Teória sietí – prednáška 4

Úloha vrstvy prevádzky?

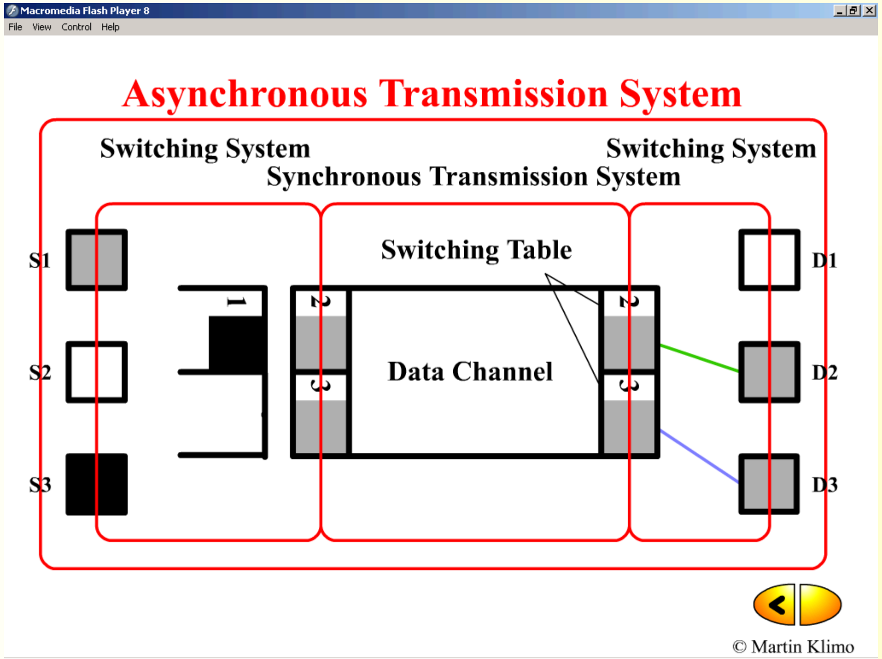
Nájsť kompromis medzi kvalitou a efektívnosťou siete.

1. **z ekonomických dôvodov musí byť kapacita siete menšia než sú možné požiadavky na prenos**
2. **požiadavky na prenos vznikajú náhodne**

Riešenie ?

Policing – odmietnuť záťaž prevyšujúcu kapacitu siete

Shaping – odložiť záťaž prevyšujúcu kapacitu siete na neskôr



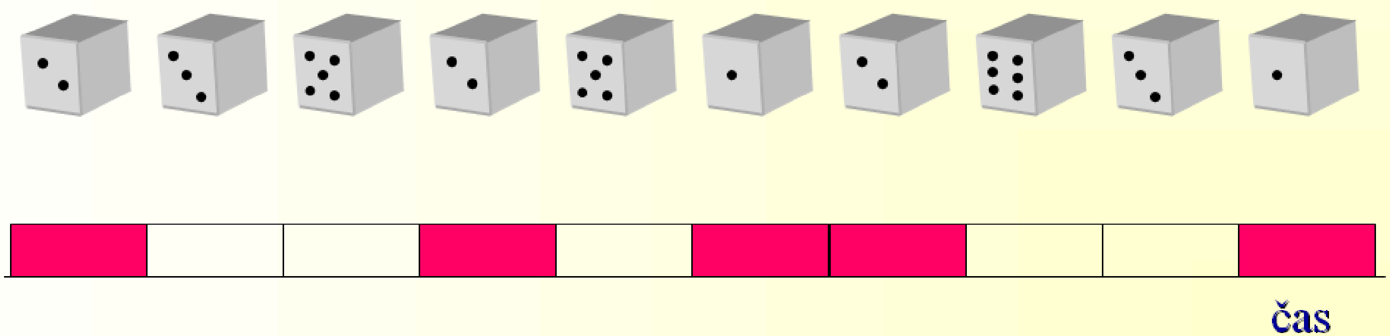
Prvá úloha

Ako popísať proces, ktorý sa v sieti odohráva?

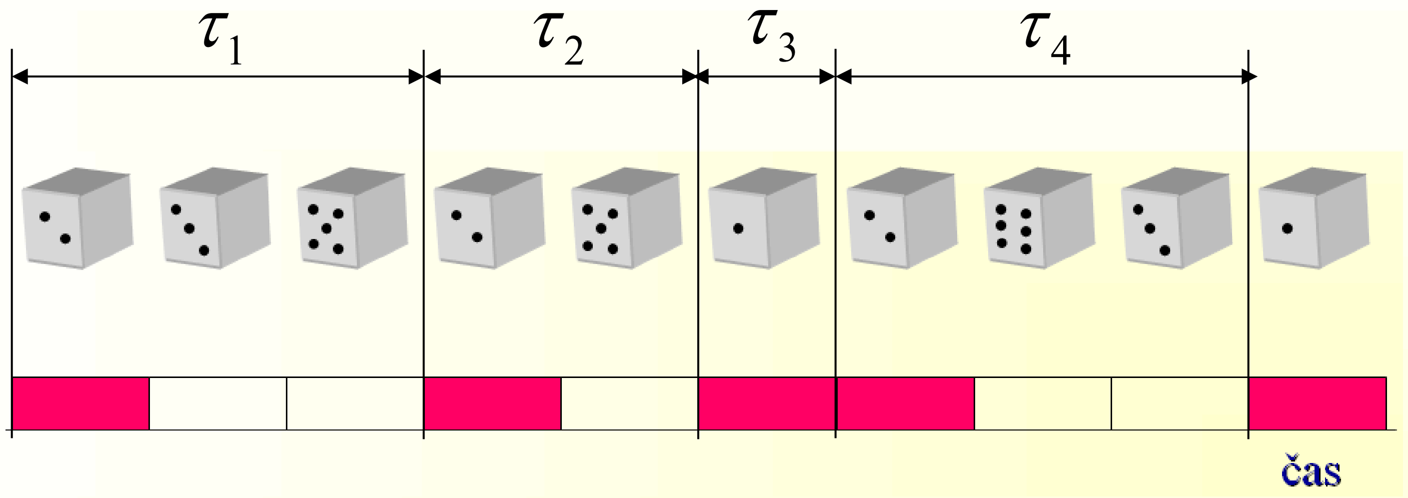
Vlastnosti procesu

1. javy sú nezávislé
2. javy nastávajú s rovnakou pravdepodobnosťou

Bernoulliho proces



Bernoulliho proces



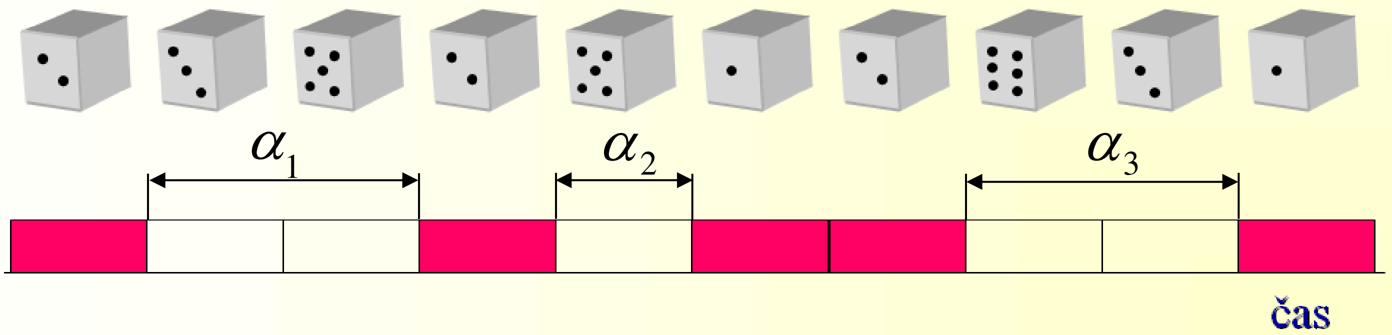
rozdelenie pravdepodobnosti

$$P\{\tau_k = n\} = P\{\tau = n\} = p(1-p)^{n-1}$$

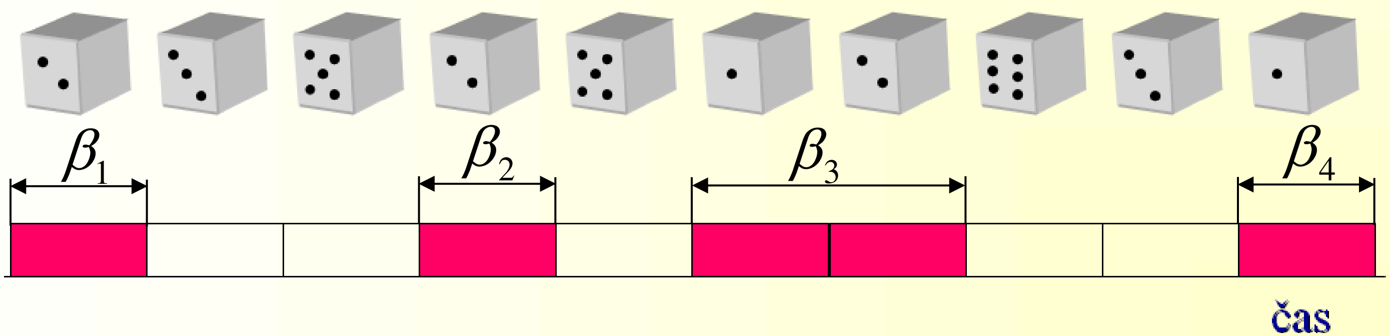
$$\forall k,\ n = 1,2,\ldots$$

Iný popis v čase

Rozdelenie dĺžok intervalov medzi rámcami



Rozdelenie dĺžok zhlukov rámcov



Stredné dĺžky medzier a zhlukov

Stredná dĺžka intervalov $\bar{\alpha} = \frac{1-p}{p}$

Stredná dĺžka zhlukov rámcov $\bar{\beta} = \frac{p}{1-p}$

Problém

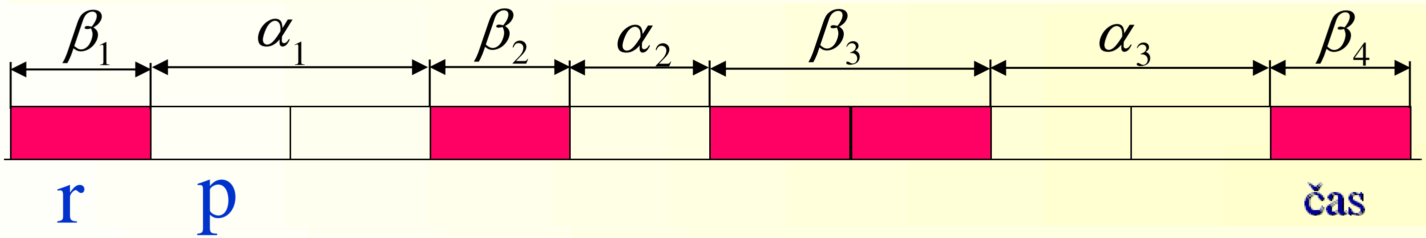
Stredné dĺžky sú na sebe závislé!

