Kapitola 2

Normálne disjunktívne formy. Normálne konjunktívne formy. Kreslenie elektrickej schémy. Kontaktné systémy.

Disjunktívne formy. Kreslenie štrukturálnej schémy. Oneskorenie. Minimalizácia logických výrazov. Vytváranie pravidelných konfigurácii v mape (grafická metóda). Metóda Quine-Mc Cluskeyho. 1. Normálna Shafferova forma (1.NSF) a 2. Normálna Pierceova forma (2.NPF). Konjunktívne formy. 1. Normálna Pierceova forma (1.NPF) a 2. Normálna Shafferova forma (2.NSF). Kontaktné systémy. Neúplne definovaná logická funkcia.

Zápis Karnaughovej mapy do algebrickej formy

Karnaughovu mapu možno popísať viacerými spôsobmi. Najčastejšie spôsoby sú popis „jednotiek“ v disjunktívnej forme a popis „núl“ v konjunktívnej forme.

Na základe voľby použitých logických hradiel ďalej upravujeme získanú formu. Častou požiadavkou je implementácia s použitím jediného typu logických obvodov. To spĺňajú tri základné logické funkcie NAND, NOR a XOR. Budeme sa zaoberať len prvými dvoma.

Disjunktívne formy

Príklad 2.1

Zapíšte disjunktívnu formu nasledovnej Karnaughovej mapy, kde $y=f(h_1, h_2, h_3)$.

a) y

0	0	1	0
1	0	0	1

b) h_1

0	0	1	0
0	0	0	0

h_2

0	0	0	0
1	0	0	0

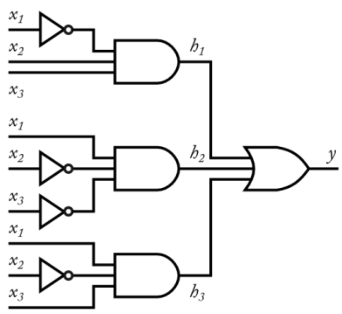
h_3

0	0	0	0
0	0	0	1

Obrázok 1. Karnaughova mapa troch premenných – a) a jej konjunktívny rozklad – b).

Riešenie

Zjednotením h_1, h_2 a h_3 získame y. Môžeme teda zapísať $y=h_1+h_2+h_3$ alebo $y = h_1 \vee h_2 \vee h_3$. Samostatné jednotky v mapách popíšeme disjunkciou, teda $h_1 = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $h_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$ a $h_3 = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$. Po dosadení do výrazu pre y dostávame $y = \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$. Predošlý algebrický zápis nazývame *úplná normálna disjunktívna forma* – ÚNDF a predstavuje zápis, v ktorom každý súčin obsahuje plný počet (rád) nezávislých vstupných premenných. ÚNDF predstavuje ten najzložitejší spôsob zápisu.



Obrázok 2. Normálna sieť – štrukturálna schéma z príkladu. Schéma pozostáva z troch vrstiev (druhá vrstva je tvorená log. hradlami AND a tretia log. hradlom OR).

Na obr. 2 je zakreslená elektrická schéma, ktorú voláme *normálna sieť.* Vlastnosti normálnej siete sú:

- je bez „spätnej“ väzby,
- obsahuje vetvenie (fan-out),
- zaťažiteľnosť výstupov.

Oneskorenie normálnej siete

Pri zmene hodnôt nezávislých premenných sa výstup logického obvodu nezmení okamžite. Je k tomu potrebný určitý čas. Pre jednoduchosť predpokladajme „jednotkové“ oneskorenie pre každý logické hradlo. Potom oneskorenie zapojenia v príklade 2.1 je *tri časové jednotky*.

Minimalizácia logických výrazov

Minimalizácia zložitosti elektrickej schémy je významnou požiadavkou pri vytváraní logických obvodov. Jedným zo spôsobov je úprava logických výrazov s použitím pravidiel Booleovej algebry. Iným spôsobom je hľadanie takého zápisu hodnôt Karnaughovej mapy, ktorý je minimálny. Znižujeme tak rozmery, nároky na výkon výstupov (fan-out), vyžarovanie tepla a cenu.

