# Nekonečné rady

## Fourierove rady

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

25. októbra 2011

# Skalárny súčin funkcií

## Skalárny súčin, Ortogonalita, norma funkcie

### Definícia (Skalárny súčin funkcií)

Nech $f, g$ sú funkcie integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$. Číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

nazývame skalárnym súčinom funkcií $f, g$.

# Skalárny súčin funkcií

## Skalárny súčin, Ortogonalita, norma funkcie

### Definícia (Skalárny súčin funkcií)

Nech $f, g$ sú funkcie integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$. Číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

nazývame skalárnym súčinom funkcií $f, g$.
Funkcie $f, g$ sa nazývajú ortogonálne (na intervale $\langle a, b\rangle$) práve vtedy ak $(f, g) = 0$.

# Skalárny súčin funkcií

## Skalárny súčin, Ortogonalita, norma funkcie

### Definícia (Skalárny súčin funkcií)

Nech $f, g$ sú funkcie integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$. Číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

nazývame skalárnym súčinom funkcií $f, g$.
Funkcie $f, g$ sa nazývajú ortogonálne (na intervale $\langle a, b\rangle$) práve vtedy ak $(f, g) = 0$.

### Definícia (Norma a normovaná funkcia)

Nech $f$ je funkcia integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Normou funkcie nazývame číslo $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Funkcia sa nazýva normovaná ak $\|f\| = 1$.

# Ortogonálny systém funkcií
## Ortogonálny a ortonormálny systém funkcií

### Definícia (Ortogonálny systém funkcií)

Nech $\{\varphi_n\}$ je konečná alebo spočítateľná postupnosť funkcií integrovateľných na intervale $\langle a, b\rangle$. Táto postupnosť sa nazýva ortogonálny systém funkcií práve vtedy, ak pre každé dve funkcie $\varphi_m, \varphi_n, m \neq n$ sú ortogonálne a každá funkcia $\varphi_n$ má kladnú normu.

# Ortogonálny systém funkcií
## Ortogonálny a ortonormálny systém funkcií

**Definícia (Ortogonálny systém funkcií)**

Nech $\{\varphi_n\}$ je konečná alebo spočítateľná postupnosť funkcií integrovateľných na intervale $\langle a, b\rangle$. Táto postupnosť sa nazýva ortogonálny systém funkcií práve vtedy, ak pre každé dve funkcie $\varphi_m, \varphi_n, m \neq n$ sú ortogonálne a každá funkcia $\varphi_n$ má kladnú normu.
Táto postupnosť funkcií sa nazýva ortonormálna, ak je ortogonálna a každá funkcia je normovaná.

# Ortogonálny systém funkcií

## Ortogonálny a ortonormálny systém funkcií

### Definícia (Ortogonálny systém funkcií)

Nech $\{\varphi_n\}$ je konečná alebo spočítateľná postupnosť funkcií integrovateľných na intervale $\langle a, b\rangle$. Táto postupnosť sa nazýva ortogonálny systém funkcií práve vtedy, ak pre každé dve funkcie $\varphi_m, \varphi_n, m \neq n$ sú ortogonálne a každá funkcia $\varphi_n$ má kladnú normu.
Táto postupnosť funkcií sa nazýva ortonormálna, ak je ortogonálna a každá funkcia je normovaná.

Postupnosť $\{\varphi_n\}$ je ortonormálna, práve vtedy ak

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad m \neq n \\ 1 & \text{pre} \quad m = n \end{cases}$$

# Trigonometrický systém

## Ortogonalita trigonometrického systému a jeho ortonormalizácia

### Úloha 1

Overte, že tzv. trigonometrický systém funkcií

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \cos nx, \sin nx, \dots$$

je ortogonálny na ľubovoľnom intervale dĺžky $2\pi$.

### Úloha 2

Ku trigonometrickému systému funkcií

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \cos nx, \sin nx, \dots$$

zostrojte systém, ktorý bude ortonormálny.

# Fourierov rad

## Fourierov rad všeobecne

### Veta

Nech $\{\varphi_n\}$ je ortogonálna postupnosť funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$, $\{c_n\}$ postupnosť reálnych čísiel. Nech rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

na intervale $\langle a, b\rangle$ rovnomerne konverguje k funkcii $f$. Potom pre hodnoty $c_n$ platí

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}. \tag{1}$$

# Fourierov rad
## Fourierov rad všeobecne

**Definícia (Fourierov rad)**

Nech $\{\varphi_n\}$ je ortogonálna postupnosť funkcií na intervale $\langle a, b\rangle$, $f$ funkcia integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Čísla $c_n$ dané vzťahom (1) nazývame Fourierove koeficienty funkcie $f$ vzhľadom na ortogonálny systém $\{\varphi_n\}$ a rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n,$$

kde $c_n$ sú Fourierove koeficienty nazývame Fourierov rad funkcie $f$ vzhľadom na ortogonálny systém $\{\varphi_n\}$.