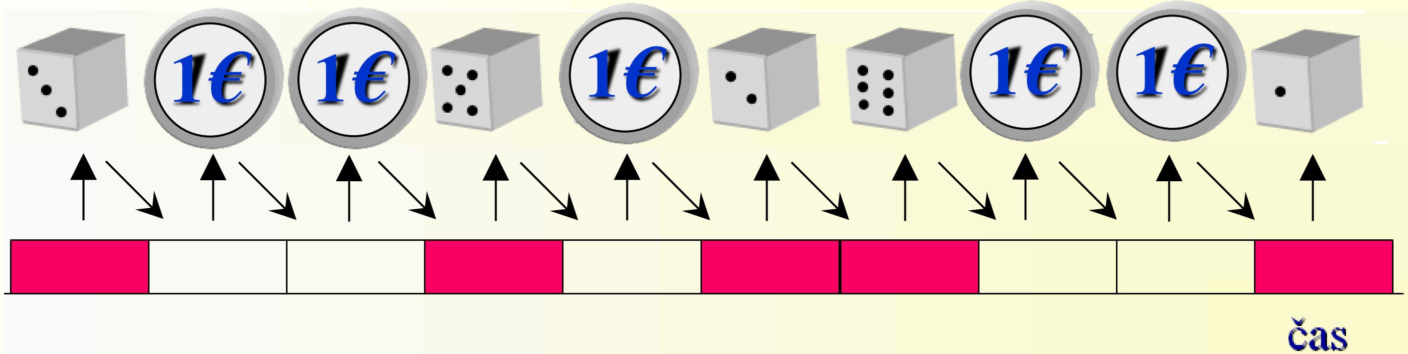
$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\bar{\beta}}$$

Iný popis v čase

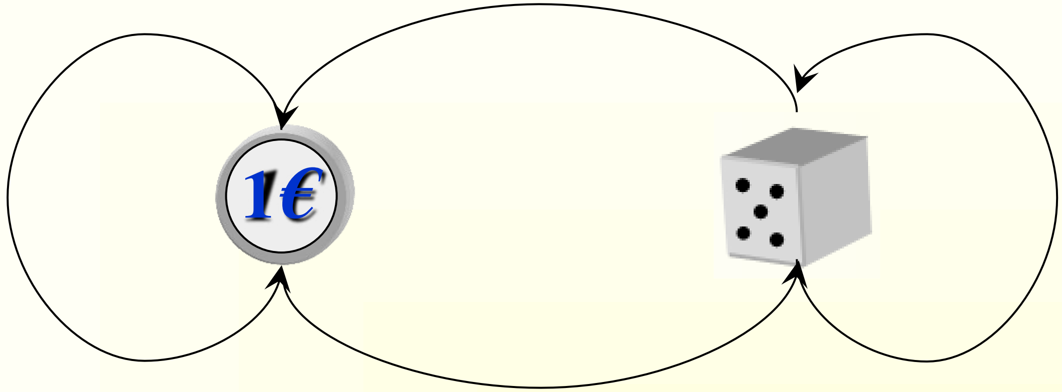
Rozdelenie dĺžok intervalov a zhlukov rámcov

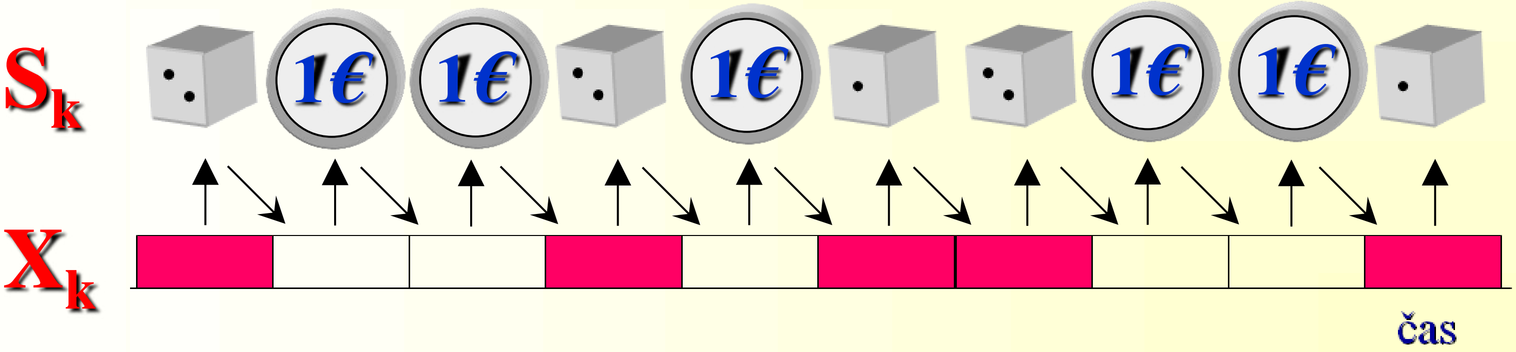
Riešenie



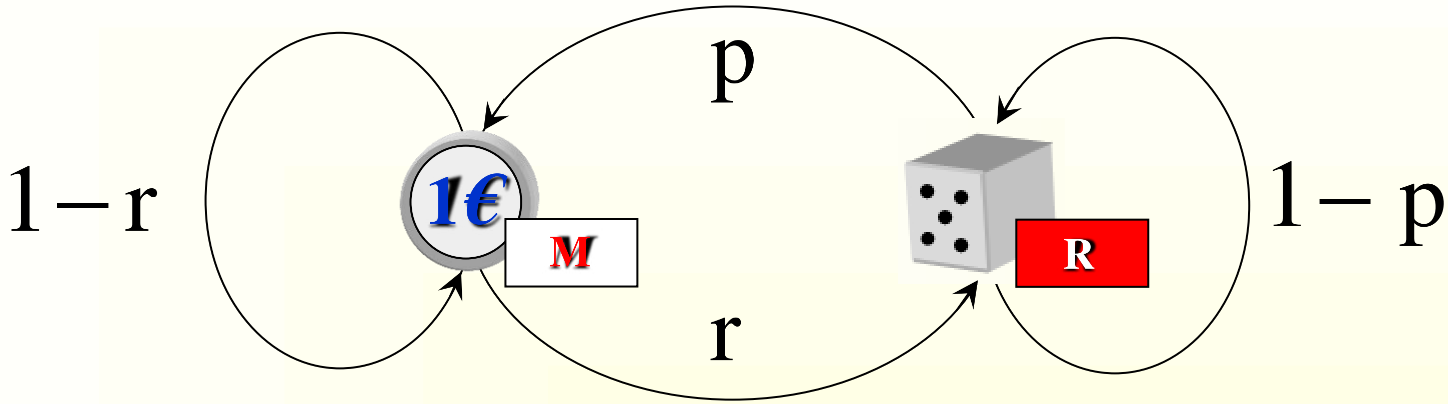


Stav procesu





Pravdepodobnosť stavu procesu

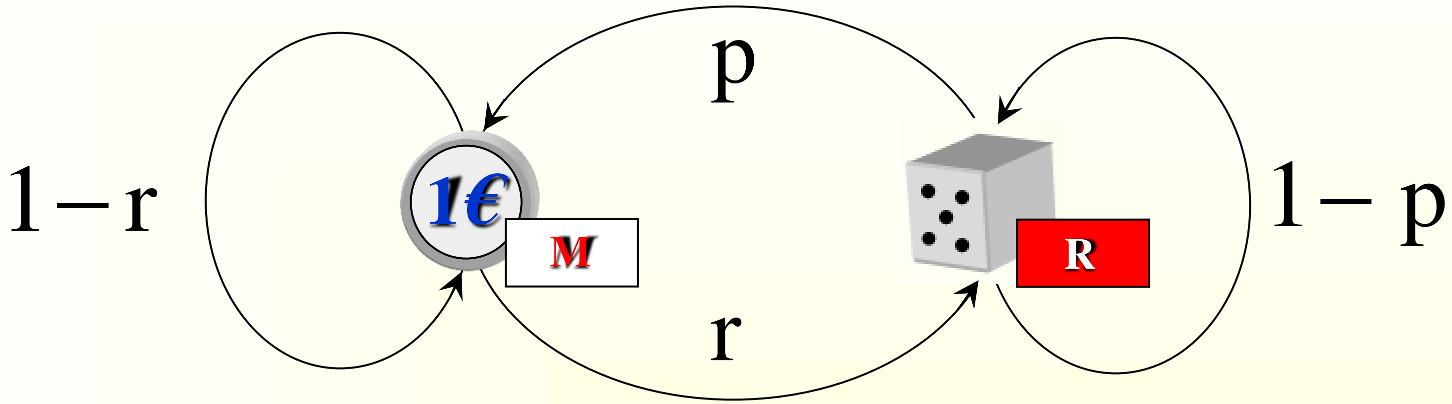


$$P\left(S_k\right)=\sum_{\forall S_{k-1}} P\left(S_k / S_{k-1}\right) P\left(S_{k-1}\right)$$

napr.

