Rudolf Blaško

MATEMATICKÁ ANALÝZA I

Rudolf Blaško

MATEMATICKÁ ANALÝZA I

2014

beerb@frcatel.fri.uniza.sk http://frcatel.fri.uniza.sk/~beerb

Predhovor

Učebnica Matematická analýza 1 sa snaží zaplniť dlhodobú čiernu dieru medzi učebnicami určenými pre študentov, ktorí študujú na našich vysokých školách a univerzitách. Učebníc matematickej analýzy (reálne funkcie jednej reálnej premennej a ich diferenciálny počet) bolo do dnešnej doby napísaných dosť, ale vo väčšine prípadov je problém ich získať. Preto sa táto učebnica snaží zjednodušiť život študentom prvého ročníka pri štúdiu uvedených tém.

V predkladanej učebnici sa čitateľ, dúfam, že prístupným spôsobom zoznámi s látkou predpísanou osnovami daného predmetu. Autor predpokladá základné vedomosti čitateľa zo strednej školy. Lenže vedomostná úroveň z matematiky študentov, ktorí nastupujú do prvého ročníka je rôzna a vplyvom rôznych ministerských zlepšovákov čím ďalej horšia. Preto sú v prvej kapitole vysvetlené základné pojmy, ktoré sú nevyhnutné pre ďalšie štúdium a vzdelanejší čitateľ ich môže preskočiť.

Látka je členená do štyroch kapitol a jednotlivých podkapitol. Na konci každej podkapitoly sú cvičenia, na ktorých si má študujúci overiť či porozumel vysvetľovanej látke. Výsledky cvičení sú uvedené v závere knihy a odkazuje sa na ne symbolom ♣ na konci zadania príkladu. Pre spoľahlivé a trvalé zvládnutie látky je nutné ich prepočítanie. Veľa študentov túto skutočnosť podceňuje a zistí až pred skúškou, že nie je čas na dobehnutie zameškaného. Ale, keďže počet príkladov uvedených v publikácii je z pochopiteľných dôvodov obmedzený, sú uvedené v prehľade literatúry ďalšie zbierky úloh a príkladov, z ktorých môže hĺbavý čitateľ čerpať. Dôkazy viet, tvrdení, liem a riešenia príkladov sú ukončené symbolom ■. Učebnica končí registrom pojmov s odkazmi na strany, na ktorých ich čitateľ nájde.

V závere učebnice je uvedený register pojmov s odkazmi na strany, na ktorých uvedené pojmy nájdete. Za registrom nasleduje prehľad literatúry, ktorý obsahuje nielen literatúru použitú autorom, ale aj inú doporučenú literatúru.

Definované pojmy sú kvôli prehľadnosti zobrazené tučným písmom. Vo formuláciách matematických viet sú niekedy použité symboly $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, prípadne $\Leftarrow$ (viď str. 4). Vzťah $A \Rightarrow B$ čítame „*Ak platia predpoklady (tvrdenia) A, potom platia závery (tvrdenia) B.*“ a vzťah $A \Leftrightarrow B$ čítame „*Tvrdenia A platia práve vtedy, ak platia tvrdenia B.*“.

Keďže nikto nie je dokonalý, prípadné zistené chyby a nedostatky, ako aj návrhy na ďalšie zlepšenie učebnice, môžete adresovať na adresu Katedry matematických metód, ktorej je autor členom, prípadne na e-mail adrese `beerb@frcatel.fri.uniza.sk`.

Žilina, január 2014 autor

Žiaľ, motto mnohých študentov a žiaľ aj učiteľov a dokonca aj ministrov:

Od učenia ešte nikto nezomrel, ale načo riskovať.

GTUBB

Obsah

Predhovor 1
Úvod 12
Vznik a vývoj matematickej analýzy 12
Predmet a obsah matematickej analýzy 13

1 Základné pojmy **1**
1.1 Logika 1
1.1.1 Výrazy a výroky 1
1.1.2 Logické operácie 3
1.1.3 Výrokové formy 5
1.1.4 Niektoré dôležité tautológie 7
1.1.5 Kvantifikátory 10
Cvičenia 13
1.2 Základné prvky matematickej teórie 15
1.2.1 Priamy dôkaz 16
1.2.2 Nepriamy dôkaz 16
1.2.3 Dôkaz matematickou indukciou 17
1.2.4 Poznámka k dôkazom 19
1.2.5 Sumačná a súčinová symbolika 21
Cvičenia 23
1.3 Množiny 26
1.3.1 Množina a podmnožina 26
1.3.2 Operácie s množinami 27
1.3.3 Zobrazenie množín 31
1.3.4 Mohutnosť množín 36
Cvičenia 40

2 Reálne čísla **43**
2.1 Algebraické vlastnosti reálnych čísel 43
2.1.1 Úvodné poznámky 43
2.1.2 Axiómy reálnych čísel 44
2.1.3 Dôsledky axióm operácií sčítania a násobenia 46
2.1.4 Dôsledky axióm usporiadania 49

2.1.5 Dôsledky axiómy o najmenšom hornom ohraničení . . . 52
2.1.6 Niektoré ďalšie dôsledky axióm reálnych čísel . . . 54
Cvičenia . . . 70
2.2 Topologické a metrické vlastnosti reálnych čísel . . . 72
2.2.1 Okolie bodu . . . 72
2.2.2 Otvorené a uzavreté množiny . . . 75
2.2.3 Metrické vlastnosti čísel . . . 80
2.2.4 Metrické priestory . . . 84
Cvičenia . . . 88
2.3 Postupnosti reálnych čísel . . . 90
2.3.1 Základné pojmy . . . 90
2.3.2 Limita postupnosti . . . 92
2.3.3 Prehľad základných tvrdení . . . 97
2.3.4 Eulerovo číslo . . . 108
2.3.5 Postupnosti bodov metrických priestorov . . . 119
Cvičenia . . . 120
2.4 Číselné rady . . . 124
2.4.1 Základné pojmy . . . 124
2.4.2 Vlastnosti konvergentných radov . . . 129
2.4.3 Číselné rady s nezápornými členmi . . . 133
2.4.4 Absolútna, relatívna konvergencia a alternujúce rady . . . 142
2.4.5 Prerovnanie radov a rady s predpísaným súčtom . . . 149
2.4.6 Súčiny číselných radov . . . 154
Cvičenia . . . 160
2.5 Komplexné čísla . . . 165
2.5.1 Operácie s komplexnými číslami . . . 165
2.5.2 Geometrická interpretácia komplexných čísel . . . 166
2.5.3 Postupnosti komplexných čísel . . . 170
Cvičenia . . . 171

3 Reálne funkcie reálnej premennej 173
3.1 Reálne funkcie . . . 173
3.1.1 Základné vlastnosti funkcií . . . 178
3.1.2 Operácie s funkciami . . . 186
3.1.3 Elementárne funkcie . . . 190
3.1.4 Krivky . . . 204
Cvičenia . . . 238
3.2 Limita funkcie . . . 242
3.2.1 Základné vlastnosti . . . 244
3.2.2 Limita vzhľadom na množinu a jednostranné limity . . . 253
3.2.3 Asymptotické vlastnosti . . . 257

3.2.4 Riešené príklady 263
Cvičenia 271
3.3 Spojitosť funkcie 273
3.3.1 Spojitosť funkcie v bode 274
3.3.2 Spojitosť funkcie na množine a body nespojitosti 278
3.3.3 Vlastnosti spojitých funkcií na intervale 280
Cvičenia 289

4 Diferenciálny počet reálnej funkcie 291
4.1 Derivácia reálnej funkcie 291
4.1.1 Definícia derivácie funkcie a jej základné vlastnosti 291
4.1.2 Jednostranné derivácie a derivácia na množine 294
4.1.3 Základné vety pre výpočet derivácií 297
4.1.4 Derivovanie elementárnych funkcií 303
Cvičenia 305
4.2 Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov 309
4.2.1 Diferenciál a diferencovateľnosť funkcie 309
4.2.2 Využitie diferenciálu na približné výpočty 311
4.2.3 Derivácie vyšších rádov 314
4.2.4 Pojem diferenciálu vyššieho rádu 317
Cvičenia 318
4.3 Aplikácie diferenciálneho počtu 319
4.3.1 Vety o strednej hodnote funkcie 319
4.3.2 L'Hospitalovo pravidlo 327
4.3.3 Neurčité výrazy 332
4.3.4 Taylorov polynóm 335
4.3.5 Vyšetrovanie priebehu funkcie 343
4.3.6 Derivácia funkcie zadanej parametricky, implicitne a v polárnych súradniciach . 369
Cvičenia 378
Výsledky cvičení 385
Register 394
Literatúra 408

Zoznam obrázkov

1.2.1 Pascalov trojuholník. 25
1.3.2 Prienik, zjednotenie, rozdiel, symetrický rozdiel a doplnok množín. 29
1.3.3 Injekcia f_1, sujekcie f_2, f_3 a bijekcia f_4 z príkladu 1.3.12. 33
1.3.4 Zložené zobrazenie $F = g(f)$ z príkladu 1.3.16. 34

2.1.1 Reálna číselná os. 57
2.1.2 Celá a lomená časť čísla a. 58
2.1.3 Obrázok k príkladu 2.1.6. 60
2.1.4 Absolútna hodnota čísla a. 61
2.1.5 Signum čísla a. 61
2.2.6 Okolie $O(A)$ bodu A na priamke, v rovine a v priestore. 73
2.2.7 Vlastnosti (O2), (O3), (O4) okolí bodov. 73
2.2.8 Obrázok k vete 2.2.1. 74
2.2.9 Množiny $\operatorname{int}(a;\, b\rangle$, $\partial(a;\, b\rangle$, $\operatorname{ext}(a;\, b\rangle$ z príkladu 2.2.2 c). 76
2.2.10 Obrázok k príkladu 2.2.2 d). 76
2.2.11 Obrázok ku príkladu 2.2.4. 78
2.2.12 Obrázok k poznámke 2.2.14. 83
2.3.13 Obrázok k príkladu 2.3.9. 97
2.3.14 Obrázok k dôkazu vety 2.3.14 a). 103
2.3.15 Lomená čiara z cvičenia 2.3.30. 123
2.4.16 Príklad 2.4.1. 124
2.4.17 Príklad 2.4.2. 124
2.4.18 Cvičenie 2.4.22. 163
2.4.19 Cvičenie 2.4.23. 163
2.4.20 Cvičenie 2.4.24. 164
2.4.21 Cvičenie 2.4.25. 164
2.5.22 Rovina komplexných čísel. 167
2.5.23 Súčet komplexných čísel. 167
2.5.24 Hodnota argumentu φ komplexného čísla $z = a + \mathrm{i}\, b$. 167
2.5.25 Rovinná projekcia reálnych čísel. 169
2.5.26 Stereografická projekcia komplexných čísel. 169

3.1.1 Karteziánsky systém. 174

3.1.2 Dirichletova funkcia $\chi(x)$. 174
3.1.3 Funkcia $f\colon\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ zadaná parametricky. 176
3.1.4 Kružnica $x^2 + y^2 - c = 0,\ c \geq 0$ z príkladu 3.1.2. 176
3.1.5 Funkcie $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ z poznámky 3.1.4. 176
3.1.6 Grafy rastúcej, klesajúcej, neklesajúcej, nerastúcej a konštantnej funkcie. 180
3.1.7 Grafy funkcií z príkladu 3.1.8 a), b), c). 181
3.1.8 Graf párnej a nepárnej funkcie. 181
3.1.9 Graf periodickej funkcie. 181
3.1.10 Funkcia $y=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$. 182
3.1.11 Konvexná funkcia. 182
3.1.12 Grafy konvexnej, rýdzo konvexnej, konkávnej a rýdzo konkávnej funkcie. 183
3.1.13 Príklady konvexných funkcií z poznámky 3.1.14. 184
3.1.14 Príklady konvexých funkcií z poznámky 3.1.15. 185
3.1.15 Graf zloženej funkcie. 188
3.1.16 Graf inverznej funkcie. 188
3.1.17 Graf k príkladu 3.1.22. 190
3.1.18 Graf k príkladu 3.1.23. 190
3.1.19 $f\colon\ y = x^n,\ n = 1, 2, 3$. 191
3.1.20 $f\colon\ y = \frac{1}{x^n},\ n = 1, 2$. 191
3.1.21 $f\colon\ y = x^3 - 2x^2$. 192
3.1.22 $f\colon\ y = x^r$ pre $r > 0$ a $r < 0$. 192
3.1.23 $f\colon\ y = a^x,\ a > 0$. 193
3.1.24 $f\colon\ y = \log_a x,\ a > 0,\ a\neq 1$. 193
3.1.25 Funkcie $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$. 194
3.1.26 $f\colon\ y = \sin x$. 195
3.1.27 $f\colon\ y = \cos x$. 195
3.1.28 $f\colon\ y = \operatorname{tg} x$. 196
3.1.29 $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x$. 196
3.1.30 Funkcie $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$. 199
3.1.31 Funkcie $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$. 199
3.1.32 Hyperbolické funkcie $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$ a $\operatorname{cotgh} x$. 200
3.1.33 Funkcie $y = \operatorname{argsinh} x$, $y = \operatorname{argcosh} x$. 203
3.1.34 Funkcie $y = \operatorname{argtgh} x$, $y = \operatorname{argcotgh} x$. 203
3.1.35 Grafy funkcií $f_{1,2}$ z príkladu 3.1.28. 205
3.1.36 Pravouhlý a polárny súradnicový systém v Euklidovskej rovine R^2. 206
3.1.37 Bod so záporným sprievodičom ($\rho < 0$). 207
3.1.38 Bernoulliho lemniskáta $f\colon\ (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. 207
3.1.39 Konštantné funkcie $f_1\colon y = 1,\ x\in R,\ f_2\colon \rho = 1,\ \varphi\in R$. 208
3.1.40 Polpriamka $f_1\colon y = x,\ x\in\langle 0;\ \infty)$ a špirála $f_2\colon \rho = \varphi,\ \varphi\in\langle 0;\ \infty)$. 208
3.1.41 Konštrukcia Peanovej krivky. 208
3.1.42 Konštrukcia Hilbertovej krivky. 209

3.1.43 Konštrukcia van Kochovej snehovej vločky. 209
3.1.44 Kružnica $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$. 211
3.1.45 Kružnica $x=c+r\cos t$, $y=d+\sin t$. 211
3.1.46 Kružnica $\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2=r^2$. 211
3.1.47 Parabola s ohniskom F. 212
3.1.48 Parabola implicitne určená rovnicami $k_y\colon 2p(y-d)=(x-c)^2$, $k_x\colon 2p(x-c)=(y-d)^2$. 212
3.1.49 Parabola s osou rovnobežnou s polárnou osou a osou kolmou na polárnu os. 212
3.1.50 Parabola v polárnom systéme s osou totožnou a osou kolmou na polárnu os. 213
3.1.51 Parabola v polárnom systéme s ohniskom $[0;0]$ a osou totožnou s polárnou osou. 214
3.1.52 Paraboly k_1, k_2, k_3, k_4 a p_1, p_2, p_3, p_4 z príkladu 3.1.32. 215
3.1.53 Elipsa s hlavnou polosou a a vedľajšou polosou b. 216
3.1.54 Elipsa implicitne určená rovnicou $k\colon\ b^2(x-c)^2+a^2(y-d)^2=a^2b^2$. 216
3.1.55 Elipsa s polosou a rovnobežnou s polárnou osou o. 217
3.1.56 Elipsa so stredom S v počiatku polárneho systému. 217
3.1.57 Elipsa s hlavnou polosou ležiacou na polárnej osi a s ohniskom $[0;0]$. 217
3.1.58 Hyperbola. 219
3.1.59 Hyperboly k_x, k_y. 219
3.1.60 Rovnoosé hyperboly z príkladu 3.1.33. 220
3.1.61 Hyperbola s polosami rovnobežnými s polárnou osou. 220
3.1.62 Hyperbola so stredom v počiatku polárneho systému. 221
3.1.63 Hyperbola s ohniskom v počiatku polárneho systému. 221
3.1.64 Predĺžená, obyčajná a skrátená cykloida. 223
3.1.65 Predĺžená, obyčajná a skrátená hypocykloida. 224
3.1.66 Hypocykloida s dvomi, s tromi, so štyrmi (asteroida) a s piatimi oblúkmi. 225
3.1.67 Predĺžená, obyčajná a skrátená epicykloida. 225
3.1.68 Epicykloida s jedným, s dvomi, s tromi a so štyrmi oblúkmi. 226
3.1.69 Kardioida v polárnom systéme. 227
3.1.70 Kardioida určená polárnymi rovnicami $f\colon\ \rho(\varphi)=2r(1\pm\cos\varphi)$. 227
3.1.71 Cassiniove krivky. 228
3.1.72 Archimedova špirála. 228
3.1.73 Logaritmická špirála. 228
3.1.74 Fermatova špirála f_1, hyperbolická špirála f_2 a špirála $f_3\colon\ \rho(\varphi)=\frac{a}{\sqrt{\varphi}}$. 229
3.1.75 Konchoida. 229
3.1.76 Pascalova závitnica. 229
3.1.77 Lamého krivka. 230
3.1.78 Osmička. 230
3.1.79 Srdcová kvartika. 230
3.1.80 Konchleoida. 230
3.1.81 Plateauova krivka. 230
3.1.82 Freethova nefroida. 231
3.1.83 Newtonova divergentná parabola. 231

3.1.84 Sluzeho perlovky $f_n\colon\ y^n = (2-x)^3x^4$, $g_n\colon\ y^n = (2-x)^4x^3$. 231
3.1.85 Kappa krivka. 232
3.1.86 Tschirnhausova kubika. 232
3.1.87 Serpentina. 232
3.1.88 Strofoida f_1, Maclaurinov trisektrix f_2. 232
3.1.89 Descartov list. 232
3.1.90 Jednolístok f_1, dvojlístok f_2, trojlístok f_3 a torpédová krivka f_T. 232
3.1.91 Ruža. 233
3.1.92 Botanická krivka. 234
3.1.93 Krivky v tvare srdca. 234
3.1.94 Nefroida. 234
3.1.95 Dvojrohová krivka. 235
3.1.96 Sínusova špirála. 235
3.1.97 Diablova krivka (vľavo), elektromotorická krivka (vpravo). 236
3.1.98 Deltoida. 236
3.1.99 Reťazovka. 236
3.1.100 Talbotova krivka. 236
3.1.101 Lissajousova krivka. 237
3.1.102 Spirická krivka ($r = 0,5$, $a = 0,75$, resp. $a = 0,5$, resp. $a = 0,35$). 237
3.1.103 Wattova krivka. 238
3.2.104 Veta 3.2.1. 246
3.2.105 Veta 3.2.2. 246
3.2.106 Veta 3.2.3. 247
3.2.107 Dôsledok 3.2.4.b. 247
3.2.108 Funkcia z príkladu 3.2.23. 254
3.2.109 Jednostranné limity. 254
3.2.110 Príklady asymptoty bez smernice. 258
3.2.111 Asymptoty $y = q$, $x = a$. 259
3.2.112 Asymptota so smernicou. 259
3.2.113 Graf funkcie s dvoma asymptotami (príklad 3.2.34). 260
3.2.114 Graf funkcie bez asymptôt (príklad 3.2.35). 260
3.2.115 Funkcia $f\colon\ y = \frac{\sin x}{x}$ a jej asymptota so smernicou $y = 0$. 261
3.3.116 Spojitosť funkcie f v izolovanom bode $a \in D(f)$. 275
3.3.117 Spojitosť funkcie f v hromadnom bode $a \in D(f)$. 275
3.3.118 Veta 3.3.4 o zovretí. 276
3.3.119 Poznámka 3.3.3. 276
3.3.120 Príklad 3.3.4. 277
3.3.121 Poznámka 3.3.4. 277
3.3.122 Nespojitosť odstrániteľná. 279
3.3.123 Nespojitosť neodstrániteľná 1. druhu. 279
3.3.124 Nespojitosť neodstrániteľná 2. druhu. 279

3.3.125 Veta 3.3.8. 281
3.3.126 Veta 3.3.9. 281
3.3.127 Veta 3.3.10. 282
3.3.128 Poznámka 3.3.11. 282
3.3.129 Veta 3.3.12. 284
3.3.130 Príklad 3.3.10. 284
3.3.131 Veta 3.3.13. 286
3.3.132 Dôsledok 3.3.13.b. 286
3.3.133 Zobrazenie intervalu $I = (0; \infty)$ spojitou funkciou f (poznámka 3.3.18). 286
3.3.134 Zobrazenie intervalu $I = (-\pi; \pi)$ z príkladu 3.3.11. 287
3.3.135 Veta 3.3.14. 288
3.3.136 Veta 3.3.15. 288

4.1.1 Úloha o rýchlosti. 292
4.1.2 Úloha o dotyčnici. 292
4.1.3 Dotyčnica a normála k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$. 293
4.1.4 Rôznobežné poldotyčnice. 295
4.1.5 Jednostranné poldotyčnice. 295
4.1.6 Dotyčnice a normály k funkcii $y = \sin x$ (príklad 4.1.9). 297
4.1.7 Funkcie f a $|f|$ z príkladu 4.1.10 a ich dotyčnice. 298
4.3.8 Rolleho veta. 322
4.3.9 Lagrangeova veta. 322
4.3.10 Príklad 4.3.2. 324
4.3.11 Príklad 4.3.3. 324
4.3.12 Príklad 4.3.4. 325
4.3.13 Príklad 4.3.5. 325
4.3.14 Príklad 4.3.7. 325
4.3.15 Funkcia $f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$. 345
4.3.16 Funkcia $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$. 345
4.3.17 $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$. 347
4.3.18 $f(x) = |x| - |x-1| - |x+1|$. 347
4.3.19 Stacionárny bod x_0 funkcie f. 348
4.3.20 Graf funkcie $f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1|$. 350
4.3.21 Graf funkcie $f(x) = -x^3 - x^2 + x$. 350
4.3.22 Graf funkcie $f(x) = x^3 - x^2 + x$. 350
4.3.23 Príklad 4.3.32. 351
4.3.24 Príklad 4.3.33. 351
4.3.25 Rýdzo konvexná funkcia f. 354
4.3.26 Rýdzo konkávna funkcia. 354
4.3.27 Grafy funkcií z príkladu 4.3.35. 356
4.3.28 Grafy funkcií f_3, f_5 a f_4, f_6 z príkladu 4.3.36. 358

4.3.29 Graf funkcie f z príkladu 4.3.37. 358
4.3.30 Grafy funkcií $f(x)$ a $f''(x)$ z príkladu 4.3.38. 359
4.3.31 Funkcia $f(x) = \frac{x^3-6x^2}{15}$. 359
4.3.32 Funkcia $f(x) = \sin x$. 360
4.3.33 Funkcia $f(x) = \cos x$. 360
4.3.34 Funkcia z príkladu 4.3.41 (os y je zväčšená 40-krát vzhľadom na x). 362
4.3.35 Funkcia z príkladu 4.3.42 (os y je zväčšená 30-krát vzhľadom na x). 362
4.3.36 Graf funkcie $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ z príkladu 4.3.43. 365
4.3.37 Graf funkcie $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2}$ z príkladu 4.3.44. 366
4.3.38 Príklad 4.3.45 a). 369
4.3.39 Príklad 4.3.45 b). 369
4.3.40 Graf funkcie f z príkladu 4.3.48. 373
4.3.41 Parametricky definované funkcie z príkladu 4.3.47. 374
4.3.42 Implicitne definované funkcie z príkladu 4.3.49. 374
4.3.43 Descartov list f a funkcie f_1, f_2, f_3 z príkladu 4.3.50. 376
4.3.44 Derivácia funkcie v polárnych súradniciach. 376
4.3.45 Polkružnica $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, resp. $f(\varphi) = r$ z príkladu 4.3.51. 378
4.3.46 Grafy funkcií $f(x)$, $f'(x)$ z poznámky 4.3.33. 378

Zoznam tabuliek

1.1.1 Grécka abeceda. 1
1.1.2 Pravdivostné hodnoty zložených výrokov. 5
1.1.3 Tautológia $[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$. 6
1.1.4 Zákon dvojitej negácie, zákon vylúčenia tretieho, zákon sporu. 7
1.1.5 De Morganove zákony $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$, $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$. 7
1.1.6 Zákon hypotetického sylogizmu $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$. 8
1.1.7 Zákon transpozície. 8
1.1.8 Asociatívne zákony $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$, $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$. 8
1.1.9 Distributívne zákony $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$, $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$. 9
1.1.10 Tautológie $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$, $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p \wedge \overline{q}}$, resp. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$, $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$. 10
1.1.11 Tautológia $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})]$. 10
1.3.12 Konečná, nekonečná, spočítateľná, nespočítateľná množina. 40

3.1.1 Niektoré dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus. 196
3.1.2 Vzťahy medzi goniometrickými funkciami pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. 198
3.1.3 Vzťahy medzi hyperbolickými funkciami pre $x > 0$. 202
3.3.4 Riešenie rovnice $x^3 - 3x + 1 = 0$ z príkladu 3.3.10 metódou bisekcie. 285

4.1.1 Derivácie základných elementárnych funkcií. 304
4.2.2 Výpočet $\sqrt[6]{x}$ pomocou približného vzorca $\frac{x+5}{6}$. 313
4.2.3 Derivácie rádu $n \in N$ základných elementárnych funkcií. 315
4.3.4 Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ z príkladu 4.3.43. 364
4.3.5 Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2}$ z príkladu 4.3.44. 365
4.3.6 Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ z príkladu 4.3.45 a). 367
4.3.7 Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x-2}$ z príkladu 4.3.45 b). 368
4.3.8 Niektoré dôležité hodnoty funkcie f z príkladu 4.3.48. 373

Úvod

Vznik a vývoj matematickej analýzy

Matematická analýza je na rozdiel od niektorých iných oblastí matematiky pomerne mladá. Vznikla v 17. storočí a medzi jej zakladateľov patrí francúzsky filozof, matematik a fyzik *René Descartes* [1596–1650], anglický matematik a fyzik *Isaak Newton* [1642–1727] a nemecký filozof a matematik *Gottfried Wilhelm Leibniz* [1646–1716]. V tomto období sa značne rozvíja hospodársky život v Európe. Začínajú sa vyvíjať a zdokonaľovať nové stroje. Úvahy o rýchlosti a zrýchlení pri ich konštrukcii vedú k potrebe sledovať funkčnú závislosť rôznych veličín na základe prírodných, mechanických a iných zákonitostí. Matematikov vo veľkej miere zaujímajú výpočty objemov, povrchov a ťažísk telies.

