potom

$$C_r(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}2kn} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k+1)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}(2k+1)n}$$

$$C_r(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k)\, e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}kn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k+1)\, e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}kn}$$

Každá z uvedených súm predstavuje diskrétnu Fourierovu transformáciu z určitých $\frac{N}{2}$ hodnôt signálu. Takto sa jedna transformácia rozpadá na dve transformácie nad polovičným počtom hodnôt signálu

$$C_{r-1}(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k)\, e^{-j\frac{4\pi}{N}kn}$$

$$C'_{r-1}(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k+1)\, e^{-j\frac{4\pi}{N}kn}$$

a platí

$$C_r(n) = C_{r-1}(n) + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\, C'_{r-1}(n)$$

Každý koeficient môžeme teda vypočítať pomocou r násobení a sčítaní ($r = \log_2 N$) a na výpočet všetkých koeficientov je potrebné $N \log_2 N$ násobení a sčítaní.

Poznámka:

Podrobnejší popis výpočtu koeficientov diskrétnej Fourierovej transformácie, ako aj program v jazyku Fortran môže nájsť čitateľ v [1] . Rovnaký princíp je možné použiť aj na zrýchlenie výpočtu rozvoja diskrétneho deterministického signálu do systému Walshových funkcií.

4.5 ROZKLAD NÁHODNÝCH SIGNÁLOV

Ako je uvedené v príklade 3 a 4 kap. 3.5 signálový priestor $L_2(\Omega, \varphi, P)$ spojitých náhodných signálov $f=f(\omega,t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$, resp. $\ell_2(\Omega, \varphi, P)$ diskrétnych náhodných signálov $\mathbf{f} = \{f(\omega,k),\ \omega \in \Omega,\ k = 0, 1, \dots\}$ s konečnou strednou energiou

$$\mathcal{E}\left\{\int_T |f(\omega,t)|^2 \, dt\right\} < \infty$$

resp.

$$\mathcal{E}\left\{\sum_{k=1} |f(\omega,k)|^2\right\} < \infty$$

a skalárnym súčinom

$$(\mathbf{f},\mathbf{f}') = \mathcal{E}\left\{\int_T f(\omega,t) \, . \, f'(\omega,t) \, dt\right\}$$

resp.

$$(\mathbf{f},\mathbf{f}') = \mathcal{E}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} f(\omega,k) \, . \, \overline{f'(\omega,k)}\right\}$$

sú Hilbertovými priestormi. Podľa vety o Fourierových radoch môžeme náhodný signál $\mathbf{f}$ z Hilbertovho priestoru rozložiť do ortogonálnej bázy $\{\mathbf{b}_i, \ i = 1, 2, \dots\}$

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1} c_i \, \mathbf{b}_i$$

kde $(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_j) \begin{cases} = 0, & i \neq j \\ \neq 0, & i = j \end{cases}$

$$c_i = \frac{(\mathbf{f},\mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_i)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Podľa definície skalárneho súčinu ortogonálnu bázu tvorí systém navzájom nekorelovaných náhodných signálov a koeficienty rozkladu do tejto bázy sú priamo úmerné integrálu, resp. sume vzájomnej korelačnej funkcie $R_{\mathbf{f},\mathbf{f}'}(t,t)$ a nepriamo úmerné strednej energii bázického signálu.

Pri práci s náhodnými signálmi sa stretávame s dvomi požiadavkami: aby výsledky ukazovali ako sa signál správa v priemere pri jeho hromadnom výskyte (pravdepodobnostný pohľad) a aby sa výsledky dali aplikovať na spracovanie jednej realizácie náhodného signálu (deterministický pohľad). Preto za bázické náhodné signály volíme deterministické signály s náhodnou amplitúdou

$$\mathbf{b}_i = b_i(\omega,t) = b_i(\omega) \, . \, b_i(t), \quad t \in T, \ \omega \in \Omega, \quad i = 1, 2, \dots$$

kde

$$b_i(t) \in L_2(0,T), \quad i = 1, 2, \dots, \quad \text{resp.}$$

$$b_i = b_i(\omega,k) = b_i(\omega) \,.\, b_i(k) , \qquad i,k = 1, 2, \dots$$

a $b_i(k) \in \ell_2$, $i = 1, 2, \dots$. Ak označíme $C_i(\omega) = c_i b_i(\omega)$, Fourierov rad náhodného signálu nadobudne tvar

$$f(\omega,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(\omega)\, b_i(t) , \qquad t \in T$$

resp.

$$f(\omega,k) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(\omega)\, b_i(k) , \qquad k = 1, 2, \dots$$

Keďže chceme pracovať súčasne v priestore náhodných signálov aj v priestore ich realizácií, musíme systém $\{b_i(t),\ t \in T,\ i = 1, 2, \dots\}$ resp. $\{b_i(k),\ i,k = 1, 2, \dots\}$ zvoliť tak, aby v priestore $L_2(0,T)$, resp. ℓ_2 tvoril ortogonálnu bázu. Ak však $\{b_i(t),\ t \in T ,\ i = 1, 2, \dots\}$ je ortogonálnou bázou v priestore $L_2(0,T)$ ostáva otázkou, či systém $\{b_i(\omega).b_i(t),\ \omega \in \Omega ,\ t \in T,\ i = 1, 2, \dots\}$ bude bázou v priestore $L_2(\Omega , \varphi , P)$? Odpoveď dáva nasledujúca veta.

Veta:

Nech $\mathbf{f} = f(\omega,t),\ \omega \in \Omega ,\ t \in T$ je prvkom Hilbertovho priestoru $L_2(\Omega , \varphi , P)$. Rovnica

$$\lim_{N\to\infty} d^2(\mathbf{f},\mathbf{f}_N) = \lim_{N\to\infty} \mathcal{E} \left\{ \int_0^T \left| f(\omega,t) - \sum_{i=0}^{N} C_i(\omega)\, b_i(t) \right|^2 dt \right\} = 0$$

kde

$$C_i(\omega) = \frac{\int_0^T f(\omega,t)\, \overline{b_i(t)}\, dt}{\int_0^T b_i(t)\, \overline{b_i(t)}\, dt}$$

platí práve vtedy, ak systém $\{b_i(t),\ t \in T,\ i = 1, 2, \dots\}$ je bázou priestoru realizácií $L_2(0,T)$.

Túto vetu ako vetu G. Browna ml. môže nájsť čitateľ dokázanú v [12]. Veta hovorí o úplnosti systému $\{b_i(\omega,t) = C_i(\omega).b_i(t)\}$. Ortogonálnosť vyplýva z toho, že ak

$$(b_i(t),\ b_j(t)) = \int_0^T b_i(t)\, \overline{b_j(t)}\, dt \begin{cases} = 0, & i \neq j \\ \neq 0, & i = j \end{cases}$$

potom

$$(C_i(\omega)b_i(t),\ C_j(\omega)b_j(t)) = \mathcal{E}\left\{\int_0^T C_i(\omega)\ b_i(t)\ C_j(\omega)\ b_j(t)\ dt\right\} =$$

$$= \mathcal{E}\left\{C_i(\omega)\ C_j(\omega)\int_0^T b_i(t)\ \overline{b_j(t)}\ dt\right\} \begin{cases} = 0\ , & i \neq j \\ \neq 0\ , & i = j \end{cases}$$

Rovnaké úvahy platia samozrejme aj pre diskrétne náhodné signály z priestoru $\ell_2(\Omega\ ,\ \varphi\ ,\ P)$.

Okrem možných výberov bázických signálov, ktoré sme spomínali pre rozklad deterministických signálov je zaujímavý systém, ktorý zaručuje, že koeficienty rozkladu $C_i(\omega)$, $C_j(\omega)$, $i \neq j$ budú navzájom nekorelované, t.j.

$$\mathcal{E}\left\{C_i(\omega)\ .\ \overline{C_j(\omega)}\right\} = \sigma_j^{\ 2}\ .\ \delta_{ij}$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ a $\sigma_j^2 = \mathcal{E}\left\{C_j(\omega)^{\ 2}\right\}$.

Ak do predchádzajúceho vzťahu, ktorý vyjadruje nekorelovanosť koeficientov Fourierovho radu dosadíme vzťah pre ich výpočet

$$C_i(\omega) = \frac{1}{E_i}\int_0^T f(\omega,t)\ \overline{b_i}(t)\ dt\ .$$

kde

$$E_i = \int_0^T b_i(t)\ \overline{b_i(t)}\ dt$$

dostávame

$$E_iE_j\ \sigma_j^{\ 2}\ \delta_{ij} = \mathcal{E}\left\{\int_0^T f(\omega,t)\ \overline{b_i(t)}\ dt\ .\ \overline{\int_0^T f(\omega,t)b_j(t)\ dt}\right\}$$

a po prepise na dvojnásobný integrál

$$E_iE_j\ \sigma_j^{\ 2}\ \delta_{ij} = \int_0^T b_i(t_1)\int_0^T \mathcal{E}\left\{f(\omega,t_1).\overline{f(\omega,t_2)}\right\}\ b_j(t_2)\ dt_2dt_1$$