$$P\left(S_k=M\right)=P\left(S_{k-1}=M\right)(1-r)+P\left(S_{k-1}=R\right)p$$

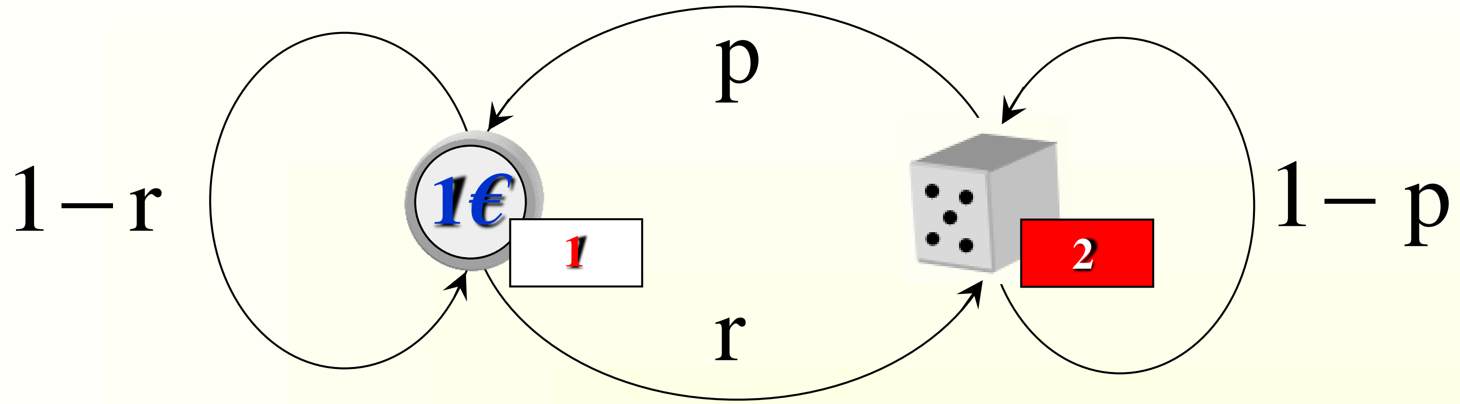
Pravdepodobnosť stavu procesu



$$\mathbf{P}(S_k) = (P(S_k = M), P(S_k = R)) =$$

$$= \mathbf{p}_k = (p_k(M), p_k(R))$$

Pravdepodobnosť stavu procesu



$$\left(p_k(1), p_k(2)\right) = \left(p_{k-1}(1), p_{k-2}(2)\right).\begin{pmatrix} 1-r & r \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1}.\mathbf{P}$$

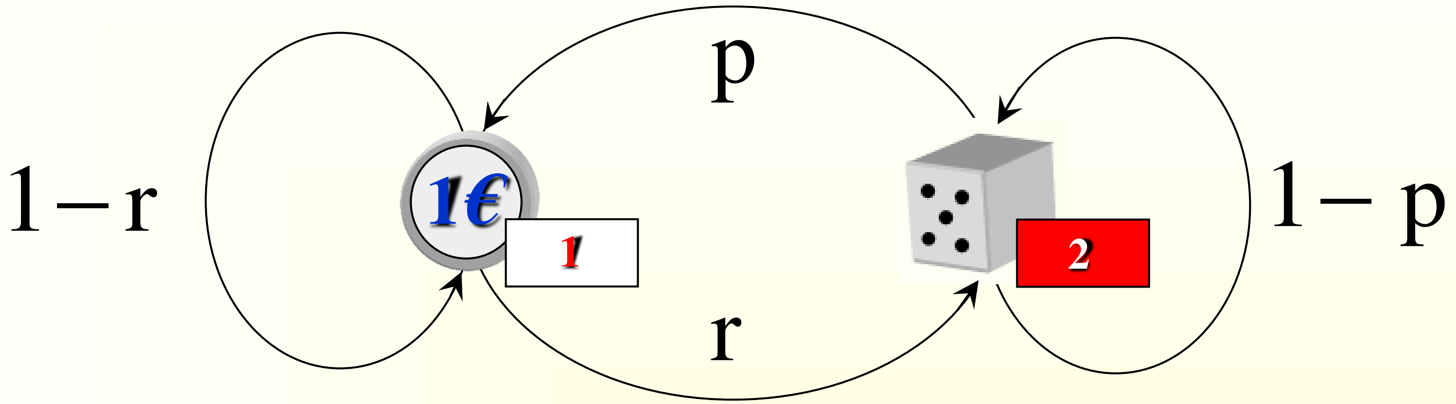
Pravdepodobnosť stavu procesu

Matica pravdepodobností prechodov

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-r & r \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Pravdepodobnosť stavu procesu



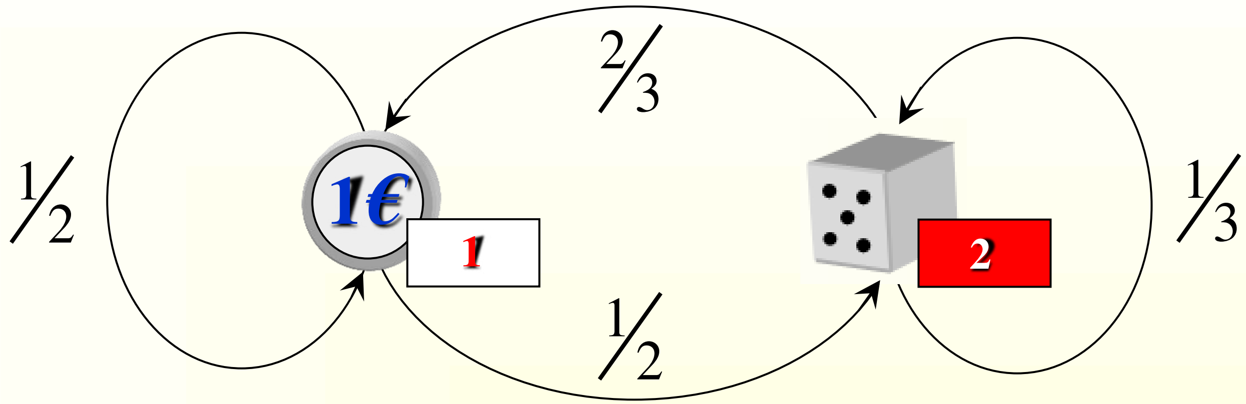
$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} . \mathbf{P}$$

$$\mathbf{p}_{k-1} = ?$$

$$\mathbf{p}_{k-1} = \mathbf{p}_{k-2} . \mathbf{P}$$

$$\mathbf{p}_0$$

Príklad

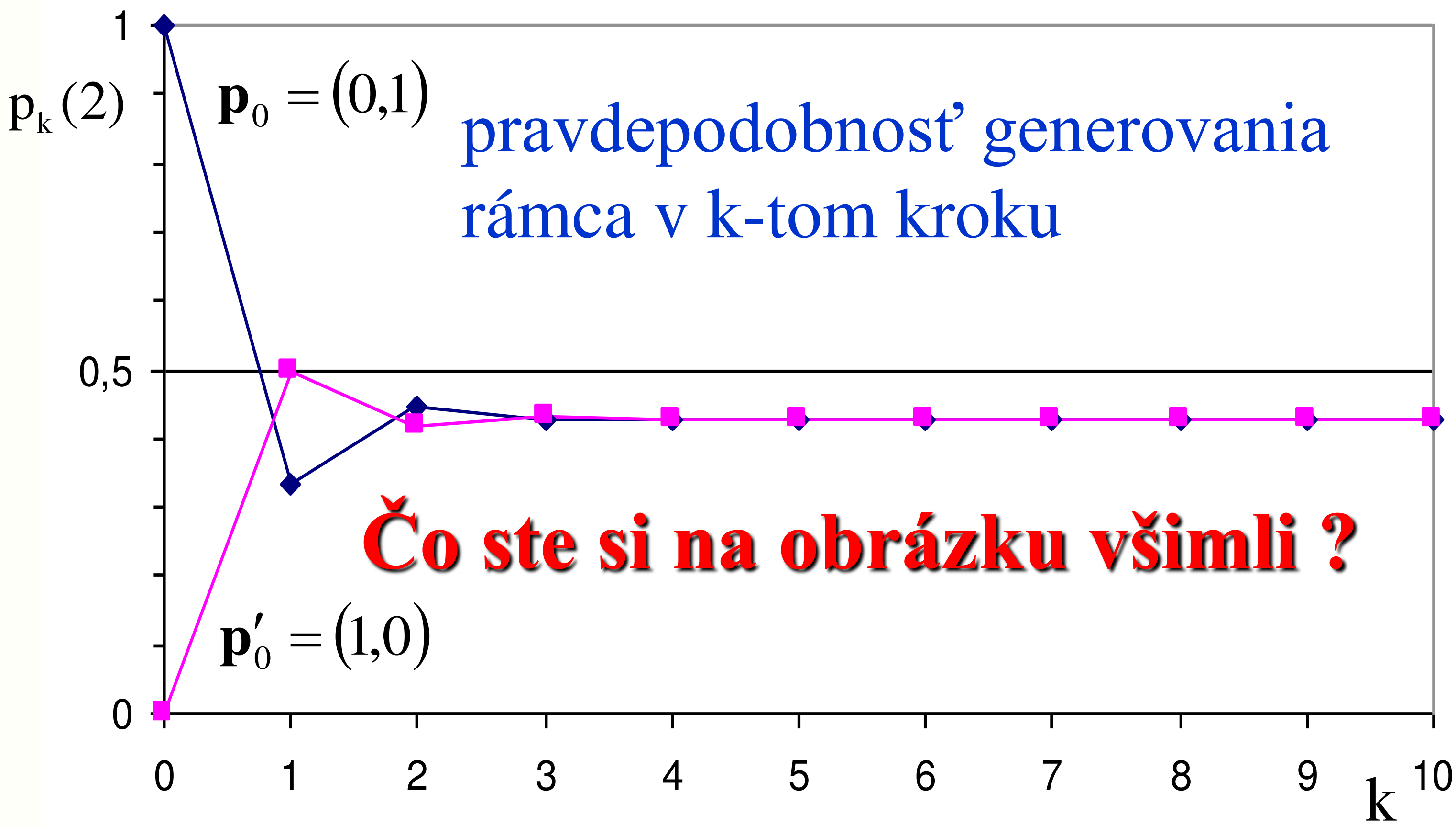


Aké je počiatočné rozdelenie pravdepodobnosti, ak na počiatku bol:

