2 Množiny

Nebudeme sa venovať priamo teórii množín, len si priblížime základnú terminológiu a značenie, pretože tie sa využívajú aj v iných oblastiach matematiky.

Základné pojmy

Čo môžeme považovať za množinu? Napríklad všetci študenti zapísaní do prvého ročníka tvoria množinu. Všetky prirodzené čísla tvoria množinu, čo môžeme zapísať $\{1, 2, 3, \dots\}$. Alebo $\{3, 6, 7\}$ je množina tvorená číslami $3, 6, 7$. Množina je teda súhrn (súbor) určitých dobre rozlíšiteľných objektov, ktorý považujeme za jeden celok.[1]
Predchádzajúci výrok mal za úlohu trochu priblížiť pojem množiny, ale nemožno ho považovať za definíciu, pretože umožňuje rôzne paradoxy a protirečenia. V knižke [4] môžeme nájsť nasledujúci príklad takéhoto paradoxu.

Príklad. Jednému vojakovi prikázali holiť tých a len tých vojakov jeho čaty, ktorí sa neholia sami. Ako sa má tento vojak zachovať sám k sebe, ak vojenské predpisy prikazujú, že každý vojak musí byť oholený?
Čatu môžeme považovať za množinu vojakov. Rozdeľme ju na dve časti, na vojakov, ktorí sa holia sami a na vojakov, ktorí sa neholia sami. Do ktorej skupiny zaradiť nášho holiča? Ak by bol medzi vojakmi, ktorí sa holia sami, tak by sám seba podľa nariadenia nemal oholiť a teda by sa neholil sám. Ak by bol v skupine vojakov, ktorí sa neholia sami, tak by mal sám seba oholiť a teda by nebol v skupine, ktorá sa neholí sama. Ak teda chceme vytvoriť množinu vojakov tejto čaty, ktorí sa holia sami, o našom holičovi nevieme povedať, či do nej patrí, ani či do nej nepatrí.

Aby sa matematika vyhla podobným nepríjemnostiam, matematici vypracovali systémy axióm, z ktorých sa dajú odvodiť pravidlá na vytváranie "slušne" sa správajúcich množín. Zrejme najpoužívanejší je Zermelo-Fraenkelov axiomatický systém, ktorý uvedieme na záver tejto kapitoly.

Značenie a základná terminológia

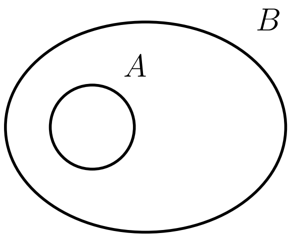
Na vymedzenie množiny používame množinové zátvorky: $\{\dots\}$. Medzi zátvorkami môžeme vymenovať prvky alebo uviesť charakteristickú vlastnosť prvkov tejto množiny. Treba si tiež uvedomiť, že u množín nezáleží na poradí v akom vypíšeme ich prvky, ani koľkokrát tie prvky vypíšeme: $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3, 3\}$. Ak prvok x patrí do množiny A, tak píšeme $x \in A$, v opačnom prípade $x \notin A$. Znakom $\emptyset$ značíme prázdnu množinu. Počet prvkov množiny A označíme $|A|$. Pri nekonečných množinách budeme miesto počtu prvkov hovoriť radšej o mohutnosti množiny, čo budeme značiť tiež $|A|$.

Rovnosť množín

Množiny A a B sa rovnajú ($A = B$), ak majú tie isté prvky.

Podmnožiny

Množina A je podmnožinou množiny B, ak každý prvok množiny A je aj prvkom množiny B. Značíme to $A \subseteq B$. Platí tiež $\emptyset \subseteq B$ a $B \subseteq B$. Ak chceme zdôrazniť, že množina A je rôzna od B, tak používame zápis $A \subset B$.



Ako možno vytvárať množiny

Pozrime sa na niekoľko spôsobov, ako možno vytvárať množiny. Pri konečných množinách s malým počtom prvkov nám stačí vymenovať prvky. Ďalší spôsob je pomocou charakteristickej vlastnosti. Napríklad interval $(-\infty, 1)$ môžeme zapísať aj $A = \{x \in R | x < 1\}$, čo znamená, že prvky tejto množiny sú všetky reálne čísla, ktoré sú mešie ako 1. Pri definovaní množiny pomocou charakteristickej vlastnosti treba byť opatrný, aby sme nedopadli ako náš armádny holič. Ukážeme si ďalšie spôsoby vytvárania nových množín.

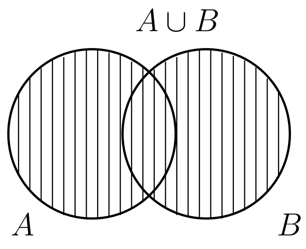
Množina všetkých podmnožín

Ak máme množinu A, tak zo všetkých jej podmnožín môžeme vytvoriť množinu $P(A) = \{\emptyset, \dots, A\}$, ktorú tiež nazývame potenčná množina množiny A.

Príklad. Ak $A = \{1, 2\}$, tak zo všetkých podmnožín tejto množiny môžeme vytvoriť potenčnú množinu $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Otázka. Ak A je konečná množina, koľko prvkov obsahuje $P(A)$? Čiže koľko podmnožín má konečná množina?

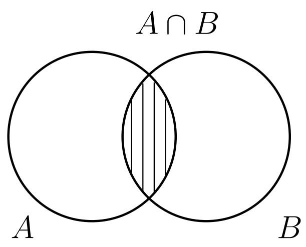
Zjednotenie



Zjednotenie $A \cup B$ množín A a B obsahuje práve tie prvky, ktoré patria do množiny A **alebo** B. Všimnime si spojku alebo. Tá nám hovorí, že zjednotenie je definované pomocou disjunkcie. Pre ľubovoľný prvok x platí:

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \ .$$

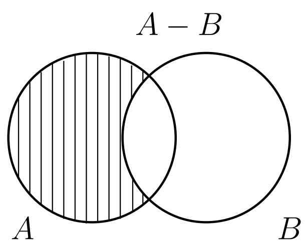
Prienik



Prienik $A \cap B$ množín A a B obsahuje práve tie prvky, ktoré patria do množiny A **a zároveň** B. Podľa spojky a zároveň vieme, že prienik sa dá definovať pomocou konjunkcie. Pre ľubovoľný prvok x platí:

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \ .$$

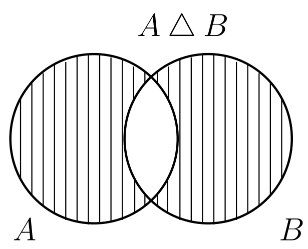
Rozdiel



Rozdiel $A - B$ množín A a B obsahuje práve tie prvky, ktoré patria do množiny A **a zároveň** nepatria do B. Podobne ako prienik, aj rozdiel množín možno definovať pomocou konjunkcie. Druhú časť výroku však musíme negovať. Pre ľubovoľný prvok x platí:

$$x \in A - B \Longleftrightarrow [x \in A \wedge \neg(x \in B)] \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \ .$$

Symetrická diferencia



Symetrická diferencia $A \triangle B$ množín A a B obsahuje tie prvky, ktoré patria práve do jednej z množín A, B. Symetrickú diferenciu možno vyjadriť viacerými spôsobmi pomocou predchádzajúcich operácií. Napríklad:

1. $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$,
2. $A \triangle B = (A \cup B) - (B \cap A)$.

Karteziánsky súčin

Karteziánsky súčin $A \times B$ množín A a B je množina všetkých usporiadaných dvojíc, kde prvý prvok dvojice je z množiny A a druhý prvok tejto dvojice je z množiny B. Čiže

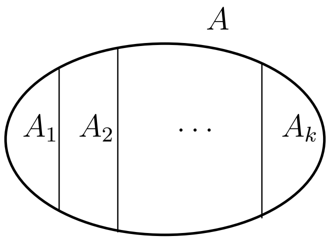
$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\} \ .$$

Príklad. Nech $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y\}$. Potom

- $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$,
- $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Rozklad množiny

Množiny $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tvoria rozklad množiny A, ak $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ a zároveň pre $\forall i, j \in \{1, \ldots, k\}$ $(i \neq j)$ platí $A_i \cap A_j = \emptyset$.



Príklad. Ak $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tak množiny $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3\}$ a $A_3 = \{4, 5\}$ tvoria rozklad množiny A.

Príklad. Vezmime si množinu všetkých prirodzených čísel N. Potom jej podmnožiny N_n všetkých nepárnych čísel a N_p všetkých párnych čísel tvoria rozklad tejto množiny.

