10.prednáška (8.12.2006)

Analýza procesov lineárnym systémom.

Aj v tejto časti budeme skúmať vlastnosti procesu rozloženého do bázy nejakého vektorového priestoru.
Pôvodný proces $\mathbf{f}$ s nameranými hodnotami

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})_{\mathcal{E}}$$

je vyjadrený v jednotkovej báze (N-1)-rozmerného vektorového priestoru.
Proces $\mathbf{f}$ môžeme vyjadriť v inej báze $\mathcal{B}$ toho istého vektorového priestoru (nájdeme spektrum procesu):

$$\mathbf{f} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{b}_k = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})_{\mathcal{B}}$$

Proces $\mathbf{f}$ z N-rozmerného priestoru $S_{\mathcal{B}}$ teraz aproximujeme procesom $\tilde{\mathbf{f}}$ z M-rozmerného priestoru $S_{\mathcal{G}}$:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{c}_k \mathbf{g}_k = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{M-1})_{\mathcal{G}}$$

Potrebujeme vybrať taký proces $\tilde{\mathbf{f}}$, pre ktorý bude rozdiel $\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}$ minimálny. Vektory $\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}}$ môžeme odčítať iba vtedy, ak ležia v tom istom vektorovom priestore (majú rovnaký počet zložiek), preto vektor $\tilde{\mathbf{f}}$ doplníme nulami na N-zložkový vektor $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{M-1}, 0, \ldots, 0) = (\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{N-1})$

Tým, že nahradíme vyjadrenie procesu v jednej báze vyjadrením tohoto procesu v inej báze toho istého priestoru (zmeníme bázu), urobíme vlastne transformáciu tohoto procesu. V technickej literatúre sa používa pojem systém.

Takúto zmenu nazveme **transformácia lineárnym systémom**
ozn. $\tilde{\mathbf{f}} = \mathcal{T}(\mathbf{f})$, ak platí

$$\mathbf{f} = \sum_{i=0}^{N-1} k_i f_i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(\mathbf{f}) = \sum_{i=0}^{N-1} k_i \mathcal{T}(f_i)$$

Transformácia lineárnym systémom je úplne popísaná tým, ako sú transformované jednotkové procesy (vektory). Odozva systému na jednotkový proces $\mathbf{e}_n$ sa nazýva **impulzná chrakteristika systému $\mathcal{T}$**.
Označenie $\delta_n = \mathcal{T}(\mathbf{e}_n)$.
Teda platí

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathcal{T}(\sum_{k=0}^{N-1} f_k \mathbf{e}_k) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \mathcal{T}(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \delta_k$$

Príklad:
Prenosový systém (lineárna transformácia) $\mathcal{T}$, je úplne popísaná odozvou na jednotkové impulzy:

$$\delta_0 = \mathcal{T}(\mathbf{e}_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \quad \delta_1 = \mathcal{T}(\mathbf{e}_1) = (0, 1, -1), \quad \delta_2 = \mathcal{T}(\mathbf{e}_2) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

Proces $\mathbf{f} = (1, 2, -1)$ sa zobrazí na:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathcal{T}(\mathbf{f}) = \mathcal{T}(1\,\mathbf{e}_0 + 2\,\mathbf{e}_1 - 1\,\mathbf{e}_2) = 1\,\mathcal{T}(\mathbf{e}_0) + 2\,\mathcal{T}(\mathbf{e}_1) - 1\,\mathcal{T}(\mathbf{e}_2) =$$

$$= 1\,\delta_1 + 2\,\delta_1 - 1\,\delta_2 = (1, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$$

Významnou skupinou lineárnych transformácií (systémov) sú **časovo invariantné transformácie**(niekedy nazývané aj stacionárne transformácie), teda transformácie, ktoré nemenia svoje charakteristiky v čase.
Presnejšie, odozva na vstup posunutý v čase, je výstup posunutý v čase:

$$\mathcal{T}(\mathbf{e}_0) = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}); \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{0+k} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{e}_k) = \mathcal{T}(\mathbf{e}_{0+k}) = (a_{0+k}, a_{1+k}, \ldots, a_{N-1+k}) = (a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k-1})$$

Teda v $\mathbf{e}_0$, resp. v $\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)$ robíme kruhový posun, preto na úplný popis časovo invariantnej transformácie stačí, ak poznáme hodnotu $\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)$.