1. rámec $\mathbf{p}_0 = (0{,}1)$

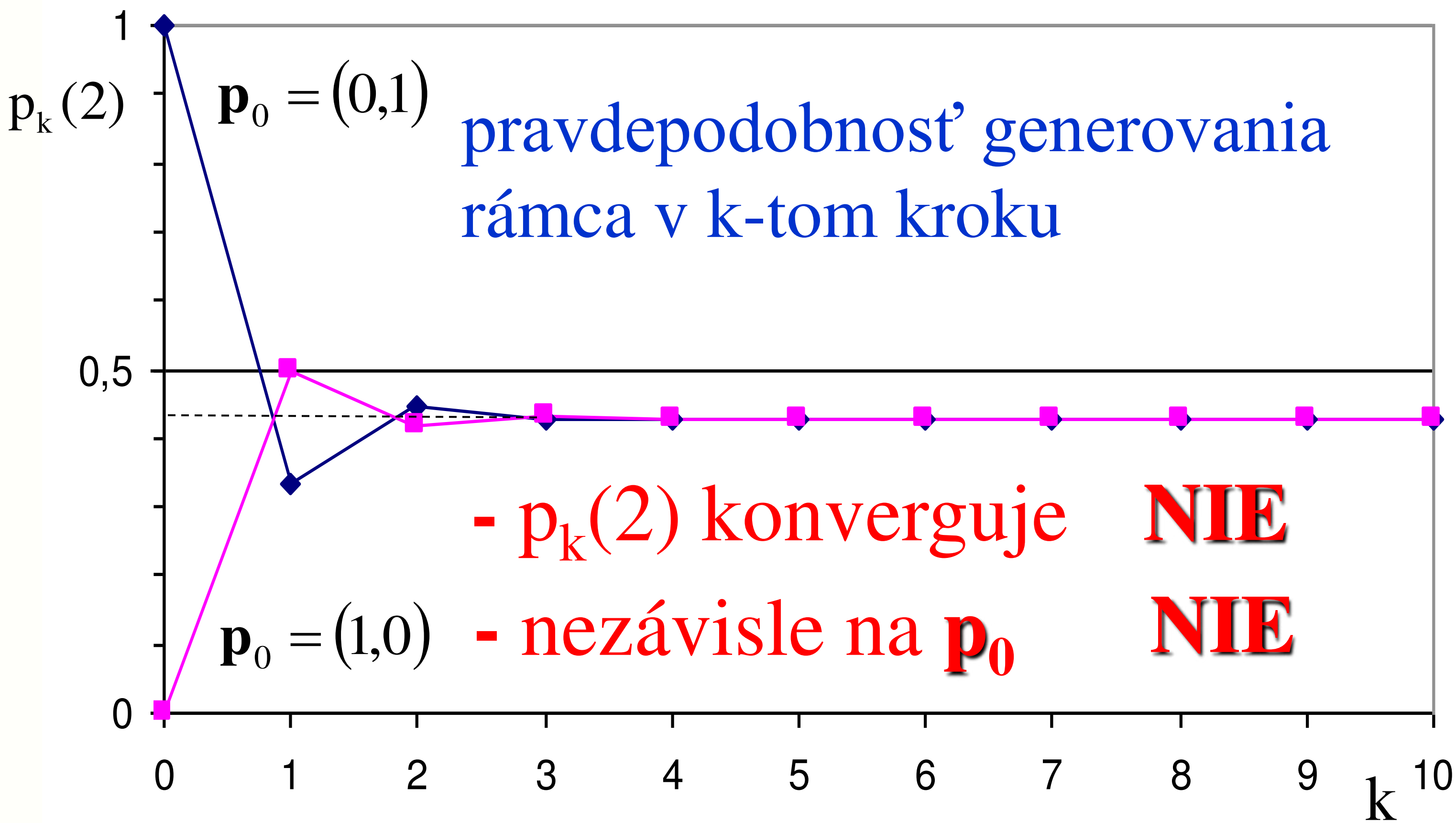
2. medzera $\mathbf{p}_0' = (1{,}0)$

Príklad



1
$p_k(2)$
$\mathbf{p}_0 = (0{,}1)$
pravdepodobnosť generovania rámca v k-tom kroku
0,5
Čo ste si na obrázku všimli ?
$\mathbf{p}_0' = (1{,}0)$
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
k

Príklad

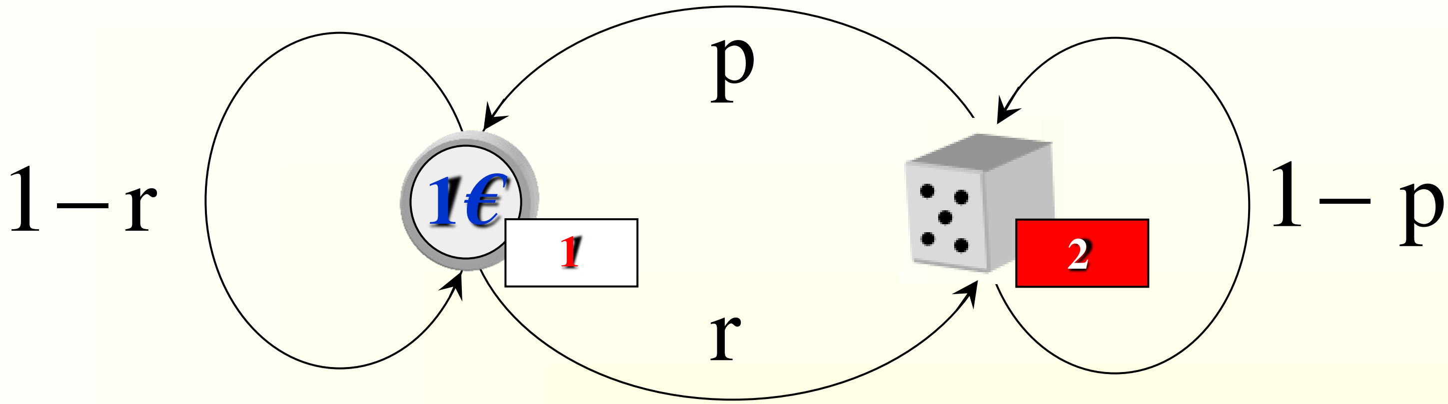


pravdepodobnosť generovania rámca v k-tom kroku

- $p_k(2)$ konverguje **NIE**
- nezávisle na $\mathbf{p_0}$ **NIE**

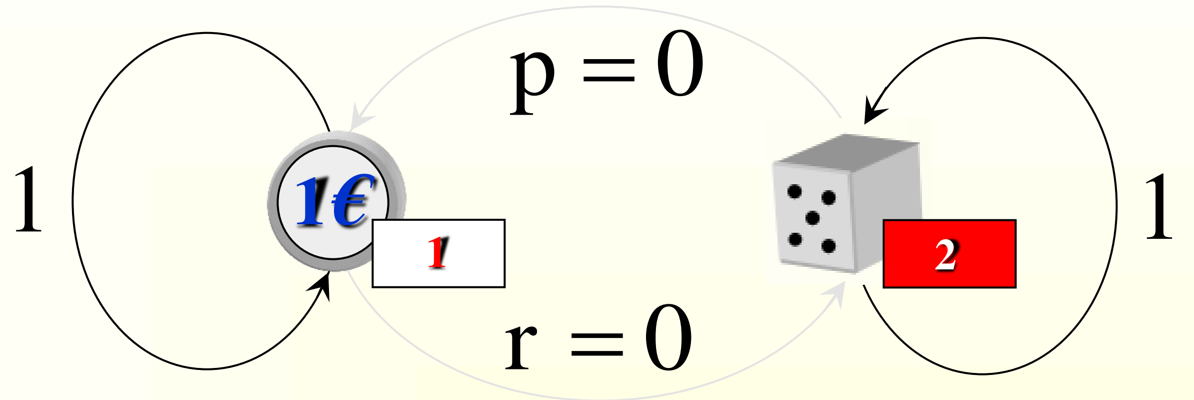
Platí to u tohto procesu pre každé p, r?

Príklad



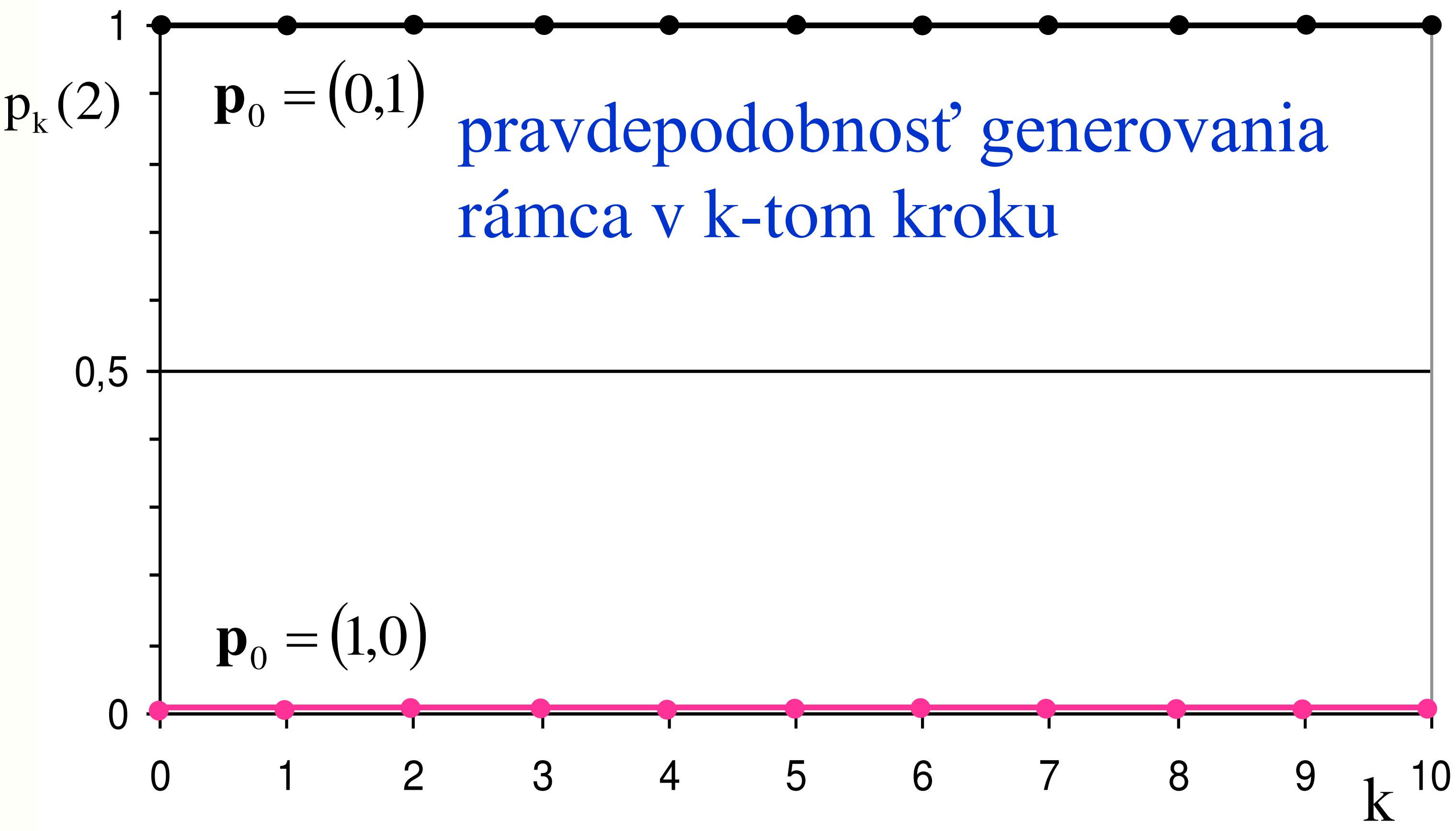
Vymyslite také p,r, aby postupnosť $p_2(k)$ konvergovala k číslu, ktoré závisí na p_0

