## 0.1 Stacionárne náhodné procesy

Náhodný proces nazveme **stacionárny**, ak sa jeho charakteristiky nemenia s posunutým časom, t.j. proces je stacionárny, ak sa s posunutým časom nezmení jeho distribučná funkcia:

$$F(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = P\{\dots, f(\omega, k) < x_k, \dots\} = P\{\dots, f(\omega, k \ominus l) < x_k, \dots\} =$$

$$= F(x_{0\oplus l}, x_{1\oplus l}, \dots, x_{N-1\oplus l}), \quad \forall l = 0, 1, \dots, N-1$$

Operácie $+$ a - označujú sčítanie a odčítanie modulo $N$.

Ďalej

$$m(k) = m(k-l) \quad \forall l = 0, 1, \dots, N-1 \quad \Rightarrow \quad m(k) = m$$

$$d(k) = d(k-l) \quad \forall l = 0, 1, \dots, N-1 \quad \Rightarrow \quad d(k) = d$$

V korelačnej teórii zúžime podmienku stacionárnosti distribučnej funkcie na podmienku stacionárnosti **dvojrozmernej distribučnej funkcie**

$$F(x_i, x_j) = F(x_{i+l}, x_{j+l}) \quad \forall i, j, l = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\mathbf{R} = [r_{i,j}] = \left[\mathcal{E}\left\{f(\omega, i)\overline{f(\omega, j)}\right\}\right] = \mathcal{E}\left\{f(\omega, i-l)\overline{f(\omega, j-l)}\right\} = [r_{i-l,j-l}] \quad \forall l = 0, 1, \dots, N-1$$

teda aj pre $l = i$ bude $\mathbf{R} = [r_{i-i,j-i}]$.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{0,0} & r_{0,1} & r_{0,2} & \cdots & r_{0,N-2} & r_{0,N-1} \\ r_{0,N-1} & r_{0,0} & r_{0,1} & \cdots & r_{0,N-3} & r_{0,N-2} \\ r_{0,N-2} & r_{0,N-1} & r_{0,0} & \cdots & r_{0,N-4} & r_{0,N-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ r_{0,2} & r_{0,3} & r_{0,4} & \cdots & r_{0,0} & r_{0,1} \\ r_{0,1} & r_{0,2} & r_{0,3} & \cdots & r_{0,N-1} & r_{0,0} \end{bmatrix}$$

K presnému určeniu matice $\mathbf{R}$ stačí poznať jej prvý riadok

$$\mathbf{r} = (r_{0,0}, r_{0,1}, r_{0,2}, \dots, r_{0,N-1})$$

Tento vektor nazývame **kovariančný vektor** (v literatúre aj pod názvom kovariančná funkcia).

Na predchádzajúcej prednáške sme ukázali, že ak spomedzi všetkých deterministických ortogonálnych báz N-rozmerného vektorového priestoru (náhodného, s náhodným skalárom) nájdeme bázu, v ktorej sú súradnice náhodného procesu **f** navzájom nekorelované, bude táto báza tvorená vlastnými vektormi kovariančnej matice procesu **f** ( Karhunen Loẽvova báza).

V nasledujúcom tvrdení ukážeme, ako vyzerá Karhunen Loẽvova báza pre stacionárne procesy. (Naďalej budeme uvažovať stacionárnosť v širšom zmysle - v stacionárnom procese sa nemení v závislosti na čase stredná hodnota a dvojrozmerná distribučná funkcia). Sčítanie a odčítanie modulo N budeme v tejto prednáške značiť znamienkami $+, -$, rovnako ako klasické sčítanie a odčítanie.

*Tvrdenie:*

Nech náhodný proces **f** patrí do N-rozmerného vektorového priestoru a je stacionárny. Potom vektory harmonickej bázy tohoto priestoru sú vlastné vektory

kovariančnej matice procesu $\mathbf{f}$.
Dôkaz:
Náhodný proces $\mathbf{f}$ je stacionárny, teda pre jeho strednú hodnotu $\mathbf{m}$ a pre jeho distribučnú funkciu $F(x_i, x_j)$ platí:

$$m_k = m_{k-l} \quad \forall k, l = 0, 1, \dots, N-1$$

$$F(x_i, x_j) = F(x_{i+l}, x_{j+l}) \quad \forall i, j, l = 0, 1, \dots, N-1$$

Pre vlastné vektory matice $\mathbf{R}$ platí

$$\lambda_n \mathbf{b}_n = \mathbf{R}\mathbf{b}_n \tag{1}$$

chceme ukázať, že ak je $\mathbf{R}$ kovariančná matica stacionárneho procesu, tak

$$\mathbf{b}_n = (\dots, e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \dots)$$

sú jej vlastné vektory.
Pre kovariančnú maticu stacionárneho procesu platí:

$$\mathbf{R} = [r_{i,j}] = [r_{i-l,j-l}] \quad \forall l = 0, 1, \dots, N-1$$

Rozpísaním rovnosti (1) po zložkách dostaneme vyjadrenie pre k-tu zložku:

$$\lambda_n b_n(k) = \sum_{l=0}^{N-1} b_n(l) r_{lk} \quad \forall k, n = 0, 1, \dots, N-1 \tag{2}$$

Špeciálne pre $k = 0$:

$$\lambda_n b_n(0) = \sum_{l=0}^{N-1} b_n(l) r_{l0} \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1$$

$b_n(0) = 1, \quad b_n(l) = e^{j\frac{2\pi}{N}nl} \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1$, preto

$$\lambda_n = \sum_{l=0}^{N-1} b_n(l) r_{l0} = \sum_{l=0}^{N-1} r_{l0} e^{j\frac{2\pi}{N}nl}$$

Ľavá strana (2) bude mať po dosadení predošlého výrazu za $\lambda_n$ tvar:

$$\lambda_n b_n(k) = \left( \sum_{l=0}^{N-1} r_{l0} e^{j\frac{2\pi}{N}nl} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \forall k = 1, 2, \dots, N-1$$

po úprave

$$\lambda_n b_n(k) = \sum_{l=0}^{N-1} r_{l0} e^{j\frac{2\pi}{N}n(l+k)} \quad \forall k = 1, 2, \dots, N-1$$

Označme $l' = l + k$, teda dosadíme $l = l' - k$,
horná hranica po substitúcii bude $N-1+k$, čo nahradíme (modulo $N$) hodnotou

$k-1$,
ďalej použitím $r_{i,j} = r_{i+k,j+k}$ (proces je stacionárny) dostaneme

$$\lambda_n b_n(k) = \sum_{l'=k}^{k-1} r_{l'-k0} e^{j\frac{2\pi}{N} n\, l'} = \sum_{l'=k}^{k-1} r_{l'k} e^{j\frac{2\pi}{N} n\, l'} \quad \forall k = 1, 2, \ldots, N-1$$

upravme pravú stranu (2):

$$\sum_{l=0}^{N-1} b_n(l) r_{lk} = \sum_{l=0}^{N-1} r_{lk} e^{j\frac{2\pi}{N} nl}$$

Treba si ešte uvedomiť, že sumy

$$\sum_{l'=k}^{k-1} r_{l'k} e^{j\frac{2\pi}{N} n\, l'}, \; \sum_{l=0}^{N-1} r_{lk} e^{j\frac{2\pi}{N} nl}$$

označujú súčet rovnakých hodnôt, len v inom poradí. Ukázali sme, že ak za $\mathbf{b}_n$ dosadíme do (1)

$$\mathbf{b}_n = (\ldots, e^{j\frac{2\pi}{N} nk}, \ldots)$$

rovnosť platí, teda $\mathbf{b}_n$ sú vlastné vektory kovariančnej matice stacionárneho procesu. Podľa Karhunen Loẽvovej vety, tvoria vektory $\mathbf{b}_n$ bázu N-rozmerného náhodného vektorového priestoru (s náhodným skalárom).

Porovnajme teraz odvodený výsledok s diskrétnou Fourierovou transformáciou - DFT:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \sum_{k=0}^{N-1} c_n \mathbf{b_n} \quad \text{t.j.} \quad f_k = \sum_{k=0}^{N-1} c_n\, e^{j\frac{2\pi}{N} n\, k}$$

$$\text{kde} \quad c_n = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{b_n})}{(\mathbf{b_n}, \mathbf{b_n})} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{-j\frac{2\pi}{N} n\, k}$$

Zodpovedajúce vzťahy pre výpočet spektra stacionárneho náhodného procesu sú

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} r_k e^{-j\frac{2\pi}{N} nk}, \quad r_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n^2 e^{j\frac{2\pi}{N} nk} \tag{3}$$

(vychádzali sme z označenia $\lambda_n = \sum_{l=0}^{N-1} r_{l0} e^{j\frac{2\pi}{N} nl}$ substitúciou $l' = -l$ dostaneme

$$\lambda_n = \sum_{l'=0}^{-(N-1)} r_{-l'0} e^{-j\frac{2\pi}{N} nl'} = \sum_{l'=0}^{N-1} r_{0l'} e^{-j\frac{2\pi}{N} nl'}$$

Pri odvodení Karhunen Loẽvovej vety sme označili

$$\lambda_n = E_n \sigma_n^2 \;\; \text{kde} \;\; E_n = (\mathbf{b_n}, \mathbf{b_n}) = N \quad \text{teda} \;\; \frac{\lambda_n}{N} = \sigma_n^2$$

a použili sme, že pre stacionárny proces platí $r_{0l} = r_{0+i,l+i} =: r_l$ )
Porovnaním (3) so vzťahmi

$$f(\omega, k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n(\omega) e^{j\frac{2\pi}{N} nk}, \quad \sigma_n^2 = \mathcal{E}\left\{ c_n(\omega)\, \overline{c_n(\omega)} \right\}$$

vidíme, že čísla $\sigma_n^2$ udávajú stredný výkon amplitúdy n-tého vektora harmonickej bázy. Preto sa postupnosti $\{\sigma_n^2\}$ hovorí výkonové spektrum.
Čísla $\sigma_n^2$ dostaneme ako koeficienty rozkladu kovariančného vektora (kovariančnej funkcie) do harmonickej bázy.
Podotýkame, že pre kovariančnú funkciu platí $r_k = \overline{r_{N-k}} \quad \forall k = 1, \ldots, N-1$.
Pretože energia všetkých bázických funkcií je rovnaká a rovná sa N, optimálnu bázu M-rozmerného podpriestoru dostaneme tak, že vyberieme M vektorov harmonickej bázy s najväčšími hodnotami $\{\sigma_n^2\}$.
Chyba aproximácie bude

$$d^2(\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}}) = \sum_{n:\mathbf{b}_n \notin \mathcal{S}_M} N\sigma_n^2 = \sum_{n:\mathbf{b}_n \notin \mathcal{S}_M} \lambda_n$$

kde sčítame cez také hodnoty $n$, že $\mathbf{b}_n$ nie je prvkom bázy $\mathcal{S}_M$.

Náhodný proces $\mathbf{f}(\omega)$ môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu deterministických bázických vektorov (s náhodnými koeficientami $c_n(\omega)$).

$$f(\omega, k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n(\omega)\mathbf{b}_n$$

Nech náhodný proces $\mathbf{f}$ patrí do N-rozmerného vektorového priestoru. Kovariančná matica $R$ chrakterizuje proces v časovej oblasti, $r_{i,j}$ určuje závislosť medzi rezmi náhodným procesom v jednotlivých časoch $i, j$.
Zodpovedajúcou charakteristikou v spektrálnej oblasti je $\lambda_n = \sigma_n^2 E_n$, kde $\sigma_n^2$ je stredný výkon amplitúdy $c_n(\omega)$ (disperzia náhodnej premennej $c_n(\omega)$).

Vypočítajme veľkosť náhodného procesu $\mathbf{f}$:

$$||\mathbf{f}||^2 = \mathcal{E}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = ||\sum_{n=0}^{N-1} c_n(\omega)\mathbf{b}_n||^2 = \sum_{n=0}^{N-1} ||c_n(\omega)\mathbf{b}_n||^2 =$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} ||c_n(\omega)||^2 ||\mathbf{b}_n||^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n^2 E_n = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n$$

Ukázali sme, že súčet vlastných čísel kovariančnej matice náhodného procesu je druhá mocnina veľkosti tohoto procesu.

*Merserova veta:*
Nech náhodný proces $\mathbf{f}$ patrí do N-rozmerného vektorového priestoru a nech $R = [r_{k,l}]$ je jeho kovariančná matica. Potom súvislosť medzi kovariančnou maticou a rozložením výkonov v spektre je:

$$r_{k,l} = \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n^2 \mathbf{b}_n(k)\overline{\mathbf{b}_n(l)}$$

Dôkaz:

$$r_{k,l} = \mathcal{E}\left\{\dot{f}(\omega, k)\,\overline{\dot{f}(\omega, l)}\right\} = \mathcal{E}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} ||c_n(\omega)\mathbf{b}_n(k) \overline{\sum_{m=0}^{N-1} ||c_m(\omega)\mathbf{b}_m(l)}\right\} =$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{E}\left\{c_n(\omega)\overline{c_m(\omega)}\right\} \mathbf{b}_n(k)\overline{\mathbf{b}_m(l)} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}\left\{|c_n(\omega)|^2\right\} \mathbf{b}_n(k)\overline{\mathbf{b}_m(l)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n^2 \mathbf{b}_n(k)\overline{\mathbf{b}_n(l)}$$

*Merserova veta pre stacionárny náhodný proces:*
Vzťah medzi kovariančným vektorom $\mathbf{r}$ stacionárneho procesu $\mathbf{f}$ a jeho výkonovým spektrom vyjadruje diskrétne fourierova transformácia (DFT) a pre vlastné čísla kovariančnej matice procesu $\mathbf{f}$ platí

$$\lambda_n = N\sigma_n^2$$

Dôkaz:
V prípade stacionárneho náhodného procesu sú vlastnými vektormi kovariančnej matice vektory harmonickej bázy N-rozmerného vektorového priestoru:

$$\mathbf{b}_n = (\dots, e^{j\frac{2\pi}{N}n\,k}, \dots)$$

$$r_{k,l} = \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n^2 e^{j\frac{2\pi}{N}n\,k}\overline{e^{j\frac{2\pi}{N}n\,l}} = \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n^2 e^{j\frac{2\pi}{N}n\,k} e^{-j\frac{2\pi}{N}n\,l} = \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n^2 e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-l)}$$

pre stacionárny proces platí, že ak $k-l = k'-l'$, tak $r_{k,l} = r_{k',l'}$. Preto namiesto $r_{k,l}$ stačí uviesť hodnotu $r_k = r_{k',l'}$, kde $k'-l' = k$.
Pre jednotlivé zložky kovariančného vektora $\mathbf{r}$ platí:

$$r_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n^2 e^{j\frac{2\pi}{N}n\,k} \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1 \tag{4}$$

Vzťah (4) vyjadruje DFT pre proces $\mathbf{r} = (\dots, r_k, \dots)$, preto môžeme vypočítať

$$\sigma_n^2 = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{b}_n)}{(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} r_k e^{-j\frac{2\pi}{N}n\,k} \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1$$

**Projekcia do harmonickej bázy.**
Aj v tomto prípade platí :
Pretože energia všetkých bázických funkcií je rovnaká a rovná sa N, optimálnu bázu M-rozmerného podpriestoru dostaneme tak, že vyberieme M vektorov harmonickej bázy s najväčšími hodnotami $\{\sigma_n^2\}$.
Chyba aproximácie bude

$$d^2(\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}}) = \sum_{n:\mathbf{b}_n \notin \mathcal{S}_M} N\sigma_n^2 = \sum_{n:\mathbf{b}_n \notin \mathcal{S}_M} \lambda_n$$

kde sčítavame cez také hodnoty $n$, že $\mathbf{b}_n$ nie je prvkom bázy.

*Príklad (biely šum):*

Nech náhodný proces $\mathbf{f}$ je stacionárny a nech jeho kovariančný vektor má tvar

$$\mathbf{r} = (\sigma^2, 0, 0, \dots, 0)$$

potom

$$r_0 = \mathcal{E}\left\{\dot{f}(\omega,k)\,\overline{\dot{f}(\omega,k)}\right\} = \mathcal{E}\left\{|\dot{f}(\omega,k)|^2\right\} = \sigma^2 \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1$$

každé dva rôzne rezy sú navzájom nekorelované.

Rozpis v spektrálnej oblasti

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} r_k e^{-j\frac{2\pi}{N}n\,k} = \frac{1}{N} r_0 \quad \forall n = 0, 1, \ldots, N-1$$

rozdelenie výkonu v spektre je konštantné. Výkon je na všetkých harmonických zložkách zastúpený rovnako.

## 0.2 Analýza procesov lineárnym systémom

Aj v tejto časti budeme skúmať vlastnosti procesu rozloženého do bázy nejakého vektorového priestoru.
Pôvodný proces $\mathbf{f}$ s nameranými hodnotami

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})_{\mathcal{E}}$$

je vyjadrený v jednotkovej báze (N-1)-rozmerného vektorového priestoru.
Proces $\mathbf{f}$ môžeme vyjadriť v inej báze $\mathcal{B}$ toho istého vektorového priestoru (nájdeme spektrum procesu):

$$\mathbf{f} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{b}_k = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})_{\mathcal{B}}$$

Proces $\mathbf{f}$ z N-rozmerného priestoru $S_{\mathcal{B}}$ teraz aproximujeme procesom $\tilde{\mathbf{f}}$ z M-rozmerného priestoru $S_{\mathcal{G}}$:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{c}_k \mathbf{g}_k = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{M-1})_{\mathcal{G}}$$

Potrebujeme vybrať taký proces $\tilde{\mathbf{f}}$, pre ktorý bude rozdiel $\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}$ minimálny. Vektory $\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}}$ môžeme odčítať iba vtedy, ak ležia v tom istom vektorovom priestore (majú rovnaký počet zložiek), preto vektor $\tilde{\mathbf{f}}$ doplníme nulami na N-zložkový vektor $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{M-1}, 0, \ldots, 0) = (\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{N-1})$

Tým, že nahradíme vyjadrenie procesu v jednej báze vyjadrením tohoto procesu v inej báze toho istého priestoru (zmeníme bázu), urobíme vlastne transformáciu tohoto procesu. V technickej literatúre sa používa pojem systém.

Takúto zmenu nazveme **transformácia lineárnym systémom**
ozn. $\tilde{\mathbf{f}} = \mathcal{T}(\mathbf{f})$, ak platí

$$\mathbf{f} = \sum_{i=0}^{N-1} k_i f_i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(\mathbf{f}) = \sum_{i=0}^{N-1} k_i \mathcal{T}(f_i)$$

Transformácia lineárnym systémom je úplne popísaná tým, ako sú transformované jednotkové procesy (vektory). Odozva systému na jednotkový proces $\mathbf{e}_n$ sa nazýva **impulzná chrakteristika systému** $\mathcal{T}$.

Označenie $\delta_n = \mathcal{T}(\mathbf{e}_n)$.
Teda platí

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathcal{T}(\sum_{k=0}^{N-1} f_k \mathbf{e}_k) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \mathcal{T}(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \delta_k$$

*Príklad:*
Prenosový systém (lineárna transformácia) $\mathcal{T}$, je úplne popísaná odozvou na jednotkové impulzy:

$$\delta_0 = \mathcal{T}(\mathbf{e}_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \quad \delta_1 = \mathcal{T}(\mathbf{e}_1) = (0, 1, -1), \quad \delta_2 = \mathcal{T}(\mathbf{e}_2) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

Proces $\mathbf{f} = (1, 2, -1)$ sa zobrazí na:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathcal{T}(\mathbf{f}) = \mathcal{T}(1 \cdot \mathbf{e}_0 + 2 \cdot \mathbf{e}_1 - 1 \cdot \mathbf{e}_2) = 1 \cdot \mathcal{T}(\mathbf{e}_0) + 2 \cdot \mathcal{T}(\mathbf{e}_1) - 1 \cdot \mathcal{T}(\mathbf{e}_2) =$$

$$= 1 \cdot \delta_1 + 2 \cdot \delta_1 - 1 \cdot \delta_2 = (1, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$$

## 0.3 Lineárne časovo invariantné transformácie

Významnou skupinou lineárnych transformácií (systémov) sú **časovo invariantné transformácie**(niekedy nazývané aj stacionárne transformácie), teda transformácie, ktoré nemenia svoje charakteristiky v čase. Presnejšie, odozva na vstup posunutý v čase, je výstup posunutý v čase:

$$\mathcal{T}(\mathbf{e}_0) = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1}); \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{0+k} \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{e}_k) = \mathcal{T}(\mathbf{e}_{0+k}) = (a_{0+k}, a_{1+k}, \dots, a_{N-1+k}) = (a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k-1})$$

Teda v $\mathbf{e}_0$, resp. v $\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)$ robíme kruhový posun, preto na úplný popis časovo invariantnej transformácie stačí, ak poznáme hodnotu $\mathcal{T}(\mathbf{e}_0)$.

*Príklad:*
Nech impulzná odozva na jednotkový impulz $\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$ je

$$\delta = \mathcal{T}(\mathbf{e}_0) = (1, 1, -1/2, 0)$$

Aká bude odpoveď lineárneho časovo invariantného systému (transformácie, popísanej odozvou $\delta$) na vstupný proces $\mathbf{f} = (1, 2, -1, 3)$?

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathcal{T}(\mathbf{e}_0) = (1, 1, -1/2, 0)$$

$$\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathcal{T}(\mathbf{e}_1) = (0, 1, 1, -1/2)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 0), \quad \mathcal{T}(\mathbf{e}_2) = (-1/2, 0, 1, 1)$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 0, 1), \quad \mathcal{T}(\mathbf{e}_3) = (1, -1/2, 0, 1)$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{f}) = \mathcal{T}(1, 2, -1, 3) = 1 \cdot (1, 1, -1/2, 0) + 2 \cdot (0, 1, 1, -1/2) - 1 \cdot (-1/2, 0, 1, 1) + 3 \cdot (1, -1/2, 0, 1) =$$

$$= (1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1; 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1/2; -1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0; 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1/2 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1) =$$

$$= (3/2, 3, -3/2, 9/2)$$

Teda všeobecne

$$\tilde{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \, \delta_{k-n}$$

Posledný výraz nazývame konvolúciou vektorov $\mathbf{f}, \delta$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} * \delta$$

Analýza procesu lineárnym systémom je popísaná vzťahmi:

$$f'_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n f_{k-n} = \sum_{n=0}^{N-1} g_{k-n} f_n \tag{5}$$

Časovo invariantná transformácia je popísaná vektorom $\mathbf{g}$, ktorý charakterizuje daný
lineárny systém ($\mathbf{g}$ je impulzná odozva):

$$\mathbf{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_{N-1})$$

Hodnotu $f'_0$ dostaneme:

$$f'_0 = g_0 f_0 + g_1 f_{-1} + g_2 f_{-2} + \cdots + g_{N-1} f_{N-1} =$$

$$= g_0 f_0 + g_1 f_{N-1} + \cdots + g_{N-1} f_{N-1}$$

*Poznámka (model kĺzavého súčtu):*

$$\tilde{f}_k = \sum_{n=0}^{M-1} c_n f_{k-n}$$

Vidíme, že vzťah (5) sa podobá predchádajúcemu vzťahu. Rozdiel je iba v tom, že pri (MA) modeli sú nenulové hodnoty $c_n$ len pre $n < M - 1$ (ostatné $c_n$ sú rovné nule).

*Príklad:*
Navrhnite lineárny systém so štruktúrou:

$$f'_k = \tilde{f}_{k+1} = g_0 f_k + g_1 f_{k-1}$$

ktorý bude robiť optimálnu predikciu o jeden krok.

## 0.4 Metóda adaptívneho hľadania koeficientov

Budeme postupne meniť koeficienty $g_0$, $g_1$, tak aby sme zmenšili chybu, ktorej sme sa dopustili. Chyba je vyjadrená vzťahom $\mathbf{e}^2 = f(g_0, g_1)$, kde chyba v čase $k+1$ je

$$e^2_{k+1} = (f_{k+1} - \tilde{f}_{k+1})^2$$

Menšiu chybu dosiahneme, keď zmeníme koeficienty pomocou gradientovej metódy. Gradient je vektor, ktorý má smer najvyššieho nárastu funkcie $\mathbf{e}^2 = f(g_0, g_1)$, v závislosti od hodnôt $g_0$, $g_1$.

$$g_{k+1} = g_k - \alpha \mathrm{grad}\, e^2_k$$

$$\operatorname{grad} e_k^2 = (\frac{\partial e_k^2}{\partial g_0}, \frac{\partial e_k^2}{\partial g_1})$$

Pre funkciu $f$, ktorá je konvexná sa týmto spôsobom dostaneme k minimu.
Dostávame:

$$\frac{\partial e_k^2}{\partial g_k(0)} = \frac{\partial}{\partial g_0}(f_k - \tilde{f}_{k+1})^2 = \frac{\partial}{\partial g_0}(f_k - (g_0 f_k + g_1 f_{k-1}))^2 =$$

$$= 2(f_k - (g_0 f_k + g_1 f_{k-1}))(-f_k) = -2 e_k f_k$$

Nasledujúce $g_0$ teda položíme (podľa $g_{k+1} = g_k - \alpha \operatorname{grad} e_k^2$)

$$g_0 =: g_0 + 2\alpha\, e_k f_k$$

Podobne:

$$\frac{\partial e_k^2}{\partial g_1} = \frac{\partial}{\partial g_1}(f_k - \tilde{f}_{k+1})^2 = \frac{\partial}{\partial g_1}(f_k - (g_1 f_k + g_1 f_{k-1}))^2 =$$

$$= 2(f_k - (g_0 f_k + g_1 f_{k-1}))(-f_{k-1}) = -2 e_k f_{k-1}$$

Nasledujúce $g_1$ teda položíme

$$g_1 =: g_1 + 2\alpha\, e_k f_{k-1}$$

## 0.5 Spektrálny popis lineárnych, časovo invariantných transformácií

Ukázali sme, že ak $\mathcal{T}$ je lineárna, časovo invariantná transformácia, tak na popis tejto transformácie stačí tzv. impulzná charakteristika.
Pôvodný proces je definovaný nameranými hodnotami:

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})_{\mathcal{E}}$$

Jeho spektrálny popis je daný

$$\mathbf{f} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{b}_k = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})_{\mathcal{B}}$$

Proces $\mathbf{f}'$ na výstupe lineárnej transformácie (systému) je popísaný

$$\mathbf{f}' = \sum_{k=0}^{N-1} c'_k \mathbf{b}'_k = (c'_0, c'_1, \ldots, c'_{N-1})_{\mathcal{B}'}$$

Bázy $\mathcal{B}$ aj $\mathcal{B}'$ sú ortogonálne bázy. Teda platí $(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_m) = 0$, pre $n \neq m$ a $(\mathbf{b}'_n, \mathbf{b}'_m) = 0$, pre $n \neq m$.
Pre koeficienty $c'_n$ dostaneme

$$c'_n = \frac{(\mathbf{f}', \mathbf{b}'_n)}{(\mathbf{b}'_n, \mathbf{b}'_n)} = \frac{(\mathcal{T}(\mathbf{f}), \mathbf{b}'_n)}{(\mathbf{b}'_n, \mathbf{b}'_n)} = \frac{(\mathcal{T}(\sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{b}_k), \mathbf{b}'_n)}{(\mathbf{b}'_n, \mathbf{b}'_n)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} c_k (\mathcal{T}(\mathbf{b}_k), \mathbf{b}'_n)}{(\mathbf{b}'_n, \mathbf{b}'_n)} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k F_{nk}$$

Čísla $F_{nk}$ tvoria štvorcovú maticu $\mathbf{F}$ a charakterizujú transformovaný proces $\mathbf{f}'$ v spektrálnej oblasti.

$$\mathbf{c'}^T = \mathbf{F}\mathbf{c'}^T$$

Nech teraz bázy $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ sú rovnaké, teda

$$\mathbf{b'}_n = \mathbf{b}_n$$

Platí $(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_m) = 0$, pre $n \neq m$ a naviac nech platí $(\mathcal{T}(\mathbf{b}_n), \mathbf{b}_m) = 0$, pre $n \neq m$. Dosávame

$$c'_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k F_{nk} = F_{nn} c_n$$

Vektor $\mathbf{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$, (kde použijeme označenie $F_n = F_{nn}$) nazývame **spektrálny prenos lineárneho systému.**
Ak na vstupe lineárneho, časovo invariantného systému je harmonický proces, tak aj na výstupe je harmonický proces (je to jediný proces s touto vlastnosťou):

$$\mathbf{b'}_n = \mathbf{b}_n = (1, e^{-j\frac{2\pi}{N}n}, \ldots, e^{-j\frac{2\pi}{N}n\cdot k}, \ldots, e^{-j\frac{2\pi}{N}n\cdot(N-1)})$$
$$\mathcal{T}(\mathbf{b}_n) = (F_n 1, F_n e^{-j\frac{2\pi}{N}n}, \ldots, F_n e^{-j\frac{2\pi}{N}n\cdot k}, \ldots, F_n e^{-j\frac{2\pi}{N}n\cdot(N-1)})$$
$$c'_n = F_n c_n = |F_n| e^{j\varphi_n} c_n$$

Na to, aby sme zistili $\mathbf{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_{N-1})$, dávame na vstup postupne všetky vektory harmonickej bázy.

Pomocou spektrálneho popisu vieme určiť časový priebeh výstupného procesu:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{f} & \longrightarrow^{\mathcal{T}}\longrightarrow & \mathbf{f}' \\ DFT\downarrow & & \uparrow DFT^{-1} \\ \mathbf{c} & \longrightarrow_{c_n F_n}\longrightarrow & \mathbf{c}' \end{array}$$