Semestrálna práca "Supermarket"

Bc. Juraj Pobeha

Žilinská Univerzita v Žiline
Fakulta riadenia a informatiky

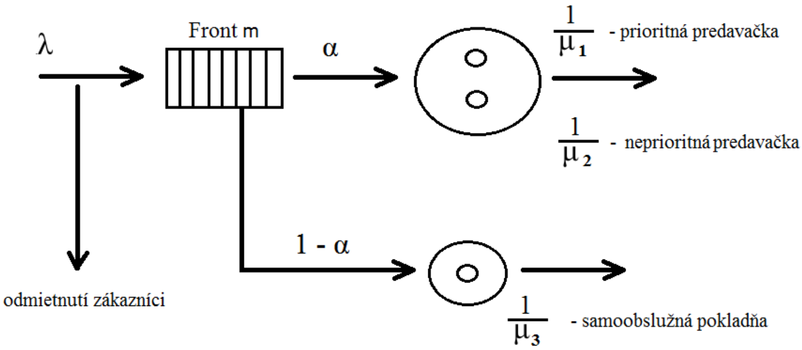
15. decembra 2014

Obsah

Slovný popis úlohy

Modelujeme systém hromadnej obsluhy „Supermarket“. Do supermarketu prichádzajú zákazníci, ktorí sa po vybratí požadovaného tovaru presunú k pokladniam. V supermarkete sú 3 pokladne. Prvú obsluhuje skúsená (prioritná) predavačka , druhú novoprijatá (neprioritná) predavačka, ktorá sa ešte len zaúča a tretia pokladňa je samoobslužná. Zákazníci sa stavajú do jedného frontu, kde si vyberú obsluhu. S pravdepodobnosťou α si vyberú obsluhu skúsenou (prioritnou) predavačkou. Ak si vyberú obsluhu prioritnou predavačkou a tá je obsadená, presunú sa k neprioritnej. S pravdepodobnosťou $1 - \alpha$ si vyberú obsluhu samoobslužnou pokladňou. Vstupný tok zákazníkov je elementárny s parametrom λ. Stredná doba obsluhy, či už u pokladníčok, alebo pri samoobslužnej pokladni má exponenciálne rozdelenie postupne s priemernými dobami $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_3}$.

Grafické zobrazenie modelovaného systému



Popis stavov v modelovanom systéme s konečným frontom dĺžky m = 3

Vytvoríme maticu prechodov $Q = q_{ij}$, pričom

i – počet zákazníkov vo fronte
i $\in \{0, 1, 2, 3\}$

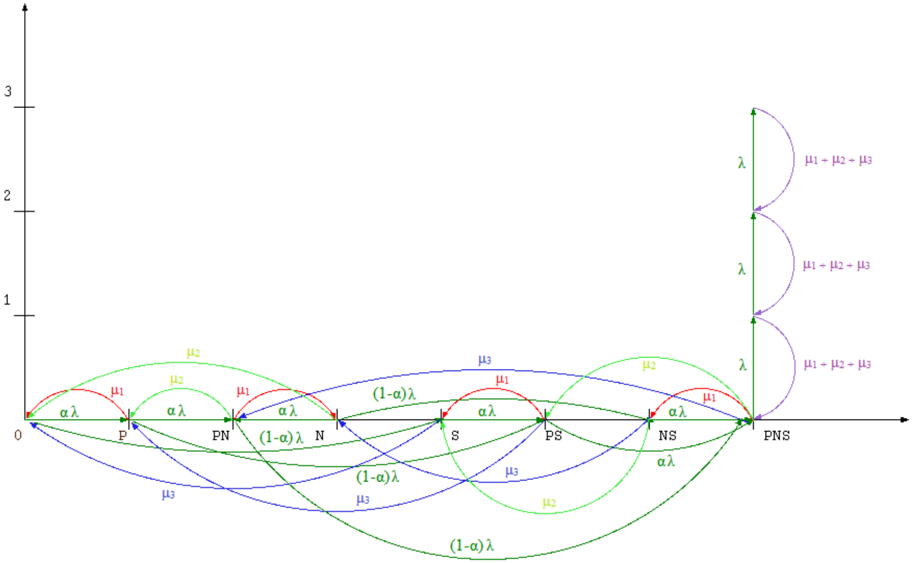
j – stav obslužných liniek
j $\in \{P, N, S, PN, PS, NS, PNS\}$

P – obsluha prioritnou pokladňou
N – obsluha neprioritnou pokladňou
S – obsluha samoobslužnou pokladňou