Rozsiahle zámorské plavby si vyžadujú presnejšie astronomické a geodetické merania a ich matematické spracovanie. Objavy nových území a ich mapovanie vedú k vzniku súradnicových systémov a analytickej geometrie. Rozvoj matematických schopností úzko súvisí s revolučnými objavmi v astronómii, ktoré sú spojené s menami *Mikuláš Koperník* [1473–1543], *Tycho de Brahe* [1546–1601] a *Johannes Kepler* [1571–1630].

Matematici sa čoraz viac prikláňajú k výsledkom, ktoré majú aj nejaký praktický a technický význam. V roku 1635 zhrnul univerzitný profesor z Bologne *Bonaventura Cavalieri* [1598–1647] všetky dovtedajšie matematické poznatky infinitenzimálneho charakteru (z latinského infinitus — nekonečný) v práci *„Geometria indivisibilibus continuorum"* a utvoril tak predprípravu na objavenie diferenciálneho a integrálneho počtu.

Diferenciálny a integrálny počet (tzv. infinitenzimálny počet) objavili nezávisle na sebe *I. Newton* [1665–1666] a *G. W. Leibniz* [1673–1676], ktorý ich publikoval ako prvý. Newtonov prístup mal fyzikálny charakter a deriváciu chápal predovšetkým ako rýchlosť (*„Principia mathematica philosophiae naturalis"*). Leibnizov prístup mal geometrickú povahu a deriváciu chápal ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode.

Prvú učebnicu infinitenzimálneho počtu *„Analyse des infiniment petites pour l'intelligence des lignes courbes"* vydal v roku 1696 francúzsky matematik *Guillaumus Francois Antoin de l'Hospital* [1661–1704]. Treba však poznamenať, že základné úvahy tvorcov infinitenzimálneho počtu boli ešte poznačené mnohými pojmovými nepresnosťami a logickými nedôslednosťami.

Ďalšími, ktorí výrazne ovplyvnili rozvoj matematickej analýzy, boli Leibnizovi žiaci *Johann Bernoulli* [1667–1748] a *Jacob Bernoulli* [1654–1705], ktorí pochádzali z Bazileja. Odtiaľto pochádzal aj najvýznamnejší matematik 18. storočia *Leonard Euler* [1707–1783]. Mal fenomenálnu pamäť a po oslepnutí [1766] svoje nezvyčajne početné výsledky diktoval. Zanechal 886 vedeckých prác zo všetkých oblastí matematiky. Podľa jeho prác sa ustálila symbolika algebry a infinitenzimálneho počtu (napr. $f(x)$, π, i, e, $\sum$, Δx, ...). V jeho stopách pokračujú mnohí ďalší matematici, ako napríklad *Pierre Simon Laplace* [1749–1827] a *Joseph Louis Lagrange* [1736–1813], ktorý ako prvý použil symbolický zápis derivácie $f'(x)$, $f''(x)$.

Štúdium matematiky v 19. storočí sa čoraz viac oddeľuje od bezprostredných požiadaviek reálneho života, ale spojenie matematiky a praxe sa nikdy úplne neprerušilo. Vzniká čistá a aplikovaná matematika, mnohí matematici pôsobia ako učitelia na vysokých školách a špecializujú sa na rôzne oblasti matematiky. V roku 1822 vydáva francúzsky matematik a fyzik *Jean–Baptiste Joseph Fourier* [1768–1830] analytickú teóriu tepla *„Théorie analytique de la chaleur"*, v ktorej ako funkciu chápe ľubovoľné zobrazenie množiny reálnych čísel do seba.

Pojem funkcie upresnil neskôr nemecký matematik *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* [1805–1859]. Veľké zásluhy o rozvoj matematiky v tomto období má nemecký matematik a astronóm *Karl Friedrich Gauss* [1777–1855] a francúzsky matematik *Augustin Louis Cauchy* [1789–1857]. Jeho práca *„Course* *d'analyse"* [1821] je základnou učebnicou diferenciálneho a integrálneho počtu, ktorá platí aj dnes.

V Prahe žijúci, po nemecky píšuci, matematik talianského pôvodu *Bernard Bolzano* [1781–1848] predstihol svoju dobu pochopením pojmu nekonečno. Bol profesorom teológie a často kolísal v názoroch medzi matematikou, sociológiou a teológiou. Uznanie získal až po smrti za prácu *„Paradoxien des Unendlichen"* [vyšla 1851], v ktorej študoval vlastnosti nekonečných množín, definoval pojem spočítateľnej a nespočítateľnej množiny a dospel až k pojmu mohutnosť kontinua.

Medzi významným matematikom tohto obdobia patrí *Bernhard Riemann* [1826–1866], ktorý pôsobil ako profesor na univerzite v Göttingene. Je autorom dodnes používanej definície určitého, tzv. Riemannovho integrálu. Jeho súčasníkom bol *Karl Weierstrass* [1815–1897]. Zaoberal sa teóriou reálnych čísel, diferenciálnym a integrálnym počtom, variačným počtom a teóriou funkcií. Taktiež odstránil niektoré nejasností z teórie iracionálnych čísel a teórie limít.

Od čias *L. Eulera* až do začiatku 19. storočia sa názor na reálne čísla podstatne nezmenil. Matematici podvedome tušili, že existuje aj iracionálne číslo. Ale až v tridsiatych rokoch uverejnil *William Rowan Hamilton* [1805–1865] svoje práce o reálnych číslach, v ktorých definuje iracionálne číslo ako rez na množine racionálnych čísel.

Významným krokom v rozvoji matematiky bolo vytvorenie teórie množín *Gergom Cantorom* [1845–1918] v druhej polovici 19. storočia, ktorá sa stala základnou matematickou disciplínou, postavila doterajšie výsledky na pevnejší logický základ a pričinila sa o vznik nových oblastí, ako sú napríklad teória reálnych funkcií a funkcionálna analýza. Jeho hlavná zásluha je v objasnení pojmu nekonečno v matematike, čím sa mohli v matematike začať skúmať nekonečné súbory objektov.

Mnohí vtedajší matematici, predovšetkým *Leopold Kronecker* [1823–1891] nepochopili význam teórie množín a bránili jej rozvoju. *L. Kronecker* neveril ani na existenciu iracionálnych čísel. No našťastie mnohí iní zbadali v tejto teórii možnosť ďalšieho rozvoja matematiky. Ďalšou významnou osobnosťou tohto obdobia bol nemecký matematik *David Hilbert* [1862–1943], ktorý v práci *„Grundlagen der Geometrie"* prvýkrát sformuloval na základe axiomatickej metódy euklidovu geometriu.

V 20. storočí sa matematika stala konglomerátom teórií, z ktorých každá študuje súhrn objektov charakterizovaných presne formulovanými vzťahmi medzi nimi, ktoré nemožno chápať izolovane. Charakteristické je vzájomné prelínanie metód disciplín, ktoré sa predtým chápali izolovane (matematická analýza, algebra, geometria, ...).

Zväčšilo spätné prepojenie matematiky a praxe. Rozvíjajú sa nové matematické disciplíny. Matematické metódy sa úspešne aplikujú v biológii, medicíne, ekonómii, jazykovede, sociológii. Matematika dosiahla vysoký stupeň abstrakcie a logickej presnosti. Podporuje rozvoj nielen matematického a logického myslenia, ale myslenia celkovo, čo je v dnešnej dobe asi najväčší problém.

Predmet a obsah matematickej analýzy

Matematickú analýzu môžeme definovať ako disciplínu, zaoberajúcu sa štúdiom vlastností množín a ich vzájomných zobrazení, ktoré sú určené topologickou štruktúrou (štruktúrou polohy) **a štruktúrou algebraických operácií**. Názov vystihuje skôr metódu práce než obsah.

Metódy matematickej analýzy sú schopné skúmať rôzne oblasti svojej činnosti. Musíme si uvedomiť, že sa často pri tomto výskume používajú veľmi abstraktné pojmy. Ale aj tie najabstraktnejšie pojmy používané v matematickej analýze (a v matematike všeobecne) majú základ v reálnom svete. Upozorňujeme na to, pretože charakteristickou črtou matematiky je veľmi vysoký stupeň abstrakcie a pri jej povrchnom chápaní by mohol vzniknúť dojem o jej samostatnosti, nespojitosti a nezávislosti od okolitého sveta.

Skutočnosť, že je predchádzajúci výklad nesprávny, dokazuje množstvo výsledkov aplikovaných v najrozmanitejších oblastiach nášho života. S matematickou analýzou sa v praxi stretávame skoro stále.

Často sa používa pri riešení rôznych problémov vo fyzike, v chémii, v technických, ale aj v spoločenských vedách.

Uvedieme niekoľko príkladov jej použitia, ktoré nám pomôžu pochopiť, ako sa pomocou pojmov sformuluje úloha (čiže vytvorí matematický model) a pomocou prístupného aparátu vyšetrí a vyrieši.

Príklad.
Akú maximálnu obdĺžnikovú plochu P dokážeme ohraničiť lanom dĺžky l?

Riešenie.
Ak označíme rozmery tohto obdĺžnika x, y, potom platí $2x + 2y = l$ a zadaný problém vedie na úlohu maximalizovať funkciu

$$P = xy = x\,\tfrac{l-2x}{2} = \tfrac{lx}{2} - x^2, \quad x \in \langle 0\,;\, l\rangle\,.$$

Maximum nastáva pre hodnotu $x = \frac{l}{4}$, ktorú získame ako koreň rovnice

$$\tfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \tfrac{l}{2} - 2x = 0. \;\blacksquare$$

Príklad.
Aký je obsah kruhu s polomerom r?

Riešenie.
Ak umiestnime stred kruhu do počiatku súradnicového systému $0 = [0; 0]$, potom rovnica kružnice so stredom v bode 0 a polomerom r je daná vzťahom $x^2 + y^2 = r^2$.
To znamená, že daný kruh ohraničujú grafy funkcií $f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$.
Obsah kruhu S určíme pomocou určitého integrálu (substitúcia $x = r \sin t$) zo vzorca

$$S = \int_{-r}^{r} f_1(x) - f_2(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \pi r^2.$$

Ak použijeme polárne súradnice, situácia je ešte jednoduchšia. Rovnica kružnice je $\rho = r$, $\varphi \in \langle 0\,;\, 2\pi)$ a obsah kruhu je daný vzťahom

$$S = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{2} r^2 \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \pi r^2. \;\blacksquare$$

Príklad.
Aká je chyba pri štatistickom meraní nejakej veličiny, ak predpokladáme, že každé meranie je zaťažené chybou, ktorej príčiny nepoznáme a považujeme ju za náhodnú veličinu?

Riešenie.
Ak predpokladáme, že σ je stredná chyba merania, potom pravdepodobnosť P, že chyba merania leží v intervale $(-\varepsilon\,;\,\varepsilon)$, je určená určitým integrálom

$$P\,(-\varepsilon\,;\,\varepsilon) = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x. \;\blacksquare$$

Kapitola 1

Základné pojmy

1.1 Logika

Predmetom skúmania logiky sú myšlienky. Logika sa zaoberá štúdiom formálnych vlastností myšlienky a stanovuje pravidlá správneho, t. j. logického usudzovania. Preto má dôležitú úlohu vo všetkých vedách. Na logických zákonoch je postavené vedecké skúmanie, zdôvodňovanie poznatkov a budovanie vedeckých systémov. Avšak vplyv medzi logikou a inými vedami je obojstranný. V matematike je logika nepostrádateľná a jej potreba pri riešení niektorých metodologických problémov viedla k vzniku modernej **matematickej logiky**. Preto je potrebné sa oboznámiť so základnými logickými pojmami, ktoré sa používajú v matematike a nielen v matematike.

1.1.1 Výrazy a výroky

Na vyjadrenie myšlienok používame jazyk, ktorý sa skladá z **výrazov**. Výraz je základom prejavu myšlienky, je základnou myšlienkou jazykového prejavu. Výrazy sú jednoduché alebo zložené, ktoré sa tvoria z jednoduchých pomocou syntaktických pravidiel jazyka. To znamená, že jednoduchým zoradením viacerých jednoduchých výrazov za sebou ešte nemusí vzniknúť zložený výraz. V živom jazyku sú výrazmi slová a vety. Na ich označenie sa okrem latinskej (slovenskej) abecedy používa tiež **abeceda grécka**. Písmená gréckej abecedy aj s ich názvami a latinskými ekvivalentami sú uvedené v tabuľke 1.1.1. Výrazmi v matematike sú napríklad $(a+b)^2$, $x-y=1$, $a<b$, $\alpha=1+\pi$.

α	A	alfa	a	η	H	éta	é	ν	N	ný	n	τ	T	tau	t
β	B	beta	b	ϑ	Θ	théta	th	ξ	Ξ	ksí (xí)	x	υ	Υ	ypsilon	y
γ	Γ	gama	g	ι	I	ióta	i	o	O	omikron	o	φ	Φ	fí	f
δ	Δ	delta	d	κ	K	kappa	k	π	Π	pí	p	χ	X	chí	ch
ε	E	epsilon	e	λ	Λ	lambda	l	ρ	P	ró	r	ψ	Ψ	psí	ps
ζ	Z	dzéta	dz	μ	M	mí	m	σ	Σ	sigma	s	ω	Ω	omega	ó

Tabuľka 1.1.1: Grécka abeceda.

V logike sa výrazy rozdeľujú na konštanty a premenné. **Konštanty** sú výrazy, ktoré majú nemenný (t. j. konštantný) význam. **Premenné** sú výrazy, ktoré zastupujú konštanty. Premenné môžeme v prípade potreby nahradiť konštantami (tým sa myslí jednoduchými aj zloženými konštantami). Je zrejmé, že nemá význam dosadzovať všetky konštanty, ale iba tie, ktoré dajú danému výrazu zmysel. Množinu takýchto konštánt nazývame **oborom úvahy**. V matematike sa niekedy zo samotného výrazu ťažko rozlíši, čo je premenná a čo konštanta.

Príklad 1.1.1.
Do výrazu „*x je lietadlo*" má zmysel za x dosadzovať výrazy ako Supermarine Spitfire, Zero, DC-3 Dakota, IL 62, Concorde, vrtuľník, čmeliak, raketa, ale nemá zmysel dosadzovať výrazy Zemplínska Šírava, Praha, voda, pivo, soľ, číslo, minister školstva, Titanic, atď.
V rovnici priamky $y = ax + b$ sú výrazy x, y premenné a výrazy a, b konštanty.[1]
Keď však hovoríme o zväzku priamok s rovnicami $y = ax + 2$, je a premenná. ■

Často sa výslovne uvádza, ktorý symbol vyjadruje premennú a ktorý konštantu. V logike sa ako premenné používajú nielen písmená, ale aj bodky alebo medzery.

Výrok je výraz, ktorý vyjadruje pravdivú alebo nepravdivú myšlienku. Výroky delíme na **pravdivé** a **nepravdivé**, pričom kritériom pravdivosti je zhoda so skutočnosťou. Gramaticky je výrok obyčajne (ale nie vždy) oznamovacia veta.[2] Pre výrok je podstatné, či možno o ňom tvrdiť, že je **pravdivý** alebo **nepravdivý**. Výrok nemôže byť zároveň pravdivý a zároveň nepravdivý.

Príklad 1.1.2.
Výrokmi sú napríklad výrazy:

„*Pes je domáce zviera.*", „$2+3=4$", „*Pre každé reálne číslo x platí nerovnosť $x \geq 0$.*", „*Trabant je auto.*", „*Existuje inteligentný minister.*".

Na druhej strane výrazy:

„*modrý stôl*" (názov), „*Nech žije 1. máj!*" (zvolanie v budovateľských dobách), „*Ideš spať?*" (otázka), „*Fajčiť zakázané!*" (príkaz, resp. zákaz)

nie sú výroky, pretože nemá zmysel skúmať ich pravdivosť. ■

Poznámka 1.1.1.
Musíme ale poznamenať, že povaha výrazu závisí od súvislostí. Ak niekto na otázku o fajčení vo vlaku odpovie slovami „*Fajčiť zakázané!*", ide o pravdivý výrok.

Výrazy, ktoré obsahujú premenné, nazývame **nesamostatné výrazy** alebo **formy**. Ak dosadíme do danej formy za všetky premenné konštanty z oboru úvahy, potom môžeme dostať výrok — vtedy hovoríme o **výrokovej forme**. Alebo môžeme dostať slovné vyjadrenie, matematický výraz a podobne, t. j. vyjadrenie nejakého pojmu — vtedy hovoríme o **mennej forme**.

Výroková forma nie je výrok! Z výrokovej formy vznikne výrok dosadením prípustných konštánt za všetky premenné.

Príklad 1.1.3.
Výrokové formy sú napríklad:

„$2x + 3y = 0$", „$2+3=x$", „$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$", „*Ak platí tvrdenie 1, potom platí tvrdenie 2.*".

Z daných výrokových foriem dostaneme výroky, ak dosadíme za premenné x, y, x_1, x_2, …, x_n konkrétne čísla, resp. ak za tvrdenia 1 a 2 dosadíme konkrétne výroky.
Menné formy sú napríklad:

---
[1] Pre každé a, b dostávame konkrétnu priamku.
[2] Od gramatickej vety je nutné odlišovať **matematickú vetu**. Je to pravdivý výrok o matematických objektoch a vzťahoch medzi nimi, ktorý je dokázaný, resp. nie sú o ňom pochybnosti. Už zo základnej, prípadne strednej školy sú známe napríklad binomická veta, sínusova a kosínusova veta, Pytagorova veta, Talesova veta, … .

„$\sin\alpha$“, *„Žiak, ktorý p.“*.
Ak v mennej forme „$\sin\alpha$“zvolíme za α konkrétne číslo, dostaneme hodnotu funkcie sínus v tomto bode. Ak dosadíme za premennú p niektorý výrok vyjadrujúci činnosť alebo stav žiaka, dostaneme vyjadrenie o žiakovom stave alebo o jeho činnosti. ■

1.1.2 Logické operácie

Ako sme už spomenuli, výrok je výraz, ktorý vyjadruje pravdivú alebo nepravdivú myšlienku. Preto je vhodné zaviesť pojem **pravdivostná**, resp. **logická hodnota výroku**. Pre pravdivý výrok (t. j. výrok, ktorý je platný) definujeme pravdivostnú hodnotu **pravda** a vyjadrujeme ju symbolom P. Pre nepravdivý výrok (t. j. neplatný výrok) definujeme pravdivostnú hodnotu **nepravda** a vyjadrujeme ju symbolom N.

Často sa na vyjadrenie pravdivého výroku používa číslica 1 a na vyjadrenie nepravdivého výroku číslica 0.[3] Na označenie výrokových premenných budeme obyčajne používať malé písmená z konca abecedy, t. j. symboly p, q, r, resp. x, y, z.

Pravdivostnú hodnotu výroku p budeme označovať $|p|$. To znamená, že zápis $|p| = P$ znamená pravdivý výrok p a zápis $|p| = N$ znamená nepravdivý výrok p.

Predtým, ako budeme pokračovať, si musíme ujasniť zápis výrokových foriem a výrokov. Ak budeme hovoriť o výrokovej forme $p \wedge g$, budú p a q predstavovať premenné. Ak budeme hovoriť o výroku $p \wedge g$, potom budú p a q predstavovať konštanty (budú označovať určité, pevne zvolené výroky).

Výrokový počet sa zaoberá pravdivostnou hodnotou **zložených výrokov**, ktoré sú vytvorené z iných výrokov (tzv. zložiek) pomocou **logických operácií**. Základné logické operácie sú negácia výroku, konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia výrokov.

- **Negácia výroku**

Negácia výroku p sa tvorí výrazmi *„nie je pravda, že p“*, *„nie je pravda, že platí p“*, prípadne *„ne-p“*. Negáciu výroku p označujeme $\overline{p}$ (niekedy tiež $\sim p$, resp. p') a čítame „nie p“, *„nie je pravda, že p“*, „non p“ a podobne.

Príklad 1.1.4.
Uvažujme výrok p: *„Dnes je utorok.“*, potom negáciou tohto výroku je výrok *„Dnes nie je utorok.“*, resp. *„Nie je pravda, že je dnes utorok.“*.
Ak utvoríme negáciu tejto negácie, dostaneme výrok: *„Nie je pravda, že dnes nie je utorok.“*, čo sa dá vyjadriť pôvodným výrokom *„Dnes je utorok.“*. ■

Na predchádzajúcom príklade vidíme, že ak je dnes utorok, potom je výrok p pravdivý a výrok $\overline{p}$ nepravdivý. Ak dnes nie je utorok, potom je výrok p nepravdivý a výrok $\overline{p}$ pravdivý. To znamená, že **výrok a jeho negácia majú opačné pravdivostné hodnoty**. Ďalej z príkladu vyplýva, že **negáciou negácie výroku** p, označme ju $\overline{(\overline{p})} = \overline{\overline{p}}$, je pôvodný výrok p. Situácia je znázornená v tabuľke 1.1.2.

- **Konjunkcia výrokov**

Konjunkcia výrokov p a q sa tvorí pomocou spojky „a“, označujeme ju $p \wedge q$, prípadne $p\&q$ a čítame *„p a q“*, *„p a súčasne q“*, *„p konjunkcia q“*, *„konjunkcia výrokov p a q“*, *„p et q“* a podobne.

Pravdivosť konjunkcie výrokov p a q je určená tabuľkou 1.1.2. To znamená, že konjunkcia dvoch výrokov je pravdivá iba v prípade, ak sú pravdivé obidva výroky. Takže na dokázanie nepravdivosti zloženého výroku stačí ukázať nepravdivosť jedného z výrokov. Z tabuľky ďalej vidíme, že výroky $p \wedge q$ a $q \wedge p$ majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

[3] Tiež sa používa T — F, resp. Y — N (z anglického *true* — *false*, resp. *yes* — *no*).

Poznámka 1.1.2.
Ak použijeme na označenie pravdivostnej hodnoty symboly 0 a 1, potom pravdivostná hodnota konjunkcie dvoch výrokov sa rovná násobku pravdivostných hodnôt jednotlivých výrokov, t. j. $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$.

- **Disjunkcia výrokov**

Disjunkcia výrokov p a q sa tvorí pomocou spojky „alebo“, označujeme ju $p \vee q$ (skratka z latinského *vel* — alebo) a čítame „*p alebo q*“, „*p vel q*“, „*disjunkcia výrokov p, q*“ a podobne.[4]

Disjunkcia je pravdivá, ak je pravdivý aspoň jeden z výrokov (tabuľka 1.1.2). Podobne ako v prípade konjunkcie, majú výroky $p \vee q$ a $q \vee p$ rovnakú pravdivostnú hodnotu.

V logike má spojka „alebo“ **nevylučovací význam**, čo je rozdiel od hovorovej reči, kde môže mať vylučovací význam. Napríklad vo vete „*Dnes večer pôjdeme do kina alebo do divadla.*“ má „alebo“ vylučovací význam. Ale vo vete „*Ja ťa obesím alebo zastrelím.*“ nevylučujeme možnosť, že vrah je dôsledný a svoju obeť aj obesí a aj zastrelí.

Príklad 1.1.5.
Uvažujme výrok p: „*Dnes je chladno.*“ a výrok q: „*Dnes svieti slnko.*“.
Konjunkcia $p \wedge q$ je zložený výrok: „*Dnes je chladno a svieti slnko.*“.
Disjunkcia $p \vee q$ je zložený výrok: „*Dnes je chladno alebo svieti slnko.*“. ■

- **Implikácia výrokov**

Implikácia výrokov p a q sa tvorí vzťahom „Ak (platí) ..., potom (platí) ...“, označujeme ju $p \Rightarrow q$ a čítame „*Z p vyplýva q*“, „*p potom q*“, „*Ak platí p, potom platí q*“, „*p je nutná podmienka pre q*“, „*q je postačujúca podmienka pre p*“.

Prvý výrok (výrok p) sa nazýva podmieňujúci (predpoklad, implikans) a druhý výrok (výrok q) sa nazýva podmienený výrok (záver, implikát).

Pravdivosť implikácie $p \Rightarrow q$ je znázornená v tabuľke 1.1.2. Vidíme, že implikácia je nepravdivá iba v prípade pravdivého predpokladu a nepravdivého záveru. To znamená, že výroky $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow p$ nemusia mať rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Poznámka 1.1.3.
V bežnej reči berieme do úvahy tiež súvislosť jednotlivých výrokov, z ktorých tvoríme implikáciu. Vo výrokovej logike sa táto súvislosť nevyžaduje. Na implikáciu sa nepozeráme ako na dôsledkový vzťah, ale ako na zložený výrok vytvorený pomocou predpokladu a záveru. To znamená, že pravdivá je tiež implikácia „*Ak je číslo 24 deliteľné tromi, potom má deň 24 hodín.*“ a dokonca aj implikácia „*Ak je číslo 24 deliteľné piatimi, potom má deň 24 hodín.*“.

Príklad 1.1.6.
Uvažujme výrok p: „*Celé číslo x je deliteľné tromi.*“ a výrok q: „*Celé číslo x je párne.*“.
Utvorme implikáciu $p \Rightarrow q$: „*Ak celé číslo x je deliteľné tromi, potom je párne.*“.
V závislosti od čísla x môžu nastať rôzne prípady pre pravdivosť implikácie $p \Rightarrow q$.
Napríklad pre $x = 18$ ($|p| = |q| = P$), pre $x = 19$ ($|p| = |q| = N$) a pre $x = 20$ ($|p| = N$, $|q| = P$) má implikácia hodnotu P. Pre $x = 21$ ($|p| = P$, $|q| = N$) má hodnotu N. ■

[4] V literatúre sa môžeme stretnúť aj s názvom **alternatíva**.

