\frac{2\pi}{N} n \cdot k) + j \sin(-\frac{2\pi}{N} n \cdot k)) = \\ &= 2\operatorname{Re}\{c_n\} \cos(\frac{2\pi}{N} n \cdot k) - 2\operatorname{Im}\{c_n\} \sin(\frac{2\pi}{N} n \cdot k) \end{aligned}$$

Odvedená rovnosť je vlastne k -ta zložka vzťahu ??.

□

Poznámka:

Riešili sme úlohu nájsť priemet procesu do podpriestoru \mathcal{H}_M , ktorý obsahuje
vopred daný počet vektorov M . V skutočnosti sa to dá iba v prípade, že M
je také číslo (podľa potreby párne, alebo nepárne), že sa do bázy dá spolu s
vektorom \mathbf{h}_n zobrať aj vektor \mathbf{h}_{N-n} , ktorý je s ním komplexne združený. Iba
vtedy dostaneme ako súčet reálny vektor.

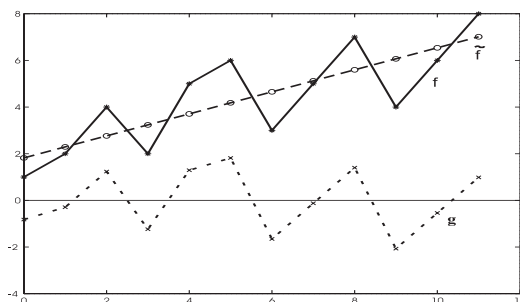
Úloha 1.4.2 V N -rozmernom priestore, kde $N = 8$ chceme urobiť priemet do M -rozmerného podpriestoru generovaného vektormi harmonickej bázy. Určíte, aké hodnoty môže mať číslo M .

Príklad 1.4.1 Hodnoty procesu \mathbf{f} v časoch $\mathbf{t} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$ sú $\mathbf{f} = (1, 2, 4, 2, 5, 6, 3, 5, 7, 4, 6, 8)$. Analyzujte tento proces pomocou Fourierovej transformácie a nájdite dominantnú periódu tohoto procesu.

Z procesu odstránime lineárnu časovú závislosť reprezentovanú funkciou

$$\varphi(t_k) = c_0 + c_1 \cdot t_k$$

ako priemet 12-rozmerného vektora \mathbf{f} do dvojrozmerného vektorového priestoru generovaného bázou $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1\}$, kde $\mathbf{b}_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ a $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$.



Obrázok 1.16: Pôvodný proces \mathbf{f} , jeho priemet do dvojrozmerného podpriestoru $\tilde{\mathbf{f}}$, proces \mathbf{g} je proces \mathbf{f} po odstránení lineárneho trendu

Proces, ktorý ostal po odčítaní lineárneho trendu je na obrázku ???. Má hodnoty

$$\mathbf{g} = (-0.82, -0.29, 1.23, -1.23, 1.29, 1.82, -1.65, -0.12, 1.40, -2.07, -0.54, 0.99)$$

Spektrum procesu \mathbf{g} v harmonickej báze je

$$\mathbf{c} = (0, -0.09 - 0.22j, 0.03 + 0.1j, 0.24 + 0.01j, -0.72 + 0.37j, 0.06 + 0.02j, 0.15, 0.06 - 0.02j, -0.72 - 0.37j, 0.24 - 0.01j, 0.03 - 0.1j, -0.09 + 0.22j).$$

Amplitúdové spektrum procesu \mathbf{g} je

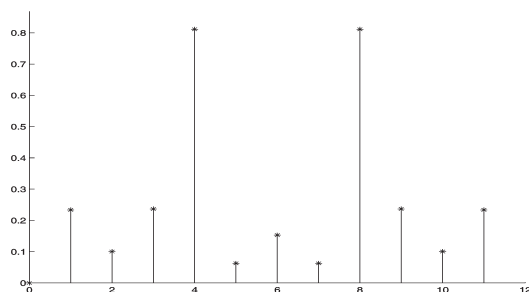
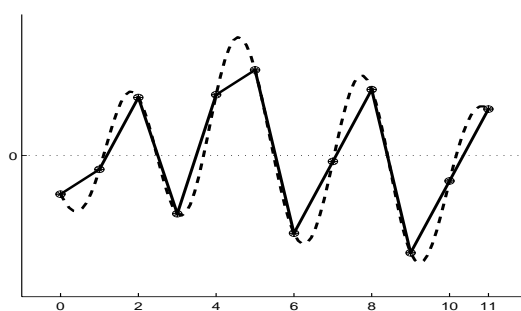
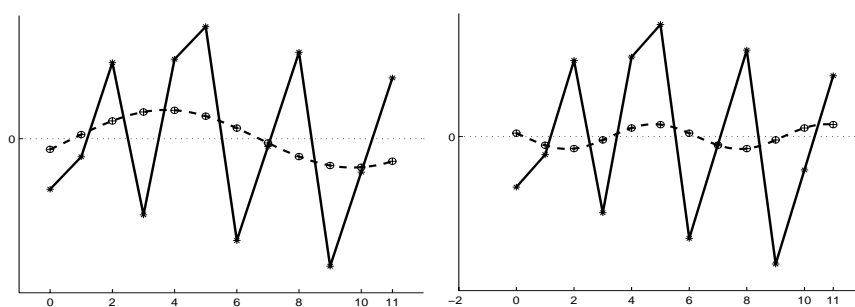
$$|\mathbf{c}| = (0, 0.23, 0.1, 0.24, 0.81, 0.06, 0.15, 0.06, 0.81, 0.24, 0.1, 0.23).$$