Porovnaním tohto vzťahu so vzťahom pre ortogonalitu bázických signálov

$$\int_0^T \overline{b_i(t_1)}\ b_j(t_1)\ dt_1 = E_i\ \delta_{ij}$$

dostávame

$$b_j(t_1)E_j\,\sigma_j^{\,2} = \int_0^T \mathcal{E}\left\{ f(\omega,t_1)\overline{f(\omega,t_2)} \right\} b_j(t_2)\, dt_2$$

alebo po preznačení $\lambda_j = E_j\,\sigma_j^{\,2}$, $t_1 = t$, $t_2 = \tau$ a zavedení kovariančnej funkcie

$$\lambda_j b_j(t) = \int_0^T R(t,\tau)\, b_j(\tau)\, d\tau \quad , \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Čísla λ_j a funkcie $b_j(t)$, ktoré vyhovujú tejto integrálnej rovnici voláme vlastnými číslami a vlastnými funkciami operátora, ktorý je touto integrálnou rovnicou daný. Podotýkame, že kovariančná funkcia $R(t,\tau)$ musí byť spojitá. Ortogonálna množina vlastných funkcií teda vytvára bázu tak, že koeficienty rozkladu náhodného signálu do Fourierovho radu sú nekorelované. Tento rozklad voláme Karhunen-Loevovým rozkladom.

Podobnou úvahou môžeme nájsť bázické signály Karhunen-Loevovho rozkladu diskrétneho náhodného signálu $\mathbf{f} \in \ell_2(\Omega, \varphi, P)$. Definujme kovariančnú maticu

$$\mathbf{R} = (R_{ij})$$

kde

$$R_{ij} = \mathcal{E}\left\{ f(\omega,i) \,.\, \overline{f(\omega,j)} \right\}$$

Ak platí

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} R_{ij} < \infty \quad ,$$

potom existuje Karhunen-Loevov rozklad

$$f(\omega,k) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\omega)\, b_i(k)$$

kde $\mathbf{b}_i = (b_i(0), b_i(1), \ldots)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ sú vlastné vektory operátora, ktorý je daný vzťahom

$$\lambda_i b_i = \mathbf{R} \,.\, \mathbf{b}_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Karunen-Loevov rozklad má niektoré veľmi užitočné vlastnosti:

1. Ak vlastné čísla usporiadame nerastúco, t.j. $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$, potom prírastky k celkovému Fourierovmu radu od jednotlivých členov $\sqrt{\lambda_1}\, c_i(\omega)\, b_i(t)$ sú usporiadané tiež nerastúco

2. Chyba aproximácie signálu $f(\omega,t)$ konečným radom

$$f_N(\omega,t) = \sum_{i=0}^{N} \sqrt{\lambda_i}\, c_i(\omega)\, b_i(t)$$

je

$$d^2(f(\omega,t)f_N(\omega,t)) = \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i$$

3. Ak

$$f(\omega,t) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i(\omega)\, \varphi_i(t)$$

je rozklad do ortogonálnej bázy $\{\varphi_i(t),\ i = 0, 1, 2, \dots\}$ a Karhunen--Loevov rozklad je

$$f(\omega,t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\omega)\, b_i(t)$$

potom pre prirodzené číslo N platí

$$d(f(\omega,t) - \sum_{i=0}^{N} c_i(\omega)\, b_i(t)) \leq d(f(\omega,t) - \sum_{i=0}^{N} K_i(\omega)\, \varphi_i(t))$$

teda odhad náhodného signálu Karhunen-Loevovým konečným radom zabezpečuje minimálnu chybu.

4. Karhunen-Loevov rozklad sme uviedli pre nestacionárne náhodné signály, ako to vyplýva z použitého tvaru kovariančnej funkcie.

5. V stacionárnom prípade sa s predlžovaním časového intervalu, na ktorom je definovaný náhodný signál sa bázické signály Karhunen-Loevovho rozkladu približujú ku komplexným harmonickým signálom.

Pri rozklade deterministických signálov do Fourierovho radu sme koeficienty rozkladu volali spektrom signálu. Parsevalovu rovnosť sme mohli interpretovať ako zachovanie energie v spektrálnej oblasti. Aby sme u náhodných signálov dostali analogický pojem, postupujeme obrátene: vypočítajme strednú energiu náhodného signálu, ktorý je daný rozvojom do ortogonálneho radu a na jej základe definujme pojem spektra.

Ak systém $\{b_i(t),\ t \in T,\ i = 0, 1, 2, \dots\}$ je ortogonálnou bázou priestoru $L_2(0,T)$ a $f(\omega,t) \in L_2(\Omega, \mathcal{Y}, P)$ má Fourierov rad

$$f(\omega,t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\omega)\, b_i(t)$$

potom stredná hodnota jeho energie bude

$$\mathcal{E}\left\{\int_0^T |f(\omega,t)|^2\, dt\right\} = \mathcal{E}\left\{\sum_{i=1} c_i(\omega)\, b_i(t)\ \overline{\sum_{i=0}^{\infty} c_i(\omega)\, b_i(t)}\right\} =$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}\left\{c_i(\omega)\,\overline{c_j(\omega)}\right\} b_i(t)\,\overline{b_j(t)}\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} E_i\, \sigma_i^2$$

Na základe tejto Parsevalovej rovnosti budeme postupnosť čísel $\{E_i\ \sigma_i^2,\ i = 1, 2, \dots\}$ volať spektrom energie náhodného signálu $f(\omega,t)$ v báze $\{b_i(t),\ i = 1, 2, \dots\}$. Ak za bázické signály zvolíme funkcie Karhunen-Loevovho rozkladu, potom ako sme videli $E_i\ \sigma_i^2 = \lambda_i$ a teda spektrum energie náhodného signálu je dané vlastnými číslami kovariančnej funkcie náhodného signálu.

Ak poznáme kovariančnú funkciu náhodného signálu a bázické signály Karhunen-Loevovho rozkladu, potom spektrum energie určíme (dokážte) podľa vzťahu

$$i = \frac{1}{E_i}\int_0^T\int_0^T R(t_1,t_2)\, b_i(t_2)\, b_i(t_1)\,\overline{b_i(t_2)}\, dt_1\, dt_2\ ,\ i = 1, 2, \dots$$

Ak poznáme spektrum energie a bázické signály Karhunen-Loevovho rozkladu, potom kovariančná funkcia bude

$$R(t_1,t_2) = \mathcal{E}\left\{f(\omega,t_1).\overline{f(\omega,t_2)}\right\} =$$

$$= \mathcal{E}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} c_i(\omega)\, b_i(t_1) \sum_{i=1}^{\infty}\overline{c_i(\omega)\, b_i(t_2)}\right\} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{E}\left\{c_i(\omega)c_j(\omega)\right\}$$

$$b_i(t_1).\overline{b_j(t_2)}$$

teda

$$R(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2\, b_i(t_1)\,\overline{b_i(t_2)}$$

Pre stacionárny náhodný signál závisí kovariančná funkcia len od rozdielu $t_1 - t_2$. Ak zvolíme $t_2 = 0$ a označíme $t_1 = t$, potom

$$R(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2\,\overline{b_i(0)}\, b_i(t)$$

Pre rozklad kovariančnej funkcie do bázy $\{b_i(t)\ ,\ i = 1, 2, \dots\}$ platí

$$R(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, b_i(t)$$

Porovnaním týchto dvoch vzťahov dostávame spektrum kovariančnej funkcie v báze Karhunen-Loevovho rozkladu

$$c_i = \sigma_i^2 \overline{b_i(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Spektrum energie náhodného signálu v báze $\{ b_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots \}$, ktoré je dané vlastnými číslami

$$\lambda_i = E_i \, \sigma_i^2$$

môžeme určiť pomocou spektra korelačnej funkcie

$$\lambda_i = \frac{E_i}{\overline{b_i(0)}} \, c_i$$

pre $\overline{b_i(0)} \neq 0$.

Ako sme uviedli vo vlastnostiach Karhunen-Loevovho rozkladu, pri veľkých hodnotách T sa blížia bázické signály ku komplexným exponenciálnym signálom. Tak dostávame súvis Karhunen-Loevovho rozkladu stacionárneho náhodného signálu so spektrálnou výkonovou hustotou, ako ju zavádza nasledujúca veta.

Veta: Wiener-Chinčinova veta

Spojitá funkcia $R(t)$ je kovariančnou funkciou spojitého náhodného signálu práve vtedy, ak sa dá vyjadriť v tvare

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) \, e^{-j\omega t} \, dt \, d\omega$$

Po rozpísaní tohto vzťahu na

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \, e^{j\omega t} \, d\omega$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t) \, e^{-j\omega t} \, dt$$

budeme reálnu funkciu $S(\omega)$ volať spektrálnou výkonovou hustotou.