- **Ekvivalencia výrokov**

Ekvivalencia výrokov p a q sa tvorí pomocou vzťahu „... (platí) práve vtedy, ak (platí) ...“, označujeme ju $p \Leftrightarrow q$. Niekedy sa tiež označuje $p \sim q$, resp. $p \equiv q$.

Ekvivalenciu výrokov p a q čítame *„p (platí) práve vtedy, ak (platí) q“*, *„p platí vtedy a len vtedy, ak platí q“*, *„Z p vyplýva q a naopak z q vyplýva p“*, *„p je nutná podmienka a súčasne postačujúca podmienka pre q“* a podobne.

Pravdivosť ekvivalencie $p \Leftrightarrow q$ je znázornená v tabuľke 1.1.2. Z tabuľky je zrejmé, že ekvivalencia je pravdivá v prípade, ak majú obidva výroky (z ktorých je zložená) rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Z ekvivalencie $p \Leftrightarrow q$ vyplývajú implikácie $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow p$. A naopak z implikácií $p \Rightarrow q$ a $q \Rightarrow p$ vyplýva ekvivalencia $p \Leftrightarrow q$. Teda ekvivalenciu $p \Leftrightarrow q$ môžeme nahradiť zloženým výrokom $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Formálne to môžeme zapísať vzťahom:

$$\big[p \Leftrightarrow q\big] \;\;\Leftrightarrow\;\; \big[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big].$$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$
P	P	N	P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	N			N	N	P	P	N	P	N	N
N	P	P	N	N	N	P	P	P	N	N	N
N	N			N	N	N	N	P	P	P	P

Tabuľka 1.1.2: Pravdivostné hodnoty zložených výrokov.

Poznámka 1.1.4.
Výnimkou pri chápaní implikácie a ekvivalencie je formulácia definícií, napríklad definícia:

> *„Hovoríme, že funkcia $f(x)$, $x \in D(f)$ je rastúca na množine $A \subset D(f)$, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.“*

má formálne tvar implikácie ale zmysel ekvivalencie. To znamená, že **definíciu musíme vždy chápať ako ekvivalenciu medzi predpokladom a záverom**!

1.1.3 Výrokové formy

V predchádzajúcej časti sme uviedli zložené výroky, ktoré sme vytvorili pomocou symbolov $\overline{}$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Tieto symboly patria medzi logické konštanty a nazývajú sa **logické spojky**. S iba týmito zloženými výrokmi však logika (a ani žiaden jazyk) nevystačí. Často je potrebné tvoriť ešte zložitejšie výroky a skúmať ich vlastnosti.

Z tohto hľadiska sa zameriame na výrokové formy. V zásade nemá zmysel hovoriť o pravdivosti alebo nepravdivosti výrokovej formy, pretože obsahuje premenné. Ale má zmysel uvažovať, pre aké hodnoty premenných sa z nej stáva pravdivý, resp. nepravdivý výrok. Dôležité sú dve výrokové formy, ktoré sa nazývajú tautológia a kontraindikácia.

Tautológia (**zákon**) je výroková forma, ktorá po nahradení všetkých premenných konštantami dá vždy pravdivý výrok. To znamená, že ak použijeme prípustné konštanty s ľubovoľnými pravdivostnými hodnotami, dostaneme pravdivý výrok.

Kontraindikácia (**spor**) je výroková forma, ktorá po nahradení všetkých premenných konštantami dá vždy nepravdivý výrok.

Pravdivostné hodnoty výrokov najčastejšie zisťujeme pomocou tabuľkovej alebo deduktívnej metódy, prípadne tieto metódy kombinujeme.

- **Tabuľková metóda na zisťovanie pravdivostných hodnôt**

Zapíšeme danú výrokovú formu a jednotlivé premenné, z ktorých je zložená, do tabuľky pravdivostných hodnôt. Najprv ohodnotíme pravdivostnými hodnotami jednotlivé premenné a potom určíme príslušné pravdivostné hodnoty výrokovej formy.

Príklad 1.1.7.
Už sme spomínali, že výroková forma $[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ je tautológia.
Táto skutočnosť vyplýva z tabuľky 1.1.3. ■

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
P	P	P	P	P	P	P
P	N	N	P	N	N	P
N	P	P	N	N	N	P
N	N	P	P	P	P	P

Tabuľka 1.1.3: Tautológia $[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

- **Deduktívna metóda na zisťovanie pravdivostných hodnôt**

Na začiatku vychádzame z axióm[5] a tautológií, ktorých pravdivosť je dokázaná alebo pravdivosť ktorých poznáme. Potom pomocou pravidiel odvodzovania z nich dedukujeme nové tautológie. V jednoduchých prípadoch vystačíme s pravidlom substitúcie a pravidlom odlúčenia.

i) **Pravidlo substitúcie**:
Ak v tautológii T dosadíme za nejakú premenú (na každom mieste, kde sa vyskytuje) ľubovoľnú výrokovú formu (nemusí byť tautológia), dostaneme opäť tautológiu.
Napríklad, ak do výrazu $p \vee \overline{p}$ dosadíme $q \vee r$ namiesto p, dostaneme $(q \vee r) \vee \overline{(q \vee r)}$.

ii) **Pravidlá odlúčenia** (modus ponens a tollens):
- **Modus ponens** (hypoteticko–kategorický kladný úsudok):
Nech $p \Rightarrow q$ je pravdivá implikácia. Ak je pravdivé p, potom je pravdivé aj q.
- **Modus tollens** (hypoteticko–kategorický záporný úsudok):
Nech $p \Rightarrow q$ je pravdivá implikácia. Ak je nepravdivé q, potom je nepravdivé aj p.

Platnosť pravidiel odlúčenia vyplýva z tabuľky 1.1.2. Ukážeme platnosť modusu ponens (modus tollens sa ukáže analogicky). Predpoklad p je pravdivý. Záver q je buď pravdivý a implikácia $p \Rightarrow q$ je tiež pravdivá, alebo záver q je nepravdivý a implikácia $p \Rightarrow q$ je nepravdivá. Lenže druhá možnosť nemôže nastať, pretože predpokladáme platnosť implikácie $p \Rightarrow q$.

Príklad 1.1.8.
Z fyziky sú známe tepelné účinky prúdu prechádzajúceho vodičom. Vyjadruje to zákon: „*Ak vodičom s napätím U prechádza prúd I, potom množstvo tepla Q vyvinuté prúdom I (tzv. **Jouleove teplo**) za čas t je dané vzťahom $Q = UIt$.*“
Takže ak vieme, že daným vodičom tečie prúd, potom vieme (bez výpočtu), že sa tento vodič zahrieva. A ak chceme, môžeme uvoľnené teplo vypočítať podľa daného vzorca. ■

[5] **Axióma** je základné tvrdenie, o ktorom sa predpokladá, že platí a nedokazuje sa.

1.1.4 Niektoré dôležité tautológie

Teraz uvedieme niektoré dôležité tautológie, ktoré sa často využívajú pri dôkazoch nielen v matematike.

- **Zákon dvojitej negácie:** $p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$

Zákon vyjadruje skutočnosť, že výrok a negácia jeho negácie majú rovnakú pravdivostnú hodnotu. Pravdivosť tohto zákonu vyplýva z tabuľky 1.1.4.

- **Zákon vylúčenia tretieho:** $p \vee \overline{p}$

Buď platí výrok alebo jeho negácia. Toto tvrdenie vyplýva z tabuľky 1.1.4.

- **Zákon sporu:** $\overline{p \wedge \overline{p}}$

Výrok nemôže byť pravdivý a zároveň nepravdivý, t. j. nikdy neplatí $p \wedge \overline{p}$. Pravdivosť tohto zákonu vyplýva z tabuľky 1.1.4.

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$	$p \vee \overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$	$\overline{p \wedge \overline{p}}$
P	N	P	P	P	N	P

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \Leftrightarrow \overline{\overline{p}}$	$p \vee \overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$	$\overline{p \wedge \overline{p}}$
N	P	N	P	P	N	P

Tabuľka 1.1.4: Zákon dvojitej negácie, zákon vylúčenia tretieho, zákon sporu.

- **de Morganove zákony:** $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$, **resp.** $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$

Tieto zákony umožňujú nahradiť negáciu disjunkcie dvoch výrokov konjunkciou negácií týchto výrokov, resp. nahradiť negáciu konjunkcie dvoch výrokov disjunkciou negácií týchto výrokov. Pravdivosť týchto zákonov vyplýva z tabuľky 1.1.5.

Pri tvorení negácie konjunkcie, resp. disjunkcie sa mení spojka „a“ na „alebo“, resp. spojka „alebo“ na „a“ a negujú sa jednotlivé výroky.

Toto pravidlo sa ale v hovorovej reči nemusí doslovne dodržať, napríklad negáciou k výroku *„Prší alebo je zima.“* je výrok *„Neprší a nie je zima.“*. V hovorovej reči by sme asi povedali *„Neprší a ani nie je zima.“*.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	T_1	T_2
P	P	N	N	P	N	N	P	N	N	P	P
P	N	N	P	P	N	N	N	P	P	P	P
N	P	P	N	P	N	N	N	P	P	P	P
N	N	P	P	N	P	P	N	P	P	P	P

Tabuľka 1.1.5: De Morganove zákony $T_1 : \overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$, $T_2 : \overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$.

- **Zákon hypotetického sylogizmu:** $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \;\Rightarrow\; (p \Rightarrow r)$

Je obdobou tranzitívneho zákona. Jeho pravdivosť je overená v tabuľke 1.1.6.

- **Zákon transpozície:** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

Niekedy je jednoduchšie namiesto implikácie $p \Rightarrow q$ dokázať implikáciu $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$. Skutočnosť, že implikácia $p \Rightarrow q$ a obrátená implikácia $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ majú rovnaké pravdivostné hodnoty (vyplýva z tabuľky 1.1.7) sa často využíva pri **nepriamom dôkaze**.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	T
P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	N	P	N	N	N	P
P	N	P	N	P	N	P	P
P	N	N	N	P	N	N	P
N	P	P	P	P	P	P	P
N	P	N	P	N	N	P	P
N	N	P	P	P	P	P	P
N	N	N	P	P	P	P	P

Tabuľka 1.1.6: Zákon hypotetického sylogizmu $T : [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

- **Komutatívne zákony:** $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$, $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

  Tieto zákony vyplývajú z tabuľky 1.1.2.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
P	P	N	N	P	P	P
P	N	N	P	N	N	P
N	P	P	N	P	P	P
N	N	P	P	P	P	P

Tabuľka 1.1.7: Zákon transpozície.

- **Asociatívne zákony:** $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$, $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$

Tieto zákony vyplývajú z tabuľky 1.1.8. Pre jednoduchosť zvykneme v takomto prípade zátvorky vynechávať, t. j. píšeme $p \wedge q \wedge r$, resp $p \vee q \vee r$. Takže konjunkcia $p \wedge q \wedge r$ je pravdivá, ak sú pravdivé všetky tri výroky p, q, r a disjunkcia $p \vee q \vee r$ je pravdivá, ak je pravdivý aspoň jeden z výrokov p, q, r. Takýmto spôsobom môžeme definovať konjunkciu a disjunkciu pre ľubovoľný konečný počet výrokov.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	T_1	T_2
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	N	P	N	P	P	N	N	P	P	P	P
P	N	P	N	N	P	P	N	N	P	P	P	P
P	N	N	N	N	P	N	N	N	P	P	P	P
N	P	P	N	P	P	P	N	N	P	P	P	P
N	P	N	N	N	P	P	N	N	P	P	P	P
N	N	P	N	N	N	P	N	N	P	P	P	P
N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	P	P

Tabuľka 1.1.8: Asociatívne zákony
$T_1 : [(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$, $T_2 : [(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$.

- **Distributívne zákony:** $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$, $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

  Tieto zákony vyjadrujú skutočnosť, že konjunkcia je distributívna vzhľadom na disjunkciu a taktiež disjunkcia je distributívna vzhľadom na konjunkciu. Ich pravdivosť vyplýva z tabuľky 1.1.9.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	T_1
P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	N	P	N	P	P	P	P
P	N	P	N	P	P	P	P	P
P	N	N	N	N	N	N	N	P
N	P	P	N	N	P	N	N	P
N	P	N	N	N	P	N	N	P
N	N	P	N	N	P	N	N	P
N	N	N	N	N	N	N	N	P

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	T_2
P	P	P	P	P	P	P	P	P
P	P	N	P	P	N	P	P	P
P	N	P	P	P	N	P	P	P
P	N	N	P	P	N	P	P	P
N	P	P	P	P	P	P	P	P
N	P	N	P	N	N	N	N	P
N	N	P	N	P	N	N	N	P
N	N	N	N	N	N	N	N	P

Tabuľka 1.1.9: Distributívne zákony
$T_1 : [p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$, $T_2 : [p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

- $[p \Leftrightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

  Túto tautológiu sme dokázali v príklade 1.1.7.

- **Negácia implikácie:** $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$

  Táto tautológia sa najčastejšie používa pri dôkaze sporom (str. 1.2.2).

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$, $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p \wedge \overline{q}}$, **resp.** $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$, $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

  Prvé dve tautológie dávajú návod ako nahradiť implikáciu dvoch výrokov výrazom tvoreným iba disjunkciou, resp. konjunkciou a negáciou jednotlivých výrokov. Všetky štyri tautológie vyplývajú z tabuľky 1.1.10.

Poznámka 1.1.5.
Ak máme konečný počet výrokov $p_1, p_2, \ldots, p_n$, resp. nekonečný počet výrokov $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, potom ich konjunkciu a disjunkciu môžeme stručne zapísať vzťahmi:

$$p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n = \bigvee_{k=1}^{n} p_k, \qquad p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n \vee \cdots = \bigvee_{k=1}^{\infty} p_k,$$
$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n = \bigwedge_{k=1}^{n} p_k, \qquad p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \cdots = \bigwedge_{k=1}^{\infty} p_k.$$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\overline{p} \vee q$	$\overline{p \wedge \overline{q}}$	T_1	T_2	T_3	T_4
P	P	N	N	P	P	P	P	P	P	P	P
P	N	N	P	N	P	N	N	P	P	P	P
N	P	P	N	P	N	P	P	P	P	P	P
N	N	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

Tabuľka 1.1.10: Tautológie
$T_1 : (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$, $T_2 : (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p \wedge \overline{q}}$, resp. $T_3 : p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$, $T_4 : (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$.

Príklad 1.1.9.
Dokážte, že výraz $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})]$ je tautológia.

Riešenie.
Keďže výrazy $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$, $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\overline{q} \vee p)$ sú tautológie, môžeme nahradiť $p \Rightarrow q$ výrazom $\overline{p} \vee q$ a tiež výraz $q \Rightarrow p$ nahradiť výrazom $\overline{q} \vee p$.
Ak dosadíme tieto výrazy do tautológie $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$, dostaneme dokazovanú tautológiu $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})]$.
Dané tvrdenie môžeme dokázať tiež pomocou tabuľky 1.1.11. ■

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Leftrightarrow q$	$\overline{p} \vee q$	$p \vee \overline{q}$	$(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})]$
P	P	N	N	P	P	P	P	P
P	N	N	P	N	N	P	N	P
N	P	P	N	N	P	N	N	P
N	N	P	P	P	P	P	P	P

Tabuľka 1.1.11: Tautológia $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})]$.

1.1.5 Kvantifikátory

V matematike často skúmame, či je nejaký výrok pravdivý všeobecne, t. j. platný pre všetky prvky z oboru úvahy, alebo iba pre niektoré prvky, prípadne iba pre práve jeden prvok. Na druhej strane nás niekedy zaujíma, či existuje aspoň jeden prvok, pre ktorý je tento výrok pravdivý. Hovoríme, že **výrok kvantifikujeme**.

Kvantifikované výroky sú veľmi časté a stretávame sa s nimi stále aj v bežnej reči, napr. „*Vždy keď ideme na výlet, začne pršať.*“, alebo „*Pre každé reálne číslo x existuje celé číslo k také, že platí $k \leq x < k+1$.*“ Kvantifikátor určuje množstvo (kvantitu) prvkov z oboru úvahy, ktoré spĺňajú danú vlastnosť, t. j. pre ktoré je daný výrok pravdivý.

- **Všeobecný kvantifikátor**

Ak danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňajú **všetky prvky** z oboru úvahy, kvantifikujeme daný výrok **všeobecným kvantifikátorom**. Vyjadrujeme ho slovami „každý“, „všetky“, „žiadny“ a podobne. Všeobecný kvantifikátor sa označuje symbolom „$\forall$“, ktorý vyjadruje obrátené písmeno A.[6]

[6]V literatúre sa stretávame aj s označením Π a $\wedge$.

- **Existenčný kvantifikátor**

Ak danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňa **aspoň jeden prvok** z oboru úvahy, kvantifikujeme výrok **existenčným kvantifikátorom**. Vyjadrujeme ho slovami „existuje“, „jestvuje“, „niektoré“, „aspoň jeden“ a podobne. Označujeme ho symbolom „$\exists$“, ktorý vyjadruje obrátené písmeno E.[7]

Symbolom „$\exists!$“ vyjadrujeme skutočnosť, že danú vlastnosť alebo daný vzťah spĺňa **práve jeden prvok** z oboru úvahy (t. j. aspoň jeden a najviac jeden prvok).

Príklad 1.1.10.
a) Výrok „*Ak $a > 0$, potom $a^n > 0$ pre všetky prirodzené čísla n.*“
môžeme vyjadriť kvantifikátorom: $\forall n \in N\colon\ a > 0 \Rightarrow a^n > 0$.
b) Výrok „*Ak $a < 0$, potom $a^n > 0$ pre nejaké prirodzené číslo n.*“
môžeme vyjadriť pomocou kvantifikátora: $\exists n \in N\colon\ a < 0 \Rightarrow a^n > 0$. ■

Príklad 1.1.11.
a) Ak v pravdivom výroku „*Pre každé reálne číslo x existuje celé číslo n také, že platí nerovnosť $n < x$.*“ vymeníme poradie kvantifikátorov, dostaneme nepravdivý výrok „*Existuje celé číslo n také, že pre každé reálne číslo x platí nerovnosť $n < x$.*“. Symbolicky môžeme tieto výroky vyjadriť:

$$\forall x \in R\, \exists n \in Z\colon\ n < x, \qquad \text{resp.} \quad \exists n \in Z\, \forall x \in R\colon\ n < x.$$

Takže **záleží na vzájomnom poradí existenčného a všeobecného kvantifikátora!**
b) Výrok „*Pre všetky reálne čísla x a y platí $x^2 + y^2 \geq 0$.*“ môžeme symbolicky vyjadriť:

$$\forall x \in R\, \forall y \in R\colon\ x^2 + y^2 \geq 0, \qquad \text{resp.} \quad \forall y \in R\, \forall x \in R\colon\ x^2 + y^2 \geq 0.$$

Takže na poradí kvantifikátorov nezáleží a môžeme písať $\forall x, y \in R\colon\ x^2 + y^2 \geq 0$. ■

Označme symbolom $F(x)$ skutočnosť, že prvok x má vlastnosť F. Kvantifikácia sa vždy vzťahuje k **oboru kvantifikácie**, t. j. k množine premenných prvkov x.

Ak použijeme kvantifikátor, potom viažeme premennú na túto množinu premenných a z výrokovej formy $F(x)$ sa stáva výrok:

$\forall x\colon\ F(x)$ „*Pre všetky x, pre ktoré platí vlastnosť $F(x)$.*“,
$\exists x\colon\ F(x)$ „*Existuje x, ktoré spĺňa vlastnosť $F(x)$.*“.

Poznámka 1.1.6.
Niekedy pre jednoduchosť symbol „: “ vynechávame, takže zápisy

$$„\forall x\colon F(x)“ \text{ a } „\forall x\, F(x)“, \quad \text{resp. } „\exists x\colon F(x)“ \text{ a } „\exists x\, F(x)“$$

vyjadrujú tie isté výroky.

Teraz uvedieme príklady výrokov vytvorených pomocou kvantifikátorov:

$\forall x\, F(x)$ „*Každé x má vlastnosť F.*“
$\overline{\forall x\, F(x)}$ „*Nie je pravda, že každé x má vlastnosť F.*“, t. j. „*Nie každé x má vlastnosť F.*“, t. j. „*Existuje aspoň jedno x, ktoré nemá vlastnosť F.*“.
$\overline{\forall x}\, F(x)$ „*Nie každé x má vlastnosť F.*“, t. j. „*Existuje aspoň jedno x, ktoré nemá vlastnosť F.*“.
$\forall x\, \overline{F(x)}$ „*Pre každé x platí, že nemá vlastnosť F.*“, t. j. „*Každé x nemá vlastnosť F.*“.
V hovorovej reči použijeme dvojitú negáciu: „*Žiadne x nemá vlastnosť F.*“.
$\overline{\forall x}\, \overline{F(x)}$ „*Nie každé x nemá vlastnosť F.*“, t. j. „*Neplatí, že každé x nemá vlastnosť F.*“.

[7] V literatúre sa stretávame aj s označením $\sum$, $\vee$ a niekedy aj E.

$\exists x\, F(x)$	*„Existuje aspoň jedno x, ktoré má vlastnosť F.“*
$\overline{\exists x\, F(x)}$	*„Nie je pravda, že existuje x, ktoré má vlastnosť F.“*, t. j. *„Neexistuje x, ktoré má vlastnosť F.“*, t. j. *„Každé x nemá vlastnosť F.“*.
$\overline{\exists x}\, F(x)$	*„Neexistuje x, ktoré má vlastnosť F.“*, t. j. *„Každé x nemá vlastnosť F.“*.
$\exists x\, \overline{F(x)}$	*„Existuje aspoň jedno x, ktoré nemá vlastnosť F.“*
$\overline{\exists x}\, \overline{F(x)}$	*„Neexistuje x, ktoré nemá vlastnosť F.“*

Poznámka 1.1.7.
Musíme rozlišovať výroky „$\overline{\forall x\, F(x)}$“ a „$\overline{\forall x}\, \overline{F(x)}$“. Prvý výrok vyjadruje negáciu výroku $\forall x\, F(x)$, druhý výrok popiera kvantifikátor a to sa vzťahuje na negáciu výroku.

Poznámka 1.1.8.
Z predchádzajúceho vyplýva, že „$\overline{\forall x\, F(x)}$“ a „$\overline{\forall x}\, F(x)$“, resp. „$\overline{\exists x\, F(x)}$“ a „$\overline{\exists x}\, F(x)$“ vyjadrujú ten istý výrok, t. j. **negácia kvantifikátoru je ekvivalentná negácii kvantifikovaného výroku**. To znamená, že platí:

$$\overline{\forall x\, F(x)} \;\Leftrightarrow\; \overline{\forall x}\, F(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x\, \overline{F(x)}, \qquad \overline{\exists x\, F(x)} \;\Leftrightarrow\; \overline{\exists x}\, F(x) \;\Leftrightarrow\; \forall x\, \overline{F(x)}.$$

Uvažujme ako obor kvantifikácie konečnú množinu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, kde $n \in N$. Vzťah $\forall x\, F(x)$, resp. $\forall x \in X$: $F(x)$, znamená $F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge \cdots \wedge F(x_n)$, t. j. že vlastnosť $F(x)$ spĺňajú všetky premenné x_1, x_2, …, x_n. Podobne vzťah $\exists x\, F(x)$, resp. $\exists x$: $F(x)$ znamená $F(x_1) \vee F(x_2) \vee \cdots \vee F(x_n)$, t. j. že vlastnosť $F(x)$ má aspoň jedna z premenných x_1, x_2, …, x_n.

Potom podľa de Morganových zákonov platí:

$$\overline{\forall x\, F(x)} \;\Leftrightarrow \overline{F(x_1) \wedge \cdots \wedge F(x_n)} \Leftrightarrow \left[\overline{F(x_1)} \vee \cdots \vee \overline{F(x_n)}\right] \Leftrightarrow \exists x\, \overline{F(x)}, \tag{1.1}$$

$$\overline{\exists x\, F(x)} \;\Leftrightarrow \overline{F(x_1) \vee \cdots \vee F(x_n)} \Leftrightarrow \left[\overline{F(x_1)} \wedge \cdots \wedge \overline{F(x_n)}\right] \Leftrightarrow \forall x\, \overline{F(x)}. \tag{1.2}$$

Takže negáciou všeobecného kvantifikátora je existenčný kvantifikátor a negáciou existenčného kvantifikátora je všeobecný kvantifikátor.

Tieto pravidlá ostanú v platnosti aj v prípade nekonečného oboru kvantifikácie. Ak to zhrnieme, dostávame:

$$\overline{\forall x\, F(x)} \Leftrightarrow \overline{\forall x}\, F(x) \Leftrightarrow \exists x\, \overline{F(x)}, \qquad \overline{\overline{\forall x\, F(x)}} \Leftrightarrow \overline{\overline{\forall x}}\, F(x) \Leftrightarrow \forall x\, F(x) \Leftrightarrow \overline{\exists x}\, \overline{F(x)},$$

$$\overline{\forall x\, \overline{F(x)}} \Leftrightarrow \overline{\forall x}\, \overline{F(x)} \Leftrightarrow \exists x\, F(x), \qquad \overline{\overline{\forall x}\, \overline{F(x)}} \Leftrightarrow \overline{\overline{\forall x}}\, \overline{F(x)} \Leftrightarrow \forall x\, \overline{F(x)} \Leftrightarrow \overline{\exists x}\, F(x).$$

Uvažujme výrok, ktorý obsahuje aspoň dva kvantifikátory, napr. „$\forall x\, \exists y\, F(x, y)$“, kde $F(x, y)$ je výroková forma dvoch premenných x, y. Ďalej označme symbolom $G(x, y)$ výrokovú formu „$\exists y\, F(x, y)$“. Potom negáciu daného výroku, môžeme vyjadriť:

$$\overline{\forall x\, \exists y\, F(x,y)} \;\Leftrightarrow\; \overline{\forall x\, G(x,y)} \;\Leftrightarrow\; \exists x\, \overline{G(x,y)} \;\Leftrightarrow\; \exists x\, \overline{\exists y\, F(x,y)} \;\Leftrightarrow\; \exists x\, \forall y\, \overline{F(x,y)}.$$

Vidíme, že kvantifikátory sa navzájom vymenili a naviac sa negovala výroková forma $F(x, y)$. Takže vo všeobecnosti **pri negácii výroku s kvantifikátormi sa mení všeobecný kvantifikátor na existenčný a existenčný kvantifikátor na všeobecný, ďalej sa výroková forma pritom mení na svoju negáciu**.

