Kapitola 1

Modely kĺzavých súčtov

1.1 Súvislosť medzi hodnotami procesu

V predchádzajúcej kapitole sme zisťovali, ako sa v procese prejaví časová závislosť. Jednotlivé modely predstavovali explicitné funkcie času, ktoré aproximovali proces. Ako dobre sme proces aproximovali sa dalo zistiť podľa veľkosti chyby, teda veľkosti rozdielu pôvodného procesu a jeho aproximácie. Našou úlohou bolo nájsť tvar a parametre funkcie času tak, aby chyba aproximácie pomocou tejto funkcie bola minimálna.

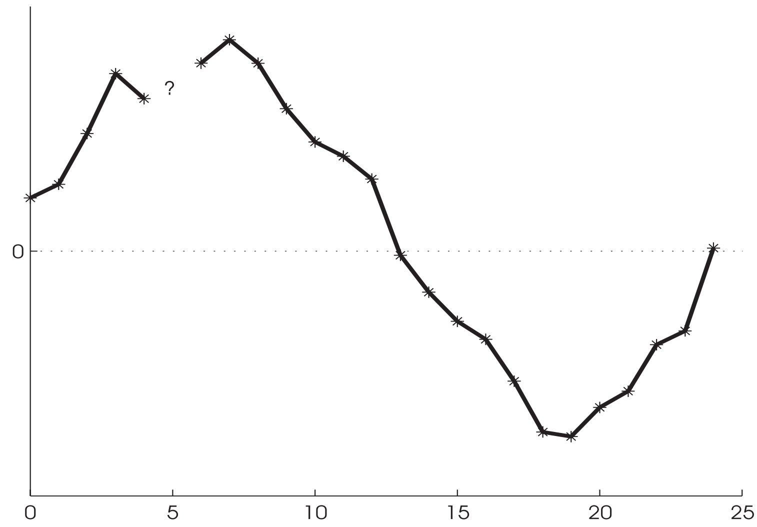
V tejto kapitole nebudeme sledovať závislosť procesu na čase, ale súvislosť hodnôt procesu medzi sebou navzájom. Riešime otázku ako súvisia jednotlivé hodnoty procesu. Súvislosť medzi hodnotami procesu by mohla byť ovplyvnená tým,že hodnoty procesu by boli merané v nepravidelných časoch. Aby sme zamedzili tomuto vplyvu, budeme v tejto kapitole predpokladať, že hodnoty procesu sú merané v ekvidištantných časoch a dĺžka časového intervalu bude 1. V nasledujúcom texte budeme hodnoty $f(t_k)$ značiť iba ako f_k.

Motivačnou úlohou tejto kapitoly je **interpolácia procesu**. V zúženom chápaní sa pod interpoláciou rozumie nahradenie nameraných hodnôt vhodným polynómom a dopočítanie chýbajúcich hodnôt pomocou tohoto polynómu. V tejto kapitole sa však nebudeme zaoberať vyjadrením procesu ako explicitnej funkcie času, čo nastane aj v prípade aproximácie polynómom. Našou úlohou bude nájsť súvislosť medzi koeficientami a vyjadriť chýbajúcu hodnotu pomocou ostatných hodnôt. Nech sú namerané hodnoty $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}, f_{k+1}, \ldots, f_{N-1}$ procesu $\mathbf{f}$, ako to vidíme na obrázku **??**.

Chceme odhadnúť hodnotu f_k, ktorá nie je nameraná. Predpokladáme, že hodnoty f_{k-1},f_k a f_{k+1} sa príliš nelíšia. V jednoduchších modeloch, keď nezisťujeme nič o tom ako hodnoty medzi sebou súvisia, sa hodnota f_k vypočíta ako aritmetický priemer susedných hodnôt:

$$\tilde{f}_k = \frac{f_{k-1} + f_{k+1}}{2}$$

Priebeh procesu s chýbajúcou hodnotou a jeho aproximácia procesom, v ktorom sa použije na výpočet aritmetický priemer dvoch susedných hodnôt, sú zobrazené na obrázku **??**. Na obrázku je prerušovanou čiarou znázornený aj chybový proces, ktorý vypočítame ako rozdiel pôvodného a odhadnutého

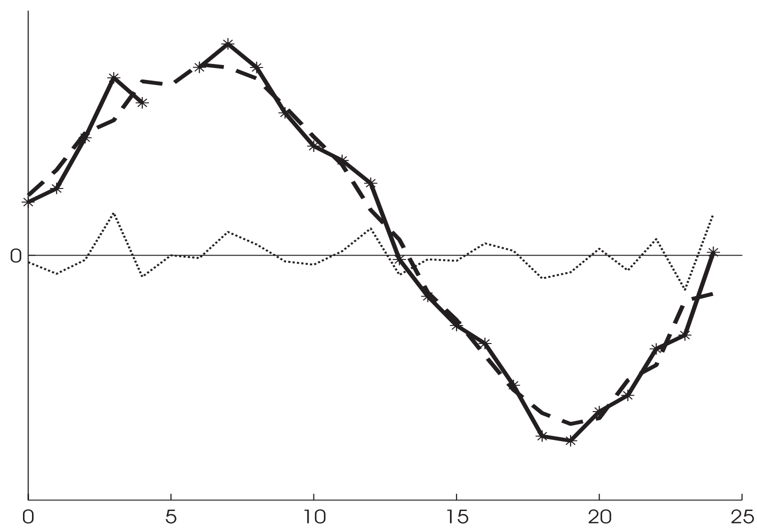


Obrázok 1.1: Priebeh procesu s chýbajúcou hodnotou

procesu.

$$\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}\| = \sqrt{\sum_{j \neq k} (f_j - \tilde{f}_j)^2}$$

Veľkosť chyby je v tomto prípade 7.77, odhadnutú hodnotu $\tilde{f}_k$ sme pri výpočte chyby nepoužili.



Obrázok 1.2: Priebeh procesu, jeho aproximácia pomocou aritmetického priemeru a chybový vektor

Pokúsime sa teraz úlohu vyriešiť všeobecnejšie. Budeme hľadať také hodnoty c_0, c_1, pre ktoré proces $\tilde{\mathbf{f}}$, so zložkami

$$\tilde{f}_k = c_0 f_{k-1} + c_1 f_{k+1}$$

bude najlepšie aproximovať pôvodný proces $\mathbf{f}$.
Vektorový zápis:

$$\tilde{\mathbf{f}} = c_0 \mathbf{b}_0 + c_1 \mathbf{b}_1$$

kde

$$\begin{array}{llllllll}
\mathbf{f} & =(f_0, & f_1, & \dots, & f_{k-1}, & *, & f_{k+1}, & \dots, & f_{N-1}) \\
\mathbf{b_0} & =(*, & f_0, & \dots, & f_{k-2}, & f_{k-1}, & *, & \dots, & f_{N-2}) \\
\mathbf{b_1} & =(f_1, & f_2, & \dots, & *, & f_{k+1}, & f_{k+2}, & \dots, & *)
\end{array}$$

To nastane vtedy, keď

$$||\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}|| \to \min$$

odtiaľ

$$(\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}) \perp \mathbf{b}_0 \quad \text{a} \quad (\mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}) \perp \mathbf{b}_1$$

a teda

$$\langle \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{b}_0 \rangle = 0 \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{b}_1 \rangle = 0$$

$$\begin{gathered}
\langle \mathbf{f} - c_0 \cdot \mathbf{b}_0 - c_1 \cdot \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0 \rangle = 0 \\
\langle \mathbf{f} - c_0 \cdot \mathbf{b}_0 - c_1 \cdot \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle = 0
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_0 \rangle - \langle c_0 \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0 \rangle - \langle c_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0 \rangle = 0 \\
\langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_1 \rangle - \langle c_0 \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1 \rangle - \langle c_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle = 0
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_0 \rangle - c_0 \langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0 \rangle - c_1 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0 \rangle = 0 \\
\langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_1 \rangle - c_0 \langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1 \rangle - c_1 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle = 0
\end{gathered}$$

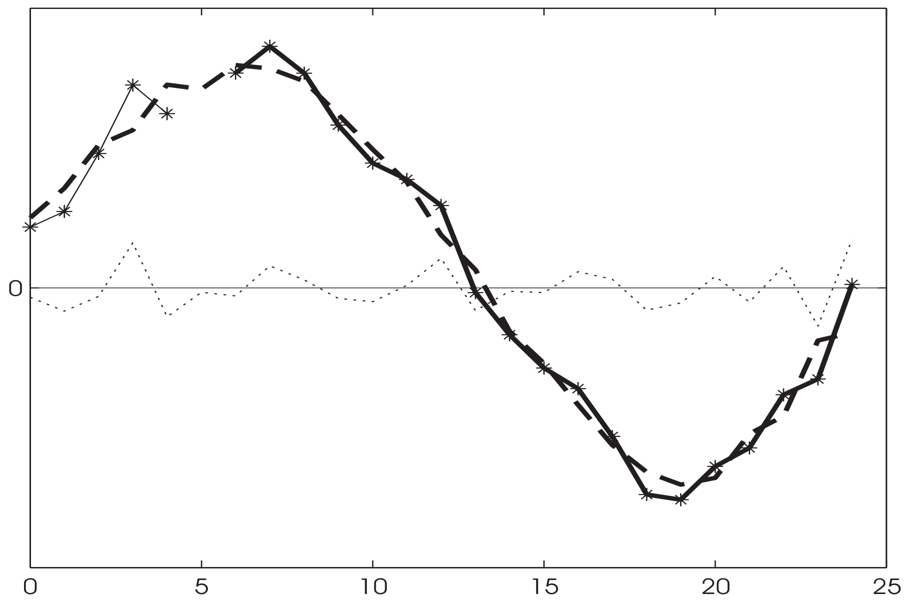
$$\begin{gathered}
c_0 \langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0 \rangle + c_1 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_0 \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_0 \rangle \\
c_0 \langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1 \rangle + c_1 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_1 \rangle
\end{gathered}$$

Dostaneme sústavu dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych.

$$\begin{aligned}
c_0 \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} f_j^2 + \sum_{j=k+1}^{N-2} f_j^2 \right) + c_1 \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-2} f_j \cdot f_{j+2} + \sum_{j=k-1}^{N-2} f_j \cdot f_{j+2} \right) &= \sum_{j=1, j\neq k}^{N-1} f_j \cdot f_{j-1} \\
c_0 \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-2} f_j \cdot f_{j+2} + \sum_{j=k-1}^{N-2} f_j \cdot f_{j+2} \right) + c_1 \cdot \left(\sum_{j=1}^{k-1} f_j^2 + \sum_{j=k+1}^{N-1} f_j^2 \right) &= \sum_{j=0, j\neq k}^{N-2} f_j \cdot f_{j+1}
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Riešením tejto sústavy budú koeficienty procesu $\tilde{\mathbf{f}}$ v báze $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_0}, \mathbf{b_1}\}$. Priebeh procesu s chýbajúcou hodnotou a jeho aproximácia procesom, ktorý použije na výpočet priemet do podpriestoru pomocou dvoch susedných hodnôt, sú zobrazené na obrázku **??**. Na obrázku je prerušovanou čiarou znázornený aj chybový proces, ktorého veľkosť je teraz menej ako v predošlom prípade, $||\mathbf{e}_2|| = 7.69$.

Hviezdičky na začiatku a na konci bázových procesov môžeme nahradiť hodnotami podľa povahy procesu, alebo pri výpočte skalárneho súčinu vynechať



Obrázok 1.3: Priebeh procesu, jeho aproximácia pomocou priemetu do podpriestoru a chybový vektor

príslušnú hodnotu vo všetkých vektoroch. Rovnako vynecháme vo všetkých procesoch súradnice zodpovedajúce chýbajúcej hodnote f_k.

Metóda získania koeficientov c_0, c_1 spočíva v hľadaní takého riešenia sústavy **??**, pri ktorom chyba aproximácie pôvodného procesu $\mathbf{f}$ procesom $\tilde{\mathbf{f}}$ bude minimálna. Koeficienty, ktoré minimalizujú veľkosť chyby sa môžu počítať pomocou diferenciálneho počtu rovnako dobre ako metódou prieniku do podpriestoru. Uvedený postup sa nazýva metóda **kĺzavých súčtov**.

Aritmetický alebo vážený priemer sa používa sa aj pri známej hodnote f_k. V prípade, že chceme proces vyhladiť, riešime úlohu **filtrácie procesu**. Predpokladajme, že namerané hodnoty sú

$$f_0, f_1, \dots, f_{k-1}, f_k, f_{k+1}, \dots, f_{N-1}$$

ale hodnota f_k je výrazne odlišná a chceme ju prispôsobiť ostatným hodnotám. Takáto situácia nastane napríklad keď chceme odstrániť šum na zvukovom zázname. Najjednoduchší postup bude, ak hodnotu f_k nahradíme aritmetickým priemerom susedných hodnôt:

$$\tilde{f}_k = \frac{f_{k-1} + f_{k+1}}{2}$$

To môžeme napísať aj ako

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2} f_{k-1} + \frac{1}{2} f_{k+1}$$

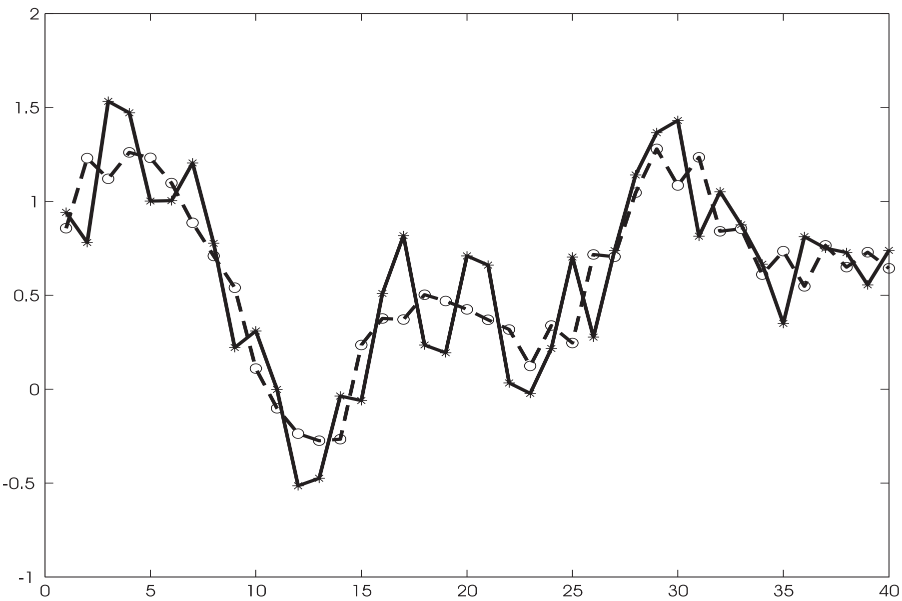
Všeobecnejší zápis a presnejší výsledok dostaneme, ak namiesto koeficientov $\frac{1}{2}$ použijeme vhodné koeficienty c_0 a c_1.

$$\tilde{f}_k = c_0 \cdot f_{k-1} + c_1 \cdot f_{k+1}$$

Úloha je, ako zvoliť c_0, c_1, aby sa filtrovaný proces, čo najviac podobal na pôvodný proces $\mathbf{f}$. Nový proces bude mať súradnice

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\mathcal{B}} = (c_0, c_1)$$

v báze $\mathcal{B}$, ktorú treba vhodne zvoliť. Bude sa teda jednať o priemet do dvojrozmerného vektorového priestoru, určeného bázou $\mathcal{B}$. Príklad procesu a jeho filtrácie je na obrázku **??**



Obrázok 1.4: Vyhladené dáta pomocou metódy kĺzavých súčtov, pôvodné dáta sú označené * a vyhladené sú označené o, použitý je model $\tilde{f}_k = c_0 f_{k-1} + c_1 f_{k+1}$

Ďalej budeme riešiť úlohu **extrapolácie procesu**. Predpokladajme, že namerané hodnoty procesu $\mathbf{f}$ sú $f_0, f_1, \ldots, f_{k+1}$. Chceme odhadnúť (predpovedať) ďalšiu hodnotu f_k, ktorú odhadujeme pomocou M predchádzajúcich hodnôt:

$$\tilde{f}_k = \sum_{j=1}^{M} c_j \cdot f_{k-j}$$

Príklad 1.1.1 *Ako bude vyzerať prediktor prvého rádu pre úlohu kĺzavých súčtov?*

Riešenie:
Ak $M = 1$, dostaneme $\tilde{f}_k = c \cdot f_{k-1}$.
Namerané sú hodnoty pôvodného procesu $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_{N-1})$, nový proces bude mať hodnoty

$$\tilde{\mathbf{f}} = (*, c\, f_0, c\, f_1, \ldots, c\, f_k, \ldots, c\, f_{N-2})$$

Báza $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_0}\}$ bude obsahovať jediný vektor $\mathbf{b}_0 = (*, f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_{N-2})$, pričom prvú zložku vektora $\mathbf{b}_0$ zanedbáme (hodnotu „*" nahradíme hodnotou

0).

$$c = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{b}_0 \rangle}{\langle \mathbf{b_0}, \mathbf{b_0} \rangle} = \frac{\langle (f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_{N-1}), (0, f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_{N-2}) \rangle}{\langle (0, f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_{N-2})(0, f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_{N-2}) \rangle}$$

$$c = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} f_k \cdot f_{k-1}}{\sum\limits_{k=0}^{N-1} f_{k-1}^2}$$

To bol prediktor, ktorý používa jednu hodnotu. Nazývame ho tiež prediktor prvého rádu. □

Úloha 1.1.1 *Odvoďte vzorec pre prediktor, ktorý používa tri hodnoty, teda prediktor tretieho rádu. Tieto hodnoty môžu byť tri posledné prechádzajúce hodnoty. Ale keď napríklad sledujeme vývoj peňažného kurzu, je lepšie brať do úvahy predošlý deň, predošlý týždeň a predošlý mesiac.*

Porovnajte účinnosť navrhovaných modelov na nejakých reálnych dátach.

1.2 Všeobecná formulácia úlohy

Vo všeobecnosti riešime úlohu lineárnej regresie pre model

$$\varphi(t_k) = \sum_{j=1}^{M} c_j \cdot f_j \tag{1.2.1}$$

V tomto modeli na rozdiel od klasickej úlohy lineárnej regresie v tvare $\varphi(t_k) = \sum\limits_{j=1}^{M} c_j \cdot \varphi_j(t_k)$ nie sú dopredu určené regresné funkcie $\varphi_j(t_k)$. Namiesto nich sú ako báza použité známe (namerané) hodnoty procesu f_j v nejakých určených časových okamihoch.

Predpokladáme, že hodnoty sú merané v pravidelných intervaloch, preto pre riešenie úloh kĺzavých súčtov je dôležité dodržať podmienku ekvidištantnosti časových okamihov, v ktorých sa merajú hodnoty procesu.

$$t_{j+1} = t_j + \Delta\, t, \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

Predchádzajúcu podmienku môžeme normalizovať a dostávame postupnosť časových okamihov:

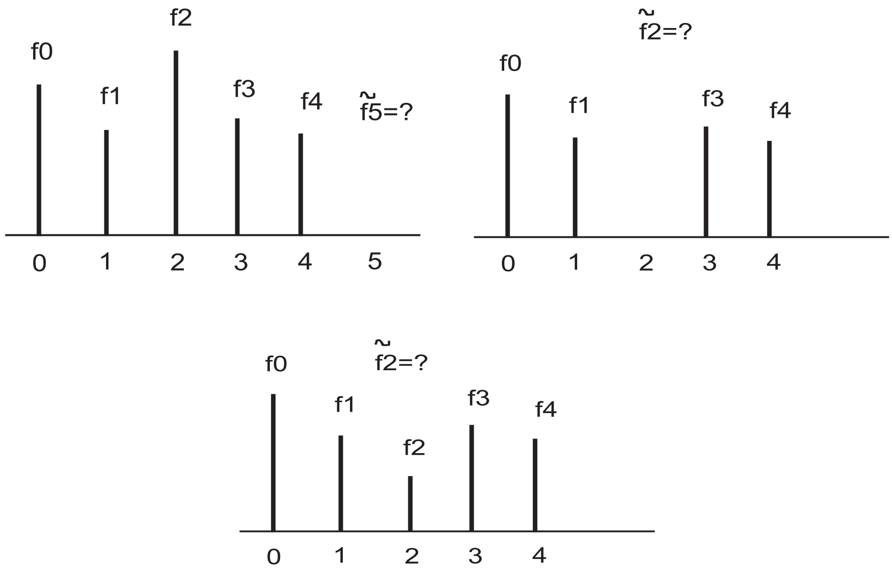
$$t_1 = 1,\; t_{j+1} = t_j + 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1$$

Podľa vzájomného vzťahu hodnôt k a M vo vyjadrení modelu **??** budeme riešiť úlohy:

$k > M$,	extrapolácia
$1 < k < M$,	interpolácia
$1 \leq k \leq M$,	filtrácia

Extrapolácia znamená odhadnúť nasledujúcu (budúcu) hodnotu procesu, ak poznáme jednu, alebo niekoľko predchádzajúcich hodnôt.
Interpolácia znamená odhadnúť chýbajúcu hodnotu ak sú známe hodnoty pred

a po tejto neznámej hodnote.
Filtrácia znamená nahradenie nameranej hodnoty procesu inou, takou, ktorá lepšie zodpovedá ostatným hodnotám procesu.
Schematický náčrt týchto postupov je na obrázku **??**



Obrázok 1.5: Extrapolácia, interpolácia a filtrácia procesu

Extrapolácia (predikcia)

Slovo extrapolácia v pôvodnom význame označovalo preloženie dát polynomickou funkciou, predpona extra tu znamená dopredu, alebo mimo oblasť známych hodnôt. Rieši sa úloha odhadnúť hodnotu procesu v nasledujúcom časovom okamihu, preto sa táto metóda nazýva aj predikcia. V úlohe sa odhaduje hodnota procesu pomocou vzťahu:

$$\tilde{f}_{k+1} = \sum_{j=0}^{M-1} c_j \cdot f_{k-j} \tag{1.2.2}$$

Uvažujme napríklad $M = 2$.

$$\tilde{f}_{k+1} = c_0 \cdot f_k + c_1 \cdot f_{k-1} \tag{1.2.3}$$

$\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})$
$\tilde{\mathbf{f}} = (0, 0, c_0 \cdot f_2 + c_1 \cdot f_1, c_0 \cdot f_3 + c_1 \cdot f_2, \ldots, c_0 \cdot f_{N-1-1} + c_1 \cdot f_{N-1-2})$

$\tilde{\mathbf{f}} = c_0 \cdot (0, 0, f_2, f_3, \ldots, f_{N-1-1}) + c_1 \cdot (0, 0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1-2})$

$\mathbf{b}_0 = (0, 0, f_2, f_3, \ldots, f_{N-1-1})$
$\mathbf{b}_1 = (0, 0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1-2})$

$\mathrm{d}\,(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{f}) \to min; \quad \mathrm{d}\,(c_0 \cdot \mathbf{b}_0 + c_1 \cdot \mathbf{b}_1, \mathbf{f}) \to min$

$$\mathbf{f}-(c_0\cdot\mathbf{b}_0+c_1\cdot\mathbf{b}_1)\perp\mathbf{b}_i;\qquad i=0,1$$
$$\langle\mathbf{f}-c_0\cdot\mathbf{b}_0-c_1\cdot\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_i\rangle=0;\qquad i=0,1$$

$$\begin{aligned}&i=0:\\&\langle(0,0,f_3-c_0f_2-c_1f_1,\dots,f_{N-1}-c_0f_{N-1-1}-c_1f_{N-1-2}),\\&(0,0,f_2,\dots,f_{N-1-1})\rangle=0\\&i=1:\\&\langle(0,0,f_3-c_0f_2-c_1f_1,\dots,f_{N-1}-c_0f_{N-1-1}-c_1f_{N-1-2}),\\&(0,0,f_1,\dots,f_{N-1-2})\rangle=0\end{aligned}$$

$$i=0:\sum_{k=3}^{N-1}(f_k-c_0f_{k-1}c_1f_{k-2})\,f_{k-1}=0$$
$$i=1:\sum_{k=3}^{N-1}(f_k-c_0f_{k-1}c_1f_{k-2})\,f_{k-2}=0$$

$$c_0\sum_{k=3}^{N-1}f_{k-1}^2+c_1\sum_{k=3}^{N-1}f_{k-2}f_{k-1}=\sum_{k=3}^{N-1}f_kf_{k-1}$$

$$c_0\sum_{k=3}^{N-1}f_{k-1}f_{k-2}+c_1\sum_{k=3}^{N-1}f_{k-2}^2=\sum_{k=3}^{N-1}f_kf_{k-2}$$

Koeficienty c_0 a c_1, ktoré sú riešením poslednej sústavy rovníc, použijeme vo vzťahu **??** pre odhad nasledujúcej hodnoty procesu.

Vráťme sa k všeobecnému tvaru **??** úlohy extrapolácie, v ktorej najprv proces $\mathbf{f}$ odhadneme procesom $\tilde{\mathbf{f}}$ a potom využijeme koeficienty tohoto odhadu na výpočet ďalších hodnôt procesu.

$$\tilde{f}_{k+1}=\sum_{j=0}^{M-1}c_j\cdot f_{k-j}$$

$$\begin{array}{l}\mathbf{f}=\\(f_0,\quad\dots\quad f_{M-1},\qquad f_M,\qquad\dots\qquad f_k,\qquad\dots\qquad f_{N-1})\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\tilde{\mathbf{f}}=\\(0,\quad\dots\quad 0,\quad \sum_{j=0}^{M-1}c_j\cdot f_{M-1-j}\quad\dots\quad\sum_{j=0}^{M-1}c_j\cdot f_{k-1-j}\quad\dots\quad\sum_{j=0}^{M-1}c_j\cdot f_{N-1-j})\end{array}$$

Príslušná báza bude mať tvar

$$\begin{array}{llcccccccc}
\text{miesto:} & & 0 & 1 & \dots & M-1 & M & \dots & k & \dots & N-1\\
\\
\mathbf{b}_0 & =(& 0, & 0 & \dots & 0, & f_{M-1}, & \dots & f_{k-1} & \dots & f_{N-2})\\
\mathbf{b}_1 & =(& 0, & 0 & \dots & 0, & f_{M-2}, & \dots & f_{k-2} & \dots & f_{N-3})\\
\vdots\\
\mathbf{b}_n & =(& 0, & 0 & \dots & 0, & f_{M-n-1}, & \dots & f_{k-n-1} & \dots & f_{N-n-2})\\
\vdots\\
\mathbf{b}_{M-1} & =(& 0, & 0 & \dots & 0, & f_0, & \dots & f_{k-M-1} & \dots & f_{N-M-2})
\end{array}$$

Vzdialenosť medzi $\mathbf{f}$ a $\tilde{\mathbf{f}}$ je minimálna ak platí

$$\langle \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{b}_n \rangle = 0, \quad \forall\, n = 0, 1, \dots, M-1$$

Po dosadení vektorov $\mathbf{f}$, $\tilde{\mathbf{f}}$ a $\mathbf{b}_n$ dostaneme

$$\Bigg\langle (f_0, f_1, \dots, f_{M-1}, f_M - \sum_{j=0}^{M-1} c_j \cdot f_{M-1-j}, \dots, f_k - \sum_{j=0}^{M-1} c_j \cdot f_{k-1-j}, \dots,$$

$$f_{N-1} - \sum_{j=0}^{M-1} c_j \cdot f_{N-1-j}), (0, 0, \dots, 0, f_{M-n-1}, \dots, f_{k-n-1}, \dots, f_{N-n-2}) \Bigg\rangle = 0$$

$$\sum_{k=M}^{N-1} \left(f_k - \sum_{j=0}^{M-1} c_j \cdot f_{k-1-j} \right) \cdot f_{k-1-n} = 0$$

Po roznásobení zátvorky a zámene súm dostávame vzorec na výpočet koeficientov pre úlohu extrapolácie.

$$\sum_{j=0}^{M-1} c_j \cdot \sum_{k=M}^{N-1} f_{k-1-j} \cdot f_{k-1-n} = \sum_{k=M}^{N-1} f_k f_{k-1-n} \qquad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (1.2.4)$$

Postup, ktorý využíva vzťah **??** sa nazýva aj lineárne prediktívne kódovanie a príslušné koeficienty sa označujú ako LPC koeficienty.

Interpolácia a filtrácia

Slovo interpolácia v pôvodnom význame označovalo preloženie dát polynomickou funkciou, predpona inter tu znamená dnu, alebo v oblasti známych hodnôt. Rieši sa úloha odhadnúť neznámu hodnotu, alebo nahradiť známu, ale nevyhovujúcu hodnotu procesu v časovom okamihu, ktorý sa nachádza medzi nameranými dátami. V úlohe filtrácie sa odhaduje hodnota procesu pomocou vzťahu:

$$\tilde{f}_k = c_0 \cdot f_k \sum_{j=1}^{M} (c_j \cdot f_{k-j} + c_{-j} \cdot f_{k+j}) \qquad (1.2.5)$$

V úlohe interpolácie sa odhaduje hodnota procesu pomocou vzťahu:

$$\tilde{f}_k = \sum_{j=1}^{M} (c_j \cdot f_{k-j} + c_{-j} \cdot f_{k+j}) \qquad (1.2.6)$$

Uvažujme napríklad $M = 1$.

$$\tilde{f}_k = c_1 \cdot f_{k-1} + c_{-1} \cdot f_{k+1} \qquad (1.2.7)$$

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1})$$
$$\tilde{\mathbf{f}} = (0, c_1 \cdot f_0 + c_{-1} \cdot f_2, c_1 \cdot f_1 + c_{-1} \cdot f_4, \dots, c_1 \cdot f_{N-3} + c_{-1} \cdot f_{N-1}, 0)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = c_1 \cdot (0, f_0, f_1, \dots, f_{N-3}, 0) + c_{-1} \cdot (0, f_2, f_3, \dots, f_{N-1}, 0)$$

$$\mathbf{b}_1 \ \ = (0, f_0, f_1, \dots, f_{N-3}, 0)$$
$$\mathbf{b}_{-1} = (0, f_2, f_3, \dots, f_{N-1}, 0)$$

$$\mathrm{d}\,(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{f}) \to min; \quad \mathrm{d}\,(c_1 \cdot \mathbf{b}_1 + c_{-1} \cdot \mathbf{b}_{-1}, \mathbf{f}) \to min$$

$$\mathbf{f} - (c_1 \cdot \mathbf{b}_1 + c_{-1} \cdot \mathbf{b}_{-1}) \perp \mathbf{b}_i; \quad i = -1, 1$$
$$\langle \mathbf{f} - c_1 \cdot \mathbf{b}_1 - c_{-1} \cdot \mathbf{b}_{-1}, \mathbf{b}_i \rangle = 0; \quad i = -1, 1$$

$$\begin{aligned}
&i = 1: \\
&\langle (f_0, f_1 - c_1 f_0 - c_{-1} f_2, \ldots, f_{N-2} - c_1 f_{N-3} - c_{-1} f_{N-1}, f_{N-1}), \\
&(0, f_0, \ldots, f_{N-3}, 0) \rangle = 0 \\
&i = -1: \\
&\langle (f_0, f_1 - c_1 f_0 - c_{-1} f_2, \ldots, f_{N-2} - c_1 f_{N-3} - c_{-1} f_{N-1}, f_{N-1}), \\
&(0, f_2, \ldots, f_{N-1}, 0) \rangle = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i = 1: &\quad \sum_{k=1}^{N-2} (f_k - c_1 f_{k-1} c_{-1} f_{k+1})\, f_{k-1} = 0 \\
i = -1: &\quad \sum_{k=1}^{N-2} (f_k - c_1 f_{k-1} c_{-1} f_{k+1})\, f_{k+1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 \sum_{k=1}^{N-2} f_{k-1}^2 + c_{-1} \sum_{k=1}^{N-2} f_{k-1} \cdot f_{k+1} &= \sum_{k=1}^{N-2} f_k \cdot f_{k-1} \\
c_1 \sum_{k=1}^{N-2} f_{k-1} \cdot f_{k+1} + c_{-1} \sum_{k=1}^{N-2} f_{k+1}^2 &= \sum_{k=1}^{N-2} f_k \cdot f_{k+1}
\end{aligned}$$

Koeficienty c_1 a c_{-1}, ktoré sú riešením poslednej sústavy rovníc, použijeme vo vzťahu **??** pre odhad chýbajúcej, alebo chybnej hodnoty procesu.

Vráťme sa k všeobecnému tvaru **??** úlohy interpolácie, v ktorej najprv proces $\mathbf{f}$ odhadneme procesom $\tilde{\mathbf{f}}$ a potom využijeme koeficienty tohoto odhadu na výpočet chýbajúcich hodnôt procesu.

$$\tilde{f}_k = \sum_{j=1}^{M} (c_j \cdot f_{k-j} + c_{-j} \cdot f_{k+j}) = \sum_{j=-M;\, j \neq 0}^{M} c_j \cdot f_{k-j}$$

V nasledujúcich úvahách budeme uvažovať $c_0 = 0$.

$$\mathbf{f} = \\ (f_0, \ldots, f_{M-1}, f_M, \ldots, f_k, \ldots, f_{N-1-M}, f_{N-1-M+1}, \ldots, f_{N-1})$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \\ (\underbrace{0, \ldots, 0}_{M}, \sum_{j=-M}^{M} c_j \cdot f_{M-j}, \ldots, \sum_{j=-M}^{M} c_j \cdot f_{k-j}, \ldots, \sum_{j=-M}^{M} c_j \cdot f_{N-1-M-j}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{M})$$

Príslušná báza bude mať tvar

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{miesto:} & 0 & \ldots & M-1 & M, & \ldots & N-1-M & N-M & N-1 \\
\\
\mathbf{b}_1 = (& 0, & \ldots & 0, & f_{M-1}, & \ldots & f_{N-M-2}, & 0, & \ldots, 0) \\
\mathbf{b}_{-1} = (& 0, & \ldots & 0, & f_{M+1}, & \ldots & f_{N-M}, & 0, & \ldots, 0) \\
\vdots \\
\mathbf{b}_n = (& 0, & \ldots & 0, & f_{M-n}, & \ldots & f_{N-1-M-n}, & 0, & \ldots, 0) \\
\vdots \\
\mathbf{b}_M = (& 0, & \ldots & 0, & f_0, & \ldots & f_{N-1-2M}, & 0, & \ldots, 0) \\
\mathbf{b}_{-M} = (& 0, & \ldots & 0, & f_{2M}, & \ldots & f_{N-1}, & 0, & \ldots, 0)
\end{array}$$

Vzdialenosť medzi $\mathbf{f}$ a $\tilde{\mathbf{f}}$ je minimálna ak platí

$$\langle \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{b}_n \rangle = 0, \quad \forall\, n = -M, \ldots, M$$

Po dosadení vektorov $\mathbf{f}$, $\tilde{\mathbf{f}}$ a $\mathbf{b}_n$ dostaneme

$$\Bigg((\underbrace{f_0, \ldots, f_{M-1}}_{M}, f_M - \sum_{j=-M}^{M} c_j \cdot f_{M-j}, \ldots, f_{N-1-M} - \sum_{j=-M}^{M} c_j \cdot f_{N-1-M-j},$$

$$\underbrace{f_{N-M}, f_{N-M+1}, \ldots, f_{N-1}}_{M}), (\underbrace{0, \ldots, 0}_{M}, f_{M-n}, \ldots, f_{N-1-M-n}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{M}) \Bigg) = 0$$

$$\sum_{k=M}^{N-1-M} \left(f_k - \sum_{j=-M}^{M} c_j \cdot f_{k-j} \right) f_{k-n} = 0$$

Po roznásobení zátvorky a zámene súm dostávame vzorec na výpočet koeficientov pre úlohu interpolácie.

$$\sum_{j=-M}^{M} c_j \cdot \sum_{k=M}^{N-1+M} f_{k-j} \cdot f_{k-n} = \sum_{k=M}^{N-1+M} f_k f_{k-n} \tag{1.2.8}$$

kde $n = -M, \ldots, M-1, \quad n \neq 0$
Koeficienty vypočítané riešením sústavy **??** sa využijú vo vzorci **??** na interpoláciu, alebo filtráciu procesu $\mathbf{f}$.

Úloha 1.2.1 *Navrhnite postup, ako použiť metódu kĺzavých súčtov v prípade, že intervaly, v ktorých sú hodnoty procesu namerané, nie sú ekvidištantné.*