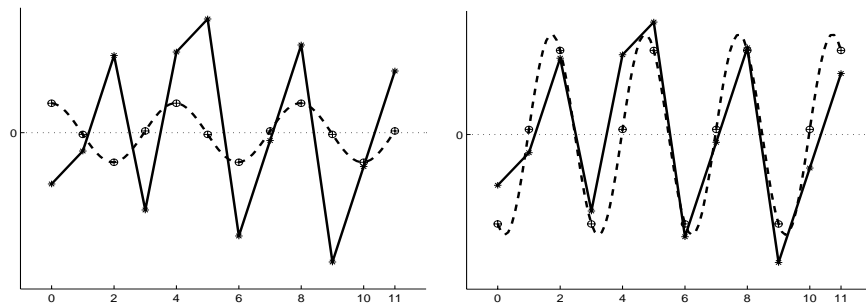
Ak proces \mathbf{g} vyjadríme v harmonickej báze, dostaneme presne hodnoty procesu:

$$\mathbf{g} = c_0 \mathbf{h}_0 + c_1 \mathbf{h}_1 + c_2 \mathbf{h}_2 + c_3 \mathbf{h}_3 + c_4 \mathbf{h}_4 + c_5 \mathbf{h}_5 + c_6 \mathbf{h}_6 + \dots + c_{10} \mathbf{h}_{10} + c_{11} \mathbf{h}_{11}$$

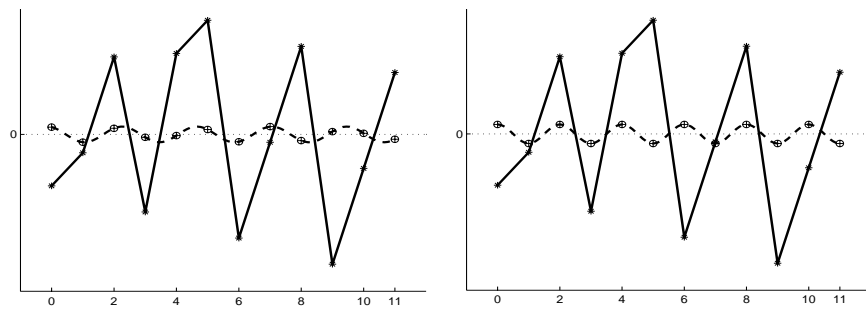
Ak proces \mathbf{g} odhadneme pomocou priemetu do dvojrozmerného podpriestoru, dostávame postupne aproximácie:

Vidíme, že spomedzi jedno až dvojrozmerných vektorových priestorov je proces \mathbf{g} najlepšie aproximovaný v priestore generovanom bázou $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{h}_4, \mathbf{h}_8\}$. Perióda, ktorú majú báзовé funkcie $\mathbf{h}_4, \mathbf{h}_8$ je teda dominantnou periódou procesu \mathbf{g} .

Obrázok 1.17: Amplitúdové spektrum procesu g Obrázok 1.18: Hodnoty procesu g a lineárna kombinácia všetkých vektorov harmonickej bázy, vykreslená je ako spojitá funkcia časuObrázok 1.19: Hodnoty procesu g a lineárna kombinácia vektorov h_1, h_{11} (chyba 4.21); lineárna kombinácia vektorov h_2, h_{10} (chyba 4.34)



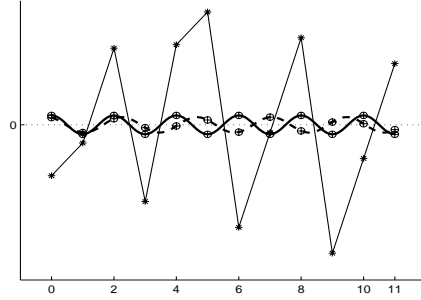
Obrázok 1.20: Hodnoty procesu \mathbf{g} a lineárna kombinácia vektorov $\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_9$ (chyba 4.21) a lineárna kombinácia vektorov $\mathbf{h}_4, \mathbf{h}_8$ (chyba 1.81)



