Alžbeta Klaudínyová, Ida Stankovianska

ALGEBRA
V PRÍKLADOCH A ÚLOHÁCH

2009

Obsah

Úvod

Učebnica pokrýva osnovy predmetu algebra vyučovaného vo všetkých študijných programoch Fakulty riadenia a informatiky Žilinskej univerzity. Jej cieľom je oboznámiť predovšetkým študentov 1. ročníka FRI ŽU (ale aj študentov iných vysokých škôl technického zamerania) so základnými metódami riešenia problémov lineárnej algebry. Keďže je veľmi úzko spätá s učebnicou Algebra a jej inžinierske aplikácie, snažili sme sa nemeniť terminológiu a používané označovanie.

Publikácia má deväť kapitol. V každej z nich je uvedený veľmi stručný prehľad najnevyhnutnejších pojmov (tu však predpokladáme, že hlavným zdrojom teoretických poznatkov bude spomínaná učebnica), príklady so vzorovými postupmi ich riešenia a neriešené cvičenia.

Prvá kapitola sa zaoberá binárnymi reláciami, ekvivalenciami a rozkladmi množín. Nasledujúca kapitola je venovaná základným algebraickým štruktúram s jednou a dvomi binárnymi operáciami, akými sú najmä grupa, okruh a pole. V tretej kapitole sa venujeme polynómom nad číselnými poliami, ale aj nad konečnými poliami zvyškových tried. Nasledujúce tri kapitoly sú venované maticiam a determinantom, ktoré sú prípravou na riešenie úloh o systémoch lineárnych rovníc a vektorových priestoroch v ďalších kapitolách. Posledná deviata kapitola je venovaná vlastným hodnotám a vlastným vektorom matíc. V závere publikácie sú uvedené výsledky cvičení.

Kapitola 1

Binárne relácie, ekvivalencie

Binárna relácia ρ na množine V je podmnožina karteziánskeho súčinu $V \times V$. Binárna relácia ρ na množine V je:

- **reflexívna**, ak pre každé $v \in V$ platí $v \, \rho \, v$,
- **antireflexívna**, ak pre žiadne $v \in V$ neplatí $v \, \rho \, v$,
- **symetrická**, ak pre každé $u, v \in V$ z platnosti $u \, \rho \, v$ vyplýva platnosť $v \, \rho \, u$,
- **antisymetrická**, ak pre každé $u, v \in V$ z platnosti $u \, \rho \, v$ a súčasne $v \, \rho \, u$ vyplýva $u = v$,
- **tranzitívna**, ak pre každé $u, v, w \in V$ z platnosti $u \, \rho \, v$ a súčasne $v \, \rho \, w$ vyplýva $u \, \rho \, w$.

Ekvivalencia alebo **relácia ekvivalencie** na množine V je binárna relácia na V, ktorá je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Riešené príklady

Príklad 1.1. Príklady binárnych relácií na množine prirodzených čísel $\mathbb{N}$:

a) $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \, \rho \, b$ práve vtedy, ak $a | b$ (a delí b), t.j. $\rho = \{(n, kn) | \ k, n \in \mathbb{N}\}$,

b) $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \,\varphi\, b$ práve vtedy, ak $a < b$,
t.j. $\varphi = \{(m, n) |\ m, n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : m+k=n\}$. $\square$

Príklad 1.2. Predstave o binárnych reláciách môže pomôcť tabuľka binárnej relácie ρ definovanej na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Je to tabuľka, ktorá na mieste (i, j) má znak $\bullet$, ak $i \,\rho\, j$, inak je toto miesto prázdne, pričom $i, j \in M$. Uvedieme tabuľky pre niekoľko binárnych relácií:

	1	2	3	4	5	6
1	•					
2		•				
3			•			
4				•		
5					•	
6						•

	1	2	3	4	5	6
1	•					
2	•	•				
3	•	•	•			
4	•	•	•	•		
5	•	•	•	•	•	
6	•	•	•	•	•	•

	1	2	3	4	5	6
1			•		•	•
2		•	•		•	
3	•	•	•			
4						
5	•	•			•	
6	•					•

.

Prvá tabuľka predstavuje binárnu reláciu $u = v$, ktorá je ekvivalenciou. Druhá tabuľka prislúcha relácii $u \leq v$, ktorá je reflexívna a tranzitívna. Tretia tabuľka predstavuje symetrickú binárnu reláciu ρ, ktorá nie je reflexívna. Vidíme, že v tabuľke reflexívnej relácie sú prvky $\bullet$ na celej hlavnej diagonále. Tabuľka antireflexívnej relácie má celú hlavnú diagonálu prázdnu. Tabuľka symetrickej relácie je symetrická podľa hlavnej diagonály, tabuľka antisymetrickej relácie nemá obsadené prvkami $\bullet$ žiadne dve rôzne políčka symetrické podľa hlavnej diagonály. Tranzitívnosť binárnej relácie už tak ľahko na prvý pohľad z jej tabuľky nevidno. $\square$

Príklad 1.3. Na množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$ definujeme reláciu ρ predpisom:

$$a \,\rho\, b \quad \text{práve vtedy, keď} \quad a \leq b + 1.$$

Vymenujme prvky relácie ρ a zistite, aké má vlastnosti.

Riešenie.
Prvkami relácie ρ sú nasledujúce usporiadané dvojice: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$. Overme platnosť vlastností tejto binárnej relácie. Keďže každý prvok z množiny M je v relácii sám so sebou, relácia je reflexívna a nie je antireflexívna. Relácia nie je symetrická, lebo napr. $(1, 4) \in \rho$, ale $(4, 1) \notin \rho$. Nie je antisymetrická, lebo $(1, 2) \in \rho$ a zároveň aj $(2, 1) \in \rho$, ale $1 \neq 2$. Relácia ρ nie je ani tranzitívna, lebo $(4, 3) \in \rho$ a aj $(3, 2) \in \rho$, ale $(4, 2) \notin \rho$. $\square$

Príklad 1.4. Definujme na množine celých čísel $\mathbb{Z}$ binárnu reláciu ρ predpisom:

$$m \,\rho\, n \quad \text{práve vtedy, keď} \quad |m| = |n|.$$

Ľahko zistíme, že relácia ρ je reflexívna, symetrická aj tranzitívna. To znamená, že je reláciou ekvivalencie na množine $\mathbb{Z}$. Triedy ekvivalencie ρ sú $[0] = \{0\}$, $[1] = \{-1, 1\}$, $[2] = \{-2, 2\}$, $[3] = \{-3, 3\}$, $\ldots$. □

Príklad 1.5. Na množine $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je daná relácia $\rho = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5)\}$. Je relácia ρ reláciou ekvivalencie na množine M? Ak áno, nájdime rozklad množiny M určený ekvivalenciou ρ.

Riešenie.
Aby relácia ρ bola ekvivalenciou na množine M, musí byť reflexívna, symetrická a tranzitívna. Tieto vlastnosti rýchle preveríme, ak reláciu ρ zaznamenáme do tabuľky:

	1	2	3	4	5
1	•	•	•		
2	•	•	•		
3	•	•	•		
4				•	
5					•

V tabuľke vidíme, že políčka na hlavnej diagonále sú všetky obsadené znakom •. V súlade s tým, čo sme povedali v príklade 1.2, relácia je reflexívna. Ďalej vidíme, že tabuľka je symetrické podľa hlavnej diagonály — relácia je symetrická. Pre všetky $u, v, w \in M$ preveríme, že platí $u \, \rho \, v$ a súčasne $v \, \rho \, w$, potom aj $u \, \rho \, w$, čiže relácia je aj tranzitívna. Tým sme ukázali, že relácia ρ je reláciou ekvivalencie na množine M.
Teraz nájdeme rozklad množiny M podľa relácie ρ. Triedu rozkladu $[1]$ prislúchajúcu prvku 1 tvoria všetky prvky množiny M, ktoré sú s prvkom 1 v relácii ρ. Z tabuľky vidíme, že $[1] = \{1, 2, 3\} = [2] = [3]$. Keďže prvok 4 je v relácii len sám so sebou a rovnako aj prvok 5, tak $[4] = \{4\}$ a $[5] = \{5\}$. Rozklad množiny M určený ekvivalenciou ρ je $M = \{\{1, 2, 3\},\ \{4\},\ \{5\}\}$. □

Cvičenia

1.1. Aké má vlastnosti relácia ρ, definovaná na množine celých čísel $\mathbb{Z}$, ak:

a) $a \, \rho \, b \Leftrightarrow |a - b| \leq 1$,

b) $a \, \rho \, b \Leftrightarrow |a - b| \geq 5$,

c) $a \, \rho \, b \Leftrightarrow |a - b| \geq m$, kde m je pevne zvolené kladné číslo,

d) $a \rho b \Leftrightarrow |a-b| \leq m$, kde m je pevne zvolené kladné číslo?

1.2. Na množine všetkých celých čísel $\mathbb{Z}$ je definovaná relácia ρ predpisom:

$$x \rho y \Leftrightarrow xy \text{ je párne číslo.}$$

Aké má vlastnosti?

1.3. Na množine všetkých študentov FRI ŽU, ktorí mali v minulom školskom roku zapísaný predmet algebra a získali zápočet, je definovaná relácia ρ:

$$a \rho b \Leftrightarrow a, b \text{ dosiahli rovnaký výsledok zo skúšky.}$$

Je daná relácia ekvivalenciou? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie?

1.4. Na množine všetkých klientov banky B je definovaná relácia ρ predpisom:

$$a \rho b \Leftrightarrow \text{ klient } a \text{ má rovnakú výšku konta (v tisícoch Sk) ako klient } b.$$

Je daná relácia ekvivalenciou? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie?

1.5. Na množine všetkých celých čísel $\mathbb{Z}$ definujeme reláciu ρ predpisom:

$$a \rho b \Leftrightarrow a + b \geq 20.$$

Je daná relácia ekvivalenciou?

1.6. Nech $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ a nech K je podmnožinou karteziánskeho súčinu $M \times M$, kde $K = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$. Je relácia ρ daná množinou K reláciou ekvivalencie na M? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie?

1.7. Na množine všetkých celých čísel $\mathbb{Z}$ je definovaná relácia ρ predpisom:

$$a \rho b \Leftrightarrow a, b \text{ majú rovnaké znamienko.}$$

Je relácia ρ reláciou ekvivalencie? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie?

1.8. Na množine $\mathbb{Z}^+$ celých kladných čísel je definovaná relácia ρ predpisom:

$$a \rho b \Leftrightarrow a \text{ delí } b.$$

Aké vlastnosti má daná relácia? Je reláciou ekvivalencie? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie?

1.9. Na množine všetkých celých čísel $\mathbb{Z}$ je definovaná relácia ρ takto:

$$x \rho y \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Je relácia ρ reláciou ekvivalencie? Ak áno, ako vyzerajú triedy ekvivalencie?

Kapitola 2

Algebraické štruktúry

Binárna operácia $\circ$ na neprázdnej množine M je zobrazenie množiny $M \times\ M$ do M, t.j. $\circ : M \times M \to M$.

Grupoid je algebraická štruktúra $(M, \circ)$, kde M je neprázdna množina a $\circ$ je na nej definovaná binárna operácia.

Pologrupa je grupoid, ktorého operácia $\circ$ je asociatívna.

Monoid je pologrupa, v ktorej existuje neutrálny prvok.

Grupa je monoid, v ktorom ku každému prvku $a \in M$ existuje symetrizačný prvok.

Nech M je neprázdna množina, nech $\oplus$, $\otimes$ sú dve binárne operáce na množine M. Algebraická štruktúra $(M, \oplus, \otimes)$ sa nazýva **okruh**, ak:

- $(M, \oplus)$ je komutatívna grupa,
- $(M, \otimes)$ je pologrupa,
- operácia $\otimes$ je distributávna vzhľadom na operáciu $\oplus$, t. j. platia distributívne zákony: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$, $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$.

Nech $(M, \oplus, \otimes)$ je okruh. Hovoríme, že $(M, \oplus, \otimes)$ je **teleso**, ak algebraická štruktúra $(M - \{0\}, \otimes)$ je grupou. Ak naviac operácia $\otimes$ je komutatívna na množine M, hovoríme o komutatívnom telese alebo **poli**.

Riešené príklady

Príklad 2.1. Binárna operácia $\circ$ je daná predpisom:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}: \ a \circ b = a + b - 1.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(\mathbb{N}, \circ)$?

Riešenie.
Pri určovaní algebraických štruktúr s jednou binárnou operáciou overujeme pravdivosť piatich rozhodovacích krokov. Potvrdenie pravdivosti každého jedného z nich nás posunie vyššie v hierarchii definovaných algebraických štruktúr s jednou binárnou operáciou.

1. Najskôr overíme či $(\mathbb{N}, \circ)$ je tou najjednoduchšou algebraickou štruktúrou — grupoidom. Tu musíme overiť dve podmienky — či je množina $\mathbb{N}$ neprázdna a či je $\circ$ binárnou operáciou definovanou na množine $\mathbb{N}$. Množina $\mathbb{N}$ je neprázdna, lebo napr. $10 \in \mathbb{N}$. Ak $a, b \in \mathbb{N}$, potom aj $a + b - 1 \in \mathbb{N}$, čo znamená, že $\circ$ je binárnou operáciou definovanou na množine $\mathbb{N}$. Obe podmienky sú splnené, t. j. $(\mathbb{N}, \circ)$ je grupoid.

2. Overíme či binárna operácia $\circ$ je komutatívna. Pre ľubovoľné dve prirodzené čísla platí, že $a+b-1 = b+a-1$, t.z. $a \circ b = b \circ a$. Operácia $\circ$ je komutatívna, $(\mathbb{N}, \circ)$ je komutatívny grupoid.

3. Aby sme zistili, či $(\mathbb{N}, \circ)$ je pologrupa, overíme asociatívnosť binárnej operácie $\circ$. Pre $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ overíme platnosť:

$$\begin{aligned}
(a \circ b) \circ c &= a \circ (b \circ c) \\
(a + b - 1) \circ c &= a \circ (b + c - 1) \\
(a + b - 1) + c - 1 &= a + (b + c - 1) - 1 \\
a + b + c - 2 &= a + b + c - 2.
\end{aligned}$$

Týmto sme asociatívnosť potvrdili, $(\mathbb{N}, \circ)$ je komutatívna pologrupa.

4. Ak existuje na množine $\mathbb{N}$ neutrálny prvok vzhľadom na binárnu operáciu $\circ$, $(\mathbb{N}, \circ)$ bude komutatívnym monoidom. Vďaka tomu, že $\circ$ je komutatívna, stačí nájsť buď ľavý alebo pravý neutrálny prvok. Hľadáme taký prvok $e \in \mathbb{N}$, aby platilo $a \circ e = a$ pre $\forall a \in \mathbb{N}$. Z rovnosti $a \circ e = a + e - 1 = a$ vypočítame, že $e = 1$. Nakoľko $1 \in \mathbb{N}$, existuje na množine $\mathbb{N}$ neutrálny prvok. Čím sme ukázali, že $(\mathbb{N}, \circ)$ je komutatívny monoid.

5. Aby algebraická štruktúra $(\mathbb{N}, \circ)$ bola grupou, ku každému prirodzenému číslu musí existovať symetrizačný prvok. Z rovnakého dôvodu ako v kroku 4 sa obmedzíme len na hľadanie pravého symetrizačného prvku. Symetrizačný prvok k prvku a označme a_s a vypočítajme ho zo vzťahu $a \circ a_s = e$. Uvážime, že neutrálnym prvkom binárnej operácie $\circ$ je 1, čím dostaneme $a + a_s - 1 = 1$. Jednoduchou úpravou získame $a_s = 2 - a$. Dostali sme „predpis“, na základe ktorého by sme mali získať symetrizačný prvok k ľubovoľnému prirodzenému číslu. Ale napr. pre $a = 2$ je $a_s = 0$ a $0 \notin \mathbb{N}$! Teda nie ku každému prvku množiny $\mathbb{N}$ existuje symetrizačný prvok, preto $(\mathbb{N}, \circ)$ nemôže byť grupa. Ukázali sme, že $(\mathbb{N}, \circ)$ je len komutatívny monoid. □

Príklad 2.2. Akú algebraickú štruktúru predstavuje množina $\mathbb{Z}$ spolu s operáciami sčítania a násobenia celých čísel?

Riešenie.
Najjednoduchšou definovanou algebraickou štruktúrou s dvomi binárnymi operáciami je okruh. Či je $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ okruh, presvedčíme sa v nasledujúcich troch krokoch:

1. Množina celých čísel s aditívnou operáciou, t. j. $(\mathbb{Z}, +)$, musí byť komutatívnou grupou. Postupom, ktorý sme použili v riešení príkladu 2.1, overíme, že množina $\mathbb{Z}$ je neprázdna a že operácia sčítania dvoch celých čísel je na $\mathbb{Z}$ definovaná. Operácia sčítania celých čísel je komutatívna aj asociatívna. Neutrálnym prvkom na množine $\mathbb{Z}$ je $e = 0$ a ku každému celému číslu existuje symetrizačný prvok $a_s = -a$ patriaci do $\mathbb{Z}$. Týmto sme ukázali, že $(\mathbb{Z}, +)$ je komutatívna grupa.

2. Množina celých čísel s multiplikatívnou operáciou, t. j. $(\mathbb{Z}, \cdot)$, musí byť pologrupa. Už známym postupom overíme, že tomu tak je — na neprázdnej množine $\mathbb{Z}$ je násobenie dvoch celých čísel definované, navyše je to aj komutatívna a asociatívna binárna operácia. Tým sme ukázali, že $(\mathbb{Z}, \cdot)$ je pologrupa a dokonca komutatívna.

3. Nakoniec je potrebné overiť distributívnosť multiplikatívnej binárnej operácie vzhľadom na aditívnu binárnu operáciu. Pre všetky $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ide o overenie vzťahov $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ a zároveň $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. To je ale známy distributívny zákon! Multiplikatívna operácia je distributívna vzhľadom na aditívnu operáciu.

Týmto sme ukázali, že $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je komutatívny okruh. Teraz môžeme začať s preverovaním podmienok, na základe ktorých by sme okruh $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ vylásili za teleso. Je potrebné ukázať, že množina celých čísel bez neutrálneho prvku aditívnej operácie spolu s multiplikatívnou operáciou, t. j. $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$, je grupa. V 2. bode sme ukázali, že $(\mathbb{Z}, \cdot)$ je komutatívna pologrupa. Vynechaním nuly sa na tom nič nezmení. V postupe, ktorý sme použili v riešení príkladu 2.1, môžeme pokračovať od 4. kroku.

4. Hľadáme neutrálny prvok vzhľadom na multiplikatívnu operáciu na množine $\mathbb{Z} - \{0\}$. Násobenie celých čísel je komutatívne, stačí uvažovať vzťah $a \cdot e = a$, odkiaľ vylýva, že $e = 1$. Keďže $1 \in (\mathbb{Z} - \{0\})$, existuje neutrálny prvok na množine $\mathbb{Z} - \{0\}$ vzhľadom na násobenie a $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ je komutatívny monoid.

5. Teraz pristúpime k hľadaniu symetrizačného prvku ku každému prvku vzhľadom na násobenie na množine $\mathbb{Z} - \{0\}$. Opäť vďaka komutatívnosti násobenia čísel stačí uvažovať len vzťah $a \cdot a_s = e$, čo v našom prípade znamená riešiť vzťah $a \cdot a_s = 1$. Odtiaľ dostávame $a_s = 1/a$. Uvedený vzťah síce existuje pre $\forall a \in (\mathbb{Z} - \{0\})$, ale $1/a \notin (\mathbb{Z} - \{0\})$. Teda symetrizačný prvok v tomto prípade neexistuje a $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ nie je grupa.

Týmto sme ukázali, že $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je len komutatívny okruh s jednotkou. □

Príklad 2.3. Nech $M = \{(a, b) |\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Zistime, akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \oplus, \otimes)$, keď pre $\forall\ (a, b), (c, d) \in M$ sú operácie $\oplus$ a $\otimes$ definované:

$$\begin{aligned} (a, b) \oplus (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b) \otimes (c, d) &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Riešenie.
Rovnako ako v príklade 2.2 najskôr ukážeme, že $(M, \oplus, \otimes)$ je okruh.

1. Overíme či $(M, \oplus)$ je komutatívna grupa:

a) Je $(M, \oplus)$ vôbec grupoid? Množina M je neprázdna (napr. $(1, 1) \in M$) a operácia $\oplus$ je na nej definovaná, nakoľko súčet dvoch reálnych čísel je zas len číslo reálne. Teda $(M, \oplus)$ je grupoid.

b) Pretože pre sčítanie reálnych čísel platí komutatívny zákon, vidíme, že aj pre $\forall\ (a, b), (c, d) \in M$ platí:

$$\begin{aligned} (a, b) \oplus (c, d) &= (c, d) \oplus (a, b), \\ (a + c, b + d) &= (c + a, d + b). \end{aligned}$$

Binárna operácia $\oplus$ je teda komutatívna, $(M, \oplus)$ je komutatívny grupoid.

c) Podobne, pre sčítanie reálnych čísel platí asociatívny zákon, takže pre $\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in M$ platia vzťahy:

$$\begin{aligned} [(a, b) \oplus (c, d)] \oplus (e, f) &= (a, b) \oplus [(c, d) \oplus (e, f)] \\ (a + c, b + d) \oplus (e, f) &= (a, b) \oplus (c + e, d + f) \\ (a + c + e, b + d + f) &= (a + c + e, b + d + f). \end{aligned}$$

Binárna operácia $\oplus$ je asociatívna a $(M, \oplus)$ je komutatívna pologrupa.

d) Existuje neutrálny prvok na množine M vzhľadom na operáciu $\oplus$? Označme ho (e, f) a keďže binárna operácia $\oplus$ je komutatívna, stačí uvažovať len vzťah $(a, b) \oplus (e, f) = (a, b)$. Z definície binárnej operácie $\oplus$ potom dostávame:

$$(a + e, b + f) = (a, b).$$

Z rovnosti dvoch usporiadaných dvojíc dostávame $(e, f) = (0, 0) \in M$. Našli sme neutrálny prvok, $(M, \oplus)$ je komutatívny monoid.

e) Z rovnakého dôvodu ako v predchádzajúcom prípade, pri overovaní existencie symetrizačného prvku k prvku $(a, b) \in M$, stačí hľadať len pravý symetrizačný prvok — označme ho (a_s, b_s). Budeme vychádzať zo vzťahu $(a, b) \oplus (a_s, b_s) = (e, f)$. Z definície binárnej operácie $\oplus$ a z existencie jej neutrálneho prvku na množine M, ktorým je $(0, 0)$, dostávame:

$$(a + a_s, b + b_s) = (0, 0).$$

Z rovnosti dvoch usporiadaných dvojíc reálnych čísel získame:

$$a + a_s = 0 \quad \text{a súčasne} \quad b + b_s = 0,$$

z čoho jednoduchou úpravou nájdeme symetrizačný prvok (a_s, b_s) a tým je $(-a, -b)$. Symetrizačný prvok vzhľadom na operáciu $\oplus$ existuje pre každý prvok z množiny M, čím sme ukázali, že $(M, \oplus)$ je komutatívna grupa.

