DISKRÉTNA OPTIMALIZÁCIA

Iteračné metódy pre riešenie nelineárnych úloh viac premenných na obmedzenom definičnom obore

- Metóda projekcie
- Metóda pokutových funkcií

ITERAČNÉ METÓDY PRE RIEŠENIE NELINEÁRNYCH ÚLOH VIAC PREMENNÝCH NA OBMEDZENOM DEFINIČNOM OBORE

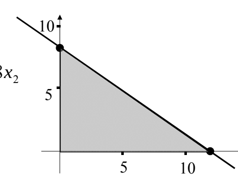
- **Úlohy na voľný extrém** (množina podmienok je prázdna)
  - Predchádzajúce ukážky iteračných metód predpokladali, že definičný obor funkcie *f* je celé E^n
  - min $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in E^n$
- **Úlohy na viazaný extrém** (množina podmienok **nie je** prázdna)
  - Ďalej ukážeme prístupy k riešeniu úloh, kedy je množina prípustných riešení daná všetkými prvkami z E^n, ktoré vyhovujú všetkým podmienkam z danej množiny obmedzujúcich podmienok.
  - min $f(\boldsymbol{x})$ na množine $\mathscr{M}$, ($\mathscr{M}$ môže byť zložitá)
    $\boldsymbol{x} \in E^n$

2

PRÍKLAD NELINEÁRNEJ ÚLOHY VIAC PREMENNÝCH S OBMEDZENÝM DEFINIČNÝM OBOROM

- Navrhnite čo najvýnosnejší výrobný program firme, vyrábajúcej dva produkty P1 a P2, ak na výrobu každej jednotky P1 (P2) potrebujeme dva (tri) jednotky výrobnej kapacity o veľkosti 24.
- Predajná cena jednotky P1 a P2 je 6 a 8. Výrobné **jednotkové náklady** sú u P1 0.2x1 a u P2 0.4x2, kde x1 a x2 sú množstvá vyrábaných produktov.

$$\begin{aligned} &Min \quad -0.2x_1^2 - 0.4x_2^2 + 6x_1 + 8x_2 \\ &Subject\ \ to\ \ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ &\qquad\qquad\quad x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



3

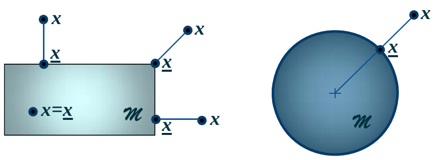
PRÍSTUPY K OPTIMALIZÁCII NELI-NEÁRNYCH ÚLOH VIAC PREMENNÝCH

- Pre riešenie úloh **na viazaný extrém používame metódy na voľný extrém s úpravami**. Možné prístupy riešenia:
  - metóda projekcie
  - metóda pokutových funkcií

4

METÓDA PROJEKCIE

Projekcia $\underline{\boldsymbol{x}} = P_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x} \in E^n$ do množiny $\mathcal{M} \subseteq E^n$ je bod $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{M}$ taký, ktorý je k bodu $\boldsymbol{x}$ najbližšie.



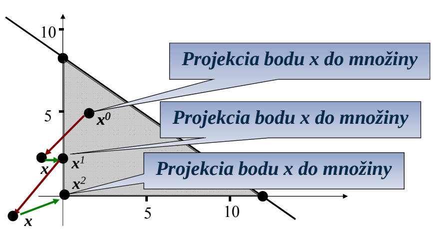
METÓDA PROJEKCIE

- Začíname v nejakom prípustnom riešení $\boldsymbol{x}^0$. Podľa zvolenej iteračnej metódy (*) nájdeme smer $\boldsymbol{h}^i$ a vykonáme presun k ďalšiemu riešeniu podľa výrazu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^i + \alpha_i \boldsymbol{h}^i$.
- Po každom výpočte $\boldsymbol{x}$ kontrolujeme, či bod $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$.
- Ak $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$, položíme $\boldsymbol{x}^{i+1} = \boldsymbol{x}$ a pokračujeme zvolenou iteračnou metódou obvyklým spôsobom.
- Ak $\boldsymbol{x} \notin \mathcal{M}$, definujeme $\boldsymbol{x}^{i+1} = P_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$ a pokračujeme zvolenou iteračnou metódou obvyklým spôsobom.