Obrázok 1.21: Hodnoty procesu \mathbf{g} a lineárna kombinácia vektorov $\mathbf{h}_5, \mathbf{h}_7$ (chyba 4.35); násobok vektora \mathbf{h}_6 (chyba 4.33)

Dominantná perióda zodpovedá dominantnej frekvencii $\frac{4}{N}$ s uhlom $\omega = \frac{2\pi}{N}4 = \frac{2\pi}{12}4 = \frac{2\pi}{3}$. Dĺžka periódy je potom $\frac{2\pi}{\omega}$, čo zodpovedá $\frac{N}{4} = 3$ hodnotám procesu \mathbf{g} .

Porovnajme ešte súčet $c_5\mathbf{h}_5 + c_7\mathbf{h}_7$ so súčinom $c_6\mathbf{h}_6$. Na obrázku ?? vidíme, že hoci $|c_5| = 0.1527$ je viac ako dvojnásobok hodnoty $|c_6| = 0.0626$, ich príspevky majú takmer rovnakú amplitúdu.



Obrázok 1.22: Hodnoty procesu \mathbf{g} , lineárna kombinácia vektorov b_5, b_7 a násobok vektora b_6

Pri hľadaní najväčšej z hodnôt amplitúdového spektra budeme s ostatnými hodnotami amplitúdového spektra porovnávať polovičnú hodnotu $|c_{\frac{N}{2}}|$, teda budeme hľadať najväčšiu spomedzi hodnôt

$$|c_0|, |c_1|, \dots, |c_{\frac{N}{2}-1}|, \frac{1}{2}|c_{\frac{N}{2}}|, |c_{\frac{N}{2}+1}|, \dots, |c_{N-1}|$$

□

Tvrdenie 1.4.2 Proces $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ so spektrom $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov harmonickej bázy \mathcal{H}_N .

$$\mathbf{f} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \mathbf{h}_n \quad (1.4.2)$$

Modelom tohoto rozkladu je funkcia, ktorá je lineárnou kombináciou funkcií sínus a kosínus. Hodnota $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ je dolná celá časť podielu $\frac{N}{2}$ a časy $t_k = k$.

$$\varphi(k) = c_0 + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left(2 \operatorname{Re}\{c_n\} \cos\left(\frac{2\pi n}{N} k\right) - 2 \operatorname{Im}\{c_n\} \sin\left(\frac{2\pi n}{N} k\right) \right) \quad (1.4.3)$$

Funkcia $\varphi(k)$ sa dá vyjadriť aj ako lineárna kombinácia funkcií kosínus, posunutých o fázu určenú fázovým spektrom.

$$\varphi(k) = c_0 + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} 2|c_n| \cos\left(\frac{2\pi n}{N} k + \alpha_n\right) \quad (1.4.4)$$

Dôkaz:

Vzťah ?? je vlastne spätná Fourierova transformácia.

Vzťah ?? vznikne dosadením rovnosti ?? $f_k = \varphi(k)$ do vzťahu ??.

Úpravou vzťahu ?? dostaneme vzťah ??.

$$\begin{aligned}
 \varphi(k) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left(2 \operatorname{Re}\{c_n\} \cos\left(\frac{2\pi n}{N} k\right) - 2 \operatorname{Im}\{c_n\} \sin\left(\frac{2\pi n}{N} k\right) \right) = \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \left(2 \operatorname{Re}\{c_n\} \frac{|c_n|}{\operatorname{Re}\{c_n\}} \frac{\overbrace{\operatorname{Re}\{c_n\}}^{\cos \alpha_n}}{|c_n|} \cos\left(\frac{2\pi n}{N} k\right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \operatorname{Im}\{c_n\} \frac{|c_n|}{\operatorname{Im}\{c_n\}} \underbrace{\frac{\operatorname{Im}\{c_n\}}{|c_n|}}_{\sin \alpha_n} \sin\left(\frac{2\pi n}{N} k\right) \right) = \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} 2|c_n| \left(\cos \alpha_n \cos\left(\frac{2\pi n}{N} k\right) - \sin \alpha_n \sin\left(\frac{2\pi n}{N} k\right) \right) = \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} 2|c_n| \cos\left(\frac{2\pi n}{N} k + \alpha_n\right)
 \end{aligned}$$

V poslednom kroku sme použili goniometrický súčtový vzorec:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