2. Overíme či $(M, \otimes)$ je pologrupa.

a) Ukázali sme, že M je neprázdna množina. Vzhľadom na to, že súčin, rozdiel i súčet reálnych čísel je vždy číslo reálne, $\otimes$ je binárna operácia definovaná na M. Teda $(M, \otimes)$ je grupoid.

b) Aby operácia $\otimes$ bola na množine M komutatívna, musíme overiť platnosť vzťahu $(a, b) \otimes (c, d) = (c, d) \otimes (a, b)$ pre $\forall (a, b), (c, d) \in M$. Z definície binárnej operácie dostaneme:

$$(ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb).$$

Táto rovnosť platí na základe komutatívneho zákona pre sčítanie a násobenie reálnych čísel. $(M, \otimes)$ je komutatívny grupoid.

c) Je operácia $\otimes$ asociatívna? Pre $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in M$ overíme platnosť vzťahu:
$$[(a,b)\otimes(c,d)]\otimes(e,f) = (a,b)\otimes[(c,d)\otimes(e,f)].$$
Využijúc definíciu binárnej operácie $\otimes$ postupne dostávame:
$$\begin{aligned}((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e) &= \\ &= (a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df))\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce) &= \\ &= (ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce).\end{aligned}$$
Rovnosť platí, operácia $\otimes$ je na M asociatívna a $(M,\otimes)$ je komutatívna pologrupa.

3. Overíme či aditívna operácia $\oplus$ je distributívna vzhľadom na multiplikatívnu operáciu $\otimes$. Už zo známych dôvodov stačí overiť len distributívnosť sprava:
$$[(a,b)\oplus(c,d)]\otimes(e,f) = [(a,b)\otimes(e,f)]\oplus[(c,d)\otimes(e,f)].$$
Postupne dostávame:
$$\begin{aligned}(a+c,b+d)\otimes(e,f) &= \\ &= (ae-bf,af+be)\otimes(ce-df,cf+de)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}((a+c)e-(b+d)f,(a+c)f+(b+d)e) &= \\ &= (ae-bf+ce-df,af+be+cf+de)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(ae-bf+ce-df,af+be+cf+de) &= \\ &= (ae-bf+ce-df,af+be+cf+de).\end{aligned}$$
Nastala rovnosť pre $\forall\ (a,b),c,d),(e,f) \in M$, teda distributívnosť sprava (a tým aj distributívnosť) operácie $\otimes$ vzhľadom na operáciu $\oplus$ je potvrdená. Tým sme ukázali, že $(M,\oplus,\otimes)$ je komutatívny okruh.
Aby sme ukázali, že $(M,\oplus,\otimes)$ je teleso, musíme ukázať, že $(M-\{(0,0)\},\otimes)$ je grupa. Už sme ukázali, že $(M,\otimes)$ je komutatívna pologrupa. A ňou zostane aj po tom, ak z množiny M vynecháme prvok $(0,0)$. Zostáva ešte nájsť na množine $M-\{(0,0)\}$ neutrálny prvok vzhľadom na operáciu $\otimes$ a následne aj symetrizačný prvok ku každému prvku uvažovanej množiny.

a) Označme hľadaný neutrálny prvok (e, f). Keďže operácia $\otimes$ je komutatívna, hľadáme ho napríklad zo vzťahu $(a, b) \otimes (e, f) = (a, b)$. Využijúc definíciu operácie $\otimes$ dostaneme:

$$(ea - bf, af + be) = (a, b).$$

Porovnaním ľavej a pravej strany dostaneme, že $ae - bf = a$ a súčasne $af + be = b$, čo nastane práve vtedy, keď $e = 1$ a $f = 0$. Tým, že sme našli neutrálny prvok $(e, f) = (1, 0)$ na množine $M - \{(0, 0)\}$, ukázali sme, že $(M - \{(0, 0)\}, \otimes)$ je komutatívny monoid.

b) Hľadáme teraz ku každému prvku (a, b) množiny $M - \{(0, 0)\}$ symetrizačný prvok, ktorý označíme (a_s, b_s). Opäť sa obmedzíme len na hľadanie pravého symetrizačného prvku. Postupne dostaneme:

$$(a, b) \otimes (a_s, b_s) = (1, 0),$$

$$aa_s - bb_s = 1 \quad \text{a súčasne} \quad ab_s + ba_s = 0.$$

Po vyriešení sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych dostaneme:

$$a_s = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{a súčasne} \quad b_s = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Symetrizačný prvok (a_s, b_s) patrí do množiny $M - \{(0, 0)\}$ a existuje pre každý prvok (a, b) tejto množiny.

Tým sme dokázali, že $(M - \{(0, 0)\}, \otimes)$ je grupa, dokonca komutatívna grupa. Celkovo sme ukázali, že $(M, \oplus, \otimes)$ je komutatívne teleso, teda pole. $\square$

Cvičenia

2.1. Na množine všetkých reálnych čísiel $\mathbb{R}$ je definovaná binárna operácia $\heartsuit$ predpisom:

$$a \heartsuit b = a + 2b.$$

Je binárna operácia $\heartsuit$ komutatívna a asociatívna? Svoje tvrdenie odôvodnite.

2.2. Operácia $\triangle$ je daná predpisom:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}: \quad a \triangle b = |a + b - 2|.$$

Je $\triangle$ binárnou operáciou na $\mathbb{Z}$? Ak áno, aké má vlastnosti?

2.3. Operácia $*$ je na množine všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$ daná predpisom:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a * b = |a + b|.$$

Je $*$ binárnou operáciou na $\mathbb{R}$? Ak áno, je komutatívna a asociatívna?

2.4. Nech K je množina nepárnych prirodzených čísel. Dané sú dve binárne operácie:

$$a \bigtriangledown b = a + b + 1, \qquad a \bullet b = \frac{1}{2}(a+1)(b+1) - 1.$$

Sú $\bigtriangledown$ a $\bullet$ binárnymi operáciami na K? Ak áno, sú komutatívne a asociatívne?

2.5. Na množine všetkých celých čísel $\mathbb{Z}$ sú definované operácie takto:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}: \quad a \bigtriangledown b = a + b - 1, \quad a \bullet b = a + b - ab.$$

Je operácia $\bullet$ distributívna vzhľadom na operáciu $\bigtriangledown$?

2.6. Nájdite neutrálny a symetrizačný prvok danej binárnej operácie:

a) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$: $\quad a \circ b = a - b$,

b) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$: $\quad a \bigtriangleup b = a + b - 4$.

2.7. Nájdite neutrálny prvok danej binárnej operácie:

a) $\forall a, b \in \mathbb{Q} - \{0\}$: $\quad a \bigtriangledown b = \dfrac{a}{b}$,

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\quad a \heartsuit b = 2a + 3b$.

2.8. Binárna operácia $\circ$ je daná predpisom:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \circ b = \frac{1}{2}(a+1)(b+1) - 1.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(\mathbb{R}, \circ)$?

2.9. Nech K je množina všetkých nepárnych prirodzených čísel a na nej je daná operácia $*$ takto:

$$\forall a, b \in K: \quad a * b = a + b + 1.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(K, *)$?

2.10. Nech $\mathbb{Q}$ je množina všetkých racionálnych čísel a nech je daná operácia $\circ$ takto:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}: \quad a \circ b = ab + a + b.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(\mathbb{Q}, \circ)$?

2.11. Binárna operácia $\circ$ je daná predpisom:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} - \{1\}: \quad a \circ b = \frac{1}{2}(a-1)(b-1) + 1.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(\mathbb{R} - \{1\}, \circ)$?

2.12. Nech $M = \{A | A \subseteq X\}$ je množina všetkých podmnožín neprázdnej konečnej množiny X. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \cap)$, kde $\cap$ je prienik dvoch množín?

2.13. Nech $M = \{A | A \subseteq X\}$ je množina všetkých podmnožín neprázdnej konečnej množiny X. Pre každé $A, B \in M$ je daná operácia $\triangle$:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \triangle)$?

2.14. Daná je množina reálnych čísel $\mathbb{R}$ a dve binárne operácie $\triangle$ a $\triangledown$ predpisom:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \triangle b = a + b + 3, \quad a \triangledown b = |2a - 3b|.$$

Aké algebraické štruktúry predstavujú $(\mathbb{R}, \triangle)$ a $(\mathbb{R}, \triangledown)$?

2.15. Nech M je neprázdna konečná množina reálnych čísel a nech je daná operácia:

$$\forall a, b \in M: \quad a \triangle b = \min\{a, b\}.$$

Akú algebraickú štruktúru predstavuje $(M, \triangle)$?

2.16. Nech M je neprázdna konečná číselná množina a nech je daná operácia:

$$\forall a, b \in M: \quad a \triangle b = \max\{a, b\}.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \triangle)$?

2.17. Na množine reálnych kladných čísel $\mathbb{R}^+$ je daná operácia $*$ takto:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \quad a * b = \sqrt{ab}.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(\mathbb{R}^+, *)$?

2.18. Nech $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a nech je daná binárna operácia $\triangle$ predpisom:

$$\forall a, b \in M : \quad a \triangle b = \mathrm{NSD}(a, b),$$

kde NSD(a,b) je najväčší spoločný deliteľ čísel a a b. Zadefinujte operáciu $\triangle$ tabuľkou a určte, akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \triangle)$.

2.19. Nech $M = \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$, kde i je imaginárna jednotka v množine všetkých komplexných čísel $\mathbb{C}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \times)$, kde $\times$ je násobenie komplexných čísel?

2.20. Daná je množina $M = \{A |\ x \in \mathbb{Z}\}$, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sú štvorcové matice typu 2×2. Určte, akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \otimes_M)$, kde $\otimes_M$ je násobenie matíc.

2.21. Akú algebraickú štruktúru predstavuje $((\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}, \circ)$, kde

$$\forall (a, b), (c, d) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} : \quad (a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d)?$$

2.22. Na množine usporiadaných dvojíc $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{(0, 0)\})$ je daná operácia $*$ takto:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{(0, 0)\}) : \quad (a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Akú algebraickú štruktúru predstavuje $(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{(0, 0)\}), *)$?

2.23. Na množine usporiadaných dvojíc $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$, kde $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, je daná operácia $\circ$ takto:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 : \quad (a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + b).$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0, \circ)$?

2.24. Nech $A = \{a + \mathrm{i}\, b |\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(A, \times)$, kde $\times$ je násobenie komplexných čísel?

2.25. Nech $A = \{a + ib |\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}_0^+\}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(A, \div)$, kde $\div$ je delenie komplexných čísel?

2.26. Nech $A = \{a + b\sqrt{2} |\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Akú algebraickú štruktúru predstavujú $(A, +)$ a $(A, \circ)$, kde $+$ je sčítanie dvojčlenov a $\circ$ je ich násobenie?

2.27. Daná je množina M všetkých diagonálnych matíc stupňa 2 nad poľom reálnych čísel. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \otimes_M)$, kde $\otimes_M$ je násobenie matíc?

2.28. Daná je množina M všetkých diagonálnych matíc stupňa 2 nad poľom reálnych čísel, ktoré sú regulárne. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \otimes_M)$, kde $\otimes_M$ je násobenie matíc?

2.29. Nech $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Určte, akú algebraickú štruktúru predstavuje $(\mathbb{R}, \oplus)$, $(\mathbb{R}, \otimes)$ a $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$, kde

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \oplus b = a + b - 10, \quad a \otimes b = |a - b|.$$

2.30. Na množine $M = \{0, 1\}$ sú dané dve binárne operácie $+$ a $*$ tabuľkami:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

a

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

.

Dokážte, že $(M, +)$ a $(M - \{0\}, *)$ sú komutatívne grupy. Je $(M, +, *)$ pole? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

2.31. Nech $M = \{A | A \subseteq X\}$ je množina všetkých podmnožín neprázdnej konečnej množiny X. Akú algebraickú štruktúru predstavujú $(M, \cup)$, $(M, \cap)$, $(M, \cup, \cap)$, kde $\cup$ je zjednotenie dvoch množín a $\cap$ je prienik dvoch množín?

2.32. Nech $M = \{(a, b) |\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Pre všetky $(a, b), (c, d) \in M$ sú dané dve binárne operácie $\triangle$ a $\circ$ predpismi:

$$(a, b) \triangle (c, d) = (a + c + 2, b + d - 1), \quad (a, b) \circ (c, d) = (a - d, b + c).$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \triangle)$, $(M, \circ)$, $(M, \triangle, \circ)$?

2.33. Na množine všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$ sú dané dve operácie:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a \triangledown b = a + b - 2, \quad a \circ b = ab + a + b.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(\mathbb{R}, \triangledown, \circ)$?

2.34. Na množine všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$ sú dané dve operácie:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a * b = a + b + 1, \quad a \circ b = |a| + |b| + 2.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(\mathbb{R}, *, \circ)$?

2.35. Na množine všetkých celých čísel $\mathbb{Z}$ sú dané dve binárne operácie:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}: \quad a * b = a + b, \quad a \circ b = \frac{1}{2}(a+1)(b+1).$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(\mathbb{Z}, *, \circ)$?

2.36. Na množine všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$ sú dané dve binárne operácie:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \quad a * b = a + b + 1, \quad a \bullet b = \frac{1}{2}(a+1)(b+1) - 1.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(\mathbb{R}, *, \bullet)$?

2.37. Nech K je množina nepárnych prirodzených čísel a na nej sú dané dve binárne operácie:

$$\forall a, b \in K: \quad a * b = a + b + 1, \quad a \bullet b = \frac{1}{2}(a+1)(b+1) - 1.$$

Aká algebraická štruktúra je $(K, *, \bullet)$?

2.38. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(Z_3, \oplus_3, \otimes_3)$, kde Z_3 predstavuje množinu zvyškových tried modulo 3, $\oplus_3$ je sčítanie modulo 3 a $\otimes_3$ je násobenie modulo 3?

2.39. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(Z_4, \oplus_4, \otimes_4)$, kde Z_4 predstavuje množinu zvyškových tried modulo 4, $\oplus_4$ je sčítanie modulo 4 a $\otimes_4$ je násobenie modulo 4?

2.40. Nech $M = \{(a, b) |\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \oplus, \otimes)$, kde pre všetky $(a, b), (c, d) \in M$:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \otimes (c, d) = (ad + bc, bd - ac)?$$

2.41. Nech $M = \{(a, b) |\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \triangle, \circ)$, kde pre všetky $(a, b), (c, d) \in M$:

$$(a, b) \triangle (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d)?$$

2.42. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \triangledown, \vartriangle)$, kde pre všetky prvky $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \triangledown (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \vartriangle (x_2, y_2) &= (-x_1 y_2 - x_2 y_1, x_1 x_2 - y_1 y_2)? \end{aligned}$$

2.43. Nech $A = \{a_1 + a_2\sqrt{2} |\ a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(A, \oplus, \otimes)$, kde $\oplus$ je sčítanie dvojčlenov a $\otimes$ je násobenie dvojčlenov?

2.44. Nech $M = \{(a, b\sqrt{2}) |\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zistite, akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \oplus, \otimes)$, kde

$$\begin{aligned} (a_1, b_1\sqrt{2}) \oplus (a_2, b_2\sqrt{2}) &= \big(a_1 + a_2, (b_1 + b_2)\sqrt{2}\big), \\ (a_1, b_1\sqrt{2}) \otimes (a_2, b_2\sqrt{2}) &= \big(a_1 a_2 + 2b_1 b_2, (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{2}\big)? \end{aligned}$$

2.45. Nech $A = \{a + \mathrm{i}\, b |\ a, b \in \mathbb{Q}\}$, kde i je imaginárna jednotka. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(A, +, \times)$, kde $+$ je sčítanie a $\times$ násobenie komplexných čísel?

2.46. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(P_n, \oplus_p, \otimes_p)$, kde P_n je množina všetkých polynómov n-tého stupňa s celočíselnými koeficientmi, $\oplus_p$ je sčítanie polynómov a $\otimes_p$ je násobenie polynómov?

2.47. Nech $P_{\langle 2k \rangle}$ je množina polynómov párneho stupňa. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(P_{\langle 2k \rangle}, \oplus_p)$, $(P_{\langle 2k \rangle}, \otimes_p)$ a $(P_{\langle 2k \rangle}, \oplus_p, \otimes_p)$, keď $\oplus_p$ je sčítanie a $\otimes_p$ násobenie polynómov?

2.48. Nech M je množina všetkých reálnych antisymetrických matíc druhého stupňa. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \oplus_M, \otimes_M)$, kde $\oplus_M$ je sčítanie matíc a $\otimes_M$ je násobenie matíc?

2.49. Nech M je množina všetkých diagonálnych matíc typu 3×3 nad poľom reálnych čísel. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \oplus_M, \otimes_M)$, kde $\oplus_M$ je sčítanie matíc a $\otimes_M$ je násobenie matíc?

2.50. Nech je daná množina

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x & y \\ -y & x \end{array} \right) \middle|\ x, y \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \oplus_M, \otimes_M)$, kde $\oplus_M$ je sčítanie matíc a $\otimes_M$ je násobenie matíc?

2.51. Nech je daná množina

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & -x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \oplus_M, \otimes_M)$, kde $\oplus_M$ je sčítanie matíc a $\otimes_M$ je násobenie matíc?

2.52. Nech M je množina spojitých párnych funkcií definovaných na množine reálnych čísel $\mathbb{R}$. Akú algebraickú štruktúru tvorí $(M, \oplus, \otimes)$, kde $\oplus$ je operácia sčítania funkcií a $\otimes$ je operácia násobenia funkcií?

Kapitola 3

Polynómy

Nech $(P, \oplus, \otimes)$ je pole, $x \in P$, n prirodzené číslo. Označme

$$x^n = \underbrace{x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_{n\text{–krát}}.$$

Nech $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú pevne zvolené prvky poľa, x je premenná. Potom výraz

$$p_n(x) = a_0 \oplus (a_1 \otimes x) \oplus (a_2 \otimes x^2) \oplus \cdots \oplus (a_n \otimes x^n)$$

nazveme **polynómom** nad poľom. V prípade, že ide o číselné pole s lineárnymi operáciami sčítania a násobenia čísel, budeme používať štandardný zápis:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Ak uvažujeme polynóm n-tého stupňa $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$ nad poľom komplexných čísel $\mathbb{C}$ a ak $c \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné číslo. Potom

$$p_n(x) = p_n(c) + (x - c) \cdot q_{n-1}(x),$$

kde $q_{n-1}(x)$ je polynóm stupňa $(n-1)$, ktorý má vo všeobecnosti tvar:

$$q_{n-1}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}, \quad b_{n-1} \neq 0.$$

Dá sa ukázať, že pre výpočet koeficientov $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ platia rekurentné vzťahy, ktoré pri označení $b_{-1} = p_n(c)$ môžeme zapísať:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-j} &= a_{n-j+1} + cb_{n-j+1}, \quad j = 2, 3, \ldots, n+1. \end{aligned}$$

Získané rovnosti sa zapisujú do **Hornerovej schémy**:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ c & & cb_{n-1} & \dots & cb_1 & cb_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 & p_n(c) \end{array} .$$

Hornerova schéma je najmä pri práci s polynómami užitočným nástrojom a budeme ju využívať veľmi často, napr. pri hľadaní koreňov daného polynómu. Úloha nájdenia koreňov daného polynómu vôbec nie je jednoduchá. Spôsob, ako pri tom postupovať, ukážeme na nasledujúcom špeciálnom prípade:

Ak $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi a racionálne číslo $r = p/q$ (kde p, q sú nesúdeliteľné čísla) je jeho koreňom, potom číslo p delí a_0 a číslo q delí a_n. Postup pri zisťovaní, ktoré racionálne číslo je koreňom daného polynómu, môžeme zhrnúť do nasledujúcich troch bodov:

1. Vyhľadáme všetkých deliteľov $p_1, p_2, \dots, p_r$ koeficienta a_0.
2. Vyhľadáme všetkých deliteľov $q_1, q_2, \dots, q_s$ koeficienta a_n.
3. Urobíme podiely p_i/q_j pre všetky i, j, pre ktoré sú p_i, q_j nesúdeliteľné. Pomocou Hornerovej schémy sa presvedčíme, ktoré z nich sú koreňmi daného polynómu.

Pri integrovaní sa často stretávame s úlohou rozložiť rýdzo racionálnu funkciu

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad (p(x) \text{ a } q(x) \text{ sú nesúdeliteľné polynómy})$$

na **elementárne** (**parciálne**) **zlomky**, t.j. na výrazy v tvare:

$$\frac{A}{(x-c)^k} \qquad \text{alebo} \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

kde A, M, N, c, p, q sú reálne čísla, k je prirodzené číslo a (x^2+px+q) je ireducibilný polynóm nad R. Postup pri rozklade rýdzo racionálnej funkcie na parciálne zlomky zhrnieme do nasledujúcich bodov:

1. Urobíme rozklad polynómu $q(x)$ na súčin ireducibilných polynómov nad poľom reálnych čísel.

2. Ku každému polynómu $(x-c)$ prislúcha v rozklade toľko zlomkov, koľko je násobnosť jeho koreňa. Do menovateľov týchto zlomkov píšeme postupne $(x-c)^k$, $(x-c)^{k-1}$, …, $(x-c)^2$, $(x-c)$, kde k je násobnosť tohto koreňa.

3. Ku každému polynómu (x^2+px+q) prislúcha v rozklade toľko parciálnych zlomkov, koľko je násobnosť jeho komplexne združených koreňov. Do menovateľov týchto zlomkov postupne zapisujeme $(x^2+px+q)^k$, $(x^2+px+q)^{k-1}$, …, $(x^2+px+q)^2$, (x^2+px+q), kde k je násobnosť koreňa (a zároveň aj k nemu komplexne združeného).

