3.2 SKALÁRNY SÚČIN

Zo štúdia Euklidovho priestoru sa ukazuje užitočné vedieť priradiť dvom vektorom z daného priestoru hodnotu skalára. To napr. umožňuje určiť uhol, ktorý tieto dva vektory zvierajú a nasledovne definovať pojem kolmosti dvoch vektorov, ktorý zjednodušuje mnohé výpočty vo vektorovom priestore. Nevieme však definovať pojem skalárneho súčinu všeobecne pre všetky typy signálových priestorov, ale rozdelíme ich na tri druhy: reálny signálový priestor, komplexný signálový priestor a signálový priestor číslicových signálov.

3.3 REÁLNY SIGNÁLOVÝ PRIESTOR

Definícia:

Nech je daný signálový priestor φ nad poľom $(R, +, .)$. Ak pre každé $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \in \varphi$ a $k \in R$ je daná reálna funkcia $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \in R$ tak, že platí

- $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1)$ (symetria)
- $(\mathbf{f}_1 \oplus \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3) + (\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ (bilinearita)
- $(k \odot \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = k \, . \, (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$
- $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) \geq 0$ pričom $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$ (pozitívnosť)

potom funkciu $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ nazývame skalárnym súčinom signálov $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ a uvedený signálový priestor reálnym signálovým priestorom. Z definície vidíme, že priestory signálov so spojitou abecedou sú s vhodne definovaným skalárnym súčinom reálnymi signálovými priestormi. Vlastnosti reálneho signálového priestoru sa rozvinú, ak dáme do súvislosti pojmy skalárneho súčinu a veľkosti vektora.

Dohovor: V ďalšom texte bude daná veľkosť vektora $\mathbf{f}$ z reálneho signálového priestoru φ vzťahom

$$\|\mathbf{f}\| = +\sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}$$

Príklad 1 - Signálový priestor deterministických diskrétnych signálov

Nech φ je signálový priestor deterministických diskrétnych signálov a $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in \varphi$

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$$

$$\mathbf{f}' = (f_0', f_1', \dots, f_n')$$

Potom funkcia

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \sum_{i=0}^{n} f_i \, . \, f_i' \qquad \text{je skalárnym súčinom.}$$

Príklad 2 - Signálový priestor deterministických spojitých signálov

Nech φ je signálový priestor deterministických spojitých signálov a $\mathbf{f}, \mathbf{f} \in \varphi$

$$\mathbf{f} = f(t) , \quad t \in T$$

$$\mathbf{f}' = f'(t), \quad t \in T$$

Potom funkcia

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \int_T f(t) \cdot f'(t) \, dt$$

je skalárnym súčinom.

Príklad 3 - Signálový priestor náhodných diskrétnych signálov

Nech φ je signálový priestor náhodných diskrétnych signálov a $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in \varphi$

$$\mathbf{f} = (f(\omega, t_o), f(\omega, t_1), \ldots, f(\omega, t_n))$$

$$\mathbf{f}' = (f'(\omega, t_o), f(\omega, t_1), \ldots, f(\omega, t_n))$$

kde $\omega \in \Omega$, $t_i \in T$; $i = 0, 1, \ldots, n$. Potom funkcia

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \mathcal{E} \left\{ \sum_{i=0}^{n} f(\omega, t_i) \cdot f'(\omega, t_i) \right\}$$

je skalárnym súčinom.

Príklad 4 - Signálový priestor náhodných spojitých signálov

Nech φ je signálový priestor náhodných spojitých signálov a $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in \varphi$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\omega, t) , \qquad \omega \in \Omega , \quad t \in T$$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f}'(\omega, t) , \qquad \omega \in \Omega , \quad t \in T$$

Potom funkcia

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \mathcal{E} \left\{ \int_T f(\omega, t) \cdot f'(\omega, t) \, dt \right\}$$

je skalárnym súčinom.