Riešenie

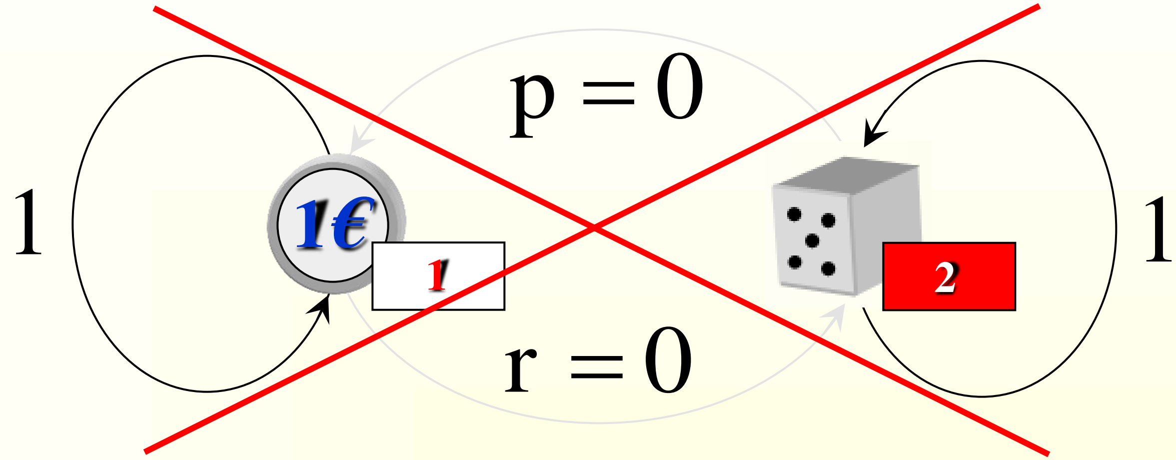


Vymyslite také p,r, aby postupnosť $p_2(k)$ konvergovala k číslu, ktoré závisí na p_0

Príklad

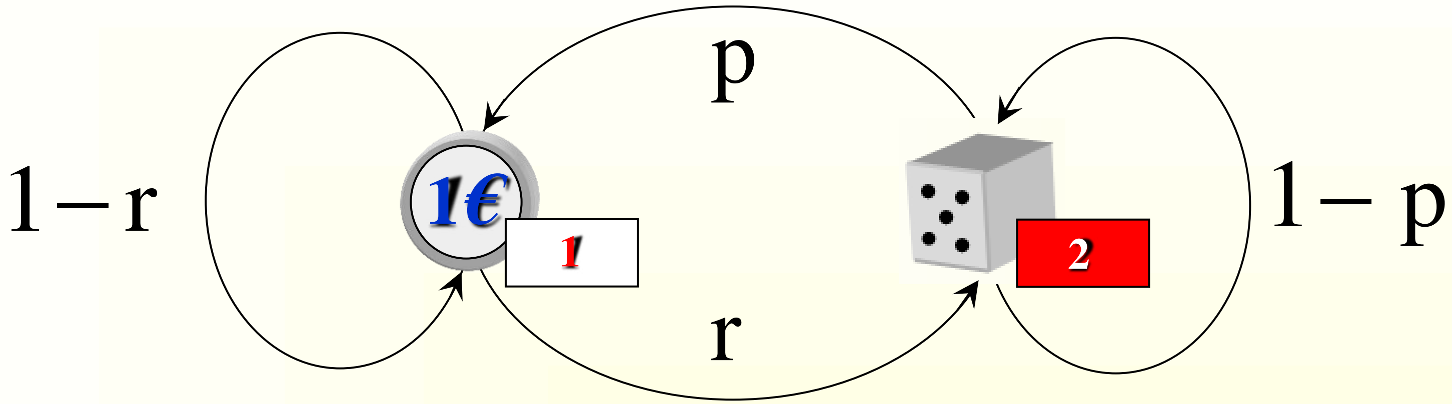

1
$p_k(2)$
$\mathbf{p}_0 = (0,1)$
pravdepodobnosť generovania rámca v k-tom kroku
0,5
$\mathbf{p}_0 = (1,0)$
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
k

Ergodický proces



Medzi ľubovoľnou dvojicou stavov existuje nenulová pravdepodobnosť prechodu na viac krokov

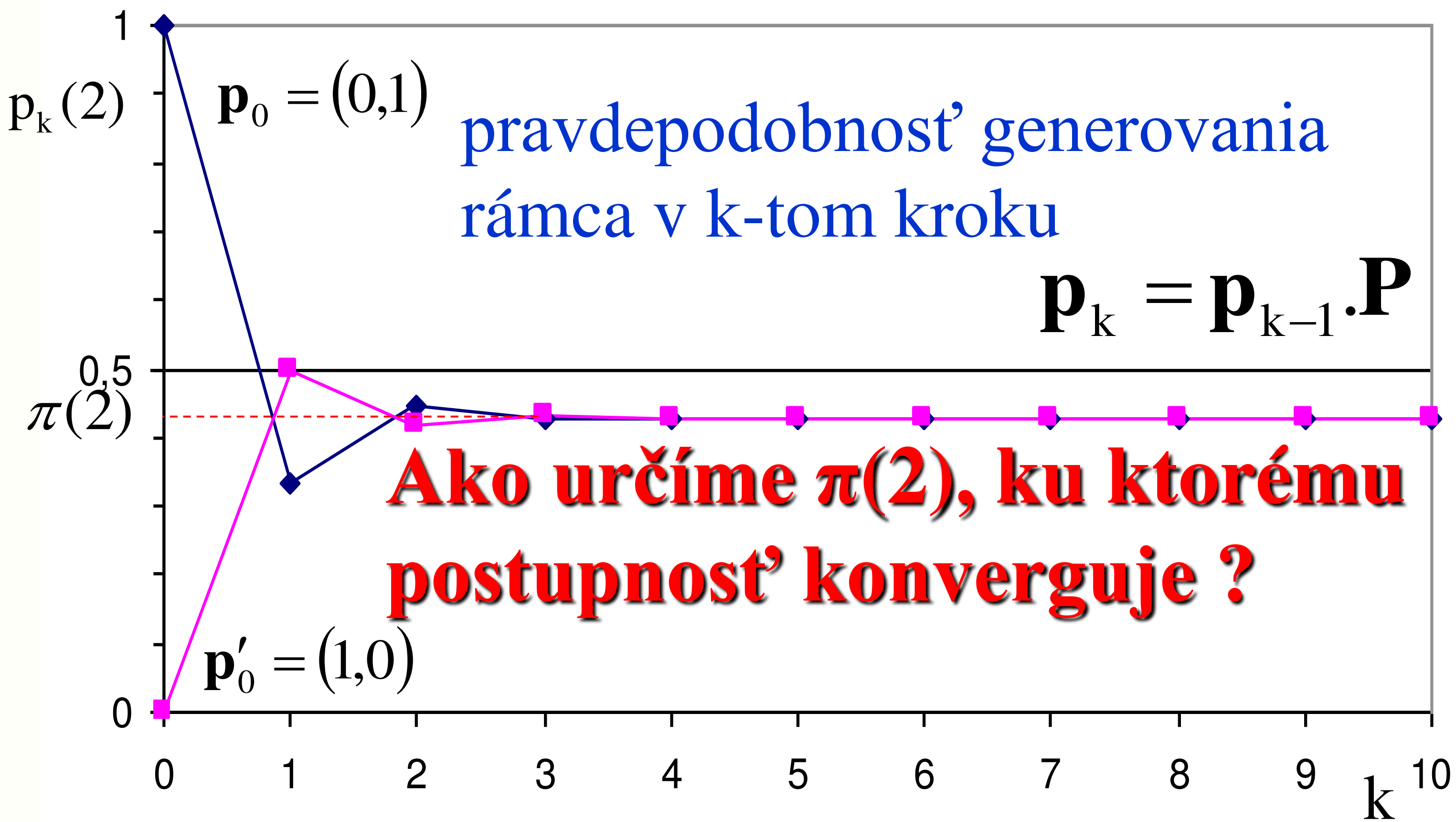
Príklad 2



Domáca úloha:

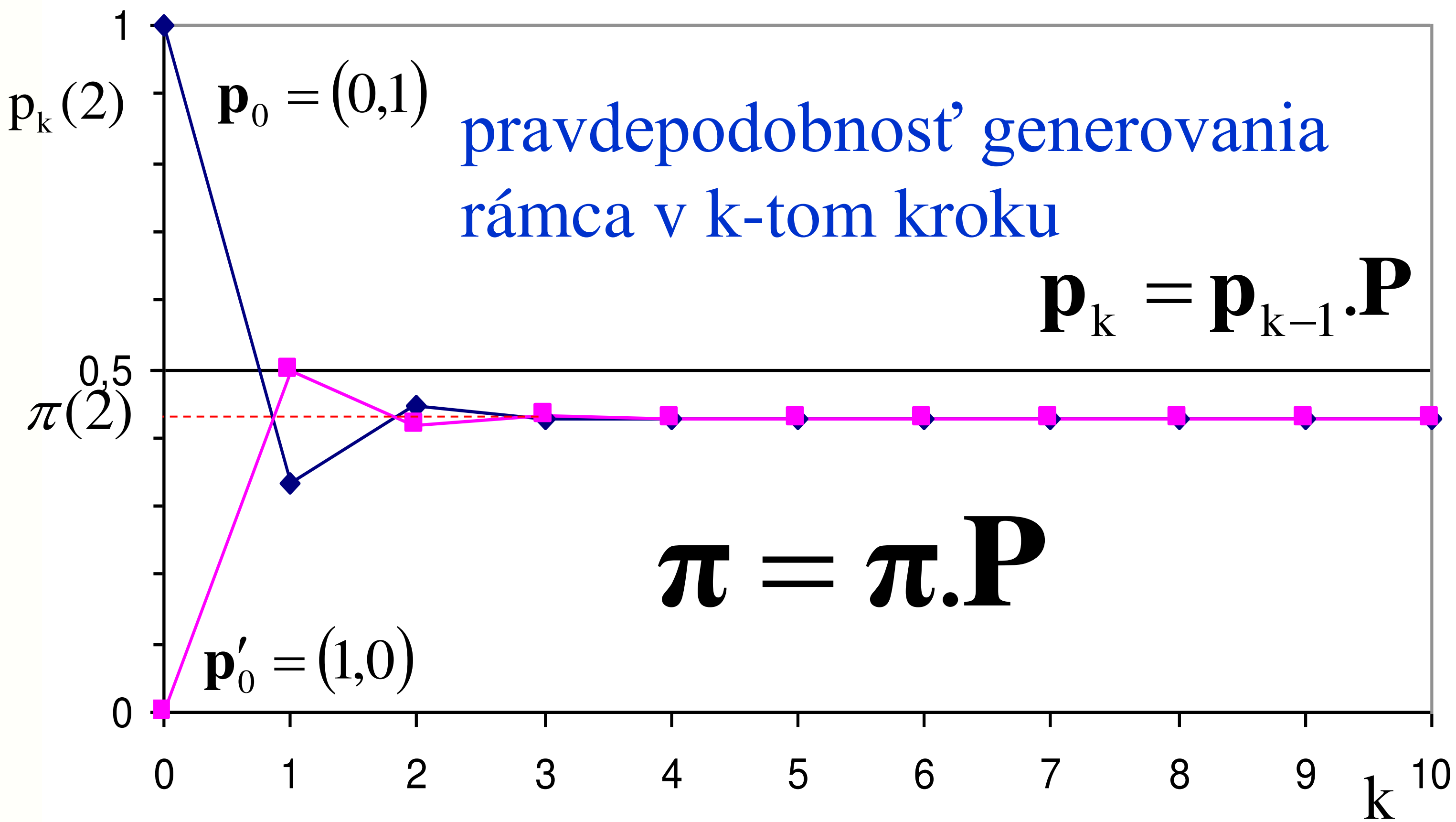
Vymyslite také p,r, aby postupnosť $p_2(k)$ nekonvergovala