4. Funkciu $f(x)$ vyjadríme ako súčet získaných parciálnych zlomkov. Zlomky v rozklade dáme na spoločného menovateľa, ktorým je polynóm $q(x)$. Dostaneme vyjadrenie čitateľa $p(x)$ zlomku $f(x)$ pomocou čísel A_1, A_2, …, M_1, M_2, …, N_1, N_2, …. Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách oboch vyjadrení dostaneme sústavu lineárnych rovníc pre neznáme A_1, A_2, …, M_1, M_2, …, N_1, N_2, …, ktorú vyriešime.

Riešené príklady

Príklad 3.1. Nájdime normovaný polynóm najnižšieho stupňa nad poľom komplexných čísel, ktorý má jednoduché korene 1 a $(1-\mathrm{i})$ a jeho absolútny člen je $a_0 = -3 + 3\,\mathrm{i}$.

Riešenie.
Hľadaný polynóm vyjadríme ako súčin koreňových činiteľov a roznásobíme. Dostaneme

$$s(x) = (x-1)(x-(1-\mathrm{i})) = x^2 - (2-\mathrm{i})x + 1 - \mathrm{i}\,.$$

Polynóm $s(x)$ nespĺňa podmienku kladenú na hodnotu absolútneho člena. Ak chceme dodržať aj podmienku, aby hľadaný polynóm bol normovaný a mal aj predpísanú hodnotu absolútneho člena, musíme zvýšiť stupeň polynómu. Polynóm $s(x)$ vynásobíme koreňovým činiteľom, ktorý prislúcha neznámemu koreňu c:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2 - (2-\mathrm{i})x + 1 - \mathrm{i})(x-c) = \\ &= x^3 - (2+c-\mathrm{i})x^2 + (1+2c-\mathrm{i}-\mathrm{i}\,c)x - c + \mathrm{i}\,c. \end{aligned}$$

Pre absolútny člen plynómu $p(x)$ platí $a_0 = -c+\mathrm{i}\,c = -3+3\,\mathrm{i}$, z čoho vyplýva, že $c = 3$. Dosadíme do $p(x)$ a dostaneme hľadaný polynóm, ktorý už spĺňa všetky požiadavky. Teda $p(x) = x^3 - (5-\mathrm{i})x^2 + (7-4\,\mathrm{i})x - 3 + 3\,\mathrm{i}$. □

Príklad 3.2. Nájdime polynóm s reálnymi koeficientmi najnižšieho stupňa, kde 1 je jeho dvojnásobným, $(1-\mathrm{i})$ jednoduchým koreňom a jeho absolútny člen $a_0 = 4$.

Riešenie.
Keďže má polynóm reálne koeficienty a komplexný koreň $(1-\mathrm{i})$, musí mať aj k nemu komplexne združený $(1+\mathrm{i})$. Teraz využijeme postup, ktorý sme popísali v príklade 3.1. Skonštruujeme polynóm $q(x)$ ako súčin koreňových činiteľov:

$$q(x) = (x-1)^2(x-(1-\mathrm{i}))(x-(1+\mathrm{i})) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2.$$

Polynóm $q(x)$ však nespĺňa podmienku kladenú na absolútny člen. Pre jej splnenie stačí polynóm $q(x)$ vynásobiť dvomi. Získali sme hľadaný polynóm:

$$p(x) = 2x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 12x + 4. \qquad \square$$

Príklad 3.3. Rozložme polynóm $p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$ na súčin ireducibilných polynómov nad poľom reálnych čísel a poľom komplexných čísel.

Riešenie.
Pri riešení sa sústredíme na rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov (tie sú ireducibilné nad $\mathbb{R}$). Hľadáme teda korene daného polynómu. Polynóm má celočíselné koeficienty, teda by mohol mať racionálne korene v tvare $r = p/q$, kde p delí $a_0 = 1$ a q delí $a_n = 1$. Pre racionálne korene platí, že $r \in \{\pm 1\}$. Jednoduchým dosadením sa presvedčíme, že $p(1) \neq 0$, teda $r = 1$ nie je koreňom polynómu. Či je $r = -1$ koreňom daného plynómu sa presvedčíme pomocou Hornerovej schémy:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
-1 & & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & \boxed{0}
\end{array}.$$

Nakoľko platí $p(-1) = 0$ a $r = -1$ je koreňom daného polynómu, môžeme ho písať $p(x) = (x+1)(x^4 + 2x^2 + 1)$. Pre ďalší postup potrebujeme nájsť korene polynómu $q(x) = x^4 + 2x^2 + 1$. Pomocou jednoduchej substitúcie $y = x^2$ znížime stupeň polynómu a dostaneme $q(y) = y^2 + 2y + 1$. Dostali sme polynóm druhého stupňa a nájsť jeho korene znamená vyriešiť kvadratickú rovnicu $y^2 + 2y + 1 = 0$. Diskriminant $D = 0$, čiže polynóm $q(y)$ má dvojnásobný koreň $y_{1,2} = -1$. Ak uvážime, že $y = x^2$, potom platí $p(x) = (x+1)(x^2+1)^2$ a rovnica $x^2 + 1 = 0$ v poli reálnych čísel nemá riešenie. To znamená, že sme príklad v prípade rozkladu nad telesom reálnych čísel vyriešili. Rozklad polynómu $p(x)$ na súčin ireducibilných polynómov nad poľom reálnych čísel je:

$$p(x) = (x+1)(x^2+1)^2.$$

Rovnica $x^2 + 1 = 0$ v poli komplexných čísel má riešenie $x = \pm\,\mathrm{i}$. Dostávame tak rozklad polynómu $p(x)$ na súčin ireducibilných polynómov nad poľom komplexných čísel:

$$p(x) = (x+1)(x-\mathrm{i})^2(x+\mathrm{i})^2. \qquad \square$$

Príklad 3.4. Daný je polynóm $p(x) = 2x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 4x + 4$. Nájdime všetky jeho racionálne korene.

Riešenie.
Polynóm má celočíselné koeficienty, môže mať racionálne korene v tvare $r = p/q$, kde p delí $a_0 = 4$ a q delí $a_n = 2$. Nájdeme všetkých deliteľov čísla 4 a dostávame, že $p \in \{\pm1, \pm2, \pm4\}$. Rovnako nájdeme všetkých deliteľov čísla 2 a dostávame $q \in \{\pm1, \pm2\}$. Pre možné racionálne korene polynómu $p(x)$ potom platí $r \in \{\pm1, \pm1/2, \pm2, \pm4\}$. Pomocou Hornerovej schémy sa presvedčíme, ktoré z prvkov uvažovanej množiny sú koreňmi:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 2 & -7 & 6 & -3 & 4 & 4 \\
2 & & 4 & -6 & 0 & -6 & -4 \\
\hline
 & 2 & -3 & 0 & -3 & -2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & 4 & 2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} & \\
2 & & 4 & 10 & 24 & & \\
\hline
 & 2 & 5 & 12 & \boxed{25} & &
\end{array}\ .$$

Odtiaľ vyplýva, že číslo 2 je dvojnásobným koreňom a polynóm $p(x)$ môžeme napísať v tvare $p(x) = (x-2)^2(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$.

V ďalšom sa sústredíme na hľadanie racionálnych koreňov nového polynómu $q(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, ktorý je stupňa o 2 nižšieho a naň zopakujeme už uvedený postup:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
-\frac{1}{2} & & -1 & 0 & -1 \\
\hline
 & 2 & 0 & 2 & \boxed{0} \\
-\frac{1}{2} & & -1 & \frac{1}{2} & \\
\hline
 & 2 & -1 & \boxed{\frac{5}{2}} &
\end{array}\ .$$

Odtiaľ získame ďalší jednoduchý koreň $(-1/2)$. Po tomto kroku môžeme polynóm $p(x)$ zapísať v tvare:

$$p(x) = (x-2)^2(x+\tfrac{1}{2})(2x^2+2).$$

Zostáva nájsť korene polynómu $s(x) = 2x^2+2$. Ak uvážime, že $s(x) = 2(x^2+1)$ a zároveň prihliadneme na výsledky riešenia príkladu 3.3, môžeme skonštatovať, že polynóm $p(x)$ má dva rôzne racionálne korene — jeden dvojnásobný $x_{1,2} = 2$ a jeden jednoduchý $x_3 = -1/2$. Ostatné jeho korene nie sú racionálne. □

Príklad 3.5. Rozložme na parciálne (elementárne) zlomky racionálnu funkciu

$$f(x) = \frac{x^4+2x^3+x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2(x-1)}.$$

Riešenie.
Daná funkcia je rýdzo racionálna a rovnako polynóm v menovateli je vyjadrený ako súčin ireducibilných polynómov nad poľom reálnych čísel. Polynóm v menovateli racionálnej funkcie má dvojnásobné komplexne združené korene a jeden jednoduchý reálny koreň. Komplexne združeným koreňom prislúchajú v rozklade dva parciálne zlomky, jednoduchému koreňu prislúcha jeden parciálny zlomok. Rozklad potom vyzerá nasledujúco:

$$\frac{x^4+2x^3+x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{E}{x-1}.$$

Obe strany tejto rovnosti vynásobíme polynómom $q(x) = (x^2+x+1)^2(x-1)$. Dostaneme rovnosť dvoch polynómov:

$$\begin{aligned} &x^4+2x^3+x^2+4x+1 = \\ &\qquad = (Ax+B)(x-1) + (Cx+D)(x-1)(x^2+x+1) + E(x^2+x+1)^2. \end{aligned}$$

Pravú stranu získanej rovnosti upravíme do tvaru polynómu:

$$(C+E)x^4 + (D+2E)x^3 + (A+3E)x^2 + (-A+B-C+2E)x + (-B-D+E).$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách premennej x na oboch stranách rovnosti dostávame sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{rcl} C \qquad + \; E &=& 1 \\ D+2E &=& 2 \\ A \qquad\qquad +3E &=& -1 \\ -A+B-C \qquad +2E &=& 4 \\ B \qquad -D+\;E &=& 1. \end{array}$$

Riešením tejto nehomogénnej sústavy lineárnych rovníc je $A = -2$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ a $E = 1$. Rozklad danej racionálnej funkcie na parciálne zlomky má tvar:

$$f(x) = \frac{-2x}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{x-1}. \qquad \square$$

Cvičenia

3.1. Nájdite normovaný polynóm s reálnymi koeficientmi najnižšieho možného stupňa podľa daných podmienok:

a) 2 je jeho dvojnásobný a 3 jednoduchý koreň a absolútny člen sa rovná 48,

b) $-\mathrm{i}$ je jeho dvojnásobný a -1 jednoduchý koreň,

c) $-\mathrm{i}$ je jeho dvojnásobný a $(-1-\mathrm{i})$ jednoduchý koreň,

d) $(3+3\,\mathrm{i})$ je jeho jednoduchý koreň a absolútny člen sa rovná 54,

e) -3 a $(3-\mathrm{i})$ sú jeho jednoduché a $2\,\mathrm{i}$ dvojnásobný koreň,

f) $(1+\mathrm{i})$ je jeho dvojnásobný koreň a jeho absolútny člen sa rovná 1.

3.2. Nájdite polynóm najnižšieho stupňa nad poľom komplexných čísel, ktorý má i ako dvojnásobný a $(-3+\mathrm{i})$ ako jednoduchý koreň.

3.3. Nájdite normovaný polynóm s celočíselnými koeficientmi s najnižším stupňom tak, aby mal dvojnásobný koreň $x_{1,2} = \sqrt{5}$ a jeho absolútny člen sa rovnal 100. Aké budú ďalšie jeho korene?

3.4. Pre aké $a \in \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel, je $c = 1$ koreňom polynómu $p(x) = 2x^3 - ax^2 + 2x - 1$?

3.5. Aká musí byť hodnota parametra a, aby $c = 1/2$ bolo koreňom polynómu $p(x) = 2x^3 + ax^2 + 4x - 4$?

3.6. Určte hodnotu parametra a tak, aby $c = -1$ bolo koreňom polynómu $p(x) = 2x^6 - ax^4 - x^3 + ax^2 + 3a$.

3.7. Pre aký parameter a v polynóme $p(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ je číslo $c = -1$ jeho:

a) jednoduchým koreňom,

b) dvojnásobným koreňom,

c) trojnásobným koreňom?

3.8. Určte parameter a tak, aby $c = 2$ bolo dvojnásobným koreňom polynómu $p(x) = x^5 - ax^4 + ax^3 + 2x^2 - 8x + 8$.

3.9. Polynóm $p(x) = 5x^4 - 23x^3 + 35x^2 - 7x - 10$ má jeden koreň $x_1 = 2 + \mathrm{i}$. Nájdite ďalšie jeho korene nad poľom komplexných čísel.

3.10. Polynóm $p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 6x + 5$ má jednoduchý koreň $x_1 = 2 - \mathrm{i}$. Nájdite ďalšie jeho korene nad poľom komplexných čísel.

3.11. Určte korene polynómu $p(x) = 2x^5 - 7x^4 + 7x^3 + 9x - 5$ nad poľom komplexných čísel, ak poznáte jeden jeho koreň $x_1 = 2 - i$.

3.12. Nájdite všetky korene polynómu $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 16x - 15$ nad poľom komplexných čísel, ak poznáte jeden jeho koreň $x_1 = 1 - 2i$.

3.13. Nájdite všetky korene polynómu $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ nad poľom komplexných čísel a určte aj ich násobnosti, ak jeden jeho koreň je

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.14. Určte násobnosť koreňa c daného polynómu a určte ďalšie jeho korene nad daným poľom:

a) $c = -2, \quad p(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, \quad$ pole $\mathbb{R}$,

b) $c = -1, \quad p(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 11x + 5, \quad$ pole $\mathbb{C}$,

c) $c = 1, \quad p(x) = 2x^6 - 9x^5 + 21x^4 - 34x^3 + 36x^2 - 21x + 5, \quad$ pole $\mathbb{R}$.

3.15. Polynóm $p(x) = x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 7x + 6$ má jednoduché korene i a 2. Nájdite ďalšie jeho korene nad poľom komplexných čísel.

3.16. Nájdite takú hodnotu parametra a, aby súčet dvoch koreňov polynómu $p(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + a$ sa rovnal jednej.

3.17. Nájdite takú hodnotu parametra a, aby sa jeden z koreňov polynómu $p(x) = x^3 - 7x + a$ rovnal dvojnásobku druhého koreňa.

3.18. Určte koeficienty b a c polynómu $p(x) = x^3 + 3x^2 + bx + c$, ak viete, že súčet druhých mocnín jeho koreňov sa rovná 1 a jeden jeho koreň je $x_1 = -1$.

3.19. Pre polynóm $p(x) = x^3 - 6x + q$ určte koeficient q tak, aby polynóm mal jeden koreň dvojnásobný a nájdite všetky jeho korene.

3.20. Určte nenulové hodnoty koeficientov a, b a c tak, aby boli zároveň koreňmi polynómu $p(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.

3.21. Tvoria racionálne korene polynómu $p(x) = 16x^4 - 40x^2 + 9$ aritmetickú postupnosť s nejakou diferenciou? Ak áno, s akou?

3.22. Nájdite korene polynómu $p(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$, ak viete, že tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti.

3.23. Nech má polynóm $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tri reálne nenulové korene x_1, x_2 a x_3, pre ktoré platí $x_1 : x_2 : x_3 = 3 : (-2) : 1$. Vypočítajte tieto korene, ak viete, že $12b - c = 0$.

3.24. Nájdite všetky racionálne korene polynómu a určte ich násobnosť:

a) $p(x) = 2x^5 + 9x^4 + 13x^3 + 7x^2 - 4$,

b) $p(x) = 24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$,

c) $p(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

3.25. Nad poľom komplexných čísel nájdite korene polynómu:

a) $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$,

b) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3$.

3.26. Aké podmienky musia spĺňať koeficienty p, q, m a n, aby polynóm $f(x)$ bol deliteľný polynómom $g(x)$:

a) $f(x) = x^3 + nx - 3, \quad g(x) = x^2 + mx + 2$,

b) $f(x) = x^3 + px + 2, \quad g(x) = x^2 + mx - 1$,

c) $f(x) = x^3 + px + q \quad g(x) = x^2 + mx - 1$?

3.27. Vyjadrite daný polynóm v mocninách uvedeného lineárneho výrazu:

a) $p(x) = x^4 + 3x^2 - x + 12, \quad x + 1,$

b) $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \quad x - 2,$

c) $p(x) = x^4 + (3 - 8\,\mathrm{i})x^3 - (21 + 18\,\mathrm{i})x^2 - (33 - 20\,\mathrm{i})x + (7 + 18\,\mathrm{i}), \quad x + 1 - 2i.$

3.28. Nad poľom reálnych čísel rozložte na súčin ireducibilných polynómov polynóm $p(x) = 2x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 11x + 4$, keď jeden jeho koreň je 1.

3.29. Rozložte dané polynómy na súčin ireducibilných polynómov nad poľom reálnych čísel:

a) $p(x) = 7x^5 + 7x^4 + 35x^3 + 35x^2 + 28x + 28,$

b) $p(x) = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12.$

3.30. Rozložte dané polynómy na súčin ireducibilných polynómov nad poľom komplexných čísel:

a) $p(x) = 6x^4 + 35x^3 + 13x^2 - 56x + 20,$

b) $p(x) = 6x^5 + 24x^4 - 456x^3 + 24x^2 - 462x,$

c) $p(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3.$

3.31. Rozložte polynóm $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ na súčin ireducibilných polynómov nad poľom komplexných čísel, ak jeden z nich je $q(x) = x - \mathrm{i}$.

3.32. Polynóm $p(x) = 3x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 42x - 36$ rozložte na súčin ireducibilných polynómov nad poľom komplexných čísel, ak $x_1 = -1 - \mathrm{i}$ je jeho jednoduchý koreň.

3.33. Polynóm $p(x) = 2x^6 + 13x^5 + 38x^4 + 62x^3 + 58x^2 + 29x + 6$ rozložte na súčin ireducibilných polynómov nad poľom reálnych čísel, keď viete, že jeden jeho koreň je $c = -1$.

3.34. Určte reducibilitu polynómu $p(x) = x^2 - 2$ nad poľami $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$.

3.35. Pomocou Hornerovej schémy vydeľte polynóm $p(x)$ polynómom $q(x)$:

a) $p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8, \quad q(x) = x - 1,$

b) $p(x) = 3x^4 + (1 - 3\,\mathrm{i})x^3 - 2\,\mathrm{i}\,x^2 + \mathrm{i}\,x + 1 - \mathrm{i}, \quad q(x) = x - \mathrm{i}.$

3.36. Napíšte Taylorov rozvoj polynómu $q(x) = x^5$ v bode $x_0 = 1$.

3.37. Pomocou Hornerovej schémy nájdite neznámy polynóm, ktorého Taylorov rozvoj má tvar $p(x) = 5(x + 1)^5 - 5(x + 1)^3 + 5(x + 1)$.

3.38. Rozložte dané funkcie na parciálne (elementárne) zlomky:

a) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^4 - x^3 - x + 1},$

b) $f(x) = \dfrac{x + 3}{(x + 1)(x^2 + 1)^2},$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 3)},$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{(x + 1)^2(x^2 + 1)},$

e) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 2}{(x - 1)^2(x^2 + 1)},$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{(x^2 - x - 2)(x^2 + 1)},$

g) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 4}{(x - 2)(x^2 + 2)^2},$

h) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x + 1)},$

i) $f(x) = \dfrac{x + 1}{(x - 2)^2(2x^2 + x + 1)},$

j) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{(x + 1)(x - 2)(x^2 + 2)},$

k) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{(x+1)(x-2)(x^2+2)}$,

l) $f(x) = \dfrac{x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 6x + 3}{x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2}$,

m) $f(x) = \dfrac{4x^5 - 8x^4 + 5x^3 - x^2 + x + 1}{(2x^2 - x)^2}$,

n) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 2x^2 + 4x - 2}{x^4 - 4}$.

Kapitola 4

Matice

Nech $(P, +, \cdot)$ je pole. Obdĺžnikovú schému $m \cdot n$ prvkov poľa usporiadanú do m riadkov a n stĺpcov (kde $m \geq 1$, $n \geq 1$) nazývame **maticou** typu $m \times n$ nad poľom P.

Nech matica $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)$ je typu $m \times n$. Ak $m = n$, hovoríme, že $\mathbf{A}$ je **štvorcová matica** stupňa n (resp. rádu n). Napr. matica $\mathbf{A}$ je štvorcová matica stupňa 2, matica $\mathbf{B}$ je štvorcová matica stupňa 3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nech matica $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)$ je typu $m \times n$. Ak $a_{ij} = 0$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, hovoríme, že $\mathbf{A}$ je **nulová matica** a značíme ju $\mathbf{O}_{m\times n}$, $\mathbf{O}_{m,n}$, $\mathbf{O}_{mn}$ alebo len $\mathbf{O}$. Príklady nulových matíc:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Štvorcovú maticu $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)$ rádu n, kde $a_{ij} = 0$ pre všetky $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$, nazývame **diagonálna matica**. Príklady diagonálnych matíc:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ak v štvorcovej matici $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ rádu n je $a_{ii} = 1$ a $a_{ij} = 0$ pre všetky $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$, hovoríme, že $\mathbf{A}$ je **jednotková matica** a značíme ju $\mathbf{E}_n$ alebo len $\mathbf{E}$. Príklady jednotkových matíc:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Štvorcovú maticu $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ rádu n, kde pre všetky $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i > j$ platí $a_{ij} = 0$, nazývame **horná trojuholníková matica**. Ak platí $a_{ij} = 0$ pre všetky $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$, potom hovoríme, že $\mathbf{A}$ je **dolná trojuholníková matica**. Napríklad $\mathbf{A}$ je horná a $\mathbf{B}$ je dolná trojuholníková matica:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ak v štvorcovej matici $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ rádu n pre všetky $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí $a_{ij} = a_{ji}$, hovoríme, že $\mathbf{A}$ je **symetrická matica** a platí $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Ak v štvorcovej matici $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ rádu n platí $a_{ij} = -a_{ji}$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, hovoríme, že $\mathbf{A}$ je **antisymetrická matica**. V antisymetrickej matici musí byť $a_{ii} = 0$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$. Napríklad matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ sú symetrické a matice $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ antisymetrické:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hovoríme, že matica $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je typu $m \times n$ je v **stupňovitom tvare**, ak:

a) každý nenulový riadok matice $\mathbf{A}$ leží nad každým jej nulovým riadkom.

b) a_{ij}, resp. a_{kl} sú vedúce prvky i-teho, resp. k-teho riadku a $i < k$, potom počet núl pred vedúcim prvkom k-teho riadku je väčší ako počet núl pred vedúcim prvkom i-teho riadku.

