**B01:** Hovoríme, že funkcia f ma v bode $x_0$ derivaciu, ak existuje (aj nevlastná) limita lim(x - > x0)(f(x) – f(x0))/(x – x0) = lim (h - > 0) (f( x0 + h) –f(x0) / h ktorú označujeme f′($x_0$), resp. f′(x)|x=$x_0$ a nazývame derivacia funkcie f v bode $x_0$. Podľa toho, či je limita vlastná alebo nevlastná, hovoríme o vlastnej alebo nevlastnej derivacii funkcie f v bode $x_0$. Nech f je funkcia definovaná v nejakom ľavom okolí bodu x0∈D(f). Hovoríme, že funkcia f ma v bode $x_0$ derivaciu zľava, ak existuje limita

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ktorú nazývame derivacia funkcie f zľava v bode $x_0$. Nech f je funkcia definovaná v nejakom pravom okolí bodu $x_0$∈D(f). Hovoríme, že funkcia f ma v bode $x_0$ derivaciu sprava, ak existuje $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, ktorú nazývame derivacia funkcie f sprava v bode $x_0$. Deriváciu zľava a sprava súhrnne nazývame jednostranne derivacie funkcie f v bode $x_0$ a deriváciu nazývame obojstrannou derivaciou funkcie f v bode $x_0$. Uvažujme reálnu funkciu y = f(x). Označme M ⊂ D(f) množinu všetkých bodov, v ktorých má funkcia f (konečnú) deriváciu. Ak M ≠∅, potom môžeme definovať pre všetky $x_0$∈M funkciu g vzťahom g($x_0$) = f′($x_0$). Funkciu g nazývame derivacia funkcie f na množine M a označujeme f′, y′, resp. y = f′(x), x∈M, resp. df/ dx, dy/ dx. Ak má funkcia f na množine M deriváciu f′, potom je na množine M spojitá.

**B02:** Nech majú funkcie f, g derivácie na množine M≠∅ a nech c∈R. Potom existujú derivácie funkcií cf, f±g, fg na množine M a derivácia funkcie f/g na množine $M_1$ = {x∈M ; g(x)≠0}. Navyše pre všetky x∈M, resp. x∈$M_1$ platí: (cf)‘(x) = cf‘(x); (f + - g)‘ (x) = f‘(x) + - g‘(x); (fg)‘ (x) = f‘(x)g(x) + f(x) g‘(x); [f/g]‘ (x) = (f‘(x)g(x) – f(x)g‘(x)) / (g^2(x)) ; Nech y = f(x) je spojitá a rýdzomonotónna funkcia na intervale I ⊂ R. Nech $x_0$ je vnútorný bod intervalu I a nech existuje f′($x_0$)≠0. Označme $y_0$ = f($x_0$). Potom inverzná funkcia x = $f^{-1}$(y) má deriváciu v bode $y_0$ a platí $[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\Big|_{x_0 = f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Nech F(x) = g(f(x)), x∈M ⊂ R je zložená funkcia s vnútornou zložkou u = f(x), x∈M a vonkajšou zložkou y = g(u), u∈$M_1$, kde f(M) ⊂ $M_1$. Nech $x_0$∈M, $u_0$ = f($x_0$). Ak existujú derivácie f′($x_0$), g′($u_0$), potom tiež existuje derivácia F′($x_0$) a platí F′($x_0$) = [g(f($x_0$))]′ = g′(f($x_0$)) · f′($x_0$) = g′($u_0$) · f′($x_0$).

Nech y = f(x), x∈M je reálna funkcia. Nech $x_0$∈M je také, že existuje f′($x_0$). Ak f($x_0$) > 0, potom platí f′($x_0$) = f($x_0$) · [ln f($x_0$)]′. Vzorce [a^x] = a^x ln a; [loga x]= 1/x ln a; [sin x] = cos x; [cos x] = -sin x; [ln x] = 1/x; [arcsin x] = 1/(1-x^2)^1/2; [arcos x] = -1/ (1-x^2)^1/2; [arctg x] = 1/ (x^2 + 1); [arccotg x]  = -1/(y^2 + 1);

**B03:** Nech y = f(x), x∈M je reálna funkcia a nech $x_0$∈M je vnútorný bod. Hovoríme, že funkcia f ma v bode $x_0$ diferencial, ak existuje lineárna funkcia λ(h) = ah, h∈R taká, že platí vzťah. Lineárnu funkciu λ nazývame diferencial funkcie f v bode $x_0$ a označujeme symbolom df($x_0$). Ak má funkcia f diferenciál v bode $x_0$, potom ju nazývame diferencovateľna funkcia v bode $x_0$. Využitie pri výpočte približnej chyby. Nech f je diferencovateľna funkcia v bode x0. Nech c∈R je take, že c /=f′(x0). Označme *fi*: y= f(x0) + c(x – x0); g: y = f(x0) + f’(x0)(x – x0).

Potom existuje prstencove okolie P(x0) take, že pre všetky x∈P(x0) plati |f(x) – g(x)| < |f(x) - *fi*(x)|

**B04(Derivácie vyšších rádov):** Nech ma funkcia y = f(x), x∈M derivaciu na neprazdnej množine M1 ⊂ M. Ak ma funkcia y = f′(x), x∈M1 derivaciu [f′]′ na

nejakej neprazdnej množine M2 ⊂ M1, potom ju nazyvame derivácia druhého rádu (druhá derivácia) funkcie f na množine M2 a označujeme f′′, resp. f(2). To znamena, že [f′]′ = f′′ = f(2). Ak ma funkcia y = f′′(x), x∈M2 derivaciu na neprazdnej množine M3 ⊂ M2, potom ju nazyvame derivácia tretieho rádu (tretia derivácia) funkcie f na množine M3 a označujeme [f′′]′ = f′′′ = f(3). Takto možeme pokračovať pre n∈N, n≥2. Predpokladajme, že sme tymto sposobom definovali derivaciu funkcie f radu n−1 na neprazdnej množine Mn−1, ktoru označime f(n−1). Ak ma tato funkcia derivaciu na neprazdnej množine Mn ⊂ Mn−1, potom ju nazyvame derivácia n-tého rádu (n-tá derivácia) funkcie f na množine Mn a označujeme [f(n−1)]′ = f(n). **Leibnizov vzorec:** Nech n∈N a nech maju funkcie f, g na množine M derivacie do radu n vratane. Potom pre n-tu derivaciu [fg](n) na množine M plati

$$[fg]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}$$

Nech ma funkcia y = f(x), x ∈ M vo vnutornom bode x0 ∈ M konečnu n-tu derivaciu f(n)(x0). Potom polynom n-teho stupňa *fi*(h) = f(n)(x0)$h^n$, h ∈ R nazyvame diferenciálom n-tého rádu (n-tým diferenciálom) funkcie f v bode x0 a označujeme symbolom $d^n$f(x0, h), resp. $d^n$f(x0). **Parametricky:** Nech x = *fi*(t), y =  *psi*(t) su funkcie definovane na realnom intervale J. Nech na J existuju derivacie *fi*′,  *psi*′, pričom *fi*′ je na J spojita. Nech pre všetky t∈J plati *fi*′(t) /=0. Potom system rovnic x = fi(t), y =  psi(t), t∈J určuje funkciu f: y = f(x) = *psi* (*fi na minus prvu*(x)), x∈*fi*(J)    ktora ma na intervale fi(J) derivaciu

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \text{pričom} \ \ t = \varphi^{-1}(x).$$

Ak je funkcia psi’ spojita na J, potom je funkcia f’ spojitá na intervale fi(J). **Implicitne**: Nech je funkcia f definovana implicitne rovnicou F(x, y) = 0, kde y = f(x). Uvedieme vzťah pre vypočet derivacie f′(x).

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{\dfrac{\mathrm{d}F_x(x,y)}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}F_y(x,y)}{\mathrm{d}y}} = -\frac{\mathrm{d}F_x(x,y)/\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}F_y(x,y)/\,\mathrm{d}y}.$$

**B05(Aplikácie diferenciálneho počtu): Rolleho** – Nech pre funkciu f definovanú na uzavretom interval <a ; b> platí: 1. Je spojitá na <a ; b> 2. Má deriváciu (aj nevlastnú) na (a,b), 3. f(a) = f(b). Potom existuje aspoň jeden bod c∈<a ; b> taky, že f’(c) = 0. **Lagrangeova**: Nech pre funkciu f definovanu na uzavretom intervale <a ; b> plati: 1. Je spojitá na interval <a ; b>, 2. Má deriváciu aj nevlasntnú na interval (a ; b). Potom existuje aspoň jeden bod c∈(a ; b) taky, že plati $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{t.j.} \ \ f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$ **L’Hospital** - Nech pre funkcie f, g definovane v nejakom prstencovom okoli P(a) bodu a∈R* plati: 1. pre všetky x∈P(a) existuju konečne derivacie f′(x), g′(x), pričom g′(x) /=0, 2. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0,$ 3. existuje limita $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$ Potom existuje limita $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí rovnosť $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$

**B06(Taylorov polynóm):** Predpokladajme, že ma funkcia f v bode x0∈R konečne derivacie do radu n∈N vratane. To znamena, že funkcia f ma v bode x0
diferencialy radov 1, 2, . . . , n. Funkciu f chceme v nejakom okoli O(x0) bodu x0 aproximovať polynomom: $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n, \quad a_0,a_1,\ldots,a_n\in R$ tak, aby chyba aproximacie Rn(x) = f(x) − Tn(x) bola minimalna, t.j. aby platilo: $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$ Pre x0 = 0 (stred v bode 0) ma Taylorov polynom funkcie f tvar $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\ x\in O(0)$ a nazyva sa **Maclaurinov polynóm** stupňa

(najviac) n funkcie f. Maclaurin pre sin x: $T_{2k+1}(x)=0+\frac{x}{1!}+0+\frac{-x^3}{3!}+0+\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}, \quad x\in R.$ Maclaurinov polynom pre cos x: $T_{2k}(x)=1+0+\frac{-x^2}{2!}+0+\frac{x^4}{4!}+0+\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}, \quad x\in R.$ Maclaurinov polynom pre e^x: $T_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}, \quad x\in R$

**B07(Priebeh funkcie):** Monotónnosť: rastúca ⬄ pre každé x na I: f’(x)>0; klesajuca ⬄ pre každé x na I: f’(x)<0; nerastuca f‘(x)<= 0; neklesajuce f‘(x)>= 0;Postacujuca podmienka existencie lok. Extremu x0∈D(f),f‘(x0) = 0 (t.j. stacionarny bod). Nech existuje O(x0) take, ze pre kazde x ∈ O(x0) plati 1. f’(x)>0 pre x < x0, f’(x)<0 pre x0<x => f(x0) je ostre lok. Max (t. j. V bode x0 je ostre lok. max.). 2. f’(x)<0 pre x < x0, f’(x)>0 pre x0<x => f(x0) je ostre lok. max. 3. f’(x)>0 pre x + x0, resp. f’(x)<0 pre x/=x0; x0∈ D(f) f’’(x0) < 0 => V bode x0 je lok. Max. f’’ (x0) > 0 => V bode x0 je lok. Min.; pre kazde x ∈ I existuje f’’(x) >= 0 konvexna, f’’(x) <= 0 konkavna, f’’(x) > 0 rydzokonvexna, f’’(x) > 0 rydzokonkavna; Bod x0∈ D(f) sa nazyva inflexny bod, ak existuje okoli O(x0) take, ze pre vsetky x ∈ O(x0), x /=x- je funkcia konvexna (konkavna), pre vsetky x ∈ O(x0), x /= x0, x/=x0 je konkavna (konvexna); 1. x0 je inflexny bod => f’’(x0) = 0 (pokial existuje), 2. f’’(x0) = 0, f’’’(x0) /= 0 => x0 je inflexny bod; n = 2k (k ∈ Z) f(n) (x0)<0... Lok. Max. F(n) (x0)>0... Lok. Min.; Asymptota bez smernice existuje ak aspon jedna z limit je nevlastna; asymptota so smernicou ak $\lim_{n\to +-\infty}(f(x) - kx - g) = 0$

**B08(Neurcity integral)**: - nech I je otvoreny (D(f)) hovorime, ze funkcia F(x), x€I je primitivnou funkciou k funkcii f(x), x€I ak pre vsetky x € I existuje F(x) = f(x). f(x), x€I je konstantna ⬄ pre vsetky x € I: f(x) = 0; F(x) je derivacia k f(x na I c € R (konstanta) = > G(x) = F(x) + c je primitivna funkcia k f(x) na f. F(x), G(x) su primitivne funkcie k f(x) na intervale I => F(x) – G(x) = konst. na I. Ak I nie je interval veta nemusi platit. Nie kazda funkcia ma primitivnu funkciu Napr. f(x) sgn X (signum albis), x€R nema primitivnu funkci, ale f(x) = sgn x, x €(0, ∞) ma primitivnu funkciu. Int f(x) dx = F(x) + c, x € I, c € R (int zaciatok integralu(integracny znak); f – integracna funkcia; (x) – integracna premenna; dx – koniec integralu (diferencial x); F(x) – primitivna funkcia; c – integracna konstanta). Derivovanie a integrovanie su inverzne operacie: pre vsestky x € I: [int f(x) dx]‘ = [F(x) + c]‘ = F‘(x) + c‘ = f(x); pre vsetky x€I: int F‘(x) dx = int f(x) dx = F(x) + c; Ak f(x) je spojita na intervale I => existuje int f(x) dx, x € I. Vzorce: int x^a dx = x^(a+1)/(a+1); int dx/x = ln|x| + c; int e^ax dx = e^(ax)/a +c; int a^x dx = a^x dx = a^x / ln a + c; int sin x dx = -cos x + c; int cos x dx = sin x + c;

**B09(Zakladne metody):** Metoda rozkladu: a, b € R, a^2 + b^2 > 0, I je interval (resp. |a|+|b| > 0) int f(x) dx = F(x) + c1, int g(x) dx = G(x) + c2 => int [af(x) + bg(x)] dx = a int f(x) dx + b int g(x) dx = a F(x) + bG(x) + c; Per partes (po castiach) u‘(x), v‘(x) su spojite na intervale I = > int u‘(x).v(x) dx – u(x).v(x) – int u(x). v‘(x) dx, x € I; Metoda substitucie f(x) je spojita na intervale I oznacme X = *fi*(t), t€J pricom *fi*(J) *U-napravo*I, *fi*‘(t) je spojita na J (postaci spojitost, rastucost resp. klesajucost *fi*(t) na J) => int f(x) dx = int f(*fi*(t)). *fi*‘(t) dt kde t = *fi*(x); Kazda spojite funkcia ma primitivnu funkciu (t. j. neurcity integral), ale nie vsetkz sa daju vyjadrit ‚rozumne‘ v tvare elementarnych funkcii (int e^(-x^2) dx, int sin x / xdx, int dx/lnx;

**B10(Specialne metody):** parcialny (ciastocny zlomok je racionalna lomena funkcia) 1/(x-a)^n a€R, n€N, (x+q)/(x^2 + ax + b)^n, a,b, q € R, n €N, x €R a^2 – 4b < 0; int dx/(x-a)^n => sub: x-a = t => dx = dt => int dt/t^n...; integral typu int f (x, ((ax + b)/(cx + d))^1/2)dx => sub: t = ((ax +b)/(cx+d))^1/2 => t^n = (ax + b) / (cx + d)=>ax + b, a + d su linearne nezavisle, t. j. det(abcd-do stvorca) /= 0 => t^n(cx + d) = ax + b => x = (dt^n – b) / (a – ct^n); dx = ((dt^n – b) / (a – ct^n))‘ dt – Dostaneme racionalne ladenu funkciu; Vzorce int sin ax dx = -(cos ax)/(a) + c; int cos ax dx = (sin ax)/(a) + c; int e^ax P(x) dx; int sin(ax).P(x)+cos(ax).Q(x) – pouzije sa per partes alebo tzv. metoda neurcitych koeficientov (odhadneme vysledok a dopocitame koeficienty) priklad int x^2 e^(2x)dx = e^(2x) (Ax^2 + Bx + C) + c; int x^2 cos 2x dx = cos 2x (Ax^2 + Bx + C) + sin 2x(Dx^2 + Ex + F).

**B11(Euler)**: Integral typu f(x, (ax^2 + bx + c)^1/2)dx. Pouzivaju sa eulerove substitucie, ktore su avsak velmi pracne. 1. Eulerova sub.: (ax^2 + bx + c)^1/2 = t + - a^1/2 x pre a > 0; 2. Eulerova sub.: (ax^2 + bx + c)^1/2 = xt + - c^1/2 pre c > 0; 3. Eulerova sub.> t = (a – (x - alfa)/(x - beta))^1/2, kde alfa, beta € R su korene ax^2 + bx + c = 0; Integral typu int f(sin x, cos x) dx. Univerzalna goniometricka substitucia t = tg x/2 => x = 2 arctg t => dx = 2/(1 + t^2) dt; sin x = 2t / (t^2 + 1); cos x = (1-t^2)/(t^2 + 1)

**B12:** krivočiary lichobežník určený f-ciou f(x) spojitá na int.<a,b>; M={(x,y) partí RxR, x patri<a,b>,0<=y<=f(x)}; P je plocha; <a,b> rozdelíme na n-patrí-N rovnakých integrálov s dĺžkou deltax=(b-a)/n; <x0,x1><x1,x2>...<xn-1,xn>; a=x0<x1<x2<...xn-1<xn=b; $m_i$´=nim{f(x), x-patrí-<xi-1,xi>} i= 1,2 ,...,n; $M_i$=max{ f(x), x-patrí-<xi-1,xi>}; sučet(od i=1, po n) $m_{i*delta}$x<=P<= sučet(od i=1, po m)Mi*deltax; pre n ->nekonecna vyplýva: delat x= (b-a)/n cely zlomok ide k 0; Sd->P<-Sh(integralny sucet dolny,horny);; delením intervalu<a,b> je kazda konecna mnozina D=$D_{<a,b>}$={x0,x1,x2...xn}=$\{xi\}_{i=0}^{n}$, kde ax0<x1<x2..<xn=b, n parti N, x0,x1,x2 su deliace body(jednoznačné určujú delenie) $d_i$=<$x_{i-1}$,xi> : čiastočné intervaly, delta xi = xi-xi-1 – dlzka intervalu, mju(D)=max{delta xi, i=1,2,,...n} – norma delenia; velke pisane D<a,b>={D,D je delenie<a,b>}mnozina vsetkych deleni intervalu <a,b>; delenie D* je zjemnenie delenia D, D,D* parti velke pisane D<a,b> ak plati Dje podmnozina D*;napr. D={a,x1,x2,...xn,b} ma zjemnenie D*={a,x1,(x1+x2)/2,x2, ...,xn-1,b}; ;f je ohranicena D,D* parti velke pisane D<a,b>, Dje podmn.D* na <a,b>, m=inf{f(x),xparti<a,b>}, M=sup{f(x),xparti<a,b>} z m a M vyplyva: Sd(f,D) <= Dd(f,D*) <=Sh(f,D*)<=Sh(f,D)(f,D<=M(b-a);integral dole a, hore b s vodorovnou ciarou F(x)dx = inf{Sh(f,D), Dparti velke pis. D<a,b>} – horny; integral dole a s ciarou pod, hore b, f(x)dx = sup{Sd(f,D),D patri velke pis.D<a,b>}– dolny; z horneho a dolneho vyplyva: riemannov integral Fcie f na <a,b>;; ak plati rovnost integral dole a s ciarou hore b, f(x)dx=integral dola a hore b s ciarou f(x)dx = integral hore b dole a f(x)dx; ak existuje integral hore b dole a f(x)dx....f sa nazyva riemannovsky integrovatelna fcia na <a,b> ozn. f patri R<a,b>;; nech D patri pisane D<a,b>, $t_i$ patri <xi-1,xi>, potom S patri (f,D) = sucet dole i=1 hore n f(ti)*deltaxi – riemannov integralny sucet fcie f na <a,b> pri deleni D a volbe bodov t=(t1,t2,...tn), je zrejme, ze pre lubovolnu volbu bodov t plati $integral_D$(f,D) <= $int_t$(f,D) <=$int_H$(f,D), t.j. lim n do nekon. $Int_t$(f,D) = int dole a hore b f(x)dx, pokial existuje;

**B13:** int dole a hore b f(x) dx geometricky predstavuje plochu krivociareho lichobeznika urceneho fciu f na <a,b>, pod osou x je plocha zaporna; 1. f je spojita na <a,b> vyplyva f patri R<a,b>, 2. f je monotonna na <a,b> vyplyva f patri R <a,b>;; f,g patri R<a,b>, c patri R z toho vyplyva f+-g, c*f, f*f, f*g, f v absolutnej, f/g patria R<a,b> pricom f/g =! 1/0; f patri R<a,b>, g je spojita na f<a,b> z toho vyplyva g(f) patri r<a,b>; f,g patri R<a,b> z toho vyplyva 1. kazde x patriace <a,b>: f(x) >=0 vyplyva int dola a hore b f(x)dx>=0, 2. kazde x patri<a,b>: f(x) <= g(x) vyplyva int dola a hore b f(x)dx<= int hore b dole a g(x)dx, podtym: 0<=g(x) – f(x) vyplyva 0 <= int dole a hore b [g(x) – f(x)]dx = int hore b dole a g(x)dx – int hore b dole a f(x)dx; aditivnost: f patri R<a,b> vyplyva kazde c patri <a,b> * f patri R<a,c>, f patri R<c,b> a plati int hore b dola a f(x)dx = int hore c dole a f(x)dx + int hore b dole c f(x)dx, plati aj ked c nepatri <a,b>; spec. Definujeme: int dole a hore a f(x)dx = 0 pre vsetky a patriace R a kazde Fcie f; pre b<a int dole a hore b f(x)dx = - int dole b hore a f(x)dx;;

**B14:** f patri R<a,b> fcia:G(x)= int hore + dole a f(t)dt, xpatri <a,b> sa nazyva integral ako fcia hornej hranice, G(b) = int hore b dole a f(t)dt = int hore b dole a f(x)dx, G(b) = int hore a dole a f(t)dt = 0 a plati pre nu veta 76: f patri R<a,b>, G(x) = int hore + dole a f(t)dt, s patri <a,b> : G(x) je primitivna fcia k f(x) na <a,b>, tj. Kazde x patri <a,b>: G'(x) = f(x) [int hore + dole a f(t)dt]' (derivacia) = f(x), dôsledok ak f(x) je primitivna fcia fcia k f(x) na <a,b> z toho vyplyva existuje take c patriace R: f(x) = G(x)+c = int hore +dole a f(t)dt +c, Newton-Leibniz: f(x) patri R<a,b>; F(x) je primitivna fcia k f(x) na <a,b>, int hore b dole a f(x)dx=F(b) – F(a) = [F(x)] hore b dole a = F(x) \ hore b dole a, dokaz: F(b)-F(a) = G(b)+c-(G(a)+c)=G(b)-G(a) = int hore b dole a f(x)dx-0=int hore b dole a f(x)dx;; per partes: u', v', su spojite na <a,b> vyplyva int dole a hore b u'(x)*v(x)dx = [u(x)*v(s)]dole a hore b – int hore b dole a u(x)*v'(x)dx, substitucia: f(x) je spojita na <a,b>, x= fi(t), t patri <α,β>, pricom fi(α)=a, fi(β)=b, kazde t patri <α,β>: a<=α(t)<=b, fi'(t) je spojita <α,β> z tohto vsetkeho vyplyva: int dole a hore b f(x)dx = int hore beta dole alfa f(fí(t))*fi'(t)dt;; parna, neparna: po PRVE: f je spojita na <a,b>, int dole a hore b f(x)dx = [sub. x=-t , dx=-dt , f(x) = f(t), x=a vtedy a len vtedy t=-a, x=b vtedy a len vtedy t=-b] = - int hore –b dole –a f(-t)dt = int hore –a dole –b f(-t)dt dve sipky parna *1, neparna*2, *1: = int hore –a dole a f(t)dt = int hore –a dole –b f(x)dx, *2: =-int hore –a dole –b f(t)dt = - int f(x)dx; po DRUHE: f je spojita na <a,b>, a>0: int hore a dole –a f(x)dx = int hroe 0 dole –a f(x)dx + int hore a dole 0 f(x)dx = dve sipky *1: parna, *2 neparna: *1: =int hore a dole 0 f(x)dx + int hore a dole 0 f(x)dx = 2 int hore a dole0 f(x) dx (rovnake plochy sa scitaju); *2: = - int hore a dole0 f(x)dx + int hore a dole 0 f(x)dx =0(opacne plochy sa eliminuju);;

**B15:**numericke integrovanie: f patri R<a,b>, n patri N ... pocet deliacich bodov $D_n$={a=x0,x1,x2...sn=b}= $\{a+i*(b-a)/n\}^n$ patri $D_{<a,b>}$, $\Delta x_i=\Delta x$ =(b-a)/n, i=1,2,..n(rovnako dlhe integraly), pre n iduce do nek. vyplýva delta x = (b-a)/n ide k nule, pre i=0,1,2...n ozn. yi=f(xi); <u>obdĺžniková metóda</u>: f aproximujeme obdlzniky na <a,b> pomocou $S_t$ amus=ixatled(it)f n eroh ,1=i elod tecus =(nD,f)tS = :ydob evocnok eval :vobod ablov (.1 ;((nt)f)+...+(2t)f+(1t)f)n/(a-b) = (it)f n eroh 1=i elod amus x atled =x atled(it)f n eroh 1=i elod evarp ....it vobod ablov (.2 ;(1-ny...+1y+0 y)n/(a-b)(yknlv evd) antnelavivke ej xd(x)f a elod b eroh tni avylpyv 1-ny=(2t)f ,0y=(1t)f 'ak existuje f (.2+(.1 ;(ny...+2y+1 y)n/(a-b) yknlv xd(x)f a elod b eroh tni avylpyv ny=(nt)f,...,2y=(2t)f ,1y=(1t)f :ydob evonok(x) na <a,b>, existuje ε1<0 tak, ze kazde x patri <a,b>: │f'(x)│<=ε1 vyplyva chyba aproximacie $R^{O}_{n}$ (x) <= ε1 $(b-a)^2$/n; <u>lichobeznikova</u>: int hore b dole a f(x)dx ≈ (b-a)/n * (y1+2y2+2y3+...2yn-1+ yn)/2, ak existuje f''(x)na <a,b>, existuje ε>0 tak, ze kazde x<a,b>: f''(x)<=ε2, $R^{L}_{n}$(x)= ε2*$(b-a)^3$/12; simpsonova: n je parne, aproximuje sa parabolou(kvadratickou fciou): int dole a hore b f(x)dx ≈ (b-a)/n * (y0+4y1+2y2+4y3+...+2yn-2+4yn-1+yn) a ak existuje $f^{(4)}$(x) na <a,b>, existuje $\varepsilon_3$>0 kazde x parti<a,b>: │f(4)(x)│<= ε4 z toho vyplyva: $R^{S}_{n}$(x)<=ε4* $(b-a)^4$/180$n^4$;; chyby su pri kazdej metode oznacene R;

**B16:** int hore b dole a f(x)dx sa anzýva NEVLASTNY INT. vplyvom fcie, ak: lim f(x) x ide do a+ = -+ nekonecno, resp. lim f(x) x ide do b- = -+nekonecno; vplyvom hranice, ak: a=-+nek., resp. b=-+nek., a, a+,b,b- - singularne body(vplyvom fcie/ hranice); su 4 moznosti: vplyvom hranice <u>a=-+nek, b patri R</u> int dole -+nek. hore b f(x)dx=lim ε ide do +-nek., int hore b dole epsilon f(x)dx; <u>a patri R, b = +-nek,</u> int dole a hore +-nek. f(x)dx = lim. epsilon do +-nek, int hore epsilon dole a f(x)dx; vplyvom fcie: <u>a,b patria R, lim f(x) x ide do a+ = +-nek.</u>, int dole a hore b f(x) dx = lim epsilon do 0+ int dole a+ε horeb f(x)dx, <u>a,b patria R, lim x ide do b- f(x) = +-nek</u>., int dole a hore b f(x) dx = lim eps. do 0- int hore e – ε dole a f(x)dx;; nevlastny integral existuje prave vtedy, ak existuje limita na pravej strane int hore b dole a f(x)dx = tri moznosti 1.) a patri R nevlastny integral konverguje k cislu a; 2.) = +-nekonecno...diverguje do +-nek.; neexistuje osciluje,;; ak int hore b dole a │f(x)│dx patri R – konverguje absolutne;; a,b patri R zjednotenie +-nek. – ak ma int hore b dole a f(x)dx viac singularnych bodov: c1, c2 ...ck patria <a,b> potom zvolíme ľubovoľne body d1, d2 tak aby a <= c1<d1<c2<d2<...<ck-1<dk-1<ck<=b, a int b = a int c1 + c1 int d1 + c1 int c2 + c2 int d2 +...+ ckint dk-1 + b int ck – každý z týchto in ma iba jeden sing. bod, pôvodný int. exituje vtedy a len vtedy ak existujú všetky nove int. (pričom voľba bodov nemá vplyv na pôvodný int)

**B17:** ak ma int hore nek. dole – nek. f(x)dx iba dva sing. body +- nek., potom, pokial E lim epsilon ide do nek. int hore epsilon dole – epsilon f(x)dx = VP int hore nek. dole – nek. f(x) dx – cauchyho hlavna hotnoa integralu, ak ma int a b iba jeden sing. Bod, c patri (a,b) [nie c =!a alebo c=!b], potom (pokial E) lim eps. do 0+ [int hore c-ep. dole a f(x)dx + int hore b dole c+a f(x)dx] = VP int hore b dole a f(x) dx cauchyho hl. hod.;; veta 80: ak E int hore nek dole – nek. f(x)dx vyplyva E VP int hore nek. dole – nek. f(x)dx, resp. VP int horeb dole a f(x)dx a a rovnaju sa opacne tvrdenie neplati, VP moze E ale nevlastny int. nemusi E; veta 81: porovnavacie ktiretium: a, b patri R zjednotenie {+-nek} kazde x patri (a,b): 0<=f(x) <= g(x) vyplyva (pokial E)1.) int hore a dole a g(x)dx patri R vyplyva int hore b dole a f(x)dx patri R; 2.) int hore b dole a f(x)dx = nek. vyplyva int hore b dole a g(s)dx=nek.;; dosledok 1.) limitny tvar: kazde x patri(a,b): g(x)>0 resp. g(x)<0) a E nenulova konecna lim x ide ku s f(x)/g(x), f(x) a g(x) =!0, s je sing. bod int. pokial to vsetko plati a E, vyplyva int hore b dole a f(x)dx patri R vtedy a len vtedy int hore b dole a g(x)dx patri R a int hore b dole a f(x)dx=+-nek vetedy a len vtedy int hore b dole a g(x)dx = nek.;; dosledok 2.) kazde x patri (a,b): h(x) <= f(x) <= g(x) E int hore b dole a h(x)dx=int hore b dole a g(x)dx = I z celeho vyplyva E int hore b dole a f(x)dx=I;;

**B18:**obsah rovinneho utvaru:**A:** kazde x patri<a,b>: fx >=0, $P_f$=int hore b dole a f(x)dx; **B:**kazde x patri<a,b>: fx <=0, $P_f$=int hore b dole a [-f(x)]dx= int hore b dole a │f(x)│dx;; **C:**Pfg = Pf-Pg = a int b (f(x)-g(x))dx, pre kazde x patri<a,b>: f(x) >=g(x) >=0;; **D:** Pfg = Pf+c – P g+c = aint b (f(x)+c-g(x)+c)dx = a int b (f(x)-g(x))dx, kazde x patri(a,b): f(x)>=g(x) vyplyva f(x) – g(x) >=0 **E:** Pfg a int b │f(x) – g(x)│dx;; <u>f je zadana parametricky</u> x= fi(t) y=psi(t), t patri <alfa, beta> fi(alfa) =a, fi (beta)=b, ak bude fi(t), t patri <alfa, beta> rastuca / klesajuca( vyplyva prosta) vyplyva E inverzna fcia: t=$fi^{-1}$(x), x<a,b> a plati y= f(x)=psi(t)=psi[$fi^{-1}$(t)], t patri<alfa, beta>; sub: x=fi(t) vyplyva dx=fi'(t) dt, y= psi[$fi^{-1}$(t)]=psi(t) fi(alfa) = a, fi(beta) = b z toho vyplyva: a int b │f(x)│dx = alfa int beta │psi(t)$fi^{-1(t)}$│ dt;; dlzka krivky: y = f(x), x patri <a,b>, f' spojita na <a,b> , e= a int b sqrt((1+$[f'(x)]^2$)dx, parametricky: e = sqrt((1+$[(psi'(t))/((fi'(t))]^2$)│fi'(t)│dt = alfa int beta sqrt($[fi'(t)]^2$ + $[psi'(t)]^2$)dt, naspamat: sqrt(1+$[psi'/fi']^2$ │fi│= sqrt(((fi')+$(psi')^2$)/$(fi')^2$) * │fi'│=( (sqrt$(fi')^2$+$(psi')^2$)/│fi'│)* │fi│;;; povrch: S = 2 a int b │f(x)│*sqrt(1+$[f(x)]^2$)dx = 2pí alfa int beta psi (t) sqrt($[psi'(t)]^2$+$[psi'(t)]^2$)dt;; objem: v = 2pí a int b