Príklad 1.1.12.
„Hovoríme, že funkcia $f(x)$, $x \in D(f)$ je spojitá v bode a, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D(f)$, $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.“

Výrok vyjadruje definíciu spojitosti funkcie v bode a symbolicky ho môžeme vyjadriť:

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x\in D(f)\colon\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

Negáciu tohto výroku môžeme vyjadriť:

$$\overline{\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x\in D(f)\colon\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon} \iff$$

$$\iff \exists\varepsilon > 0\,\forall\delta > 0\,\exists x\in D(f)\colon\ \overline{|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon} \iff$$

$$\iff \exists\varepsilon > 0\,\forall\delta > 0\,\exists x\in D(f)\colon\ |x-a| < \delta \wedge |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.13.
Uvažujme výrok p: „*Neexistuje trojuholník, ktorý je rovnostranný a pravouhlý.*“ a výrok q: „*Žiadny trojuholník nie je pravouhlý a súčasne rovnostranný.*“. Rozhodnite, či sú výroky p a q ekvivalentné.

Riešenie.
Označme $F(x)$: „*x je rovnostranný trojuholník.*“, $G(x)$: „*x je pravouhlý trojuholník.*“.
Potom môžeme vyjadriť p: $\overline{\exists x}[F(x)\wedge G(x)]$, q: $\forall x\overline{F(x)\wedge G(x)}$.
Potom podľa vzťahu (1.2) sú výroky p a q ekvivalentné:

$$\overline{\exists x}[F(x)\wedge G(x)] \ \Leftrightarrow\ \overline{\exists x[F(x)\wedge G(x)]} \ \Leftrightarrow\ \forall x\overline{F(x)\wedge G(x)}. \ \blacksquare$$

Poznámka 1.1.9.
Namiesto označenia $\overline{\exists x}$ sa používa $\nexists x$.
Takže výrok „***Neexistuje prvok x, ktorý má vlastnosť $F(x)$.***“ zapisujeme „$\nexists x\, F(x)$“.

Cvičenia

1.1.1. Vytvorte negáciu a rozhodnite, ktorý z výrokov je pravdivý: ♣

a) „*Všetci ľudia vedia plávať.*“,
b) „*Rovnica $2^x = 4x$ má kladný koreň x.*“,
c) „*Aspoň dve čísla sú kladné.*“,
d) „*Najmenej tretina krajín patrí do OSN.*“,
e) „*Práve dve čísla sú kladné.*“,
f) „*Každé číslo tvaru n^2, $n\in N$ je párne.*“.

1.1.2. Vytvorte negácie nasledujúcich výrokov: ♣

a) $\forall x\in R\colon\ \sin x < 1$,
b) $\exists x\in R\colon\ \sin x < 1$,
c) $\exists! x\in R\colon\ \sin x < 1$,
d) $\nexists x\in R\colon\ \sin x < 1$,
e) $\forall x\in R\colon\ \sin x > 1$,
f) $\exists x\in R\colon\ \sin x > 1$,
g) $\exists! x\in R\colon\ \sin x > 1$,
h) $\nexists x\in R\colon\ \sin x > 1$,
i) $\forall x\in R\colon\ \sin x = 1$,
j) $\exists x\in R\colon\ \sin x = 1$,
k) $\exists! x\in R\colon\ \sin x = 1$,
l) $\nexists x\in R\colon\ \sin x = 1$.

1.1.3. Napíšte tabuľky pravdivostných hodnôt pre nasledujúce výroky: ♣

a) $\overline{p\vee\overline{q}}$,
b) $\overline{p\wedge\overline{q}}$,
c) $\overline{p\vee(q\wedge\overline{p})}$,
d) $(\overline{p}\wedge q)\vee(p\wedge\overline{q})$,
e) $\overline{p}\Rightarrow q$,
f) $\overline{\overline{p}\Leftrightarrow q}$,
g) $\overline{p\Rightarrow q}\Leftrightarrow\overline{q}$,
h) $(p\Rightarrow\overline{q})\wedge\overline{q\Rightarrow p}$,
i) $\overline{p\wedge\overline{q}}\vee p$,
j) $\overline{p\wedge\overline{q}}\vee q$,
k) $(p\vee q)\Rightarrow\overline{p}$,
l) $(p\vee q)\wedge(p\vee\overline{q})$.

1.1.4. Utvorte výroky $p\wedge q$, $p\vee q$ a určte, v ktorých prípadoch sú pravdivé: ♣

a) p: „*Daný trojuholník je pravouhlý.*“, q: „*Daný trojuholník je rovnoramenný.*“,
b) p: „*Celé číslo k je párne.*“, q: „*Celé číslo k je deliteľné tromi.*“,
c) p: „*Daná nerovnica platí pre $x\leq 4$.*“, q: „*Daná nerovnica neplatí pre $x\leq 1$.*“,
d) p: „*Daná kvadratická rovnica nemá reálne riešenie.*“, q: „*Daná kvadratická rovnica má absolútny člen s opačným znamienkom ako znamienko kvadratického člena.*“.

1.1.5. Ku $p \Rightarrow q$ a $p \Leftrightarrow q$ nájdite ekvivalentné formy, ktoré obsahujú iba negáciu a: ♣

a) konjunkciu, disjunkciu, b) konjunkciu, c) disjunkciu.

1.1.6. Utvorte výroky $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $p \Leftrightarrow q$ a určte, ktoré z nich sú pravdivé. V prípade pravdivej implikácie vytvorte pomocou zákona transpozície obrátenú implikáciu.

a) p: *„Dané číslo $x < 0$“*, q: *„Dané číslo $x < 3$“*,
b) p: *„Bol som v Prahe.“*, q: *„Bol som v Čechách.“*,
c) p: *„Nemám peniaze.“*, q: *„Nepôjdem do kina.“*,
d) p: *„Pri ceste rastie čakanka.“*, q: *„Pri ceste rastie tráva.“*,
e) p: *„Prídem na stanicu včas.“*, q: *„Nezmeškám vlak.“*,
f) p: *„Pre dané čísla x, y platí $x^2 = y^2$.“*, q: *„Pre dané čísla x, y platí $x = y$.“*,
g) p: *„$\sin x > 0$.“*, q: *„$x \in (0\,;\,\pi)$.“*,
h) p: *„Dané dve kružnice nemajú spoločné body.“*, q: *„Dané dve kružnice sú sústredné.“*,
i) p: *„Trojuholník ABC je pravouhlý.“*, q: *„Pre strany trojuholníka platí $a^2 + b^2 = c^2$.“*,
j) p: *„Kvadratickú rovnicu môžeme písať v tvare $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.“*, q: *„Kvadratická rovnica má korene x_1, x_2.“*,
k) p: *„Dané číslo $x > 0$.“*, q: *„Pre dané číslo x platí $\sin x > 0$.“*,
l) p: *„Dve rôzne priamky p_1, p_2 ležiace v rovine sú rovnobežné.“*, q: *„Dve priamky p_1, p_2 ležiace v rovine nemajú spoločný bod.“*.

1.1.7. Zistite, ktoré z nasledujúcich výrokových foriem sú tautológie: ♣

a) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$,
b) $[(q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow p)] \Rightarrow [(q \vee r) \Rightarrow p]$,
c) $[(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow [(\overline{p} \Rightarrow \overline{q}) \wedge p]$,
d) $[(q \vee r) \Rightarrow p] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$,
e) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [\overline{r} \Rightarrow (\overline{q} \vee \overline{p})]$,
f) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [\overline{r} \Rightarrow (\overline{q} \wedge \overline{p})]$
g) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$,
h) $[(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$,
i) $[((\overline{p \wedge q} \Rightarrow r) \Rightarrow \overline{p}) \vee (r \Rightarrow (\overline{p} \vee q))] \Rightarrow [(p \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \Rightarrow q)]$,
j) $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow \{[(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r] \vee [(p \wedge \overline{r}) \Rightarrow q]\}$.

1.1.8. Dokážte, že nasledujúce výrokové formy sú tautológie:

a) $p \Leftrightarrow p$, b) $p \Rightarrow p$, c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$, d) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$.

1.1.9. Dokážte de Morganove zákony pre konečný, resp. nekonečný počet výrokov:

a) $\overline{\bigwedge_{k=1}^{n} p_k} \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{n} \overline{p_k}$, b) $\overline{\bigvee_{k=1}^{n} p_k} \Leftrightarrow \bigwedge_{k=1}^{n} \overline{p_k}$, c) $\overline{\bigwedge_{k=1}^{\infty} p_k} \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{\infty} \overline{p_k}$, d) $\overline{\bigvee_{k=1}^{\infty} p_k} \Leftrightarrow \bigwedge_{k=1}^{\infty} \overline{p_k}$.

1.1.10. Určte, ktoré z nasledujúcich výrazov sú výroky a svoje tvrdenie odôvodnite: ♣

a) $4 - 1 = 5$, b) $25 \cdot 4$, c) $2x + 1 = 3$,
d) $2(x + 1) = 2x + 2$, e) *„Koľko je hodín?“*, f) *„Pomoc!“*,
g) *„Nebezpečenstvo úrazu“*, h) *„Prší.“*, i) *„Včera pršalo.“*,
j) *„Zajtra bude pršať.“*, k) *„Včera pršalo?“*, l) *„Prší a neprší.“*.

1.1.11. Uveďte príklady výrazov, ktoré v určitej súvislosti výrokmi sú a v inej nie sú!

1.1.12. Z výrokových foriem p: *„x je deliteľné dvomi.“*, q: *„x je deliteľné tromi.“*, r: *„x je deliteľné šiestimi.“* vytvorte v slovnom znení zložené formy $F(x)$, $\overline{F(x)}$: ♣

a) $F(x)\colon\ (p \wedge q) \Leftrightarrow r$, b) $F(x)\colon\ (p \vee q) \Rightarrow r$, c) $F(x)\colon\ \overline{p \vee q} \Rightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$,
d) $F(x)\colon\ (p \Rightarrow q) \vee \overline{p \wedge r}$, e) $F(x)\colon\ (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \overline{q})$, f) $F(x)\colon\ (p \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$.

1.1.13. Zistite, ktoré z výrokových foriem $F(x)$ z príkladu 1.1.12 sú tautológie. ♣

1.1.14. Zameňme v príklade 1.1.12 výrokovú formu r na tvar „*x je deliteľné piatimi.*“. Ktoré z výrokových foriem $F(x)$ sú tautológie v tomto prípade? ♣

1.1.15. Nech výroková forma t je tautológia a výroková forma k je kontraindikácia. Zistite, ktoré z nasledujúcich výrokových foriem sú tautológie a ktoré kontraindikácie: ♣

a) $\overline{t}$, b) $\overline{k}$, c) $t \Rightarrow k$, d) $k \Rightarrow t$, e) $(t \Rightarrow k) \vee \overline{t \wedge k}$,
f) $t \vee k$, g) $t \wedge k$, h) $\overline{t} \vee \overline{k}$, i) $\overline{t} \wedge \overline{k}$, j) $(t \vee k) \Rightarrow \overline{k \Rightarrow t}$.

1.1.16. K výrokovej forme $\overline{p \Rightarrow q} \vee (r \Leftrightarrow s)$ nájdite ekvivalentnú formu, ktorá neobsahuje $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$. ♣

1.1.17. Zjednodušte výrazy tak, aby v nich bol čo najmenší počet symbolov negácie: ♣

a) $\overline{\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}$, b) $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}$, c) $\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}} \vee \overline{r} \vee \overline{s}$.

1.1.18. Nech p, q sú výrokové formy také, že $p \Leftrightarrow q$ je tautológia. Dokážte, že aj $p \Rightarrow q$ je tautológia.

1.1.19. Dokážte, že výroková forma $\overline{\overline{p \Leftrightarrow q} \Leftrightarrow r} \;\Leftrightarrow\; \overline{p \Leftrightarrow \overline{q \Leftrightarrow r}}$ je tautológia pre ľubovoľné výrokové formy p, q, r.

1.1.20. Uvažujme výrokovú formu $F(x)$: $2x - 3y = 1$. Ktoré z výrokov sú pravdivé: ♣

a) $\forall x \in R\, \forall y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$, b) $\forall x \in R\, \exists y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$,
c) $\exists x \in R\, \forall y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$, d) $\exists x \in R\, \exists y \in (0\,;\,\infty) : F(x)$,
e) $\exists y \in (0\,;\,\infty)\; \forall x \in R\colon F(x)$, f) $\forall y \in (0\,;\,\infty)\; \exists x \in R\colon F(x)$.

1.1.21. Vytvorte negáciu a rozhodnite, ktorý z výrokov je pravdivý: ♣

a) $\forall x \in R\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, b) $\forall x \in R\colon\ \sin^2 x - \cos^2 x = 1$,
c) $\exists x \in R\colon\ \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, d) $\forall x \in R\colon\ \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$,
e) $\exists x \in R\colon x^4 < x^3$, f) $\forall x \in R\, \forall y \in R\colon x^2 + y^2 > 0$,
g) $\exists x \in R\, \forall n \in N : n + 3 < nx$, h) $\forall n \in N\, \exists x \in R\colon n + 3 < nx$.

1.1.22. Vzťahom $p \oplus q \Leftrightarrow \overline{p \Leftrightarrow q}$ definujme logickú spojku $\oplus$ (tzv. **vylučovacia alternatíva**). Pripusťme symbol $\oplus$ vo výrokových formách. Dokážte, že platí $[(p \oplus q) \oplus r] \;\Leftrightarrow\; [p \oplus (q \oplus r)]$.

1.2 Základné prvky matematickej teórie

Hlavným znakom súčasnej matematiky je, že svoje jednotlivé disciplíny buduje axiomaticky. Na začiatku sú najjednoduchšie pojmy (tzv. **primitívne, nedefinované pojmy**) a súbory viet (tzv. **axiómy**), o ktorých predpokladáme, že platia a nedokazujeme ich. Výber systému primitívnych pojmov a axióm nie je úplne ľubovoľný, ale je ovplyvnený rôznymi podmienkami a hlavne účelom, pre ktorý sa disciplína buduje.

Najdôležitejšia je ale **podmienka bezspornosti systému**. To znamená, že v systéme nemôžeme odvodiť výrok a zároveň jeho negáciu. Na tomto základe definujeme pomocou definícií nové pojmy a pomocou už dokázaných (t. j. platných) viet formulujeme a dokazujeme vety nové. Štruktúru matematiky môžeme charakterizovať trojicou základných kameňov, ktoré nazývame **definícia**, **veta** a **dôkaz**.

Definícia určuje význam zavádzaného pojmu, pomocou už známych pojmov. Môže mať rôznu formu, najčastejšou je forma logickej ekvivalencie vyjadrená slovami „*práve vtedy, ak*“ (poznámka 1.1.4).

Veta (**poučka**, **tvrdenie**) je pravdivý výrok o matematických objektoch a vzťahoch medzi nimi, ktorý je dokázaný, resp. nie sú o ňom pochybnosti. **Pravidlom** nazývame obyčajne vetu, ktorá obsahuje návod na ďalší postup (napr. výpočet, konštrukciu nových objektov) pri budovaní systému. V matematike sa niekedy používajú **pomocné vety** (**lemy**), ktoré majú (už podľa názvu) pomocný význam pri dokazovaní iných viet, aby sa ich dokazovanie zjednodušilo a sprehľadnilo.

Dôkaz vety, resp. daného tvrdenia je logický proces, ktorého cieľom je ukázať pravdivosť tvrdenia pomocou axióm, definícií a už predtým dokázaných viet. Dôkazy môžu mať rôzmu formu, najznámejšie druhy dôkazov sú **priamy dôkaz**, **nepriamy dôkaz** a **dôkaz matematickou indukciou**.

1.2.1 Priamy dôkaz

Je to spôsob, ktorý sa používa pri dokazovaní platnosti viet, ktoré majú vo všeobecnosti tvar výroku $p \Rightarrow q$ (ak platí výrok p, potom platí výrok q).

Priamym dôkazom sa dokazuje platnosť pôvodnej implikácie $p \Rightarrow q$. Predpokladáme, že výrok p je pravdivý, potom pomocou definícií, axióm a už dokázaných viet ukážeme, že platí výrok q. Prakticky zostrojíme konečnú postupnosť pravdivých výrokov $p_1, p_2, \ldots, p_k$, ktorú môžeme symbolicky zapísať $p \;\Rightarrow\; p_1 \;\Rightarrow\; p_2 \;\Rightarrow\; \cdots \;\Rightarrow\; p_k \;\Rightarrow\; q$.

Príklad 1.2.1.
Pomocou priameho dôkazu dokážte vetu: $\forall a, b \in R,\ a^2 + b^2 = 1 \;\Rightarrow\; 2\,|ab| \leq 1$.

Riešenie.
Máme dokázať: „*Ak pre všetky reálne čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$, potom platí $2\,|ab| \leq 1$.*“
Nech $a, b \in R$, podľa predpokladu platí $a^2 + b^2 = 1$.
Z platnosti vzťahov $|a|^2 = a^2$, $|b|^2 = b^2$ vyplýva $a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 = 1$.
Ak k obom stranám poslednej rovnosti pripočítame výraz $-2\,|a|\,|b|$, dostaneme

$$|a|^2 + |b|^2 - 2\,|a|\,|b| = 1 - 2\,|a|\,|b| = 1 - 2\,|ab|, \qquad \text{t. j.} \quad [|a| - |b|]^2 = 1 - 2\,|ab|\,.$$

Keďže $[|a| - |b|]^2 \geq 0$, platí aj $1 - 2\,|ab| \geq 0$. Z toho vyplýva $2\,|ab| \leq 1$.
Symbolicky to môžeme zapísať:

$$a^2 + b^2 = 1 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 = 1 \;\Rightarrow\; |a|^2 + |b|^2 - 2\,|a|\,|b| = 1 - 2\,|a|\,|b| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 0 \leq [|a| - |b|]^2 = 1 - 2\,|ab| \;\Rightarrow\; 0 \leq 1 - 2\,|ab| \;\Rightarrow\; 2\,|ab| \leq 1. \blacksquare$$

1.2.2 Nepriamy dôkaz

Nepriamy dôkaz sa podobne ako priamy dôkaz používa pri dokazovaní platnosti viet a tvrdení tvaru $p \Rightarrow q$. Pri nepriamom dôkaze sa nedokazuje platnosť pôvodného výroku $p \Rightarrow q$, ale platnosť nejakého ekvivalentného výroku.

Druhá možnosť je, že budeme predpokladať pravdivosť negácie pôvodného výroku, t. j. pravdivosť výroku $\overline{p \Rightarrow q}$, resp. $p \wedge \overline{q}$ a dokážeme nepravdivosť tejto negácie.

- **Dôkaz pomocou obrátenej implikácie**

Pôvodnú implikáciu $p \Rightarrow q$ nahradíme ekvivalentnou obrátenou implikáciou $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ (zákon transpozície, str. 7) a potom ju dokážeme pomocou priameho dôkazu.

- **Dôkaz sporom**

Budeme predpokladať platnosť negácie výroku $p \Rightarrow q$, t. j. platnosť výroku $p \wedge \overline{q}$ a ukážeme jeho nepravdivosť. Prakticky to znamená, že pri dokazovaní dospejeme k sporu. Najčastejšie sa zvykne dospieť k týmto sporom:

a) $p \wedge \overline{q} \ \Rightarrow \ \overline{p}$, z predpokladu pravdivosti p ukážeme nepravdivosť p.
b) $p \wedge \overline{q} \ \Rightarrow \ q$, z predpokladu nepravdivosti q ukážeme pravdivosť q.
c) $p \wedge \overline{q} \ \Rightarrow \ r \wedge \overline{r}$, kde r je ľubovoľný výrok (zákon sporu, str. 7).
d) $p \wedge \overline{q} \ \Rightarrow \ \overline{r}$, kde r je ľubovoľný známy pravdivý výrok.

Príklad 1.2.2.
Dokážeme tvrdenie: „*Ak je prirodzené číslo n deliteľné* 4*, potom je deliteľné* 2*.*“
To znamená, že máme dokázať platnosť výroku: $\forall n \in N\colon\ 4 \big| n \Rightarrow 2 \big| n$.

Priamy dôkaz $[4 \big| n \Rightarrow 2 \big| n]$:
$\forall n \in N\colon\ 4 \big| n \ \Rightarrow\ \exists k \in N\colon\ n = 4k = 2 \cdot 2k = 2(2k) \ \Rightarrow\ 2 \big| n.$

Obrátená implikácia $[2 \not| n \Rightarrow 4 \not| n]$:
$\forall n \in N\colon\ 2 \not| n \ \Rightarrow\ (2 \cdot 2) \not| n$, t.j $4 \not| n$.

Dôkaz sporom $[4 \big| n \wedge 2 \not| n \Rightarrow \text{spor}]$:
$\forall n \in N\colon\ 4 \big| n \wedge 2 \not| n \ \Rightarrow\ [\exists k \in N\colon\ n = 4k = 2(2k)] \wedge 2 \not| n \ \Rightarrow\ 2 \big| n \wedge 2 \not| n$, t. j. spor. ■

1.2.3 Dôkaz matematickou indukciou

Matematická indukcia je dôležitý prostriedok na dokazovanie tvrdenia, že prvky nejakej množiny majú určitú vlastnosť. Pomocou **matematickej indukcie** sa väčšinou dokazuje pravdivosť výrokov tvaru „$\forall n \in N, n \geq n_0\colon\ F(n)$“, kde n_0 je dané prirodzené číslo.

Nech F je nejaké tvrdenie, ktoré závisí od množiny prirodzených čísel. Chceme ukázať, že tvrdenie $F(n)$ platí pre prirodzené čísla $n = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots$.

Dôkaz **matematickou indukciou** pozostáva z krokov 1, 2 a záveru:

Krok 1.
Ukážeme, že je tvrdenie F splnené pre prvý prvok $n = n_0$, t. j. že platí $F(n_0)$.

Krok 2.
Predpokladáme, že dané tvrdenie F platí pre nejaké prirodzené číslo $n = k \geq n_0$ a (za tohto predpokladu) dokážeme, že platí pre nasledujúce prirodzené číslo $n = k+1$.
Takže ukážeme, že z platnosti $F(k)$ vyplýva platnosť $F(k+1)$.

Záver.
V kroku 1 sme ukázali, že platí $F(n_0)$. Lenže z kroku 2 vyplýva platnosť $F(n_0+1)$.
Z tohto opäť na základe kroku 2 vyplýva platnosť $F(n_0+2)$, $F(n_0+3)$, atď.
Potom je tvrdenie F splnené pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$.

Príklad 1.2.3.
Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí vzťah $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Riešenie.
Označme $F(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$. Takže máme ukázať rovnosť $F(n) = n^2$.

Krok 1. $F(1) = 1^2$.
Vzťah je splnený triviálne, pretože $F(1) = 1 = 1^2$.

Krok 2. $F(k) = k^2 \Rightarrow F(k+1) = (k+1)^2$.
Ak predpokladáme, že platí $F(k) = k^2$, potom

$$F(k+1) = 1 + 3 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = F(k) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Na základe matematickej indukcie vyplýva z krokov 1 a 2 dané tvrdenie. ■

Príklad 1.2.4.
Dokážte, že pre všetky $n \in N$ a pre všetky $x \in R$, $x \neq 2k\pi$, kde $k \in Z$, platí

$$\sum_{j=1}^{n} \sin jx = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2} \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Riešenie.
Označme $F(n) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$, $G(n) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2} \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Krok 1. $G(1) = F(1)$.

Vyplýva z rovností $F(1) = \sin x$, $G(1) = \frac{\sin\frac{(1+1)x}{2} \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \sin\frac{2x}{2} = \sin x$.

Krok 2. $F(k) = G(k) \Rightarrow F(k+1) = G(k+1)$.
Namiesto rovnosti $F(k+1) = G(k+1)$, dokážeme rovnosť $F(k+1) - G(k+1) = 0$.
Zo vzťahu

$$F(k+1) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin kx + \sin (k+1)x = F(k) + \sin (k+1)x$$

vyplýva

$$F(k+1) - G(k+1) = F(k) - G(k+1) + \sin (k+1)x = G(k) - G(k+1) + \sin (k+1)x. \tag{1.3}$$

Najprv vypočítame

$$G(k) - G(k+1) = \frac{\sin\frac{(k+1)x}{2} \sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sin\frac{(k+2)x}{2} \sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \left[\sin\frac{kx}{2} - \sin\frac{(k+2)x}{2}\right]. \tag{1.4}$$

Zo vzťahu $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ vyplýva

$$\sin\frac{kx}{2} - \sin\frac{(k+2)x}{2} = 2\cos\frac{kx+(k+2)x}{4} \sin\frac{kx-(k+2)x}{4} = -2\cos\frac{(k+1)x}{2} \sin\frac{x}{2}.$$

Ak dosadíme práve vypočítaný vzťah do (1.4) a potom do vzťahu (1.3), dostaneme

$$\begin{aligned} F(k+1) - G(k+1) &= \frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \left[-2\cos\frac{(k+1)x}{2} \sin\frac{x}{2}\right] + \sin (k+1)x = \\ &= -2\sin\frac{(k+1)x}{2} \cos\frac{(k+1)x}{2} + \sin (k+1)x = -\sin (k+1)x + \sin (k+1)x = 0. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva $F(k+1) = G(k+1)$.
Tým je tvrdenie na základe princípu matematickej indukcie dokázané. ■

Príklad 1.2.5.
Dokážte, že pre $\forall n \in N$, $n \geq 5$ platí nerovnosť $2^n > n^2$.