□

Úloha 1.4.3 Navrhните tvar vzorcov pre diskretnú Fourierovu transformáciu pre proces $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, ktorého hodnoty sú namerané v ekvidištantných časových intervaloch

$$\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{N-1}) = (t_0, t_0 + \Delta t, \dots, t_0 + (N-1)\Delta t)$$

Úloha 1.4.4 Navrhните tvar vzorcov pre diskretnú Fourierovu transformáciu pre proces $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, ktorého hodnoty sú namerané v neekvidištantných časových intervaloch

$$\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{N-1})$$

Príklad 1.4.2 Proces $\mathbf{f} = (1, -2, 4, 2, -4, 0, 1, -1, 1, 2)$ aproximujte postupne v zväčšujúcich sa podpriestoroch \mathcal{S}_n určených podmnožinami harmonickej bázy 10-rozmerného vektorového priestoru.

Riešenie:

Vypočítajme spektrum procesu \mathbf{f} v harmonickej báze \mathcal{H}_1 .

$$\mathbf{c} = (0.4, 0.47 - 0.04j, -0.48 - 0.1j, -0.32 + 1.21j, 0.53 - 0.06j,$$

$$0.2, 0.53 + 0.06j, -0.32 - 1.21j, -0.48 + 0.1j, 0.47 + 0.04j)$$

Amplitúdové spektrum procesu \mathbf{f} je

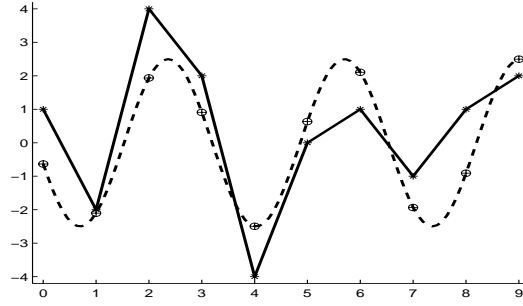
$$\mathbf{ca} = (|c_0|, |c_1|, \dots, |c_9|) = (0.4, 0.47, 0.49, 1.25, 0.53, 0.2, 0.53, 1.25, 0.49, 0.47)$$

Fázové spektrum procesu \mathbf{f} je

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_9) = (0, -0.09, -2.95, 1.83, -0.11, 0, 0.11, -1.83, 2.95, 0.09)$$

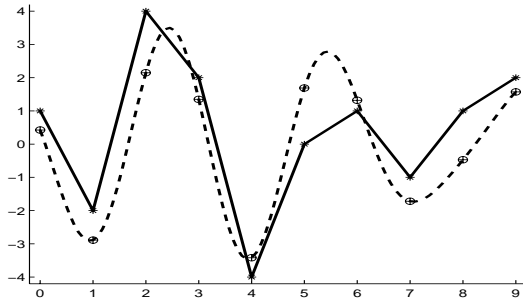
Do bázy vyberieme vektory ktoré zodpovedajú najväčším hodnotám amplitúdového spektra, teda postupne hodnotám $|c_3|$, $|c_4|$, $|c_2|$, $|c_1|$, $|c_0|$ a $|c_5|$.

Na obrázku ?? je aproximácia procesu \mathbf{f} procesom $\tilde{\mathbf{f}}_1 \in \mathcal{S}_1$, ktorý je generovaný базой $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_7\}$. Veľkosť chyby odhadu je $\mathbf{e}_1 = \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}_1\| = 4.1$.



Obrázok 1.23: Aproximácia procesu \mathbf{f} krivkou $\varphi_1(t_k) = 2.5 \cos(1.89t_k + 1.83)$

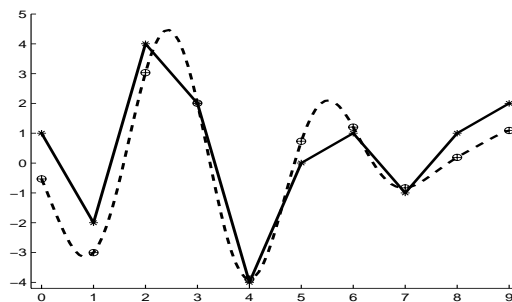
Na obrázku ?? je aproximácia procesu \mathbf{f} procesom $\tilde{\mathbf{f}}_2 \in \mathcal{S}_2$, ktorý je generovaný базой $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_7, \mathbf{h}_4, \mathbf{h}_6\}$. Veľkosť chyby odhadu je $\mathbf{e}_2 = \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}_2\| = 3.34$.



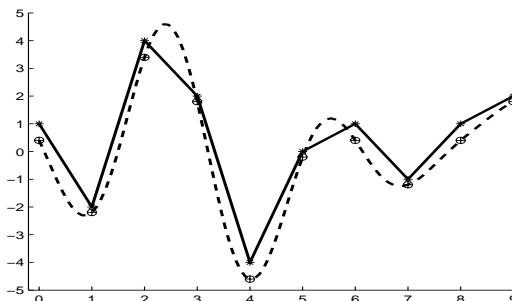
Obrázok 1.24: Aproximácia procesu \mathbf{f} krivkou $\varphi_2(t_k) = 2.5 \cos(1.89t_k + 1.83) + 1.06 \cos(2.51 \cdot t_k - 0.11)$

Na obrázku ?? je aproximácia procesu \mathbf{f} procesom $\tilde{\mathbf{f}}_3 \in \mathcal{S}_3$, ktorý je generovaný базой $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_7, \mathbf{h}_4, \mathbf{h}_6, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_8\}$. Veľkosť chyby odhadu je $\mathbf{e}_3 = \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}_3\| = 2.53$.

Na obrázku ?? je aproximácia procesu \mathbf{f} procesom $\tilde{\mathbf{f}}_4 \in \mathcal{S}_4$, ktorý je generovaný базой $\mathcal{B}_4 = \{\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_7, \mathbf{h}_4, \mathbf{h}_6, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_8, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_9\}$. Veľkosť chyby odhadu je $\mathbf{e}_4 = \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}_4\| = 1.41$.

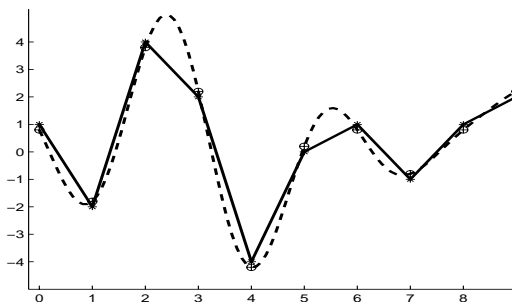


Obrázok 1.25: Aproximácia procesu \mathbf{f} krivkou $\varphi_3(t_k) = 2.5 \cos(1.89t_k + 1.83) + 1.06 \cos(2.51 \cdot t_k - 0.11) + 0.98 \cos(1.26 t_k - 2.95)$



Obrázok 1.26: Aproximácia procesu \mathbf{f} krivkou $\varphi_4(t_k) = 2.5 \cos(1.89t_k + 1.83) + 1.06 \cos(2.51 \cdot t_k - 0.11) + 0.98 \cos(1.26 t_k - 2.95) + 0.93 \cos(0.63 t_k - 0.09)$

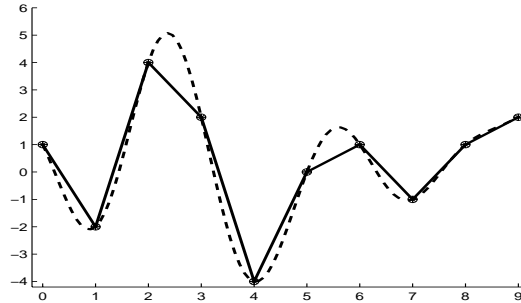
Na obrázku ?? je aproximácia procesu \mathbf{f} procesom $\tilde{\mathbf{f}}_5 \in \mathcal{S}_5$, ktorý je generovaný bázou $\mathcal{B}_5 = \{\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_7, \mathbf{h}_4, \mathbf{h}_6, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_8, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_9, \mathbf{h}_0\}$. Veľkosť chyby odhadu je $\mathbf{e}_5 = \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}_5\| = 0.63$.



Obrázok 1.27: Aproximácia procesu \mathbf{f} krivkou $\varphi_5(t_k) = 2.5 \cos(1.89t_k + 1.83) + 1.06 \cos(2.51 \cdot t_k - 0.11) + 0.98 \cos(1.26 t_k - 2.95) + 0.93 \cos(0.63 t_k - 0.09) + 0.4$

Na obrázku ?? je aproximácia procesu \mathbf{f} procesom $\tilde{\mathbf{f}}_6 \in \mathcal{S}_6$, ktorý je generovaný bázou $\mathcal{B}_6 = \{\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_7, \mathbf{h}_4, \mathbf{h}_6, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_8, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_9, \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_5\}$. Veľkosť chyby odhadu

je $\mathbf{e}_6 = \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}_6\| = 0$.