$\mathbb{S}$ - množina stavov
$\mathbb{S}$ = {00, P0, N0, S0, PN0, PS0, NS0, PNS0, PNS1, PNS2, PNS3}

00 - prázdny systém
P0 - jeden zákazník obsluhovaný prioritnou pokladňou
PNS2 - všetky pokladne sú obsadené a 2 zákazníci čakajú vo fronte

Prechodový graf



Popis niektorých prechodov

- Zo stavu 00 (prázdny systém) sa môžem dostať do stavu P0 (jeden zákazník obsluhovaný prioritnou pokladňou) s intenzitou $\alpha\lambda$ alebo do stavu S0 (jeden zákazník obsluhovaný samoobslužnou pokladňou s intenzitou (1-α)λ.
- Zo stavu NS0 (obsluha neprioritnou a samoobslužnou pokladňou) sa môžem dostať do stavu PNS0 (všetky pokladne obsluhujú) s intenzitou $\alpha\lambda$, do stavu N0 (obsluha zákazníka neprioritnou pokladňou) s intenzitou μ_3 a do stavu S0 (obsluha zákazníka samoobslužnou pokladňou) s intenzitou μ_2.
- Do stavu PNS1 (všetky pokladne obsluhujú a jeden zákazník čaká vo fronte) sa môžem dostať iba zo stavu PNS0 (všetky pokladne obsluhujú). Zo stavu PNS1 sa môžem dostať iba do stavu PNS0 s intenzitou $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$.

Matica prechodov Q

Q =

	0 0	P0	PN0	N0	S0	PS0	NS0	PNS0	PNS1	PNS2	PNS3
0 0	$-\lambda$	$\alpha\lambda$	0	0	$(1-\alpha)\lambda$	0	0	0	0	0	0
P0	μ_1	$-\lambda-\mu 1$	$\alpha\lambda$	0	0	$(1-\alpha)\lambda$	0	0	0	0	0
PN0	0	μ_2	$-(1-\alpha)\lambda-\mu 1-\mu 2$	μ_1	0	0	0	$(1-\alpha)\lambda$	0	0	0
N0	μ_2	0	$\alpha\lambda$	$-\lambda-\mu 2$	0	0	$(1-\alpha)\lambda$	0	0	0	0
S0	μ_3	0	0	0	$-\alpha\lambda-\mu 3$	$\alpha\lambda$	0	0	0	0	0
PS0	0	μ_3	0	0	μ_1	$-\alpha\lambda-\mu 1-\mu 3$	0	$\alpha\lambda$	0	0	0
NS0	0	0	0	μ_3	μ_2	0	$-\alpha\lambda-\mu 2-\mu 3$	$\alpha\lambda$	0	0	0
PNS0	0	0	μ_3	0	0	μ_2	μ_1	$-\lambda-\mu 1-\mu 2-\mu 3$	λ	0	0
PNS1	0	0	0	0	0	0	0	$\mu 1+\mu 2+\mu 3$	$-\lambda-\mu 1-\mu 2-\mu 3$	λ	0
PNS2	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu 1+\mu 2+\mu 3$	$-\lambda-\mu 1-\mu 2-\mu 3$	λ
PNS3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu 1+\mu 2+\mu 3$	$-\mu 1-\mu 2-\mu 3$

Hľadanie stacionárneho rozdelenia pre α=0

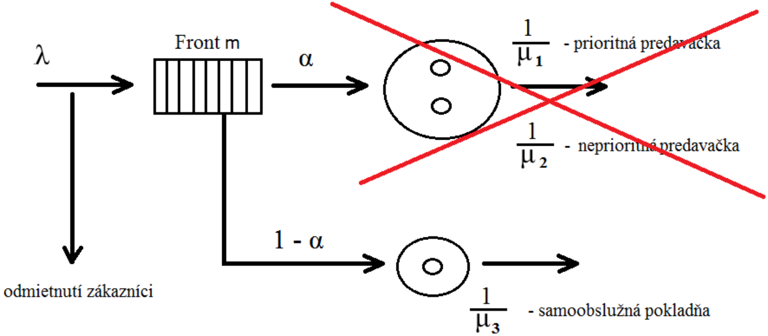
Q=

	0 0	P0	PN0	N0	S0	PS0	NS0	PNS0	PNS1	PNS2	PNS3
0 0	-0,2	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0
P0	2	-2,2	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0
PN0	0	5	-7,20	2,00	0	0	0	0,2	0	0	0
N0	5,00	0	0	-5,2	0	0	0,2	0	0	0	0
S0	3	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	0
PS0	0	3	0	0	2	-5	0	0	0	0	0
NS0	0	0	0	3	5	0	-8	0	0	0	0
PNS0	0	0	3	0	0	5	2	-10,2	0,2	0	0
PNS1	0	0	0	0	0	0	0	10	-10,2	0,2	0
PNS2	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-10,2	0,2
PNS3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-10