Pravidelná konfigurácia v mape (Grafická metóda)

Pravidelná konfigurácia v Karnaughovej mape zahŕňa skupinu bodov s rovnakou hodnotou. Každá pravidelná konfigurácia má stupeň – *s*. Vlastnosti pravidelnej konfigurácie:

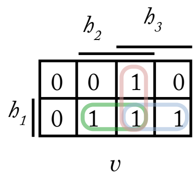
- zahŕňa práve 2^s bodov,
- každý bod má práve *s* - susedných bodov, ktoré sú súčasťou konfigurácie.

Dva body sú susedné, keď sa líšia v hodnote jednej premennej.

Nech je *n* počet premenných, *R* rád súčinu a *s* je stupeň konfigurácie. Potom platí *R* = *n* - *s*. Zvyšovanie stupňa konfigurácie má bežne pozitívny vplyv na zložitosť štrukturálnej schémy logického obvodu.

Príklad 2.2

Nájdite optimálne (pravidelné) konfigurácie v Karnaughovej mape funkcie M3 (majorita z troch, pr. hlasovacieho systému).



Obrázok 3. Karnaughova mapa funkcie majority z troch.

Riešenie

Zapíšme ÚNDF pre funkciu M3

$$v = h_1 \cdot h_2 \cdot \bar{h}_3 + \bar{h}_1 \cdot h_2 \cdot h_3 + h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 + h_1 \cdot \bar{h}_2 \cdot h_3$$

a teraz výraz pre pravidelné konfigurácie (sú zakreslené farebne v obr. 3):

$$v = h_1 \cdot h_2 + h_2 \cdot h_3 + h_1 \cdot h_3$$

ktorý predstavuje zároveň *optimálne* konfigurácie.

Ak vieme, že sme vytvorili „najlepšie“ t. j. optimálne konfigurácie tak hovoríme o *iredudantnej normálnej disjunktívnej forme* – INDF. Inak hovoríme o normálnej disjunktívnej forme - NDF. Nájsť optimálne konfigurácie pre malý počet premenných je pomerne jednoduchá záležitosť. S rastúcim počtom nezávislých a závislých premenných rastie rýchlo i zložitosť výpočtu. V praxi bežne preto vystačíme s výsledkom, ktorý získame použitím niektorých heuristických algoritmov.

Metóda Quine – Mc Cluskeyho

Pri určovaní optimálnych konfigurácií v počítači je grafická metóda nevhodná. Autori Quine a Mc Cluskey zostavili tabuľkovú metódu, ktorá je prehľadná a hľadanie konfigurácií pozostáva z niekoľkých krokov.

Z Á U J E M C I nájdu dobrý popis metódy v učebnici *Logické systémy, 2. vydanie z roku 1986* od autorov Frištacký, Kolesár a kol.

Normálne formy

Ako sme uviedli v úvode kapitoly. Naším cieľom je realizácia *normálnej siete* s použitím jediného typu logických členov. Ukážme, že logické funkcie NAND respektíve NOR k tomu postačujú a predstavujú tak samy o sebe *úplný systém logických funkcií*. Je možné z nich vytvoriť všetky ostatné logické funkcie.

Logická funkcia NAND

$\overline{a \cdot b} = a|b$

vytvorenie negácie: $\overline{a \cdot a} = a|a = \bar{a} = a|$

vytvorenie logického súčtu: $(a|\,)|(b|\,) = \bar{a}|\bar{b} = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} = \bar{\bar{a}} \vee \bar{\bar{b}} = a \vee b$

vytvorenie logického súčinu: $(a|b)| = \overline{\overline{a \cdot b}} = a \cdot b$

Logická funkcia NOR

$\overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \downarrow x_2$

vytvorenie negácie: $\overline{a \vee a} = a \downarrow a = \bar{a} = a \downarrow$

vytvorenie logického súčinu: $(a \downarrow) \downarrow (b \downarrow) = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}} = \overline{\overline{a \cdot b}} = a \cdot b$

vytvorenie logického súčtu: $(a \downarrow b) \downarrow = \overline{\overline{a \vee b}} = a \vee b$

1. Normálna Shafferova forma

Zápis (I)NDF prevedieme do Shafferovej a Pierceovej funkcie úpravami výrazu podľa pravidiel Booleovej algebry a použitím De Morganových zákonov.