Zo skalárneho súčinu uvedeného v predchádzajúcich príkladoch je odvodená aj veľkosť signálu. V prípade deterministického diskrétneho signálu bude jeho veľkosť

$$\| \mathbf{f} \| = + \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} = + \sqrt{\sum_{i=0}^{n} f_i^2}$$

Ak napr. je signálom postupnosť hodnôt elektrického napätia na odpore $1\,\Omega$ potom druhú mocninu dĺžky signálu môžeme interpretovať ako energiu signálu

$$E = \|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{i=0}^{n} f_i^2$$

Rovnako aj u signálu spojitého budeme výraz

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \int_T f^2(t)\,dt$$

chápať ako energiu signálu. U náhodných signálov potom výrazy

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \mathcal{E}\left\{ \sum_{i=0}^{n} f^2(\omega, t_i) \right\}$$

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \mathcal{E}\left\{ \int_T f^2(\omega, t)\,dt \right\}$$

udávajú strednú hodnotu energie signálu.

3.4 KOMPLEXNÝ SIGNÁLOVÝ PRIESTOR

Napriek tomu, že v tejto učebnej pomôcke sa nezaoberáme viacrozmernými signálmi, je užitočné kvôli zjednodušeniu niektorých výpočtov zaviesť pojem komplexného signálového priestoru.

<u>Definícia:</u>

Nech je daný signálový priestor φ nad poľom komplexných čísel $(C, +, .)$ Ak pre každé $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \in \varphi$ a $k \in C$ je daná komplexná funkcia $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \in$ tak, že platí:

- $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \overline{(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1)}$ (antisymetria)
- $(\mathbf{f}_1 \oplus \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3) + (\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ (bilinearita)
- $(k \odot \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = k \cdot (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$
- $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) \geq 0$ pričom $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}_1 = 0$ (pozitívna definitnosť)

potom funkciu $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ nazývame skalárnym súčinom signálov $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ a uvede[illegible] signálový priestor komplexným signálovým priestorom.

Rovnako ako u reálneho vektorového priestoru budeme veľkosť signálu $\mathbf{f} \in$ [illegible] určovať vzťahom

$$\mathbf{f}_1 = f_1(t)\ ,\ \mathbf{f}_2 = f_2(t)\ ; \qquad t \in T$$

$$\mathbf{g}_1 = g_1(t)\ ,\ \mathbf{g}_2 = g_2(t)\ ; \qquad t \in T$$

Označme

$$\mathbf{f} = f_1(t) + j\ f_2(t) = f(t)$$

$$\mathbf{g} = g_1(t) + j\ f_2(t) = g(t)$$

Potom funkcia

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_T f(t) \cdot \overline{g}(t)\ dt$$

je skalárnym súčinom $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$.

Príklad 3:

Nech φ je signálový priestor náhodných diskrétnych signálov a $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2 \in \varphi$

$$\mathbf{f}_1 = (f_1(\omega, t_o), f_1(\omega, t_1), \ldots, f_1(\omega, t_n))\ , \qquad \omega \in \Omega\ , \quad t_i \in T$$

$$\mathbf{f}_2 = (f_2(\omega, t_o), f_2(\omega, t_2), \ldots, f_2(\omega, t_n)), \quad \text{pre} \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

$$\mathbf{g}_1 = (g_1(\omega, t_o), g_1(\omega, t_1), \ldots, g_1(\omega, t_n)),$$

$$\mathbf{g}_2 = (g_2(\omega, t_o(, g_2(\omega, t_1), \ldots, g_2(\omega, t_n))$$

Ďalej nech

$$\mathbf{f} = (f(\omega, t_o), f(\omega, t_1), \ldots, f(\omega, t_n))$$

$$\mathbf{g} = (g(\omega, t_o), g(\omega, t_1), \ldots, g(\omega, t_n))$$

kde

$$f(\omega, t_i) = f_1(\omega, t_i) + j \cdot f_2(\omega, t_i)$$

$$g(\omega, t_i) = g_1(\omega, t_i) + j \cdot g_2(\omega, t_i)$$

Potom funkcia

$$(f, g) = \mathcal{E} \left\{ \sum_{i=0}^{n} f(\omega, t_i) \cdot \overline{g}(\omega, t_i) \right\}$$

je skalárnym súčinom $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$.