Obrázok 1.28: Aproximácia procesu \mathbf{f} krivkou $\varphi_6(t_k) = 2.5 \cos(1.89t_k + 1.83) + 1.06 \cos(2.51 \cdot t_k - 0.11) + 0.98 \cos(1.26 t_k - 2.95) + 0.93 \cos(0.63 t_k - 0.09) + 0.4 + 0.2 \cos(3.14 t_k)$

Posledná aproximácia $\tilde{\mathbf{f}}_6 \in \mathcal{S}_6$ je vektorom pôvodného 10-rozmerného priestoru, preto $\tilde{\mathbf{f}}_6 = \mathbf{f}$ a chyba aproximácie je 0. \square

Príklad 1.4.3 Aproximujte proces $\mathbf{f} = (12, -1, -6, -2, -10, -13, 1, 5, 2, 10)$ z príkladu ?? regresnou krivkou tvaru $\varphi(t_k) = c_0 t_k + \alpha_0 + c_1 \cos(\omega_1 t_k + \alpha_1)$. Pri riešení použite riešení použite diskretnú Fourierovu transformáciu.

Riešenie:

Vypočítajme spektrum procesu \mathbf{f} v harmonickej báze $\mathcal{H}_1 0$.

$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) = (-0.2, 3.74 + 2.72j; -0.02 + 0.06j, 2.51 + 1.21j, -0.13 - 0.1j, \\ 0, -0.13 + 0.1j, 2.51 - 1.21j, -0.02 - 0.06j, 3.74 - 2.72j)$$

Amplitúdové spektrum procesu \mathbf{f} je

$$\mathbf{ca} = (|c_0|, |c_1|, \dots, |c_9|) = (-0.2, 4.62, 0.06, 2.79, 0.16, 0, 0.16, 2.79, 0.06, 4.62)$$

Fázové spektrum procesu \mathbf{f} je

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_9) = (0, 0.63, 1.88, 0.45, -2.51, 0, 2.51, -0.45, -1.88, -0.63)$$

Do bázy vyberieme vektory s najväčšími hodnotami amplitúdového spektra, teda \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_9 , \mathbf{h}_3 a \mathbf{h}_7 .

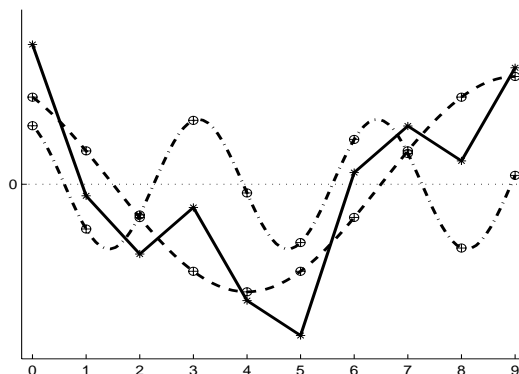
$$\tilde{\mathbf{f}} = c_1 \cdot \mathbf{h}_1 + c_9 \cdot \mathbf{h}_9 + c_3 \cdot \mathbf{h}_3 + c_7 \cdot \mathbf{h}_7 = (12.5, -1, -5.5, -2, -10, -12.5, 1, 5.5, 2, 10)$$

Chyba odhadu je

$$\|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\| = 1$$

Zodpovedajúca funkcia času je

$$\varphi(t_k) = 2 \cdot |c_1| \cos\left(\frac{2\pi 1}{10} t_k + \alpha_1\right) + 2 \cdot |c_3| \cos\left(\frac{2\pi 3}{10} t_k + \alpha_3\right) =$$



Obrázok 1.29: Aproximácia procesu \mathbf{f} krivkou $\varphi_1(t_k) = 9.24 \cos(0.63 t_k + 0.22)$ a $\varphi_2(t_k) = 5.58 \cos(1.89 t_k + 0.45)$

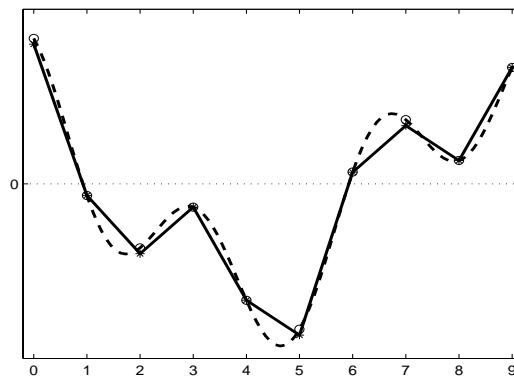
$$= 9.24 \cos(0.63 t_k + 0.63) + 5.58 \cos(1.89 t_k + 0.45)$$

Odhad je súčtom dvoch funkcií kosínus, ktoré sú zobrazené na obrázku ??.

Jednu z funkcií kosínus prerobíme na funkciu sínus posunutím o fázu $\frac{\pi}{2}$. Výsledná funkcia má tvar

$$\begin{aligned} \varphi(t_k) &= 9.24 \sin\left(0.63 \cdot t_k + 0.63 + \frac{\pi}{2}\right) + 5.58 \cos(1.89 t_k + 0.45) = \\ &= 9.24 \sin(0.63 t_k + 0.22) + 5.58 \cos(1.89 t_k + 0.45) \end{aligned}$$

Chyba odhadu je $\|\mathbf{e}_5\| = 1$.