λ = 0,2 (vstupný tok zákazníkov je 0,2 za minútu, čiže 12 zákazníkov za hodinu)
μ_1 = 2 (stredná doba obsluhy prioritnej pokladne sú 2 minúty)
μ_2 = 5 (stredná doba obsluhy neprioritnej pokladne je 5 minút)
μ_3 = 3 (stredná doba obsluhy samoobslužnej pokladne sú 3 minúty)
α = 0 (pravdepodobnosť výberu obsluhy prioritnou pokladňou, ak je obsadená presun k neprioritnej)
1- α = 1 (pravdepodobnosť výberu obsluhy samoobslužnou pokladňou)

Hľadanie stacionárneho rozdelenia pre α=0

Keďže $\alpha = 0$, vznikol nám jednolinkový systém hromadnej obsluhy.



Hľadanie stacionárneho rozdelenia pre α=0

V Markovovom procese určenom konečnou množinou stavov $\mathbb{S}$ a maticou intenzít **Q** hľadáme stacionárne rozdelenie v tvare riešenia systému

$$\pi\, Q = 0,\ \sum_{j \in S} \pi_j = 1\ ,\ \pi \geq 0$$

ktoré môžeme prepísať na tvar

$$A\pi^T = b^T, b = (0, 0, ..., 0, 1) \Rightarrow \pi^T = A^{-1} b^T,$$

Hľadanie stacionárneho rozdelenia pre α=0

	-0,2	0	0	0	0,2	0	0	0	0	0	1
	2	-2,2	0	0	0	0,2	0	0	0	0	1
	0	5	-7,2	2	0	0	0	0,2	0	0	1
	5	0	0	-5,2	0	0	0,2	0	0	0	1
A=	3	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	1
	0	3	0	0	2	-5	0	0	0	0	1
	0	0	0	3	5	0	-8	0	0	0	1
	0	0	3	0	0	5	2	-10,2	0,2	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	10	-10,2	0,2	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-10,2	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	1

Posledný stĺpec matice A sme nahradili jednotkami.

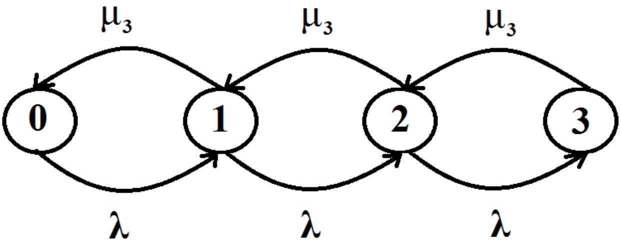
Hľadanie stacionárneho rozdelenia pre α=0

	-0,9190823	0,246444732	0,042016807	0,031153925	0,05584148	0,110698125	0,025988932	0,100840336	0,10201681	0,10204034	0,102040807	
	-0,4383131	-0,2343245	0,042016807	0,031153925	0,07507225	0,091467356	0,025988932	0,100840336	0,10201681	0,10204034	0,102040807	
	-0,3831935	-0,09426848	-0,09803922	-0,023912004	0,07715275	0,094268477	0,023912004	0,098039216	0,10196078	0,10203922	0,102040784	
	-0,7239603	0,246444732	0,042016807	-0,163968026	0,06071953	0,110698125	0,021110883	0,100840336	0,10201681	0,10204034	0,102040807	
A^-1=	-0,6065823	0,246444732	0,042016807	0,031153925	-0,2566585	0,110698125	0,025988932	0,100840336	0,10201681	0,10204034	0,102040807	
	-0,3181208	-0,04201681	0,042016807	0,031153925	-0,0451201	-0,10084034	0,025988932	0,100840336	0,10201681	0,10204034	0,102040807	
	-0,5334116	0,246444732	0,042016807	-0,042016807	-0,1298292	0,110698125	-0,10084034	0,100840336	0,10201681	0,10204034	0,102040807	
	-0,2850375	0	0	0	-0,0190025	0	0	0	0,1	0,102	0,10204	
	-0,189375	0	0	0	-0,012625	0	0	0	0	0,1	0,102	
	-0,09375	0	0	0	-0,00625	0	0	0	0	0	0,1	
	0,9375	0	0	0	0,0625	0	0	0	0	0	0	**-> PI**
PI*Q=	0,000E+00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

