

Cvičenia

1. Nájdite Fourierov rad danej funkcie f v danom intervale:

a) $f(x) = x^2, \quad \langle -\pi, \pi \rangle.$

b) $f(x) = |x|, \quad \langle -\pi, \pi \rangle.$

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \langle -\pi, 0 \rangle, \\ 1 & \text{pre } x \in \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \langle 0, \pi/2 \rangle, \\ \pi - x & \text{pre } x \in \langle \pi/2, \pi \rangle. \end{cases}$

Výsledky

a) $\left\{ \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \right\},$

b) $\left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \right\},$

c) $\left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} \right\},$

d) $\left\{ \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right\}.$

2. Rozložte dané funkcie: a) do kosínusového radu, b) do sínusového radu na danom intervale:

a) $f(x) = x, \quad \langle 0, \pi \rangle.$

b) $f(x) = x/4 - x/2, \quad \langle 0, \pi \rangle.$

Výsledky

a) $\left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} \right\},$

b) $\left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n} \right\}.$

3. Nájdite súčty radov

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

tak, že nájdete Fourierove rady periodických funkcií, ktoré vzniknú z funkcie $f(x) = x^2, x \in \langle 0, \pi \rangle$ jej párnym, resp. nepárnym periodickým pokračovaním, resp. periodickým pokračovaním funkcie $f(x) = x^2, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Výsledky

$$\text{a) } \left\{ \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle, \frac{\pi^2}{6} \right\},$$

$$\text{b) } \left\{ 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle, \frac{\pi^2}{12} \right\},$$

$$\text{c) } \left\{ \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle, \frac{\pi^2}{8} \right\}.$$