(*) gradientová metóda najväčšieho poklesu, gradientová metóda s konštantným krokom, Powellova metóda

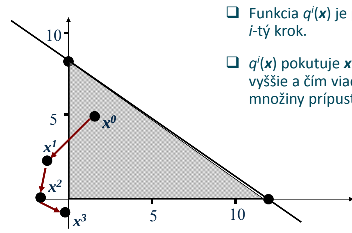
METÓDA PROJEKCIE

- **Projekcia** $\underline{\boldsymbol{x}} = P_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x} \in E^n$ do množiny $\mathcal{M} \subseteq E^n$ je bod $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{M}$ taký, ktorý je k bodu $\boldsymbol{x}$ najbližšie.



METÓDA POKUTOVÝCH FUNKCIÍ

- Začíname v nejakom prípustnom riešení $\boldsymbol{x}^0$. Podľa zvolenej iteračnej metódy nájdeme pre funkciu $f(\boldsymbol{x}) + q^i(\boldsymbol{x})$ smer $\boldsymbol{h}^i$ a vykonáme presun k ďalšiemu riešeniu podľa výrazu $\boldsymbol{x}^{i+1} = \boldsymbol{x}^i + \alpha_i \boldsymbol{h}^i$.



- Funkcia $q^i(\boldsymbol{x})$ je **pokutová funkcia** pre i-tý krok.
- $q^i(\boldsymbol{x})$ pokutuje $\boldsymbol{x}$ tým viac, čím je i vyššie a čím viac je $\boldsymbol{x}$ vzdialené od množiny prípustných riešení

KONŠTRUKCIA POKUTOVÝCH FUNKCIÍ

- Funkcie $q^i(\boldsymbol{x})$ pre i=1, 2, … sú pokutové funkcie pre úlohu s obmedzenou množinou prípustných riešení, ak sú definované na celom E^n a platí pre každé prípustné ***x:***

$$\lim_{i\to\infty} q^i(\mathbf{x}) = 0$$

- a pre každé neprípustné ***x*** platí ***:***

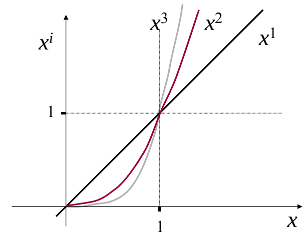
$$\lim_{i\to\infty} q^i(\mathbf{x}) = \infty$$

- Navyše $q^i(\boldsymbol{x})$ musia spĺňať predpoklady použitej metódy.

9

PRINCÍP KONŠTRUKCIE POKUTOVÝCH FUNKCIÍ

- Konštrukcia funkcií $q^i(\boldsymbol{x})$ pre i=1, 2, … je založená na vlastnostiach mocniny $(x)^i$.



- Mocniny $(x)^i$ pre párne i sú, s výnimkou hraničných bodov, pokutové funkcie pre interval <-1, 1>.

10

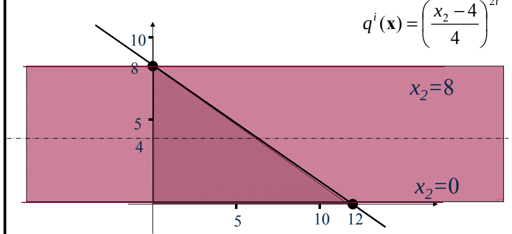
KONŠTRUKCIA POKUTOVÝCH FUNKCIÍ PRE PRUH

- Pruh medzi priamkami x_2=0 a x_2=8, t.j. $x_2 \in$ <0, 8>

$$-4 \le x_2 - 4 \le 4$$

$$-1 \le \frac{x_2 - 4}{4} \le 1$$

$$q^i(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_2 - 4}{4}\right)^{2i}$$