Riešenie.
Nerovnosť dokážeme pomocou matematickej indukcie.

Krok 1. Pre $n = 5$ platí $32 = 2^5 > 5^2 = 25$.

Krok 2. $2^k > k^2 \Rightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2$.
Pre $k \geq 5$, t. j. pre $k-1 \geq 4$ platí $(k-1)^2 = k^2 - 2k + 1 \geq 4^2 = 16$.
Z toho dostávame $k^2 \geq 2k+15 > 2k+1$. Potom platí:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Tým pádom je tvrdenie príkladu dokázané. ■

Poznámka 1.2.1.
Matematickou indukciou dokazujeme pre dané $n_0 \in N$ pravdivosť výrokov tvaru:
$$\forall n \in N, n \geq n_0\colon\ F(n).$$
Tento princíp môžeme jednoduchým spôsobom zovšeobecniť pre prvky ľubovoľnej aritmetickej postupnosti[8] $\{a_n\,;\, a_n = a+nd\}_{n=1}^{\infty}$, kde a, d sú ľubovoľné reálne čísla.
Znamená to, že platnosť danej vlastnosti nebudeme dokazovať pre prirodzené čísla n_0, n_0+1, $\ldots$, k, $k+1$, $\ldots$, ale pre čísla a, $d+a$, $2d+a$, $\ldots$, $kd+a$, $(k+1)d+a$, $\ldots$.

Príklad 1.2.6.
Dokážte, že pre ľubovoľné celé číslo n je číslo n^2+n deliteľné dvomi.

Riešenie.
Označme $F(n) = n^2+n$.
Pretože platí $Z = \{-1,-2,-3,\ldots\} \cup \{0\} \cup \{1,2,3,\ldots\}$, dôkaz rozdelíme na tri časti.

a) Pre $n = 0$ platí $F(0)=0$, t. j. $2\big|F(0)$.

b) Pre $n \in \{1,2,3,\ldots\}$ použijeme matematickú indukciu.

Krok 1. $n = 1$: $2\big|F(1)$. Platí, pretože $F(1) = 1+1 = 2$.

Krok 2. $\forall k \in N\colon\ 2\big|F(k)=k^2+k \Rightarrow 2\big|F(k+1) = (k+1)^2+k+1$.
Na základe predpokladu $2\big|F(k)$ platí:
$$F(k+1) = (k+1)^2+k+1 = k^2+2k+1+k+1 = F(k)+2(k+1).$$
Ak uvážime, že $2\big|F(k)$ a $2\big|2(k+1)$, potom $2\big|F(k+1)$.

c) Pre $n \in \{-1,-2,-3,\ldots\}$ dokážeme vzťah tiež matematickou indukciou.

Krok 1. $n = -1$: $2\big|F(-1)$. Platí, pretože platí $F(-1) = 1-1 = 0$.

Krok 2. $\forall k \in \{-1,-2,-3,\ldots\}\colon\ 2\big|F(k)=k^2+k \Rightarrow 2\big|F(k-1) = (k-1)^2+k-1$.
Na základe predpokladu platí:
$$F(k-1) = (k-1)^2+k-1 = k^2-2k+1+k-1 = F(k)-2k.$$
Posledný súčet je deliteľný dvomi, pretože $2\big|F(k)$ a $2\big|2k$.
Z kroku 1 vyplýva $2\big|F(-1)$, z kroku 2 vyplýva, že $2\big|F(-2)$, $2\big|F(-3)$ atď.
Tým je dôkaz daného tvrdenia ukončený.

Iné riešenie.
Riešenie sa od predchádzajúceho bude líšiť iba v časti c).
Položme $m = -n$, potom $m \in N$ a $F(n) = F(-m) = (-m)^2 - m = m^2 - m$.
Takže môžeme pôvodný problém transformovať na problém dokázať, že pre všetky $m \in N$ je číslo m^2-m deliteľné dvomi (dokážeme matematickou indukciou). ■

1.2.4 Poznámka k dôkazom

Nie všetky tvrdenia sa dajú dokázať uvedenými spôsobmi. Niekedy potrebujeme zistiť, či existuje nejaký objekt, resp. potrebujeme zostrojiť konkrétny objekt s danými vlastnosťami alebo na druhej strane chceme ukázať, že nejaká vlastnosť neplatí pre dané prvky.

Na dokázanie pravdivosti výroku, ktorý má tvar „$\exists x\ F(x)$“, nám stačí nájsť aspoň jeden prvok z oboru úvahy, pre ktorý je vlastnosť F splnená. Preto sa takýmto dôkazom zvykne hovoriť **existenčné dôkazy**.

[8] Definícia postupnosti je uvedená na strane 36.

Na dokázanie pravdivosti výroku „$\forall x\ F(x)$“, je nutné ukázať, že vlastnosť F je splnená pre všetky prvky x z oboru úvahy. Z ekvivalencie

$$\overline{\forall x\, F(x)} \iff \overline{\forall x}\, F(x) \iff \exists x\, \overline{F(x)}$$

vyplýva, že ak chceme ukázať nepravdivosť pôvodného výroku, stačí nájsť jeden prvok, pre ktorý vlastnosť F splnená nie je. Takýto prvok nazývame **kontrapríklad**.

Často v matematike potrebujeme zostrojiť (skonštruovať) nejaký objekt s danými vlastnosťami, preto takýto postup niekedy nazývame **konštruktívny dôkaz**.

Poznámka 1.2.2.
Je zrejmé, že pri konkrétnom dôkaze sa môžu rôzne dôkazové metódy prelínať. Spomeňme príklad 1.3.23, v ktorom dokazujeme sporom, že množina všetkých postupností zložených z číslic 0 a 1 je nespočítateľná. Nájdeme tu tiež prvky konštruktívneho dôkazu, pretože sme zostrojili postupnosť, ktorá nepatrí do „spočítateľnej množiny“. Môžeme tiež povedať, že sme skonštruovali kontrapríklad.

Príklad 1.2.7.
Dokážte, že pre všetky $n\in N$ platí $1+2+3+\cdots+n=\sum\limits_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2}$.

Riešenie.
Postupnosť $\{a_j\}_{j=1}^{n}=\{1,2,3,\ldots,n\}$ je n-členná konečná aritmetická s diferenciou $d=1$, prvým členom $a_1=1$ a posledným členom $a_n=n$. Pre jej súčet platí:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(1+n)n}{2}.$$

Iné riešenie.
Ak označíme $1+2+3+\cdots+n=s$, potom zrejme $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=s$.
Ak napíšeme tieto súčty pod seba a spočítame po jednotlivých členoch, dostaneme

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n & = & s \\ n & + & n-1 & + & n-2 & + & \cdots & + & 1 & = & s \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & = & n(n+1) \end{array}$$

Z toho vyplýva $2s=n(n+1)$, t. j. $s=1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$.

Iné riešenie.
Najprv spočítame počet dvojprvkových podmnožín množiny $\{1,2,\ldots,n+1\}$.
Usporiadajme tieto podmnožiny nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{array}{llllllr} \{1,n+1\}, & \{2,n+1\}, & \{3,n+1\}, & \ldots, & \{n-2,n+1\}, & \{n-1,n+1\}, \{n,n+1\}, & n \text{ podmnožín}, \\ \{1,n\}, & \{2,n\}, & \{3,n\}, & \ldots, & \{n-2,n\}, & \{n-1,n\}, & n-1 \text{ podmnožín}, \\ \{1,n-1\}, & \{2,n-1\}, & \{3,n-1\}, & \ldots, & \{n-2,n-1\}, & & n-2 \text{ podmnožín}, \\ \quad\ldots\ldots & & & & & & \ldots \\ \{1,3\}, & \{2,3\}, & & & & & 2 \text{ podmnožiny}, \\ \{1,2\}, & & & & & & 1 \text{ podmnožina}. \end{array}$$

Z toho vyplýva, že dvojprvkových podmnožín je $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$.

Teraz sa pozrieme na tento počet z druhej strany.
Každý z prvkov 1, 2, ..., n, $n+1$ sa nachádza v n dvojprvkových podmnožinách.
Takže dostávame celkovo $(n+1)n$ dvojprvkových podmnožín. Lenže v tomto počte je každá podmnožina započítaná dvakrát (za každý jej prvok raz). To znamená, že počet dvojprvkových podmnožín je $\frac{(n+1)n}{2}$.
Ak to zhrnieme, dostávame tvrdenie vety $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Iné riešenie.
Dokážeme matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí $F(n) = G(n)$, pričom
$$F(n) = 1 + 2 + \cdots + n, \qquad G(n) = \tfrac{n(n+1)}{2}.$$
Krok 1. Tvrdenie $F(1) = G(1)$ platí, pretože $F(1) = 1$, $G(1) = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$.
Krok 2. $\forall k \in N\colon\ F(k) = G(k) \Rightarrow F(k+1) = G(k+1)$.
Keďže pre všetky $k \in N$ platí $F(k) = 1 + 2 + \cdots + k = G(k) = \frac{k(k+1)}{2}$, potom
$$F(k+1) = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = [1 + 2 + \cdots + k] + (k+1) = F(k) + (k+1) =$$
$$= \tfrac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left[\tfrac{k}{2} + 1\right] = (k+1)\tfrac{k+2}{2} = \tfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = G(k+1).$$
Tým je dané tvrdenie na základe princípu matematickej indukcie dokázané. ■

1.2.5 Sumačná a súčinová symbolika

V príkladoch 1.2.4 a 1.2.7 sme použili znak $\sum$ (veľké grécke písmeno sigma), ktorý zjednodušuje zápisy súčtov s mnohými sčítancami. Súčet s konečným počtom sčítancov a_s, a_{s+1}, …, a_n a súčet s nekonečným počtom sčítancov a_s, a_{s+1}, …, a_n, a_{n+1}, …, kde s, n sú celé čísla, zapisujeme:
$$\sum_{j=s}^{n} a_j = a_s + a_{s+1} + \cdots + a_n, \qquad \sum_{j=s}^{\infty} a_j = a_s + a_{s+1} + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots .$$
Tieto zápisy čítame **suma (súčet) a_j pre $j = s$ až n** a **suma (súčet) a_j pre $j = s$ až do nekonečna**.[9] Písmeno j nazývame **sčítací index**, písmeno s pod znakom sumy sa nazýva **dolná hranica pre sčítanie** a písmeno n, resp. symbol ∞ nad znakom sumy nazývame **horná hranica pre sčítanie**.

Za j dosadzujeme postupne celočíselné hodnoty od dolnej hranice po hornú hranicu (vrátane hraníc). Dolnou hranicou s a hornou hranicou n môžu byť vo všeobecnosti ľubovoľné celé čísla, musí byť ale splnená podmienka $s \leq n$. Nekonečné sumy sa nazývajú **číselné rady** a budeme sa nimi podrobne zaoberať neskoršie (str. 124).

Poznámka 1.2.3.
V literatúre sa často stretávame s nekonečnou sumou $\sum_{-\infty}^{\infty} a_j$, v ktorej indexy j nadobúdajú postupne všetky celé čísla od dolnej hranice $-\infty$ po hornú hranicu ∞.

Veta 1.2.1.
Nech $s, n \in Z$, $s \leq n$ a nech $k \in N$, $q \in R$, potom platia nasledujúce rovnosti:

a) $\sum\limits_{j=s}^{n} q a_j = q \sum\limits_{j=s}^{n} a_j$, b) $\sum\limits_{j=s}^{n} (a_j + b_j) = \sum\limits_{j=s}^{n} a_j + \sum\limits_{j=s}^{n} b_j$, c) $\sum\limits_{j=s}^{n} a_{j+k} = \sum\limits_{i=s+k}^{n+k} a_i$,

d) $\sum\limits_{j=s}^{n} q = q(n - s + 1)$, e) $\sum\limits_{j=s}^{n} a_j = a_s + a_{s+1} + \cdots + a_{k-1} + \sum\limits_{j=k}^{n} a_j$, pre $s < k < n$.

Dôkaz.
a) $\sum\limits_{j=s}^{n} q a_j = q a_s + q a_{s+1} + \cdots + q a_n = q(a_s + a_{s+1} + \cdots + a_n) = q \sum\limits_{j=s}^{n} a_j$.

b) $\sum\limits_{j=s}^{n} (a_j + b_j) = (a_s + b_s) + (a_{s+1} + b_{s+1}) + \cdots + (a_n + b_n) =$
$$= (a_s + a_{s+1} + \cdots + a_n) + (b_s + b_{s+1} + \cdots + b_n) = \sum_{j=s}^{n} a_j + \sum_{j=s}^{n} b_j.$$
c) Vyplýva zo vzťahu $\sum\limits_{j=s}^{n} a_{j+k} = a_{s+k} + a_{s+1+k} + \cdots + a_{n+k} = \sum\limits_{i=s+k}^{n+k} a_i$.

[9] Niekedy sa namiesto zápisu $\sum_{j=s}^{n} a_j$ používa zápis $\sum_{j=s,s+1,\dots,n} a_j$, resp. $\sum_{j\in\{s,s+1,\dots,n\}} a_j$.

d) Rovnakých sčítancov q je $n-s+1$, t. j. platí $\sum\limits_{j=s}^{n} q = q+q+\cdots+q = q(n-s+1)$.

e) $\sum\limits_{j=s}^{n} a_j = a_s + a_{s+1} + \cdots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n = a_s + a_{s+1} + \cdots + a_{k-1} + \sum\limits_{j=k}^{n} a_j$. ■

Ak máme dvakrát indexované sčítance a_{ij}, kde $j=s, s+1, s+2, \ldots, n$, $i=t, t+1, t+2, \ldots, m$, môžeme ich súčet vyjadriť dvojitými sumami[10]

$$\sum_{i=t}^{m}\left[\sum_{j=s}^{n} a_{ij}\right] = \sum_{i=t}^{m}\sum_{j=s}^{n} a_{ij}, \qquad \text{resp.} \quad \sum_{j=s}^{n}\left[\sum_{i=t}^{m} a_{ij}\right] = \sum_{j=s}^{n}\sum_{i=t}^{m} a_{ij}.$$

Tieto súčty čítame **dvojitá** (**dvojnásobná**) **suma pre** $j=s$ **až** n **a** $i=t$ **až** m, resp. **dvojitá** (**dvojnásobná**) **suma pre** $i=t$ **až** m **a** $j=s$ **až** n. V prípade, že m, n sú konečné čísla, môžeme poradie sumovania zameniť. Hovorí o tom nasledujúca veta.

Veta 1.2.2.
Nech $s, n \in Z$, $s \leq n$ a nech $t, m \in Z$, $t \leq m$, potom platí $\sum\limits_{i=t}^{m}\sum\limits_{j=s}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{j=s}^{n}\sum\limits_{i=t}^{m} a_{ij}$.

Dôkaz.
Keďže sčítancov a_{ij} ($i=t, t+1, \ldots, m$, $j=s, s+1, \ldots, n$) je konečný počet, môžeme vymeniť ich poradie a dostaneme tvrdenie vety, t. j.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=t}^{m}\sum_{j=s}^{n} a_{ij} &= \sum_{i=t}^{m} (a_{is}+a_{i,s+1}+\cdots+a_{in}) = \\
&= (a_{ts}+a_{t,s+1}+\cdots+a_{tn}) + (a_{t+1,s}+a_{t+1,s+1}+\cdots+a_{t+1,n}) + \cdots + (a_{ms}+a_{m,s+1}+\cdots+a_{mn}) = \\
&= (a_{ts}+a_{t+1,s}+\cdots+a_{ms}) + (a_{t,s+1}+a_{t+1,s+1}+\cdots+a_{m,s+1}) + \cdots + (a_{tn}+a_{t+1,n}+\cdots+a_{mn}) = \\
&= \sum_{j=s}^{n} (a_{tj}+a_{t+1,j}+\cdots+a_{mj}) = \sum_{j=s}^{n}\sum_{i=t}^{m} a_{ij}. \;■
\end{aligned}$$

Poznámka 1.2.4.
Veta 1.2.2 neplatí vo všeobecnosti pre sumy s nekonečnými hranicami. Takže sa môže stať, že ak zameníme poradie sumovania, výsledok sa zmení. Príklad uvedieme neskôr pri číselných radoch (pr. **??**).

Príklad 1.2.8.
Ako ukážku dvojitej sumy uvedieme:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=-1}^{1} j(i+j)^i &= \sum_{i=1}^{4}[-1\cdot(i-1)^i + 0\cdot(i+0)^i + 1\cdot(i+1)^i] = \sum_{i=1}^{4}[-(i-1)^i + (i+1)^i] = \\
&= [-(1-1)^1+(1+1)^1] + [-(2-1)^2+(2+1)^2] + [-(3-1)^3+(3+1)^3] + [-(4-1)^4+(4+1)^4] = \\
&= [0+2] + [-1+9] + [-8+64] + [-81+625] = 610.
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-1}^{1}\sum_{i=1}^{4} j(i+j)^i &= \sum_{j=-1}^{1} j\sum_{i=1}^{4}(i+j)^i = \sum_{j=-1}^{1} j\,[(1+j)+(2+j)^2+(3+j)^3+(4+j)^4] = \\
&= -[(1-1)+(2-1)^2+(3-1)^3+(4-1)^4] + 0\cdot[1+2^2+3^3+4^4] + [(1+1)+(2+1)^2+(3+1)^3+(4+1)^4] = \\
&= -[0+1+8+81] + 0 + [2+9+64+625] = 610. \;■
\end{aligned}$$

[10] Pre jednoduchosť zátvorky vynechávame.

Príklad 1.2.9.
Nech $m, n \in N$ a nech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, $b_1, b_2, \ldots, b_m \in R$, potom platí:

$$\left[\sum_{n=1}^{n} a_i\right] \cdot \left[\sum_{j=1}^{m} b_j\right] = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_m) =$$
$$= a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_m) + a_2(b_1 + b_2 + \cdots + b_m) + \cdots + a_n(b_1 + b_2 + \cdots + b_m) = \sum_{n=1}^{n} \left[a_i \sum_{j=1}^{m} b_j\right] =$$
$$= (a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_1b_m) + (a_2b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_2b_m) + \cdots + (a_nb_1 + a_nb_2 + \cdots + a_nb_m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_ib_j. \blacksquare$$

Na zjednodušenie súčinu používame znak $\prod$ (veľké grécke písmeno pí). Súčin s konečným počtom činiteľov a_s, a_{s+1}, $\ldots$, a_n a súčin s nekonečným počtom činiteľov a_s, a_{s+1}, $\ldots$, a_n, a_{n+1} $\ldots$, kde s, n sú celé čísla, potom zapisujeme

$$\prod_{j=s}^{n} a_j = a_s \cdot a_{s+1} \cdots a_n, \qquad \prod_{j=s}^{\infty} a_j = a_s \cdot a_{s+1} \cdots a_n \cdot a_{n+1} \cdots$$

a čítame **súčin** (**produkt**) a_j **pre** $j = s$ **až** n a **súčin** (**produkt**) a_j **pre** $j = s$ **až do nekonečna**. Písmeno j nazývame **násobiaci index**, písmeno s pod znakom produktu sa nazýva **dolná hranica pre násobenie** a písmeno n, resp. symbol ∞ nad znakom produktu nazývame **horná hranica pre násobenie**.

Príklad 1.2.10.
Pre všetky $n \in N$, $a \in R$ platí $n! = \prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, $\;a^n = \prod_{j=1}^{n} a = a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a$. $\blacksquare$

Nech $n \in N$, potom súčin $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ nazývame **faktoriál čísla** n a čítame n **faktoriál**. Špeciálne pre $n = 0$ definujeme $0! = 1$.

Cvičenia

1.2.1. Dokážte rôznymi spôsobmi nasledujúce tvrdenia:
a) Pre všetky reálne čísla a, b platí $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
b) Súčin dvoch nepárnych čísel je číslo nepárne.
c) Súčin dvoch párnych čísel je číslo párne.
d) Súčin dvoch čísel, z ktorých je aspoň jedno párne, je párny.
e) Súčet dvoch nepárnych čísel je číslo párne.
f) Súčet dvoch párnych čísel je číslo párne.
g) Súčet párneho a nepárnych čísla je číslo nepárne.

1.2.2. Nech koeficienty rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ sú celé čísla, pričom $a \neq 0$ a b je nepárne číslo, potom rovnica nemá dvojnásobný koreň. Dokážte!

1.2.3. Dokážte, že $\sqrt{7}$ je iracionálne číslo.

1.2.4. Celé číslo je deliteľné deviatimi práve vtedy, ak je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. Dokážte!

1.2.5. Dokážte: $\forall a, b \in R\colon\; a \neq b \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 2ab$.

1.2.6. Dokážte priamo, nepriamo pomocou obrátenej implikácie a sporom:

a) $\forall \alpha, \beta \in (0\,;\,\pi):\ \sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$, b) $\forall x \in \left\langle 0\,;\,\frac{\pi}{4}\right):\ 2\operatorname{tg} x < \operatorname{tg} 2x$.

1.2.7. Dokážte rôznymi spôsobmi, že pre všetky $n \in N$ platí: $3 \nmid n \Rightarrow 3 \mid (n^2-1)$.

1.2.8. Dokážte priamo a potom matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí:

a) $2 \mid (n^2-n)$, b) $3 \mid (2n^3+n)$, c) $5 \mid (n^5-n)$, d) $6 \mid (n^3-n)$,
e) $6 \mid (n^3+3n^2+2n)$, f) $6 \mid (n^7-n)$, g) $7 \mid (n^7-n)$, h) $7 \mid (6^{2n}-8)$,
i) $2 \mid (3n^2+5)$ pre n nepárne, j) $8 \mid (n^2+2n)$ pre n párne.

1.2.9. Dokážte priamo a potom matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$ platí:

a) $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$, b) $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{n}{2n+1}$, c) $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{(3j-2)(3j+1)} = \frac{n}{3n+1}$,

d) $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{(3j-1)(3j+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$, e) $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{(4j-1)(4j+3)} = \frac{n}{3(4n+3)}$, f) $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{(4j-3)(4j+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

1.2.10. Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky $n \in N$ platí:

a) $\sum\limits_{j=1}^{n} 2j = n(n+1)$, b) $\sum\limits_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$, c) $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{n} = n$, d) $\sum\limits_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

e) $\sum\limits_{j=1}^{n} 2^j = 2^{n+1}-2$, f) $\sum\limits_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1}-1$, g) $\sum\limits_{j=0}^{n} 3^j = \frac{3^{n+1}-1}{2}$, h) $\sum\limits_{j=0}^{n} 2^{-j} = 2-2^{-n}$,

i) $\sum\limits_{j=1}^{n} (2j-1)(2j+1) = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)+3}{6}$, j) $\sum\limits_{j=1}^{n} (3j-1)(3j+1) = 3n^3+6n^2+n$.

1.2.11. Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky $n \in N$ platí:

a) $\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^j(2j-1) = (-1)^n n$, b) $\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^j j = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$, c) $\sum\limits_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

d) $\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^j j^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$, e) $\sum\limits_{j=1}^{n} (2j-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, f) $\sum\limits_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n^3+3n^2+2n}{3}$,

g) $\sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^j(2j-1)^2 = \frac{(-1)^n(4n^2-1)-1}{2}$, h) $\sum\limits_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

1.2.12. Dokážte pomocou matematickej indukcie, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 2$ platí:

a) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$,
c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, d) $2!\,4!\,6!\,\ldots(2n)! > [(n+1)!]^n$.

1.2.13. Dokážte, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 3$ platí:

a) $n+1 < 2^n$, b) $(2n)! < (2^n n!)^2$, c) $\sqrt{n^n} < n!$, d) $(n+1)^n < n^{n+1}$.

1.2.14. Dokážte, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 2$ platí $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

1.2.15. Dokážte, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 6$ platí $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

1.2.16. Dokážte, že číslo $2^{100}+10$ je deliteľné trinástimi.

1.2.17. Dokážte, že existuje 1000 po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré sú zložené.

1.2.18. Dokážte, že pre všetky $n \in N$, $n \geq 9$ platí $2^n > (n-1)^2(n-2)$.

1.2.19. Dokážte, že pre všetky $n \in N$ platí:

a) $4 \big| [n^2 + (n+1)^2 - 1]$, b) $9 \big| [n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3]$.

1.2.20. Pre všetky $k, n \in N \cup \{0\}$, $k \leq n$ definujeme predpisom $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ **kombinačné číslo** n **nad** k. Kombinačné čísla $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{n}$ tvoria postupne prvky n-tého riadku tzv. **Pascalovho trojuholníka** (obr. 1.2.1). Dokážte priamo a matematickou indukciou:

a) Pre všetky $k, n \in N \cup \{0\}$, $k \leq n-1$ platí $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

b) Pre všetky $n \in N$, $a, b \in R$ platí **binomická veta** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

c) Pre všetky $n \in N$ platí $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

d) Pre všetky $n \in N$, $x \in R$, $x \geq -1$ platí **Bernoulliho nerovnosť** $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \multicolumn{9}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & & & \\
 & \binom{n}{0} & \cdots\cdots & & \binom{n}{k-1} & & \binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} & & \cdots\cdots & & \binom{n}{n} & & \\
\binom{n+1}{0} & & \binom{n+1}{1} & \cdots\cdots & & \binom{n+1}{k} & & \binom{n+1}{n+1} & & \cdots\cdots & & \binom{n+1}{n} & & \binom{n+1}{n+1} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\multicolumn{11}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

Obr. 1.2.1: Pascalov trojuholník.

1.2.21. Dokážte matematickou indukciou, že pre všetky $n \in N$, $x \in R$, $x \neq 2k\pi$ platí:

a) $\frac{1}{2} + \sum\limits_{j=1}^{n} \cos jx = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$, b) $\sum\limits_{j=1}^{n} j \cos jx = \frac{(n+1)\sin nx - n \sin (n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$.

