

Matematika pre informatikov - otázky na skúšku.

- Uveďte príklad konjunkcie. Aké logické spojky sa pri konjunkcii používajú. Uveďte tabuľku jej pravdivostných hodnôt. Ako negujeme konjunkciu (napíšte aj príklad).
- Uveďte príklad disjunkcie. Aké logické spojky sa pri disjunkcii používajú. Uveďte tabuľku jej pravdivostných hodnôt. Ako negujeme disjunkciu (napíšte aj príklad).
- Uveďte príklad implikácie. Aké logické spojky sa pri implikácii používajú. Uveďte tabuľku jej pravdivostných hodnôt. Ako negujeme implikáciu (napíšte aj príklad).
- Uveďte príklad ekvivalencie. Aké logické spojky sa pri ekvivalencii používajú. Uveďte tabuľku jej pravdivostných hodnôt. Ako negujeme ekvivalenciu (napíšte aj príklad).
- Existenčný a všeobecný kvantifikátor. Príklady ich použitia. Negácie kvantifikovaných výrokov.
- Čo to znamená, že množina A je podmnožinou množiny B ? Čo je to karteziánsky súčin dvoch množín? Čo je to rozklad množiny? Čo je množina všetkých podmnožín danej množiny? (Spomenuté pojmy definujte a následne uveďte príklady.)
- Definujte zjednotenie, prienik, rozdiel a symetrickú diferenciu množín. Uveďte tiež príklady a načrtnite na obrázkoch.
- Čo sú to rekurzívne definované množiny? Uveďte príklad takej množiny.
- Definujte binárne relácie z množiny A do množiny B , podobne binárne relácie na množine A . Definujte vlastnosti binárnych relácií na množine (reflexívne, symetrické, antisymetrické, tranzitívne).
- Definujte reláciu ekvivalencie a čiastočného usporiadania. Uveďte aj definície jednotlivých vlastností potrebných na definíciu týchto relácií.
- Zvoľte si prirodzené číslo a prevedte ho do dvojkovej, trojkovej, jedenástkovej a šestnástkovej sústavy. Ak máme číslo $x = (a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0)_z$ v sústave zo základom z , čo platí pre jeho číslice $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$? Vyjadrite x pomocou mocnín základu z .
- Opíšte princíp matematickej indukcie.
- Opíšte dva spôsoby kódovania celých čísel v počítači.
- Čo sú racionálne čísla? Ako prevádzame desatinné čísla do dvojkovej sústavy?
- Dokážte, že $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo.
- Definujte komplexné čísla. Ako sú definované sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie komplexných čísel, veľkosť komplexného čísla, číslo komplexne združené k danému komplexnému číslu.

- Čo je to goniometrický tvar komplexného čísla? Ako prevádzame komplexné číslo na goniometrický tvar? Načrtnite aj obrázok. Ako možno využiť goniometrický tvar komplexného čísla pri operáciách s komplexnými číslami (hlavne pri odmocnine)?
- Uveďte definície aritmetickej a geometrickej postupnosti (rekurentné aj vzorec pre priamy výpočet n -tého člena).
- Napíšte definíciu rastúcej, klesajúcej, nerastúcej, neklesajúcej, zhora ohraničenej, zdola ohraničenej postupnosti. Uveďte príklady ku každej z nich.
- Čo je hromadný bod postupnosti? Uveďte príklady postupností, ktoré majú jeden hromadný bod, viac hromadných bodov, $+\infty$ ako hromadný bod.
- Definujte limitu postupnosti. Aká je limita geometrickej postupnosti v závislosti od koeficientu q ?
- Odvoďte vzorec pre súčet prvých n členov aritmetickej a geometrickej postupnosti.
- Čo znamená, že nekonečná postupnosť je sumovateľná? Kedy je geometrická postupnosť sumovateľná? Aký je súčet nekonečného počtu členov geometrickej postupnosti v prípade, že je sumovateľná?
- Definujte funkciu z množiny A do množiny B . Čo je to definičný obor a obor hodnôt funkcie? (Uveďte príklady funkcií, nakreslite obrázky pre konečné množiny A a B .)
- Kedy je funkcia injektívna, surjektívna, bijektívna? (Uveďte definície, príklady, načrtnite na obrázkoch pre konečné množiny A a B .)
- Čoho je viac? Prirodzených alebo racionálnych čísel? (Odpoveď potvrdte dôkazom.)
- Čoho je viac? Prirodzených alebo reálnych čísel? (Odpoveď potvrdte dôkazom.)
- Čoho je viac? Konečných programov v nejakom programovacom jazyku alebo všetkých funkcií z N do N ? Odpoveď zdôvodnite a uveďte, aké dôsledky to má pre informatiku?
- Daný je polynóm f . Čo je jeho derivácia v bode x_0 (definícia)? Aká je geometrická interpretácia derivácie v danom bode? Ako možno derivovať polynómy (odvoďte vzorec derivácie polynómov aspoň druhého stupňa)?
- Daný bude graf derivácie f' . Zistite z neho, kde je funkcia f rastúca, kde klesajúca, kde má extrém. Aká je geometrická interpretácia derivácie? Prečo sa derivácia dá využiť na zisťovanie rastu a klesania funkcií, ktoré majú deriváciu na danom intervale?
- Čoho je viac? Všetkých podmnožín n -prvkovej množiny alebo usporiadaných n -tíc zložených z núl a jednotiek? (Svoju odpoveď zdôvodnite.)
- Čo znamená, že algoritmus má výpočtovú zložitosť $O(f(n))$? Je tento algoritmus použiteľný v praxi aj pre vstupy väčšieho rozsahu (napr. $n = 500$), ak $f(n)$ je niektorá z nasledujúcich