1. Normálna Shafferova forma (1. NSF)

$$
\begin{aligned}
y &= (x_{11}|x_{12}|\dots|x_{1a})|(x_{21}|x_{22}|\dots|x_{2b})|\dots|(x_{n1}|x_{n2}|\dots|x_{nm}) \\
&= \overline{(\overline{x_{11} \cdot x_{12} \cdot \dots \cdot x_{1a}}) \cdot (\overline{x_{21} \cdot x_{22} \cdot \dots \cdot x_{2b}}) \cdot \dots \cdot (\overline{x_{n1} \cdot x_{n2} \cdot \dots \cdot x_{nm}})} \\
&= (\overline{\overline{x_{11} \cdot x_{12} \cdot \dots \cdot x_{1a}}}) + (\overline{\overline{x_{21} \cdot x_{22} \cdot \dots \cdot x_{2b}}}) + \cdots + (\overline{\overline{x_{n1} \cdot x_{n2} \cdot \dots \cdot x_{nm}}}) \\
&= (x_{11} \cdot x_{12} \cdot \dots \cdot x_{1a}) + (x_{21} \cdot x_{22} \cdot \dots \cdot x_{2b}) + \cdots + (x_{n1} \cdot x_{n2} \cdot \dots \cdot x_{nm})
\end{aligned}
$$

Posledný riadok tu predstavuje výraz v NDF a prvý riadok 1. NSF. Prepis (I)NDF do 1. NSF urobíme tak, že súčiny uzavrieme do zátvoriek a všetky operátory nahradíme Shafferovým operátorom. Ak v NDF zápis nie je „úplný“ vieme si ho ľahko doplniť (jedná sa o prípady: jediná premenná v súčine; chýbajúci logický súčet aspoň dvoch logických súčinov). Schému zapájame s hradlami typu NAND.

2. Normálna Pierceova forma

2. Normálna Pierceova forma (2. NPF)

$$
\begin{aligned}
y &= [(x_{11} \downarrow x_{12} \downarrow \cdots \downarrow x_{1a}) \downarrow (x_{21} \downarrow x_{22} \downarrow \cdots \downarrow x_{2b}) \downarrow \cdots \\
&\qquad \downarrow (x_{n1} \downarrow x_{n2} \downarrow \cdots \downarrow x_{nm})] \downarrow \\
&= \overline{\overline{(\overline{x_{11} \vee x_{12} \vee \ldots \vee x_{1a}}) \vee (\overline{x_{21} \vee x_{22} \vee \ldots \vee x_{2b}}) \vee \ldots \vee (\overline{x_{n1} \vee x_{n2} \vee \ldots \vee x_{nm}})}} \\
&= (\overline{x_{11} \vee x_{12} \vee \ldots \vee x_{1a}}) \vee (\overline{x_{21} \vee x_{22} \vee \ldots \vee x_{2b}}) \vee \ldots \vee (\overline{x_{n1} \vee x_{n2} \vee \ldots \vee x_{nm}}) \\
&= (\bar{x}_{11} \cdot \bar{x}_{12} \cdot \ldots \cdot \bar{x}_{1a}) + (\bar{x}_{21} \cdot \bar{x}_{22} \cdot \ldots \cdot \bar{x}_{2b}) + \cdots + (\bar{x}_{n1} \cdot \bar{x}_{n2} \cdot \ldots \cdot \bar{x}_{nm})
\end{aligned}
$$

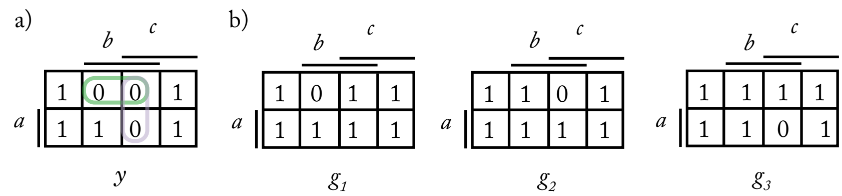
Posledný riadok tu predstavuje výraz v NDF, kde je negovaná každá premenná a prvý riadok 2. NPF. Prepis (I)NDF do 2. NPF urobíme tak, že súčiny uzavrieme do zátvoriek a všetky operátory nahradíme Pierceovým operátorom, negujeme každú premennú a na celý výraz aplikujeme Pierceov operátor. Pravidlá pre „neúplný" tvar NDF sú rovnaké ako pri 1. NSF. Schému zapájame s hradlami typu NOR.