1.2.22. Dokážte, že pre všetky $n \in N$: a) $73 \big| (2^{3n} - 3^{4n})$, b) $31 \big| (5^{n+1} + 6^{2n-1})$.

1.2.23. Predpokladajme, že existujú trojhalierové a päťhalierové mince. Dokážte, že každý nákup s cenou viac ako 7 halierov môžeme zaplatiť týmito mincami.

1.2.24. Dokážte pomocou matematickej indukcie:

a) Vypuklý n-uholník má $\frac{(n-3)n}{2}$ uhlopriečok.

b) Súčet vnútorných uhlov vypuklého n-uholníka je $(n-2)\pi$.

c) Súčet vnútorných uhlov ľubovoľného n-uholníka je $(n-2)\pi$.

d) n priamok prechádzajúcich jedným bodom delí rovinu na $2n$ častí.

e) n rovín prechádzajúcich jednou rovinou delí priestor na $2n$ častí.

f) n rovín prechádzajúcich jedným bodom, z ktorých žiadne tri nemajú spoločnú priamku, delí priestor na $n(n-1)+2$ častí.

1.2.25. Dokážte, že pre všetky $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2 \in R, \ldots, b_n \in R$, $b_0 = b_{n+1} = 0$ platí:

a) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=j}^{n} a_j (b_i - b_{i+1})$, b) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{j} a_j (b_i - b_{ii1})$.

1.3 Množiny

S pojmom množina sa stretávame už v dávnej histórii. Pojem množina je tak všeobecný a používaný, že si ho ani neuvedomujeme. Už naši predkovia zjednocovali objekty rovnakej povahy do skupín (mnoho stromov tvorilo les, niekoľko koní tvorilo stádo, ...).

Do centra záujmu sa dostala množina ako pojem skúmania až na konci 19. storočia a najväčšiu zásluhu na tom mal *Georg Cantor*.

1.3.1 Množina a podmnožina

Pod pojmom **množina** rozumieme neusporiadaný súbor (skupinu, súhrn) predmetov (vecí, pojmov, čísel, ...), ktoré nazývame **prvky množiny**. Množiny sa obvykle označujú veľkými písmenami a ich prvky sa ohraničujú zloženými zátvorkami $\{\ \}$.

Ak prvok patrí do danej množiny, vyjadrujeme to symbolom „$\in$“ a ak nepatrí do danej množiny, vyjadrujeme to symbolom „$\notin$“.

Množiny môžu byť rôzne, napríklad množina áut na parkovisku, množina dobrodružných kníh v knižnici, množina prirodzených čísel, množina hračiek v parlamente, množina písmen v abecede, množina všetkých predmetov na letisku, ktorých názov začína písmenom x, množina $A = \{2, 4, 6, 8\}$, ... Zrejme $2 \in A$, $4 \in A$, ale $3 \notin A$.

Množinu považujeme za danú vtedy, ak o každom predmete je určené, či do danej množiny patrí alebo nepatrí, t. j. či je alebo nie je prvkom danej množiny. To znamená, že množinu môžeme určiť vymenovaním prvkov alebo presným logickým vyjadrením, ktoré prvky do danej množiny patria (prípadne nepatria). Takže formálny zápis

$$A = \{x\,;\ \text{podmienky pre } x\}$$

predstavuje množinu A všetkých bodov x, ktoré spĺňajú dané podmienky.[11]

Príklad 1.3.1.
Množina prirodzených čísel sa zvykne označovať písmenom N.
Má nekonečne veľa prvkov, takže sa dá veľmi ťažko určiť vypísaním všetkých jej prvkov. Môžeme ju ale zapísať napríklad $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Skutočnosť, že číslo 1 je prirodzené a číslo -2 prirodzené nie je, vyjadríme symbolicky $1 \in N$, $-2 \notin N$. ■

Príklad 1.3.2.
Označme A množinu všetkých prirodzených čísel, pre ktoré platí vzťah $3 < n < 7$.
Množinu A môžeme vyjadriť rôznymi spôsobmi, napr.

$$A = \{4, 5, 6\} = \{n\,;\ n \in N \wedge n < 7 \wedge n > 3\} = \{n \in N\colon\ 3 < n < 7\}\,. \ ■$$

Ak má množina konečný počet prvkov, nazýva sa **konečná množina**. Ak nie je konečná, nazýva sa **nekonečná množina**. Konečná je napríklad množina písmen v abecede, množina molekúl vody v Indickom oceáne, množina $\{1, 2, 3, \ldots, 1\,000\,000\}$. Nekonečná je napríklad množina N, množina $\{n \in N\,;\ n > 1\,000\,000\}$, množina všetkých reálnych čísel.

Hovoríme, že **množina A je podmnožinou množiny B** ak, každý prvok množiny A patrí aj do množiny B[12] a zapisujeme $A \subset B$.[13] Ak neplatí, že množina A je podmnožinou množiny B, potom hovoríme **množina A nie je podmnožinou množiny B** a zapisujeme $A \not\subset B$.

---

[11] Ako oddeľovač medzi prvkami a ich podmienkami sa zvykne používať taktiež „**:** “, resp. „**,**“, resp. „**|**“.

[12] Analogicky môžeme definovať pojem nadmnožina. Hovoríme, že **množina B je nadmnožinou množiny A**, ak A je podmnožinou množiny B. Označujeme $B \supset A$.

[13] Vzťahy „*je podmnožina*“ a „*je nadmnožina*“ zvykneme nazývať **inklúzia množín**.

Hovoríme, že **množiny A a B sa rovnajú (sú totožné)**, ak majú tie isté prvky, t. j. ak každý prvok množiny A patrí o množiny B a zároveň každý prvok množiny B patrí do množiny A, píšeme $A = B$. Takže množina A sa rovná množine B práve vtedy, ak $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$.

Ak neplatí, že sa množiny A a B rovnajú, hovoríme, že **množiny A a B sú rôzne (nerovnajú sa)**, vtedy píšeme $A \neq B$. Takže množiny A a B sú rôzne, ak existuje aspoň jeden prvok, ktorý patrí do jednej z množín a nepatrí do druhej. Z toho vyplýva, že **ukázať rovnosť $A = B$** znamená ukázať obidve inklúzie $A \subset B$ a $B \subset A$.

Niekedy sa používajú označenia $A \subseteq B$ alebo $A \subseteqq B$, aby sme zdôraznili, že môže platiť $A = B$ a naopak označenia $A \subsetneq B$, resp. $A \subsetneqq B$, aby sme vylúčili možnosť $A = B$.

Symbolicky môžeme predchádzajúce vzťahy zapísať:

$$A \subset B \;\Leftrightarrow\; (\forall x\colon\; x \in A \Rightarrow x \in B),$$

$$A = B \;\Leftrightarrow\; (A \subset B \wedge B \subset A) \;\Leftrightarrow\; [(\forall x\colon\; x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x\colon\; x \in B \Rightarrow x \in A)].$$

Množinu, ktorá neobsahuje žiadne prvky, nazývame **prázdna množina** a označujeme ju $\emptyset$, prípadne $\{\}$. Musíme si ale uvedomiť, že symbol $\{\emptyset\}$ vyjadruje jednoprvkovú množinu, ktorá ako prvok obsahuje prázdnu množinu. Ďalej si treba uvedomiť, že **prázdna množina je podmnožinou každej množiny** a že je **konečnou množinou**.

Množina $\emptyset$ neobsahuje žiadny prvok, takže pre **všetky prvky x** platí výraz $x \notin \emptyset$. A naopak **neexistuje prvok x**, pre ktorý platí výraz $x \in \emptyset$.

Môže sa stať, že prvkami množiny sú opäť množiny. Takéto množiny sa tiež zvyknú nazývať **systémami množín**. Špeciálny význam medzi takýmito množinami má potenčná množina. Nech A je množina, potom **množina všetkých podmnožín (potenčná množina) množiny A** je množina, ktorá obsahuje všetky podmnožiny množiny A. Potenčnú množinu označujeme 2^A, t. j. $2^A = \{B\,;\, B \subset A\}$.

Príklad 1.3.3.
Uvažujme množinu B všetkých dvojprvkových množín, ktoré obsahujú ako prvky iba čísla 0 alebo 1. Keďže nezáleží na poradí prvkov, množiny $\{0,1\}$ a $\{1,0\}$ sa rovnajú. Množina B obsahuje tri prvky $\{0,0\}$, $\{0,1\}$, $\{1,1\}$, t. j. $B = \{\{0,0\}, \{0,1\}, \{1,1\}\}$. ■

Príklad 1.3.4.
Množina $2^X = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, X\}$ je potenčnou množiny $X = \{0,1,2\}$. ■

1.3.2 Operácie s množinami

Medzi najdôležitejšie množinové operácie patria prienik množín, zjednotenie množín, rozdiel množín, symetrický rozdiel a karteziánsky súčin množín.

- **Prienik dvoch množín**

Nech A, B sú množiny. **Prienikom množín A a B** nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky, ktoré patria do množiny A a zároveň patria do množiny B. Označujeme ho $A \cap B$ a symbolicky píšeme $A \cap B = \{x\,;\, x \in A \wedge x \in B\}$.

Ak pre množiny A, B platí $A \cap B = \emptyset$, potom ich nazývame **disjunktné**.

Z definície vyplýva, že $A \cap B = \{x\,;\, x \in A \wedge x \in B\} = \{x\,;\, x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$.

Poznámka 1.3.1.
Z predchádzajúcej časti vyplýva, že ak chceme dokázať rovnosť $A \cap B = B \cap A$, musíme dokázať dve inklúzie $(A \cap B) \subset (B \cap A)$ a $(B \cap A) \subset (A \cap B)$, t. j.:

$$(A \cap B) \subset (B \cap A):\; x \in A \cap B \;\Rightarrow\; (x \in A \wedge x \in B) \;\Rightarrow\; (x \in B \wedge x \in A) \;\Rightarrow\; x \in B \cap A,$$

$$(B \cap A) \subset (A \cap B):\; x \in B \cap A \;\Rightarrow\; (x \in B \wedge x \in A) \;\Rightarrow\; (x \in A \wedge x \in B) \;\Rightarrow\; x \in A \cap B.$$

Keďže všetky úpravy, ktoré sme vykonali, sú ekvivalentné, môžeme písať priamo:

$$x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \wedge x \in B) \;\Leftrightarrow\; (x \in B \wedge x \in A) \;\Leftrightarrow\; x \in B \cap A.$$

- **Zjednotenie dvoch množín**

Nech A, B sú množiny. **Zjednotením (súčtom) množín A a B** nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky, ktoré patria do množiny A alebo patria do množiny B. Označujeme ho $A \cup B$ a symbolicky zapisujeme $A \cup B = \{x\,;\, x \in A \vee x \in B\}$.

Z definície vyplýva, že $A \cup B = \{x\,;\, x \in A \vee x \in B\} = \{x\,;\, x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$.

- **Rozdiel dvoch množín**

Nech A, B sú množiny. **Rozdielom množín A a B** nazývame množinu, ktorá obsahuje všetky prvky, ktoré patria do množiny A a zároveň nepatria do množiny B. Rozdiel množín označujeme $A - B$ a symbolicky zapisujeme $A - B = \{x\,;\, x \in A \wedge x \notin B\}$.[14]

Príklad 1.3.5.
Rovnosť $A - B = B - A$ vo všeobecnosti neplatí.
Napríklad pre $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ platí $A - B = A = \{1\}$, $B - A = B = \{2\}$. ■

- **Symetrický rozdiel dvoch množín**

Nech A, B sú množiny. **Symetrickým rozdielom množín A a B** nazývame zjednotenie množín $A - B$ a $B - A$. Symetrický rozdiel množín A a B označujeme $A \triangle B$[15] a symbolicky ho môžeme vyjadriť $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{x\,;\, x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$.

Je zrejmé, že platí $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \triangle A$.

Príklad 1.3.6.
Nech $A = \{a, b, d, f\}$, $B = \{a, c, e, g\}$, potom $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A \cap B = \{a\}$,
$A - B = \{b, d, f\}$, $B - A = \{c, e, g\}$, $A \triangle B = \{b, c, d, e, f, g\}$. ■

- **Doplnok množiny**

Nech x je daná množina, nech A je podmnožinou množiny X, t. j. $A \subset X$, potom **doplnkom (doplnkovou množinou) množiny A do množiny X** nazývame množinu $A' = X - A$. Niekedy sa zvykne doplnok tiež označovať A^c, $\overline{A}$, resp. A'_X (aby sa zdôraznil doplnok do množiny X). V praxi sa často používa názov **komplement (komplementárna množina) množiny A do množiny X**.

Množiny A a A' sa nazývajú **doplnkové (komplementárne) vzhľadom na množinu X**. Nesmieme pritom zabudnúť, že $A \subset X$ a taktiež $A' \subset X$. Napríklad množina racionálnych čísel a množina iracionálnych čísel sú doplnkové vzhľadom na množinu reálnych čísel, ale nie sú doplnkové vzhľadom na množinu komplexných čísel.

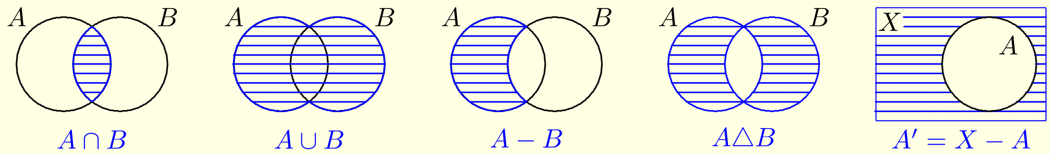
Symbolicky môžeme písať $A' = X - A = \{x\,;\, x \in X \wedge x \notin A\} = \{x \in X\,;\, x \notin A\}$.

Poznámka 1.3.2.
Z uvedeného vyplýva, že každý prvok $x \in X$ patrí do práve jednej z množín A, A'.
Túto skutočnosť môžeme vyjadriť ekvivalenciami $x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$ a $x \notin A \Leftrightarrow x \in A'$.
To znamená, že platia rovnosti $A \cup A' = X$, $A \cap A' = \emptyset$.

[14] V niektorej literatúre sa rozdiel množín A a B označuje symbolom $A \setminus B$.
[15] Symetrický rozdiel sa tiež zvykne označovať symbolom $A \dot{-} B$.

Poznámka 1.3.3.
Nech $X \neq \emptyset$, $A \subset X$, $B \subset X$, potom $A - B = A \cap B'$ (obr. 1.3.2). Vyplýva to zo vzťahov:
$$x \in (A - B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B') \Leftrightarrow x \in (A \cap B').$$

Pre graficku ilustráciu je prienik, zjednotenie, rozdiel, symetrický rozdiel dvoch množín A, B a doplnok množiny A do množiny X znázornený na obrázku 1.3.2 pomocou **Vennovych diagramov**.



Obr. 1.3.2: Prienik, zjednotenie, rozdiel, symetrický rozdiel a doplnok množín.

- **Karteziánsky súčin množín**

Pojem usporiadanej dvojice $[x; y]$ prvkov x a y je nám intuitívne jasný už podľa názvu.[16] **Usporiadaná dvojica** $[x; y]$ prvkov x a y je dvojica prvkov x a y, v ktorej záleží na poradí týchto prvkov, t. j. $[x; y]$ a $[y; x]$ sú dve rôzne usporiadané dvojice.

Usporiadané dvojice $[x_1; y_1]$ a $[x_2; y_2]$ sa **rovnajú**, ak sa rovnajú jednotlivé prvky v danom poradí, t. j. ak platí $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$.

Nech A, B sú dve množiny, potom **karteziánskym súčinom množín A a B** nazývame množinu $A \times B = \{[x; y] \; ; \; x \in A \wedge y \in B\} = \{[x; y] \; ; \; x \in A, \; y \in B\}$.[17]

Z definície vyplýva, že pre $A \neq B$ neplatí vzťah $A \times B = B \times A$.

Karteziánskym súčinom množín A_1, A_2 a A_3 nazývame množinu:
$$A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \{[[x_1; x_2]; x_3] \; ; \; [x_1; x_2] \in (A_1 \times A_2) \wedge x_3 \in A_3\} =$$
$$= \{[x_1;\, x_2;\, x_3] \; ; \; x_1 \in A_1, \; x_2 \in A_2, \; x_3 \in A_3\}.$$
Prvky $[x_1;\, x_2;\, x_3]$ karteziánskeho súčinu $A_1 \times A_2 \times A_3$ nazývame **usporiadané trojice**.

Analogicky definujeme $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 = (A_1 \times A_2 \times A_3) \times A_4$. Predpokladajme, že sme takýmto spôsobom definovali karteziánsky súčin $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}$ pre $n-1$ množín, potom **karteziánskym súčinom množín A_1, A_2, $\ldots$ A_n** je množina
$$A_1 \times \cdots \times A_n = (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n = \{[x_1; \ldots; x_n] \; ; \; x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}.$$
Prvky $[x_1;\, x_2; \ldots; x_n]$ nazývame **usporiadané n-tice**.[18]

Poznámka 1.3.4.
Ak platí $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, potom zjednodušene píšeme $A \times A \times \cdots \times A = A^n$.
Takže napríklad $R^3 = R \times R \times R = \{[x_1;\, x_2;\, x_3] \; ; \; x_1, x_2, x_3 \in R\}$.

Príklad 1.3.7.
Všetky body v rovine tvoria množinu. Môžeme ju chápať ako karteziánsky súčin $R \times R$. Každý bod $x = [x_1; x_2]$ v rovine je určený svojimi súradnicami $x_1, x_2 \in R$. Začiatok súradnicovej sústavy je bod so súradnicami $[0; 0]$. ■

[16] Usporiadaná dvojica prvkov x, y sa tiež zvykne označovať $(x;\, y)$.
[17] Pri zápise množín sa spojka $\wedge$ väčšinou vynecháva a namiesto nej sa píše čiarka, resp. bodkočiarka.
[18] Tzv. **definícia pomocou matematickej indukcie**.

Ako dokazujú nasledujúce vety, majú množinové operácie (prienik, zjednotenie, ...) podobné vlastnosti ako logické operácie (konjunkcia, disjunkcia, ...).

Veta 1.3.1.
Pre všetky množiny A platí: a) $A \cup \emptyset = A$, b) $A \cap \emptyset = \emptyset$, c) $\emptyset - A = \emptyset$.

Dôkaz.
Tvrdenia sú zrejmé a vyplývajú priamo z definície. Stačí si uvedomiť, že platí:
$A \cup \emptyset = \{x\,;\, x \in A \vee x \in \emptyset\} = \{x\,;\, x \in A\} = A$, $A \cap \emptyset = \{x\,;\, x \in A \wedge x \in \emptyset\} = \{x\,;\, x \in \emptyset\} = \emptyset$,
$\emptyset - A = \{x\,;\, x \in \emptyset \wedge x \notin A\} = \{x\,;\, x \in \emptyset\} = \emptyset$. ■

Veta 1.3.2.
Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny, potom platí:
a) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \triangle B = B \triangle A$,
b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dôkaz.
a) Vyplýva z definície.

b) Z asociatívnych zákonov pre $\wedge$ a $\vee$ vyplýva:
$x \in [A \cap (B \cap C)] \Leftrightarrow [x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)] \Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C] \Leftrightarrow x \in [(A \cap B) \cap C]$,
$x \in [A \cup (B \cup C)] \Leftrightarrow [x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)] \Leftrightarrow [(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C] \Leftrightarrow x \in [(A \cup B) \cup C]$.

c) Z distributívnych zákonov pre $\wedge$ a $\vee$ vyplýva:
$x \in [A \cap (B \cup C)] \Leftrightarrow [x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)] \Leftrightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$,
$x \in [A \cup (B \cap C)] \Leftrightarrow [x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)] \Leftrightarrow x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$. ■

Veta 1.3.3.
Nech množina $X \neq \emptyset$ a nech $A, B \subset X$. Označme $(A')' = A''$, potom platí:
a) $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$, b) $X' = \emptyset$, $\emptyset' = X$, c) $A'' = A$.

Dôkaz.
a) Tieto rovnosti nazývame **de Morganove zákony** a vyplývajú zo vzťahov:
$x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow \text{non } (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in A' \vee x \in B' \Leftrightarrow x \in (A' \cup B')$.
$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow \text{non } (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Leftrightarrow x \in (A' \cap B')$.

b) Vyplýva zo vzťahov $x \in X' \Leftrightarrow x \notin X \Leftrightarrow x \in \emptyset$ a $x \in \emptyset' \Leftrightarrow x \notin \emptyset \Leftrightarrow x \in X$.

c) Z poznámky 1.3.2 vyplýva $x \in (A')' \Leftrightarrow x \notin A' \Leftrightarrow x \in A$. ■

Poznámka 1.3.5.
Pre konečný systém množín $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \in N$ a pre nekonečný systém množín $A_1, A_2, A_3, \ldots$ majú de Morganove zákony tvar:

$$\left[\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right]' = \bigcup_{k=1}^{n} A'_k, \quad \left[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right]' = \bigcap_{k=1}^{n} A'_k, \quad \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right]' = \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k, \quad \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right]' = \bigcap_{k=1}^{\infty} A'_k.$$

Veta 1.3.4.
Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny, potom platí:

a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, $\quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, $\quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$, $\quad A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

Dôkaz.
Dokážeme platnosť prvých z rovností v jednotlivých skupinách. Ostatné sa dokazujú analogicky, preto ich prenechávame čitateľovi ako cvičenie na domácu úlohu.

a) $[x;y] \in (A \cap B) \times C \;\Leftrightarrow\; [x \in (A \cap B) \wedge y \in C] \;\Leftrightarrow\; [(x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C] \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; (x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C) \;\Leftrightarrow\; [(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C)] \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \{[x;y] \in (A \times C) \wedge [x;y] \in (B \times C)\} \;\Leftrightarrow\; [x;y] \in (A \times C) \cap (B \times C)$,

b) $[x;y] \in (A \cup B) \times C \;\Leftrightarrow\; [x \in (A \cup B) \wedge y \in C] \;\Leftrightarrow\; [(x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C] \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; [(x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)] \;\Leftrightarrow\; \{[x;y] \in (A \times C) \vee [x;y] \in (B \times C)\} \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; [x;y] \in (A \times C) \cup (B \times C)$,

c) $[x;y] \in (A - B) \times C \;\Leftrightarrow\; [x \in (A - B) \wedge y \in C] \;\Leftrightarrow\; [(x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C] \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; (x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C) \;\Leftrightarrow\; [(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \wedge y \in C)] \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \{[x;y] \in (A \times C) \wedge [x;y] \notin (B \times C)\} \;\Leftrightarrow\; [x;y] \in (A \times C) - (B \times C)$. ■

1.3.3 Zobrazenie množín

V matematike, a vlastne v celom živote, sú najdôležitejšie vzťahy medzi jednotlivými objektami. My budeme skúmať vzájomné vzťahy medzi množinami.

Nech $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ sú množiny. **Binárnou reláciou medzi množinami A a B** nazývame každú podmnožinu karteziánskeho súčinu $A \times B$.[19] Slovo binárna sa v praxi často vynecháva. Ak označíme túto reláciu T, potom skutočnosť, že prvok $[x;y]$ patrí do relácie T, zapisujeme vzťahmi $[x;y] \in T$, resp. xTy.

Ak $A = B$, potom reláciu $T \subset A^2$ nazývame **reláciou na množine A**.

Príklad 1.3.8.
Uvažujme na množine reálnych čísel R reláciu T danú výrokovou formou „*Číslo x je menšie ako y.*“
Môžeme ju písať v tvare $T = \{[x;y] \in R^2 ;\, x < y\}$.
Do relácie T patria všetky usporiadané dvojice reálnych čísel $[x;y]$, pre ktoré $x < y$. ■

Medzi najdôležitejšie binárne relácie patrí relácia ekvivalencie.[20] Relácia $T \subset A \times A$ je **reláciou ekvivalencie na množine A**, ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna na množine A, t. j. ak platí:

a) $\forall x \in A\colon\; [x;x] \in T$ (reflexívnosť),
b) $\forall x, y \in A\colon\; [x;y] \in T \;\Leftrightarrow\; [y;x] \in T$ (symetria),
c) $\forall x, y, z \in A\colon\; [[x;y] \in T \wedge [y;z] \in T] \;\Rightarrow\; [x;z] \in T$ (tranzitívnosť).

Poznámka 1.3.6.
Ak použijeme označenie xTy, môžeme tieto vlastnosti symbolicky zapísať v tvare:

$$\forall x, y, z \in A\colon \quad \text{a) } xTx, \quad \text{b) } xTy \Leftrightarrow yTx, \quad \text{c) } [xTy \wedge yTz] \Rightarrow xTz.$$

[19] Analogicky definujeme **n-árnu reláciu** ako podmnožinu karteziánskeho súčinu $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.
[20] Je potrebné ju odlišovať od logickej operácie ekvivalencie.

Jedným zo základných pojmov v matematike je pojem zobrazenia, resp. funkcie. Nech $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ sú množiny. **Zobrazením (funkciou)**[21] **z množiny A do množiny B** nazývame každú reláciu $f \subset A \times B$ s vlastnosťou, že pre každé $x \in A$ existuje najviac jedno $y \in B$ také, že $[x;y] \in f$.

Prvok $x \in A$ sa nazýva **vzor** a príslušné $y = f(x)$ sa nazýva **obraz prvku x v zobrazení f**, resp. **hodnota zobrazenia f v bode x**. Často, najmä ak hovoríme o reálnych funkciách, vzor nazývame **nezávislou premennou** a obraz **závislou premennou**, resp. **funkčnou hodnotou v bode x**.