$$0 \leq \| \mathbf{f} \|^2 - \frac{|(\mathbf{f}, \mathbf{f}')|^2}{\| \mathbf{f}' \|^2}$$

$$|(\mathbf{f}, \mathbf{f})| < \| \mathbf{f} \| . \| \mathbf{f}' \|$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, ak $\mathbf{f} = k \cdot \mathbf{f}'$, t.j. signály sú lineárne závisl

3.5 SIGNÁLOVÝ PRIESTOR S NEKONEČNOU DIMENZIOU

Pokiaľ pracujeme s konečnorozmernými signálovými priestormi, nevznikajú žiadne zvláštne problémy. V signálových priestoroch s nekonečnou dimenziou musíme zvlášť dbať na otázky konvergencie.

Definícia:

Nech $\{\mathbf{f}_n\}$ je postupnosť signálov metrického signálového priestoru $(\varphi, d$ taká, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje N tak, že pre ľubovoľné $n, m > N$ platí

$$d(\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_m) < \varepsilon$$

Ak pre každú takúto postupnosť existuje signál $\mathbf{f}$ tak, že

$$\lim_{n \to \infty} d \left(\mathbf{f}, \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_n \right) = 0$$

potom metrický priestor voláme úplný.

Definícia:

Úplný metrický priestor, v ktorom je definovaný skalárny súčin voláme Hilbertov priestor.
Definícia Hilbertovho priestoru zaručuje, že ku každej postupnosti, v ktorej sa vzdialenosť medzi signálmi zmenšuje, bude existovať signál, ku ktorému táto postupnosť konverguje. Nás však zaujímajú aj opačné otázky:

- či ku každému vektoru z Hilbertovho priestoru existuje konvergentný rozklad
- kedy sa tento rozklad bude rovnať rozkladanému vektoru.

Na tieto otázky odpovieme v ďalšej kapitole, v ktorej budeme študovať rozklady signálov do systému navzájom kolmých signálov.

Príklad 1:

Jedným z najdôležitejších Hilbertových priestorov je priestor $L_2(a,b)$, ktorý je definovaný takto:

Nech (φ, d) je komplexný nekonečnorozmerný signálový priestor spojitých deterministických signálov $\mathbf{f} = f(t)$ definovaných na intervale $T = (a,b)$ s konečnou energiou

$$\int_a^b |f(t)|^2 \, dt < \infty$$

so skalárnym súčinom $(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \int_a^b f(t) \cdot \overline{f'(t)} \, dt$

Poznámka: Ztotožňujeme signály, ktoré sa líšia len v spočetne veľa časových okamihoch. Obmedzili sme sa len na signály integrovateľné v zmysle Riemanovho integrálu.

Príklad 2:

Nech (φ, d) je komplexný signálový nekonečnorozmerný priestor diskrétnych deterministických signálov $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots .)$ s konečnou energiou

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2 < \infty$$

so skalárnym súčinom

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot f_i'$$

Tento signálový priestor je Hilbertov a označujeme ho ℓ_2.

Príklad 3:

Nech (φ, d) je komplexný nekonečnorozmerný priestor spojitých náhodných signálov $\mathbf{f} = f(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$ s konečnou strednou energiou

$$\mathcal{E} \left\{ \int_T |f(\omega, t)|^2 \, dt \right\} < \infty$$

so skalárnym súčinom

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \mathcal{E} \left\{ \int_T f(\omega, t) \cdot \overline{f'(\omega, t)} \, dt \right\}$$

Takto definovaný signálový priestor je Hilbertovým priestorom a označujeme ho $L_2(\Omega, \varphi, P)$.