Vedúci prvok nenulového riadku matice je prvý nenulový prvok tohto riadku. Nulový riadok nemá vedúci prvok.

Matice **A** a **B** sú v stupňovitom tvare, ale matica **C** nie je (prečo?):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Riešené príklady

Príklad 4.1. Nájdime medzi maticami

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

všetky štvorcové, diagonálne, symetrické, antisymetrické, horné a dolné trojuholníkové matice a matice v stupňovitom tvare.

Riešenie.
Priamo z definície vyplýva, že štvorcové matice sú **A**, **B**, **C**, **D**, **H**, **I**, **J**, **K**, diagonálna matica je **A**, symetrické matice sú **A**, **D**, **I**, antisymetrické matice sú **C**, **K**, horné trojuholníkové matice sú **A**, **H**, dolné trojuholníkové matice sú **A**, **J** a matice v stupňovitom tvare sú **A**, **F**, **G**, **H**. □

Príklad 4.2. Nech sú dané matice ako v príklade 4.1. Vypočítajme $2\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$, $\mathbf{F}^T$, $\mathbf{F} + 3\mathbf{F}^T$, $\mathbf{D} + 2\mathbf{G}$.

Riešenie.

$$\begin{aligned} 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F}^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{G} + 3\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Súčet $\mathbf{D} + 2\mathbf{G}$ neexistuje. (Prečo?) □

Príklad 4.3. Vypočítajme $\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{G} \cdot \mathbf{F}$, $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{B}^3$ a použime pritom matice zadané v príklade 4.1.

Riešenie.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2{\cdot}1+(-1){\cdot}3 & 2{\cdot}3+(-1){\cdot}2 \\ 1{\cdot}1+0{\cdot}3 & 1{\cdot}3+0{\cdot}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1{\cdot}2+3{\cdot}1 & 1{\cdot}(-1)+3{\cdot}0 \\ 3{\cdot}2+2{\cdot}1 & 3{\cdot}(-1)+2{\cdot}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{G} \cdot \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1{\cdot}1+(-1){\cdot}0+0{\cdot}0 & 1{\cdot}2+(-1){\cdot}1+0{\cdot}0 \\ 0{\cdot}1+2{\cdot}0+1{\cdot}0 & 0{\cdot}2+2{\cdot}1+1{\cdot}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{B}^3 = \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$ □

Ako sme sa mohli presvedčiť v prvej časti príkladu 4.3 **násobenie matíc nie je vo všeobecnosti komutatívne**, t. j. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \neq \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$.

Príklad 4.4. Vyjadrime ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice maticu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.
Nech $\mathbf{S}$ je symetrická matica a $\mathbf{AS}$ je antisymetrická matica druhého stupňa.

Potom $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{AS}$. Z definície symetrickej matice vyplýva, že $s_{12} = s_{21}$ (označíme x) a z definície antisymetrickej matice vyplýva, že $as_{12} = -as_{21}$ (označíme y). Na základe toho vieme, že matica $\mathbf{S}$ bude mať na hlavnej diagonále tie isté prvky ako matica $\mathbf{A}$ a matica $\mathbf{AS}$ na hlavnej diagonále bude mať samé nuly. Teda môžeme napísať:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ x-y & -7 \end{pmatrix}.$$

Porovnaním matíc dostaneme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - y &= 6, \end{aligned}$$

ktorá má jediné riešenie $x = 5$, $y = -1$. Matica $\mathbf{A}$ sa dá jediným spôsobom napísať ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Cvičenia

4.1. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.
Vypočítajte: a) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$, b) $(3\mathbf{A}^T + 2\mathbf{B}^T)^T$.

4.2. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Riešte maticové rovnice: a) $3\mathbf{X} + 2\mathbf{A} = \mathbf{B}$, b) $\mathbf{X} - 2\mathbf{A} = 3\mathbf{B}$.

4.3. Vypočítajte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, ak:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.4. Vypočítajte $(\mathbf{AB} - 3\mathbf{C})^T$, ak:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.5. Vypočítajte $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{B}^2 + 3\mathbf{A}$, $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$, ak:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.6. Vypočítajte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.7. Vypočítajte $\mathbf{A}^n$ pre $n = 1, 2, 3, \ldots$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

4.8. Nájdite všetky matice $\mathbf{B}$, ktoré sú komutatívne s maticou $\mathbf{A}$, t. j. pre ktoré platí $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4.9. Nájdite všetky matice $\mathbf{A}$ typu 3×3 nad poľom racionálnych čísel, ktoré sú komutatívne s maticou $\mathbf{D}$ (t. j. pre ktoré platí $\mathbf{AD} = \mathbf{DA}$), ktorá je diagonálna a na diagonále má prvky 1, 2 a 3.

4.10. Vyjadrite danú maticu ako súčet symetrickej a antisymetrickej matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Kapitola 5

Determinanty

Determinantom danej štvorcovej matice $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)$ stupňa n nad číselným poľom nazývame číslo:

$$\det\mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{\pi\in\Pi} \operatorname{zn}\pi \cdot a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\cdots a_{n\pi(n)},$$

kde Π je množina všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\operatorname{zn}\pi = (-1)^k$ a k je počet inverzií v π.

Nech $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)$ je štvorcová matica stupňa n. Determinant matice $\mathbf{A}$ v závislosti od stupňa n počítame nasledujco:

$$n = 1:\quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11},$$

$$n = 2:\quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$n = 3:\quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Determinanty matíc druhého a tretieho stupňa môžeme vypočítať podľa schém:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \left| \begin{array}{ccccc|cccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \times & & \times & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array} \right. .$$

Tento spôsob pre maticu tretieho stupňa nazývame **Sarusovo pravidlo**. K matici pripíšeme vpravo ešte raz prvý a druhý stĺpec. Vynásobíme všetky trojice prvkov ležiacich na priamkach „juhovýchodného smeru“ a priradíme im kladné znamienko. Potom vynásobíme všetky trojice prvkov ležiacich na priamkach „juhozápadného smeru“ a priradíme im záporné znamienko. Nakoniec všetky súčiny sčítame a dostaneme hodnotu determinantu matice.

Upozornenie: Sarusovým pravidlom je možné počítať iba determinanty matíc tretieho stupňa!

Determinant matice $\mathbf{A}$ stupňa väčšieho ako tri počítame **Laplaceovým rozvojom** podľa prvkov i-teho riadku (resp. j-teho stĺpca) alebo úpravou matice na trojuholníkový tvar.

Laplaceov rozvoj determinantu matice $\mathbf{A}$ podľa prvkov ľubovoľného riadku alebo stĺpca umožňuje výpočet determinantu matice stupňa n pomocou determinantov matíc stupňa $(n-1)$. Determinanty matíc stupňa $(n-1)$ opakovaným použitím Laplaceovho rozvoja počítame pomocou determinantov matíc stupňa $(n-2)$ atď. Laplaceov rozvoj aplikujeme dovtedy, kým nedosiahneme determinanty matíc stupňa 3, ktoré môžeme spočítať Sarusovým pravidlom.

Riešené príklady

Príklad 5.1. Nájdime počet inverzií a paritu permutácie:

$$\text{a) } \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.

a) V permutácii $(3, 1, 5, 4, 2)$ tvoria inverziu tie dvojice čísel, pre ktoré platí, že väčšie číslo predchádza menšie. Platí to pre tieto dvojice čísel $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(5, 4)$, $(5, 2)$ a $(4, 2)$. Našli sme päť takýchto dvojíc, teda počet inverzií v permutácii π_1 je $k = 5$. Permutácia má nepárnu paritu, lebo $\text{zn}\pi_1 = (-1)^5 = -1$.

b) V permutácii $(3, 4, 5, \ldots, n, 1, 2)$ predchádza $(n-2)$ čísel číslo 1 a rovnaký počet čísel predchádza číslo 2. Počet inverzií v permutácii π_2 je $k = 2(n-2)$. Počet inverzií k je vždy párne číslo bez ohľadu na n. Teda permutácia π_2 je párna. $\square$

Príklad 5.2. Nech $\mathbf{A} = \big(a_{ij}\big)$ je matica stupňa 5. Rozhodnime či sa súčin:

a) $a_{52}a_{13}a_{44}a_{35}a_{21}$, b) $a_{42}a_{21}a_{12}a_{55}a_{33}$,

vyskytuje v determinante matice $\mathbf{A}$? Ak sa vyskytuje, tak s akým znamienkom?

Riešenie.
a) Riadkové indexy prvkov matice v súčine $a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)}$ tvoria rastúcu postupnosť, stĺpcové indexy sú ich obrazmi v permutácii π. Usporiadajme činitele zadaného súčinu a vďaka komutatívnosti násobenia reálnych čísel dostávame:

$$a_{52}a_{13}a_{44}a_{35}a_{21} = a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}.$$

Permutácia $(3, 1, 5, 4, 2)$ má päť inverzií a $\operatorname{zn}\pi_1 = (-1)^5 = -1$ (viď príklad 5.1).
b) Všimnime si, že súčin neobsahuje žiaden prvok zo 4. stĺpca matice $\mathbf{A}$, a teda sa nemôže vyskytovať v determinante matice $\mathbf{A}$. □

Príklad 5.3. Vypočítajme determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

Riešenie.

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 2.$$

b) $$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) =$$
$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

c) $$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b) \cdot (a+b) - (a-b) \cdot (a-b) =$$
$$= (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab.$$ □

Príklad 5.4. Daná je matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajme jej determinant:

a) Sarusovým pravidlom, b) úpravou na trojuholníkový tvar.

Riešenie.

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right. = 1{\cdot}3{\cdot}2+2{\cdot}1{\cdot}3+3{\cdot}2{\cdot}1-3{\cdot}3{\cdot}3-1{\cdot}1{\cdot}1-2{\cdot}2{\cdot}2 =$$

$$= 6+6+6-27-3-8 = 18-36 = -18.$$

b) Pripočítaním (-2)-násobku prvého riadku k druhému a (-3)-násobku prvého riadku k tretiemu dostávame:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix}.$$

Vykonali sme také operácie, ktoré hodnotu determinantu matice nezmenia. V takto upravenom determinante matice prvé dva riadky odpíšeme. Druhý riadok vynásobíme číslom (-5) a pripočítame k tretiemu riadku. Po vykonaní naznačenej operácie sa hodnota determnantu opäť nezmení. Dostaneme:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 18 = -18. \qquad \square$$

Príklad 5.5. Vypočítajme hodnotu determinantu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) nad poľom reálnych čísel, b) nad poľom $(Z_5, \oplus_5, \otimes_5)$.

Riešenie.

Matica $\mathbf{A}$ je štvrtého stupňa, jej determinant budeme počítať Laplaceovým rozvojom podľa druhého riadku (druhý riadok obsahuje najviac núl). Týmto postupom získame determinanty matíc tretieho stupňa a tie vypočítame Sarusovým pravidlom.

a) $$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4{\cdot}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 3{\cdot}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(40-84) - 3(3-18) = -131.$$

Teraz ukážeme iný spôsob výpočtu, pri ktorom najprv determinant matice upravíme tak, aby v niektorom riadku alebo stĺpci bol najviac jeden nenulový prvok a potom urobíme rozvoj podľa tohto riadku alebo stĺpca. Determinant matice upravíme tak, že prvé dva riadky odpíšeme. Potom prvý riadok vynásobíme číslami (-3), (-4) a pripočítame k tretiemu a štvrtému riadku. Dostaneme:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -10 \\ 0 & -8 & -7 & -13 \end{vmatrix}.$$

Prvý stĺpec obsahuje jediný nenulový prvok, urobíme Laplaceov rozvoj podľa prvého stĺpca:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -10 \\ 0 & -8 & -7 & -13 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -5 & -2 & -10 \\ -8 & -7 & -13 \end{vmatrix} = -131.$$

b) Pri výpočte determinantu matice $\mathbf{A}$ nad poľom $(Z_5, \oplus_5, \otimes_5)$ budeme využívať také elementárne riadkové alebo stĺpcové operácie, aby vznikol riadok (alebo stĺpec) s jedným nenulovým prvkom. Ak pripočítame dvojnásobok tretieho stĺpca k druhému stĺpcu, dostaneme:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Druhý riadok obsahuje jediný nenulový prvok, Laplaceov rozvoj budeme preto robiť podľa druhého riadku. Pri výpočte determinantu si musíme uvedomiť, že v poli $(Z_5, \oplus_5, \otimes_5)$ číslu (-1) zodpovedá zvyšková trieda 4.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 4^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 4(2+4+3+1+1+1) =$$

$$= 2(4+3) = 2 \cdot 2 = 4. \quad \square$$

Cvičenia

5.1. Aké je znamienko permutácie $(5, 1, 3, 2, 4)$ a prečo?

5.2. Na danej množine M vytvorte permutáciu, ktorá bude mať päť inverzií:

a) $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, b) $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

5.3. Aké znamienko a prečo má daný súčin v definícii determinantu matice šiesteho stupňa:

a) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$, b) $a_{41}a_{13}a_{32}a_{54}a_{26}a_{65}$,

c) $a_{45}a_{16}a_{33}a_{54}a_{21}a_{62}$, d) $a_{23}a_{44}a_{66}a_{35}a_{12}a_{51}$?

5.4. Akú paritu (párna, resp. nepárna) má permutácia indexov v nasledujúcom súčine $a_{12}a_{24}a_{45}a_{36}a_{61}a_{53}$?

5.5. Nech matica $\mathbf{A}$ je stupňa 5 a hodnota jej determinantu $|\mathbf{A}| = 3$. V matici $\mathbf{A}$ vynásobíme tretí stĺpec číslom 4. Zmení sa hodnota determinantu takto upravenej matice $\mathbf{A}$? Ak áno, ako?

5.6. Vypočítajte $|\mathbf{A}^2\mathbf{B}^3|$, ak viete, že $|\mathbf{A}| = 3$ a $|\mathbf{B}| = 2$.

5.7. Na základe definície vypočítajte determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.8. Vypočítajte determinant matice:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.9. Laplaceovým rozvojom až po subdeterminant 3. stupňa vypočítajte determinant matice:

a) $\begin{pmatrix} -8 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 11 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5.10. Nad poľom zvyškových tried $(Z_5, \oplus_5, \otimes_5)$ vypočítajte determinant matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5.11. Nad poľom $(Z_7, \oplus_7, \otimes_7)$ vypočítajte pomocou Laplaceovho rozvoja determinant matice:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5.12. Riešte danú rovnicu:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 20, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} = 5.$$

5.13. Je daná matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & a & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & a \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pre akú reálnu hodnotu parametra a je jej determinant rovný nule?

5.14. Pre aké celé číslo x má nenulový determinant matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{pmatrix}?$$

5.15. Vypočítajte determinant matice:

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{pmatrix},$$

$$\text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-b_n \end{pmatrix}.$$

Kapitola 6

Hodnosť matice, inverzná matica

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica stupňa n. Nech existuje štvorcová matica $\mathbf{B}$ stupňa n taká, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E_n},$$

kde $\mathbf{E_n}$ je jednotková matica stupňa n. Potom hovoríme, že $\mathbf{B}$ je **inverzná matica** k matici $\mathbf{A}$. Označujeme ju $\mathbf{A}^{-1}$.

Pre regulárnu maticu $\mathbf{A}$ stupňa n platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kde A_{ij} je algebraický doplnok prvku a_{ij} pre $i, j = 1, 2, \dots, n$. Štvorcovú maticu (A_{ji}) nazývame **adjungovanou maticou** k matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde A_{ij} sú algebraické doplnky k prvkom a_{ij}.

Výpočet inverznej matice:

Nech $\mathbf{A}$ je regulárna matica. Potom inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ vypočítame:

1. pomocou adjungovanej matice,

2. pomocou elementárnych riadkových operácií na blokovej matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E_n})$, ktorými ju postupne upravíme na tvar $(\mathbf{E_n}|\mathbf{B})$, pričom $\mathbf{B}$ je inverzná matica k matici $\mathbf{A}$.

Pri druhom menovanom spôsobe výpočtu inverznej matice nemusíme vopred zisťovať či je matica $\mathbf{A}$ regulárna. Ak by nebola regulárna, počas výpočtu to odhalíme, pretože ďalšími úpravami sa nedá dosiahnuť jednotková matica.

Riešené príklady

Príklad 6.1. Vypočítajme hodnosť matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 15 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.
Maticu $\mathbf{A}$ upravíme pomocou elementárnych operácií na stupňovitý tvar.

V matici $\mathbf{A}$ prvý riadok odpíšeme. Prvý riadok vynásobíme číslami (-2), (-5) a pripočítame k druhému a štvrtému riadku. Dostaneme maticu $\mathbf{A}_1$ riadkovo ekvivalentnú s maticou $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

V matici $\mathbf{A}_1$ odpíšeme prvé dva riadky. Druhý riadok vynásobíme číslami 2, (-1) a pripočítame k tretiemu a štvrtému riadku. Dostaneme maticu $\mathbf{A}_2$ riadkovo ekvivalentnú s maticou $\mathbf{A}_1$:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matica $\mathbf{A}_2$ je už v stupňovitom tvare. Má tri nenulové riadky, z čoho vyplýva, že $h(\mathbf{A}) = 3$. $\square$

Príklad 6.2. Nájdime hodnosť matice $\mathbf{A}$ v závislosti od parametra x, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & x & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.
Maticu $\mathbf{A}$ upravíme na stupňovitý tvar pomocou elementárnych operácií.

Prvé dve elementárne operácie využijeme na to, aby sme parameter x „upratali“ v matici čo najviac dole a čo najviac vpravo (predídeme tak často nepríjemnému počítaniu s neznámym parametrom). Najskôr v matici $\mathbf{A}$ vymeníme druhý a tretí riadok, dostaneme tak maticu $\mathbf{A}_1$. Následne v matici $\mathbf{A}_1$ vymeníme druhý a tretí stĺpec. Dostaneme maticu $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & x & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & x & 5 \end{pmatrix} \sim \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & x \end{pmatrix}.$$

V matici $\mathbf{A}_2$ prvý riadok odpíšeme. Prvý riadok vynásobíme číslami (-3), (-5) a pripočítame k druhému a tretiemu riadku. Dostaneme maticu $\mathbf{A}_3$. V matici $\mathbf{A}_3$ prvé dva riadky odpíšeme. Druhý riadok vynásobíme číslom (-1) a pripočítame k tretiemu riadku. Dostaneme maticu $\mathbf{A}_4$:

$$\mathbf{A}_2 \sim \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -5 & x-15 \end{pmatrix} \sim \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & x-8 \end{pmatrix}.$$

Matica $\mathbf{A}_4$ je už upravená na stupňovitý tvar. Prvé dva riadky matice $\mathbf{A}_4$ sú nenulové, hodnosť matice nemôže byť menšia ako 2. Rozhodujúcim je riadok posledný. Ak $x - 8 = 0$, tak posledný riadok bude nulový. Z toho vyplýva, že $h(\mathbf{A}) = 2$ pre $x = 8$, v prípade, že $x \neq 8$, tak $h(\mathbf{A}) = 3$. $\square$

Príklad 6.3. Vypočítajme inverznú maticu k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.
Výpočet inverznej matice urobíme tak pomocou elementárnych riadkových ope-

rácií vykonaných na blokovej matici ako aj pomocou adjungovanej matice. Napíšeme blokovú maticu $\mathbf{X} = (\mathbf{A}|\mathbf{E_n})$:

$$\mathbf{X} = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

ktorú elementárnymi riadkovými operáciami upravíme na tvar $(\mathbf{E_n}|\mathbf{B})$, pričom matica $\mathbf{B}$ je inverznou maticou k matici $\mathbf{A}$. V matici $\mathbf{X}$ odpíšeme prvý riadok. Prvý riadok vynásobíme číslom (-1) a pripočítame ho k druhému riadku. Následne prvý riadok pripočítame k tretiemu riadku. Dostaneme maticu $\mathbf{X}_1$ riadkovo ekvivalentnú s maticou $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X}_1 = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

V matici $\mathbf{X}_1$ odpíšeme druhý riadok. Dvojnásobok druhého riadku pripočítame k tretiemu riadku a (-4)-násobok druhého riadku pripočítame k prvému riadku. Dostaneme maticu $\mathbf{X}_2$ riadkovo ekvivalentnú s maticou $\mathbf{X}_1$:

$$\mathbf{X}_2 = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

V matici $\mathbf{X}_2$ odpíšeme druhý a tretí riadok. Tretí riadok vynásobíme číslom 3 a pripočítame k prvému riadku. Dostaneme maticu $\mathbf{X}_3$ riadkovo ekvivalentnú s maticou $\mathbf{X}_2$:

$$\mathbf{X}_3 = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Matica $\mathbf{X}_3$ je už v tvare $(\mathbf{E_n}|\mathbf{B})$. To znamená, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pri výpočte inverznej matice pomocou adjungovanej matice najskôr vypočítame determinant matice $\mathbf{A}$. Matica $\mathbf{A}$ je tretieho stupňa, jej determinant vypočítame Sarusovým pravidlom:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -20 - 18 - 12 + 15 + 16 + 18 = -1.$$

Ku každému prvku matice **A** vypočítame jeho algebraický doplnok:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -1.$$

Teraz stačí už len dosadiť:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Príklad 6.4. Vyriešme maticové rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, $\mathbf{YA} = \mathbf{B}$ s neznámymi maticami $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.
Pretože $|\mathbf{A}| = 1$, matica **A** je regulárna, a teda existuje k nej inverzná matica

$\mathbf{A}^{-1}$, ktorú vypočítame jedným zo spôsobov ukázaných v príklade 6.4:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Rovnicu $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ vynásobíme maticou $\mathbf{A}^{-1}$ zľava a upravíme:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{EX} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Po dosadení dostávame:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rovnicu $\mathbf{YA} = \mathbf{B}$ vynásobíme maticou $\mathbf{A}^{-1}$ sprava a upravíme:

$$\begin{aligned} \mathbf{YAA}^{-1} &= \mathbf{BA}^{-1} \\ \mathbf{YE} &= \mathbf{BA}^{-1} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{BA}^{-1}. \end{aligned}$$

Po dosadení dostávame:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -105 & 77 & -58 \\ -152 & 112 & -87 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Cvičenia

6.1. Nájdite hodnosť matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

6.2. Určte hodnotu parametra t tak, aby matica $\mathbf{B}$ bola regulárna, ak

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 2-t \\ 3+t & -2 \end{pmatrix}.$$

6.3. Pre akú hodnotu a je regulárna nasledujúca matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & a \\ 1 & a & a & 0 \\ 0 & a & a & 1 \\ a & 0 & 1 & a \end{pmatrix}?$$

6.4. Pre akú hodnotu a je daná matica singulárna:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$?

6.5. Posúďte na základe determinantu regulárnosť matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.6. Pre aké $a \in R$ bude rovná číslu 2 hodnosť matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}?$$

6.7. Pre aké reálne číslo a sa rovná číslu 1 defekt (nulita) matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & a & -14 \end{pmatrix}?$$

6.8. Sú dané matice

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & x \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & x & 10 & 1 \\ 2 & -1 & x & 3 \\ 5 & 10 & 30 & -5 \end{pmatrix}$.