Invariantné rozdelenie



$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1}$$

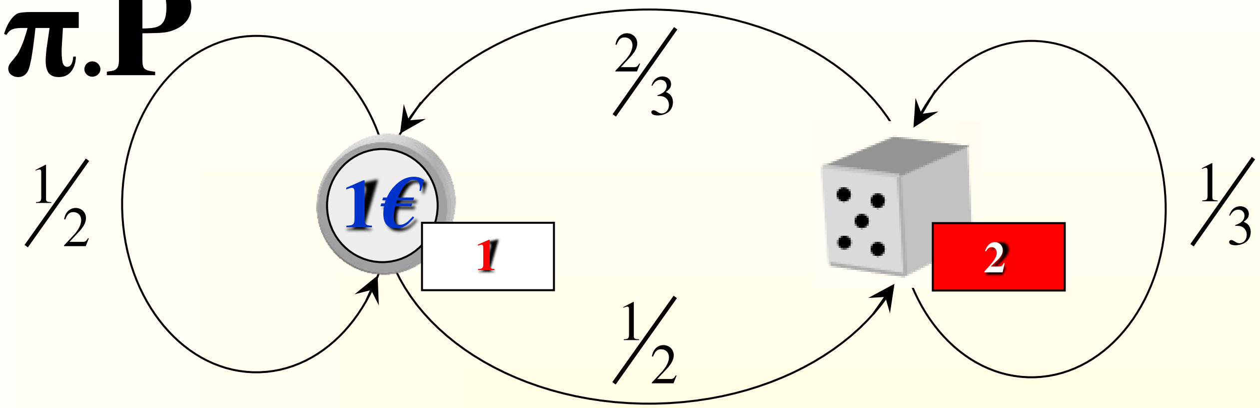
Invariantné rozdelenie



$$\boldsymbol{\pi} = (\pi(1), \pi(2))$$

Príklad

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}.\mathbf{P}$$



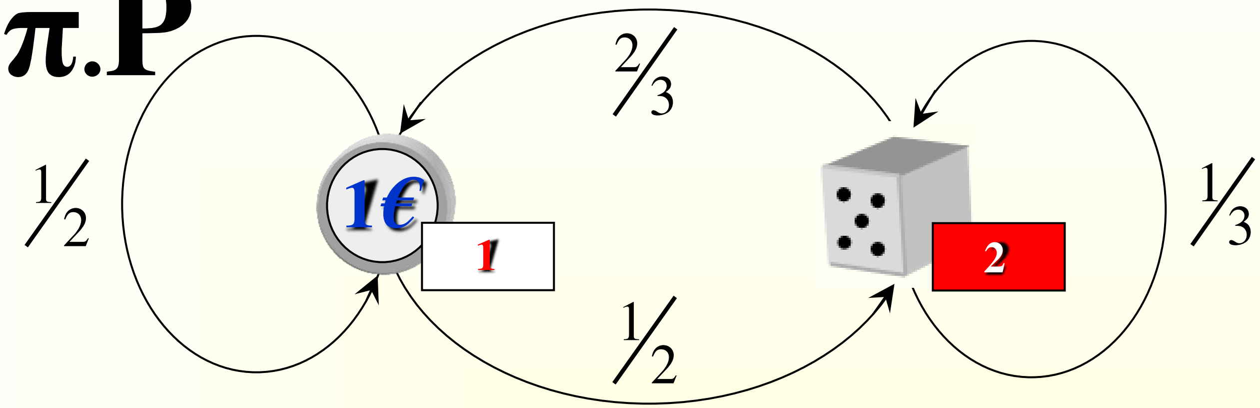
$$\pi(1) = \pi(1)\frac{1}{2} + \pi(2)\frac{2}{3}$$

vyriešte!

$$\pi(2) = \pi(1)\frac{1}{2} + \pi(2)\frac{1}{3}$$

Príklad

$\pi = \pi.\mathbf{P}$



Riešením sú <u>všetky</u> π také, že platí

$$\pi = (4\alpha, 3\alpha), \quad \alpha \in R$$

Čo s tým?

Príklad

Riešením je aj $\boldsymbol{\pi} = (4,3), \quad \alpha = 1$

$\boldsymbol{\pi} = (4,3)$ nie je rozdelením pravdepodobnosti

Aby ním bolo, musí platiť

$$4\alpha + 3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{7}$$

$$\boldsymbol{\pi} = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$$

Záver

Invariantné rozdelenie pravdepodobnosti

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi(1),\ldots,\pi(n))$$

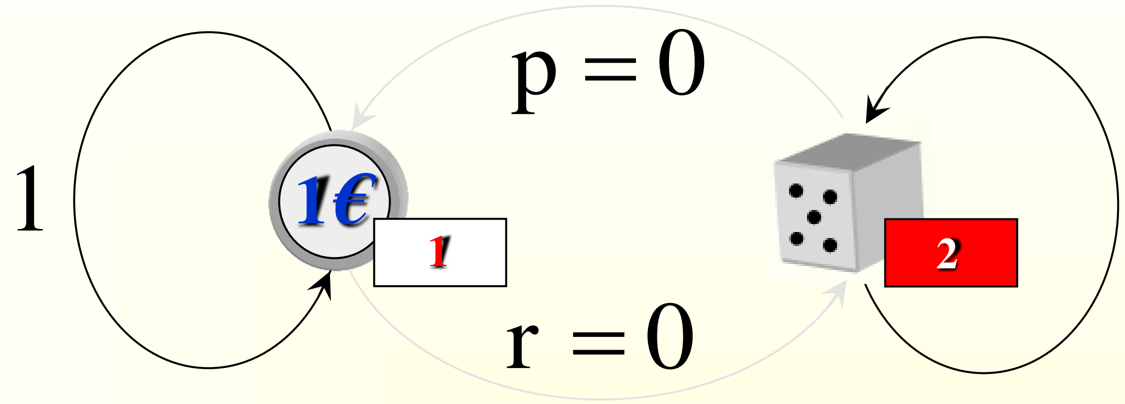
procesu so stavmi $\{S_1,\ldots,S_n\}$ a maticou pravdepodob-ností prechodov

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \ldots & p_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n,1} & \ldots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

nájdeme riešením sústavy lineárnych algebraických rovníc

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}\ , \quad \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$$

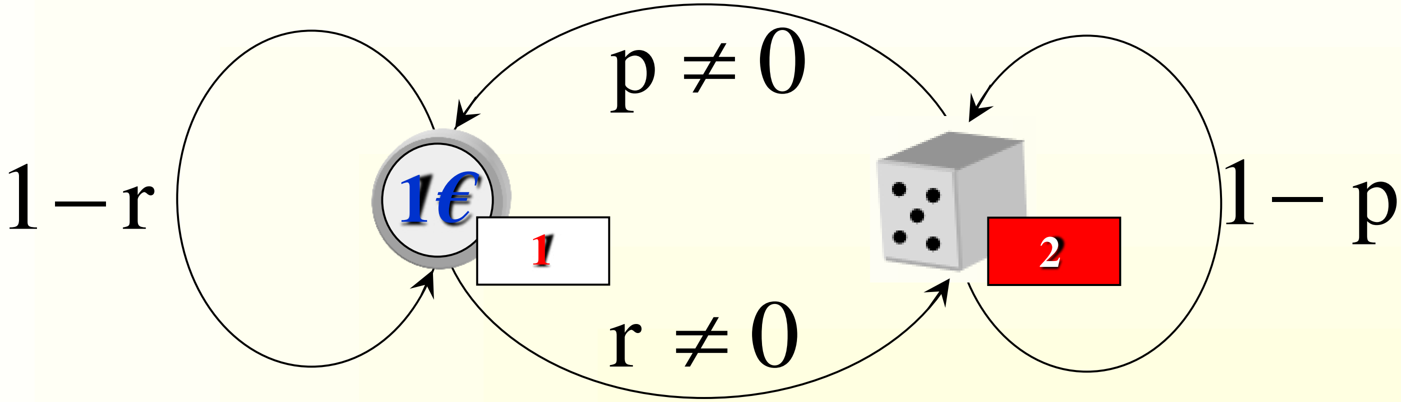
Úloha 1



Nájdite invariantné rozdelenie uvedeného neergodického procesu.

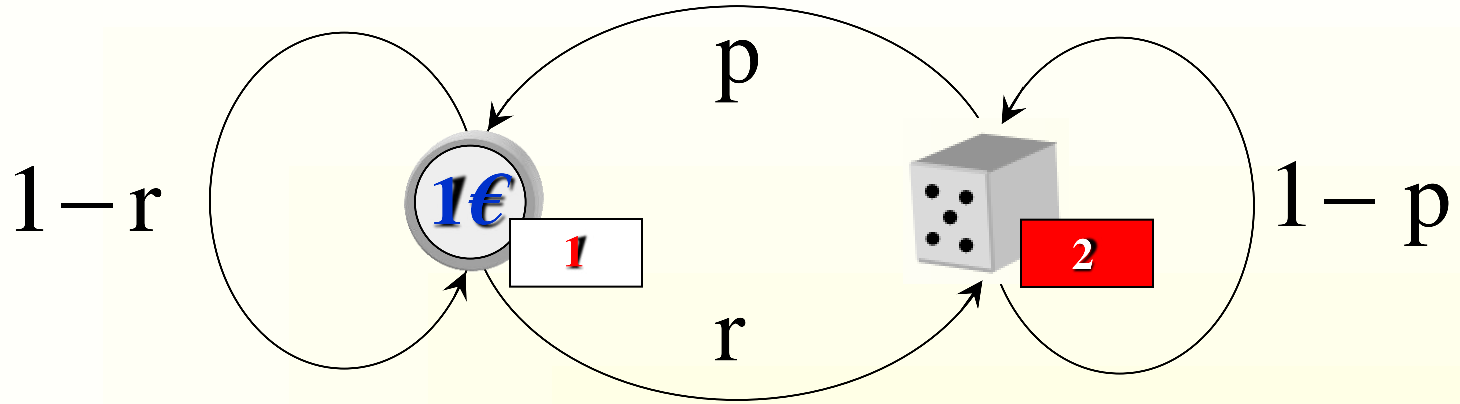
Nájdite invariantné rozdelenie iného neergodického procesu s dvomi stavmi.