11

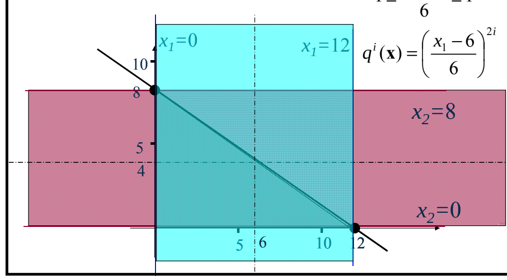
KONŠTRUKCIA POKUTOVÝCH FUNKCIÍ PRE PRUH

- Pruh medzi priamkami x_1=0 a x_1=12, t.j. $x_1 \in$ <0, 12>

$$-6 \le x_1 - 6 \le 6$$

$$-1 \le \frac{x_1 - 6}{6} \le 1$$

$$q^i(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_1 - 6}{6}\right)^{2i}$$

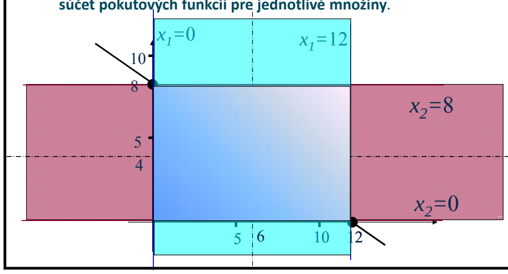


12

KONŠTRUKCIA POKUTOVÝCH FUNKCIÍ PRE OBDĹŽNIK

$$q^i(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_1-6}{6}\right)^{2i} + \left(\frac{x_2-4}{4}\right)^{2i}$$

- Obdĺžnik môžeme vyjadriť ako **Prienik** dvoch pruhov.
- Pokutovú funkciu **pre prienik dvoch množín** je možné vyjadriť ako **súčet pokutových funkcií pre jednotlivé množiny**.



13

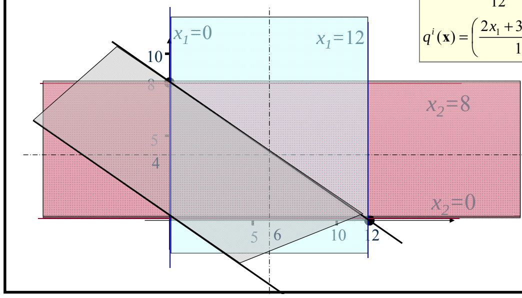
KONŠTRUKCIA POKUTOVÝCH FUNKCIÍ PRE PRUH

- Pruh medzi priamkami $2x_1+3x_2=24$ a $2x_1+3x_2=0$.
- Os pruhu $2x_1+3x_2=12$.

$$-12 \le 2x_1 + 3x_2 - 12 \le 12$$

$$-1 \le \frac{2x_1 + 3x_2 - 12}{12} \le 1$$

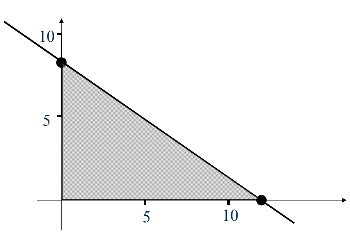
$$q^i(\mathbf{x}) = \left(\frac{2x_1 + 3x_2 - 12}{12}\right)^{2i}$$



14

KONŠTRUKCIA POKUTOVÝCH FUNKCIÍ PRE TROJUHOLNÍK

$$q^i(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_1-6}{6}\right)^{2i} + \left(\frac{x_2-4}{4}\right)^{2i} + \left(\frac{2x_1+3x_2-12}{12}\right)^{2i}$$



15