# Fourierov rad

## Fourierov rad vzhľadom k trigonometrickému systému

### Ortonormálny trigonometrický systém

V ďalšom nás budú zaujímať len Fourierove rady vzhľadom na ortonormálnu postupnoť (poznáme z úlohy 2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots \\ \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots \end{aligned} \tag{2}$$

# Fourierov rad
## Fourierov rad vzhľadom k trigonometrickému systému

### Fourierov rad funkcie

Fourierov rad ľubovoľnej funkcie integrovateľnej na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ má vzhľadom na systém (2) tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde $a_n, b_n$ sú Fourierove koeficienty, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

### Poznámka

Výsledok zrejme platí pre ľubovoľný interval $\langle c, c + 2\pi \rangle$ dĺžky $2\pi$.

# Príklady

Rozviňte do Fourierovho radu funkcie:

1. $f(x) = x$ na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$,
2. $f(x) = x^2$ na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$,
3. $f(x) = \mathrm{e}^x$ na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$,
4. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0, \pi) \\ -1 & x \in \langle \pi, 2\pi) \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \langle -\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ 1 & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ -1 & x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$

# Fourierov rad

## Fourierov rad párnej a nepárnej funkcie

### Veta

Nech $f$ je funkcia integrovateľná na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$. Ak je táto funkcia párna, tak jej Fourierov rad má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

kde $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$.
Ak je táto funkcia nepárna, tak jej Fourierov rad má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

kde $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$.

# Príklady

Na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ rozviňte do Fourierovho radu funkcie:

1. $f(x) = |x|$,
2. $f(x) = x^2$,
3. $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$,
4. $f(x) = 1 - \frac{|x|}{\pi}$,
5. $f(x) = |\sin x|$.

# Párne a nepárne rozšírenie
## Sínusový a kosínusový rad

**Definícia (Párne a nepárne rozšírenie funkcie)**

Nech $f$ je funkcia integrovateľná na $\langle 0, \pi\rangle$ $[(0, \pi\rangle]$. Ak pre $x \in \langle -\pi, 0\rangle$ kladieme $f(x) = f(-x)[f(x) = -f(-x), f(0) = 0]$, tak povieme, že sme zostrojili párne (nepárne) rozšírenie funkcie $f$ na interval $\langle -\pi, \pi\rangle$.

# Párne a nepárne rozšírenie
## Sínusový a kosínusový rad

**Definícia (Párne a nepárne rozšírenie funkcie)**

Nech $f$ je funkcia integrovateľná na $\langle 0, \pi\rangle$ $[(0, \pi\rangle]$. Ak pre $x \in \langle -\pi, 0\rangle$ kladieme $f(x) = f(-x)[f(x) = -f(-x), f(0) = 0]$, tak povieme, že sme zostrojili párne (nepárne) rozšírenie funkcie $f$ na interval $\langle -\pi, \pi\rangle$.

**Definícia (Kosínusový a sínusový rad funkcie)**

Fourierov rad párneho (nepárneho) rozšírenia funkcie $f$ nazývame kosínusovým (sínusovým) radom funkcie $f$ na intervale $\langle 0, \pi\rangle$.

# Príklady

Nasledujúce funkcie rozviňte na intervale $\langle 0, \pi\rangle$ do sínusového a kosínusového radu

1. $f(x) = x$,
2. $f(x) = x^2$,
3. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$,
4. $f(x) = \cos\frac{x}{2}$,
5. $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \\ 1 & x \in \langle \frac{\pi}{2}, 0\pi) \end{cases}$

# Fourierov rad

## Rozvoj funkcie s periódou $p \neq 2\pi$

### Transformácia periodickej funkcie na funkciu s periódou $2\pi$

Nech $f$ je periodická funkcia s periódou $p = 2h$, integrovateľná na intervale $\langle -h, h\rangle$. Potom funkcia $g(t) = f(\frac{h}{\pi}x)$ je periodická s periódou $2\pi$.

Funkciu $g$ je možné známym spôsobom rozvinúť do Fourierovho radu na intervale $\langle -\pi, \pi\rangle$. Spätnou transformáciou $x = \frac{\pi}{h}t$ získame Fourierov rad funkcie $f$ na intervale $\langle -h, h\rangle$.

# Fourierov rad

## Rozvoj funkcie s periódou $p \neq 2\pi$

### Fourierov rad funkcie s periódou $p \neq 2\pi$

Fourierov rad funkcie $f$ na intervale $\langle -h, h \rangle$ má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{h} x + b_n \sin \frac{n\pi}{h} x),$$

kde Fourierove koeficienty sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \cos \tfrac{n\pi}{h} x \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ b_n &= \tfrac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \sin \tfrac{n\pi}{h} x \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

### Poznámka

Výsledok zrejme platí pre ľubovoľný interval $\langle c, c + 2h \rangle$ dĺžky $2h$.

## Príklady

Určte Fourierov rozvoj funkcie

1. $f(x) = x$ na intervale $\langle -1, 1\rangle$,
2. $f(x) = x$ na intervale $\langle 0, 2\rangle$,
3. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0, 2) \\ -1 & x \in \langle -1, 0) \end{cases}$

Rozviňte nasledujúce funkcie do sínusového a kosínusového radu:

1. $f(x) = x$ na intervale $\langle 0, 2\rangle$,
2. $f(x) = x$ na intervale $\langle 0, 1\rangle$,
3. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0, 1) \\ -1 & x \in \langle 1, 2) \end{cases}$