Úloha 2



Nájdite invariantné rozdelenie uvedeného ergodického procesu.

Úloha 3



Naprogramujte rekurentný vzťah $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1}\mathbf{P}$

a zistite, ako závisí konvergencia $\mathbf{p}_k$

na matici pravdepodobností prechodov $\mathbf{P}$

a počiatočnom rozdelení $\mathbf{p}_0$.

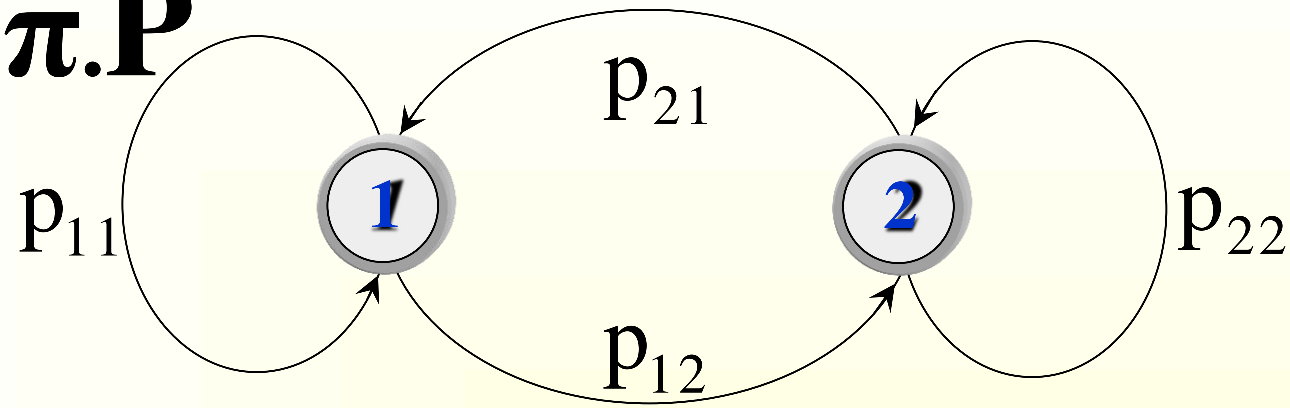
Úloha 4

Na linke s rýchlosťou 100 Mbit/s bol nameraný u toku s rámcami 40 Byte (dané veľkosťou tokenu v limitéri) stredný interval medzi rámcami 150 rámcov a stredný zhluk rámcov 25 rámcov. Vypočítajte pravdepodobnosť, že :

- náhodne vybraný slot obsahuje rámec,
- slot vzdialený o tri sloty bude prázdny,
- za interval 8ms príde viac než 200 rámcov.

Invariantné rozdelenie - rovnováha

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}.\mathbf{P}$$

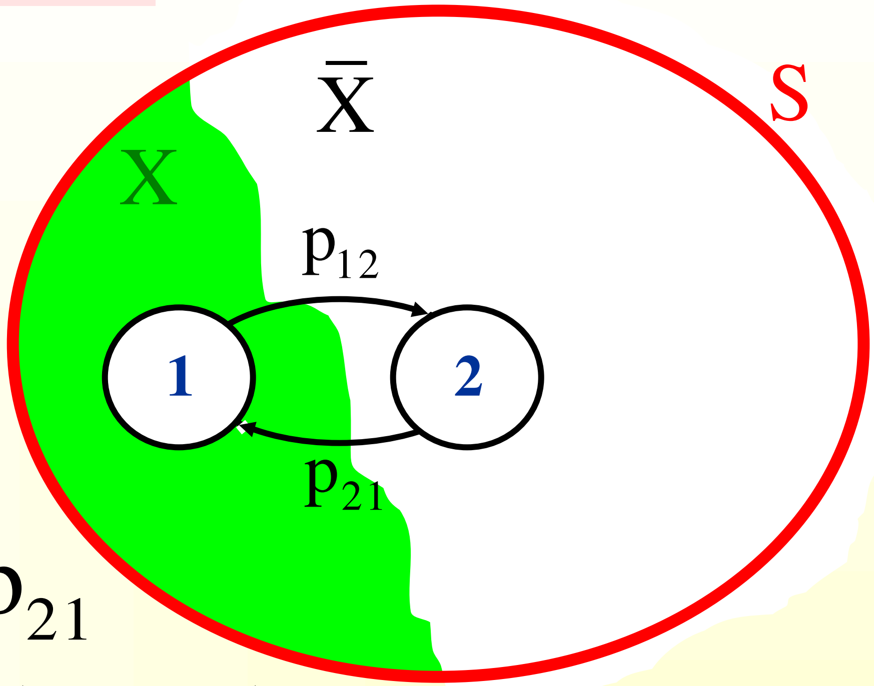


$$\pi(1) = \pi(1)\,p_{11} + \pi(2)\,p_{21}$$

$$\pi(1)\left(1 - p_{11}\right) = \pi(2)\,p_{21}$$

$$\pi(1)\,p_{12} = \pi(2)\,p_{21}$$

Veta o zachovaní toku



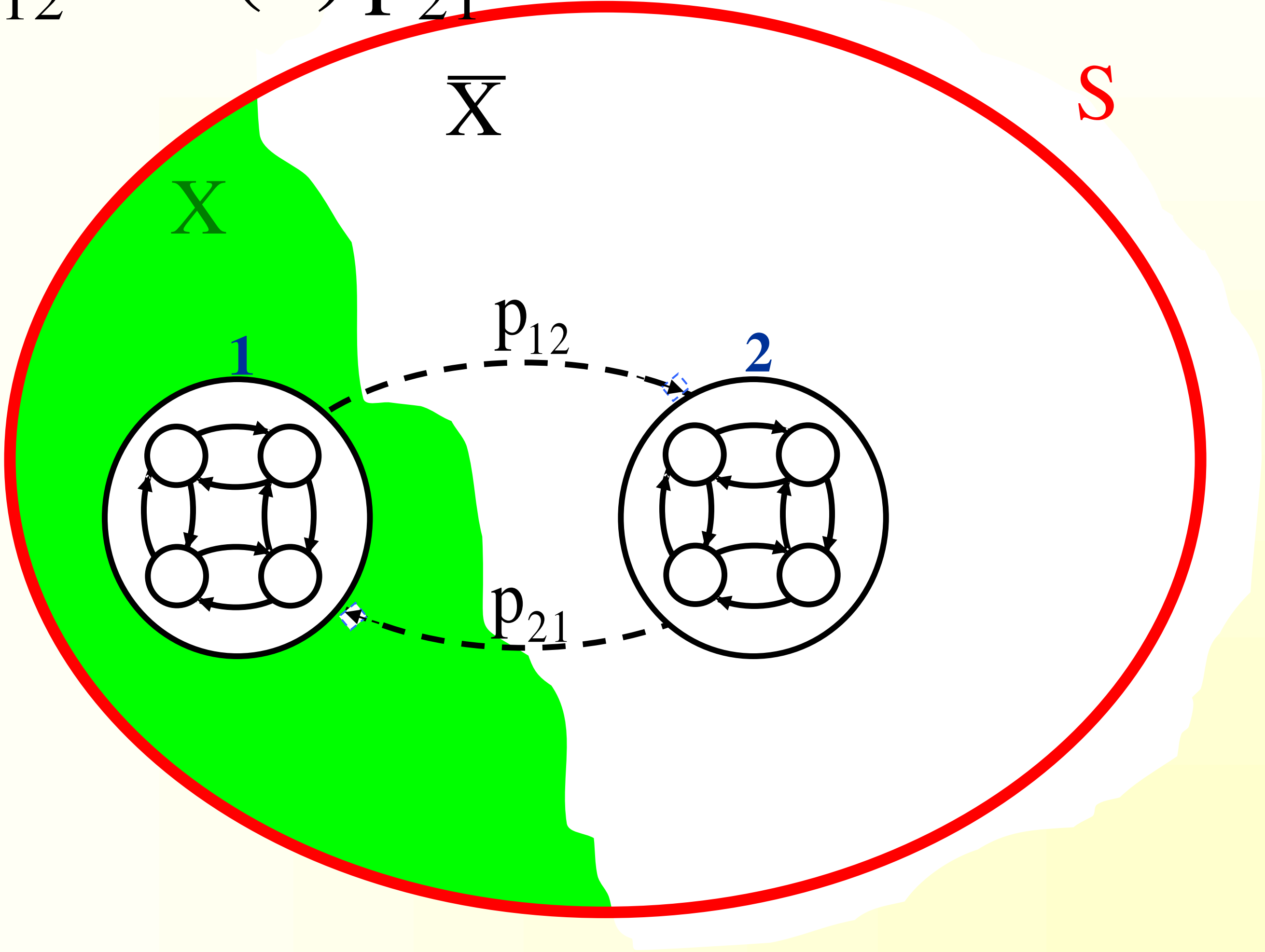
$$\pi(1)\,p_{12} = \pi(2)\,p_{21}$$

$$P\left(x_t \in X \cap x_{t+1} \in \bar{X}\right) = P\left(x_t \in \bar{X} \cap x_{t+1} \in X\right)$$