Výrobcovia súčiastok ponúkajú široký sortiment logických hradiel typu NAND tzv. malej hustoty integrácie, preto sú obe uvedené formy – 1. NSF a 2. NPF najpoužívanejšie. V ďalšej časti sa pozrieme na vytváranie konfigurácií v Karnaughovej mape z „núl" a ich zápis s použitím len logických členov NOR resp. NAND.

Konjunktívne formy

Príklad 2.3

Zapíšte konjunktívnu formu nasledovnej Karnaughovej mapy, kde $y=f(a, b, c)$.



Obrázok 4. Karnaughova mapa troch premenných – a) a jej disjunktívny rozklad – b).

Riešenie

Prienikom g_1, g_2 a g_3 získame y. Môžeme teda zapísať $y=g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$. Samostatné nuly v mapách popíšeme konjunkciou, teda $g_1 = a \vee \bar{b} \vee c$, $g_2 = a \vee \bar{b} \vee \bar{c}$ a $g = \bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}$. Po dosadení do výrazu pre y dostávame $y = (a \vee \bar{b} \vee c) \cdot (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \cdot (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$. Predošlý algebrický zápis nazývame *úplná normálna konjunktívna forma* – ÚNKF a predstavuje zápis, v ktorom každý súčet obsahuje plný počet (rád) nezávislých vstupných premenných. ÚNKF predstavuje ten najzložitejší spôsob zápisu. Výrazy v zátvorkách voláme *mintermy* a pri ÚNDF *maxtermy*.

Konfigurácie „núl"

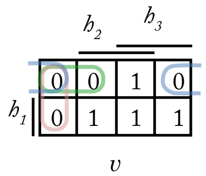
Zapíšme si optimálne konfigurácie z príkladu 2.2:

$$y = (a \vee \bar{b}) \cdot (\bar{b} \vee \bar{c})$$

Tento výraz predstavuje minimálnu konjunktívnu formu a označujeme ho *iredundantná normálna konjunktívna forma* – INKF. Inak hovoríme o normálnej konjunktívnej forme - NKF.

Príklad 2.4

Nájdite INKF v Karnaughovej mape funkcie M3.



Obrázok 5. Karnaughova mapa funkcie majority z troch.

Riešenie

ÚNKF pre funkciu M3 je nasledovný

$$v = (h_2 \vee h_3) \cdot (h_1 \vee h_2) \cdot (h_1 \vee h_3)$$

Z výsledku príkladov 2.2 a 2.4 vidieť, že elektrická schéma funkcie M3 pozostáva len z dvoch vrstiev a teda oneskorenie je 2 časové jednotky.

1. Normálna Pierceova forma

Zápis (I)NKF prevedieme do Pierceovej a Shafferovej funkcie úpravami výrazu podľa pravidiel Booleovej algebry a použitím De Morganových zákonov.

1. Normálna Pierceova forma (1. NPF)

$$\begin{aligned} y &= (x_{11} \downarrow x_{12} \downarrow \cdots \downarrow x_{1a}) \downarrow (x_{21} \downarrow x_{22} \downarrow \cdots \downarrow x_{2b}) \downarrow \cdots \\ &\qquad \downarrow (x_{n1} \downarrow x_{n2} \downarrow \cdots \downarrow x_{nm}) \\ &= \overline{(\overline{x_{11} \vee x_{12} \vee \ldots \vee x_{1a}}) \vee (\overline{x_{21} \vee x_{22} \vee \ldots \vee x_{2b}}) \vee \ldots \vee (\overline{x_{n1} \vee x_{n2} \vee \ldots \vee x_{nm}})} \\ &= (\overline{\overline{x_{11} \vee x_{12} \vee \ldots \vee x_{1a}}}) \cdot (\overline{\overline{x_{21} \vee x_{22} \vee \ldots \vee x_{2b}}}) \cdot \ldots \cdot (\overline{\overline{x_{n1} \vee x_{n2} \vee \ldots \vee x_{nm}}}) \\ &= (x_{11} \vee x_{12} \vee \ldots \vee x_{1a}) \cdot (x_{21} \vee x_{22} \vee \ldots \vee x_{2b}) \cdot \ldots \cdot (x_{n1} \vee x_{n2} \vee \ldots \vee x_{nm}) \end{aligned}$$

Posledný riadok tu predstavuje výraz v NKF a prvý riadok 1. NPF. Prepis (I)NKF do 1. NPF urobíme tak, že všetky operátory nahradíme Pierceovým operátorom. Ak v NKF zápis nie je „úplný" vieme si ho ľahko doplniť (jedná sa o prípady: jediná premenná v súčte (v zátvorke); chýbajúci logický súčin aspoň dvoch logických súčtov). Schému zapájame s hradlami typu NOR.

