1. SIGNÁL

1.1. KLASIFIKÁCIA SIGNÁLOV

V úvode sme naznačili, že pod signálom budeme rozumieť zmenu niektorej merateľnej veličiny kanála, ktorá súvisí s prenosom zmien na vstupe kanála na výstup kanála. Vlastnosti signálu, ktoré nie sú ľubovolné, ale závisia na vlastnostiach kanála a zmien na vstupe kanála budeme študovať na matematických modeloch signálu. Všeobecne platí, že určiť môžeme tým viac vlastností, čím predmet skúmania viac vymedzíme. Na druhej strane však potrebujeme určiť, ktoré vlastnosti sú podstatné, t.j. ktoré sa zachovávajú pri menšom počte obmedzení kladených na predmet skúmania. Preto aj v prípade štúdia vlastností signálov prijmeme postupne rôzne obmedzenia, čím sa množina signálov rozpadne na triedy, v ktorých signály daným obmedzeniam vyhovujú. Našou úlohou bode ukázať ako sa prejavia všeobecné vlastnosti signálu v danej triede a aké nové vlastnosti daná trieda signálov vykazuje. Preto aj plán tejto učebnej pomôcky možno rozdeliť na dve časti: všeobecnú (v ktorej všeobecné vlastnosti signálu sa postupne pretlmočia v pojmovom aparáte danej triedy signálov) a konkrétne (v ktorej sa budeme zaoberať ďalšími vlastnosťami danej triedy signálov zoradených podľa umiestnenia v informačnom reťazci).

Kvôli prehľadnosti (pojmy budú definované neskôr) uvedieme rozdelenie signálov, ako ho budeme používať.

Podľa toho, čím máme úplnú alebo neúplnú informáciu o signále, budeme signály deliť na deterministické a náhodné. Podľa čísel, ktoré budeme priraďovať hodnotám merateľnej veličiny kanála, budeme signály deliť na signály s nespočetným, spočetným a konečným oborom hodnôt. Tak isto podľa čísel, ktoré priradíme časovým okamihom, v ktorých môže dôjsť k zmene sledovanej veličiny kanála, budeme hovoriť o signáloch s nespočetným, spočetným a konečným časom.

V tomto učebnom texte nebudeme sledovať všetky kombinácie, ktoré je možné z uvedených obmedzení vytvoriť. U deterministických aj náhodných signálov budeme sledovať len signály spojité, diskrétne a číslicové.

Definícia

Množinu čísel, ktorú priradíme časovým okamihom, v ktorých môže dôjsť k zmene sledovanej veličiny kanálu nazveme časovou množinou a označíme ju $\mathbf{T}$. Množinu čísel, ktorú priradíme hodnotám sledovanej veličiny kanálu nazveme *abeceda signálu* a označíme ju $\mathbf{F}$.

Definícia - deterministický signál

Nech sú dané číselné množiny $\mathbf{T}, \mathbf{F}$, ktoré budeme nazývať časovou množinou a abecedou signálu. Modelom deterministického signálu (ďalej len *deterministickým signálom*) nazývame zobrazenie f časovej množiny $\mathbf{T}$ do abecedy signálu $\mathbf{F}$.

Definícia

Pravdepodobnosť je zobrazenie $P : \varphi \to \mathbf{R}$ definované na systéme φ podmnožín množiny Ω, pričom platí:

- $\Omega \in \varphi$
- Ak $A \in \varphi$,potom aj $A' \in \varphi$
- Ak $A_n \in \varphi \ (n = 1,2,...)$, potom aj $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \varphi$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0$ pre všetky $A \in \varphi$
- Ak $A_n \in \varphi \ (n = 1,2,...)$ a $A_n \cap A_m = 0 \ (n \neq m)$, potom $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Trojicu (Ω, φ, P) nazývame *pravdepodobnostným priestorom*.

Definícia

Náhodná veličina je taká funkcia $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$, že $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \varphi$ pre všetky $x \in \mathbf{R}$. Distribučná funkcia náhodnej premennej je funkcia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definovaná vzťahom $F(x) = P(\{\omega; \xi(\omega) < x\}), \ x \in \mathbf{R}$.

Definícia - náhodný signál

Nech $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ je časová množina. *Náhodný signál* je taký systém náhodných premenných $\{f(\omega,t), \omega \in \Omega, t \in \mathbf{T}\}$, že pre každý konečný podsystém $(f(\omega,t_1), f(\omega,t_2),..., f(\omega,t_n))$ je množina náhodných premenných s distribučnou funkciou $Ft_1,t_2,...,t_n(x_1,x_2,...,x_n) = P(f(\omega,t_1) < x_1, f(\omega,t_2) < x_2,..., f(\omega,t_n) < x_n)$.

Náhodnú premennú $f(\omega, t = konst.)$ pre pevne zvolený čas nazveme *rezom náhodným signálom* a deterministický signál $f(\omega = konst., t)$ nazveme *realizáciou náhodného signálu*.

