Systémy obyčajných diferenciálnych rovníc

Systém lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientmi

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

6. decembra 2011

Systém lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu s konštantnými koeficientmi

Budeme sa zaoberať systémom rovníc v tvare

$$\begin{array}{l} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{array} \qquad (1)$$

alebo maticovo

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(x).$$

Ak $\mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{0}$, tak systém nazývame homogénny.

Fundamentálny systém riešení

Každý systém n lineárne nezávislých riešení systému $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ nazývame fundamentálny systém riešení.

Ak $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ je fundamentálny systém riešení systému $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, tak každé riešenie tohto systému je možné písať v tvare

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n.$$

Reálne jednoduché vlastné hodnoty

Nech matica A má n rôznych reálnych vlastných hodnôt $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Potom existuje n lineárne nezávislých vlastných vektorov tejto matice $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$.

Fundamentálny systém riešení potom tvoria riešenia

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{h}_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathbf{y}_2 = \mathbf{h}_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \dots, \mathbf{y}_n = \mathbf{h}_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n x}\,.$$

a každé riešenie možno písať v tvare

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{h}_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathbf{h}_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots c_n \mathbf{h}_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n x}\,.$$

Príklady

1. $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 4y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 12y_1 - y_2 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= 5y_1 - 4y_2 \end{aligned}$$

Komplexné jednoduché vlastné hodnoty

Ak je $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\,\omega$ vlastná hodnota, tak aj komplexne združené číslo $\overline{\lambda} = \sigma - \mathrm{i}\,\omega$ je vlastnou hodnotou.

Označme vlastný vektor zodpovedajúci vlastnej hodnote λ ako $\mathbf{g} + \mathrm{i}\,\mathbf{h}$.

Dvojici vlastných hodnôt λ a $\overline{\lambda}$ potom zodpovedajú lineárne nezávislé riešenia

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\mathbf{g}\cos\omega x - \mathbf{h}\sin\omega x)\,\mathrm{e}^{\sigma x} \\ \mathbf{v} &= (\mathbf{g}\sin\omega x + \mathbf{h}\cos\omega x)\,\mathrm{e}^{\sigma x} \end{aligned}$$

Príklady

1. $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= -3y_1 + y_2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}$$

Viacnásobné vlastné hodnoty

Nech matica A má k–násobnú vlastnú hodnotu λ. Ak existuje k lineárne nezávislých vlastných vektorov tejto matice zodpovedajúcich λ, postupujeme rovnako ako pri jednoduchých vl. hodnotách.

Ak je m vlastných vektorov lineárne závislých, definujeme reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ rovnicami:

$$
\begin{aligned}
(A - \lambda E)\mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \\
(A - \lambda E)\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 \\
\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\dots \\
(A - \lambda E)\mathbf{v}_m &= \mathbf{v}_{m-1}
\end{aligned}
$$

Viacnásobné vlastné hodnoty

Ak $\xi_1, \dots, \xi_m$ je reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov, zodpovedajúcich vlastnej hodnote λ, tak zodpovedajúce lineárne nezávislé riešenia sú:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \xi_1 \, \mathrm{e}^{\lambda x} \\
\mathbf{w}_2 &= (\xi_2 + \xi_1 x) \, \mathrm{e}^{\lambda x} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{w}_m &= \left(\xi_m + \tfrac{1}{1!}\xi_{m-1} x + \cdots + \tfrac{1}{(m-1)!}\xi_1 x^{m-1}\right) \mathrm{e}^{\lambda x}
\end{aligned}
$$

Príklady

1.

$$\begin{aligned} y_1' &= & & y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 & & + y_3 \\ y_3' &= y_1 &+& y_2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 & & \\ y_2' &= & - y_2 &+ 4y_3 \\ y_3' &= y_1 & &- 4y_3 \end{aligned}$$

Nehomogénny systém

Metóda variácie konštánt

Uvažujme nehomogénny systém:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{aligned} \tag{2}$$

Nech funkcie $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ tvoria fundamentálny systém riešení príslušného homogénneho systému

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{3}$$

Nehomogénny systém

Metóda variácie konštánt

Partikulárne riešenie $\mathbf{y}_p = (y_{1p}, y_{1p}, \ldots, y_{1p})$ určíme v tvare

$$\begin{array}{l} y_{1p} = C_1(x)y_{11} + C_2(x)y_{21} + \ldots + C_n(x)y_{n1} \\ y_{2p} = C_1(x)y_{12} + C_2(x)y_{22} + \ldots + C_n(x)y_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{np} = C_1(x)y_{1n} + C_2(x)y_{2n} + \ldots + C_n(x)y_{nn} \end{array} \tag{4}$$

Funkcie $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ volíme tak, aby vyhovovali systému rovníc

$$\begin{array}{l} f_1(x) = C_1' y_{11} + C_2' y_{21} + \ldots + C_n' y_{n1} \\ f_2(x) = C_1' y_{12} + C_2' y_{22} + \ldots + C_n' y_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = C_1' y_{1n} + C_2' y_{2n} + \ldots + C_n' y_{nn} \end{array} \tag{5}$$

Príklady

1.
$$\begin{aligned} y_1' &= \phantom{-y_1 +{}} y_2 + \cos x \\ y_2' &= -y_1 \phantom{{}+ y_2} + 1 \end{aligned}$$