2 Dirichletov princíp. Princíp zapojenia a vypojenia. Binomická veta, multinomická veta. Kombinatorický dôkaz.

2.1 Dirichletov princíp, zásuvkové pravidlo, (pigeon hole principle):

Pokiaľ počet prvkov množiny A je väčší ako počet prvkov množiny B, teda

$$|A| > |B|$$

potom pre každé zobrazenie z A do B platí, že nájdeme dva rôzne prvky a1 a a2 z A, pre ktoré f(a1) = f(a2).
Zobrazenie f teda "zlepíä1 a a2 na jeden prvok v B.
Toto tvrdenie sa nazýva Dirichletov princíp, šuplíkový princíp alebo Pigeon hole principle.

- Holuby a búdky: Ak máme pre 6 holubov 5 holubníkov, aspoň v jednom z nich musia bývať dvaja holuby.
- Ukladanie ponožiek do šuplíkov: Ak na 6 párov ponožiek máme 5 alebo menej šuplíkov, aspoň v jednom z nich sú aspoň dva páry.
- Každý človek má najviac 200 000 vlasov. V Košiciach žije viac ako 250 000 ľudí, aspoň dvaja z nich preto majú rovnaký počet vlasov. V Prahe žije viac 1 250 000 ľudí. Čo vieme po vedať o ich vlasoch? Aspoň 7 z nich má rovnaký úpčet vlasov!

Pokiaľ počet prvkov množiny A je väčší ako k-nások počtu prvkov množiny B, teda

$$|A| > k.|B|$$

potom pre každé zobrazenie z A do B platí, že nájdeme k+1 rôznych prvkov z A, ktoré funkcia f zobrazí na ten istý prvok z B. Zobrazenie f teda týchto (k+1) "zlepí"na jeden prvok v B.

2.2 Princíp zapojenia a vypojenia

Na predchádzajúcej prednáške bolo pravidlo súčtu pre dizjunktné možiny:

Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú disjunktné množiny, potom platí

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$$

Pre množiny, ktoré nie sú dizjunktné platí:

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) \quad \Rightarrow \quad |A \cup B| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A|$$

$$A = (A - B) \cup (A \cap B), \qquad B = (B - A) \cup (A \cap B)$$
$$|A| = |A - B| + |A \cap B|, \qquad |B| = |B - A| + |A \cap B|$$
$$|A - B| = |A| - |A \cap B|, \qquad |B_A| = |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B| - |A \cap B|$$

Princíp zapojenia a vypojenia pre 3 množiny

$$|A \cup B \cup C| = |S \cup C| = |S| + |C| - |S \cap B| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

$$\begin{aligned}|(A \cup B) \cap C| &= |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)| = \\ &= |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Príklad 2.1 *Počet študentov na katedre matematiky je $|M| = 60$, na katedre informatiky $|I| = 200$ a na katedre fyziky $|F| = 40$. Zároveň študujú matematiku a informatiku 4 študenti, matematiku a fyziku 3 študenti, informatiku a fyziku 11 študentov, a všetky tri katedry 2 študenti. Koľko je študentov na celej fakulte? (Na fakulte sú iba uvedené tri katedry.)*

$$|M \cup I \cup F| = 60 + 200 + 40 - 4 - 3 - 11 + 2 = 284$$

2.3 Zavedenie kombinačného čísla

Príklad 2.2 (Poradie v dostihoch:) *Množina P obsahuje všetky poradia 7 koní v dostihoch, $|P| = 7!$ Množina A predstavuje len poradia prvých troch koní. Každých 4! prvkov z množiny P sa namapuje do jedného prvku množiny A (zobrazenie 4!-to-1).*

Napríklad:

$$(2,1,3,4,5,6,7) \rightarrow (2,1,3), \qquad (2,1,3,5,4,6,7) \rightarrow (2,1,3)$$

$$(2,1,3,4,7,6,5) \rightarrow (2,1,3), \qquad (2,1,3,7,6,5,4) \rightarrow (2,1,3)$$

Podľa pravidla delenia platí $|P| = 4! \cdot |A|$. Každých 3! prvkov z množiny A sa namapuje do jedného prvku množiny C (zobrazenie 3!-to-1). Napríklad:

$$(2,1,3) \rightarrow \{1,2,3\}, \quad (3,1,2) \rightarrow \{1,2,3\}, \quad (1,3,2) \rightarrow \{1,2,3\}, \quad (1,2,3) \rightarrow \{1,2,3\}$$

Pre veľkosť množiny $|P|$ platí:

$$7! = 4! \cdot |A| = 4! \cdot 3! \cdot |C|$$

Prvky množiny C sú všetky možné trojprvkové podmnožiny víťazov zo siednych súťažiacich koní. Množinu C by sme mohli pre zvýraznenie jej charakteru označiť ako C_3^7. Číslo, ktoré určuje počet prvkov v množine C nazveme **kombinačné číslo** a označíme symbolom $\binom{7}{3}$.

$$7! = 4! \cdot |A| = 4! \cdot 3! \cdot \binom{7}{3} \quad \Rightarrow \quad \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!}$$

Príklad 2.3 *Úlohou je vypísať všetky možné poradia cifier 0,1,2,3,...,9 inak ako 9!*

Jedným spôsobom je rozdeliť cifry na 4-prvkovú časť, napr 0,2,4,8, a 6-prvkovú časť 1,3,5,6,7,9. Každej časti budeme vypisovať rôzne poradia, napr:

$(0, 2, 4, 8 \mid 1, 3, 5, 6, 7, 9)$
$(0, 2, 4, 8 \mid 3, 1, 5, 6, 7, 9)$
$(2, 0, 4, 8 \mid 3, 1, 6, 5, 7, 9)$
$(0, 2, 8, 4 \mid 1, 3, 5, 6, 7, 9)$

Keď vypíšeme všetky možnosti, musíme vybrať inú 4-prvkovú množinu do prvej časti, resp. inú 6-prvkovú množinu do druhej časti. Počet všetkých možností je preto $\binom{10}{4}$, alebo $\binom{10}{6}$.

$$10! = 4! \cdot 6! \cdot \binom{10}{4}, \quad \text{resp} \quad 10! = 4! \cdot 6! \cdot \binom{10}{6} \quad \Rightarrow \quad \binom{10}{4} = \binom{10}{6}$$

2.4 Zavedenie multinomického čísla

Príklad 2.4 *Úlohou je opäť vypísať všetky možné poradia cifier 0,1,2,3,...,9.*

Rozdelíme cifry na tri časti, 1.časť: 2,4,8, 2.časť: 0,1, 3.časť: 3,5,6,7,9. V každej časti budeme vypisovať rôzne poradia, napr:

$(2, 4, 8 \mid 0, 1 \mid 3, 5, 6, 7, 9)$
$(2, 4, 8 \mid 1, 0 \mid 3, 5, 6, 7, 9)$
$(8, 4, 2 \mid 1, 0 \mid 3, 6, 5, 7, 9)$
$(8, 4, 2 \mid 1, 0 \mid 9, 6, 5, 7, 3)$

Keď vypíšeme všetky možnosti, musíme vybrať iné prvky do jednotlivých častí. Počet všetkých možností výberov označíme $\binom{10}{3,2,5}$:

$$10! = 3! \cdot 2! \cdot 5! \cdot \binom{10}{3, 2, 5} \qquad \Rightarrow \qquad \binom{10}{3, 2, 5} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!}$$

Rozdelíme cifry na päť častí po dva prvky, napríklad:

$(0, 1 \mid 2, 3 \mid 4, 5 \mid 6, 7 \mid 8, 9)$
$(1, 0 \mid 2, 3 \mid 4, 5 \mid 6, 7 \mid 8, 9)$
$(1, 0 \mid 3, 2 \mid 4, 5 \mid 6, 7 \mid 8, 9)$
$(1, 0 \mid 3, 2 \mid 5, 4 \mid 6, 7 \mid 8, 9)$

Počet všetkých možností výberov označíme $\binom{10}{2,2,2,2,2}$:

$$10! = 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot \binom{10}{2, 2, 2, 2, 2} \quad \Rightarrow \quad \binom{10}{2, 2, 2, 2, 2} = \frac{10!}{(2!)^5}$$

2.5 Multinomické číslo:

Počet všetkých možností, ako z n-prvkovej množiny vybrať $k_1, k_2, ..., k_m$-prvkové podmnožiny:

$$\binom{n}{k_1, k_2, ..., k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}, \qquad k_1 + k_2 + ... + k_m = n$$

Vlastnosti:

$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{10!}{5! \cdot 2! \cdot 3!} \quad \Rightarrow \quad \binom{10}{3, 2, 5} = \binom{10}{2, 3, 5} = \binom{10}{5, 2, 3}$$

Príklad 2.5 *Na 12km trasu máme minúť práve 3km každým smerom, V,Z,S,J.*

Jedna z možností: (S,S,J,J,Z,V,S,Z,J,Z,V,V). Počet všetkých možností:

$$\binom{12}{3,3,3,3} = \frac{12!}{(3!)^4}$$

Príklad 2.6 *Koľko všetkých možných slov môžeme zostaviť zo slova BOOKKEEPER?*

$$\binom{10}{1,2,2,3,1,1} = \frac{10!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!}$$

2.6 Binomická veta:

$$(a+b)^2 = aa+ab+ba+bb = a^2+2ab+b^2 = \binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 =$$

$$= \binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3$$

Všeobecne:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k$$

Príklad 2.7 *Aké číslo je pri člene x^8 vo výraze $(x^6+\frac{1}{x^4})^8$?*

$$(x^6)^{8-k}\cdot(x^{-4})^k = x^8 \quad\Rightarrow\quad 48-6k-4k=8 \quad\Rightarrow\quad k=4 \quad\Rightarrow\quad \binom{8}{4}$$

Príklad 2.8 *Aký koeficient je pri a^2bc po roznásobení výrazu $(a+b+c)^4$?*

$$\binom{4}{2,1,1} = \frac{4!}{2!} = 12$$

2.7 Multinomická veta:

$$(x_1+...+x_m)^n = \sum_{k_1+...+k_m=n}\binom{n}{k_1,k_2,...,k_m}x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_m^{k_m}$$

Príklad 2.9 *Koľko je všetkých sčítancov vo výraze $(x+y+z+w)^{10}$?*

Sčítancov je rovnaký počet ako počet všetkých výrazov $x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}w^{k_4}$. Každý výraz môžeme jednoznačne namapovať do bitových slov pomocou vlastnosti: $k_1+k_2+k_3+k_4=10$. Pre súčet exponentov potrebujeme 10 núl, ktoré oddelíme pomocou troch jednotiek do odpovedajúcich 4 častí, napr. výraz $x^2+y+z^5+w^2$ namapujeme do 13-bitového slova:

$$x^2+y+z^5+w^2 \quad\rightarrow (0010100000100)$$

Všetkých takýchto slov je $\binom{13}{3}$.