8 Bernoulliho nezávislé pokusy. Niektoré diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej.

8.1 Bernoulliho nezávislé pokusy

Príklad 8.1 *Zistite, aká je pravdepodobnosť, že pri* 5 *hodoch kockou padne* 2*-krát číslo* 6.

Riešenie: Pravdepodobnosť, že padne 6 pri prvom hode je 1/6, že padne 6 pri druhom hode je tiež 1/6, pri ostatných už musia padnúť iné čísla, aby to boli práve 2 úspešné pokusy. Ich pravdepodobnosti sú 5/6. Podľa predpokladu sú udalosti nezávislé, preto je pravdepodobnosť, že padne 6 iba pri prvom a druhom hode

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Možností, pri ktorých pokusoch v poradí padne šestka, je ale viac:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Možností je 10, čo sa dá vypočítať aj ako

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=\frac{5\cdot 4}{2}=10$$

Každá z možností má rovnakú pravdepodobnosť

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Možnosti, v ktorých pokusoch padnú šestky, sú disjunktné, preto pravdepodobnosť ich zjednotenia bude súčet desiatich rovnakých pravdepodobností:

$$P_5(2)=\binom{5}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{5-2}=10\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=0.16$$

□

V predchádzajúcom príklade sme počítali pravdepodobnosti pre sadu n rovnakých pokusov, ktorých výsledky sú, že nejaká udalosť A nastala alebo nenastala. Jednotlivé pokusy sú nezávislé, navzájom sa neovplyvňujú a pravdepodobnosť nastatia udalosti A je

$P(A) = p$, $p > 0$. Takéto pokusy sa niekedy nazývajú **Bernoulliho nezávislé pokusy**.

Pravdepodobnosť, že v sade n rovnakých nezávislých pokusov nastane práve k-krát udalosť A, je

$$\boxed{P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

8.2 Niektoré diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej

V matematickej analýze je okrem pojmu funkcia zavedený aj pojem elementárna funkcia. Nie, že by elementárne funkcie neboli funkciami, alebo naopak, že by boli výrazne jednoduchšie (elementárnejšie) ako iné funkcie. Ich jediné špecifikum je to, že sa používajú tak často, že je jednoduchšie o nich hovoriť, keď sú nejako pomenované. Je naozaj jednoduchšie povedať, že nejaký objekt je funkcia sínus, alebo graf funkcie sínus, než vysvetľovať spôsob, akým sa k takejto funkcii dostaneme.

Analogicky k elementárnym funkciám, niektoré častejšie používané rozdelenia pravdepodobnosti sú pomenované špecifickým názvom. Dôvodom je potreba vynechať popis celého procesu, ktorým vznikajú tieto náhodné udalosti. Je možné vynechať proces zisťovania, aké sú pravdepodobnosti jednotlivých elementárnych udalostí a aké je zobrazenie z priestoru náhodných udalostí do číselného oboru. Toto všetko je zhrnuté v názve rozdelenia náhodnej premennej.

Pre každé rozdelenie uvedieme aj jeho strednú hodnotu.

Náhodná premenná s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti, označenie R(n)

Toto rozdelenie popisuje náhodnú premennú, ktorá popisuje výskyty rovnako pravdepodobných udalostí. Náhodnú premennú $\mathbb{X}$ s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti (označujeme $\mathrm{R}(n)$) a táto náhodná premenná môže nadobudnúť hodnoty $1, 2, \ldots, n$. Každú hodnotu nadobudne s rovnakou pravdepodobnosťou, hodnôt je n, súčet pravdepodobností je 1. Odtiaľ dostávame, že každá hodnota má pravdepodobnosť $1/n$.
Parameter n náhodnej premennej označuje počet elementárnych udalostí, ktoré sú reprezentované hodnotami $1, 2, \ldots, n$.
Pravdepodobnostná funkcia pre rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti môže byť vyjadrená ako:

- predpis pre PDF

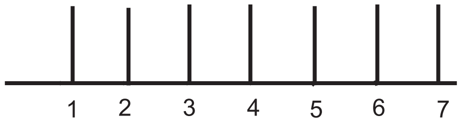
$$\boxed{PDF_{\mathbb{X}}(k) = \Pr(\mathbb{X} = k) = \frac{1}{n}} \tag{1}$$

- tabuľka:

k	1	2	...	n
$PDF_{\mathbb{X}}(k)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Napríklad pre $n = 7$:

k	1	2	3	4	5	6	7
$PDF_{\mathbb{X}}(k)$	0.1429	0.1429	0.1429	0.1429	0.1429	0.1429	0.1429



Obr. 1: Graf pre náh. prem. s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti s parametrom $n = 7$, výška každej z úsečiek na obrázku je $\frac{1}{7}$.

- diagram:

Jedná sa skutočne o rozdelenie pravdepodobnosti, pretože platí:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Strednú hodnotu náhodnej premennej s rovnomerným rozdelením vypočítame:

$$\boxed{E(\mathbb{X}) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \frac{(1+n) \cdot n}{2} = \frac{1+n}{2}}$$

Náhodná premenná s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti, označenie Alt(p)

Poznámka. V prípade náhodnej premennej s alternatívnym rozdelením je potrebné uvedomiť si, že je zaužívaný názov pre pokus, pre ktorý sa počíta (Bernoulliho pokus), rozdelenie sa nazýva alternatívne (Bernoulliovské) rozdelenie pravdepodobnosti a ešte existuje aj názov pre samotnú náhodnú premennú, tá sa nazýva indikátorová náhodná premenná.

Alternatívne rozdelenie pravdepodobnosti popisuje náhodnú premennú, ktorá nadobúda iba dve hodnoty. Takáto náhodná premenná sa nazýva indikátorová náhodná premenná, označme ju $\mathbb{I}$. Jej rozdelenie pravdepodobnosti sa nazýva alternatívne rozdelenie. Hodnotu 1 nadobudne, keď nejaká udalosť A nastane, hodnotu 0 keď táto udalosť nenastane. Parameter p náhodnej premennej označuje pravdepodobnosť nastatia udalosti A:

$$\Pr(A) = p$$

Pravdepodobnosť, že udalosť A nenastane, označujeme q:

$$\Pr(\overline{A}) = 1 - p = q$$

Pravdepodobnostná funkcia pre rozdelenie pravdepodobnosti alternatívneho rozdelenia môže byť vyjadrená ako:

- predpis pre PDF:

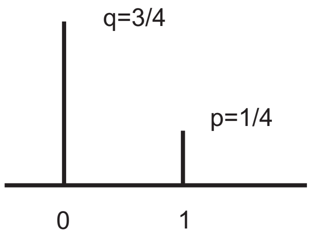
$$\boxed{PDF_{\mathbb{I}}(k) = k \cdot p \qquad \Pr(\mathbb{I} = 1) = p} \qquad P(\mathbb{I} = 0) = q \tag{2}$$

- tabuľka:

k	0	1
$PDF_{\mathbb{I}}(k) =$	q	p

Napríklad pre $p = 1/4$:

k	0	1
p_k	3/4	1/4



Obr. 2: Alternatívne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $p = 1/4$

- diagram:

Že sa skutočne jedná o rozdelenie pravdepodobnosti, dokážeme tak, že sčítame pravdepodobnosti jednotlivých hodnôt náhodnej premennej. Aby to bolo rozdelenie pravdepodobnosti, ich súčet musí byť 1.
Platí:

$$p + q = p + (1 - p) = 1$$

Strednú hodnotu náhodnej premennej s alternatívnym rozdelením pravdepodobnosti vypočítame:

$$\boxed{E(\mathbb{I}) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p}$$

Náhodná premenná s binomickým rozdelením pravdepodobnosti, označenie Bi(n, p)

Toto rozdelenie popisuje náhodnú premennú, ktorá popisuje počet nastatia udalosti A pri uskutočnení n **rovnakých nezávislých pokusov (Bernoulliho pokusy)**. Táto náhodná premenná nadobúda $n + 1$ hodnôt. Hodnotu 0 nadobudne, keď udalosť A nastane v sérii n pokusov práve 0 krát, hodnotu 1 nadobudne, keď udalosť A nastane v sérii n pokusov práve 1 krát, atď. hodnotu n nadobudne, keď udalosť A nastane v sérii n pokusov práve n krát.

Parameter p náhodnej premennej označuje pravdepodobnosť nastatia udalosti A a pravdepodobnosť, že udalosť A nenastane označujeme q:

$$\Pr(A) = p \qquad \Pr(\overline{A}) = 1 - p = q$$

Pravdepodobnostná funkcia pre rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s binomickým rozdelením pravdepodobnosti môže byť vyjadrená ako:

- predpis:

$$\boxed{PDF_{\mathbb{X}}(k) = \Pr(\mathbb{X} = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}} \tag{3}$$

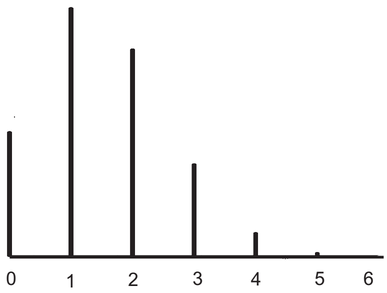
- tabuľka:

k	0	1	2	...	n
$PDF_{\mathbb{X}}(k)$	$\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n$	$\binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1}$	$\binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	...	$\binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0$

Napríklad pre $n = 6$ a $p = 1/4$:

k	0	1	2	3	4	5	6
p_k	0.178	0.356	0.2966	0.1318	0.0330	0.0044	0.0002

- diagram:



Obr. 3: Binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami $n = 6$ a $p = 1/4$

Jedná sa skutočne o rozdelenie pravdepodobnosti, pretože podľa binomickej vety

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Strednú hodnotu náhodnej premennej s binomickým rozdelením vypočítame:

$$E(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-(k-1))!} \cdot p^{(k-1)} \cdot q^{(n-1-(k-1))} =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} \cdot p^k \cdot q^{(n-1-k)} =$$

$$= n \cdot p \cdot (p+q)^{n-1} = n \cdot p \cdot (1)^{n-1} = n \cdot p$$

Rovnaký výsledok dostaneme, keď si uvedomíme, že náhodnú premennú s binomickým rozdelením $\mathbb{X} \sim Bi(n,p)$ dostaneme ako súčet n nezávislých rovnakých náhodných premenných s alternatívnym rozdelením $\mathbb{Y} \sim A(p)$.

$$\boxed{E(\mathbb{X}) = E(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{Y}) = n \cdot E(\mathbb{Y}) = n \cdot p}$$

Náhodná premenná s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, označenie $Geo_1(p)$

Náhodná premenná s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti $\mathbb{X} \sim Geo_1(p)$ popisuje poradie pokusu, v ktorom nastala po prvý raz udalosť A.

Náhodná premenná s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti môže nadobudnúť neohraničený počet hodnôt. Hodnotu 1 nadobudne, keď udalosť A nastane už v prvom pokuse. Hodnotu 2 nadobudne, keď udalosť A v prvom pokuse nenastala a nastala v druhom pokuse, atď.
Hodnotu k nadobudne, keď udalosť A v prvých $k-1$ pokusoch nenastala a nastane k-tom pokuse. Parameter p náhodnej premennej označuje pravdepodobnosť nastatia udalosti A:

$$P(A) = p$$

Pravdepodobnostná funkcia pre rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti $Geo_1(p)$ môže byť vyjadrená ako:

- predpis:
$$\boxed{PDF_{\mathbb{X}}(k) = \Pr(\mathbb{X} = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots} \tag{4}$$
- tabuľka:

k	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
$PDF_{\mathbb{X}}(k)$	p	$(1-p)\cdot p$	$\ldots$	$(1-p)^{k-1}\cdot p$	$\ldots$

Napríklad pre $p = 0.7$:

k	1	2	3	4	5	$\ldots$
p_k	0.7	0.21	0.063	0.0189	0.0057	$\ldots$

Jedná sa skutočne o rozdelenie pravdepodobnosti, pretože platí:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Využili sme skutočnosť, že súčet geometrického radu s kvocientom q a prvým členom a je $\frac{a}{1-q}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot q^k = \frac{a}{1-q}, \qquad \text{pre } |q| < 1$$

Názov rozdelenia súvisí s geometrickou postupnosťou, ktorú tvoria pravdepodobnosti jednotlivých hodnôt 1, 2, 3, …
Stredná hodnota náhodnej premennej X s geometrickým $Geo_1(p)$ rozdelením je

$$\boxed{E(\mathbb{X}) = \frac{1}{p}} \tag{5}$$

Náhodná premenná s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti, označenie $Geo_0(p)$

Náhodná premenná Y s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti $Geo_0(p)$ popisuje počet neúspešných pokusov, kým nastane udalosť A. Jej vzťah s náhodnou premennou X s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti $Geo_1(p)$ je

$$Y = X - 1$$

Pravdepodobnostná funkcia pre rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s geometrickým rozdelením pravdepodobnosti $Geo_0(p)$ môže byť vyjadrená ako:

- predpis:

$$\boxed{PDF_{\mathbb{Y}}(k) = \Pr(\mathbb{Y} = k) = (1-p)^k \cdot p\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots} \tag{6}$$

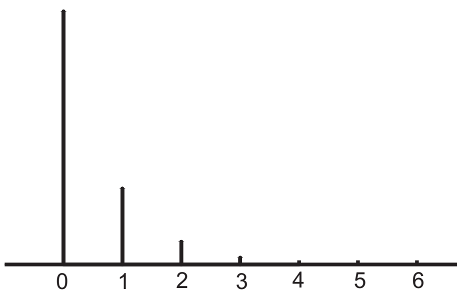
- tabuľka:

k	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$
$PDF_{\mathbb{Y}}(k)$	p	$(1-p)\cdot p$	$\ldots$	$(1-p)^k \cdot p$	$\ldots$

Napríklad pre $p = 0.7$:

k	0	1	2	3	4	$\ldots$
$PDF_{\mathbb{Y}}(k)$	0.7	0.21	0.063	0.0189	0.0057	$\ldots$

- diagram:



Obr. 4: Geometrické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $p = 0.7$

Stredná hodnota náhodnej premennej $\mathbb{Y}$ s geometrickým $Geo_0(p)$ rozdelením je

$$\boxed{E(\mathbb{Y}) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}} \tag{7}$$

Náhodná premenná s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, označenie Po(λ)

Toto rozdelenie popisuje náhodnú premennú, ktorá popisuje výskyty zriedkavých udalostí. (Udalostí, ktorých pravdepodobnosť nastatia je veľmi malá.) Náhodná premenná s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti, popisuje počet výskytov nejakej udalosti počas súvislého, vopred určeného časového intervalu. Počet udalostí, ktoré môžu počas tohto intervalu nastať nie je ohraničený. Hodnota náhodnej premennej môže byť akékoľvek veľké prirodzené číslo.

Náhodná premenná s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti môže nadobudnúť hodnoty $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$
Hodnotu 0 nadobudne s pravdepodobnosťou $\mathrm{e}^{-\lambda}$, hodnotu 1 nadobudne s pravdepodobnosťou $\lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$, hodnotu 2 nadobudne s pravdepodobnosťou $\frac{\lambda^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$, atď. hodnotu k nadobudne s pravdepodobnosťou $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$.

Parameter λ náhodnej premennej určuje priemerný počet udalostí, ktoré nastanú počas súvislého, vopred určeného časového intervalu.
Pravdepodobnostná funkcia pre rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti môže byť vyjadrená ako:

- predpis:

$$\boxed{PDF_{\mathbb{X}}(k) = \Pr(\mathbb{X} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}} \tag{8}$$

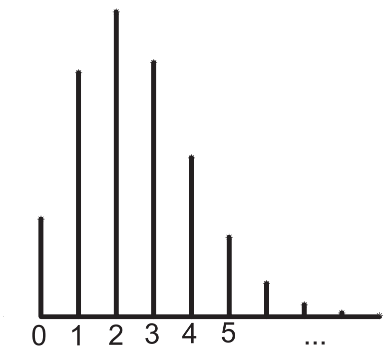
- tabuľka:

k	0	1	2	...	k	...
$PDF_{\mathbb{X}}(k)$	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$	...

  Napríklad pre $\lambda = 2.5$:

k	0	1	2	3	4	5	...
$PDF_{\mathbb{X}}(k)$	0.0821	0.2052	0.2565	0.2138	0.1336	0.0668	...

- diagram:



Obr. 5: Poissonove rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $\lambda = 2.5$

Jedná sa skutočne o rozdelenie pravdepodobnosti, pretože platí:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda} = 1$$

Stredná hodnota náhodnej premennej s Poissonovym rozdelením je

$$\boxed{E(\mathbb{X}) = \lambda} \tag{9}$$

Príklad 8.2 *Náhodnou premennou s Poissonovym rozdelením pravdepodobnosti modelujeme zriedkavé javy, napríklad výskyt študentov, ktorí si dobrovoľne robia domáce úlohy. Ale nakoľko Poissonove rozdelenie modeluje tok, v ktorom nasledujúci vývoj nezávisí od predchádzajúceho, zvykne sa používať aj na modelovanie výskytu udalostí v časovom úseku. Takýto model bude popisovať najväčšie nepravidelnosti, aké môžu nastať. Napríklad počet dopravných nehôd v okrese za týždeň, počet vypálených žiaroviek v podniku za mesiac, počet skrachovaných leteckých spoločností za rok...*