Príklad:
Nech impulzná odozva na jednotkový impulz $\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$ je

$$\delta = \mathcal{T}(\mathbf{e}_0) = (1, 1, -1/2, 0)$$

Aká bude odpoveď lineárneho časovo invariantného systému (transformácie, popísanej odozvou δ) na vstupný proces $\mathbf{f} = (1, 2, -1, 3)$?

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathcal{T}(\mathbf{e}_0) = (1, 1, -1/2, 0)$$

$$\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathcal{T}(\mathbf{e}_1) = (0, 1, 1, -1/2)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 0), \quad \mathcal{T}(\mathbf{e}_2) = (-1/2, 0, 1, 1)$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 0, 1), \quad \mathcal{T}(\mathbf{e}_3) = (1, -1/2, 0, 1)$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{f}) = \mathcal{T}(1, 2, -1, 3) = 1{\cdot}(1, 1, -1/2, 0) + 2{\cdot}(0, 1, 1, -1/2) - 1{\cdot}(-1/2, 0, 1, 1) + 3{\cdot}(1, -1/2, 0, 1) =$$

$$= (1{\cdot}1 + 2{\cdot}0 + 1{\cdot}1/2 + 3{\cdot}1;\, 1{\cdot}1 + 2{\cdot}1 - 1{\cdot}0 - 3{\cdot}1/2;\, -1{\cdot}1/2 + 2{\cdot}1 - 1{\cdot}1 + 3{\cdot}0;\, 1{\cdot}0 - 2{\cdot}1/2 - 1{\cdot}1 + 3{\cdot}1) =$$

$$= (3/2, 3, -3/2, 9/2)$$

Teda všeobecne

$$\tilde{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n\, \delta_{k-n}$$

Posledný výraz nazývame konvolúciou vektorov $\mathbf{f}, \delta$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} * \delta$$

Analýza procesu lineárnym systémom je popísaná vzťahmi:

$$f'_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n f_{k-n} = \sum_{n=0}^{N-1} g_{k-n} f_n \tag{1}$$

Časovo invariantná transformácia je popísaná vektorom $\mathbf{g}$, ktorý charakterizuje daný lineárny systém ($\mathbf{g}$ je impulzná odozva):

$$\mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$$

Hodnotu f'_0 dostaneme:

$$f'_0 = g_0 f_0 + g_1 f_{-1} + g_2 f_{-2} + \dots + g_{N-1} f_{N-1} =$$

$$= g_0 f_0 + g_1 f_{N-1} + \dots + g_{N-1} f_{N-1}$$

Poznámka (model kĺzavého súčtu):

$$\tilde{f}_k = \sum_{n=0}^{M-1} c_n f_{k-n}$$

Vidíme, že vzťah (1) sa podobá predchádajúcemu vzťahu. Rozdiel je iba v tom, že pri (MA) modeli sú nenulové hodnoty c_n len pre $n < M - 1$ (ostatné c_n sú rovné nule).

Príklad:

Navrhnite lineárny systém so štruktúrou:

$$f'_k = \tilde{f}_{k+1} = g_0 f_k + g_1 f_{k-1}$$

ktorý bude robiť optimálnu predikciu o jeden krok.

Metóda adaptívneho hľadania koeficientov.