Obrázok 1.30: Aproximácia procesu \mathbf{f} krivkou $\varphi(t_k) = 9.24 \sin(0.63 t_k + 0.22) + 5.58 \cos(1.89 t_k + 0.45)$

□

Úloha 1.4.5 Popíšte čo znamená slovo „diskrétna“ v pojme *diskrétna Fourierova transformácia*. (Okrem *diskrétnej Fourierovej transformácie* je používaná ešte *spojitá Fourierova transformácia*.)

1.5 Walsh - Hadamardova báza

Fourierova báza nie je jediná báza, ktorou sa dajú popísať periodické vlastnosti procesu. Diskrétnou bázou, ktorá popisuje periodické chovanie procesu je **Walsh Hadamardova báza**. Táto báza je zložená len z vektorov, ktorých hodnoty sú 1 alebo -1.

Návod na generovanie Walsh-Hadamardovej bázy je nasledovný. Vytvoríme n -tú Hadamardovu maticu podľa predpisu:

$$H_0 = (1) \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_{2^n} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{2^{n-1}} & \mathbf{H}_{2^{n-1}} \\ \mathbf{H}_{2^{n-1}} & -\mathbf{H}_{2^{n-1}} \end{pmatrix} \quad (1.5.1)$$

Jednotlivé riadky Hadamardovej matice \mathbf{H}_{2^n} sú vektory Walsh-Hadamardovej bázy 2^n -rozmerného priestoru.

Príklad 1.5.1 Vyjadrite Hadamardove matice \mathbf{H}_0 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{H}_4 a \mathbf{H}_8 .

Riešenie:

Podľa predpisu ?? budú Hadamardove matice postupne

$$\mathbf{H}_0 = (1) \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Úloha 1.5.1 Napíšte desiaty riadok Hadamardovej matice \mathbf{H}_{16} .

Úloha 1.5.2 Dokážte, že Walsh-Hadamardova báza 8-rozmerného vektorového priestoru je ortogonálna a každý jej vektor má veľkosť $\sqrt{8}$.

Vektor koeficientov \mathbf{c} sa nazýva **spektrum** procesu vo Walsh-Hadamardovej báze.

$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$$

Vektor absolútnych hodnôt $\mathbf{ca} = (|c_0|, |c_1|, \dots, |c_{N-1}|)$ spektra procesu sa nazýva **amplitúdové spektrum** procesu.

Úloha 1.5.3 Spomedzi všetkých M -rozmerných podpriestorov, generovaných vektormi Walsh-Hadamardovej bázy, najlepšia aproximácia pôvodného procesu bude v podpriestore, v ktorom sa nachádzajú vektory s najväčšími hodnotami amplitúdového spektra pôvodného procesu. Dokážte toto tvrdenie.

Príklad 1.5.2 Napíšte Walsh-Hadamardovu bázu 8-rozmerného vektorového priestoru a vyjadrite v tejto báze koeficienty procesu

$$\mathbf{f} = (12, -1, -6, -2, -10, -13, 1, 5)$$

Čo najlepšie aproximujte proces \mathbf{f} v trojrozmernom podpriestore 8-rozmerného Euklidovského priestoru generovaného vektormi Walsh-Hadamardovej bázy.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_8 = \{ & (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1), (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1), \\ & (1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1), (1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1), (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1), \\ & (1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1) \} \end{aligned}$$

Spektrum procesu \mathbf{f} v báze \mathcal{W}_8 je

$$\mathbf{c} = (-1.75, 1, -1.25, 3, 2.5, 1.25, 6, 1.25)$$

Najlepšou aproximáciou procesu \mathbf{f} v jenorozmernom podpriestore generovanom vektorom Walsh-Hadamardovej bázy je vektor $c_6 \mathbf{wh}_6 = 6(1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1) = (6, 6, -6, -6, -6, -6, 6, 6)$. Veľkosť chyby tejto aproximácie je $\|\mathbf{e}_6\| = 13.86$ a pôvodný vektor a jeho aproximácia sú znázornené na obrázku ??