Ako závisí hodnosť danej matice od parametra x?

6.9. Pre akú hodnotu parametra a sa hodnosť matice $\mathbf{A}$ rovná jej stupňu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & a \\ 1 & a & a & 0 \\ 0 & a & a & 1 \\ a & 0 & 1 & a \end{pmatrix}?$$

6.10. V závislosti od reálnych hodnôt parametrov a a b určte hodnosť danej matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & a \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ b & a & -1 & 0 \\ a+b & a+b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & a & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & b & b & b \\ a & a & b & b & b \\ a & a & a & b & b \\ a & a & a & a & b \\ a & a & a & a & a \end{pmatrix}$.

6.11. Nájdite inverznú maticu k danej matici:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8/10 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6.12. Pomocou adjungovanej matice nájdite inverznú maticu k danej matici:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6.13. Pomocou blokovej matice nájdite inverznú maticu k matici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.14. Nad poľom $(Z_5, \oplus_5, \otimes_5)$ nájdite inverznú maticu (ak existuje) k danej matici:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6.15. Pre akú hodnotu parametra a existuje inverzná matica k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ -1 & -2 & a & -2 \end{pmatrix}?$$

6.16. Pre akú hodnotu parametra a neexistuje inverzná matica k matici:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$?

6.17. Využitím inverznej matice (ak existuje) riešte maticovú rovnicu $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

6.18. Využitím inverznej matice (ak existuje) riešte maticovú rovnicu $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$, ak:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 4 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

6.19. Maticovú rovnicu $\mathbf{AX} = \mathbf{BA}$ riešte využitím inverznej matice (ak existuje):

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

6.20. Maticovú rovnicu $\mathbf{XA} + 2\mathbf{B} = \mathbf{C}$ riešte využitím inverznej matice (ak existuje):

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Kapitola 7

Systémy lineárnych rovníc

Systémom (resp. **sústavou)** m **lineárnych rovníc o** n **neznámych** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazývame systém

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned}$$

Vektor $\mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ nazývame **riešenie systému lineárnych rovníc** a vektor $\mathbf{b}^T = (b_1, \ldots, b_n)$ nazývame **vektor pravých strán**. Ku každému systému lineárnych rovníc je možné priradiť dve matice:

- **maticu systému**, t. j. maticu zloženú z koeficientov pri neznámych:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

- **rozšírenú maticu systému**, t. j. maticu, ktorú dostaneme z matice **A** tak, že k nej pridáme stĺpec pravých strán rovníc systému:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Systém $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nazývame **homgénny**, ak $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Inak sa systém rovníc nazýva **nehomogénny**.

Univerzálnou a efektívnou metódou na riešenie systémov lineárnych rovníc je Gaussova eliminačná metóda, resp. Jordanova eliminačná metóda.

Vysvetlíme podstatu **Gaussovej eliminačnej metódy**:

1. K systému rovníc napíšeme rozšírenú maticu systému $\widetilde{\mathbf{A}}$.

2. Maticu $\widetilde{\mathbf{A}}$ pomocou elementárnych riadkových operácií upravíme na maticu v stupňovitom tvare.

3. Premenné, ktoré prislúchajú vedúcim prvkom v jednotlivých riadkoch tejto matice, nazveme **viazané premenné**. Ostatné premenné nazveme **voľné premenné**. Za voľné premenné môžeme dosadiť ľubovoľné prvky poľa, nad ktorým systém rovníc riešime.

4. Viazané premenné vyjadríme pomocou voľných premenných a dostaneme riešenie systému vo všeobecnom tvare. Dosadením konkrétnych prvkov poľa za voľné premenné dostaneme partikulárne riešenie systému.

Riešené príklady

Príklad 7.1. Riešme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 &= 6 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Riešenie.
Matica systému a rozšírená matica systému majú tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ -4 & -3 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & -5 & 6 \\ -4 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right).$$

Na výpočet zvolíme Gaussovu eliminačnú metódu. Maticu $\widetilde{\mathbf{A}}$ upravíme pomocou elementárnych riadkových operácií na maticu v stupňovitom tvare. Vzájomne vymeníme prvý a druhý riadok matice $\widetilde{\mathbf{A}}$, dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_1}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & -5 & 6 \\ -4 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right).$$

Prvý riadok matice $\widetilde{\mathbf{A_1}}$ odpíšeme. Potom ho postupne vynásobíme číslami (-2), (-1), 2 a pripočítame k druhému, tretiemu a štvrtému riadku. Dostaneme:

$$\widetilde{\mathbf{A_2}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & -14 & 15 \end{array}\right).$$

Prvé dva riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_2}}$ odpíšeme. Druhý riadok postupne vynásobíme číslami (-1), 7 a pripočítame k tretiemu a štvrtému riadku. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_3}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 21 & -27 \end{array}\right).$$

Prvé tri riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_3}}$ odpíšeme. Tretí riadok vynásobíme číslom 3 a pripočítame k štvrtému riadku. Dostaneme maticu v stupňovitom tvare:

$$\widetilde{\mathbf{A_4}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right).$$

Dostali sme postupnosť riadkovo ekvivalentných matíc. Hodnosť matice $\widetilde{\mathbf{A}}$ sa rovná počtu nenulových riadkov v matici $\widetilde{\mathbf{A_4}}$, čiže $h(\widetilde{\mathbf{A}}) = 4$. Hodnosť matice $\mathbf{A}$ dostaneme tak, že v matici $\widetilde{\mathbf{A_4}}$ vynecháme posledný stĺpec a spočítame nenulové riadky, t. j. $h(\mathbf{A}) = 3$. Pretože $h(\mathbf{A}) = 3 \neq 4 = h(\widetilde{\mathbf{A}})$, systém nemá riešenie. $\square$

Príklad 7.2. Gaussovou eliminačnou metódou nad poľom $(Z_5, \oplus_5, \otimes_5)$ nájdime riešenie systému:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Riešenie.
Postupovať budeme rovnako ako v príklade 7.1. Matica systému a rozšírená matica systému majú tvar:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

Maticu $\widetilde{\mathbf{A}}$ upravíme pomocou elementárnych riadkových operácií na maticu v stupňovitom tvare. Nezabúdajme, že počítame nad poľom zvyškových tried modulo 5! Prvý riadok matice $\widetilde{\mathbf{A}}$ odpíšeme a potom ho vynásobíme číslom 3 a pripočítame k druhému riadku. Štvornásobok prvého riadku pripočítame k tretiemu a štvrtému riadku. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_1}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Prvé dva riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_1}}$ odpíšeme. Druhý riadok vynásobíme číslom 4 a pripočítame k tretiemu riadku. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_2}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Prvé tri riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_2}}$ odpíšeme. Tretí riadok pripočítame k štvrtému a dostaneme maticu $\widetilde{\mathbf{A_3}}$, ktorá je už v stupňovitom tvare:

$$\widetilde{\mathbf{A_3}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Platí, že $h(\mathbf{A}) = h(\widetilde{\mathbf{A}}) = 4$, počet neznámych v danom systéme je tiež rovný 4, čo znamená, že systém má jediné riešenie. Nájdeme ho nasledujúco. Maticou

$\widetilde{\mathbf{A_3}}$ je určený systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 4x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Systém riešime postupne od poslednej rovnice. Z rovnice $4x_4 = 2$ (vynásobením číslom 4) dostávame $x_4 = 3$. Túto hodnotu dosadíme do rovnice $2x_3 + 3x_4 = 1$. Riešime tak rovnicu $2x_3 + 4 = 1$, odkiaľ $x_3 = 1$. Dosadíme do druhej rovnice $2x_2 + 3x_3 = 2$ a získame $x_2 = 2$. V poslednom kroku dosadíme získané hodnoty do prvej rovnice $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3$ a vypočítame $x_1 = 1$.
Riešenie daného systému vo vektorovom tvare vyzerá $\mathbf{x}^T = (1, 2, 1, 3)$. □

Príklad 7.3. Jordanovou eliminačnou metódou riešme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Riešenie.
Matica systému a rozšírená matica systému sú v tomto prípade:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -7 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & -7 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Najskôr Gaussovou eliminačnou metódou upravíme maticu $\widetilde{\mathbf{A}}$ na maticu v stupňovitom tvare. Jej prvý riadok odpíšeme a potom vynásobíme číslom (-2) a pripočítame k druhému a štvrtému riadku. Následne prvý riadok vynásobíme číslom (-1) a pripočítame k tretiemu riadku. Dostamene maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_1}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Vymeníme druhý a štvrtý riadok matice $\widetilde{\mathbf{A_1}}$. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_2}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Prvé dva riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_2}}$ odpíšeme. Druhý riadok vynásobíme číslom (-3) a (-2) a pripočítame k tretiemu a štvrtému riadku. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_3}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right).$$

Vymeníme tretí a štvrtý riadok v matici $\widetilde{\mathbf{A_3}}$ a dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_4}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Matica $\widetilde{\mathbf{A_4}}$ je už maticou v stupňovitom tvare. Aby sme ju upravili na tvar požadovaný Jordanovou eliminačnou metódou, budeme teraz postupovať zdola nahor. Posledné dva riadky odpíšeme. Tretí riadok postupne pripočítame k druhému a prvému riadku. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_5}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Posledné tri riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_5}}$ odpíšeme. Druhý riadok pripočítame k prvému a dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_6}} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Posledná matica je výsledkom Jordanovej eliminačnej metódy. Posúdime riešiteľnosť systému porovnaním hodností matice systému a rozšírenej matice systému $h(\mathbf{A}) = h(\widetilde{\mathbf{A_6}}) = k = 3 < 4 = n$. Preto má systém nekonečne veľa riešení, pričom počet voliteľných parametrov je $n - k = 4 - 3 = 1$. Vedúce prvky riadkov sa nachádzajú v prvom, druhom a treťom stĺpci matice $\widetilde{\mathbf{A_6}}$, to znamená, že im prislúchajúce premenné x_1, x_2, x_3 sú viazané premenné. Premenná x_4 je voľná, tú položíme rovnú parametru t. Riešenie úlohy získame zo systému prislúchajúceho matici $\widetilde{\mathbf{A_6}}$:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + 5x_4 &= -3 \\ x_2 \qquad\qquad &= -1 \\ x_3 + 3x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Odtiaľ $x_4 = t$, $x_3 = -3 - 3t$, $x_2 = -1$ a $x_1 = -3 - 5t$. Získaný výsledok zapíšeme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (-3 - 5t, -1, -3 - 3t, t)$, $t \in R$. □

Príklad 7.4. Gaussovou eliminačnou metódou riešme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie.
Napíšeme rozšírenú maticu $\widetilde{\mathbf{A}}$ daného systému lineárnych rovníc a tú budeme upravovať na maticu v stupňovitom tvare:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Prvý riadok matice $\widetilde{\mathbf{A}}$ odpíšeme, vynásobíme ho číslom (-1) a postupne pripočítame ku všetkým ostatným riadkom. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_1}} = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

V matici $\widetilde{\mathbf{A_1}}$ vzájomne vymeníme druhý a štvrtý riadok a dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_2}} = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Prvé dva riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_2}}$ odpíšeme. Druhý riadok matice vynásobíme číslom (-1) a pripočítame k štvrtému riadku. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_3}} = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Prvé štyri riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_3}}$ odpíšeme, štvrtý riadok vynásobíme číslom (-1), pripočítame k piatemu a dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_4}} = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

ktorá je výsledkom Gaussovej eliminačnej metódy. Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = 4 = n$. Daný systém lineárnych rovníc má jediné, triviálne riešenie $\mathbf{x}^T = (0, 0, 0, 0)$. $\square$

Príklad 7.5. Nad poľom $(Z_7, \oplus_7, \otimes_7)$ Jordanovou eliminačnou metódou riešme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} 3x_1 \phantom{{}+4x_2} + x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \phantom{{}+x_4} + 2x_5 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 \phantom{{}+4x_2} + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie.
Napíšme rozšírenú maticu $\widetilde{\mathbf{A}}$ systému a tú budeme upravovať spôsobom, ktorý

sme popísali v príklade 7.3:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

V matici $\widetilde{\mathbf{A}}$ vzájomne vymeníme prvý a tretí riadok. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_1}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

V matici $\widetilde{\mathbf{A_1}}$ prvý riadok odpíšeme. Prvý riadok vynásobíme postupne číslami 5, 4, 5 a pripočítame k druhému, tretiemu a štvrtému riadku. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_2}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

V matici $\widetilde{\mathbf{A_2}}$ vzájomne vymeníme druhý a tretí riadok. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_3}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Prvé dva riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_3}}$ odpíšeme. Druhý riadok matice vynásobíme číslom 4 a pripočítame k štvrtému riadku. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_4}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Prvé tri riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_4}}$ odpíšeme, tretí riadok vynásobíme číslom 2 a pripočítame k štvrtému riadku. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_5}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Posledné dva riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_5}}$ odpíšeme. Posledný riadok vynásobíme číslom 6 a pripočítame k druhému riadku. Prvý riadok matice odpíšeme. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_6}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Posledné dva riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_6}}$ odpíšeme. Tretí riadok vynásobíme postupne číslami 2, 6 a pripočítame k druhému a prvému riadku. Dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_7}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Posledné tri riadky matice $\widetilde{\mathbf{A_7}}$ odpíšeme. Druhý riadok vynásobíme číslom 5, pripočítame k prvému riadku a dostaneme maticu, ktorá je výsledkom Jordanovej eliminačnej metódy:

$$\widetilde{\mathbf{A_8}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Odtiaľ dostávame $h(\mathbf{A}) = k = 4 < 5 = n$. Jedna premenná je voľná a môžeme za ňu zvoliť ľubovoľné číslo daného poľa. Voliteľnou premennou bude x_5. Riešenie systému nájdeme pohodlnejšie, ak maticu $\widetilde{\mathbf{A_8}}$ upravíme tak, aby prvý nenulový prvok v každom riadku sa rovnal číslu 1. Stačí vynásobiť druhý a štvrtý riadok číslom 4. Prvý a tretí riadok len odpíšeme. Dostaneme tak maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A_9}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Matici $\widetilde{\mathbf{A_9}}$ zodpovedá systém lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & & + 6x_5 & = 0 \\ & x_2 & & + 2x_5 & = 0 \\ & & x_3 & + 3x_5 & = 0 \\ & & & x_4 + 2x_5 & = 0. \end{array}$$

Položíme $x_5 = t$ a priamo z predchádzajúcich rovníc nájdeme ostatné neznáme $x_1 = t$, $x_2 = 5t$, $x_3 = 4t$, $x_4 = 5t$. Riešenie napíšeme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (t, 5t, 4t, 5t, t)$, $t \in Z_7$. □

Cvičenia

7.1. Gaussovou eliminačnou metódou riešte daný systém rovníc:

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5\\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 &= -1\\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 7\\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - x_4 &= 8, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= 0\\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 0\\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 2\\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5\\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2\\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5\\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3, \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3\\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= -6\\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 &= -8\\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= -8, \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0\\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0\\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 0\\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 0\\ 5x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 0, \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0\\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 1\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1\\ 5x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 7\\ -x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 9x_4 &= 5, \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4\\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13\\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7\\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5, \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4\\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3\\ x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 &= 1\\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3, \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0\\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0\\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0\\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0. \end{aligned}$$

7.2. Jordanovou eliminačnou metódou riešte systém lineárnych rovníc:

a)
$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5\\ x_1 \phantom{{}+x_2} - 2x_3 + 3x_4 &= -4\\ 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}-3x_3} - x_4 &= 12\\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \phantom{{}+x_4} &= 5, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \phantom{{}+x_4} &= 2\\ 3x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 - x_4 &= 2\\ 2x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} &= 1, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 6x_1-9x_2+7x_3+10x_4&=0\\ 2x_1-3x_2-3x_3-4x_4&=0\\ 2x_1-3x_2+13x_3+18x_4&=0, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4&=0\\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4&=0\\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4&=0\\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4&=0, \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5&=0\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5&=0\\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5&=0\\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5&=0, \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_4-x_5&=0\\ x_1-x_2+2x_3-x_4&=0\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5&=0\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5&=0, \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5&=0\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5&=0\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5&=0\\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5&=0, \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} x_2+3x_3+4x_4&=-2\\ -3x_1+2x_2+x_3-4x_4&=0\\ -x_1+5x_2+2x_3-3x_4&=-1\\ 7x_1-4x_3+x_4&=2, \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5&=-2\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5&=12\\ 2x_2+4x_3+4x_4+12x_5&=46\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=7, \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-x_4&=1\\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4&=1\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4&=1\\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4&=1\\ 5x_1+5x_2+2x_3&=2, \end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned} x_3-x_5+x_6&=0\\ -x_1+x_2+x_4&=0\\ -x_2+x_3-x_4+x_6&=0\\ x_2+x_4-x_5&=0\\ -x_1+x_3+x_6&=0, \end{aligned}$$

l)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-3x_4&=1\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4&=5\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4&=10\\ 3x_1+8x_2+24x_3+3x_4&=-1\\ -x_1-3x_2-10x_3+8x_4&=1. \end{aligned}$$

7.3. Riešte daný systém lineárnych rovníc:

a)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-2x_4&=6\\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4&=8\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4&=4\\ 2x_1-3x_3+2x_3+x_4&=-8, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5&=1\\ 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=5\\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5&=4\\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5&=0, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4&=0\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4&=0\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4&=0, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 6x_1-9x_2+7x_3+10x_4&=3\\ 2x_1-3x_2-3x_3-4x_4&=1\\ 2x_1-3x_2+13x_3+18x_4&=1. \end{aligned}$$

7.4. Pre aké reálne hodnoty parametrov a, b má netriviálne riešenie systém

$$3x+ay=0, \quad bx-y=0?$$

7.5. Jordanovou eliminačnou metódou nad poľom $(Z_5, \oplus_5, \otimes_5)$ riešte daný systém lineárnych rovníc:

a) $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 4, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_4 &= 0, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2, \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 2, \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 1, \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \\ 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0, \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 \quad 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 1, \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} 3x_1 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0, \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 4. \end{aligned}$$

7.6. Jordanovou eliminačnou metódou nad poľom $(Z_7, \oplus_7, \otimes_7)$ riešte daný systém lineárnych rovníc:

a) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 6x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 1, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_5 &= 1 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 1. \end{aligned}$$

7.7. Gaussovou eliminačnou metódou nad poľom $(Z_7, \oplus_7, \otimes_7)$ riešte daný systém lineárnych rovníc:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 + 6x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_4 + 5x_5 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_4 + x_5 &= 3, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

7.8. Určte p, pre ktoré má systém nekonečne veľa riešení:

$$\begin{aligned} px_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + px_2 + x_3 &= 4. \end{aligned}$$

7.9. Určte reálne číslo a tak, aby daný systém nemal riešenie:

a)
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= -4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 + ax_3 &= 8, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} ax_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 13 \\ 3x_1 + x_2 + ax_3 &= 3, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} ax_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 3x_1 + x_2 + ax_3 &= 13, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 9x_4 &= 8 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + ax_4 &= 8. \end{aligned}$$

7.10. Je daný systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= a. \end{aligned}$$

Zistite, ako závisí jeho riešiteľnosť od hodnoty parametra a?

7.11. Je daný systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1. \end{aligned}$$

Zistite, koľko má riešení v závislosti od parametra a?

Kapitola 8

Vektory a vektorové priestory

Nech $(P, +, .)$ je pole s jednotkovým prvkom 1_P a nech $(V, \oplus)$ je komutatívna grupa. Nech $\otimes$ je tzv. vonkajšia operácia:

$$\otimes : P \times V \to V,$$

ktorá každej usporiadanej dvojici $(t, \mathbf{v})$, $t \in P$, $\mathbf{v} \in V$ priradí prvok $t \otimes \mathbf{v} \in V$.

Hovoríme, že množina V s operáciou $\oplus$ a vonkajšou operáciou $\otimes$ je **vektorový priestor** nad poľom P, ak pre všetky $t, s \in P$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí:

$$\begin{aligned}
t \otimes (s \otimes \mathbf{v}) &= (ts) \otimes \mathbf{v} \\
(t + s) \otimes \mathbf{v} &= (t \otimes \mathbf{v}) \oplus (s \otimes \mathbf{v}) \\
t \otimes (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= (t \otimes \mathbf{u}) \oplus (t \otimes \mathbf{v}) \\
1_P \otimes \mathbf{v} &= \mathbf{v}
\end{aligned}$$

Pre jednoduchosť zápisu budeme písať $t \cdot \mathbf{v}$ alebo len $t\mathbf{v}$ namiesto $t \otimes \mathbf{v}$, namiesto 1_P len 1 a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ miesto $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$. Vzhľadom na prioritu násobenia voči sčítaniu budú mať pre $t, s \in P$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ predchádzajúce vlastnosti tvar:

$$t(s\mathbf{v}) = (ts)\mathbf{v}, \quad (t + s)\mathbf{v} = t\mathbf{v} + s\mathbf{v}, \quad t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Vektor $\mathbf{x}$ je **lineárnou kombináciou vektorov** $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$, ak existujú také prvky $t_1, t_2, \ldots, t_n \in P$, že

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n.$$

Hovoríme, že vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ sú **lineárne nezávislé**, ak z rovnosti

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

vyplýva

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots, \quad a_n = 0.$$

Vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ sú **lineárne závislé**, ak platí

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

a existuje aspoň jeden koeficient $a_i \neq 0$.

Množinu $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ vektorov vektorového priestoru $V(P)$ nazveme **bázou vektorového priestoru**, ak platí:

a) vektory $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_n$ sú linárne nezávislé,

b) každý vektor $\mathbf{a} \in V(P)$ možno napísať ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_n$.