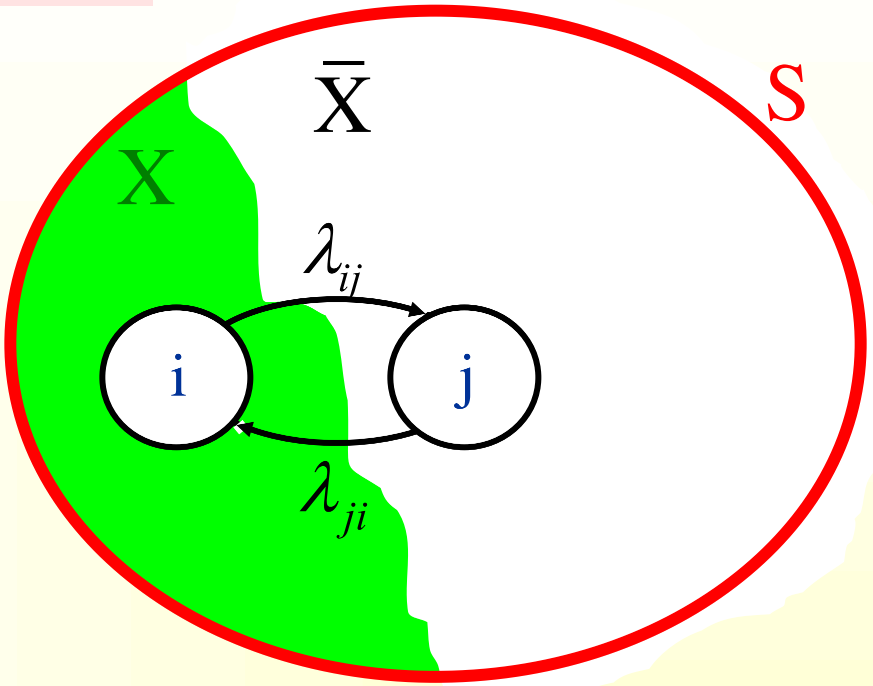
$$\Phi_{X\bar{X}} = \Phi_{\bar{X}X}$$

Veta o zachovaní toku

$$\pi(1)\,p_{12} = \pi(2)\,p_{21}$$



Veta o zachovaní toku



$$\Phi_{X\bar{X}} = \Phi_{\bar{X}X}$$

$$\sum_{i \in X} \sum_{j \in \bar{X}} \pi_i \, p_{ij} = \sum_{j \in \bar{X}} \sum_{i \in X} \pi_j \, p_{ji}$$

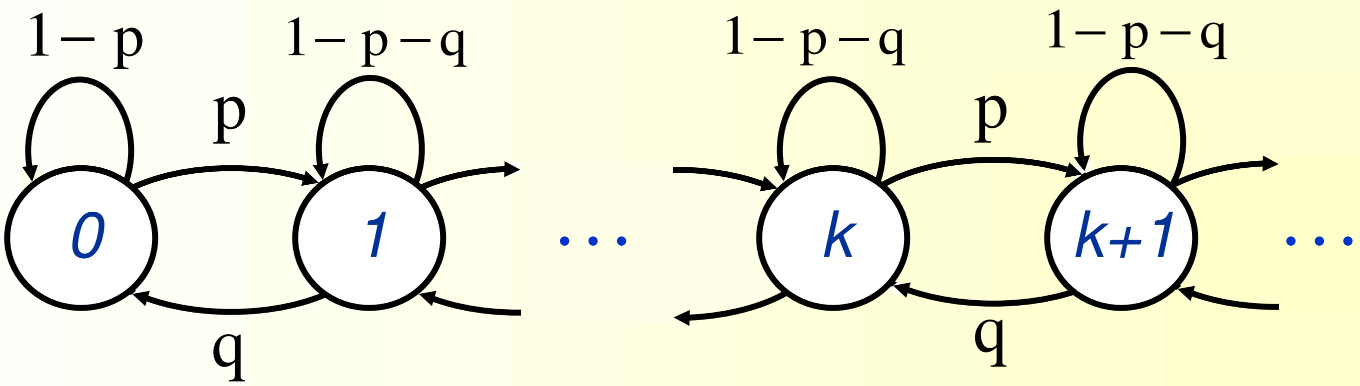
Formálny dôkaz za domácu úlohu

Príklad

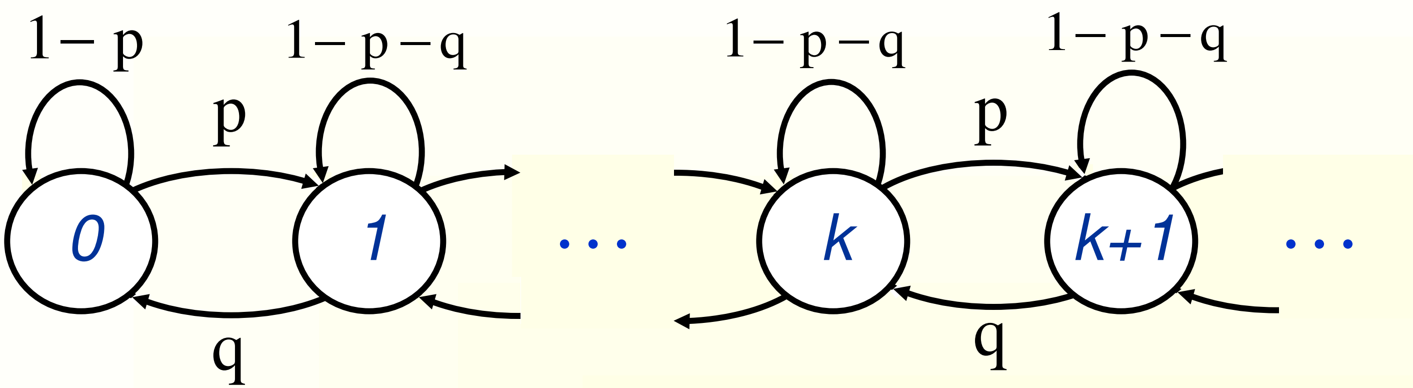
Matica prechodov

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 1-p-q & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 1-p-q & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Graf prechodov



Invariantné rozdelenie



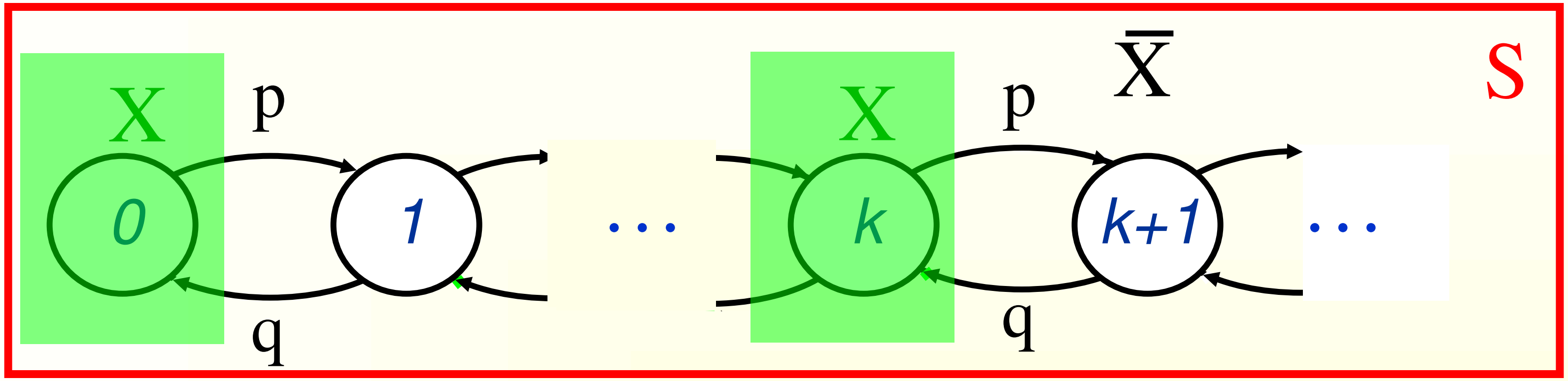
$$\pi_0 = \pi_0(1-p) + \pi_1 q$$

$$\pi_k = \pi_{k-1} p + \pi_k(1-p-q) + \pi_{k+1} q, \quad k = 1,2,\ldots$$

$$\pi_0 p = \pi_1 q$$

$$\pi_k(p+q) = \pi_{k-1} p + \pi_{k+1} q, \quad k = 1,2,\ldots$$

Veta o zachovaní toku

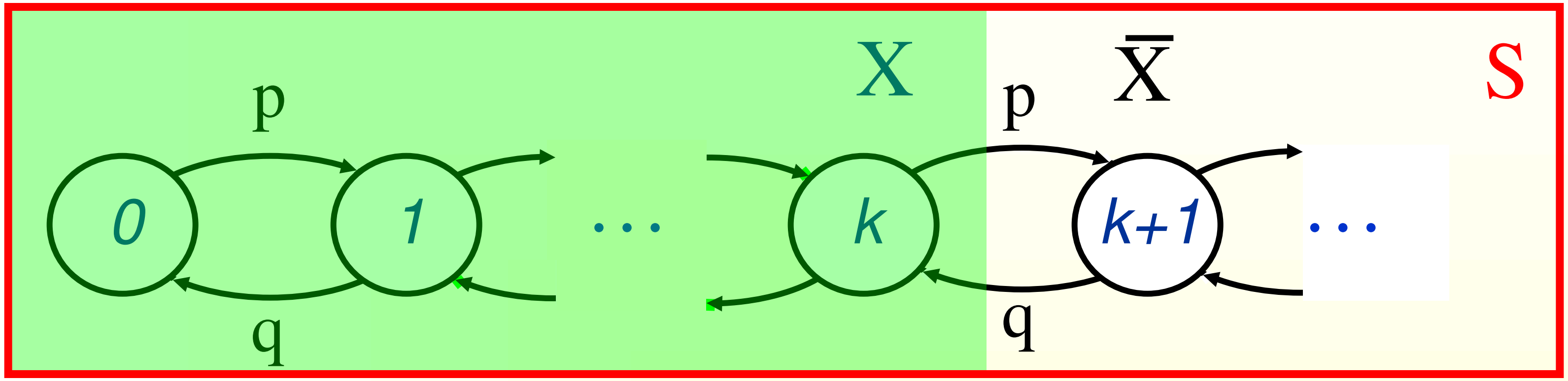


Veta o zachovaní toku pravdepodobnosti

$$\pi_0 p = \pi_1 q$$

$$\pi_k (p+q) = \pi_{k-1} p + \pi_{k+1} q, \quad k = 1,2,\ldots$$

Iné rozdelenie stavov?



$$\pi_k \, p = \pi_{k+1} q, \quad k = 0,1,\ldots$$

$$\pi_{k+1} = \frac{p}{q}\pi_k = \rho\pi_k, \quad k = 0,1,\ldots$$

Invariantné rozdelenie

$$\pi_k = \rho^k \pi_0, \quad k = 0,1,\ldots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$$

Riešenie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \pi_0 = 1 \Rightarrow \quad \pi_0 = \left(\frac{1}{1-\rho} \right)^{-1}, \quad \rho < 1$$

$$\boxed{\pi_k = \rho^k (1 - \rho) \quad , k = 0,1,\ldots}$$

Invariantné rozdelenie

Postup:

1. **určenie stavov**
2. určenie rezov
3. napísanie rovníc o zachovaní toku
4. vyriešenie rovníc

Ďakujem za pozornosť