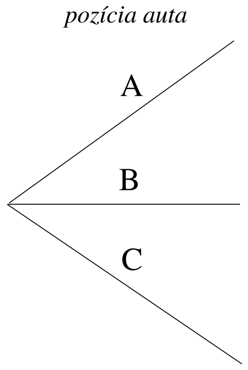
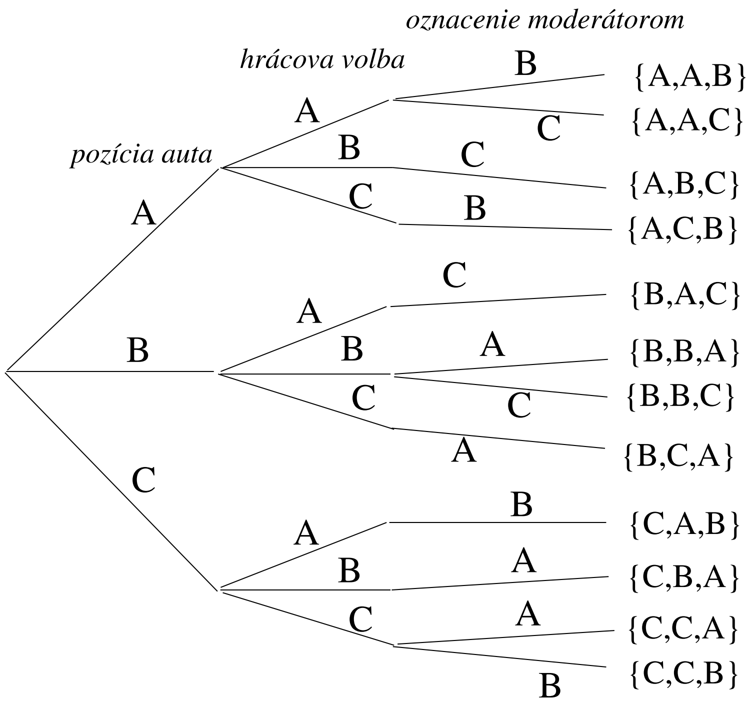
5 Základy pravdepodobnosti

5.1 Stromový graf

Príklad 5.1 (Monty Hall) *Za jednými z troch dverí A,B,C je ukryté auto. Hráč si vyberie dvere. Moderátor následne otvorí dvere, za ktorými auto nie je. Zvýši sa šanca vyhrať auto ak hráč zmení svoju voľbu? Napríklad hráč označil dvere A, moderátor otvoril dvere C, za ktorými auto nie je. Má hráč zmeniť svoju voľbu a vybrať dvere B?*



Hru namodelujeme pomocou stromového grafu (*tree diagram*). Prvé vetvenie predstavuje možnosti umiestnenia auta za dverami A,B alebo C.



5.2 Terminológia

Témou prvých prednášok z pravdepodobnosti sú náhodné pokusy a náhodné udalosti. Pretože slová, ktoré sa používajú na označenie týchto matematických pojmov, sa používajú aj v bežnom jazyku, niekedy je ťažké si uvedomiť, že matematická disciplína zvaná pravdepodobnosť chápe pod pojmom náhodný pokus len jeden z významov tohto slovného spojenia.

Náhodný pokus je experiment, ktorého výsledok môže byť rôzny aj pri úplne rovnakých vstupných podmienkach. Jeho ďalšou vlastnosťou je, že je ho možné opakovať pri rovnakých podmienkach.

Všetko, čo pri náhodnom pokuse môže nastať, nazývame **výsledky** náhodného pokusu.

Zlúčením viacerých výsledkov dostávame **náhodné udalosti**. Náhodnou udalosťou ale rozumieme napríklad aj výsledok náhodného pokusu, vtedy hovoríme o **elementárnej udalosti** alebo ak nikdy nenastane, vtedy hovoríme o **nemožnej udalosti**.

5.3 Výpočet pravdepodobnosti pomocou stromového grafu. 4-kroková metóda

Pri výpočte pravdepodobnosti pomocou stromového grafu používame tento postup

1. určiť/nakresliť všetky možné výsledky
2. určiť skúmanú náhodnú udalosť
3. vypočítať pravdepodobnosti všetkých výsledkov
4. vypočítať pravdepodobnosť skúmanej náhodnej udalosti

5.3.1 Nekonečná množina výsledkov

Úloha 5.1 *Dvaja hráči hádžu mincou. Ak padne hlava H, hráč ktorý hádzal, vyhráva. Znak označíme T.*
- A_1*: Aká je pravdepodobnosť, že vyhrá 1.hráč?*
- A_2*: Aká je pravdepodobnosť, že počas n-hodov nikdo nevyhrá?*
- A_3*: Aká je pravdepodobnosť, že počas n-hodov nikdo nevyhrá?*

Riešenie:

Množina všetkých výsledkov je

$$H,\ TH,\ TTH,\ TTTH,\ TTTTH, \dots$$

$$\Pr(A_1) = \Pr(\{H,\ TTH,\ TTTTH, \dots\}) = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\right]^3 + \left[\frac{1}{2}\right]^3 + ... = \frac{2}{3}$$

$$\Pr(A_2) = \Pr(\{TT.....TTH\}) = \left[\frac{1}{2}\right]^n$$

$$\Pr(A_3) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\right]^n = 0$$

5.4 Spôsoby výpočtu pravdepodobnosti.

Pravdepodobnosť, s akou náhodná udalosť nastane, bola v minulosti počítaná rôznymi spôsobmi. Treba si uvedomiť, že keď sú splnené ich predpoklady, je možné použiť na výpočet pravdepodobnosti každý z týchto postupov.