Riešené príklady

Príklad 8.1. Nech $(P, +, \cdot)$ je ľubovoľné pole. Označme

$$V_n(P) = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)|\ a_i \in P,\ i = 1, 2, \ldots, n\big\}$$

množinu všetkých usporiadaných n-tíc prvkov z poľa P. Na tejto množine definujeme súčet dvoch n-tíc a násobenie n-tice prvkom poľa P vzťahmi:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)\\ c \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) &= (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)\end{aligned}$$

Ukážeme, že $V_n(P)$ je vektorovým priestorom nad poľom P.

Riešenie.

Keďže P je pole, tak operácia $+$ je asociatívna i komutatívna, teda túto vlastnosť má aj sčítanie usporiadaných n-tíc. Neutrálnym prvkom je n-tica $(0, 0, \ldots, 0)$ a opačným prvkom k prvku $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je n-tica $(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$. Teda $V_n(P)$ je komutatívna grupa vzhľadom na sčítanie usporiadaných n-tíc. Ostatné vlastnosti vektorového priestoru vyplývajú z vlastností poľa P, napr. z asociatívnosti operácie násobenia či z distributívnosti násobenia vzhľadom na sčítanie. A tiež platí, že v poli P existuje jeho jednotka. $\square$

Vektorový priestor $V_n(P)$ z príkladu 8.1 s operáciami sčítania n-tíc a násobenie n-tice prvkom poľa P nazývame **aritmetický vektorový priestor** nad poľom P.

Príklad 8.2. Zistime či sú dané vektory lineárne závislé alebo nezávislé:

a) $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, -1)$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V_3(R)$,

b) $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 3, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 6, -1, 4)$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V_4(R)$.

Riešenie.
a) Vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ sú lineárne závislé, ak existujú také reálne čísla a_1, a_2, a_3, z ktorých je aspoň jedno rôzne od nuly, pre ktoré platí:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Ak rovnosť platí iba pre $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, potom sú vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ lineárne nezávislé. Po dosadení súradníc vektorov $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ do rovnosti dostaneme:

$$\begin{aligned} a_1(1,-1,2) + a_2(1,2,1) + a_3(2,1,-1) &= (0,0,0) \\ (a_1, -a_1, 2a_1) + (a_2, 2a_2, a_2) + (2a_3, a_3, -a_3) &= (0,0,0) \\ (a_1 + a_2 + 2a_3, -a_1 + 2a_2 + a_3, 2a_1 + a_2 - a_3) &= (0,0,0). \end{aligned}$$

Z rovnosti dvoch vektorov dostaneme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{rl} a_1 + a_2 + 2a_3 &= 0 \\ -a_1 + 2a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_1 + a_2 - a_3 &= 0. \end{array} .$$

Systém troch rovníc o troch neznámych vyriešime Gaussovou eliminačnou metódou. Dostaneme postupnosť riadkovo ekvivalentných matíc:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Výsledkom je triviálne riešenie $\mathbf{a}^T = (0, 0, 0)$ a to znamená, že sú vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ lineárne nezávislé.

b) Postupujeme analogicky ako v prípade a). Vychádzať budeme z rovnosti:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_3\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}.$$

Do rovnosti dosadíme súradnice vektorov $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ a dostávame:

$$a_1(1,0,-2,3) + a_2(1,3,0,0) + a_3(2,0,1,1) + a_4(1,6,-1,4) = (0,0,0,0).$$

Po vykonaní operácií na ľavej strane a z rovnosti vektorov dostaneme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a_1 & - & a_2 & + & 2a_3 & + & a_4 & = & 0 \\ & & 3a_2 & & & + & 6a_4 & = & 0 \\ -2a_1 & & & + & a_3 & - & a_4 & = & 0 \\ 3a_1 & & & + & a_3 & + & 4a_4 & = & 0, \end{array}$$

ktorý vyriešime Gaussovou eliminačnou metódou. Dostávame postupnosť riadkovo ekvivalentnych matíc:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Z poslednej matice vidíme, že $h(\mathbf{A}) = 3 < 4 = n$, systém má nekonečne veľa riešení. Volíme jeden parameter, a teda $\mathbf{a}^T = (-t, -2t, -t, t)$, $t \in R$. Znamená to, že vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ sú lineárne závislé. Nájdeme také nenulové koeficienty, pre ktoré lineárna kombinácia vektorov $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ sa rovná nulovému vektoru, napr. pre $t = -1$ platí $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. □

Príklad 8.3. Zistime či polynómy $p(x) = x^3+2x^2$, $q(x) = x^2-2$, $r(x) = 2x^3-x$ a $s(x)=x-1$ môžu tvoriť bázu vektorového priestoru všetkých polynómov nanajvýš tretieho stupňa $(P_{<3>}, \oplus_P, \otimes_\alpha)$ nad poľom reálnych čísel.

Riešenie.
Máme ukázať, že:

1. Polynómy $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ sú lineárne nezávislé.

2. Ľubovoľný polynóm $t(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ sa dá napísať ako lineárna kombinácia polynómov $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$.

Najskôr dokážeme prvú podmienku. Utvoríme lineárnu kombináciu polynómov $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ a položíme ju rovnú nulovému polynómu $o(x)$:

$$a_1p(x) + a_2q(x) + a_3r(x) + a_4s(x) = o(x).$$

Po dosadení dostaneme:

$$a_1(x^3 + 2x^2) + a_2(x^2 - 2) + a_3(2x^3 - x) + a_4(x - 1) = o(x).$$

Ľavú stranu upravíme na tvar polynómu a dostaneme:

$$(a_1+2a_3)x^3 + (2a_1+a_2)x^2 + (-a_3+a_4)x + (-2a_2-a_4) = 0x^3+0x^2+0x+0.$$

Porovnaním polynómov na oboch stranách rovnosti dostávame systém lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{rrrrl} a_1 & & +2a_3 & & = 0 \\ 2a_1 + & a_2 & & & = 0 \\ & & - \; a_3 & + a_4 & = 0 \\ & -2a_2 & & - a_4 & = 0, \end{array}$$

ktorý budeme riešiť Gaussovou eliminačnou metódou. Dostaneme postupnosť riadkovo ekvivalentných matíc:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right).$$

Z poslednej matice vidíme, že $h(\mathbf{A}) = 4 = n$ a systém má len triviálne riešenie $\mathbf{a}^T = (0, 0, 0, 0)$. To znamená, že $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ sú lineárne nezávislé.

Pre overenie druhej podmienky vychádzame z rovnosti:

$$t(x) = a_1p(x) + a_2q(x) + a_3r(x) + a_4s(x).$$

Pre konkrétny polynóm $t(x)$ pri zachovaní postupu z prvej časti riešenia, dostaneme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a_1 & & & + & 2a_3 & & & = & b_3 \\ 2a_1 & + & a_2 & & & & & = & b_2 \\ & & & - & a_3 & + & a_4 & = & b_1 \\ & - & 2a_2 & & & - & a_4 & = & b_0, \end{array}$$

kde b_0, b_1, b_2, b_3 sú konkrétne prvky poľa reálnych čísel. Ak sústavu riešime Gaussovou eliminačnou metódou, po úpravách dostaneme maticu:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & 2 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & b_0 - 8b_1 + 2b_2 - 4b_3 \end{array}\right).$$

Odtiaľ dostaneme $h(\widetilde{\mathbf{A}}) = h(\mathbf{A}) = 4 = n$, systém lineárnych rovníc má riešenie. Tým sme ukázali, že ľubovoľný polynóm patriaci do vektorového priestoru $(P_{<3>}, \oplus_P, \otimes_\alpha)$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia polynómov $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$. To znamená, že dané polynómy tvoria bázu vektorového priestoru všetkých polynómov nanajvýš tretieho stupňa nad poľom reálnych čísel. □

Overovanie platnosti 2. podmienky z predchádzajúceho príkladu môžeme zjednodušiť. Pokiaľ máme „dosť“ vektorov z príslušného vektorového priestoru a sú lineárne nezávislé, tak tvoria bázu uvažovaného priestoru. V príklade je dimenzia vektorového priestoru 4, teda bázu tvoria ľubovoľné štyri lineárne nezávislé prvky tohto vektorového priestoru.

Príklad 8.4. Daná je báza β vektorového priestoru všetkých štvorcových matíc stupňa dva nad poľom $(Z_5, \oplus_5, \otimes_5)$ a matica $\mathbf{A}$. Nájdime súradnice matice $\mathbf{A}$ v báze β, ak:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Riešenie.
Maticu $\mathbf{A}$ vyjadríme ako lineárnu kombináciu prvkov bázy β:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Súradnice matice **A** vzhľadom na bázu β sú potom koeficienty lineárnej kombinácie t_1, t_2, t_3, t_4. Matice na pravej strane rovnosti vynásobíme koeficientom t_i tak, že ním vynásobíme prvky na všetkých pozíciách každej matice a takto upravené matice po zložkách sčítame. Dostaneme rovnosť dvoch matíc:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + 2t_2 & 4t_1 + t_3 + 3t_4 \\ t_1 + 3t_2 + t_3 + t_4 & t_2 + 4t_3 + 2t_4 \end{pmatrix}.$$

Odtiaľ dostaneme systém lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{rcl} t_1 + t_2 \phantom{{}+ t_3 + 3t_4} & = & 1 \\ 4t_1 \phantom{{}+ 3t_2} + t_3 + 3t_4 & = & 2 \\ t_1 + 3t_2 + t_3 + t_4 & = & 3 \\ t_2 + 4t_3 + 2t_4 & = & 4. \end{array}$$

Systém riešime Gaussovou eliminačnou metódou. Dostaneme postupne riadkovo ekvivalentné matice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

Odtiaľ dostaneme:

$$\begin{array}{rcl} 4t_4 = 4 & \Rightarrow & t_4 = 1, \\ 3t_3 + 2t_4 = 3 & \Rightarrow & 3t_3 + 2 \cdot 1 = 3 \ \Rightarrow\ 3t_3 = 1 \ \Rightarrow\ t_3 = 2, \\ 2t_2 + t_3 + 3t_4 = 3 & \Rightarrow & 2t_2 + 2 + 3 \cdot 1 = 3 \ \Rightarrow\ 2t_2 = 3 \ \Rightarrow\ t_2 = 4, \\ t_1 + 2t_2 = 1 & \Rightarrow & t_1 + 2 \cdot 4 = 1 \ \Rightarrow\ t_1 = 3. \end{array}$$

Maticu **A** môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu prvkov bázy β:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

a preto súradnice matice **A** v báze β sú $\mathbf{A} = (3, 4, 2, 1)_\beta$. $\square$

Príklad 8.5. Dané sú dve rôzne bázy vektorového priestoru $V_3(R)$:

$$\alpha = \{(-1,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\}, \quad \beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}.$$

Vektor $\mathbf{v} \in V_3(R)$ má v báze α súradnice $\mathbf{v} = (0,1,1)_\alpha$. Nájdime jeho súradnice v báze β.

Riešenie.
Označme $\mathbf{v}_\alpha$ súradnice vektora $\mathbf{v}$ v báze α a $\mathbf{v}_\beta$ nech sú súradnice vektora $\mathbf{v}$ v báze β. Potom platí $\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}$, kde $\mathbf{P}$ je matica prechodu od bázy α k báze β. Riadky matice $\mathbf{P}$ tvoria po rade súradnice vektorov bázy β v báze α. Riešime tak tri systémy rovníc o troch neznámych:

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &= p_{11}(-1,1,0) + p_{12}(1,1,0) + p_{13}(0,0,1)\\
(1,1,0) &= p_{21}(-1,1,0) + p_{22}(1,1,0) + p_{23}(0,0,1)\\
(1,1,1) &= p_{31}(-1,1,0) + p_{32}(1,1,0) + p_{33}(0,0,1).
\end{aligned}$$

Prvému vzťahu zodpovedá systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned}
-p_{11} + p_{12} \qquad &= 1\\
p_{11} + p_{12} \qquad &= 0\\
p_{13} &= 0.
\end{aligned}$$

Druhému vzťahu zodpovedá systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned}
-p_{11} + p_{12} \qquad &= 1\\
p_{11} + p_{12} \qquad &= 1\\
p_{13} &= 0.
\end{aligned}$$

Tretiemu vzťahu zodpovedá systém lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned}
-p_{11} + p_{12} \qquad &= 1\\
p_{11} + p_{12} \qquad &= 1\\
p_{13} &= 1.
\end{aligned}$$

Vidíme, že všetky tri systémy rovníc majú rovnakú maticu systému a líšia sa len pravými stranami. Riešenie systémov nájdeme Jordanovou eliminačnou metódou. Aby sme sa vyhli trojnásobnému opakovaniu rovnakých aritmetických úkonov na matici systému, výpočet vykonáme v jednej blokovej matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c||c||c}
-1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right).$$

Jordanovou eliminačnou metódou dostávame postupne riadkovo ekvivalentné matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c||c||c} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c||c||c} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c||c||c} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c||c||c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Prvý stĺpec vpravo od matice systému je prvý riadok hľadanej matice prechodu **P**, druhý stĺpec je druhý riadok matice **P** a tretí stĺpec je tretí riadok matice **P**. Našli sme tak maticu prechodu od bázy α k báze β:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

K matici **P** nájdeme teraz inverznú maticu pomocou elementárnych riadkových operácií na blokovej matici. Dostaneme postupne riadkovo ekvivalentné matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom platí:

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{P}^{-1} = (0,1,1) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,1).$$

Súradnice vektora **v** v báze β sú $\mathbf{v} = (0,0,1)_\beta$. □

Cvičenia

8.1. Uveďte všetky vektory, ktoré tvoria podpriestor $[(1,2),(2,1)]$ aritmetického vektorového priestoru $V_2(Z_3)$ nad poľom $(Z_3, \oplus_3, \otimes_3)$.

8.2. Uveďte všetky prvky podpriestoru aritmetického vektorového priestoru $V_3(Z_3)$ generovaného vektormi $[(1,2,1),(2,1,2)]$ nad poľom $(Z_3,\oplus_3,\otimes_3)$.

8.3. Zistite či vektor $(-1,-4,7)$ patrí do podpriestoru $V_3(R)$ generovaného vektormi $[(1,-2,3),(-2,1,-1),(0,-3,5),(-2,-5,9),(-1,-1,2)]$ nad poľom reálnych čísel.

8.4. Zistite či do podpriestoru $[(4,3,2,1),(1,2,3,4),(1,1,1,0)]$ aritmetického vektorového priestoru $V_4(Z_5)$ nad poľom $(Z_5,\oplus_5,\otimes_5)$ patrí vektor $(4,4,4,4)$.

8.5. Zistite či daná podmnožina tvorí podpriestor aritmetického vektorového priestoru $V_2(R)$:

a) $A=\{(x,y)|\ x=y+1,\ \ x,y\in R\}$,

b) $B=\{(x,y)|\ y=k,\ \ x,y,k\in R\}$,

c) $C=\{(x,y)|\ y>0,\ \ x,y\in R\}$,

d) $D=\{(x,y)|\ x=-y,\ \ x,y\in R\}$.

8.6. Zistite či sú dané vektory lineárne závislé alebo lineárne nezávislé:

a) $(-1,-1,1,1)$, $(1,-1,1,-1)$, $(-1,1,1,-1)$, $(1,1,1,1)$,

b) $(1,0,-2,3)$, $(-1,3,0,0)$, $(2,0,1,1)$, $(1,6,-1,4)$.

8.7. Zistite či sú lineárne závislé alebo lineárne nezávislé vektory $\mathbf{a}=(1,3,4)$, $\mathbf{b}=(2,1,3)$, $\mathbf{c}=(3,1,4)$ v aritmetickom vektorovom priestore $V_3(Z_7)$ nad poľom $(Z_7,\oplus_7,\otimes_7)$.

8.8. Zo stĺpcov matice

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vyberte lineárne nezávislé stĺpce, ktoré generujú lineárny obal všetkých stĺpcov matice.

8.9. Pomocou determinantu matice zistite či sú lineárne závislé alebo nezávislé vektory $\mathbf{a}_1=(3,2,-1,2)$, $\mathbf{a}_2=(2,1,2,-1)$, $\mathbf{a}_3=(4,3,-2,4)$, $\mathbf{a}_4=(5,4,3,5)$.

8.10. Pre aké reálne čísla x a y sú vektory $\mathbf{a}_1 = (-2, x, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (4, -8, y)$ lineárne nezávislé?

8.11. Nájdite reálne číslo a tak, aby vektory $\mathbf{a}_1 = (0, a, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2, 3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_4 = (-2, 1, 4, 5)$ boli lineárne závislé.

8.12. Riadky matice $\mathbf{A}$ tvorí n vektorov z aritmetického vektorového priestoru $V_n(R)$. Determinant tejto matice $|\mathbf{A}| = -5$. Čo viete povedať o vektoroch na základe tejto informácie?

8.13. Zistite či vo vektorovom priestore $P_{<3>}(R)$ sú dané polynómy lineárne závislé alebo lineárne nezávislé:

a) $1 + x$, $x + x^2$, $x^2 + x^3$, $x^3 + 1$,

b) $1 + x$, $1 - x$, $x^3 + 2x^2$, $x^3 - 2x^2$.

8.14. Vo vektorovom priestore polynómov najviac druhého stupňa zistite, či sú polynómy $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $q(x) = -x^2 + 5x + 1$, $r(x) = x^2 + 9x + 11$ lineárne závislé? Ak áno, vyjadrite jeden z nich ako lineárnu kombináciu ostatných.

8.15. Akú dimenziu má vektorový priestor všetkých lineárnych kombinácií usporiadaných pätíc $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\mathbf{x}_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\mathbf{x}_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $\mathbf{x}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$? Spomedzi daných prvkov vyberte nejakú jeho bázu.

8.16. Nájdite vektorový podpriestor prislúchajúci matici a určte jeho dimenziu a bázu:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

8.17. Nájdite všetky také hodnoty parametra c, pre ktoré má vektorový priestor $[(3, 1, 1, 4), (c, 4, 10, 1), (1, 7, 17, 3), (2, 2, 4, 1)]$ najmenšiu dimenziu.

8.18. Pre akú reálnu hodnotu parametra c bude mať najmenšiu dimenziu vektorový podpriestor prislúchajúci matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}?$$

8.19. Určte dimenziu vektorového podpriestoru V_A prislúchajúceho matici **A** nad poľom $(Z_5, \oplus_5, \otimes_5)$ v závislosti od parametra a, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

8.20. Nech $[(1,1,0),(1,2,0),(3,1,0),(2,3,0),(5,6,0)]$ je podpriestor aritmetického vektorového priestoru $V_3(R)$. Nájdite nejakú jeho bázu a určte dimenziu.

8.21. Môžu riadky matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tvoriť bázu aritmetického vektorového priestoru $V_4(R)$.

8.22. Nájdite bázu vektorového priestoru všetkých riešení systému lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

8.23. Nech $(R^3, \oplus, \otimes_\alpha)$ je aritmetický vektorový priestor nad poľom $(R, +, .)$.

a) Sú vektory $\mathbf{b}_1 = (1,1,-1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,-1,1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1,1,1)$ lineárne nezávislé?

b) Určte súradnice vektora $\mathbf{x} = (1,-3,4)$ v báze $\beta = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

8.24. Môžu vektory $\mathbf{b}_1 = (2,0,1)$, $\mathbf{b}_2 = (0,1,3)$ a $\mathbf{b}_3 = (1,3,1)$ tvoriť bázu aritmetického vektorového priestoru usporiadaných trojíc reálnych čísel? Ak áno, určte súradnice vektora $\mathbf{x} = (-4,-4,3)$ v tejto báze.

8.25. Môžu dané vektory $\mathbf{a}_1 = (1,2,6,3)$, $\mathbf{a}_2 = (2,6,0,4)$, $\mathbf{a}_3 = (3,1,2,2)$, $\mathbf{a}_4 = (5,3,5,6)$ tvoriť bázu aritmetického vektorového priestoru usporiadaných štvoríc nad poľom $(Z_7, \oplus_7, \otimes_7)$?

8.26. Je možné doplniť dané tri vektory $(2,3,4,1)$, $(3,2,1,0)$, $(0,1,2,2)$ na bázu vektorového priestoru $V_4(Z_5)$ nad poľom $(Z_5, \oplus_5, \otimes_5)$? Ak áno, ako?

8.27. Dá sa z množiny $M = \{(3,3,8),(3,2,1),(2,4,6),(5,4,13),(1,3,3)\}$ vybrať vektor $\mathbf{x}$ a doplniť bázu $\beta = \{(1,2,3),\mathbf{x},(2,1,5)\}$ vektorového priestoru $V_3(R)$ tak, aby vektor $\mathbf{v} = (3,1,2)$ mal v báze β súradnice $(-7,4,3)_\beta$?

8.28. Dá sa z množiny $M = \{(1,2,8),(3,2,1),(2,2,5),(5,4,-1)\}$ vybrať taký vektor $\mathbf{x}$, aby vektor $\mathbf{a} = (1,3,3)$ mal v báze $\beta = \{(3,-1,2),\mathbf{x},(1,2,5)\}$ súradnice $(-1,3,-2)_\beta$?

8.29. Daný je aritmetický vektorový priestor $V_3(Z_5)$ usporiadaných trojíc nad poľom $(Z_5, \oplus_5, \otimes_5)$ a množina $M = \{(0,0,1),(0,4,3),(0,1,1)\}$. Dá sa z množiny M vybrať vektor $\mathbf{b}$ a ním doplniť bázu $\beta = \{(1,1,1),(1,0,1),\mathbf{b}\}$ tak, aby vektor $\mathbf{v} = (1,4,4)$ mal v báze β súradnice $(3,3,4)_\beta$?

