Príklad

Hľadajme Fourierov rad periodickej funkcie s periódou $T = 2\pi$, ak na intervale periódy je $f : \langle -\pi, \pi \rangle \to R, f(x) = x.$

Riešenie

V tomto prípade je

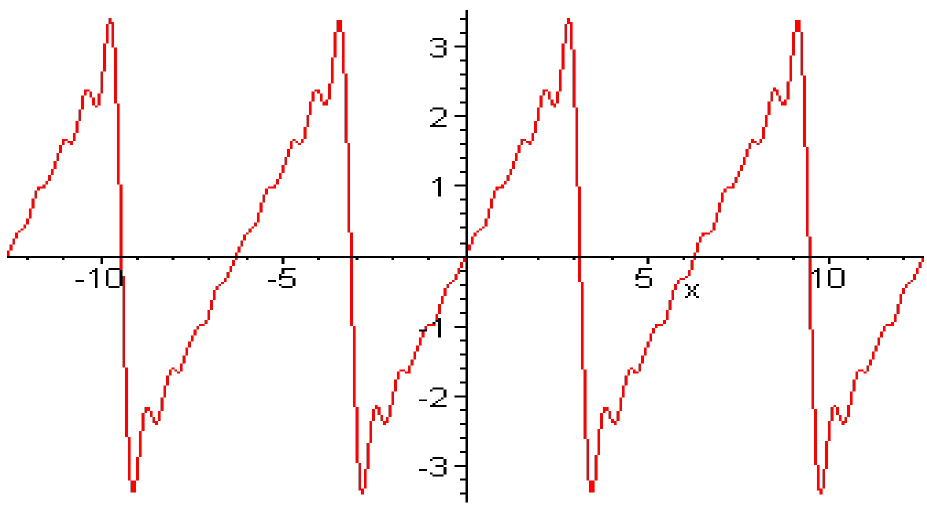
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos\frac{n\pi x}{\pi} dx = \ldots = 0, \quad n = 1,2,\ldots.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin\frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = \frac{-2}{n}\cos n\pi =$$

$$= \frac{-2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Teda danú funkciu môžeme nahradiť pomocou jej Fourierovho radu takto $x \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx.$

Aproximácia danej funkcie, pomocou častí Fourierovho radu, v intervale $\langle -4\pi, 4\pi \rangle$, pre $n = 9$ je na nasledujúcom obrázku



Poznámka

V riešenom príklade daná funkcia bola nepárna a teda koeficienty a_n, $n = 0,1,2,\ldots$, sme nemuseli počítať.

Príklad

Nájdime Fourierov rad funkcie $f(x) = x$ pre interval $\langle 0, \pi \rangle$.

Riešenie

Nepárnym periodickým predĺžením danej funkcie je funkcia z predchádzajúceho príkladu a teda sínusový rad danej funkcie pre interval $\langle 0, \pi \rangle$ má tvar

$$x \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx.$$