4. prednáška

Náhodný vektor a jeho charakteristiky

Niekedy je rozumné priradiť výsledku experimentu nie jedno reálne číslo, ako to bolo v predchádzajúcich našich úvahách, ale **usporiadanú dvojicu** (usporiadanú n–ticu) **reálnych čísel**. Ide o experimenty, u ktorých sa na jednotlivých vzorkách merajú dva znaky, resp. n znakov. Náhodným vektorom môžu byť napríklad dĺžka a váha vysústruženej súčiastky, počet osôb a doba čakania vo fronte, dnešná teplota a atmosferický tlak, ...
Teraz uvedieme matematicky presnejší popis náhodného vektora. V našom kurze sa budeme zaoberať len dvojrozmerným náhodným vektorom.
Náhodný vektor (X,Y) je zobrazenie z množiny výsledkov experimentu Ω do množiny R^2. Čiže je to zobrazenie, ktoré výsledku experimentu priradí usporiadanú dvojicu reálnych čísel, t. j. $(X,Y):\Omega\to R^2$.
Budeme sa zaoberať len spojitými náhodnými vektormi a zovšeobecníme také pojmy, ako hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia náhodnej premennej, na **združenú hustotu** $f(x,y)$ a **združenú distribučnú funkciu** $F(x,y)$ náhodného vektora.
Reálnu funkciu $F: R\times R \to <0,1>$ definovanú predpisom

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y)$$

nazývame **združenou distribučnou funkciou** náhodného vektora (X,Y).

Vlastnosti združenej distribučnej funkcie:

1. je nezáporná,
2. je neklesajúca v každom svojom argumente,
3. je zľava spojitá v každom svojom argumente,
4. $F(-\infty,-\infty)=F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0,\ \ F(+\infty,+\infty=1)$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x,y)=F_Y(y)=P(X<\infty,Y<y)$
   $\lim\limits_{y\to\infty} F(x,y)=F_X(x)=P(X<x,Y<\infty)$

Združená distribučná funkcia $F(x,y)$ je neklesajúca funkcia, ktorej funkčná hodnota v bode (x_0,y_0) je pravdepodobnosť toho, náhodná premenná X nadobudne hodnoty menšie ako x_0 a súčasne Y hodnoty menšie ako y_0. Je to teda pravdepodobnosť priradená intervalu $(-\infty,x_0)\times(-\infty,y_0)$. V prípade spojitého náhodného vektora (X,Y) Združenú distribučnú funkciu $F(x,y)$ vypočítame pomocou združenej hustoty:

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\Big(\int\limits_{-\infty}^{y} f(s,t)\,\mathrm{dt}\Big)\,\mathrm{ds}\qquad \mathrm{x}\in(-\infty,\infty),\quad \mathrm{y}\in(-\infty,\infty)$$

Z uvedeného vzťahu ľahko dostaneme vzťah medzi združenou hustotou a združenou distribučnou funkciou: $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}$. Jednotlivé zložky X, Y náhodného vektora (X,Y) sú náhodné premenné a majú svoje hustoty rozdelenia pravdepodobnosti $f_X(x), f_Y(y)$ a distribučné funkcie $F_X(x), F_Y(y)$, ktoré sa nazývajú **marginálne hustoty pravdepodobnosti** a **marginálne distribučné funkcie** a platí pre ne, že

- $F_X(x) = F(x,\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s,t)\,\mathrm{dt}\Big)\,\mathrm{ds}$
- $F_Y(y) = F(\infty,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s,t)\,\mathrm{ds}\Big)\,\mathrm{dt}$

a

- $f_X(x) = F'_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{dy}$
- $f_Y(y) = F'_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{dx}$

<u>Vlastnosti združenej hustoty rozdelenia pravdepodobnosti:</u>

1. je nezáporná, t.j. $f(x,y) \geq 0$ pre všetky $x \in (-\infty,\infty),\ y \in (-\infty,\infty)$,
2. je definovaná pre všetky $x \in (-\infty,\infty),\ y \in (-\infty,\infty)$,
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{dy}\Big)\,\mathrm{dx} = 1.$

V experimentoch, kde na jednotlivých vzorkách meriame dva a viac znakov, nás často zaujíma, či medzi znakmi je alebo nie je závislosť. Odpoveď na túto otázku dáva nasledujúca definícia:
Nech (X,Y) je náhodný vektor, $f(x,y)$ je jeho združená hustota rozdelenia pravdepodobnosti a $F(x,y)$ je združená distribučná funkcia. Nech ďalej $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $F_X(x)$, $F_Y(y)$ sú marginálne hustoty a distribučné funkcie náhodných premenných X, Y. Hovoríme, že náhodné premenné X, Y sú **nezávislé**, ak

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \text{ resp. } F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

V opačnom prípade sú náhodné premenné X, Y **závislé**.