funkcií n^2 , $n!$, $n \log n$, 2^n ? (Odpoveď zdôvodnite pre každú funkciu zvlášť.)

- Nech sú funkcie $f(n)$, $g(n)$ rastúce. Ktorá funkcia rastie rýchlejšie, ak $f(n) = o(g(n))$? Čo znamená zápis $f(n) = o(g(n))$? Dosadzte za $f(n)$, $g(n)$ konkrétne funkcie, pre ktoré to platí.

- Nech sú funkcie $f(n)$, $g(n)$ rastúce. Ktorá funkcia rastie rýchlejšie, ak $f(n) \sim g(n)$? Čo znamená zápis $f(n) \sim g(n)$? Dosadzte za $f(n)$, $g(n)$ konkrétne funkcie, pre ktoré to platí.

- Dokážte, že relácia delí " $|$ " je na množine N reláciou čiastočného usporiadania a na Z nie je.

- Dokážte, že pre reláciu delí " $|$ " na množine Z platia nasledujúce vlastnosti:

i Nech $a, b \in Z$. Ak $a | b$, potom pre $\forall c \in Z$ platí $a | bc$.

ii Nech $a, b, c \in Z$. Ak $a | b$ a zároveň $a | c$, potom platí $a | (b + c)$.

iii Nech $a, b, c \in Z$. Ak $a | b$ a zároveň $a | c$, potom pre $\forall x, y \in Z$ platí $a | (xb + yc)$.

- Opíšte fungovanie Euklidovho algoritmu na hľadanie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch čísel. (Uveďte ukážku na konkrétnych dvoch číslach a potom všeobecne.)

- Čo sú prvočísla a zložené čísla? Základná veta aritmetiky hovorí o rozklade prirodzeného čísla na súčin prvočísel. Aké je jej presné znenie?

- Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

- Aký postup (algoritmus) na zisťovanie prvočíselnosti poznáte? Je tento postup efektívny a použiteľný v praxi? Odpoveď zdôvodnite napríklad na číslach, na ktorých zápis potrebujeme 256 bitov.

- Dokážte, že zvyšok súčtu a súčinu dvoch celých čísel po delení prirodzeným číslom k závisí len od zvyškov týchto dvoch čísel po delení číslom k .

- Malá Fermatova veta hovorí: Ak p je prvočíslo a číslo a je s ním nesúdeliteľné, potom $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Čo znamená zápis $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$?

Ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé? (Odpoveď zdôvodnite pomocou spomenutej vety.)

Existuje prvočíslo p také, že $a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p}$.

Existuje zložené číslo p také, že $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

- Opíšte princíp rýchleho umocňovania a ukážte na príklade jeho výhody oproti klasickému umocňovaniu. Prečo ho možno použiť aj pri umocňovaní v poliach zvyškových tried a umocňovaní štvorcových matíc nad ľubovoľným poľom?

- Ako vypočítate opačný prvok $-u$ a inverzný prvok u^{-1} k prvku u v poli zvyškových tried (Z_p, \oplus_p, \odot_p) ? Vypočítajte $-u$ a u^{-1} k prvku $u = 17$ v poli $(Z_{31}, \oplus_{31}, \odot_{31})$.

- Ktorý z uvedených príkladov je stavový automat akceptujúci všetky slová obsahujúce párny

počet jednotiek? Čo znamená, že automat slovo akceptuje? (Príklady automatov budú na obrázku. Požiadavka na automat, aké slová má akceptovať môže byť iná.)

- Ktoré z uvedených slov stavový automat na obrázku akceptuje a ktoré nie? Čo znamená, že automat slovo akceptuje? (Konkrétny obrázok bude v zadaní, podobne, ako slová.)

- Turingov stroj má zmeniť každú jednotku na vstupe na nulu na výstupe. Ktorý z obrázkov zodpovedá "programu" tohto Turingovho stroja? Čo je to Turingov stroj, prečo zohral dôležitú úlohu v histórii informatiky? (Úloha, ktorú Turingov stroj vykonáva môže byť v zadaní iná. Na obrázkoch bude niekoľko "programov" a bude treba vybrať ten správny.)