- **Štatistický výpočet pravdepodobnosti** na základe dostatočne veľkého počtu vykonaných experimentov počítame ako pomer počtu výsledkov priaznivých udalosti A ku všetkým vykonaným experimentom:

$$\Pr(A) = \frac{\text{počet priaznivých meraní}}{\text{počet všetkých meraní}}$$

Uvedený pomer sa s rastúcim počtom pokusov blíži k pravdepodobnosti udalosti A.

- **Klasické vyjadrenie pravdepodobnosti** je možné použiť, ak náhodný pokus má konečný počet výsledkov a každý z výsledkov má rovnakú pravdepodobnosť. Počíta sa ako pomer počtu všetkých možných priaznivých výsledkov a počtu všetkých výsledkov. Teda pomer počtu prvkov množiny A, ktorá predstavuje udalosť, ktorej pravdepodobnosť počítame a počtu prvkov množiny Ω.

$$\Pr(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{\text{počet priaznivých výsledkov}}{\text{počet všetkých výsledkov}}$$

Úloha 5.2 *Medzi 10000 procesormi je 100 chybných.*

1. Aká je pravdepodobnosť, že v počítači je chybný procesor?..

2. Aká je pravdepodobnosť, že všetky 3 procesory v pracovnej stanici sú chybné?

Riešenie:

1.

$$\Pr(A) = \frac{100}{10000} = 0.01$$

2.

$$\Pr(A) = \frac{\binom{100}{3}}{\binom{10000}{3}} = \frac{100}{10000} \cdot \frac{99}{9999} \cdot \frac{98}{9998} = 0.0100 \cdot 0.0099 \cdot 0.0098 = 9.7 \cdot 10^{-7}$$

- **Geometrické vyjadrenie pravdepodobnosti** je možné použiť aj vtedy, ak náhodný pokus má nekonečný počet výsledkov. Na výpočet pravdepodobnosti sa namiesto počtu prvkov množiny A, použije iný spôsob ako merať veľkosť tejto množiny, **miera** množiny. Je to napríklad dĺžka úsečky, plocha rovinného útvaru, alebo objem telesa. Mieru množiny A budeme označovať $\mu(A)$.

$$\Pr(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Úloha 5.3 *Dvaja bossovia chodia na obed do rovnakého podniku. Obed sa podáva od 12.00 do 14.00, doba stolovania pre obidvoch je rovnaká, 30 minút. Aká je pravdepodobnosť že sa stretnú? ($7/16 = 0.4375$).*

Úloha 5.4 *V priebehu 100ms budú cez satelit ALOHA vysielať 2 pozemné stanice. Doba vysielania obidvoch staníc je 25ms. Aká je pravdepodobnosť kolízie?* (7/16).

- **Axiomatické vyjadrenie pravdepodobnosti** zastrešuje všetky predchádzajúce spôsoby výpočtu pravdepodobnosti. Axiomatickú definíciu zaviedol A. N. Kolmogorov v roku 1933.

  Nech Ω je množina všetkých výsledkov náhodného pokusu.
  Nech $\mathcal{S}$ je systém podmnožín Ω (systém $\mathcal{S}$ predstavuje všetky udalosti).
  Nech Pr je zobrazenie zo systému $\mathcal{S}$ do intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

  Usporiadanú trojicu $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{S}, \Pr)$ nazveme **pravdepodobnostný priestor** so systémom udalostí $\mathcal{S}$ a s pravdepodobnosťou Pr, ak platí:

  1. $\mathbf{\Omega} \in S$
  2. ak $A \in \mathcal{S}$ potom $\overline{A} \in \mathcal{S}$
  3. ak $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{S}$ potom $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{S}$
  4. $\Pr(\mathbf{\Omega}) = 1$
  5. ak $A \in \mathcal{S}$ potom $\Pr(A) \geq 0$
  6. ak $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathcal{S}$ a $\forall i, j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$ potom

  $$\Pr\left(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\right) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \dots + \Pr(A_n)$$

Vlastnosti systému udalostí $\mathcal{S}$

1. Ak A a B sú udalosti, potom aj $A \cup B$ je udalosť.
2. Ak A a B sú udalosti, potom aj $A \cap B$ je udalosť.
3. Ak A je udalosť, potom aj $\overline{A}$ je udalosť.
4. Ak A a B sú udalosti, potom aj $A - B$ je udalosť.

Vlastnosti pravdepodobnosti Pr

1. Ak A a B sú udalosti a $A \cap B = \emptyset$, potom platí

   $$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B).$$

2. Ak A je udalosť, potom

   $$\Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A).$$

3. $$\Pr(A - B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$

4. $$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$