2. Normálna Shafferova forma

2. Normálna Shafferova forma (2. NSF)

$$\begin{aligned} y &= [(x_{11}|x_{12}| \ldots |x_{1a})|(x_{21}|x_{22}| \ldots |x_{2b})| \ldots (x_{n1}|x_{n2}| \ldots |x_{nm})]| \\ &= \overline{\overline{(\overline{x_{11} \cdot x_{12} \cdot \ldots \cdot x_{1a}}) \cdot (\overline{x_{21} \cdot x_{22} \cdot \ldots \cdot x_{2b}}) \cdot \ldots \cdot (\overline{x_{n1} \cdot x_{n2} \cdot \ldots \cdot x_{nm}})}} \\ &= (\overline{x_{11} \cdot x_{12} \cdot \ldots \cdot x_{1a}}) \cdot (\overline{x_{21} \cdot x_{22} \cdot \ldots \cdot x_{2b}}) \cdot \ldots \cdot (\overline{x_{n1} \cdot x_{n2} \cdot \ldots \cdot x_{nm}}) \\ &= (\bar{x}_{11} + \bar{x}_{12} + \cdots + \bar{x}_{1a}) \cdot (\bar{x}_{21} + \bar{x}_{22} + \cdots + \bar{x}_{2b}) \cdot \ldots \\ &\qquad \cdot (\bar{x}_{n1} + \bar{x}_{n2} + \cdots + \bar{x}_{nm}) \end{aligned}$$

Posledný riadok tu predstavuje výraz v NKF a prvý riadok 2. NSF. Prepis (I)NKF do 2. NSF urobíme tak, že súčiny uzavrieme do zátvoriek a všetky operátory nahradíme Shafferovým operátorom. Ak v NKF zápis nie je „úplný" vieme si ho ľahko doplniť (jedná sa o prípady: jediná premenná v súčine; chýbajúci logický súčet aspoň dvoch logických súčinov).

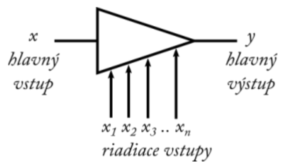
že súčiny uzavrieme do zátvoriek a všetky operátory nahradíme Shafferovým operátorom, negujeme každú premennú a na celý výraz aplikujeme Shafferov operátor. Pravidlá pre „neúplný" tvar NKF sú rovnaké ako pri 1. NPF. Schému zapájame s hradlami typu NAND.

Neúplne definovaná logická funkcia

V praxi sa často stretávame s prípadom, kedy výstup nie je definovaný pre všetky možné kombinácie vstupných hodnôt. Potom zápis pravdivostnej tabuľky je *redukovaný* a v Karnaughovej mape máme „prázdne“ miesta. Tieto prípady umožňujú návrhárovi vhodne „dodefinovať“ prázdne miesta a to tak, aby sme dosiahli zjednodušenie riešenia. V Karnaughovej mape si príslušné prázdne miesta označíme symbolom X (krížik). Určenie hodnoty tak prevedieme až pri vytváraní pravidelných konfigurácií.

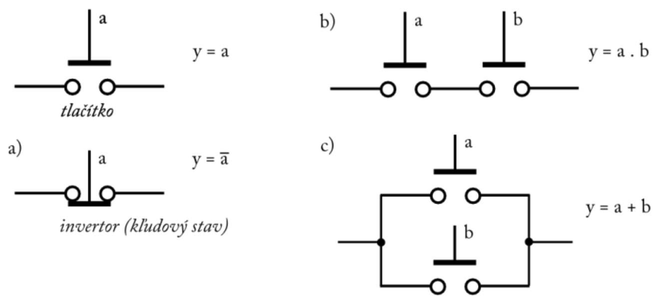
Kontaktné systémy

Stavebné prvky: *kontakty*. Reprezentácia logických úrovní: log. 0 – „*kľudový stav*“ (tlačidlo je uvoľnené), log. 1 – „*akcia*“.