Množina ohraničených deterministických signálov (realizácií) potom pri vhodne určenom pravdepodobnostnom priestore tiež tvorí náhodný signál. Zo spojitých a diskrétnych náhodných signálov budeme ďalej študovať len tie, ktorých distribučná funkcia je spojitá a teda existuje hustota pravdepodobnosti

$$ft_1,...,t_n(x_{t1},...,x_{tn}) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 ... \partial x_n} Ft_1,...,t_n(x_1,...,x_n)\Bigg|_{\begin{array}{l} x_1 = x_{t1} \\ \quad\vdots \\ x_n = x_{tn} \end{array}}$$

Ak rez náhodným signálom $\{f(\omega,t), \omega \in \Omega, t \in \mathbf{T}\}$ má strednú hodnotu $\mathsf{E}\{f(\omega,t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_t(x) dx$ v prípade spojitého a diskrétneho signálu, alebo $\mathsf{E}\{f(\omega,t)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} x\, p_t(x)$ v prípade číslicového signálu, potom stredná hodnota náhodného signálu je taká funkcia $E(t),\ t \in \mathbf{T}$, že $E(t) = \mathsf{E}\{f(\omega,t)\}$. Náhodný signál nazveme *centrovaným*, ak $E(t) = 0,\ t \in \mathbf{T}$. Pretože každý náhodný signál môžeme vyjadriť ako súčet strednej hodnoty a centrovaného signálu, bez ujmy na všeobecnosti, budeme v ďalších kapitolách predpokladať, že náhodný signál je centrovaný. Rozptyl náhodného signálu $\{f(\omega,t), \omega \in \Omega, t \in \mathbf{T}\}$ je taká funkcia $D(t)$, že $D(t) = \mathsf{D}\{f(\omega,t)\}, t \in \mathbf{T}$ kde $\mathsf{D}\{f(\omega,t)\} = \mathsf{E}\{f^2(\omega,t)\} - E^2(t)$ je rozptyl rezu náhodným signálom v čase t. Ďalej budeme predpokladať, že v každom čase má rozptyl konečnú hodnotu, t.j. $D(t) < \infty,\ t \in \mathbf{T}$. Ak merateľnou veličinou v kanále je napr. napätie $u(t)$, potom rozptyl centrovaného signálu predstavuje strednú hodnotu výkonu signálu v čase t na jednotkovej impedancii. Pre náhodný signál $\{f(\omega,t), \omega \in \Omega, t \in \mathbf{T}\}$ s konečným rozptylom nazývame *kovariačnou funkciou* $R(t_1,t_2) = \mathsf{E}\{[f(\omega,t_1) - E(t_1)][f(\omega,t_2) - E(t_2)]\},\ t_1,t_2 \in \mathbf{T}$. Pre $t_1 = t_2 = t$ platí $R(t,t) = D(t),\ t \in \mathbf{T}$. Náhodný signál nazývame *stacionárnym v užšom zmysle* (ďalej len stacionárnym), ak pre každé $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ také, že $t_2 - t_1 = \tau \in \mathbf{T}$ platí $R(t_1,t_2) = R(\tau),\ E(\tau) = konst.$ *Križovou kovariačnou funkciou* signálov $\{f(\omega,t), \omega \in \Omega, t \in \mathbf{T}\}$ $\{g(\omega,t), \omega \in \Omega, t \in \mathbf{T}\}$ voláme funkciu $R_{fg}(t) = \mathsf{E}\{[f(\omega,t) - E_f(t)][g(\omega,t) - E_g(t)]\}$ Signály voláme *nekorelovanými*, práve keď $R_{fg}(t) = 0,\ t \in \mathbf{T}$.

Definícia - spojitý signál

Signál, ktorého abeceda $\mathbf{F}$ a časová množina $\mathbf{T}$ je nespočitateľná, nazývame *spojitým signálom* (v ďalšom texte predpokladáme $\mathbf{F} = \mathbf{R}$).

Poznámka

V zmysle uvedenej definície budeme signály napr. typu $f(t) = kh(t), k \in \mathbf{R}$ kde $h(t)$ je Heavisideov signál

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

považovať za spojité.

Pri aplikácii výsledkov dosiahnutých pre spojité signály predpokladáme, že je známy funkčný predpis závislosti hodnoty signálu na čase (u deterministických signálov) alebo hodnoty kovariačnej funkcie na čase (u centrovaných náhodných signálov). Budeme uvažovať len spojité signály definované na dvoch časových oblastiach: $\mathbf{T} = \mathbf{R}$ a $\mathbf{T} = (0, T)$, ktoré budeme volať spojitými signálmi na nekonečnom, resp. konečnom časovom intervale.

Definícia - diskrétny signál

Signál, ktorého abeceda $\mathbf{F}$ je nespočitateľná a časová množina $\mathbf{T}$ je spočitateľná, nazývame *diskrétnym signálom* (v ďalšom texte predpokladáme $\mathbf{F} = \mathbf{R}$).

Ďalej sa budeme zaoberať diskrétnymi signálmi definovaných na troch časových množinách: množine všetkých celých čísel $\mathbf{Z}$, množine nezáporných celých čísel $\mathbf{N_0}$, alebo množine $\mathbf{T} = \{0,1,2,...,N-1\}$ u signálov s ohraničeným časom. Deterministický diskrétny signál je postupnosťou reálnych čísel $..., f_i,...$ $i \in \mathbf{T}$. Náhodný diskrétny signál je systémom náhodných premenných $..., f(\omega, i),...$ $i \in \mathbf{T}$ nad daným pravdepodobnostným priestorom. Signál budeme zapisovať v tvare formálneho radu $f(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + ...$, formálneho polynómu $f(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + ... + f_N z^{-N}$, kde z sa nazýva neurčitá, alebo v tvare vektora $\mathbf{f} = (..., f_i,...)$. Definície formálneho radu, formálneho polynómu a vektora uvedieme neskôr.