πQ = 0 , našli sme stacionárne riešenie

Hľadanie stacionárneho rozdelenia pre α=0

Overenie riešenia:
Kostra



$\pi_0 = \frac{B_0}{B_0+B_1+B_2+B_3}$, po dosadení π_0= 0,9333 ≐ 0,9375

$B_0 = \mu_3^3$
$B_1 = \lambda\mu_3^2$
$B_2 = \lambda^2\mu_3$
$B_3 = \lambda^3$

Hľadanie stacionárneho rozdelenia pre α=0.6, 1-α=0.4

α = 0,6 (pravdepodobnosť výberu obsluhy prioritnou pokladňou, ak je obsadená presun k neprioritnej)
1- α = 0,4 (pravdepodobnosť výberu obsluhy samoobslužnou pokladňou)

Q=

	0 0	P0	PN0	N0	S0	PS0	NS0	PNS0	PNS1	PNS2	PNS3
0 0	-0,2	0,12	0	0	0,08	0	0	0	0	0	0
P0	2	-2,2	0,12	0	0	0,08	0	0	0	0	0
PN0	0	5	-7,08	2,00	0	0	0	0,08	0	0	0
N0	5,00	0	0,12	-5,2	0	0	0,08	0	0	0	0
S0	3	0	0	0	-3,12	0,12	0	0	0	0	0
PS0	0	3	0	0	2	-5,12	0	0,12	0	0	0
NS0	0	0	0	3	5	0	-8,12	0,12	0	0	0
PNS0	0	0	3	0	0	5	2	-10,2	0,2	0	0
PNS1	0	0	0	0	0	0	0	10	-10,2	0,2	0
PNS2	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-10,2	0,2
PNS3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-10

Hľadanie stacionárneho rozdelenia pre α=0.6, 1-α=0.4

A=

-0,2	0,12	0	0	0,08	0	0	0	0	0	1
2	-2,2	0,12	0	0	0,08	0	0	0	0	1
0	5	-7,08	2	0	0	0	0,08	0	0	1
5	0	0,12	-5,2	0	0	0,08	0	0	0	1
3	0	0	0	-3,12	0,12	0	0	0	0	1
0	3	0	0	2	-5,12	0	0,12	0	0	1
0	0	0	3	5	0	-8,12	0,12	0	0	1
0	0	3	0	0	5	2	-10,2	0,2	0	1
0	0	0	0	0	0	0	10	-10,2	0,2	1
0	0	0	0	0	0	0	0	10	-10,2	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	1

Posledný stĺpec matice A sme nahradili jednotkami.

Hľadanie stacionárneho rozdelenia pre α=0.6, 1-α=0.4

	-0,9034147	0,200613015	0,047150504	0,032806655	0,08468592	0,104668625	0,025431199	0,101938402	0,10203877	0,10204078	0,102040816	
	-0,4359115	-0,25597431	0,03929678	0,029747441	0,09200971	0,097560663	0,025364377	0,101789475	0,10203579	0,10204072	0,102040814	
	-0,3814754	-0,11571126	-0,10096501	-0,024667621	0,09282185	0,098679108	0,024552798	0,100671063	0,10201342	0,10204027	0,102040805	
	-0,7087369	0,203877973	0,0438856	-0,161870227	0,08661594	0,104717321	0,023501206	0,101889707	0,10203779	0,10204076	0,102040815	
A^-1=	-0,5862518	0,208017219	0,047238906	0,032828217	-0,2324753	0,097264521	0,025409638	0,101850001	0,102037	0,10204074	0,102040815	
	-0,3115671	-0,05852886	0,041654179	0,030322423	-0,0322893	-0,09988211	0,024789413	0,099432121	0,10198864	0,10203977	0,102040795	
	-0,5138492	0,20984492	0,045412879	-0,039546496	-0,1082424	0,098752109	-0,09882251	0,100362458	0,10200725	0,10204014	0,102040803	
	-0,2792688	-0,0164784	-0,00028439	-0,00011109	-0,0074472	-0,00043942	-2,9624E-06	-7,58377E-06	0,09999985	0,102	0,10204	
	-0,1855424	-0,01094802	-0,00018895	-7,38069E-05	-0,0049478	-0,00029195	-1,9682E-06	-5,03855E-06	-1,008E-07	0,1	0,102	
	-0,0918527	-0,00541981	-9,3537E-05	-3,65381E-05	-0,0024494	-0,00014453	-9,7435E-07	-2,49433E-06	-4,989E-08	-9,977E-10	0,1	
	0,91852658	0,054198143	0,000935375	0,000365381	0,02449404	0,001445284	9,74349E-06	2,49433E-05	4,9887E-07	9,9773E-09	1,99547E-10	**-> PI**
PI*Q=	-2,776E-17	-8,6736E-18	5,96311E-19	3,93125E-17	3,6605E-17	-2,8569E-17	-4,0278E-17	-3,34138E-17	4,779E-19	1,6544E-23	4,22257E-17	

πQ = 0, je to stacionárne riešenie

Optimalizačná úloha

c_p - mzda priorotnej predavačky v eurách na hodinu
c_n - mzda neprioritnej predavačky v eurách na hodinu
c_s - náklady na údržbu samoobslužnej pokladne v eurách na hodinu
c_a - priemerná cena nákupu zákazníka v eurách
c_r - jednotková cena za reklamu

Cieľom optimalizačnej úlohy je nájsť takú intenzitu vstupného toku zákazníkov, pri ktorej bude zisk maximálny.

$$Z(\lambda) = E(N_Q)c_a - E(N_P)c_p - E(N_N)c_n - E(R_\lambda)c_r$$

$E(N_Q)c_a$ - priemerný príjem z obsluhy zákazníkov
$E(N_P)c_p$ - priemerné náklady na mzdu prioritnej predavačky podľa jej výkonnosti
$E(N_N)c_n$ - priemerné náklady na mzdu neprioritnej predavačky podľa jej výkonnosti
$E(R_\lambda)c_r$ - priemerné náklady vynaložené na reklamu

Optimalizačná úloha

$E(R_\lambda)$ je dané funkciou 0,4λ - $\frac{\lambda^2}{3}$.

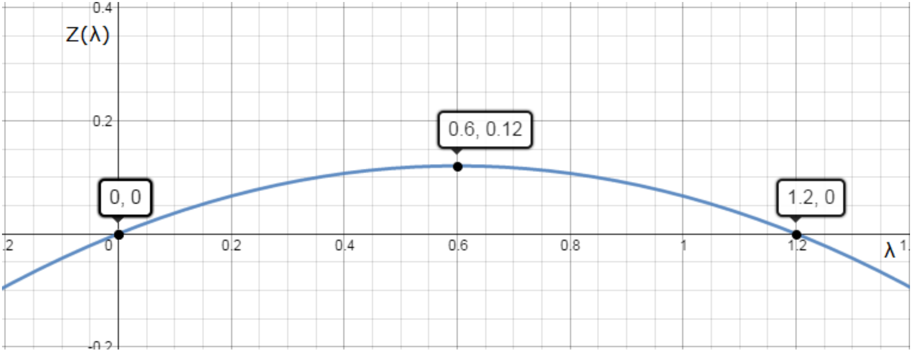
Po dosadení príslušných hodnôt za λ mi vyšli nasledovné funkčné hodnoty:

λ	Z(λ)
0	0,0000
0,1	0,0367
0,2	0,0667
0,3	0,0900
0,4	0,1067
0,5	0,1167
0,6	0,1200
0,7	0,1167
0,8	0,1067
0,9	0,0900
1	0,0667
1,1	0,0367
1,2	0,0000

Najlepší výsledok vyšiel pre vstupný tok λ = 0.6 zákazníkov za minútu (36 zákazníkov za hodinu).

Optimalizačná úloha

$E(R_\lambda)$ je dané funkciou 0,4λ - $\frac{\lambda^2}{3}$.



Oblasti ďalšieho skúmania

- Zistiť optimálnu veľkosť nákladov na reklamu, aby sme prilákali čo najviac zákazníkov.
- Preskúmať, koľko pokladní by sme mali pridať, aby bol zisk z predaja čo najvyšší.

Záver

- V tejto semestrálnej práci som si precvičil základné poznatky z teórie hromadnej obsluhy nadobudnuté počas semestra.
- Riešil som systém hromadnej obsluhy "Supermarket", ktorý som popísal a následne spravil rôzne výpočty.
- Snažil som sa daný systém optimalizovať, čo sa mi čiastočne podarilo.