Obrázok 6. Štruktúra kontaktného logického obvodu.

Základným stavebným prvkom je invertor, logický súčet a logický súčin, sú zobrazené na obr. 7.



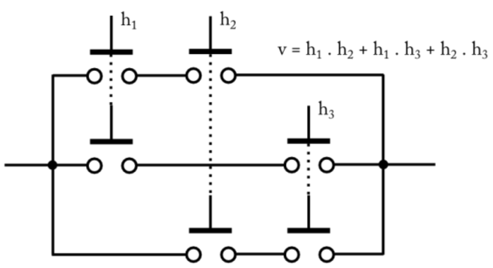
Obrázok 7. Stavebné prvky kontaktných systémov.

Príklad 2.5

Zakreslite kontaktnú reprezentáciu funkcie M3 (majorita z troch, príklad hlasovacieho systému).

Riešenie

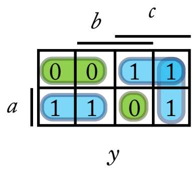
Nasledovný obr. 8 predstavuje kontaktnú sieť INDF z príkladu 2.2.



Obrázok 8. Kontaktná štrukturálna schéma hlasovacieho systému.

Príklad 2.6

Zakreslite kontaktnú sieť a elektrickú schému z logických členov NAND a NOR kombinačného logického obvodu zadaného Karnaughovou mapou.



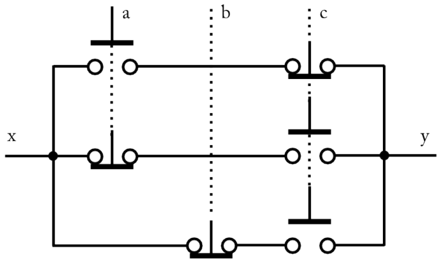
Obrázok 9. Karnaughova mapa funkcie troch premenných.

Riešenie

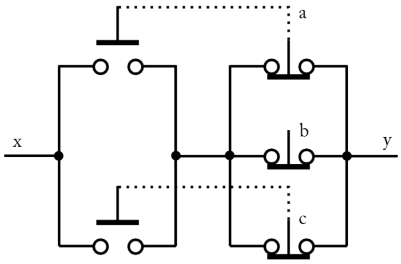
Zapíšme si výrazy pravidelných konfigurácií zakreslených v obr. 9 – NDF modrou a NKF zelenou farbou.

INDF: $y = (a \cdot \bar{c}) + (\bar{a} \cdot c) + (\bar{b} \cdot c)$

INKF: $y = (a + c) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$



Obrázok 10. Kontaktná sieť vytvorená zo zápisu INDF.

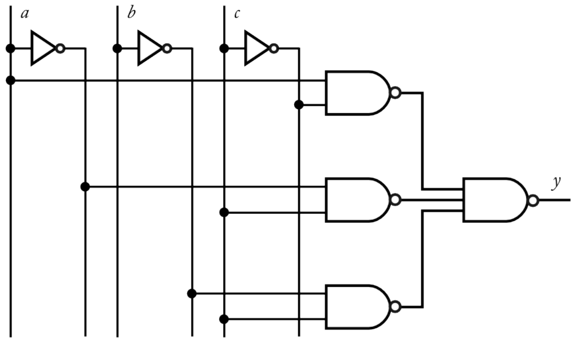


Obrázok 11. Kontaktná sieť vytvorená zo zápisu INKF.

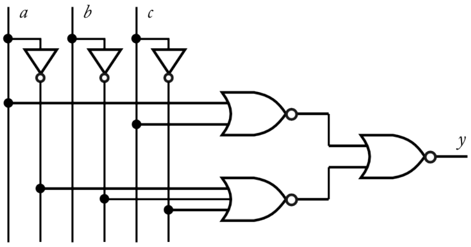
Oba výrazy si prepíšme do príslušných foriem – INDF do 1. NSF a INKF do 1. NPF. Výsledné zapojenia elektrických schém sú na obr. 12 a 13.

INDF zapísaná v 1. NSF: $y = (a|\bar{c})|(\bar{a}|c)|(\bar{b}|c)$

INKF zapísaná v 1. NPF: $y = (a \downarrow c) \downarrow (\bar{a} \downarrow \bar{b} \downarrow \bar{c})$



Obrázok 12. Normálna sieť 1. NSF z príkladu 2.6.



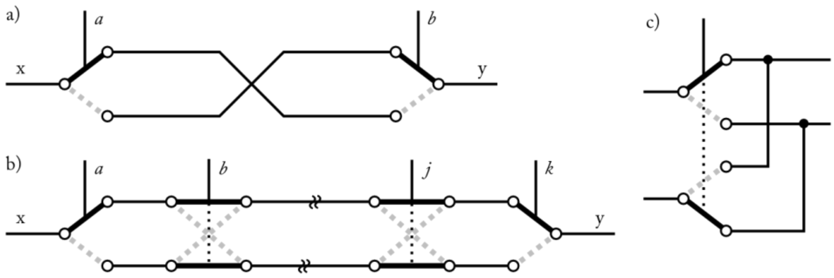
Obrázok 13. Normálna sieť 1. NKF z príkladu 2.6. Povšimnime si efektívneho spôsobu kreslenia 1. vrstvy siete, kedy inverziu vstupnej premennej kreslíme vždy len raz.

Príklad 2.7

Navrhnite a zakreslite kontaktnú sieť chodbového resp. schodiskového prepínača osvetlenia. Rozšírte riešenie pre jednu a dve odbočky.

Riešenie

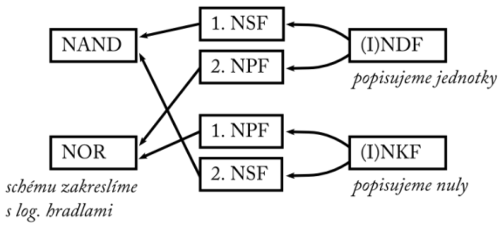
Riešenie úlohy spočíva v použití kontaktného prevedenia funkcie XOR čo predstavuje typické použitie v dlhých chodbách. S použitím špeciálneho typu prepínača je možné riešiť ľubovoľný počet odbočiek. Riešenie je na obr. 14.



Obrázok 14. Kontaktná sieť chodbového osvetlenia – a) dva prepínače, b) univerzálne riešenie pre jednu a viac odbočiek, c) princíp „krížového“ prepínača.

Prehľad normálnych foriem

V tejto kapitole sme si ukázali dve základné formy (disjunktívnu a konjunktívnu) popisu Karnaughovej mapy a spôsoby ich prepisu s použitím De Morganových pravidiel do normálnych foriem (Pierceová a Shafferova).



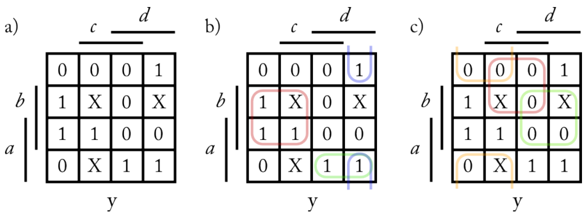
Obrázok 15. Prehľad vzťahov medzi formami a sieťami zakreslenými logickými hradlami NAND a NOR.

Neúplne definovaná logická funkcia

V praxi je častý prípad, kedy nie je definovaný výstup logického systému pre všetky symboly vstupnej abecedy. Zápis takéhoto systému označujeme ako *neúplne definovaná logická funkcia*. Pri popise je pravdivostná tabuľka *redukovaná* a v Karnaughovej mape máme prázdne miesta. Pretože zadanie neurčuje hodnotu výstupu pre danú kombináciu vstupných premenných budeme si do Karnaughovej mapy písať symbol: X. Je to zástupný symbol pre ľubovoľnú hodnotu (t. j. log. 0 alebo log. 1) a zahŕňame ho do pravidelných konfigurácií.

Príklad 2.8

Určte optimálne konfigurácie a zapíšte výrazy pre INDF a INKF v Karnaughovej mape na obr. 16a.



Obrázok 16. Karnaughova mapa funkcie *y=f(a, b, c, d)*.

Riešenie

Zapíšme konfigurácie „jednotiek" a „núl" zakreslené na obr. 16b a 16c.

INDF: $y = b \cdot \bar{d} + a \cdot \bar{b} \cdot d + \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d,$

INKF: $y = (b \vee d) \cdot (\bar{b} \vee \bar{d}) \cdot (a \vee \bar{c}).$