**5. prednáška**

## Limitné vety

Tématiky limitných viet sa dotkneme veľmi zľahka. Celú zložitú tému zredukujeme na to, čo má dôležité a praktické dôsledky. Vo všeobecnosti môžeme ovedať, že pod pojmom limitné vety rozumieme **zákon veľkých čísel** a **centrálnu limitnú vetu**. Zákon veľkých čísel aj centrálna limitná veta existujú v najrozličnejších podobách. Znenia viet tvrdia približne to isté, líšia sa len silou predpokladov.
Zjednodušene a veľmi všeobecne povedané – zákon veľkých čísel hovorí, že za určitých podmienok sa empirické charakteristiky budú približovať svojim teoretickým náprotivkom. Centrálna limitná veta hovorí o tom, ako sa pri veľkom $n$ chová súčet, resp. priemer nezávislých náhodných premenných.

Najskôr sa pristavíme pri **Bernoulliho zákone veľkých čísel** (Bernoulliho nezávislé pokusy iste poznáte z predmetu Diskrétna pravdepodobnosť ☺ ).
$n$–krát opakujeme rovnaký pokus, v ktorom sledujeme, či nastala udalosť $A$. Pri každom opakovaní pokusu udalosť $A$ nastáva s pravdepodobnosťou $p$ a nenastáva s pravdepodobnosťou $1-p$. Ak náhodná premenná $X_n$ predstavuje počet výskytov udalosti $A$ v sérii $n$ pokusov, potom pravdepodobnosť, že náhodná premenná $X_n$ nadobudla hodnotu $k$, t.j. udalosť $A$ nastala v sérii pokusov práve $k$–krát, je

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m,$$

čiže náhodná premenná $X_n$ má binomické rozdelenie pravdepodobnosti, ozn. $X_n \sim Bi(n, p)$
**Bernoulliho zákon veľkých čísel** hovorí, že ak pravdepodobnosť nastatia udalosti $A$ v sérii $n$ pokusov je konštantná, t.j. $P(A) = p$, tak relatívna početnosť $\frac{X_n}{n}$ konverguje k pravdepodobnosti $p$, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\Big|\frac{X_n}{n} - p\Big| < \varepsilon\Big) = 1$$

pre ľubovolné $\varepsilon > 0$.

Zákon, ktorý spája štatistiku s pravdepodobnosťou je **Silný zákon veľkých čísel**. Tento zákon hovorí, že keď $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú nezávislé náhodné premenné s rovnakou strednou hodnotu $E(X_i) = \mu$, tak pre rastúce $n$ je možné temer isto očakávať, že sa aritmetický priemer $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$ bude rovnať strednej hodnote $\mu$, t.j. $P\big(\lim_{n\to\infty} \overline{X} = \mu\big) = 1$.
Praktickým dôsledkom silného zákona veľkých čísel pre štatistiku je, že výberový priemer môžeme použiť na odhad neznámej strednej hodnoty.

Teraz prejdeme k formulácii centrálnej limitnej vety, ktorej podstatou je tvrdenie, že náhodná premenná, ktorá je súčtom veľkého počtu navzájom nezávislých náhodných premenných, má na základe veľmi všeobecných podmienok približne normálne rozdelenie pravdepodobnosti. Uvedieme najdôležitejšie formulácie centrálnej limitnej vety, ktoré sa líšia len predpokladmi, ktorých splnenie sa požaduje.

Najjednoduchším prípadom centrálnej limitnej vety je **Moivre–Laplaceova veta**. V čom spočíva jej podstata?

Nech nastatie udalosti $A$ je to, čo v pokuse sledujeme. Ak náhodná premenná $X$ predstavuje nastatie udalosti $A$ v jednom pokuse, tak $X$ nadobúda len dve hodnoty: $X = 0$, ak udalosť $A$ nenastala a $X = 1$, ak udalosť $A$ nastala. Nech $P(X = 0) = 1 - p$ a $P(X = 1) = p$, potom je zrejmé, že náhodná premenná $X$ má alternatívne rozdelenie pravdepodobnosti.

Uvažujme sériu $n$ nezávislých opakovaní toho istého pokusu, v ktorom sledujeme nastatie udalosti $A$. Nech náhodná premenná $X_i$ predstavuje nastatie udalosti $A$ v $i$–tom pokuse, $i = 1, 2, \dots, n$. Keďže pokusy sú nezávislé, tak nezávislé sú i náhodné premenné.

Nech $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Je zrejmé, že náhodná premenná $Y_n$ predstavuje počet výskytov udalosti $A$ v sérii $n$ nezávislých pokusov. Z predchádzajúcich úvah a z Diskrétnej pravdepodobnosti vieme, že $Y_n \sim Bi(n, p)$ a $E(Y_n) = np$, $D(Y_n) = np(1 - p)$. A teraz už uvedieme formuláciu vety.

**Moivre–Laplaceova veta:**

Nech náhodná premenná $Y_n$ znamená počet úspechov v sérii $n$ nezávislých opakovaní toho istého pokusu. Potom náhodná premenná

$$Y_n^* = \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

má približne normálne normované rozdelenie pravdepodobnosti, t.j. pre každé reálne $x$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\Big) = \Phi(x).$$

kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia normálneh normovaného rozdelenia.

Táto formulácia centrálnej limitnej vety má praktický význam – umožňuje aproximovať binomické rozdelenie normálnym rozdelením. Aproximácia je vhodná, ak $np(1 - p) > 9$.

PRÍKLAD:

Zovšeobecnením Moivre–Laplaceovej vety je nasledujúca

**Lindeberg–Lévyho veta:**

Nech $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú navzájom nezávislé náhodné premenné s rovnakým rozdelením pravdepodobnosti, pričom existujú ich stredné hodnoty $E(X_i)$ a disperzie $D(X_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Položme $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Potom náhodná premenná

$$Y_n^* = \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}}$$

má približne normálne normované rozdelenie pravdepodobnosti, t.j. pre každé reálne $x$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{Y_n - E(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}} < x\Big) = \Phi(x).$$

kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia normálneh normovaného rozdelenia.

Najvšeobecnejšie vyjadril centrálnu limitnú vetu Ljapunov, ktorý dokázal, že pravdepodobnostné rozdelenie súčtu navzájom nezávislých náhodných premenných $X_1, X_2, \dots, X_n$ konverguje k normálnemu rozdeleniu, aj keď náhodné premenné $X_i$ nemajú rovnaké rozdelenie pravdepodobnosti.

PRÍKLAD: