

### Bellmanov princíp optimality

Autobus má prejsť trasu dlhú 6 km za 20 minút. Táto trasa je rozdelená 4 zastávkami na 3 úseky rovnakej dĺžky. Spotreba autobusu na jednotlivých úsekoch je daná vzťahmi:

$$\text{na prvom: } \frac{1}{v_1^2}, \text{ na druhom: } \frac{1}{2v_2^2}, \text{ na treťom: } \frac{1}{v_3^2},$$

kde  $v_i$  je priemerná rýchlosť autobusu na  $i$ -tom úseku.

Určte, akou priemernou rýchlosťou musí autobus prejsť jednotlivé úseky tak, aby celková spotreba na všetkých troch úsekoch bola minimálna.

Úlohu riešte ako úlohu dynamického programovania výpočtom odpredu. **Za stav systému považujte zvyšný čas, ktorý zostáva do konca časového limitu pre prejdienie všetkých úsekov (20 minút).**

Riešte ako diskretnú úlohu dynamického program. Stavový priestor diskretizujte po 5-tich minútach (t.j. uvažujte stavy 0, 5, 10, 15, 20).

#### a/ Riešenie:

$$\min 2t_1^2 + t_2^2 + 2t_3^2$$

$$\text{st } t_1 + t_2 + t_3 = 20, t_i > 0.$$

Prechodová rovnica:  $s_{i-1} = s_i + t_i$ , výpočet odpredu

$$B_0(20) = 0, Df(B_0) = \{20\}$$

$$B_i(s_i) = \min \{ c_i t_i^2 + B_{i-1}(s_{i-1}); s_i + t_i \leq 20, t_i \geq 0 \}, s_{i-1} = s_i + t_i \in Df(B_{i-1})$$

$$B_1(s_1) = \min \{ 2t_1^2 + B_0(s_0); s_1 + t_1 \leq 20, t_1 \geq 0 \}, s_0 = s_1 + t_1 \in Df(B_0)$$

$$B_2(s_2) = \min \{ t_2^2 + B_1(s_1); s_2 + t_2 \leq 20, t_2 \geq 0 \}, s_1 = s_2 + t_2 \in Df(B_1)$$

$$B_3(s_3) = \min \{ 2t_3^2 + B_2(s_2); s_3 + t_3 \leq 20, t_3 \geq 0 \}, s_2 = s_3 + t_3 \in Df(B_2)$$

$s_i$	$B_1(s_1)$	$Z_1(s_1)$	$B_2(s_2)$	$Z_2(s_2)$	$B_3(s_3)$	$Z_3(s_3)$
0	800	20	275	15	200	5
5	450	15	150	10		
10	200	10	75	5		
15	50	5	50			
20	0	0	0	0		

$$t_i = Z_i(s_i)$$

$$t_3 = Z_3(s_3=0) = 5$$

$$t_2 = Z_2(s_2) = Z_2(s_3 + t_3) = Z_2(0 + 5) = 10$$

$$t_1 = Z_1(s_1) = Z_1(5 + 10) = 5$$

Optimálna spotreba na prvom úseku (50/8)

Optimálna spotreba na prvom a druhom úseku dohromady (150/8)

Optimálna spotreba (Presnejšie 200/8)

Autobus musí prejsť prvý a tretí úsek za 5 minút rýchlosťou 24 km/hod a druhý úsek za 10 minút rýchlosťou 12 km/hod.

Pozn: Premyslite si, prečo vyškrtnuté políčka nie je potrebné prepočítavať. – pretože by to autobusu trvalo dlhšie ako 20 minút, nestihol by prejsť všetky zastávky za 20 minút