Rekurzívne definované množiny

Definujme množinu A nasledovne:

1. základný krok definície: $0 \in A$
2. konštrukčné kroky: ak $n \in A \Rightarrow (-n \in A \wedge n + 2 \in A)$.

Prvky množiny A sú nasledovné: 0, 2, -2, 4, -4, ... Nie je ťažké si uvedomiť, že A je množina všetkých párnych celých čísel. Množina A je definovaná rekurzívne. Vo všeobecnosti je konštrukcia takýchto množín nasledovná:

1. základný krok definície: $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$,
2. konštrukčné kroky: ak $y_1, y_2, \ldots, y_l \in A \Rightarrow z_1, z_2, \ldots, z_m \in A$,

kde prvky $z_1, z_2, \ldots, z_m$ vytvárame z prvkov $y_1, y_2, \ldots, y_l$ pomocou pevne daných (matematických) pravidiel. Formulácia o vytváraní nových prvkov množiny A je nepresná a mohla by viesť k paradoxom podobným tomu o armádnom holičovi. Pri používaní bežných aritmetických operácií však problémy mať nebudeme.

Doplnok: Zermelov-Fraenkelov systém axióm

Na ukážku uvádzame Zermelov-Fraenkelov systém axióm. Pomocou týchto axióm možno odvodiť všetku matematiku, s ktorou sa bežne stretávate. Treba však poznamenať, že toto odvodzovanie môže byť veľmi komplikované. Keby sme chceli odvodiť z týchto axióm, že $2 + 2 = 4$, potrebovali by sme na to niekoľko tisíc krokov. (Viac možno nájsť v [2] a [3].)

Axióma rovnosti množín. Dve množiny sa rovnajú práve vtedy, keď majú tie isté prvky. Formálne to môžeme zapísať nasledovne:

$$\forall A \forall B[(\forall x(x \in A \iff x \in B)) \iff (A = B)]$$

Axióma zjednotenia množín. Nech S je množina (systém množín). Potom existuje taká množina Z, ktorá obsahuje práve tie prvky, ktoré patria aspoň do jednej množiny systému S.

$$\forall S \exists Z \forall x[x \in Z \iff (\exists A \in S \quad x \in A)]$$

Množinu Z nazývame zjednotenie množín systému S.

Axióma dvojprvkovej množiny. Pre každé dve množiny x a y existuje množina $\{x, y\}$, ktorej jedinými prvkami sú x a y.

Axióma nekonečnej množiny. Existuje nekonečná množina. Môžeme ju definovať napríklad takto: nech X je neprázdna množina taká, že pre $\forall y \in X$ aj množina $\{y\}$ je prvkom X.

Axióma potenčnej množiny. Ku každej množine A existuje množina, ktorej prvkami sú všetky podmnožiny množiny A. Táto množina sa nazýva potenčná množina a označujeme ju $P(A)$.

Schéma separácie. Nech je daná množina X a výroková funkcia $F()$. Potom existuje podmnožina množiny X, ktorá obsahuje práve tie prvky $y \in X$, pre ktoré je výrok $F(y)$ pravdivý.

Schéma nahradenia. Obrazom množiny pri zobrazení je opäť množina.

Axióma fundovanosti. Pre každú neprázdnu množinu X platí, že obsahuje aspoň jeden prvok $Y \in X$ taký, že $X \cap Y = \emptyset$. (Táto axióma zabraňuje napríklad existencii množiny, ktorá obsahuje samu seba ako svoj prvok.)

Axióma výberu. Nech S je neprázdny systém navzájom disjunktných množín. Potom existuje taká množina H, že pre každú množinu $A \in S$ je $H \cap A$ jednoprvková množina.

Referencie

[1] Kluvánek, I.:*Prípravka na diferenciálny a integrálny počet*, VŠDS, Žilina, ISBN 80-7100-058-2, 1991

[2] Meyer, A., R.:*Mathematics for Computer Science*, Lecture notes, class problems, problem sets, Massachusetts Institute of Technology, 2007

[3] Palumbíny, D., Vrábel, P.:*Teoretická aritmetika*, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Nitra, ISBN 80-88738-38-5, 1994

[4] Vilenkin, N.:*Množiny a všeličo okolo nich*, SPN, Bratislava, 1972