PRÍKLAD:

Podobne, ako u jednorozmernej náhodnej premennej, definujeme **číselné charakteristiky náhodného vektora**. Tie charakterizujú, kde náhodný vektor nadobúda najviac hodnôt a aká je silná väzba medzi týmito hodnotami. Definujeme ich prostredníctvom momentov (k, l)–tého rádu.
Počiatočný moment *(k, l)*–tého rádu je hodnota $\nu_{k,l}$ definovaná vzťahom

$$\nu_{k,l} = E(X^k Y^l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^l f(x, y) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy},$$

ak nevlastný integrál existuje.
Ľahko nahliadneme, že $\nu_{1,0} = E(X)$ a $\nu_{0,1} = E(Y)$. **Stredná hodnota náhodného vektora** $E\big((X, Y)\big)$ je definovaná pomocou stredných hodnôt náhodných premenných X, Y, ako ich usporiadaná dvojica.

$$E\big((X, Y)\big) = \big(E(X), E(Y)\big)$$

Centrálnym momentom *(k,l)*–tého rádu rozumieme hodnotu $\mu_{k,l}$ definovaná vzťahom

$$\mu_{k,l} = E\big[(X - E(X))^k (Y - E(Y))^l\big].$$

Špeciálne postavenie, aj pomenovanie, má moment $\mu_{1,1}$. Nazývame ho **kovariancia**, značíme $\mathrm{cov}(X, Y)$.

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E\big[(X - E(X))(Y - E(Y))\big]$$

Kovariancia je charakteristikou väzby. Čím je v absolútnej hodnote väčšia, tým je väzba medzi premennými X, Y silnejšia. Ak je kovariancia kladná, ide o priamu závislosť, ak je záporná, o nepriamu závislosť a ak je rovná nule, náhodné premenné X, Y sú **nekorelované**, t.j. neexistuje medzi nimi lineárna závislosť. Pre výpočet kovariancie použijeme vzťah:

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

Ako sme ho dostali?

Ak sú náhodné premenné nezávislé, tak $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$. **POZOR!!!!! Napak to neplatí!!!!**

PRÍKLAD:

Vlastnosti kovariancie:

1. cov(X, Y)=cov(Y, X)
2. cov(X, X)=D(X)
3. cov(aX, bY)= ab cov(XY)
4. cov(X+a, Y+b)=cov(X, Y)

kde a, b sú reálne čísla.
Kovariančná matica C obsahuje kovariancie a disperzie jednotlivých premenných:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \text{cov}(X,X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(Y,X) & \text{cov}(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}$$

Merítkom lineárnej závislosti medzi premennými X a Y je **koeficient korelácie** $\rho(X,Y)$. Definujeme ho vzťahom:

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

Čím je v absolútnej hodnote väčší, tým je väzba (korelácia, lineárna závislosť) medzi premennými X, Y silnejšia.

Vlastnosti koeficienta korelácie:

1. ak sú X, Y nezávislé, potom $\rho(X,Y) = 0$
2. $\rho(X,b) = \rho(a,Y) = \rho(a,b) = 0$ pre ľubovolné reálne čísla a, b
3. $-1 \leq \rho(X,X) \leq 1$
4. ak $|\rho(X,Y)| = 1$, potom $Y = aX + b,\ a \neq 0$

Korelačná matica R obsahuje korelačné koeficienty (charakteistiky väzby medzi náhodnými premennými):

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \rho(X,X) & \rho(X,Y) \\ \rho(Y,X) & \rho(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X,Y) \\ \rho(X,Y) & 1 \end{pmatrix}$$

Podmienené rozdelenie pravdepodobnosti

Po absolvovaní predmetu Diskrétna pravdepodobnosť viete, čo je podmienená pravdepodobnosť náhodných udalostí. Pripomeňme si, že podmienená pravdepodobnosť nastatia udalosti A za podmienky, že nastala udalosť B je

$$P(A/B) = \frac{A \cap B}{P(B)}, \text{pre } P(B) > 0.$$

V zhode s uvedeným vzťahom budeme definovať podmienené rozdelenie náhodných premenných. Uvažujme dvojicu náhodných premenných (X, Y). Budeme hľadať rozdelenie náhodnej premennej Y, keď náhodná premenná X nadobudne jednu zo svojich hodnôt, napr. $X = x$. Predpokladajme, že obe náhodné premenné sú spojité a ich rozdelenie je definované združenou hustotou pravdepodobnosti $f(x, y)$. Rozdelenie náhodnej premennej Y budeme definovať pomocou hustoty pravdepodobnosti, ktorú označíme $f(y/x)$.

Podmienené rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej Y za podmienky, že náhodná premenná $X = x$ definujeme predpisom:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \quad \text{keď} \quad f_X(x) > 0$$

Ak náhodné premenné X, Y sú nezávislé, tak $f(y/x) = f_Y(y)$.

Informácie o podmienených náhodných premenných nám poskytujú číselné charakteristiky **podmienená stredná hodnota** a **podmienený rozptyl**.

$$E(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y/x)\,\mathrm{dy} = \overline{\mathrm{y}}(\mathrm{x})$$

Podmienená stredná hodnota náhodnej premennej Y závisí od toho, akú hodnotu x nadobudla náhodná premenná X. Je teda jej funkciou a graf tejto funkcie nazývame **regresná krivka**.

$$D(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(y - E(Y/X = x)\big)^2 f(y/x)\,\mathrm{dy} = \overline{\mathrm{d}}(\mathrm{x})$$

Rovnako aj podmienený rozptyl je funkciou x a jej graf nazývame **skedastická krivka**

PRÍKLAD: