5 K A N Á L

Kanálom voláme prostredie, ktoré sprostredkúva prenos zmien zo vstupu kanála na výstup kanála. Matematickým modelom kanála (ďalej skrátene kanálom) je transformácia z množiny vstupných signálov do množiny výstupných signálov kanála. Kanálom prenosu signálu sú teda aj ostatné bloky informačného reťazca: kóder zdroja, kóder kanála, dekóder kanála a dekóder prijímača. Pojem kanála je v tomto chápaní ekvivalentný s pojmom systému ako bol používaný v predmete Teória riadenia. V matematike tomuto chápaniu odpovedá pojem operátor.

Definícia:

Nech φ je signálový priestor vstupných signálov a φ' signálový priestor výstupných signálov. Zobrazenie $\mathcal{K}$ z priestoru φ do priestoru φ' sa nazýva kanálom $\mathcal{K}$.

Situácia sa podstatne zjednoduší, ak vstupné aj výstupné signály patria do signálových priestorov nad tým istým poľom a majú vlastnosť linearity.

Definícia:

Nech φ je signálový priestor vstupných signálov nad poľom $(F, \oplus, \odot)$ a φ' je signálový priestor výstupných signálov nad tým istým poľom. Kanál $\mathcal{K}$ voláme lineárnym, ak pre všetky $f_1, f_2 \in \varphi$ a $k \in F$ platí

$$\mathcal{K}(k(f_1+f_2)) = k \cdot \mathcal{K}(f_1) + k \cdot \mathcal{K}(f_2)$$

Ďalej budeme hovoriť, že kanál $\mathcal{K}$ je súčinom kanálov $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ (sériovým, resp. kaskádnym zapojením), ak $\mathcal{K}(f) = \mathcal{K}_1 [\mathcal{K}_2(f)]$. Budeme tiež hovoriť, že kanál $\mathcal{K}$ je súčtom kanálov $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ (paralelným zapojením), ak $\mathcal{K}(f) = \mathcal{K}_1(f) + \mathcal{K}_2(f)$.

Skutočné kanály majú k dispozícii na prenos signálu vždy len konečné množstvo energie. Pre kanály s touto vlastnosťou zavádzame nasledujúci pojem.

Definícia:

Nech φ, φ' sú po rade vstupný a výstupný signálový priestor. Kanál $\mathcal{K}$ voláme obmedzeným, ak existuje taká konečná konštanta $C > 0$, že pre všetky $f \in \varphi$ platí

$$\|\mathcal{K}(f)\| \leq C \|f\|$$

Infimum množiny všetkých čísel C s touto vlastnosťou voláme veľkosťou kanála $\mathcal{K}$ a označujeme $\|\mathcal{K}\|$.

Poznámka: Pripomíname, že $\|\mathbf{f}\|$ je veľkosťou signálu $\mathbf{f}$. V tomto texte predpokladáme, že všetky signály zo vstupného aj výstupného signálového priestoru majú konečnú veľkosť. Odtiaľ teda vyplýva, že predpokladáme, že kanál je obmedzený.

Najviac pozornosti budeme venovať kanálom nad reálnymi, resp. komplexnými signálovými priestormi. Pre tieto kanály zavedieme nasledujúci užitočný pojem.

Definícia:

Nech je daný kanál $\mathcal{K}$ nad reálnymi signálovými priestormi φ, φ' s metrikami d, d'. Kanál $\mathcal{K}$ voláme rovnomerne spojitým, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pre každé $\mathbf{f}_0 \in \varphi$ platí

$$d(\mathbf{f},\mathbf{f}_0) > \delta \Rightarrow d'(\mathcal{K}(\mathbf{f}), \mathcal{K}(\mathbf{f}_0)) < \varepsilon$$

Rovnomerná spojitosť kanála zaručuje (pozri [11]), že konvergentnej postupnosti signálov na vstupe bude odpovedať konvergentná postupnosť na výstupe kanála

$$\mathcal{K}(\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{K}(\mathbf{f}_n)$$

So spojitosťou však problémy mať nebudeme, pretože lineárny kanál je rovnomerne spojitý práve vtedy, keď je obmedzený (pozri [17]).

Pretože existuje viacero matematických modelov signálu (v časovej alebo spektrálnej oblasti), je prirodzené, že existuje aj viacero matematických modelov lineárneho kanálu. Popíšeme niektoré z nich.

5.1 POPIS ODOZVAMI NA BÁZICKÉ SIGNÁLY

Nech je daný lineárny obmedzený kanál $\mathcal{K}$ nad konečnorozmernými alebo Hilbertovými signálovými priestormi φ, φ'. Ak v priestore φ je daný signál $\mathbf{f}$ svojim Fourierovým radom

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{b}_n$$

a odozva kanála na bázický signál $\mathbf{b}$ je $\mathbf{b}'$, t.j.

$$\mathbf{b}' = \mathcal{K}(\mathbf{b})$$

potom vzhľadom na linearitu a spojitosť kanála platí

$$\mathbf{y} = \mathcal{K}(\mathbf{f}) = \mathcal{K}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{b}_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathcal{K}(\mathbf{b}_n)$$

resp.

$$\mathbf{y} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{b}_n'$$

Teda signál $\mathbf{y}$ na výstupe kanála $\mathcal{K}$ je lineárnou kombináciou odoziev $\mathbf{b}' = \mathcal{K}(\mathbf{b})$ na bázické signály $\mathbf{b}$. Upozorňujeme však na to, že signály $\mathbf{b}'$ nemusia vytvárať bázu signálového priestoru výstupných signálov, pretože môžu byť niektoré z nich lineárne závislé. Ak napríklad pre $u \neq 0$ je $\mathcal{K}(\mathbf{u}) = 0$, potom sú vektory $\mathbf{b}_i'$, $i = 1, 2, \ldots$ lineárne závislé, pretože existujú nenulové skaláre c_i

$$c_i = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)}$$

pre ktoré

$$\sum_{i=1} c_i \mathbf{b}_i' = \sum_{i=1} c_i \mathcal{K}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{0}$$

Množinu všetkých vstupných signálov $\mathbf{u} \in \varphi$ takých, že $\mathcal{K}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ voláme nulovou množinou kanála $\mathcal{K}$.

5.2 SPEKTRÁLNY POPIS

Predpokladajme lineárny spojitý kanál nad reálnym signálovým priestorom vstupných signálov φ a výstupných signálov φ'. Nech systém $\{\mathbf{b}_i, i = 1,2, \ldots\}$ je ortogonálnou bázou v φ a systém $\{\mathbf{b}_i', i = 1, 2, \ldots\}$ ortogonálnou bázou v φ'. Nech odozvou kanála $\mathcal{K}$ na vstupný signál $\mathbf{u} \in \varphi$ je signál $\mathbf{y} \in \varphi$, kde

$$\mathbf{y} = \mathcal{K}(\mathbf{u})$$

Fourierov rad vstupného signálu je

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathbf{b}_j \quad \text{kde} \quad c_j = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{b}_j)}{(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j)} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

a výstupného signálu

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j' \mathbf{b}_j' \quad \text{kde} \quad c_j' = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{b}_j')}{(\mathbf{b}_j', \mathbf{b}_j')}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Po dosadení za výstupný signál a použití vlastnosti linearity a spojitosti kanála a linearity skalárneho súčinu dostávame

$$c_j' = \frac{(\mathcal{K}(\mathbf{u}), \mathbf{b}_j')}{(\mathbf{b}_j', \mathbf{b}_j')} = \frac{\left(\mathcal{K}\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{b}_i\right), b_j'\right)}{(\mathbf{b}_j', \mathbf{b}_j')} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{(\mathcal{K}(\mathbf{b}_i), \mathbf{b}_j')}{(\mathbf{b}_j', \mathbf{b}_j')}$$

Ak označíme $F_{ji} = \dfrac{(\mathcal{K}(\mathbf{b}_i), \mathbf{b}_j')}{(\mathbf{b}_j', \mathbf{b}_j')}$, $i,j = 1, 2, \ldots$

a maticu

$$\mathbf{F} = \left[F_{ij}\right], \quad i,j = 1, 2, \ldots$$

potom zápis

$$c_j' = \sum_{i=1}^{\infty} c_i F_{ji} \qquad j = 1, 2, \ldots$$

môžeme napísať maticovo

$$\mathbf{c}' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}$$

kde $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ sú stĺpcové vektory koeficientov rozkladu signálu do odpovedajúcich ortogonálnych báz

$$\mathbf{c}^T = (c_1, c_2, \ldots) \qquad \mathbf{c}'^T = (c_1', c_2', \ldots)$$

Matica $\mathbf{F}$ priraďuje spektru vstupného signálu, daného vektorom $\mathbf{c}$, spektrum $\mathbf{c}'$ výstupného signálu a nazývame ju spektrálnym prenosom.

Predchádzajúci postup nám ukázal ako určiť maticu $\mathbf{F}$ na prepočet spektier. Naopak platí, že postačujúcou (nie nutnou) podmienkou, aby matica $\mathbf{F} = \left[F_{ij}\right]$ bola modelom lineárneho spojitého kanála je

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| F_{ij} \right|^2 < \infty$$

Dôkaz môže nájsť čitateľ v [17] .

V prípade, že kanál zachováva ortogonalitu vstupných bázických signálov aj na výstupe, t.j.

$$(\mathcal{K}(\mathbf{b}_i), \mathbf{b}_j') = 0, \quad i \neq j$$

potom matica $\mathbf{F}$ je diagonálna a platí

$$c_j' = \mathbf{F}_{jj} c_j$$

5.3 ČASOVO INVARIANTNÝ LINEÁRNY KANÁL S DISKRÉTNYM ČASOM

Časovo invariantný lineárny kanál je definovaný ako lineárny kanál, v ktorom ak $y(t)$ je odozva kanála na signál $u(t)$, t.j.

$$y(t) = \mathcal{K}(u(t))$$

potom

$$y(t-\tau) = \mathcal{K}(u(t-\tau)); \qquad t, \tau, t-\tau \in T$$

Ak u číslicových a diskrétnych signálov za signálovú bázu vyberieme systém diskrétnych Diracových funkcií

$$u_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \delta(k-n), \quad k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

resp.

$$u_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \delta(k \ominus n), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

potom odozva bude

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n g(k-n), \quad k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

resp.

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n g(k \ominus n), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

kde

$$g = \mathcal{K}(\delta)$$

je odozva kanála na diskrétny Diracov signál a nazývame ju impulznou charakteristikou kanála.

Výstupný signál je teda určený konvolúciou vstupného signálu a impulznej charakteristiky

$$y = u * g$$

Poznámka: U signálov definovaných na konečnej časovej množine $T = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ sa jedná o kruhovú konvolúciu, t.j. rozdiel $k \ominus n$ je mod N.

Spomedzi časovo invariantných lineárnych kanálov budeme ďalej študovať len tie, pre ktoré platí

$$\sum_{k=0}^{M_1-1} a_k\, u(n-k) = \sum_{k=0}^{M_2-1} b_k\, y(n-k)$$

t.j. výstup kanála je daný lineárnou kombináciou vstupov a výstupov. Ďalej budeme uvažovať len kanály fyzikálne realizovateľné, t.j. také, kde výstup kanála je daný lineárnou kombináciou minulých vstupov a výstupov, poprípade ešte prítomným vstupom (nie však vstupov a výstupov budúcich). Výstupný signál z fyzikálne realizovateľného systému zadaného uvedenou diferenčnou rovnicou bude

$$y_n = \sum_{k=0}^{M_1-1} \frac{a_k}{b_o} u(n-k) - \sum_{k=1}^{M_2-1} \frac{b_k}{b_o} y(n-k)$$

pre $n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$

Odozvu na bázické signály dostaneme, ak v diferenčnej rovnici nahradíme vstupný signál bázickým. Napríklad pre rozklad signálu do systému diskrétnych Diracových funkcií, dostaneme odozvu naň - impulznú charakteristiku riešením rovnice

$$\sum_{k=0}^{M_2-1} b_k\, g\,(n-k) = a_n\,, \qquad n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

pretože

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}$$

Spektrálny prenos lineárneho časovo invariantného kanála dostaneme, ak na diferenčnú rovnicu popisujúcu kanál aplikujeme zovšeobecnenú Fourierovu transformáciu, t.j. transformáciu, ktorá časovému priebehu signálu priradí koeficienty rozkladu do zvolenej ortogonálnej bázy. Napríklad pri použití diskrétnych exponenciálnych funkcií ako bázy rozkladu diskrétneho signálu aplikujeme na diferenčnú rovnicu diskrétnu Fourierovu transformáciu.

$$\sum_{k=0}^{M_1-1} a_k\, u(n \ominus k) = \sum_{k=0}^{M_2-1} b_k\, y(n \ominus k) \;\Big|\; f$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{M_1-1} a_k u(n \ominus k) \right] e^{-j \frac{2\pi}{N} nm} = \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{M_2-1} b_k y(n \ominus k) \right] e^{-j \frac{2\pi}{N} nm}$$

$$\sum_{k=0}^{M_1-1} a_k \left[\sum_{m=0}^{N-1} u(n \ominus k)\, e^{-j \frac{2\pi}{N} m(n \ominus k)} \right] e^{-j \frac{2\pi}{N} mk} =$$

$$= \sum_{k=0}^{M_2-1} b_k \left[\sum_{n=0}^{N-1} y(n \ominus k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N} m(n \ominus k)} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N} mk}$$

$$c_m \sum_{k=0}^{M_1-1} a_k\, e^{-j\frac{2\pi}{N} mk} = c'_m \sum_{k=0}^{M_2-1} b_k\, e^{-j\frac{2\pi}{N} mk}$$

alebo ak označíme spektrálny prenos $F_m = \frac{c'_m}{c_m}$, potom

$$F_m = \frac{\sum_{k=0}^{M_1-1} a_k\, e^{-j\frac{2\pi}{N} mk}}{\sum_{k=0}^{M_2-1} b_k\, e^{-j\frac{2\pi}{N} mk}} , \qquad m = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

V uvedenom príklade sme počítali v priestore diskrétnych signálov, ktoré sú definované na konečnej časovej množine. Rovnako postupujeme aj v iných signálových priestoroch, v ktorých čas je diskrétny.

Z hľadiska vlastností kanála a metód syntézy je užitočné rozdeliť kanály, ktorých modelom je uvedená diferenčná rovnica, na kanály s konečnou impulznou charakteristikou a kanály s nekonečnou impulznou charakteristikou.

Kanálom s konečnou impulznou charakteristikou nazývame lineárne časovo invariantné kanály, ktorých výstupný signál môžeme napísať v tvare

$$y_n = \sum_{k=0}^{M_1-1} \frac{a_k}{b_o}\, u\,(n-k) , \qquad n = \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots$$

Názov je odvodený z toho, že impulzná charakteristika $g(n)$, ktorú dostaneme ako odozvu na diskrétny Diracov impulz $\delta(n)$

$$g\,(n) = \sum_{k=0}^{M_1-1} \frac{a_k}{b_o}\, \delta\,(n-k) = \frac{a_n}{b_o} , \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ M_1-1$$

má nanajvýš M_1 nenulových hodnôt.

Kanál s nekonečnou impulznou charakteristikou je popísaný diferenčnou rovnicou

$$\sum_{k=0}^{M_1-1} a_k\, u\,(n-k) = \sum_{k=0}^{M_2-1} b_k\, y\,(n-k)$$

kde $M_2 \geq 2$. Impulzná charakteristika

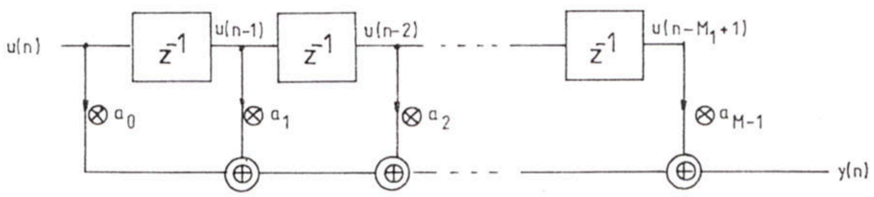
$$g(n) = \sum_{k=0}^{M_1-1} \frac{a_k}{b_o} \delta(n-k) - \sum_{k=1}^{M_2-1} \frac{b_k}{b_o} g(n-k)$$

má nekonečne veľa nenulových hodnôt (ak je nenulová aspoň jedna hodnota).

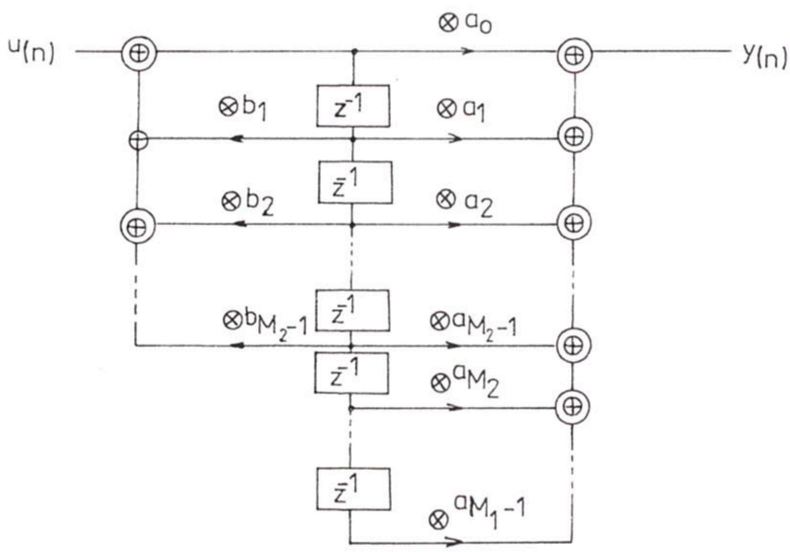
Na realizáciu kanála, ktorý je modelovaný niektorou z týchto dvoch diferenčných rovníc je potrebné realizovať bloky, ktoré umožňujú:

- oneskorenie signálu o jeden časový krok
- násobenie hodnoty signálu skalárom
- sčítanie dvoch funkčných hodnôt.

Hoci ako príklad sme uviedli diskrétne signály, t.j. nad poľom reálnych čísel, musíme pojem sčítania a násobenia chápať všeobecnejšie nad ľubovoľným poľom. Realizácie kanálov modelovaných uvedenými diferenčnými rovnicami budeme znázorňovať nasledujúco ($b_o = 1$) (obr. 8. 9):



Obr. 8
Kanál s konečnou impulznou charakteristikou



Obr. 9
Kanál s nekonečnou impulznou charakteristikou

Tieto štruktúrne schémy, známe ako priama kanonická forma, nie sú jediné možné. S inými kanonickými formami ste sa zoznámili v predmete Teória riadenia.