Množinu $D(f)$ všetkých vzorov $x \in A$, pre ktoré existuje $y = f(x) \in B$, nazývame **definičný obor zobrazenia f**. Množinu $H(f)$ všetkých obrazov $y \in B$, pre ktoré existuje vzor $x \in A$ taký, že $y = f(x)$, nazývame **obor hodnôt zobrazenia f**. To znamená, že

$$D(f) = \{x \in A\,;\ \exists y \in B\colon\ [x;y] \in f\}, \qquad H(f) = \{y \in B\,;\ \exists x \in D(f)\colon\ [x;y] \in f\}.$$

Namiesto zápisu $[x;y] \in f$ sa častejšie používajú zápisy $y = f(x)$, resp. $y = f(x)\colon\ D(f) \to B$, resp. $y = f(x)$, $x \in D(f)$, resp. $f\colon\ x \mapsto y$.

Ak ku každému $x \in A$ existuje obraz $y \in B$, t. j. ak $D(f) = A$, potom zobrazenie f nazývame **zobrazenie množiny A do množiny B** (**zobrazenie zobrazujúce množinu A do množiny B**) a označujeme $y = f(x)\colon\ A \to B$, resp. $f\colon\ A \to B$.

Nech $C \subset D(f)$, potom množinu $f(C) = \{f(x)\,;\ x \in C\}$ nazývame **obraz množiny C v zobrazení f**. Takže pre zobrazenie f platí $H(f) = f\left(D(f)\right)$.

Poznámka 1.3.7.
Pomocou kvantifikátorov môžeme definíciu zobrazenia $f = \{[x;y] \in A \times B\}$ zapísať:

$$\forall x \in A\colon\ [x;y_1] \in f \wedge [x;y_2] \in f \implies y_1 = y_2.$$

Poznámka 1.3.8.
Ak máme zobrazenie zadané iba predpisom, napr. $y = f(x)$, potom pod pojmom $D(f)$ rozumieme množinu všetkých x, pre ktoré existuje $y = f(x)$ (t. j. maximálnu možnú množinu vzorov). Obor hodnôt je množina $H(f) = \{f(x)\,;\ x \in D(f)\}$, takže zápis $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a zápis $y = f(x)\colon\ D(f) \to H(f)$ sú ekvivalentné.

Príklad 1.3.9.
Označme A množinu ľudí žijúcich v nejakom nemenovanom meste. Predpokladajme, že je tu zvykom, aby človek mal krstné meno (ak ich má viac, budeme ich považovať za jedno meno). Označme B množinu všetkých mien. Potom môžeme definovať zobrazenie $f\colon\ A \to B$, $f(x) = y$, kde x je daný človek a y je jeho meno.
Ak existujú v tomto nemenovanom meste dvaja ľudia x_1, x_2 s rovnakým menom, potom dvom rôznym vzorom je priradený rovnaký obraz, t. j. $f(x_1) = f(x_2)$.
Ak človek nemá meno (napr. čerstvý novorodenec), nie je vzoru priradený žiadny obraz. Tiež sa môže nájsť také populárne meno, že ho nemá žiaden človek. Vtedy neexistuje vzor s daným obrazom. ■

Príklad 1.3.10.
Relácia $f = \{[x;y] \in R^2\,;\ \sin y = x\}$ nie je zobrazenie, pretože zo vzťahu $\sin 0 = \sin\pi = 0$ vyplývajú vzťahy $[0;0] \in f$, $[0;\pi] \in f$. To znamená, že jeden vzor $x = 0$ má dva obrazy 0 a π.
Na druhej strane relácia $f = \{[x;y] \in R^2\,;\ y = \sin x\}$ zobrazenie je. ■

[21] V matematickej analýze sa väčšinou používa označenie funkcia.

Príklad 1.3.11.
Relácia $f = \{[x;y] \in R^2\,;\, x^2+y^2=-1\}$ je zobrazenie, pretože $f=\emptyset$ a $\emptyset \subset R^2$.
Usporiadaná dvojica $[x;y]$ s danými vlastnosťami neexistuje, t. j. každému vzoru je priradený najviac jeden obraz. ■

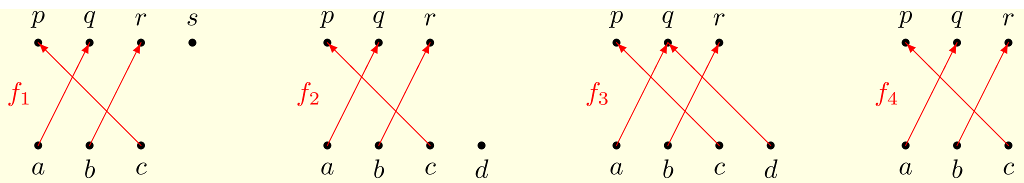
- **Injektívne, surjektívne a bijektívne zobrazenie**

Nech A, B sú množiny. Hovoríme, že zobrazenie $f\colon\ A\to B$ je **injektívne** (**injekcia**, **prosté zobrazenie**), ak ľubovoľné dva rôzne vzory z množiny A majú rôzne obrazy z množiny B, t. j. ak rovnaké obrazy majú rovnaké tiež príslušné vzory (obrátená implikácia). Symbolicky to môžeme vyjadriť:

$$\forall x_1,x_2\in A\colon\ x_1\neq x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)\neq f(x_2),\quad \text{t. j.}\quad \forall x_1,x_2\in A\colon\ f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2.$$

Nech A, B sú množiny. Hovoríme, že zobrazenie $f\colon\ A\to B$ je **surjektívne** (**surjekcia**, **zobrazenie na množinu** B), ak ku každému obrazu z množiny B existuje vzor z množiny A, t. j. ak platí $f(A)=B$. Symbolicky to môžeme zapísať vzťahmi: $\forall y\in B\ \exists x\in A\colon\ y=f(x)$.

Nech A, B sú množiny. Hovoríme, že zobrazenie $f\colon\ A\to B$ je **bijektívne** (**bijekcia**, **prosté zobrazenie na množinu** B, **jednojednoznačné zobrazenie**), ak je injektívne a zároveň surjektívne.



Obr. 1.3.3: Injekcia f_1, sujekcie f_2, f_3 a bijekcia f_4 z príkladu 1.3.12.

Príklad 1.3.12.
a) Nech $A=\{a,b,c\}$, $B=\{p,q,r,s\}$.
Zobrazenie $f_1=\{[a;q]\,,[b;r]\,,[c;p]\}$ je injekcia, ale nie je surjekcia, pretože s nemá vzor (obr. 1.3.3).
b) Nech $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{p,q,r\}$.
Zobrazenie $f_2=\{[a;q]\,,[b;r]\,,[c;p]\}$ je surjekcia, ale nie je injekcia (d nemá obraz).
c) Nech $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{p,q,r\}$.
Zobrazenie $f_3=\{[a;q]\,,[b;r]\,,[c;p]\,,[d;q]\}$ je surjekcia, ale nie je injekcia (a, d majú rovnaký obraz).
d) Nech $A=\{a,b,c\}$, $B=\{p,q,r\}$.
Zobrazenie $f_4=\{[a;q]\,,[b;r]\,,[c;p]\}$ je bijekcia (injekcia a súčasne surjekcia). ■

Príklad 1.3.13.
Kvadratická funkcia $f(x)=x^2\colon\ R\to R$ nie je ani injektívna ani surjektívna.
Funkcia $f(x)=x^2\colon\ R\to\langle 0\,;\,\infty)$ je surjektívna, t. j. na množinu $\langle 0\,;\,\infty)$.
Funkcia $f(x)=x^2\colon\ \langle 0\,;\,\infty)\to\langle 0\,;\,\infty)$ je bijektívna, t. j. injektívna a surjektívna. ■

Príklad 1.3.14.
Uvažujme zobrazenie dané predpisom $f(x)=\sqrt{x}$. Jeho definičným oborom je množina $D(f)=\langle 0\,;\,\infty)$ a oborom hodnôt množina $H(f)=\langle 0\,;\,\infty)$. Zobrazenie je bijekcia a môžeme ho zapísať v tvare $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in\langle 0\,;\,\infty)$, resp. $f(x)=\sqrt{x}\colon\ \langle 0\,;\,\infty)\to\langle 0\,;\,\infty)$.
Uvažujme zobrazenie $f_n(x)=\sqrt{x}$, $n=1,2,\ldots,5$ s rôznymi množinami vzorov a obrazov:

Zobrazenie $f_1\colon\ R \to R$ nie je injektívne ani surjektívne ($x = -1$ nemá obraz, $y = -1$ nemá vzor).
Zobrazenie $f_2\colon\ \langle 0\,;\,4\rangle \to \langle 0\,;\,1\rangle$ nie je injektívne, je surjektívne ($x = 3$ nemá obraz).
Zobrazenie $f_3\colon\ \langle 0\,;\,2\rangle \to \langle 0\,;\,4\rangle$ je injektívne, nie je surjektívne ($y = 3$ nemá vzor).
Zobrazenie $f_4\colon\ \langle 0\,;\,\infty) \to R$ je injektívne, nie je surjektívne ($y = -1$ nemá vzor).
Zobrazenie $f_5\colon\ \langle 0\,;\,4\rangle \to \langle 0\,;\,2\rangle$ je bijektívne. ■

- **Rovnosť zobrazení**

Zobrazenia sú množiny usporiadaných dvojíc, takže ich rovnosť musíme chápať ako rovnosť množín. Inými slovami $f = g$ práve vtedy, ak platí: $[x;y]\in f \Leftrightarrow [x;y]\in g$.

Ak to zhrnieme pre zobrazenia $f(x)$, $x \in D(f)$ a $g(x)$, $x \in D(g)$, dostávame, že **zobrazenie f sa rovná zobrazeniu g** práve vtedy, ak $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x\in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Nech $M \subset D(f) \cap D(g)$, potom **zobrazenie f, $x \in D(f)$ sa rovná zobrazeniu g, $x \in D(g)$ na množine M** práve vtedy, ak pre všetky $x\in M$ platí $f(x) = g(x)$.

Príklad 1.3.15.
a) Zobrazenia $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|^2$ sa rovnajú na množine R, pretože $D(f) = D(g) = R$ a pre všetky $x\in R$ platí $x^2 = |x|^2$.

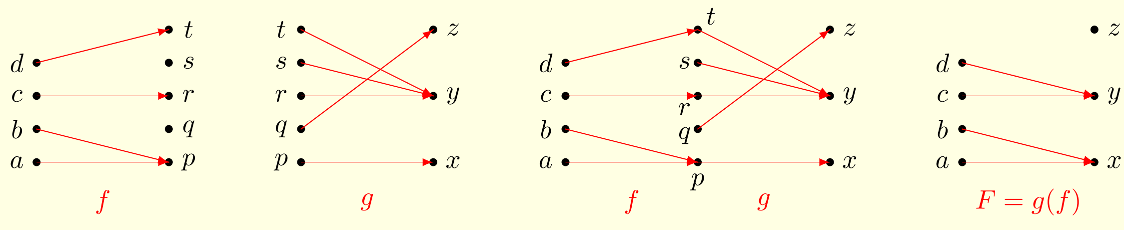
b) Zobrazenia $f(x) = 1$, $x\in R-\{0\}$ a $g(x) = \frac{x}{x}$ sa rovnajú, pretože $D(f) = D(g) = R-\{0\}$ a pre všetky $x\in D(f)$ platí $1 = \frac{x}{x}$.

c) Zobrazenia $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{x}{x}$ sa nerovnajú, pretože $R = D(f)\neq D(g) = R - \{0\}$. ■

- **Zložené zobrazenie**

Nech sú dané zobrazenia $f\colon\ A \to B$, $g\colon\ C \to D$, pričom $H(f) \subset C$. Potom zobrazenie $F\colon\ A \to D$ také, že každému $x\in A$ priradí hodnotu $z = g(y)\in D$, kde $y = f(x)$, nazývame **zložené zobrazenie** (**kompozícia**, resp. **zloženie**) **zobrazení f a g** a zapisujeme $F = g(f)$, resp. $F = f\circ g$.[22] Zobrazenie f sa nazýva **vnútorná zložka** a zobrazenie g **vonkajšia zložka** zloženého zobrazenia $g(f)$.

To znamená, že pre zobrazenia $f(x)$, $x\in D(f)$ a $g(x)$, $x\in D(g)$, $H(f) \subset D(g)$, dostaneme zložené zobrazenie $F(x) = g[f(x)] = [f \circ g](x)$, $x\in D(f)$.



Obr. 1.3.4: Zložené zobrazenie $F = g(f)$ z príkladu 1.3.16.

Príklad 1.3.16.
Nech $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{p, q, r, s, t\}$, $C = \{x, y, z\}$ sú množiny.
Nájdite zložené zobrazenie $F = g[f]\colon A \to C$, ak zobrazenia $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ (obr. 1.3.4) sú definované predpismi $f = \{[a;p]\,,[b;p]\,,[c;r]\,,[d;t]\}$ a $g = \{[p;x]\,,[q;z]\,,[r;y]\,,[s;y]\,,[t;y]\}$.

[22]Niektorí autori označujú zloženú funkciu v opačnom poradí, t. j. $g(f) = g\circ f$.

Riešenie.
Zložené zobrazenie $F = \{[a;x], [b;x], [c;y], [d;y]\}$, pretože $F(a) = g[f(a)] = g(p) = x$, $F(b) = g[f(b)] = g(p) = x$, $F(c) = g[f(c)] = g(r) = y$, $F(d) = g[f(d)] = g(t) = y$. ■

Príklad 1.3.17.
Ak $f(x) = x^3\colon R \to R$, $g(x) = \sin x\colon R \to \langle -1\,;\,1\rangle$, potom
$f[g(x)] = [g(x)]^3 = \sin^3 x\colon\ R \to \langle -1\,;\,1\rangle$, $g[f(x)] = \sin f(x) = \sin x^3\colon\ R \to \langle -1\,;\,1\rangle$. ■

Veta 1.3.5.
Ak $f\colon\ A \to B$, $g\colon\ B \to C$ sú bijekcie, potom aj zložené zobrazenie $F = g[f]\colon\ A \to C$ je bijekcia.

Dôkaz.
Máme ukázať, že $F(x) = g[f(x)]\colon\ A \to C$ je bijektívne, t. j. injektívne a surjektívne.

Injekcia. Zobrazenia $y = f(x)$, $z = g(y)$ sú injektívne, t. j. pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in B$ platí:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) \neq y_2 = f(x_2), \qquad y_1 \neq y_2 \Rightarrow z_1 = g(y_1) \neq z_2 = g(y_2).$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ platí:

$$F(x_1) = g[f(x_1)] = g(y_1) \ \neq\ g(y_2) = g[f(x_2)] = F(x_2).$$

Surjekcia. Zobrazenie $z = g(y)\colon B \to C$ je surjektívne, t. j. $\forall z \in C\ \exists y \in B\colon\ z = g(y)$. Potom platí:

$$\forall z \in C\ \exists y = f(x) \in B\colon\ z = g[f(x)] = F(x).$$

Zobrazenie $y = f(x)\colon A \to B$ je surjektívne, t. j. $\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ y = f(x)$.
Ak to spojíme, dostávame $\forall z \in C\ \exists x \in A\colon\ z = F(x)$. ■

- **Inverzné a identické zobrazenie**

Ak je zobrazenie $y = f(x)\colon\ A \to B$ bijektívne, t. j. ak

$$\forall\,[x_1; y_1], [x_2; y_2] \in f\colon\ y_1 = y_2\ \Rightarrow\ x_1 = x_2, \qquad \forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ [x; y] \in f,$$

potom existuje zobrazenie $x = g(y)\colon\ B \to A$ také, že platí $[x; y] \in f\ \Leftrightarrow\ [y; x] \in g$.

Nech $f\colon A \to B$ je injektívne zobrazenie, potom zobrazenie $f^{-1}\colon B \to A$ také, že každému $y \in H(f)$ priradí práve to $x \in A$, pre ktoré $y = f(x)$, sa nazýva **inverzné zobrazenie k zobrazeniu** f. To znamená, že $[x; y] \in f$ práve vtedy, ak $[y; x] \in f^{-1}$.

Poznámka 1.3.9.
Je zrejmé, že zobrazenie $f^{-1}\colon B \to A$ je surjektívne a injektívne.
Surjekcia vyplýva z toho, že každý obraz $x \in A$ má v zobrazení f^{-1} nejaký vzor $y \in H(f)$. Injekcia vyplýva z toho, že keby mali dva rôzne vzory y_1, y_2 v zobrazení f^{-1} rovnaký obraz x, potom by v zobrazení f prvok x ako vzor mal dva rôzne obrazy y_1, y_2. Lenže to by znamenalo, že f nie je zobrazenie.

Poznámka 1.3.10.
Ak je zobrazenie $f\colon D(f) \to H(f)$ injektívne, potom je zároveň aj surjektívne (t. j. je bijektívne), pretože platí $f[D(f)] = H(f)$.
Inverznou funkciou k f je bijekcia $f^{-1}\colon H(f) \to D(f)$ taká, že pre všetky $x \in D(f)$ platí $y = f(x)$, resp. pre všetky $y \in H(f)$ platí $x = f^{-1}(y)$. Je zrejmé, že $D(f) = H(f^{-1})$, $H(f) = D(f^{-1})$.

Príklad 1.3.18.
a) Ak $f(x) = x\colon R \to R$, t. j. $[x; x] \in f$, potom $[x; x] \in f^{-1}$, t. j. $f^{-1}(x) = x\colon R \to R$.

b) Ak $f(x) = 2x + 3\colon R \to R$, t. j. $[x; 2x + 3] \in f$, potom $[y; x] = [2x + 3; x] \in f^{-1}$.
Z rovnosti $y = 2x + 3$ vyplýva $x = \frac{y-3}{2}$, t. j. $\left[y; \frac{y-3}{2}\right] \in f^{-1}$.

c) Ak $f(x) = \operatorname{cotg} x\colon\ (0\,;\,\pi) \to R$, potom $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x\colon R \to (0\,;\,\pi)$. ■

Veta 1.3.6.
Nech zobrazenie $f\colon A \to B$ je bijektívne, potom platí:

a) $f^{-1}\colon B \to A$ je bijektívne, b) $(f^{-1})^{-1} = f$,
c) $\forall y \in B\colon f[f^{-1}(y)] = y$, d) $\forall x \in A\colon f^{-1}[f(x)] = x$.

Dôkaz.
a) Vyplýva z poznámky 1.3.9.
b) Zobrazenia $f\colon A \to B$, $f^{-1}\colon B \to A$ sú bijektívne, t. j. pre všetky $x \in A$, $y \in B$ platí:
$$[x;y] \in f \Leftrightarrow [y;x] \in f^{-1}, \qquad [y;x] \in f^{-1} \Leftrightarrow [x;y] \in (f^{-1})^{-1}.$$
Z toho vyplýva $[x;y] \in f \Leftrightarrow [x;y] \in (f^{-1})^{-1}$, t. j. $f = (f^{-1})^{-1}$.
c) Ak $y \in B$, potom existuje $x \in A$ také, že $[x;y] \in f$, $[y;x] \in f^{-1}$, t. j. $x = f^{-1}(y)$. Potom platí:
$$[x;y] = \left[f^{-1}(y); y\right] \in f, \quad \text{t. j.} \;\; y = f[f^{-1}(y)].$$
d) Ak $x \in A$, potom existuje $y \in B$ také, že $[y;x] \in f^{-1}$, $[x;y] \in f$, t. j. $y = f(x)$. Potom platí:
$$[y;x] = [f(x); x] \in f^{-1}, \quad \text{t. j.} \;\; x = f^{-1}[f(x)]. \;\blacksquare$$

Identickým zobrazením (**identitou**) nazývame zobrazenie, v ktorom sa každý obraz zhoduje so svojím vzorom, t. j. zobrazenie $f(x) = x$, $x \in D(f)$. Je zrejmé, že identické zobrazenie je injektívne a zároveň surjektívne, t. j. bijektívne.

- **Postupnosť**

Postupnosťou nazývame každé zobrazenie f, ktorého definičným oborom je množina prirodzených čísel N, t. j. $D(f) = N$, $f = \{[n; f(n)] \,;\, n \in N\} = \{[1; f(1)], [2; f(2)], [3; f(3)], \ldots, [n; f(n)], \ldots\}$.

Pre jednoduchosť označíme $f(n) = a_n$, $n \in N$ a postupnosť f budeme zapisovať
$$\{f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$
Hodnoty a_n, $n \in N$ nazývame **členmi postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.[23]

To znamená, že člen a_n predstavuje usporiadanú dvojicu $[n; a_n]$ a zápis $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ množinu usporiadaných dvojíc $\{[n; a_n] \,;\, n \in N\}$, t. j. vzor člena a_n je určený jeho poradím.

Obor hodnôt $H(f)$, t. j. množinu hodnôt, ktoré nadobúdajú členy $a_1, a_2, a_3, \ldots$, nazývame **množina hodnôt postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Príklad 1.3.19.
Množinou hodnôt postupnosti $\{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ je množina prirodzených čísel N.
Množinou hodnôt postupnosti $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$ je množina $\{0, 1\}$. $\blacksquare$

1.3.4 Mohutnosť množín

Našim cieľom bude teraz určenie pravidiel, pomocou ktorých by sme mohli porovnávať množiny podľa počtu ich pvkov. Ak sú porovnávané množiny konečné, potom nie sú problémy, stačí spočítať prvky a porovnať. Niekedy nie je nutné ani spočítavať prvky.

Uvažujme napríklad množinu študentov v posluchárni a množinu stoličiek v tej istej posluchárni. Ak požiadame študentov, aby si každý z nich sadol na práve jednu stoličku, ľahko zistíme, že väčšinou je stoličiek viac. V matematickej reči sme zostrojili zobrazenie, ktoré každému študentovi priradí práve jednu stoličku.

Lenže spočítavanie prvkov v prípade nekonečných množín nie je zrejme najšťastnejší spôsob. Ale môžeme použiť postup z príkladu o študentoch a stoličkách. Ukážeme si to na nasledujúcom príklade.

[23] Niekedy sa v literatúre postupnosti označujú symbolom $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Príklad 1.3.20.
Nech A, B sú nekonečné množiny. Nech $f\colon D(f) \to H(f)$ je prosté zobrazenie také, že platí $D(f) \subset A$, $H(f) \subset B$.
Ak $D(f) = A$, $H(f) = B$, potom je zobrazenie f bijektívne. Každému vzoru z množiny A je priradený práve jeden obraz z množiny B a každému obrazu z množiny B je priradený práve jeden vzor z množiny A. Množina A má „rovnaký počet prvkov" ako množina B.
Ak $D(f) = A$, $H(f) \neq B$, potom f nie je surjektívne. Existuje obraz $y \in B$, ku ktorému nie je priradený vzor z množiny A. Množina A „má menej prvkov" ako množina B.
Ak $D(f) \neq A$, $H(f) = B$, potom existuje vzor $x \in A$, ku ktorému nie je priradený obraz z množiny B. Množina A „má viac prvkov" ako množina B. ■

Hovoríme, že **množina A je ekvivalentná s množinou B**, ak existuje bijektívne zobrazenie $f\colon A \to B$. Tento vzťah označujeme $A \sim B$. Skutočnosť, že množiny A a B nie sú ekvivalentné, označujeme $A \not\sim B$.

Ak sú množiny A a B ekvivalentné, hovoríme tiež, že **množiny A a B majú rovnakú mohutnosť**. V prípade, že existuje injektívne zobrazenie $A \to B$, ale neexistuje bijektívne zobrazenie $A \to B$, hovoríme, že **množina A má menšiu mohutnosť ako množina B**.

Na základe tejto definície môžeme povedať, že množiny z príkladu 1.3.20 majú v prvom prípade rovnakú mohutnosť. V druhom prípade má množina A menšiu mohutnosť ako B a v treťom prípade má množina B menšiu mohutnosť ako množina A.

Príklad 1.3.21.
a) Množiny $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{a, b, c\}$ sú ekvivalentné, t. j. platí $A \sim B$. Bijekciou je napríklad zobrazenie $f = \{[1; a], [2; b], [3; c]\}$.

b) Pre množiny prirodzených a celých čísel platí $N \sim Z$. Dokazuje to bijekcia $f\colon N \to Z$ definovaná vzťahmi $f(n) = \frac{n}{2}$ pre $n \in N$ párne a $f(n) = -\frac{n-1}{2}$ pre $n \in N$ nepárne.

c) $N \not\sim R$, pretože neexistuje bijekcia $N \to R$ (N má menšiu mohutnosť ako R).

d) $(-\pi\,;\,\pi) \sim R$, pretože zobrazenie $f(x) = 2\,\mathrm{tg}\,x\colon\ (-\pi\,;\,\pi) \to R$ je bijekcia. ■

Veta 1.3.7.
Ekvivalencia množín je reláciou ekvivalencie, t. j. je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Dôkaz.
Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny.
Reflexívnosť ($A \sim A$) vyplýva z bijektívnosti identity $f(x) = x\colon A \to A$. Z vety 1.3.6 vyplýva symetrickosť ($A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$). Tranzitívnosť ($A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$) vyplýva z vety 1.3.5. ■

Množina A sa nazýva **nekonečne spočítateľná**, ak je ekvivalentná s množinou prirodzených čísel, t. j. ak $A \sim N$. Ak je množina A nekonečne spočítateľná alebo konečná, potom ju nazývame **spočítateľná**. V opačnom prípade, t. j. ak nie je spočítateľná, ju nazývame **nespočítateľná** a hovoríme, že **má mohutnosť kontinua**.

Veta 1.3.8.
Množina hodnôt ľubovoľnej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je spočítateľná.