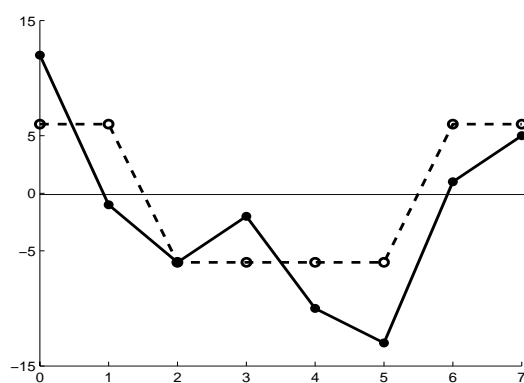
Najlepšou aproximáciou procesu \mathbf{f} v dvojrozmernom podpriestore generovanom dvomi vektormi Walsh-Hadamardovej bázy je vektor

$$\begin{aligned} c_3 \mathbf{wh}_3 + c_6 \mathbf{wh}_6 &= 3(1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1) + 6(1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1) = \\ &= (9, 3, -9, -3, -3, -9, 3, 9) \end{aligned}$$

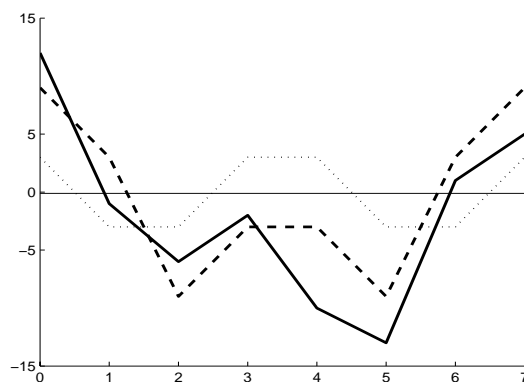
Veľkosť chyby tejto aproximácie je $\|\mathbf{e}_{36}\| = 10.96$ a pôvodný vektor a jeho aproximácia sú znázornené na obrázku ??

Najlepšou aproximáciou procesu \mathbf{f} v trojrozmernom podpriestore generovanom tromi vektormi Walsh-Hadamardovej bázy je vektor

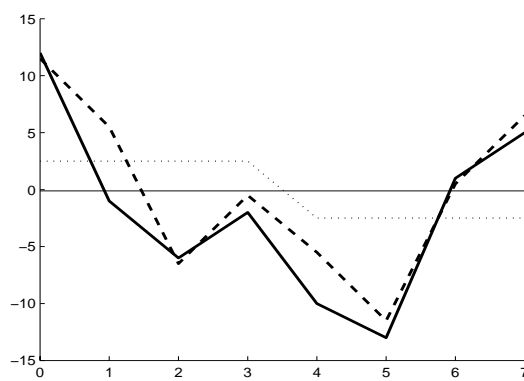
$$\begin{aligned} c_3 \mathbf{wh}_3 + c_4 \mathbf{wh}_4 + c_6 \mathbf{wh}_6 &= 3(1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1) + 2.5(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1) + \\ &+ 6(1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1) = (11.5, 5.5, -6.5, -0.5, -5.5, -11.5, 0.5, 6.5) \end{aligned}$$



Obrázok 1.31: Aproximácia procesu \mathbf{f} v jednorozmernom podpriestore, procesom $c_6 \mathbf{wh}_6$



Obrázok 1.32: Aproximácia procesu \mathbf{f} v dvojrozmernom podpriestore procesom $c_6 \mathbf{wh}_6 + c_3 \mathbf{wh}_3$ a vektor $c_3 \mathbf{wh}_3$



Obrázok 1.33: Aproximácia procesu \mathbf{f} v trojrozmernom podpriestore procesom $c_6 \mathbf{wh}_6 + c_3 \mathbf{wh}_3 + c_4 \mathbf{wh}_4$ a vektor $c_4 \mathbf{wh}_4$

Veľkosť chyby tejto aproximácie je $\|\mathbf{e}_{346}\| = 8.37$ a pôvodný vektor a jeho aproximácia sú znázornené na obrázku ?? □

Poznámka:

Metódou priemetu vektora do podpriestoru sme riešili tri úlohy: lineárnu regresiu, kľzavý priemer a diskretnú Fourierovu transformáciu. Ku základnej myšlienke priemetu sa v rôznych metódach menil spôsob výberu bázy vhodného podpriestoru.

Lineárna regresia:

Časová zákonitosť; prekladanie procesu analytickou funkciou.

Hodnota v čase súvisí s hodnotami v iných časoch (je splnená podmienka linearity). Báza priestoru, do ktorého robíme projekciu, je tvorená vektormi, ktorých zložky sú funkciami času.

Kľzavý priemer:

Hodnotu procesu v čase vypočítame z hodnôt tohto procesu v „susedných časoch“.

Báza priestoru, do ktorého robíme projekciu, je tvorená vektormi, ktoré dostaneme posunutím hodnôt pôvodného vektora.

Diskretná Fourierova transformácia a Walsh-Hadamardova transformácia:

Harmonická aj Walsh-Hadamardova báza sú dopredu dané a podpriestor vyberieme až po spočítaní koeficientov v tejto báze. Vyberieme tie bazové vektory, ktorých koeficienty majú najväčšiu absolútnu hodnotu.