4 ROZKLADY SIGNÁLU

Predpoklad linearity používaných modelov, ktorý uplatňujeme v celej učebnej pomôcke, umožňuje používať pri analýze a syntéze signálov a systémov metódu, kedy signály rozkladáme na súčet jednoduchších signálov. Potom študujeme účinky týchto jednoduchších signálov, ktoré opäť sčitujeme do výsledného účinku. Explicitné vzťahy dostávame pri rozklade signálu na jednoduchšie signály, ktoré sú na seba kolmé. V tejto kapitole predpokladáme, že signálový priestor je reálny alebo komplexný.

4.1 ORTOGONÁLNE BÁZY

Definícia:

Dva signály $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}'$ voláme ortogonálne (navzájom kolmé) a píšeme $\mathbf{f} \perp \mathbf{f}'$ práve keď $(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = 0$. Ak v báze $\beta = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots\}$ signálového priestoru platí

$$(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) \begin{cases} = 0, & i \neq j \\ \neq 0, & i = j \end{cases}$$

potom bázu voláme ortogonálnou.

Príklad:

Nech je daný signálový priestor náhodných signálov $L_2(\Omega, \varphi, P)$. Podľa definície budú signály $\mathbf{f} = f(\omega, t)$, $\mathbf{f}' = f'(\omega, t)$ $\omega \in \Omega$, $t \in T$ ortogonálne, ak

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \mathcal{E}\left\{ \int_T f(\omega, t) \cdot \overline{f'}(\omega, t)\, dt \right\} = 0$$

Ak signály $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}'$ sú nekorelované, potom sú ortogonálne (opačne platiť nemusí).

Veta - Pythagorova veta

Ak signály $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}'$ sú ortogonálne, potom

$$\| \mathbf{f} + \mathbf{f}' \|^2 = \| \mathbf{f} \|^2 + \| \mathbf{f}' \|^2$$

Dôkaz:

$$\| f + f' \|^2 = (f + f', f + f') = (f, f) + (f, f') + (f', f) + (f', f')$$

Ak $f \perp f'$, potom $(f, f') = (f', f) = 0$

$$\| f + f' \|^2 = (f, f) + (f', f') = \| f \|^2 + \| f' \|^2$$

Príklad:

V priestore $L_2(\Omega, \varphi, P)$ môžeme Pythagorovou vetu interpretovať takto: ak f, f' sú nekorelované signály, potom stredná energia súčtového signálu je daná súčtom stredných energií signálov. Pri prenose signálov sa budeme veľmi často stretávať s úlohou nahradiť signál z daného signálového priestoru iným signálom z podpriestoru s menšou dimenziou tak, aby medzi týmito dvomi signálmi bola minimálna vzdialenosť. Špeciálne budeme napr. nahrádzať signál z nekonečnorozmerného signálového priestoru signálom z podpriestoru s konečnou dimenziou.

Veta:

Nech $\mathcal{H}$ je Hilbertov priestor a nech φ je uzavretý lineárny podpriestor priestoru $\mathcal{H}$. Nech signál $f \in \mathcal{H}$ a

$$\delta = \inf_{\tilde{f} \in \varphi} d(f, \tilde{f})$$

Potom existuje práve jeden signál $f_o \in \varphi$ tak, že

$$d(f, f_o) = \delta$$

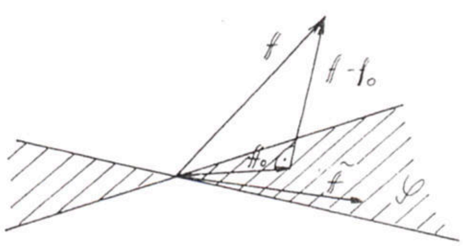
Navyše $f - f_o \perp \varphi$, t.j. pre všetky $\tilde{f} \in \varphi$ platí

$$(f - f_o, \tilde{f}) = 0$$

Pritom f_o je jediným signálom priestoru φ s vlastnosťou

$$f - f_o \perp \varphi$$

Táto veta tvrdí, že najbližší signál k signálu $f \in \mathcal{H}$, ktorý bude ležať v priestore φ nájdeme "spustením kolmice z bodu (signálu) f na priestor φ". Dôkaz tejto vety je uvedený v [11], my sa uspokojíme s jej geometrickou interpretáciou.



Obr. 6
Projekcia signálu f do priestoru φ

Táto veta je základom optimálneho príjmu signálov a aproximácie signálov. Týmto otázkam bude venovaná samostatná kapitola.

Nech podpriestor φ je daný ortogonálnou bázou $\{ \mathbf{b}_i , i = 1, 2, \ldots, n \}$. Ak $\mathbf{f}_0 \in \varphi$ je signál, pri ktorom je vzdialenosť $d (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{f})$ minimálna. Potom platí

$$(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0, \mathbf{b}_i) = 0 , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Nech

$$\mathbf{f}_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{b}_j$$

Na základe linearity skalárneho súčinu platí

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (\mathbf{b}_j , \mathbf{b}_i) = (\mathbf{f}, \mathbf{b}_i) , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Pretože báza je ortogonálna, t.j.

$$(\mathbf{b}_j , \mathbf{b}_i) = 0 , \qquad i \neq j$$

bude

$$c_i = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i , \mathbf{b}_i)} , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Aby sme mohli pracovať s ortogonálnou bázou, je veľakrát potrebné upraviť danú bázu na ortogonálnu tak, aby obidve vytvárali ten istý signálový priestor.

Veta - Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces

Z každej konečnej postupnosti lineárne nezávislých signálov $\{ f_i , i = 1, 2, \ldots, n \}$ komplexného signálového priestoru φ je možné zkonštruovať ortogonálnu bázu $\{ \mathbf{b}_i , i = 1, 2, \ldots, n \}$, ktorá vytvára ten istý podpriestor priestoru φ ako postupnosť $\{ \mathbf{f}_i , i = 1, 2, \ldots, n \}$.

Dôkaz:

Dôkaz vykonáme tým, že ukážeme metódu, ktorá vedie k vytvoreniu ortogonálnej bázy. Použijeme metódu matematickej indukcie. Položme

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{f}_1$$

Predpokladajme, že existuje ortogonálna báza $\{ \mathbf{b}_i , i = 1, 2, \ldots, n \}$ pre $k < n$, ktorá vytvára rovnaký podpriestor φ_k ako signály $\{ \mathbf{f}_i , i = 1, 2, \ldots, k \}$. Projekcia signálu $\mathbf{f}_{k+1}$ do priestoru φ_k bude signál $\mathbf{f}_k$ so súradnicami

$$c_i = \frac{(\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)}$$

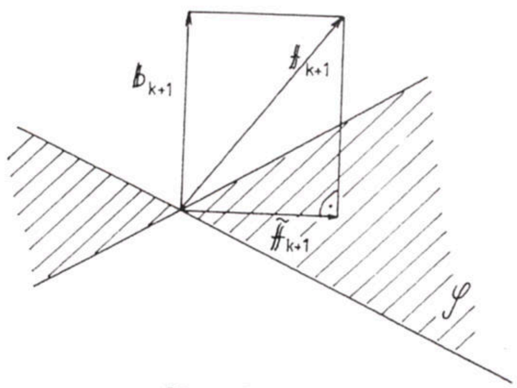
t.j.

$$\mathbf{f}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)} \cdot \mathbf{b}_i$$

Signál

$$\mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{f}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathbf{f}_{k+1}, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)} \mathbf{b}_i$$

je podľa vety o projekcii kolmý na priestor φ_k a teda so signálmi $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ tvorí ortogonálnu bázu priestoru φ_{k+1}.



Obr. 7
Rozšírenie ortogonálnej bázy

4.2 ROZKLAD SIGNÁLU DO ORTOGONÁLNEJ BÁZY

V definícii Hilbertovho priestoru požadujeme, aby ku každej postupnosti, v ktorej sa vzdialenosť medzi signálmi zmenšuje, existoval signál, ku ktorému táto postupnosť konverguje. Nasledujúca veta tvrdí, že je správne aj opačné tvrdenie.

Veta:

Rozvoj ľubovoľného prvku z Hilbertovho priestoru konverguje v tomto priestore.

Dôkaz vety nájde čitateľ v [16]. Avšak to, že súčet členov rozvoja signálu sa tomuto signálu rovná, zaručuje až nasledujúca veta:

Veta - Veta o Fourierových radoch

Nech $\mathbf{f}$ je signál z Hilbertovho priestoru $\mathcal{H}$ a nech

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{b}_i \text{ , kde } c_i = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)} \text{ , } i = 1, 2, \ldots .$$

je rozvoj signálu. Ak platí jedno z nasledujúcich tvrdení, platia aj ostatné:

a) $\{\mathbf{b}_n;\ n \in N\}$ je ortogonálna báza

b) (Rozvoj do Fourierovho radu.) Pre každý signál $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ platí

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{b}_i$$

c) (Parsevalova rovnosť)

Pre ľubovoľné dva signály $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in \mathcal{H}$, kde $\sum_{i=1}^{\infty} c_i' \mathbf{b}_i$ je rozvojom signálu $\mathbf{f}'$ platí

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot \overline{c_i'}$$

d) Pre každý signál $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ platí

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

Dôkaz vety je uvedený v [11].

Pre nás bude v nasledujúcich kapitolách z tejto vety vyplývať, že ak použijeme ortogonálny systém signálov, ktoré vytvárajú celý signálový priestor, t.j. sú ortogonálnou bázou, potom pre každý signál z tohto priestoru platí

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{b}_i$$

kde

$$c_i = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)} \text{ , } i = 1, 2, \ldots$$

4.3 ROZKLAD DETERMINISTICKÝCH SIGNÁLOV

Najskôr ukážeme rozklad diskrétnych signálov definovaných na konečnej časovej množine.

Veta:

Nech φ je komplexný signálový priestor deterministických diskrétnych signálov