Budeme postupne meniť koeficienty g_0, g_1, tak aby sme zmenšili chybu, ktorej sme sa dopustili. Chyba je vyjadrená vzťahom $\mathbf{e}^2 = f(g_0, g_1)$, kde chyba v čase $k+1$ je

$$e^2_{k+1} = (f_{k+1} - \tilde{f}_{k+1})^2$$

Menšiu chybu dosiahneme, keď zmeníme koeficienty pomocou gradientovej metódy. Gradient je vektor, ktorý má smer najvyššieho nárastu funkcie $\mathbf{e}^2 = f(g_0, g_1)$, v závislosti od hodnôt g_0, g_1.

$$g_{k+1} = g_k - \alpha \mathrm{grad}\, e^2_k$$

$$\mathrm{grad}\, e^2_k = (\frac{\partial e^2_k}{\partial g_0}, \frac{\partial e^2_k}{\partial g_1})$$

Pre funkciu f, ktorá je konvexná sa týmto spôsobom dostaneme k minimu.
Dostávame:

$$\frac{\partial e_k^2}{\partial g_k(0)} = \frac{\partial}{\partial g_0}(f_k - \tilde{f}_{k+1})^2 = \frac{\partial}{\partial g_0}(f_k - (g_0 f_k + g_1 f_{k-1}))^2 =$$

$$= 2(f_k - (g_0 f_k + g_1 f_{k-1}))(-f_k) = -2e_k f_k$$

Nasledujúce g_0 teda položíme (podľa $g_{k+1} = g_k - \alpha \mathrm{grad}\, e_k^2$)

$$g_0 =: g_0 + 2\alpha\, e_k f_k$$

Podobne:

$$\frac{\partial e_k^2}{\partial g_1} = \frac{\partial}{\partial g_1}(f_k - \tilde{f}_{k+1})^2 = \frac{\partial}{\partial g_1}(f_k - (g_1 f_k + g_1 f_{k-1}))^2 =$$

$$= 2(f_k - (g_0 f_k + g_1 f_{k-1}))(-f_{k-1}) = -2e_k f_{k-1}$$

Nasledujúce g_1 teda položíme

$$g_1 =: g_1 + 2\alpha\, e_k f_{k-1}$$

Autoregresný model (AR).

Na rozdiel od modelov kĺzavého súčtu budeme na odhad nasledujúcej hodnoty používať okrem nameranej predchádzajúcej hodnoty aj hodnoty, ktoré sme vypočítali (odhadli).
Nech sú dané (namerané) hodnoty $\tilde{f}_k$, pre $k = 0, 1, \ldots, M-1$.
Na výpočet nasledujúcich $\tilde{f}_k$, už používame vzorec

$$\tilde{f}_k = \sum_{n=0}^{M-1} g_n \tilde{f}_{k-n} \quad \text{pre} \quad k = M, M+1, \ldots, L; \quad \text{kde} \quad L \leq N-1$$

Model ARMA.

Dostaneme ho tak, že proces vyjadríme pomocou kĺzavého priemeru aj pomocou autoregresného modelu, dostaneme rovnosť

$$\sum_{n=0}^{M-1} a_n f_{k-n} = \sum_{n=0}^{L-1} b_n \tilde{f}_{k-n}$$

ak položíme $b_0 = 1$, dostaneme vyjadrenie

$$\tilde{f}_k = \sum_{n=0}^{M-1} a_n f_{k-n} - \sum_{n=1}^{L-1} b_n \tilde{f}_{k-n}$$

Priemetom procesu do podpriestoru daného nejakou bázou, vyberáme nejaké príznaky procesu.
Vyťahovanie príznakov, je vlastne transformácia procesu na proces opísaný týmito príznakmi. Budeme sa zaoberať len na vyšetrovaním lineárnych, časovo invariantných transformácií.

Príklad kĺzavého súčtu:
Transformácia je daná

$$f'_k = \sum_{n=0}^{M-1} f_{k-n} a_n \tag{2}$$

systém (2) môžeme prepísať tak, že na ľavej strane bude zložitejšia diferenčná rovnica, dostávame ARMA model:

$$\sum_{n=0}^{M_1-1} f'_{k-n} b_n = \sum_{n=0}^{M_2-1} f_{k-n} a_n \tag{3}$$

Porovnanie MA a ARMA modelu:
- pomocou ARMA modelu stačí na vytiahnutie daných vlastností menej koeficientov b_k,(nižší rád diferenčnej rovnice), ako pri modeli MA
- modely MA sú jednoduchšie a preto stabilné
- pri modeloch ARMA sú problémy so stabilitou
- modely MA vieme jednoducho navrhnúť, jednoducho sa dá urobiť adaptívny systém