8.30. Zistite či matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu 2×2 nad poľom reálnych čísel.

8.31. Môžu matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

tvoriť bázu vektorového priestoru všetkých štvorcových matíc stupňa dva nad poľom reálnych čísel? Ak áno, nájdite v tejto báze súradnice matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.32. Sú dané matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

lineárne nezávislými prvkami vektorového priestoru všetkých matíc typu 2×2 nad poľom reálnych čísel? Ak áno, aké sú v báze $\beta = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$ súradnice matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}?$$

8.33. Nech M je množina reálnych antisymetrických matíc typu 3×3. Ukážte, že $(M, \oplus_M, \otimes_\alpha)$ tvorí vektorový priestor nad poľom reálnych čísel, kde $\oplus_M$ predstavuje sčítanie matíc a $\otimes_\alpha$ násobenie matice reálnym číslom. Určte dimenziu vektorového priestoru, nejakú jeho bázu a nájdite v tejto báze súradnice matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.34. Tvoria matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u+v & 2v \\ 2u & u-v \end{pmatrix}$$

(kde u, v sú ľubovoľné reálne čísla) vektorový priestor nad poľom reálnych čísel vzhľadom na operáciu sčítania matíc a násobenia matice reálnym číslom? Ak áno, nájdite jednu jeho bázu a určte v tejto báze súradnice matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.35. Nájdite súradnice polynómu $p(x)$ vzhľadom na danú bázu β:

a) $p(x) = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 2$,
báza $\beta = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4, (x-1)^5\}$,

b) $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 3$,
báza $\beta = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3, (1-x)^4\}$,

c) $p(x) = 2x^5 + x^3 - 4x^2 + 3$,
báza $\beta = \{1, 2-x, (2-x)^2, (2-x)^3, (2-x)^4, (2-x)^5\}$.

8.36. Polynóm $p(x)$ má v báze $\beta_0 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ vektorového priestoru polynómov najviac 5. stupňa súradnice $(4, -3, 5, 3, -1, 2)_{\beta_0}$. Aké sú jeho súradnice v báze:

a) $\beta_1 = \{1, x-3, (x-3)^2, (x-3)^3, (x-3)^4, (x-3)^5\}$,

b) $\beta_2 = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3, (1-x)^4, (1-x)^5\}$?

8.37. V báze $\beta_0 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ má polynóm $p(x)$ súradnice:

a) $p(x) = (3, -2, 1, -1, 2, 3)_{\beta_0}$,

b) $p(x) = (3, 4, -2, 1, 2, 1)_{\beta_0}$.

Nech je daná báza $\beta_1 = \{1, 2-x, (2-x)^2, (2-x)^3, (2-x)^4, (2-x)^5\}$. Aké súradnice bude mať polynóm $p(x)$ v báze β_1?

8.38. Zistite či $\beta = \{1+x, 1-x, x^3+2x^2, x^3-2x^2\}$ je bázou vektorového priestoru polynómov najviac tretieho stupňa. Ak áno, nájdite súradnice polynómu $p(x) = x^2 + x + 1$ v tejto báze.

8.39. Môžu polynómy $p(x) = 1$, $q(x) = 3 - x$, $s(x) = (3-x)^2$, $t(x) = (3-x)^3$ tvoriť bázu vektorového priestoru polynómov najviac 3. stupňa? Ak áno, určte súradnice daného polynómu v tejto báze:

a) $r(x) = 3x^3 + 3$,

b) $r(x) = x^3 - 1$.

8.40. Dokážte, že polynómy $p(x) = x-5$, $r(x) = -3x^2+2x-1$, $s(x) = -x^2+3x$ tvoria bázu vektorového priestoru polynómov najviac druhého stupňa nad poľom reálnych čísel a nájdite súradnice polynómu $q(x) = 6x^2 - 10x - 4$ v tejto báze.

8.41. Dokážte, že dané polynómy $p(x) = 10x^2 - 3x + 1$, $r(x) = 12x^2 - 2x + 2$, $s(x) = -x + 1$ tvoria bázu vektorového priestoru polynómov stupňa najviac druhého nad poľom reálnych čísel a v tejto báze nájdite súradnice polynómu $q(x) = -34x^2 + 10x - 8$.

8.42. Bez umocňovania a roznásobovania mocnín $(x-1)^k$ nájdite súradnice daného polynómu $p(x)$ v báze $\beta = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$, ak

$$p(x) = 3(x-1)^5 + 15(x-1)^4 + 28(x-1)^3 + 29(x-1)^2 + 25(x-1) + 8.$$

8.43. Polynóm $p(x)$ má v báze $\beta_1 = \{1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3\}$ súradnice $p(x) = (-1, 2, 0, -3)_{\beta_1}$. Určte jeho súradnice v báze $\beta_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$ a to bez umocňovania a roznásobovania mocnín $(x-2)^k$.

8.44. Polynóm $p(x)$ má v báze $\beta_1 = \{1, 2-x, (2-x)^2, (2-x)^3, (2-x)^4\}$ súradnice $p(x) = (0, -8, 10, -6, 1)$. Bez umocňovania a roznásobovania mocnín $(2-x)^k$ zistite, aké súradnice bude mať v báze $\beta_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

8.45. Nech $\beta_1 = \{(0,1,1), (-1,1,0), (0,0,1)\}$ a $\beta_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (2,0,1)\}$ sú dve bázy aritmetického vektorového priestoru $V_3(R)$. Nájdite maticu prechodu od bázy β_1 k báze β_2.

8.46. Nech $V_3(R)$ je vektorový priestor usporiadaných trojíc reálnych čísel. Tvoria množiny $\alpha = \{(2,3,5),(0,1,2),(1,0,0)\}$ a $\beta = \{(1,1,1),(1,1,-1),(2,1,2)\}$ dve rôzne bázy vektorového priestou $V_3(R)$? Ak áno, nájdite maticu prechodu od bázy α k báze β.

8.47. Vektor $\mathbf{v} \in V_3(R)$ má v báze $\beta_1 = \{(0,1,1),(-1,1,0),(0,0,1)\}$ súradnice $\mathbf{v} = (1,-2,0)_{\beta_1}$. Aké sú jeho súradnice v báze $\beta_2 = \{(1,0,1),(0,1,1),(2,0,1)\}$, keď matica prechodu od bázy β_1 k báze β_2 má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.48. Vektor $\mathbf{v} \in V_3(R)$ má v báze $\beta_1 = \{(1,0,-1),(0,2,1),(1,-1,0)\}$ súradnice $\mathbf{v} = (-1,0,2)_{\beta_1}$. Nech $\beta_2 = \{(1,-1,0),(0,0,1),(1,0,1)\}$ je báza $V_3(R)$. Aké sú súradnice vektora $\mathbf{v}$ v báze β_2?

Kapitola 9

Vlastné hodnoty a vlastné vektory matice

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica stupňa n nad poľom reálnych čísel. Rovnicu

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$$

nazývame **charakteristickou rovnicou** matice $\mathbf{A}$.

Determinant $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$ nazývame **charakteristickým polynómom** matice $\mathbf{A}$. Jeho korene nazývame **vlastné hodnoty** alebo **charakteristické čísla** matice $\mathbf{A}$.

Nech λ_0 je vlastná hodnota matice $\mathbf{A}$. Stĺpcový vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, pre ktorý platí

$$(\mathbf{A} - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

nazývame **vlastným vektorom** alebo **charakteristickým vektorom** prislúchajúcim vlastnej hodnote λ_0.

Riešené príklady

Príklad 9.1. Nájdime vlastné hodnoty a vlastné vektory matice $\mathbf{A}$, ak:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie.
a) Najskôr zostrojíme charakteristický polynóm matice $\mathbf{A}$:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Vlastné hodnoty dostaneme ako riešenie charakteristickej rovnice:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \;\; \lambda_2 = 1.$$

Vlastné vektory $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2)$ dostaneme riešením homogénneho systému lineárnych rovníc $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pre príslušné λ.
Pre vlastnú hodnotu $\lambda = 3$ platí:

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Všeobecné riešenie systému lineárnych rovníc vyjadríme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (t, t) = t(1, 1)$, $t \in R$. Vlastné vektory prislúchajúce ku $\lambda = 3$ sú:

$$\mathbf{x}^T = t(1, 1), \text{ kde } \; t \in R - \{0\}.$$

Pre vlastnú hodnotu $\lambda = 1$ platí:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Všeobecné riešenie systému lineárnych rovníc vyjadríme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (-t, t) = t(-1, 1)$, $t \in R$. Vlastné vektory prislúchajúce ku $\lambda = 1$ sú:

$$\mathbf{x}^T = t(-1, 1), \text{ kde } \; t \in R - \{0\}.$$

b) Zostrojíme charakteristický polynóm matice $\mathbf{A}$:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$

Vlastné hodnoty dostaneme ako riešenie charakteristickej rovnice:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Vlastné vektory $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2)$ dostaneme riešením homogénneho systému lineárnych rovníc $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pre $\lambda = 2$:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{r} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0. \end{array}$$

Všeobecné riešenie systému lineárnych rovníc vyjadríme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (t, t) = t(1, 1)$, $t \in R$. Vlastné vektory prislúchajúce ku $\lambda = 2$ sú:

$$\mathbf{x}^T = t(1, 1), \text{ kde } \; t \in R - \{0\}.$$

c) Najskôr zostrojíme charakteristický polynóm matice $\mathbf{A}$:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1.$$

Vlastné hodnoty dostaneme ako riešenie charakteristickej rovnice:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \mathrm{i}, \; \lambda_2 = -\,\mathrm{i}\,.$$

Vlastné vektory $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2)$ dostaneme riešením homogénneho systému lineárnych rovníc $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pre príslušné λ.
Pre $\lambda = \mathrm{i}$ platí: $(\mathbf{A} - \mathrm{i}\,\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -2 \\ 1 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{r} (-1-\mathrm{i})x_1 - \quad 2x_2 = 0 \\ x_1 + (1-\mathrm{i})x_2 = 0. \end{array}$$

Všeobecné riešenie systému lineárnych rovníc vyjadríme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (-t(1-\mathrm{i}), t) = t(-1+\mathrm{i}, 1)$, $t \in C$. Prislúchajúce vlastné vektory sú:

$$\mathbf{x}^T = t(-1+\mathrm{i}, 1), \text{ kde } \; t \in C - \{0\}.$$

Pre $\lambda = -\,\mathrm{i}$ platí: $(\mathbf{A} + \mathrm{i}\,\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} & -2 \\ 1 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{r} (-1+\mathrm{i})x_1 - \quad 2x_2 = 0 \\ x_1 + (1+\mathrm{i})x_2 = 0. \end{array}$$

Všeobecné riešenie systému lineárnych rovníc vyjadríme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (-t(1+\mathrm{i}), t) = t(-1-\mathrm{i}, 1)$, $t \in C$. Prislúchajúce vlastné vektory sú:

$$\mathbf{x}^T = t(-1-\mathrm{i}, 1), \text{ kde } \; t \in C - \{0\}.$$

d) Zostrojíme charakteristický polynóm matice **A**:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2.$$

Vlastné hodnoty dostaneme ako riešenie charakteristickej rovnice:

$$(2-\lambda)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Vlastné vektory $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2)$ dostaneme riešením homogénneho systému lineárnych rovníc $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pre $\lambda = 2$:

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0. \end{array}$$

Sústava má riešenie pre ľubovoľné hodnoty premenných x_1, x_2. Ak položíme $x_1 = t$ a $x_2 = s$, dostaneme všeobecné riešenie systému lineárnych rovníc, ktoré vyjadríme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (t, s) = t(1,0) + s(0,1)$, $t, s \in R$. Vlastné vektory prislúchajúce vlastnej hodnote $\lambda = 2$ sú:

$$\mathbf{x}^T = t(1,0) + s(0,1), \text{ kde } \; t, s \in R, \; t^2 + s^2 > 0.$$ □

Príklad 9.2. Nájdime vlastné hodnoty a im prislúchajúce vlastné vektory matice **A**, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.
Najskôr zostrojíme charakteristický polynóm matice **A**:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ -2 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)(\lambda-5).$$

Vlastné hodnoty dostaneme ako riešenie charakteristickej rovnice:

$$\lambda(1-\lambda)(\lambda-5) = 0.$$

Rovnica má riešenie $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$. Vlastné vektory $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$ dostaneme riešením homogénneho systému lineárnych rovníc $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pre príslušné λ.

Pre $\lambda = 0$ platí: $\quad (\mathbf{A} - 0\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3 &=& 0 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 &=& 0 \\ 2x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3 &=& 0. \end{array}$$

Sústavu riešime Gaussovou eliminačnou metódou a dostávame:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Všeobecné riešenie systému lineárnych rovníc vyjadríme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (-3/2t, -7t, t) = t(-3/2, -7, 1)$, $t \in R$. Vlastné vektory prislúchajúce vlastnej hodnote $\lambda = 0$ sú:

$$\mathbf{x}^T = t(-3/2, -7, 1), \text{ kde } \ t \in R - \{0\}.$$

Pre $\lambda = 1$ platí: $\quad (\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_3 &=& 0 \\ -2x_1 + 4x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + 2x_3 &=& 0. \end{array}$$

Sústavu riešime Gaussovou eliminačnou metódou a dostávame:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Všeobecné riešenie systému lineárnych rovníc vyjadríme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (0, t, 0) = t(0, 1, 0)$, $t \in R$. Prislúchajúce vlastné vektory sú:

$$\mathbf{x}^T = t(0, 1, 0), \text{ kde } \ t \in R - \{0\}.$$

Pre $\lambda = 5$ platí: $\quad (\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} -3x_1 \phantom{{}-4x_2} + 3x_3 &=& 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &=& 0 \\ 2x_1 \phantom{{}-4x_2} - 2x_3 &=& 0. \end{array}$$

Sústavu riešime Gaussovou eliminačnou metódou a dostávame:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Všeobecné riešenie systému lineárnych rovníc vyjadríme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (t, 1/2t, t) = t(1, 1/2, 1)$, $t \in R$. Prislúchajúce vlastné vektory sú:

$$\mathbf{x}^T = t(1, 1/2, 1), \text{ kde } \ t \in R - \{0\}.$$ □

Príklad 9.3. Nájdime vlastné hodnoty a k nim prislúchajúce vlastné vektory matice $\mathbf{A}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.
Najskôr zostrojíme charakteristický polynóm matice $\mathbf{A}$:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2).$$

Vlastné hodnoty dostaneme ako riešenie charakteristickej rovnice:

$$(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0.$$

Rovnica má riešenie $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = -2$. Vlastné vektory $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$ dostaneme riešením homogénneho systému lineárnych rovníc $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pre príslušné λ.

Pre $\lambda = 2$ platí: $\quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -2x_1 + \ x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sústavu riešime Gaussovou eliminačnou metódou a dostávame:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Všeobecné riešenie systému lineárnych rovníc vyjadríme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (v/2, t, v) = v(1/2, 0, 1) + t(0, 1, 0)$, $t, v \in R$. Vlastné vektory prislúchajúce vlastnej hodnote $\lambda = 2$ sú:

$$\mathbf{x}^T = v(1/2, 0, 1) + t(0, 1, 0), \text{ kde } v, t \in R,\ v^2 + t^2 > 0.$$

Pre $\lambda = -2$ platí: $(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & & & + \ x_3 & = 0 \\ & & 4x_2 + & & = 0 \\ 4x_1 & & & + 2x_3 & = 0. \end{array}$$

Sústavu riešime Gaussovou eliminačnou metódou a dostávame:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Všeobecné riešenie systému lineárnych rovníc vyjadríme vo vektorovom tvare $\mathbf{x}^T = (-1/2t, 0, t) = t(-1/2, 0, 1)$, $t \in R$. Prislúchajúce vlastné vektory sú:

$$\mathbf{x}^T = t(-1/2, 0, 1), \text{ kde } t \in R - \{0\}.$$ □

Cvičenia

9.1. Nájdite charakteristický polynóm matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

9.2. Nájdite vlastné čísla danej matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -1 & 0 \\ -23 & 3 & -8 & 1 \\ 10 & -2 & 3 & 0 \\ -24 & 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

9.3. Daná matica $\mathbf{A}$ má vlastnú hodnotu λ. Nájdite k nej prislúchajúci vlastný vektor:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$, d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda = 5$.

9.4. Nájdite všetky vlastné hodnoty a k nim prislúchajúce vlastné vektory danej matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, j) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

k) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 4 & 11 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, l) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

m) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, n) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

9.5. Pre akú hodnotu parametra a má trojnásobnú vlastnú hodnotu matica

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$?

Výsledky cvičení

1. Binárne relácie, ekvivalencie, rozklady

1.1. a) reflexívna a symetrická,
b) symetrická,
c) symetrická,
d) reflexívna a symetrická.

1.2. Symetrická.

1.3. Áno; $M_R = \{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{E\}, \{FX\}\}$.

1.4. Áno; triedy ekvivalencie — výška konta.

1.5. Nie.

1.6. Áno; $M_R = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5, 6\}\}$.

1.7. Áno; $Z_R = \{Z^-, \{0\}, Z^+\}$.

1.8. Reflexívna, tranzitívna a antisymetrická; nie.

1.9. Áno; $Z_R = \{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \{-3, 3\}, \dots\}$.

2. Algebraické štruktúry

2.1. Nie komutatívna, nie asociatívna.

2.2. Áno; je komutatívna, nie asociatívna.

2.3. Áno; je komutatívna, nie asociatívna.

2.4. Áno; sú komutatívne aj asociatívne.

2.5. Áno.

2.6. a) Neexistuje neutrálny prvok,
b) $e = 4$, $a_s = 8 - a$.

2.7. a) Neexistuje neutrálny prvok,
b) neexistuje neutrálny prvok.

2.8. Komutatívny monoid.

2.9. Komutatívna pologrupa.

2.10. Komutatívny monoid.

2.11. Komutatívna grupa.

2.12. Komutatívny monoid.

2.13. Komutatívna grupa.

2.14. $(R, \triangle)$ je komutatívna grupa a $(R, \triangledown)$ je grupoid.

2.15. Komutatívny monoid.

2.16. Komutatívny monoid.

2.17. Komutatívny grupoid.

2.18. Komutatívna pologrupa.

2.19. Komutatívna grupa.

2.20. Komutatívna grupa.

2.21. Grupa.

2.22. Komutatívna grupa.

2.23. Monoid.

2.24. Komutatívny monoid.

2.25. Nie je algebraická štruktúra.

2.26. $(A, +)$ je komutatívna grupa a $(A, \circ)$ je komutatívny monoid.

2.27. Komutatívny monoid.

2.28. Komutatívna grupa.

2.29. $(R, \oplus)$ je komutatívna grupa, $(R, \otimes)$ je komutatívny grupoid a $(R, \oplus, \otimes)$ nie je algebraická štruktúra.

2.30. Áno.

2.31. $(M, \cup)$ a $(M, \cap)$ sú komutatívne monoidy, $(M, \cup, \cap)$ nie je algebraická štruktúra.

2.32. $(M, \triangle)$ je komutatívna grupa, $(M, \circ)$ je grupoid a $(M, \triangle, \circ)$ nie je algebraická štruktúra.

2.33. Nie je algebraická štruktúra.

2.34. Nie je algebraická štruktúra.

2.35. Nie je algebraická štruktúra.

2.36. Pole.

2.37. Nie je algebraická štruktúra.

2.38. Pole.

2.39. Komutatívny okruh s jednotkou.

2.40. Pole.

2.41. Nie je algebraická štruktúra.

2.42. Pole.

2.43. Komutatívny okruh s jednotkou.

2.44. Komutatívny okruh s jednotkou.

2.45. Pole.

2.46. Nie je algebraická štruktúra.

2.47. $(P_{\langle 2k \rangle}, \oplus_P)$ nie je algebraická štruktúra, $(P_{\langle 2k \rangle}, \otimes_P)$ je komutatívny monoid a $(P_{\langle 2k \rangle}, \oplus_P, \otimes_P)$ nie je algebraická štruktúra.

2.48. Nie je algebraická štruktúra.

2.49. Pole.

2.50. Komutatívny okruh s jednotkou.

2.51. Nie je algebraická štruktúra.

2.52. Komutatívny okruh s jednotkou.

3. Polynómy

3.1. a) $p(x) = x^4 - 11x^3 + 44x^2 - 76x + 48$,
b) $p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$,
c) $p(x) = x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 2$,
d) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 54$,
e) $p(x) = x^7 - 3x^6 + 6x^4 - 48x^3 + 192x^2 - 128x + 480$,
f) $p(x) = x^5 - \frac{15}{4}x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 2x + 1$.

3.2. $p(x) = x^3 + (3-3i)x^2 + (-3-6i)x + (-3+i)$.

3.3. $p(x) = x^5 + 4x^4 - 10x^3 - 40x^2 + 25x + 100$, $x_{3,4} = -\sqrt{5}$, $x_5 = -4$.

3.4. $a = 3$.

3.5. $a = 7$.

3.6. $a = -1$.

3.7. a) pre ľubovoľné a,
b) $a = -5$,
c) neexistuje také a.

3.8. $a = 4$.

3.9. $x_2 = 2 - \mathrm{i}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -\frac{5}{2}$.

3.10. $x_2 = 2 - \mathrm{i}$, $x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{1}{2}$.

3.11. $x_2 = 2 + \mathrm{i}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_{4,5} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.12. $x_2 = 1 + 2\,\mathrm{i}$, $x_3 = \frac{3}{2}$.

3.13. $x_{1,2,3} = 1$ je trojnásobný koreň, $x_4 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ je jednoduchý koreň.

3.14. a) $c_{1,2,3,4} = -2$ je štvornásobný koreň, $c_5 = 1$ je jednoduchý koreň,
b) $c_{1,2,3} = -1$ je trojnásobný koreň, $c_4 = 2 + \mathrm{i}$ je jednoduchý koreň, $c_5 = 2 - \mathrm{i}$ je jednoduchý koreň,
c) $c_{1,2,3,4} = 1$ je štvornásobný koreň, neexistujú ďalšie reálne korene.

3.15. $x_3 = -\mathrm{i}$, $x_4 = 1$, $x_5 = -3$.

3.16. $a = -3$.

3.17. $a = \pm 6$.

3.18. $b = 4$, $c = 2$.

3.19. $q = \pm 4\sqrt{2}$.

3.20. $a = c = 1$, $b = -1$.

3.21. Áno; diferencia $d = 1$.

3.22. $x_1 = \sqrt{2} - 1$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2} + 1$.

3.23. $x_1 = -30$, $x_2 = 20$, $x_3 = -10$.

3.24. a) $x_{1,2} = -2$ je dvojnásobný a $x_3 = \frac{1}{2}$ je jednoduchý koreň,
b) $x_1 = \frac{1}{2}$ je jednoduchý, $x_2 = -\frac{2}{3}$ je jednoduchý a $x_3 = \frac{3}{4}$ je jednoduchý koreň,
c) $x_{1,2,3,4} = 1$ je štvornásobný a $x_5 = 3$ je jednoduchý koreň.

3.25. a) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = 1 \pm 2\,\mathrm{i}$,
b) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = \pm\,\mathrm{i}$.

3.26. a) $m = \frac{3}{2}$, $n = -\frac{1}{4}$,
b) $m = 2$, $p = -5$,
c) $p = -m^2 - 1$, $q = m$.