Definícia - číslicový signál

Signál, ktorého abeceda $\mathbf{F}$ aj časová množina $\mathbf{T}$ je spočitateľná nazývame *číslicovým signálom*.

Zvláštnu pozornosť budeme venovať číslicovým signálom, ktorých abeceda a časová množina sú konečné. Číslicový signál môžeme tiež zapísať v tvare formálneho polynómu, radu alebo vektora len s tým rozdielom, že f_i, $i \in \mathbf{T}$ budú diskrétne náhodné veličiny alebo celé čísla.

1.2. RALÁCIA USPORIADANIA

Aby sme so signálmi mohli pracovať, musíme v prvom rade vedieť porovnávať hodnoty signálov a časové okamihy.

Definícia

Binárna relácia R v množine $\mathbf{F}$ je podmnožinou kartézskeho súčinu $\mathbf{F} \times \mathbf{F}$. Označenie $f_1 R\, f_2 (f_1 \in \mathbf{F}, f_2 \in \mathbf{F})$ znamená, že $(f_1, f_2) \in R$.

Definícia

Relácia $\leq$ v množine $\mathbf{F}$ sa volá neostré usporiadanie, ak :
- pre všetky $f \in \mathbf{F}$ platí $f \leq f$
- pre všetky $f_1, f_2 \in \mathbf{F}$ platí $(f_1 \leq f_2) \wedge (f_2 \leq f_1) \Rightarrow f_1 = f_2$
- pre všetky $f_1, f_2, f_3 \in \mathbf{F}$ platí $(f_1 \leq f_2) \wedge (f_2 \leq f_3) \Rightarrow f_1 \leq f_3$

Definícia

Relácia < v množine $\mathbf{F}$ sa volá ostré usporiadanie, ak
- pre všetky $f \in F$ neplatí $f < f$
- pre všetky $f_1 f_2 \in F$ platí $\neg(f_1 < f_2) \wedge \neg(f_2 < f_1) \Rightarrow f_1 = f_2$
- pre všetky $f_1, f_2, f_3 \in F$ platí $(f_1 < f_2) \wedge (f_2 < f_3) \Rightarrow f_1 < f_3$

Definícia

Usporiadanou množinou voláme množinu $\mathbf{F}$ s reláciou ostrého alebo neostrého usporiadania definovaného v množine $\mathbf{F}$.

1.3. OPERÁCIE S HODNOTAMI SIGNÁLOV

Operácie so signálmi sú odvodené od základných operácií s funkčnými hodnotami signálov.

Definícia

Binárna operácia $\otimes$ na množine $\mathbf{F}$ je pravidlo, ktoré každému prvku množiny $F \times F$ priradí jediný prvok množiny $\mathbf{F}$.

Definícia

Binárna operácia $\otimes$ na množine $\mathbf{F}$ sa nazýva:
- asociatívna, ak pre každé $f_1, f_2, f_3 \in F$ platí $(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 = f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3)$

- komutatívna, ak pre každé $f_1, f_2 \in F$ platí $f_1 \otimes f_2 = f_2 \otimes f_1$

Definícia

Nech na množine $\mathbf{F}$ je daná binárna operácia $\otimes$. Prvok $e \in F$ nazývame *neutrálnym*, ak pre všetky $f \in F$ platí $e \otimes f = f \otimes e = f$. Prvok $f^{-1} \in F$ nazývame *inverzným* k prvku $f \in F$ ak platí $f^{-1} \otimes f = f \otimes f^{-1} = e$.

Kvôli jednoduchosti budeme pre hodnoty signálov definovať len dve algebraické štruktúry - odbor integrity a pole, aj keď v niektorých prípadoch by sme vystačili aj s jednoduchšími štruktúrami.

Definícia – obor integrity

Nech na množine $\mathbf{F}$ sú definované dve binárne operácie $\oplus$, $\otimes$ s týmito vlastnosťami

- operácie $\oplus$, $\otimes$ sú komutatívne a asociatívne
- existuje neutrálny prvok $0 \in \mathbf{F}$ vzhľadom na operáciu $\oplus$ a neutrálny prvok $1 \in \mathbf{F}$ vzhľadom na operáciu $\otimes$, pričom $1 \neq 0$
- pre každé $f \in \mathbf{F}$ existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $\oplus$
- pre každé $f_1, f_2, f_3 \in \mathbf{F}$ platí distributívny zákon $f_1 \otimes (f_2 \oplus f_3) = (f_1 \otimes f_2) \oplus (f_1 \otimes f_3)$
- pre každé $f_1, f_2 \in \mathbf{F}$ také, že $f_1 \otimes f_2 = 0$ platí $f_1 = 0$ alebo $f_2 = 0$.

Potom algebrickú štruktúru $(\mathbf{F}, \oplus, \otimes)$ voláme *oborom integrity*.