Príklad 4:

Nech (φ, d) je komplexný nekonečnorozmerný priestor diskrétnych náhodných signálov $\mathbf{f} = (f(\omega, t_1), f(\omega, t_2), \dots) \; \omega \in \Omega$, $t_1 = i$, $i = 1, 2, \dots$ s konečnou strednou energiou

$$\mathcal{E}\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |f(\omega, t_i)|^2 \right\} < \infty$$

so skalárnym súčinom

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \mathcal{E}\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} f(\omega, t_i) \cdot \overline{f'(\omega, t_i)} \right\}$$

Takto definovaný signálový priestor je Hilbertovým priestorom a označujeme h
$\ell_2(\Omega, \varphi, P)$.

3.6 KÓDOVÝ SIGNÁLOVÝ PRIESTOR

Kódovým signálovým priestorom budeme nazývať signálový priestor číslicov signálov. Z definície signálového priestoru vieme, že skaláry s definovaným súčtom a súčinom musia tvoriť pole.

Definícia:

Nech je daný signálový priestor φ nad poľom $(F, \underset{p}{\oplus}, \underset{p}{\odot})$, kde p je prvočíslo a $F = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, signálov

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_n), \quad f_i \in F, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad n \in N$$

resp.

$$\mathbf{f} = f_0 + f_{1x} + \ldots + f_n x^n, \quad f_i \in F, \quad i = 0, 1, \ldots, n \quad n \in N$$
$$x \notin F$$

Skalárnym súčinom signálov $\mathbf{f}, \mathbf{f} \in \varphi$ nazývame funkciu

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \sum_{i=0}^{n} f_i \underset{p}{\odot} f'_i$$

kde súčet chápeme mod(p). Uvedený signálový priestor nazývame kódovým signálovým priestorom.

Odvodenie vzdialenosti dvoch vektorov od skalárneho súčinu je nedostatočné. Napr. pre binárne číslicové signály, kedy $p = 2$ nadobúda skalárny súčin len hodnoty 0 alebo 1. Preto vzdialenosť medzi číslicovými signálmi definujeme odlišným spôsobom. Jednu možnosť sme uviedli v príklade 3 kapitoly 3.1.

Definícia:

Nech φ je kódový signálový priestor $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in \varphi$ a

$$h_i(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \begin{cases} 0, & f_i = f_i' \\ 1, & f_i \neq f_i' \end{cases}$$

Potom funkciu

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \sum_{i=0}^{n} h_i(\mathbf{f}, \mathbf{f}')$$

kde sumáciu chápeme ako obyčajný súčet celých čísel, voláme Hammingovou vzdialenosťou signálov $\mathbf{f}, \mathbf{f}'$.

Hammingova vzdialenosť je najpoužívanejšou mierou v priestore číslicových signálov. Nie je však jedinou. Pre opis procesu vzniku chýb v systémoch s fázovou moduláciou sa osvedčila vzdialenosť Lee.

Definícia:

Nech φ je kódový signálový priestor $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in \varphi$ a

$$\ell_i(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \min \left(|f_i - f_i'|, \; p - |f_i - f_i'| \right)$$

Potom funkciu

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \sum_{i=0}^{n} \ell_i(f, f')$$

kde sumáciu chápeme ako obyčajný súčet celých čísel, voláme Leeovou vzdialenosťou signálov $\mathbf{f}, \mathbf{f}'$.

Poznámka: Pre $p = 2,3$ je Hammingova a Leeova vzdialenosť rovnaká. Na rozdiel od komplexného a reálneho priestoru neexistuje v kódovom priestore súvislosť medzi vzdialenosťou signálov a ich skalárnym súčinom. Tým prichádzame v kódovom priestore o veľa užitočných vlastností komplexného signálového priestoru. Aby sme vlastnosti kódového priestoru rozšírili, kladieme na prvky kódového priestoru ďalšie algebraické obmedzenia. Podrobnejšie o tom bude napísané v kapitole 7. Úroveň kóder zdroja-dekóder prijímača.