3.27. a) $p(x) = (x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 9(x+1)^2 - 11(x+1) + 17$,
b) $p(x) = (x-2)^4 - 18(x-2) + 48$,
c) $p(x) = (x+1-2\,\mathrm{i})^4 - (x+1-2\,\mathrm{i})^3 + 2(x+1-2\,\mathrm{i}) + 1$.

3.28. $p(x) = (x-1)^4(2x^2 + 5x + 4)$.

3.29. a) $p(x) = 7(x+1)(x^2+4)(x^2+1)$,
b) $p(x) = (x+1)^3(x-3)(x-4)$.

3.30. a) $p(x) = (x+2)(x+5)(x-\frac{2}{3})(x-\frac{1}{2})$,
b) $p(x) = 6x(x+11)(x-7)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})$,
c) $p(x) = (x-3)(x+1)^4$.

3.31. $p(x) = (x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})(x-1)(x+2)$.

3.32. $p(x) = 3(x+1+\mathrm{i})(x+1-\mathrm{i})(x+2)(x-3)$.

3.33. $p(x) = (x+1)^4(2x^2 + 5x + 6)$.

3.34. R, C: $p(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, Q: $p(x) = x^2 - 2$.

3.35. a) $q(x)$ nedelí $p(x)$, b) $q(x)$ delí $p(x)$.

3.36. $p(x) = (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$.

3.37. $p(x) = 5x^5 + 25x^4 + 45x^3 + 35x^2 + 15x + 5$.

3.38. a) $f(x) = \frac{5}{3(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)} + \frac{2x-1}{3(x^2+x+1)}$,

b) $f(x) = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x-2}{(x^2+1)^2} - \frac{x-1}{2(x^2+1)}$,
c) $f(x) = \frac{18}{8(x+1)^2} + \frac{1}{8(x+1)} - \frac{x+1}{8(x^2+3)}$,
d) $f(x) = \frac{-1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2(x+1)^2}$,
e) $f(x) = \frac{5}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)}$,
f) $f(x) = \frac{1}{5(x-2)} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{3x+1}{10(x^2+1)}$,
g) $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{2x-2}{(x^2+2)^2} + \frac{x-1}{(x^2+2)}$,
h) $f(x) = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x+4}{3(x^2+x+1)}$,
i) $f(x) = \frac{33}{121(x-2)^2} - \frac{16}{121(x-2)} + \frac{32x+14}{121(2x^2+x+1)}$,
j) $f(x) = \frac{1}{2(x-2)} - \frac{x}{2(x^2+2)}$,
k) $f(x) = \frac{-4}{9(x+1)} + \frac{1}{18(x-2)} + \frac{7x+8}{18(x^2+2)}$,
l) $f(x) = x + 1 - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{x+3}{2(x^2+1)} - \frac{x+5}{3(x^2+2)}$,
m) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} + \frac{6}{(2x-1)^2} - \frac{10}{(2x-1)}$,
n) $f(x) = \frac{4\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}(x-\sqrt{2})} + \frac{4\sqrt{2}+3}{4\sqrt{2}(x+\sqrt{2})} - \frac{1}{2(x^2+2)}$.

4. Matice

4.1. a) $\begin{pmatrix} 0 & -25 & 10 \\ -10 & 5 & 24 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 13 & 8 & 28 \\ 11 & 14 & 10 \end{pmatrix}$.

4.2. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -2 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 14 & 4 & 5 \\ 6 & -4 & 12 \\ 9 & 11 & 1 \end{pmatrix}$.

4.3. a) $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA}$ neexistuje.

4.4. $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$.

4.5. a) $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 1 & 18 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^2 + 3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 27 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$,

$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -16 & -46 \\ 4 & 22 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -15 & -14 & 3 \\ 12 & 0 & 4 \\ -8 & -16 & 16 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^2 + 3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 16 & -15 \\ -20 & -7 & -16 \\ -1 & 10 & -3 \end{pmatrix}$,

$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -13 & 19 & 29 \\ 3 & -7 & -7 \\ -27 & -20 & 7 \end{pmatrix}$.

4.6. $\begin{pmatrix} 51 & 28 \\ 61 & 28 \end{pmatrix}$.

4.7. $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ pre $n \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $\mathbf{A}^n = \mathbf{E}$ pre $n \in \{0, 2, 4, 6, \dots\}$.

4.8. a) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{c}{4}+d & \frac{c}{4} \\ c & d \end{pmatrix}$, $c, d \in R$,

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2t+v & -2t \\ t & v \end{pmatrix}$, $t, v \in R$.

4.9. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 3c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in R$.

4.10. a) $\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

5. Determinanty

5.1. Záporné, pretože počet inverzií je 5.

5.2. a) napr. $(5, 1, 3, 2, 4)$,
b) napr. $(6, 1, 2, 3, 4, 5)$.

5.3. a) kladné, pretože počet inverzií je 8,
b) záporné, pretože počet inverzií je 7,
c) záporné, pretože počet inverzií je 9,
d) záporné, pretože počet inverzií je 5.

5.4. Nepárna.

5.5. Áno, má hodnotu 12.

5.6. 72.

5.7. 2.

5.8. a) 160,
b) 840,
c) 394,
d) 1875.

5.9. a) -1224,
b) -394,
c) 665,
d) 24,
e) -2,
f) 1875.

5.10. a) 1,
b) 0.

5.11. a) 6,
b) 2,
c) 1,
d) 5.

5.12. a) $a = 4$,
b) $a = \pm 2$ alebo $a = \pm\,\mathrm{i}$.

5.13. Neexistuje také reálne a.

5.14. $x = \pm 1$.

5.15. a) $x^2 z^2$,
b) 1.

6. Hodnosť matice, inverzná matica

6.1. 3.

6.2. $t \neq 4$.

6.3. $a \neq \pm\frac{1}{2}$.

6.4. a) $a = -1$ alebo $a = 2$,
b) $a = 0$ alebo $a = 3$.

6.5. Nie je regulárna.

6.6. $a = 1$.

6.7. $a = 9$.

6.8. a) pre $x = -1$ je $h(\mathbf{A}) = 2$, pre $x \neq -1$ je $h(\mathbf{A}) = 3$,
b) pre $x = 2$ je $h(\mathbf{A}) = 2$, pre $x \neq 2$ je $h(\mathbf{A}) = 3$.

6.9. $a \neq \pm\frac{1}{2}$.

6.10. a) pre $a = 1$ a pre b ľubovoľné je $h(\mathbf{A}) = 2$, pre $a \neq 1$ a pre b ľubovoľné je $h(\mathbf{A}) = 3$,
b) pre $a = -b$ je $h(\mathbf{A}) = 1$, pre $a \neq -b$ je $h(\mathbf{A}) = 3$,
c) pre $a^2 \neq b^2$ je $h(\mathbf{A}) = 5$, pre $a^2 = b^2 \neq 0$ je $h(\mathbf{A}) = 3$, pre $a = b = 0$ je $h(\mathbf{A}) = 1$,
d) pre $a = b = 0$ je $h(\mathbf{A}) = 0$, pre $a = b \neq 0$ je $h(\mathbf{A}) = 1$, pre $a = 0$, $b \neq 0$ je $h(\mathbf{A}) = 4$, pre $a \neq 0$, $b = 0$ je $h(\mathbf{A}) = 5$, pre $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ je $h(\mathbf{A}) = 5$.

6.11. a) neexistuje inverzná matica,

b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

6.12. a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{17}{4} & -\frac{14}{4} & 3 & -4 \\ -\frac{13}{4} & \frac{10}{4} & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}^{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.13. $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\mathbf{A}$.

6.14. a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

6.15. $a \neq 0$.

6.16. a) $a = -5$,
b) $a = \frac{85}{19}$.

6.17. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{16}{10} - \frac{6}{10}t & \frac{32}{10} - \frac{6}{10}u & \frac{28}{10} - \frac{6}{10}v \\ \frac{18}{10} + \frac{2}{10}t & \frac{6}{10} + \frac{2}{10}u & \frac{14}{10} + \frac{2}{10}v \\ t & u & v \end{pmatrix}$, $t, u, v \in R$.

6.18. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{3} & 4 & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2-u & 1-u & u \\ 1-v & 2-v & v \end{pmatrix}$, $u, v \in R$.

6.19. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{9}{2} & 3 \\ 8 & 14 & -8 \\ 8 & \frac{25}{2} & -7 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 28 & 15 & -34 \\ 9 & 4 & -10 \\ 18 & 9 & -21 \end{pmatrix}$.

6.20. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & -20 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 27 & 16 & -7 \\ 21 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

7. Systémy lineárnych rovníc

7.1. a) nemá riešenie,
b) $x^T = (0, 0, 0, 0)$,
c) $x^T = (-\frac{3}{4} - 29t, -\frac{7}{4} - 15t, -\frac{5}{4} - 34t, t)$, $t \in R$,
d) nemá riešenie,
e) $x^T = (2, -2, 1, -1)$,
f) $x^T = (\frac{t}{2}, 0, -\frac{t}{2}, t)$, $t \in R$,
g) $x^T = (2, -2, 3, 2)$,

h) $x^T = (\frac{31}{6} + \frac{1}{2}t, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6} - \frac{1}{2}t, t)$, $t \in R$,
i) $x^T = (-8, 3 + t, 6 + 2t, t)$, $t \in R$,
j) $x^T = (-7t + 8v, 5t - 6v, v, t)$, $t, v \in R$.

7.2. a) $x^T = (1, 2, 1, -1)$,
b) $x^T = (0, 4, 3, 1)$,
c) $x^T = (\frac{3}{2}v - \frac{1}{16}t, v, -\frac{11}{8}t, t)$, $t, v \in R$,
d) $x^T = (-26v + 17t, 7v - 5t, v, t)$, $t, v \in R$,
e) $x^T = (0, 0, 0, t, t)$, $t \in R$,
f) $x^T = (\frac{7}{6}t - v, \frac{5}{6}t + v, v, \frac{1}{3}t, t)$, $t, v \in R$,
g) $x^T = (-\frac{1}{2}v + \frac{7}{8}t, -\frac{1}{2}v + \frac{5}{8}t, \frac{1}{2}v - \frac{5}{8}t, v, t)$, $t, v \in R$,
h) $x^T = (1, -1, 1, -1)$,
i) $x^T = (-16 + t + v + 5u, 23 - 2t - 2v - 6u, t, v, u)$, $t, v, u \in R$,
j) $x^T = (\frac{1}{6} + \frac{5}{6}t, \frac{1}{6} - \frac{7}{6}t, \frac{1}{6} + \frac{5}{6}t, t)$, $t \in R$,
k) $x^T = (v, v - t, v - u, t, v, u)$, $t, v, u \in R$,
l) $x^T = (5 + 8t, -2 - 6t, t, 0)$, $t \in R$.

7.3. a) $x^T = (1, 2, -1, -2)$,
b) $x^T = (-\frac{3}{2} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}v, v, -2 + t, 6 - \frac{7}{2}t, t)$, $t, v \in R$,
c) $x^T = (\frac{2}{7}t + 2v, v, -\frac{5}{7}t, t)$, $t, v \in R$,
d) $x^T = (\frac{1}{2} - \frac{1}{16}v + \frac{3}{2}t, t, -\frac{11}{8}v, v)$, $t, v \in R$.

7.4. $a = \frac{1}{k}$ a zároveň $b = -3k$, kde $k \in R$.

7.5. a) $x^T = (t, 3, 1, t)$, $t \in Z_5$,
b) $x^T = (3t, 4t, 0, t)$, $t \in Z_5$,
c) $x^T = (2 + 3t, 2 + v + 3t, v, t)$, $t, v \in Z_5$,
d) $x^T = (t, 2, 2, t)$, $t \in Z_5$,
e) $x^T = (2, 4, 3, 0)$,
f) $x^T = (4 + 4t, 1 + 4t, 3 + 2t, t, 3)$, $t \in Z_5$,
g) $x^T = (0, 1 + 4v, 1 + 4t, t, v)$, $t, v \in Z_5$,
h) $x^T = (1 + t, 2 + 3t, 4 + 2t, t)$, $t \in Z_5$,
i) $x^T = (2t, t, t, 2t, t)$, $t \in Z_5$,
j) nemá riešenie.

7.6. a) $x^T = (3t, 2t, 2t, 4t, t)$, $t \in Z_7$,
b) $x^T = (0, 2, 4, 1)$,
c) $x^T = (0, 0, 0, 0, 0)$,
d) nemá riešenie.

7.7. a) $x^T = (2 + t, 4 + 2t, 1 + 6t, t)$, $t \in Z_7$,
b) $x^T = (6t, 0, 5t, 4t, t)$, $t \in Z_7$,

c) nemá riešenie,
d) $x^T = (1, 1, 1, 1)$.

7.8. $p = 3$.

7.9. a) $a = \frac{4}{9}$,
b) $a = \frac{13}{7}$,
c) $a \neq 3$,
d) $a = -1$.

7.10. Pre $a = 10$ má nekonečne veľa riešení, pre $a \neq 10$ nemá riešenie.

7.11. Pre $a = 1$ má nekonečne veľa riešení, pre $a = -2$ nemá riešenie, pre $a \neq -2$ a $a \neq 1$ má práve jedno riešenie.

8. Vektory a vektorové priestory

8.1. $\{(1, 2), (2, 1), (0, 0)\}$.

8.2. $\{(1, 2, 1), (2, 1, 2), (0, 0, 0)\}$.

8.3. Áno.

8.4. Nie.

8.5. a) nie,
b) nie,
c) nie,
d) áno.

8.6. a) lineárne nezávislé,
b) lineárne závislé.

8.7. Lineárne závislé.

8.8. Napr. prvý, druhý a piaty stĺpec.

8.9. Lineárne nezávislé.

8.10. $x \neq 4$, $y \neq -6$.

8.11. $a = -1$.

8.12. Lineárne nezávislé.

8.13. a) lineárne závislé,

b) lineárne nezávislé.

8.14. Áno; napr. $r(x) = 2p(x) + 3q(x)$.

8.15. $\dim V = 3$; napr. $\beta = \{x_1, x_2, x_5\}$.

8.16. a) $\dim V_A = 2$; prvý a druhý riadok,
b) $\dim V_B = 2$; napr. prvý a tretí riadok,
c) $\dim V_C = 2$; napr. prvý a druhý riadok.

8.17. Pre $c = 0$ je $\dim V = 3$.

8.18. Pre $c = 3$ je $\dim V_A = 2$.

8.19. Pre $a = 0$ je $\dim V_A = 3$, pre $a \neq 0$ je $\dim V_A = 4$.

8.20. $\dim V = 2$; napr. $\beta = \{v_1, v_5\}$.

8.21. Nie.

8.22. $\beta = \{(1, 0, -\frac{4}{5}, \frac{13}{10}), (0, 1, \frac{1}{5}, \frac{4}{5})\}$.

8.23. a) Áno,
b) $\mathbf{X} = (-1, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})_\beta$.

8.24. Áno; $\mathbf{X} = (-1, 2, -2)_\beta$.

8.25. Áno.

8.26. Áno; napr. $(0, 0, 1, 0)$.

8.27. Nie.

8.28. Áno.

8.29. Nie.

8.30. Nie.

8.31. Áno; $\mathbf{B} = (-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, -1)_\beta$.

8.32. Áno; $\mathbf{B} = (-5, -7, 9, 0)_\beta$.

8.33. $\dim V_A = 3$; $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$;
$\mathbf{A} = (2, -1, -3)_\beta$.

8.34. Áno; $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$; $\mathbf{B} = (2, 1)_\beta$.

8.35. a) $p(x) = (-1, 2, 4, 7, 6, 2)_\beta$,
b) $p(x) = (-3, 2, -1, -3, 2)_\beta$,
c) $p(x) = (59, -156, 162, -81, 20, -2)_\beta$.

8.36. a) $p(x) = (526, 810, 518, 171, 29, 2)_{\beta_1}$,
b) $p(x) = (10, -22, 28, -19, 9, -2)_{\beta_2}$.

8.37. a) $p(x) = (123, -294, 283, -135, 32, -3)_{\beta_1}$,
b) $p(x) = (75, -152, 132, -57, 12, -1)_{\beta_1}$.

8.38. Áno; $p(x) = (1, 0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})_\beta$.

8.39. Áno,
a) $r(x) = (84, -81, 27, -3)_\beta$,
b) $r(x) = (26, -27, 9, -1)_\beta$.

8.40. $q(x) = (1, -1, -3)_\beta$.

8.41. $q(x) = (-1, -2, -3)_\beta$.

8.42. $p(x) = (-4, 6, 5, -2, 0, 3)_\beta$.

8.43. $p(x) = (19, -34, 18, -3)_{\beta_2}$.

8.44. $p(x) = (-8, 8, -2, -2, 1)_{\beta_2}$.

8.45. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

8.46. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.47. $\gamma = (2, -1, 0)_{\beta_2}$.

8.48. $\mathbf{v} = (2, 2, -1)_{\beta_2}$.

9. Vlastné hodnoty a vlastné vektory matice

9.1. $p(\lambda) = \lambda^4 - 52\lambda^3 - 403\lambda^2 - 8\lambda$.

9.2. a) $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 2$,
b) $\lambda_{1,2} = \mathrm{i}$, $\lambda_{3,4} = -\mathrm{i}$.

9.3. a) $x^T = (v, t, v)$, $t, v \in R$, $t^2 + v^2 > 0$,
b) $x^T = (t, 0, t)$, $t \in R-\{0\}$,
c) $x^T = (-2t, t, 0)$, $t \in R-\{0\}$,
d) $x^T = (\frac{11}{34}t, \frac{7}{34}t, t)$, $t \in R-\{0\}$.

9.4. a) pre $\lambda_1 = 0$ je $x^T = (t, 0, 0)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_2 = 1$ je $x^T = (t, t, t)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_3 = -1$ je $x^T = (t, -t, t)$, $t \in R-\{0\}$,
b) pre $\lambda_{1,2} = 1$ je $x^T = (v, t, v)$, $t, v \in R$, $t^2 + v^2 > 0$; pre $\lambda_3 = -1$ je $x^T = (-t, 0, t)$, $t \in R-\{0\}$,
c) pre $\lambda_{1,2} = -3$ je $x^T = (3v - 2t, t, v)$, $t, v \in R$, $t^2 + v^2 > 0$; pre $\lambda_3 = 5$ je $x^T = (-t, -2t, t)$, $t \in R-\{0\}$,
d) pre $\lambda_{1,2,3} = 2$ je $x^T = \left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t\right)$, $t \in R-\{0\}$,
e) pre $\lambda_{1,2,3} = -1$ je $x_T = (-t, -t, t)$, $t \in R-\{0\}$,
f) pre $\lambda_1 = 0$ je $x^T = (t, 0, t)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_2 = 2$ je $x^T = (3t, -2t, t)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_3 = -1$ je $x^T = \left(0, -\frac{t}{2}, t\right)$, $t \in R-\{0\}$,
g) pre $\lambda_1 = 1$ je $x^T = (0, 2t, t)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_2 = \mathrm{i}$ je $x^T = (-t - \mathrm{i}\,t, -t - \mathrm{i}\,t, t)$, $t \in C-\{0\}$; pre $\lambda_3 = -\mathrm{i}$ je $x^T = (-t + \mathrm{i}\,t, -t + \mathrm{i}\,t, t)$, $t \in C-\{0\}$,
h) pre $\lambda_1 = 2$ je $x^T = (-t, t, 0)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_{2,3} = 1$ je $x^T = (t, -t, t)$, $t \in R-\{0\}$,
i) pre $\lambda_1 = 2$ je $x^T = (t, 0, t)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_2 = 3 + \mathrm{i}$ je $x^T = ((\frac{2}{5} + \frac{\mathrm{i}}{5})t, (\frac{1}{5} + \frac{3\,\mathrm{i}}{5})t, t)$, $t \in C-\{0\}$; pre $\lambda_3 = 3 - \mathrm{i}$ je $x^T = ((\frac{2}{5} - \frac{\mathrm{i}}{5})t, (\frac{1}{5} - \frac{3\,\mathrm{i}}{5})t, t)$, $t \in C-\{0\}$,
j) pre $\lambda_1 = -2$ je $x^T = (t, t, 0)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_2 = 3$ je $x^T = (t, -t, t)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_3 = 6$ je $x^T = (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t)$, $t \in R-\{0\}$,
k) pre $\lambda_1 = 1$ je $x^T = (-2t, t, t)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_{2,3} = 9$ je $x^T = (\frac{v}{2} - \frac{t}{2}, t, v)$, $t, v \in R$, $t^2 + v^2 > 0$,
l) pre $\lambda_{1,2,3} = 2$ je $x^T = \left(\frac{t}{2}, t, v\right)$, $t, v \in R$, $t^2 + v^2 > 0$,
m) pre $\lambda_1 = -1$ je $x^T = (-t, -t, t)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_{2,3} = 1$ je $x^T = (0, v, t)$, $t, v \in R$, $t^2 + v^2 > 0$,
n) pre $\lambda_1 = 0$ je $x^T = (4t, 4t, t)$, $t \in R-\{0\}$; pre $\lambda_{2,3} = 3$ je $x^T = (t, -2t, t)$, $t \in R-\{0\}$.

9.5. a) $a = 0$,
b) neexistuje také a.

Literatúra

[1] Bican, L.: *Lineární algebra*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha 1979.

[2] Demlová, M., Nagy, J.: *Algebra*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha 1985.

[3] Fadejev, A., K., Sominskij, J., S.: *Zbierka úloh z vyššej algebry*, Alfa Bratislava 1968.

[4] Chvál, V., Mikola, M.: *Lineárna algebra*, Katolícka univerzita, Ružomberok 2000, ISBN 80-89039-00-6.

[5] Kaprálik, P., Tvarožek, J.: *Zbierka riešených príkladov a úloh z lineárnej algebry a analytickej geometrie*, Alfa, Bratislava 1987.

[6] Katriňák, T., Gavalec, M., Gedeonová, E., Smítal, J.: *Algebra a teoretická aritmetika*, Univerzita Komenského, Bratislava 2002, ISBN 80-223-1674-1.

[7] Mikola, M.: *Algebra*, Žilinská univerzita v Žiline, 1998, ISBN 80-7100-510-X.

[8] Palúch, S., Stankovianska, I.: *Algebra a jej inžinierske aplikácie*, Žilinská univerzita v Žiline, 2009.

[9] Špániková, E., Wisztová, E.: *Zbierka úloh z algebry*, Žilinská univerzita v Žiline, 2003, ISBN 80-7080-110-5.