Besselove funkcie

Peter Haspra, Ivan Turiak, Peter Žuffa

3. júna 2012

Obsah

Úvod

- Daniel Bernoulli, Friedrich Bessel
- kanonické riešenie y(x) diferenciálnej rovnice

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

- komplexne združené korene

Použitie Besselovej funkcie

- vznikla pri hľadaní riešení Laplaceovej rovnice vo valcových alebo sférických súradniciach
- šírenie elektromagnetických vĺn vo valcovom priestore
- vedenie tepla vo valcových objektoch
- spôsoby chvenia okrúhlych alebo oválnych membrán
- riešenie vzorov akustického žiarenia
- užitočné vlastnosti pre spracovanie signálov

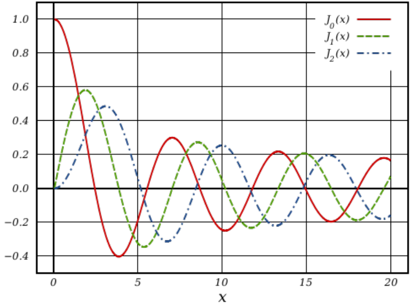
Definícia

- diferenciálna rovnica druhého rádu
- dve lineárne nezávislé riešenia
- rôzne riešenia v závislosti od rôznych okolností

Besselova funkcia prvého druhu: J_α

- Riešenie Besselovej diferenciálnej rovnice definované Maclaurinovym radom

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}x\right)^{2m+\alpha}$$



Gama funkcia

- Faktoriál pre všetky neceločíselné hodnoty
- $\Gamma(z+1) = z!$
- definícia:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Besselova funkcia prvého druhu: J_α

- Oscilujúca funkcia
- $J_\alpha(x)$ $J_{-\alpha}(x)$ Lineárne nezávislé pre neceločíselné hodnoty α
- pre celočíselné α - Lineárne závislé (druhá Besselova funkcia)

Besselove integrály

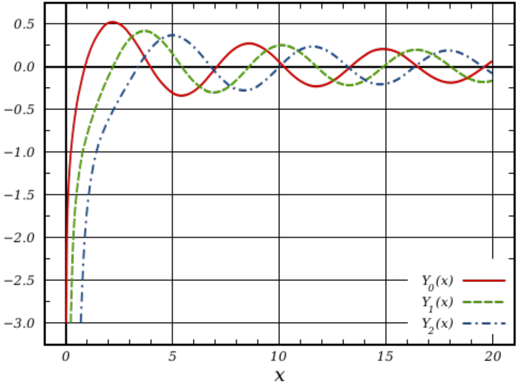
Pre celočíselné n je možné použiť integrál:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi cos(n\tau - xsin n\tau)d\tau$$

alebo

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\tau - xsin n\tau)}d\tau$$

Besselova funkcia druhého druhu: Y_α



Besselova funkcia druhého druhu: Y_α

- Nazývaná aj Neumannova funkcia
- Vo vzťahu k $J_\alpha(x)$

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)cos(\alpha\pi) - J_{-a}(x)}{sin(\alpha\pi)}$$

- limita, neceločíselné α sa blíži k celočíselnému n

$$Y_n(x) = \lim_{a \to n} Y_\alpha(x)$$

$Y_\alpha(x)$ je potrebná ako druhé lineárne nezávislé riešenie $J_\alpha(x)$ v prípade, že α je celé číslo.

Besselova funkcia druhého druhu: Y_α

- $J_\alpha(x)$ a $Y_\alpha(x)$ sú holomorfné funkcie
- V prípade, že α je celé číslo, J_α je celá funkcia (x). Ak x je konštantné, J_α a Y_α je celá funkcia (α).

Hankelove funkcie

- podľa Hermanna Hankela

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x)$$
$$H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iY_\alpha(x)$$

- tzv. Besselova funkcia tretieho druhu
- skôr teoretický význam

Modifikované Besselove funkcie

- špeciálny prípad
- čisto imaginárny argument
- dve alternatívy

$$I_\alpha(x) = i^{-\alpha} J_\alpha(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} (\frac{1}{2}x)^{2m+\alpha}$$

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{sin(\alpha\pi)} = \frac{\pi}{2} i^{\alpha+1} H_\alpha^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} (-i)^{\alpha+1} H_\alpha^{(2)}(-ix),$$

kde $x \in R, x > 0$

$I_\alpha(x)$ a $K_{\alpha)}(x)$ sú dve lineárne nezávislé riešenia Besselovej rovnice.

- exponenciálne rastúce, resp. klesajúce funkcie
- rozdiel medzi klasickou a modifikovanou besselovou funkciou