Definícia – deliteľnosť

Ak v odbore integrity $(\mathbf{F}, \oplus, \otimes)$ existuje pre dané $f_1, f_2 \in \mathbf{F}$ také $f \in \mathbf{F}$, že $f_1 \otimes f = f_2$ potom hovoríme, že f_1 delí f_2, čo zapisujeme $f_1 | f_2$ Ak $f \in \mathbf{F}$ je deliteľom prvkov $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathbf{F}$ a pre všetky $f' \in \mathbf{F}$ také, že sú deliteľom prvkov $f_1, f_2, ..., f_n$ platí, že f' je deliteľom prvku f, potom f nazývame najväčším spoločným deliteľom prvkov $f_1, f_2, ..., f_n$ a píšeme $f = D(f_1, f_2, ..., f_n)$. Ak $D(f_1, f_2, ..., f_n) = 1$ potom prvky $f_1, f_2, ..., f_n$ nazývame nesúdeliteľnými.

Definícia – Euklidov obor integrity

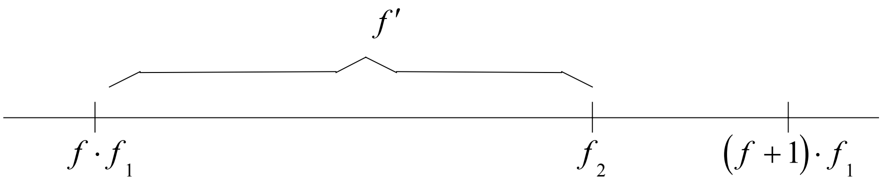
Obor integrity $(\mathbf{F}, \oplus, \otimes)$ sa volá *Euklidovým*, ak existuje zobrazenie $\delta : \mathbf{F} - \{0\} \to \mathbf{N}$ tak, že platí

- ak f' je deliteľom prvku f potom $\delta(f') \leq \delta(f)$
- pre každé $f_1 f_2 \in \mathbf{F}$ existujú prvky $f, f' \in \mathbf{F}$ tak, že $f_2 = f_1 \otimes f \oplus f'$, pričom alebo $f' = 0$, alebo $f' \neq 0$ a $\delta(f') < \delta(f_1)$

Veta

Obor integrity $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ je euklidovým.

Dôkaz naznačíme na obrázku:



Obr. 1.1 K Euklidovmu oboru integrity

Čísla ohodnotíme ich absolútnou hodnotou, t.j. $\delta(f) = |f|$. Zrejme existuje taký interval $< f \cdot f_1, (f+1) \cdot f_1 \ )$, že číslo f bude práve z neho. Potom platí $f_2 = f_1 \cdot f + f'$, $|f'| < |f_1|$

Definícia

Nech $(\mathbf{F}, \oplus, \otimes)$ je odbor integrity. Potom nenulový prvok $f \in \mathbf{F}$, ktorý nie je jednotkou, voláme *ireducibilným*, ak má len nevlastných deliteľov, t.j. platí $(\forall f' \in F) f' | f \Rightarrow (f | f' \vee f' | 1$

Veta

Nech $(\mathbf{F}, \oplus, \otimes)$ je Euklidovským odborom integrity. Potom každý nenulový prvok $f \in \mathbf{F}$, ktorý nie je jednotkou môžeme rozložiť na súčin konečného počtu ireducibilných prvkov. Dôkaz je dlhší, pozri napr. $[13]$. Ďalšou algebraickou štruktúrou, ktorú budeme používať je pole. Oproti oboru integrity požadujeme existenciu inverzného prvku vzhľadom na násobenie.

Definícia

Nech na množine $\mathbf{F}$ sú definované dve binárne operácie $\oplus, \otimes$ s týmito vlastnosťami:

- operácie $\oplus, \otimes$ sú komutatívne a asociatívne
- existuje neutrálny prvok $0 \in \mathbf{F}$ vzhľadom na operáciu $\oplus$ a neutrálny prvok $1 \in \mathbf{F}$ vzhľadom na operáciu $\otimes$, pričom $1 \neq 0$
- pre každé $f \in \mathbf{F}$ existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $\oplus$
- pre každé $f_1 \otimes (f_2 \oplus f_3) = (f_1 \otimes f_2) \oplus (f_1 \otimes f_3)$
- pre každé $f \in \mathbf{F} - \{0\}$ existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $\otimes$.

Potom algebrickú štruktúru $(\mathbf{F}, \oplus, \otimes)$ voláme *poľom*.

Poznámka:

Každé pole je oborom integrity (dokážte).

Uviedli sme už predpoklad, ktorý v tomto texte používame, že abecedou spojitých a diskrétnych signálov je nejaká podmnožina množiny reálnych čísel. Presvedčite sa, že množina reálnych čísel s operáciami sčítania a násobenia, t.j. štruktúra $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ tvorí pole. Ak množina hodnôt číslicového signálu je nekonečná, môžeme ju stotožniť s množinou racionálnych čísel, ktorá s operáciami sčítania a násobenia tvorí tiež pole. Dôležitou triedou číslicových signálov sú signály s konečnou abecedou, ktorú môžeme stotožniť s množinou $\mathbf{F} = \{0,1,2,\ldots,p-1\}$. Pretože výsledok operácie musí patriť do abecedy, musíme operácie $\oplus, \otimes$ definovať ináč ako sčítanie a násobenie.

Nech je dané prirodzené číslo p, ktoré nazveme modulom. Pretože $(\mathbf{N}_0, +, \cdot)$ je Euklidovským odborom integrity s ohodnotením $\delta(f) = f$ existujú ku každému $f \in \mathbf{F}$ také $f_1, f' \in \mathbf{F}$, že $f = p \cdot f_1 + f', \quad f < p$. Potom hovoríme, že f a f' sa rovnajú modulo p, čo zapisujeme $f = f' (\mathrm{mod}\, p)$.

Definícia

Nech $\mathbf{F} = \{0,1,2,\ldots,p-1\}$, kde $p \in \mathbf{N}$ je modul. Operáciu $\underset{p}{\oplus}$ nazývame súčtom modulo p a operáciu $\underset{p}{\otimes}$ súčinom modulo p, ak pre všetky $f_1, f_2, f_3 \in \mathbf{F}$ platí:

$$f_1 \underset{p}{\oplus} f_2 = f_3 \Leftrightarrow f_3 = f_1 + f_2 (\mathrm{mod}\, p) \text{ resp. } f_1 \underset{p}{\otimes} f_2 = f_3 \Leftrightarrow f_3 = f_1 \cdot f_2 (\mathrm{mod}\, p).$$

Ak je modul zrejmý, budeme operácie značiť $\oplus, \otimes$.

Veta

Nech $F = \{0,1,2,\ldots,p-1\}$ a modul $p \in N$ je prvočíslo. Algebraická štruktúra $\left(\mathbf{F}, \underset{p}{\otimes}, \underset{p}{\oplus}\right)$ je pole.

Dôkaz

Je zrejmé, že operácie $\underset{p}{\oplus}, \underset{p}{\otimes}$ sú komutatívne. Presvedčime sa, že operácia $\underset{p}{\oplus}$ je asociatívna.

Nech $a = f_1 \oplus (f_2 \oplus f_3), \quad b = (f_1 \oplus f_2) \oplus f_3$. Potom existujú také čísla $r, q, r', q' \in \mathbf{N}_0$, že

$$a = f_1 \oplus (f_2 + f_3 - pr), \quad b = (f_1 + f_2 - pr') \oplus f_3$$

$$a = f_1 + f_2 + f_3 - pr - pq, \quad b = f_1 + f_2 - pr' + f_3 - pq'$$

teda $f_1 + f_2 + f_3 = a + p\ (r + q) = b + p\ (r' + q')$

Odtiaľ $|a - b| = |p(r + q - r' - q')|$

Pretože $0 \le a \le p, \quad 0 \le b < p$, bude aj $|a-b| < p$. Pretože súčasne je číslo $|a-b|$ násobkom čísla p, jediné riešenie je $|a-b| = 0$, t.j. $a = b$. Rovnako by sme dokázali aj asociatívnosť vzhľadom na súčin modulo p a distributívnosť. Neutrálnym prvkom vzhľadom na $\oplus$ je 0, vzhľadom na $\otimes$ je 1. Inverzným prvkom k prvku $f \in \mathbf{F}$ vzhľadom na $\oplus$ je $p - f$. Ostáva ešte ukázať, že ku každému prvku $f \in \mathbf{F} - \{0\}$ existuje inverzný prvok vzhľadom na $\otimes$.

Nech $f \in \mathbf{F},\ f \neq 0$. Potom ak p je prvočíslo, najväčší spoločný deliteľ je $D(f, p) = 1$ a existujú také čísla $x, y \in \mathbf{F}$, že $f \cdot x + p \cdot y = 1$

Odtiaľ $f \cdot x = 1 - p \cdot y$. Pretože $f \underset{p}{\otimes} x = f \cdot x (\mathrm{mod}\, p)$, platí $f \underset{p}{\otimes} x = 1 - p.y (\mathrm{mod}\, p)$ t.j. $f \underset{p}{\otimes} x = 1$

Prvok $x \in \mathbf{F}$ je teda inverzný k $f \in \mathbf{F}$ vzhľadom na $\underset{p}{\otimes}$.

1.4. MODELY SIGNÁLU

Zameriame sa na modely deterministického signálu, pretože ako sme uviedli, model náhodného signálu môže byť určený modelom ohraničeného deterministického signálu (realizácie náhodného signálu) a vhodným pravdepodobnostným priestorom.

Najskôr uvedieme modely signálov s diskrétnym časom. Model signálu s diskrétnym časom musí vyjadrovať hodnoty signálu v daných časových okamihoch. Tieto hodnoty môžeme oddeľovať čiarkami, napr. $\mathbf{f} = (f_0, f_1, ..., f_{N-1})$ alebo nejakým iným prvkom, napr. x alebo z^{-1} (prvok x je používanejší u číslicových signálov, prvok z^{-1} u diskrétnych signálov). Potom časť $f_n z^{-n}$ znamená, že signál v čase n má hodnotu f_n.

Definícia

Nech je daný obor integrity $(\mathbf{F}, \oplus, \otimes)$, časová množina $\mathbf{T} = \{0,1,2,...,N-1\}$ (kde N je prirodzené číslo) a prvok z^{-1} resp. x, ktorý nepatrí do daného oboru integrity. Ak $f_i \in \mathbf{F},\ i = 0,1,...,N-1$, potom výraz

$$f(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + ... + f_{N-1} z^{-(N-1)}$$

$$\text{resp. } f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + ... + f_{N-1} x^{N-1}$$

voláme polynómom (alebo podrobnejšie polynómom s neurčitou z^{-1} resp. x nad daným oborom integrity) a číslo $N-1$ voláme stupňom polynómu, čo zapisujeme $\deg f(z^{-1}) = N-1$ resp. $\deg f(x) = N-1$. Množinu všetkých uvedených polynómov označíme $\mathbf{F}_N(z^{-1})$ resp. $\mathbf{F}_N(x)$.

Pre signály s diskrétnym časom, ktorých časová množina je nespočitateľná zavádzame iný model - formálny mocninný rad.

Definícia

Nech je daný obor integrity $(\mathbf{F}, \oplus, \otimes)$, časová množina $\mathbf{T} = \{0,1,2,...\}$ a prvok z^{-1}, ktorý nepatrí do daného oboru integrity. Ak $f_i \in \mathbf{F},\ i = 0,1,2,...$ potom výraz $f(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + ...$ voláme *formálnym mocniným radom*. Množinu všetkých uvedených formálnych mocninných radov označíme $\mathbf{F}(z^{-1})$.

Formálny mocninný rad nazveme *rekurentným*, ak existujú nezáporné celé čísla r, s a prvky $k_1, ..., k_r \in \mathbf{F}$ tak, že $f_{j+r} = k_1 \otimes f_{j+r-1} \oplus k_2 \otimes f_{j+r-2} \oplus ... \oplus k_r \otimes f_j$ pre $j = n+s, n+s+1, ...$. Množinu všetkých uvedených formálnych rekurentných mocninných radov označíme $\mathbf{Q}(z^{-1})$.

Dva polynómy $f(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + ... + f_{N-1} z^{-(N-1)}$ a $g(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + ... + g_{N-1} z^{-(N-1)}$ považujeme za rovné, t.j. $f(z^{-1}) = g(z^{-1})$ práve ak $f_i = g_i$ pre $i = 0,1,\dots,N-1$. Podobne chápeme rovnosť dvoch formálnych mocninných radov.

V ďalšom texte budeme predpokladať, že abeceda signálu vyjadreného formálnym mocninným radom je množinou reálnych čísel $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ a hodnoty takéhoto signálu sú exponenciálneho rádu. To znamená, že pre hodnoty každého signálu vyjadreného formálnym mocninným radom existuje reálne kladné číslo M a reálne číslo ξ tak, že platí $|f_i| \le M e^{i\xi}$ $i = 0,1,2,...$.

Pre spojité signály budeme predpokladať, že existuje funkčný predpis $f(t)$, ktorý každému času t z časovej množiny $\mathbf{T}$ priradí prvok $f \in \mathbf{R}$ v obore integrity $(\mathbf{R},+,.)$ tak, že $f = f(t)$. Spojité signály budeme označovať v tvare $f(t)$. Ďalej budeme uvažovať len spojité signály s konečnou energiou, t.j. také, ktoré splňujú podmienku $\int_{\mathbf{T}} f^2(t)dt < +\infty$.

1.5. ZÁKLADNÉ OPERÁCIE S DETERMINISTICKÝMI SIGNÁLMI

Definícia - súčet signálov s diskrétnym časom

Nech $(\mathbf{F},\oplus,\otimes)$ je obor integrity a $\mathbf{T} \subset \mathbf{N_0}$ je časová množina. Nech ϕ je množina všetkých signálov $\mathbf{f} = f(z^{-1}) = \sum_{i \in \mathbf{T}} f_i z^{-i}$ takých, že $f_i \in \mathbf{F},\ i \in \mathbf{T}$ a nech sú dané signály $\mathbf{f} = f(z^{-1}), \mathbf{g} = g(z^{-1}) \in \phi$. Signál $\mathbf{h} = h(z^{-1}) = \sum_{i \in \mathbf{T}} h_i z^{-i}$ nazývame *súčtom* signálov $\mathbf{f} = f(z^{-1}),\ \mathbf{g} = g(z^{-1})$ ak platí $h_i = f_i \oplus g_i,\ i \in \mathbf{T}$ a píšeme $h(z^{-1}) = f(z^{-1}) \oplus g(z^{-1})$ resp. $\mathbf{h} = \mathbf{f} \oplus \mathbf{g}$.

Definícia - súčet spojitých signálov

Je daná časová množina $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ pre $t \in \mathbf{T}$ sú dané spojité signály $\mathbf{f} = f(t), \mathbf{g} = g(t)$. Signál $\mathbf{h} = h(t),\ t \in \mathbf{T}$ nazývame *súčtom* signálov $f(t), g(t)$ ak $h(t) = f(t) \oplus g(t), t \in \mathbf{T}$ a píšeme $h(t) = f(t) \oplus g(t)$ resp. $\mathbf{h} = \mathbf{f} \oplus \mathbf{g}$.

Definícia - súčin signálov s diskrétnym časom

Nech abeceda signálu tvorí pole $(\mathbf{F},\oplus,\otimes)$ a $\mathbf{T} \subset \mathbf{N}_0$ je časová množina. Nech ϕ je množina všetkých signálov $\mathbf{f} = f(z^{-1}) = \sum_{i \in \mathbf{T}} f_i z^{-i}$ takých, že $f_i \in \mathbf{F},\ i \in \mathbf{T}$ a nech sú dané signály $\mathbf{f} = f(z^{-1}), \mathbf{g} = g(z^{-1}) \in \phi$. Signál $\mathbf{h} = h(z^{-1}) = \sum_{i \in \mathbf{T}} h_i z^{-i}$ nazývame *súčinom* signálov $\mathbf{f} = f(z^{-1}),\ \mathbf{g} = g(z^{-1})$ ak platí $h_i = \sum_{j \in T} f_{i-j} \otimes g_j,\ i \in \mathbf{T}$ a píšeme $h(z^{-1}) = f(z^{-1}) \otimes g(z^{-1})$ resp. $\mathbf{h} = \mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$.

Poznámky

1. V prípade konečného intervalu $\mathbf{T} = \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ budeme konvolučnú sumu chápať tak, že k signálu $\mathbf{f} = \{f_i,\ i \in T\}$ zostrojíme periodické pokračovanie, alebo rozdiel $i - j$ nahradíme rozdielom modulo N, t.j. $i \underset{N}{\oplus} (-j)$
2. Znak sumácie $\sum_{i=0}^{N-1} f_i$ budeme chápať ako $f_0 \oplus f_1 \oplus \ldots \oplus f_{N-1}$.
3. Súčin signálov ako sme ho vyššie definovali sa zvykne nazývať tiež konvolúciou alebo v prípade ohraničenej alebo konečnej časovej množiny kruhovou konvolúciou. V tomto prípade sa miesto znaku $\otimes$ používa znak $*$.

Definícia - súčin spojitých signálov

Je daná časová množina $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ a množina $\phi = \{f(t),\ t \in \mathbf{T}\}$ spojitých signálov integrovateľných v zmysle Riemanovho kritéria. Signál $\mathbf{h} = h(t)$ nazývame *súčinom* signálov $\mathbf{f} = f(t), \mathbf{g} = g(t) \in \phi$, ak $h(t) = \int_{\mathbf{T}} f(t-\tau) g(\tau) d\tau,\ t \in \mathbf{T}$ a píšeme $h(t) = f(t) \otimes g(t)$ resp. $\mathbf{h} = \mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$.

1.6. ZÁKLADNÉ OPERÁCIE S NÁHODNÝMI SIGNÁLMI

Označme kvôli jednoduchosti distribučnú funkciu $Ft_1,t_2,\ldots,t_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ náhodného signálu $f(\omega,t)$ ako $F(\mathbf{x}) = F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Definícia - súčet číslicových náhodných signálov

Nech $\mathbf{T}=\{0,1,...,N-1\}$ je časová množina, abeceda signálu tvorí pole $(\mathbf{F},\oplus,\otimes)$ a $\{F^T,\varphi,P^T\}$ je pravdepodobnostný priestor, na ktorom sú definované náhodné signály $f(\omega,t),g(\omega,t)$ s distribučnými funkciami $F_f(\mathbf{x}),F_g(\mathbf{x})$. Súčtom náhodných signálov budeme rozumieť taký náhodný signál $h(\omega,t)=f(\omega,t)\oplus g(\omega,t)$ že $F_h(\mathbf{x})=\sum_{F^T}F_{fg}(\mathbf{x}\oplus(-\mathbf{y})/\mathbf{y})p_g(\mathbf{y})$ kde $F_{fg}(\mathbf{x}/\mathbf{y})$ je podmienená distribučná funkcia

$$F_{fg}(\mathbf{x}/\mathbf{y})=P[f(\omega,0)<x_0,...,f(\omega,N-1)<x_{N-1}/g(\omega,0)=y_0,...,g(\omega,N-1)=y_{N-1}]$$

a $p_g(\mathbf{y})$ je rozdelenie pravdepodobnosti.

Definícia - súčet diskrétnych náhodných signálov

Nech $\mathbf{T}\subset\mathbf{N_0}$ je časová množina, abeceda signálu $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ a $\{F^T,\varphi,P^T\}$ je pravdepodobnostný priestor, na ktorom sú definované náhodné signály $f(\omega,t),g(\omega,t)$ s distribučnými funkciami $F_f(\mathbf{x}),F_g(\mathbf{x})$. Súčtom náhodných signálov budeme rozumieť taký náhodný signál $h(\omega,t)=f(\omega,t)+g(\omega,t)$ že $F_h(\mathbf{x})=\int_{R^T}F_{fg}(\mathbf{x}-\mathbf{y}/\mathbf{y})f_g(\mathbf{y})d\mathbf{y}$ pre každú konečnú množinu časov $t_0<t_1<...<t_{N-1}$, $t_0,t_1,...,t_{N-1}\in\mathbf{T}$, kde $F_{fg}(\mathbf{x}/\mathbf{y})$ je podmienená distribučná funkcia

$$F_{fg}(\mathbf{x}/\mathbf{y})=P[f(\omega,t_0)<x_0,...,f(\omega,t_{N-1})<x_{N-1}/g(\omega,t_0)=y_0,...,g(\omega,t_{N-1})=y_{N-1}]$$

a $f_g(\mathbf{y})$ je odpovedajúca hustota rozdelenia pravdepodobnosti.

Definícia - súčet spojitých náhodných signálov

Nech $\mathbf{T}=\mathbf{R}$ alebo $\mathbf{T}=[0,T)$ je časová množina, abeceda signálu $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ a $\{F^T,\varphi,P^T\}$ je pravdepodobnostný priestor, na ktorom sú definované náhodné signály $f(\omega,t),g(\omega,t)$ s distribučnými funkciami $F_f(\mathbf{x}),F_g(\mathbf{x})$. Súčtom náhodných signálov budeme rozumieť taký náhodný signál $h(\omega,t)=f(\omega,t)+g(\omega,t)$ že

$$F_h(\mathbf{x})=\int_{R^T}F_{fg}(\mathbf{x}-\mathbf{y}/\mathbf{y})f_g(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

pre každú konečnú množinu časov $t_0<t_1<...<t_{N-1}$, $t_0,t_1,...,t_{N-1}\in\mathbf{T}$, kde $F_{fg}(\mathbf{x}/\mathbf{y})$ je podmienená distribučná funkcia

$$F_{fg}(\mathbf{x}/\mathbf{y})=P[f(\omega,t_0)<x_0,...,f(\omega,t_{N-1})<x_{N-1}/g(\omega,t_0)=y_0,...,g(\omega,t_{N-1})=y_{N-1}]$$

a $f_g(\mathbf{y})$ je odpovedajúca hustota rozdelenia pravdepodobnosti.

Veta

Ak náhodné signály $f_1(\omega,t),f_2(\omega,t)$ majú stredné hodnoty $E_1(t),E_2(t)$, potom náhodný signál $f_1(\omega,t)+f_2(\omega,t)$ má strednú hodnotu $E_1(t)+E_2(t)$.
Dôkaz vyplýva z definície strednej hodnoty náhodného signálu a odpovedajúcej vlastnosti rezov náhodnými signálmi.
Nech $R_{12}(t_1,t_2)$ označuje krížovú kovariačnú funkciu centrovaných náhodných signálov $f_1(\omega,t),f_2(\omega,t)$ s abecedou $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ $R_{12}(t_1,t_2)=\mathsf{E}\{f_1(\omega,t_1)\cdot f_2(\omega,t_2)\}$. Potom kovariačná funkcia súčtu dvoch náhodných signálov s kovariačnými funkciami $R_1(t_1,t_2),R_2(t_1,t_2)$ je $R(t_1,t_2)=R_1(t_1,t_2)+2R_{12}(t_1,t_2)+R_2(t_1,t_2)$
Dôkaz dostaneme rozpísaním definičného vzťahu pre kovariačnú funkciu súčtu dvoch náhodných signálov.

1.7. ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI SIGNÁLOV

Veta

Nech $(\mathbf{F},\oplus,\otimes)$ je obor integrity. Potom $(\mathbf{F}_N(x),\oplus,\otimes)$, kde $\mathbf{F}_N(x)=\{f_0+f_1x+...+f_{N-1}x^{N-1},N\in\mathbf{N_0}\}$ je oborom integrity, ale nie poľom.
Dokážte, že $(\mathbf{F}_N(x),+,.)$ je oborom integrity a nájdite polynóm, ktorý nemá inverzný polynóm.

Pre rekurentné signály platí silnejšie tvrdenie.

Veta

Nech $(\mathbf{F},\oplus,\otimes)$ je oborom integrity. Potom $\left(\mathbf{Q}\left(z^{-1}\right),\oplus,\otimes\right)$, kde

$$\mathbf{Q}\left(z^{-1}\right)=\left\{\frac{f\left(z^{-1}\right)}{g\left(z^{-1}\right)};\ f\left(z^{-1}\right),g\left(z^{-1}\right)\in\mathbf{F}\left(z^{-1}\right),\ g\left(z^{-1}\right)\neq 0\right\}$$ je pole.

Dôkaz je uvedený v (2).
U číslicových signálov s konečnou časovou množinou a konečnou množinou hodnôt je možné zaviesť štruktúru poľa podobne ako sme to urobili v množine hodnôt, zavedením súčtu súčinu modulo $q(x)$, kde $q(x)$ je ireducibilný polynóm.

Nech $(\mathbf{F}(x),\oplus,\otimes)$ je Euklidovský obor integrity, v ktorom normou δ je stupeň polynómu a polynóm $q(x)\in\mathbf{F}(x)$. Ak platí $f(x)=q(x)\otimes r(x)\oplus h(x)$, potom píšeme $f(x)=h(x)(\operatorname{mod} q(x))$

Obor integrity $\left(\mathbf{F}(x),\underset{q(x)}{\oplus},\underset{q(x)}{\otimes}\right)$, v ktorom $q(x)$ je ireducibilný polynóm a pre všetky $f(x)\in\mathbf{F}(x)$ je $\deg f(x)<\deg q(x)$ je poľom (nazývame ho *Galoisove pole*).