Spektrálny popis lineárnych, časovo invariantných transformácií:

Ukázali sme, že ak $\mathcal{T}$ je lineárna, časovo invariantná transformácia, tak na popis tejto transformácie stačí tzv. impulzná charakteristika.
Pôvodný proces je definovaný nameranými hodnotami:

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})_{\mathcal{E}}$$

Jeho spektrálny popis je daný

$$\mathbf{f} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{b}_k = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})_{\mathcal{B}}$$

Proces $\mathbf{f}'$ na výstupe lineárnej transformácie (systému) je popísaný

$$\mathbf{f}' = \sum_{k=0}^{N-1} c'_k \mathbf{b'}_k = (c'_0, c'_1, \ldots, c'_{N-1})_{\mathcal{B}'}$$

Bázy $\mathcal{B}$ aj $\mathcal{B}'$ sú ortogonálne bázy. Teda platí $(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_m) = 0$, pre $n \neq m$ a
$(\mathbf{b'}_n, \mathbf{b'}_m) = 0$, pre $n \neq m$.
Pre koeficienty c'_n dostaneme

$$c'_n = \frac{(\mathbf{f}', \mathbf{b'}_n)}{(\mathbf{b'}_n, \mathbf{b'}_n)} = \frac{(\mathcal{T}(\mathbf{f}), \mathbf{b'}_n)}{(\mathbf{b'}_n, \mathbf{b'}_n)} = \frac{(\mathcal{T}(\sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{b}_k), \mathbf{b'}_n)}{(\mathbf{b'}_n, \mathbf{b'}_n)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} c_k (\mathcal{T}(\mathbf{b}_k), \mathbf{b'}_n)}{(\mathbf{b'}_n, \mathbf{b'}_n)} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k F_{nk}$$

Čísla F_{nk} tvoria štvorcovú maticu $\mathbf{F}$ a charakterizujú transformovaný proces $\mathbf{f}'$ v spektrálnej oblasti.

$$\mathbf{c}'^T = \mathbf{F}\mathbf{c}'^T$$

Nech teraz bázy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ sú rovnaké, teda

$$\mathbf{b}'_n = \mathbf{b}_n$$

Platí $(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_m) = 0$, pre $n \neq m$ a naviac nech platí $(\mathcal{T}(\mathbf{b}_n), \mathbf{b}_m) = 0$, pre $n \neq m$.
Dosávame

$$c'_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k F_{nk} = F_{nn} c_n$$

Vektor $\mathbf{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$, (kde použijeme označenie $F_n = F_{nn}$) nazývame **spektrálny prenos lineárneho systému.**
Ak na vstupe lineárneho, časovo invariantného systému je harmonický proces, tak aj na výstupe je harmonický proces (je to jediný proces s touto vlastnosťou):

$$\mathbf{b}'_n = \mathbf{b}_n = (1, e^{-j\frac{2\pi}{N}n}, \ldots, e^{-j\frac{2\pi}{N}n\,k}, \ldots, e^{-j\frac{2\pi}{N}n\,(N-1)})$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{b}_n) = (F_n 1, F_n e^{-j\frac{2\pi}{N}n}, \ldots, F_n e^{-j\frac{2\pi}{N}n\,k}, \ldots, F_n e^{-j\frac{2\pi}{N}n\,(N-1)})$$

$$c'_n = F_n c_n = |F_n| e^{j\varphi_n} c_n$$

Na to, aby sme zistili $\mathbf{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$, dávame na vstup postupne všetky vektory harmonickej bázy.

Pomocou spektrálneho popisu vieme určiť časový priebeh výstupného procesu:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{f} & \longrightarrow^{\mathcal{T}}\longrightarrow & \mathbf{f}' \\
DFT \downarrow & & \uparrow DFT^{-1} \\
\mathbf{c} & \longrightarrow_{c_n F_n}\rightarrow & \mathbf{c}'
\end{array}$$