Dôkaz.
Ku všetkým členom a_n postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ priradíme prirodzené čísla. Najprv priradíme k členu a_1

číslo 1. Ak $a_2 \neq a_1$, potom priradíme k členu a_2 číslo 2, v opačnom prípade mu nepriradíme žiadne číslo, pretože k členu $a_1 = a_2$ je už priradené číslo 1.
Takto budeme postupne členom postupnosti priradzovať prirodzené čísla. Člen s hodnotou, ktorá sa už vyskytla, preskočíme a nebudeme číslovať. Takýmto spôsobom priradíme každej hodnote danej postupnosti práve jedno prirodzené číslo, t. j. množina hodnôt postupnosti je nekonečne spočítateľná. Špeciálne sa môže stať, že priradíme konečný počet prirodzených čísel. To ale znamená, že množina hodnôt postupnosti je konečná. ■

Príklad 1.3.22.
a) Množina celých čísel Z je spočítateľná. Vyplýva to z príkladu 1.3.21.

b) Množina párnych prirodzených čísel je spočítateľná, t. j. $\{2n\,;\, n \in N\} \sim N$. Danou bijekciou je napríklad zobrazenie $f\colon N \to \{2n\,;\, n \in N\}$ dané predpisom $f(n) = 2n$.

c) Množina párnych celých čísel $\{2k\,;\, k \in Z\}$ je spočítateľná. Zobrazenie $g(k) = 2k\colon Z \to \{2k\,;\, k \in Z\}$ je bijekcia, t. j. $\{2k\,;\, k \in Z\} \sim Z$. Z príkladu 1.3.21 vyplýva $Z \sim N$. Takže podľa vety 1.3.7 platí $\{2k\,;\, k \in Z\} \sim N$. ■

Veta 1.3.9.
Nech A je spočítateľná množina, potom každá jej podmožina $B \subset A$ je tiež spočítateľná.

Dôkaz.
Ak je B konečná, potom je spočítateľná.
Nech B je nekonečná množina. Množina A je spočítateľná, to znamená, že jej prvky môžeme zoradiť do tvaru postupnosti. Lenže z toho vyplýva, že aj prvky každej jej nekonečnej podmnožiny môžeme zoradiť do tvaru postupnosti. ■

Príklad 1.3.23.
Množina $A = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\,;\, a_n = 0 \vee a_n = 1\}$, t. j. množina všetkých číselných postupností zložených iba z číslic 0 alebo 1, je nespočítateľná.

Riešenie.
Dôkaz prevedieme sporom.
Nech A nie je nespočítateľná. Potom je nekonečne spočítateľná a jej prvky (jednotlivé postupnosti núl alebo jednotiek) môžeme zoradiť do postupnosti

$$x_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots\}, x_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots\}, \ \ldots, x_n = \{x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots\}, \ \ldots,$$

kde pre všetky $i, j \in N$ platí $x_{ij} = 0$ alebo $x_{ij} = 1$.
Zostrojíme postupnosť $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\}$ nasledujúcim spôsobom:
Z prvej postupnosti x_1 vyberieme prvý člen x_{11} a položíme $\beta_1 = 1 - x_{11}$ (t. j. $\beta_1 = 0$ pre $x_{11} = 1$ a $\beta_1 = 1$ pre $x_{11} = 0$). Z druhej postupnosti x_2 vyberieme druhý člen x_{22} a položíme $\beta_2 = 1 - x_{22}$. Takto budeme pokračovať pre všetky ostatné $n \in N$. Z postupnosti x_n vyberieme člen x_{nn} a položíme $\beta_n = 1 - x_{nn}$.
Z konštrukcie vyplýva, že sa postupnosť β odlišuje od postupnosti x_1 prvým členom, od x_2 druhým členom a od x_n sa odlišuje n-tým členom. To znamená, že sa postupnosť β nerovná žiadnemu prvku z množiny A. Takže sme našli postupnosť núl alebo jednotiek, ktorá nepatrí do A. To je spor s tým, že množina A obsahuje všetky také postupnosti. Takže je nespočítateľná. ■

Poznámka 1.3.11.
Metóda uvedená v príklade 1.3.23 sa nazýva **Cantorova diagonalizačná metóda** a často sa používa pri dokazovaní nespočítateľnosti množín (napr. R, $\langle 0\,;\, 1)$, ...).[24]

[24] Dôkaz, že interval $\langle 0\,;\, 1)$ je nespočítateľná množina je uvedený v [5] na str. 73.

Veta 1.3.10.
Zjednotenie spočítateľného počtu spočítateľných množín je opäť spočítateľná množina.

Dôkaz.
Nech sú množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ spočítateľné. Dokážeme matematickou indukciou.

Krok 1. Dokážeme tvrdenie pre $n = 2$ (pre $n = 1$ nemá zmysel), t. j. že $A_1 \cup A_2$ je spočítateľná množina. Pre zjednodušenie označíme $A_1 = A$, $A_2 = B$.
Predpokladajme, že sú $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ nekonečne spočítateľné.
Zoraďme striedavo všetky prvky týchto množín do postupnosti

$$\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots, a_n, b_n, \ldots\}.$$

Očíslujeme tieto prvky prirodzenými číslami podľa poradia, v akom sme ich písali. Prvok, ktorý patrí do oboch z množín A a B očíslujeme iba raz (druhý raz ho číslovať nebudeme). Takto priradíme každému prvku z množiny $A \cup B$ práve jedno prirodzené číslo.
To znamená, že $A \cup B$ je spočítateľná.
Ak je niektorá z množín A alebo B konečná, napr. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, kde k je počet jej prvkov, zoradíme prvky množín A a B do postupnosti

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots\}$$

a očíslujeme podľa predchádzajúceho vzoru.
Ak sú množiny A, B konečné, potom aj množina $A \cup B$ je konečná.

Krok 2. Ukážeme, že ak tvrdenie platí pre $n = k$, potom platí aj pre $n = k + 1$.
Množina $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ je spočítateľná. Máme ukázať, že aj množina

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1} = [A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k] \cup A_{k+1}$$

je spočítateľná. Stačí označiť $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$, $B = A_{k+1}$ a použiť krok 1.
Tým ja na základe princípu matematickej indukcie tvrdenie dokázané. ■

Poznámka 1.3.12.
Majme systém množín $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots\} = \{A_k\}_{k=1}^{\infty}$. Zjednotenie a prienik konečného, resp. nekonečne spočítateľného počtu množín zvykneme stručne zapisovať vzťahmi

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k, \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Veta 1.3.11.
Ak sú množiny A, B spočítateľné, potom aj množina $A \times B$ je spočítateľná množina.

Dôkaz.
Nech $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Množinu $A \times B$ môžeme chápať ako zjednotenie spočítateľného počtu spočítateľných množín $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$, kde $A_n = \{[a_n; b_1], [a_n; b_2], [a_n; b_3], \ldots\}$, $A_n \sim B$, $n \in N$. Potom je $A \times B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ spočítateľná na základe vety 1.3.10. ■

Je zrejmé, že veta 1.3.11 platí pre ľubovoľný konečný počet n spočítateľných množín. To znamená, že ak sú množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ spočítateľné, potom je spočítateľná tiež množina $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Príklad 1.3.24.
a) Množina $N \times N$ je spočítateľná. Vyplýva to z vety 1.3.11.

b) Množina racionálnych čísel Q je spočítateľná. Platí $N \times N \sim Q$. Označme

$$Q = \left\{ \tfrac{m}{n} \,;\, m \in Z, n \in N \right\}, \qquad N \times N = \{[n_1; n_2] \,;\, n_1, n_2 \in N\}.$$

Bijekciu $F\colon N\times N \to Q$ zostrojíme tak, že zobrazíme $n_1 \to n_1$, $n_2 \to f(n_2)$ pomocou bijekcie z príkladu 1.3.21 b). Potom $F([n_1;n_2]) = \frac{f(n_1)}{n_2}$, pričom $f(n_1) = \frac{n_1}{2}$ pre n_1 párne a $f(n_1) = -\frac{n_1-1}{2}$ pre n_1 nepárne. ■

Príklad 1.3.25.
a) Nespočítateľné sú napríklad množiny $(a\,;b)$, $\langle a\,;b)$, $(a\,;b\rangle$, $\langle a\,;b\rangle$, R, R^3, $I = R - Q$.
b) Spočítateľné sú napríklad množiny N, Z, Q, N^4, Q^3 a ľubovoľné ich podmnožiny. ■

Množina A môže byť konečná alebo nekonečná, resp. na druhej strane spočítateľná alebo nespočítateľná (viď tab. 1.3.12). Množina A je konečná práve vtedy, ak je prázdna (t. j. $A=\emptyset$) alebo je konečne spočítateľná (t. j. $A \sim \{1,2,\ldots,n\}$, kde $n\in N$). Keď množina nie je konečná, potom je nekonečne spočítateľná (t. j. $A \sim N = \{1,2,3,\ldots\}$) alebo je nespočítateľná.

$$\text{množina}\begin{cases}\text{konečná}\begin{cases}\text{prázdna}\\ \text{konečne spočítateľná}\end{cases}\\[2ex] \text{nekonečná}\begin{cases}\text{nekonečne spočítateľná}\\ \text{nespočítateľná}\end{cases}\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{prázdna}\\ \text{konečne spočítateľná}\\ \text{nekonečne spočítateľná}\end{matrix}\right\}\text{spočítateľná}\quad\left.\begin{matrix}\text{spočítateľná}\\ \text{nespočítateľná}\end{matrix}\right\}\text{množina}$$

Tabuľka 1.3.12: Konečná, nekonečná, spočítateľná, nespočítateľná množina.

Cvičenia

1.3.1. Dokážte platnosť zostávajúcich rovností vo vete 1.3.4.

1.3.2. Nech $X\neq\emptyset$. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny $A,B,C\subset X$ platí:
a) $[(A\cap C)-B]\cup[(A\triangle B)-C] = \{[A\triangle B]\cup[C\cap(A-B)]\} - [B\cap(C-A)]$,
b) $[(A\cap C)-B]\cup[(A\triangle B)-C] \subset (A-B)\cup(A\cup C)'$.

1.3.3. Nech $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$. Nájdite potenčné množiny 2^A a 2^B. ♣

1.3.4. Nech $n\in N$ a nech $A_n=\{1,2,\ldots,n\}$. Koľko prvkov a koľko podmnožín majú množiny A_n, A_n^2, A_n^3, ..., A_n^k, kde $k\in N$? ♣

1.3.5. Nech $X\neq\emptyset$ a nech $A,B,C\subset X$. Ktoré z uvedených vzťahov sú pravdivé: ♣

a) $A\subset(A\cap B)$,	b) $A\subset(A\cup B)$,	c) $(A-B)\subset A$,
d) $(A-B)\subset B$,	e) $(A-B)\cup B = B$,	f) $(A-B)\cap B = B$,
g) $(A-B)\cup A = A$,	h) $(A-B)\cap A = A$,	i) $(A-B)\cup B = A$,
j) $(A-B)\cap B = A$,	k) $(A-B)\cap A = B$,	l) $(A-B)\cap B = \emptyset$.

1.3.6. Nech $X\neq\emptyset$ a nech pre množiny $A,B,C,D\subset X$ platia vzťahy $A\cup B'\subset C$, $(A\cap B)'\cup D = A'\cup B$. Zistite, ktoré z množín $A'\cup C$, $B\cup(D-A)'$, $D\triangle(A\cap C)$, $(D-B)'$ sú za tohto predpokladu viazané vzťahom inklúzie alebo rovnosti množín. ♣

1.3.7. Nech $X\neq\emptyset$ a nech $A,B,C\subset X$. Zistite, či existuje medzi niektorými z množín P, Q, R vzťah inklúzie alebo rovnosti, ak $P=[A\triangle(B'-C')]\cap(A\cup B)$, $Q=[A\cup(B'\cap C)]\triangle(B\cup C)'$ a $R=[A-(B'\triangle C)']\cap(B'\cup C)$. ♣

1.3.8. Nech $X \neq \emptyset$ a nech pre $A, B, C, D \subset X$ platí $(A \triangle B) \subset (C - D)$, $(A \cap D') \cap [A \cup (C \triangle D)] = \emptyset$. Čo môžeme tvrdiť o vzájomných vzťahoch medzi množinami $A \cup B$, $B \cap D'$ a $A \triangle C$? ♣

1.3.9. Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sú ľubovoľné množiny, dokážte de Morganove zákony:

a) $\left[\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right]' = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k'$, $\left[\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right]' = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k'$, b) $\left[\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right]' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k'$, $\left[\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right]' = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k'$.

1.3.10. Nech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{1, 5, a, b, h\}$. Napíšte všetky prvky množín $A \times B$, $A \times C$, $A \times B \times C$.

1.3.11. Nech A je množina všetkých ľudí žijúcich v Európe, ktorí sú starší ako 20 rokov. Nech B je množina všetkých ľudí žijúcich na Slovensku, ktorí sú mladší ako 40 rokov. Čo predstavujú množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $A \triangle B$?

1.3.12. Nech $A = \{x : x \in N, x < 9\}$. Napíšte všetky množiny B také, že $B \subset A$ a B obsahuje iba nepárne čísla. ♣

1.3.13. Nech $A = \{x : x \in N, x < 16\}$ a nech $A_2, A_3, A_5 \subset A$ sú také, že A_2 obsahuje všetky párne čísla, A_3 obsahuje všetky čísla deliteľné tromi a A_5 obsahuje všetky čísla deliteľné piatimi. Určte množiny: ♣

a) $A_2 - A_3$, $A_2 - A_5$, $A_3 - A_5$,
b) $A_3 - A_2$, $A_5 - A_2$, $A_5 - A_3$,
c) $A_2 \cup A_3$, $A_2 \cup A_5$, $A_3 \cup A_5$,
d) $A_2 \cap A_3$, $A_2 \cap A_5$, $A_3 \cap A_5$,
e) $A_2 \cap A_3 \cap A_5$, $A_2 \cup A_3 \cup A_5$,
f) $A_2 \triangle A_3$, $A_2 \triangle A_5$, $A_3 \triangle A_5$,
g) $(A_2 \cap A_3) \cup A_5$, $(A_2 \cup A_3) \cap A_5$,
h) $(A_2 \cap A_5) \cup A_3$, $(A_2 \cup A_5) \cap A_3$,
i) $(A_3 \cap A_5) \cup A_2$, $(A_3 \cup A_5) \cap A_2$,
j) $(A_3 - A_5) \cup A_2$, $(A_3 - A_5) \cap A_2$,
k) $(A_2 \cap A_5) \cup (A_3 \cap A_5)$,
l) $(A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_2)$,
m) $(A_2 \cup A_3) - (A_2 \cap A_3)$,
n) $(A_2 \cup A_3) \cap (A_3 \cup A_5)$.

1.3.14. Graficky znázornite množiny a) — n) z príkladu 1.3.13.

1.3.15. Nech $X \neq \emptyset$. Dokážte, že pre všetky $A, B, C, D \subset X$ platí:

a) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B$,
b) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A$,
c) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A - B = \emptyset$,
d) $A \subset (A \cup B)$, $(A \cap B) \subset A$,
e) $A \subset C, B \subset D \;\Rightarrow\; (A \cup B) \subset (C \cup D)$,
f) $A \subset C, B \subset D \;\Rightarrow\; (A \cap B) \subset (C \cap D)$,
g) $A \subset C, B \subset C \;\Rightarrow\; (A \cup B) \subset C$,
h) $A \subset B, A \subset C \;\Rightarrow\; A \subset (B \cap C)$,
i) $A \subset B \;\Rightarrow\; (C - B) \subset (C - A)$,
j) $A \subset B \;\Rightarrow\; (A - C) \subset (B - C)$.

1.3.16. Nech $X \neq \emptyset$. Dokážte, že pre všetky $A, B, C \subset X$ platí:

a) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$,
b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,
c) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,
d) $A \triangle (A \cap B) = A - B$.

1.3.17. Nech $X \neq \emptyset$ a nech $A, B, C, D \subset X$. Zistite, ktoré z rovností sú pravdivé: ♣

a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

1.3.18. Uvažujme množiny $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 7, 9\}$. Rozhodnite, či množiny: ♣

a) $f_1 = \{[1;1], [1;3], [3;1]\}$,
b) $f_2 = \{[2;3], [3;2], [1;7], [7;9]\}$,
c) $f_3 = \{[1;1], [3;3], [7;7], [7;9]\}$,
d) $f_4 = \{[1;1], [1;3], [1;7], [1;9]\}$

sú reláciami medzi A a B, resp. B a A. Zistite, v ktorých prípadoch sú zobrazením.

1.3.19. Uvažujme reláciu $f = \{[x;\, y] \in R \times R\,;\ x^2 - 4y^2 = 0\}$. Rozhodnite, ktoré z usporiadaných dvojíc $[1; 2]$, $[2; 1]$, $[1; 1]$, $[-1; 2]$, $[-2; 1]$, $[1; -2]$, $[2; -1]$, $[-1; 1]$, $[-2; -1]$ patria do relácie f. ♣

1.3.20. Nech je daná množina $A = \{a, b, c, d, e\}$. Definujte reláciu $f \in A^2$ tak, aby bola: ♣

a) reflexívna, symetrická a tranzitívna,
b) reflexívna, symetrická, nie tranzitívna,
c) reflexívna, tranzitívna, nie symetrická,
d) symetrická, tranzitívna, nie reflexívna.

1.3.21. Nech A je množina všetkých priamok v rovine. Určte, či sú ekvivalenciami relácie: ♣

a) rovnobežnosť dvoch priamok,
b) kolmosť dvoch priamok.

1.3.22. Dokážte, že platia nasledujúce ekvivalencie množín:

a) $(0\,;\,1) \sim (0\,;\,1\rangle$,
b) $(0\,;\,1\rangle \sim \langle 0\,;\,1\rangle$,
c) $(0\,;\,1) \sim (-1\,;\,1\rangle$,
d) $(0\,;\,1) \sim R^3$,
e) $(0\,;\,1\rangle \sim \langle 0\,;\,1)$,
f) $(0\,;\,1) \sim \langle 0\,;\,1\rangle$,
g) $R \sim I$,
h) $R \sim R^2$.

1.3.23. Rozložte množinu prirodzených čísel N na spočítateľne veľa disjunktných množín, ktoré sú: ♣

a) konečné,
b) nekonečné.

1.3.24. Rozhodnite, ktoré z množín sú spočítateľné a ktoré nespočíateľné: ♣

a) $(0\,;\,1) \cap Q$,
b) $(0\,;\,1) \cap I$,
c) $\langle 0\,;\,1\rangle \times \{0, 1\}$,
d) $\langle 0\,;\,1\rangle \times Q$.

1.3.25. Nech A je spočítateľná množina, akú mohutnosť má množina všetkých jej podmnožín 2^A? ♣

1.3.26. Dokážte, že množina $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\,;\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in Q\}$, t. j. množina všetkých polynómov stupňa najviac n $(n \in N)$ s racionálnymi koeficientami, je spočítateľná.

1.3.27. Dokážte, že množina $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n; a_0, a_1, \ldots, a_n \in Q,\ n \in N\}$, t. j. množina všetkých polynómov (ľubovoľného stupňa) s racionálnymi koeficientami, je spočítateľná.

Častú uzavrú dvaja idioti sobáš z rozumu.
WIESLAW LEON BRUDZIŃSKI

Optimista vyhlasuje, že žijeme v najlepšom možnom svete. Pesimista sa obáva, že je to pravda.
JAMES BRANCH CABELL

Čestní muži sa ženia rýchlo, múdri nikdy.
MIGUEL de CERVANTES

Predstavte si to ticho, keby ľudia hovorili iba to, čo vedia.
KAREL ČAPEK

Škola rozvíja všetky vlohy, vrátane hlúposti.
ANTON PAVLOVIČ ČECHOV

„Múdrejší ustúpi!“ — Smutná pravda, zdôvodňuje nadvládu hlúposti nad svetom.
MARIE von EBNER–ESCHENBACHOVÁ

Vyhľádavanie ľudských chýb je jediná zábava, z ktorej sa možno tešiť zadarmo.
MAXIM GORKIJ

Kapitola 2

Reálne čísla

2.1 Algebraické vlastnosti reálnych čísel

2.1.1 Úvodné poznámky

Množiny, s akými sa stretávame v praxi, sú dôležité nielen preto, že sa skladajú z určitých prvkov, ale hlavne preto, že tvoria určitú štruktúru. Ak hovoríme o množine celých čísel, nemyslíme tým iba celé čísla, ale aj ich porovnávanie a operácie na nich definované (sčítanie, odčítanie, násobenie). To znamená, že množinu nechápeme iba ako celok zložený z prvkov bez vzájomných vzťahov.

S množinou chceme ďalej pracovať a využiť jej vlastnosti pri praktických aplikáciách, preto musíme brať do úvahy aj vnútorné väzby medzi jej prvkami, t. j. operácie a relácie na tejto množine. V tejto kapitole sa budeme venovať reálnym číslam ich vlastnostiam. Reálne čísla budeme chápať ako množinu a na nej definované relácie a operácie.

Nech A je neprázdna množina, potom zobrazenie, ktoré každej usporiadanej dvojici $[a;b]\in A\times A=A^2$ priradí prvok z množiny A, t. j. zobrazenie $\varphi\colon A\times A\to A$, nazývame **binárna operácia** (**definovaná**) **na množine** A. Výsledok operácie φ vykonaný na prvkoch $a,b\in A$ označujeme $\varphi(a,b)$.

Nech $n\in N$, potom zobrazenie $\varphi\colon A^n\to A$ nazývame **n-nárnou operáciou na množine A**. Ak $n=1$, potom hovoríme o **unárnej operácii**.

V praxi sa binárne operácie spravidla označujú špeciálnymi symbolmi, napr. $+$, $\cdot$, $\cup$, $\cap$, $\wedge$ a podobne. Vtedy namiesto $\varphi(a,b)$ píšeme $a+b$, $a\cdot b$, $M\cup N$, $M\cap N$, $p\wedge q$.

Hovoríme, že na množine $A\neq\emptyset$ je definovaná **algebraická štruktúra**, ak je na množine A definovaný systém operácií a relácií. Ak tento systém označíme $\mathcal{S}$, potom hovoríme o algebraickej štruktúre $(A;\mathcal{S})$. Napríklad množinu všetkých celých čísel môžeme chápať ako algebraickú štruktúru $(Z;+,\cdot,<)$, kde Z je množina celých čísel, $+$ a $\cdot$ sú binárne operácie sčítania a násobenia a $<$ je relácia usporiadania.

Príklad 2.1.1.
Nech $X\neq\emptyset$ a $2^X=\{A\,;\,A\subset X\}$ je potenčná množina množiny X.

a) Symboly $\cup$, $\cap$, $-$, $\triangle$ predstavujú binárne operácie definované na množine 2^X, sú to zobrazenia z množiny $2^X\times 2^X$ do množiny 2^X. Vyplýva to zo skutočnosti, že pre všetky $A,B\subset X$ platí $A\cup B\subset X$, $A\cap B\subset X$, $A-B\subset X$, $A\triangle B\subset X$.

b) Doplnok množiny je unárna operácia $2^X\to 2^X$, pretože pre $\forall A\subset X\colon\ \overline{A}\subset X$. ■

Algebraické štruktúry[1] množín popisujeme pomocou axióm. My sa zameriame hlavne na množinu všetkých reálnych čísel, ktorú označujeme písmenom R.

[1]V matematickej analýze nepracujeme len s algebraickými štruktúrami, ale aj s **topologickými** a **metrickými štruk-**

2.1.2 Axiómy reálnych čísel

Jedným zo základných pojmov, s ktorým sa stále stretávame, je **číslo**. Je to dôležitý pojem nielen v matematike, ale vo všetkých oblastiach života. Pojem čísla je intuitívne jasný asi každému človeku.

Najrozsiahlejšou číselnou množinou je **množina komplexných čísel**, ktorá obsahuje tzv. imaginárne čísla a označuje sa písmenom C (budeme sa ňou zaoberať neskôr). Najdôležitejšou z číselných množín je jej podmnožina, ktorú nazývame **množina reálnych čísel**. Pokiaľ nepovieme ináč, budeme pod pojmom **číslo**, rozumieť číslo reálne.

Teraz uvedieme definíciu reálnych čísel. Nedefinujeme pritom jednotlivé reálne čísla, ale množinu všetkých reálnych čísel ako celok s reláciami, operáciami a ich vlastnosťami. Zadávame ich pomocou tzv. **axióm reálnych čísel**, ktoré delíme na axiómy sčítania a násobenia, axiómy usporiadania a axiómu o najmenšom hornom ohraničení.

- **Rovnosť čísel**

Základným vzťahom medzi číslami je relácia rovnosť dvoch čísel, ktorú značíme symbolom „=“. Hovoríme, že **číslo a sa rovná číslu b** (**čísla a, b sa rovnajú**) a zapisujeme $a = b$, ak výrazy a, b vyjadrujú to isté číslo. Ak neplatí $a = b$, potom hovoríme, že **číslo a sa nerovná číslu b** (**čísla a, b sa nerovnajú**) a zapisujeme $a \neq b$.

Platí napríklad $2 = 2$, $x = 2$, $0,5 = 1/2$, $4 = \frac{8}{2}$, $0,5 \neq 2$.

Z predchádzajúcej definície vyplýva, že rovnosť dvoch čísel je reláciou ekvivalencie (reflexívna, symetrická a tranzitívna) na množine R, t. j. pre všetky $a, b, c \in R$ platí:

$$a = a, \qquad a = b \;\Leftrightarrow\; b = a, \qquad (a = b \wedge b = c) \;\Rightarrow\; a = c.$$

- **Axiómy operácií sčítania a násobenia**

Sčítanie dvoch čísel je binárna operácia, ktorá dvom daným číslam (nazývame ich **sčítance**) priradí jednoznačne tretie číslo (ktoré nazývame **súčet čísel a a b**). Sčítanie označujeme symbolom „+“, súčet čísel a, b zapisujeme $a+b$ a čítame a plus b.

Násobenie dvoch čísel je binárna operácia, ktorá dvom daným číslam (nazývame ich **činitele**) priradí jednoznačne tretie číslo (ktoré nazývame **súčin čísel a a b**). Násobenie označujeme symbolom „·“, súčin čísel a, b zapisujeme $a \cdot b = ab$ a čítame a krát b. Symbol násobenia sa väčšinou vynecháva.

Základné vlastnosti operácií $+$, $\cdot$ nazývame **axiómy operácií sčítania a násobenia** a označujeme ich (S1) — (S4), (N1) — (N4), (D). Pre všetky $a, b, c \in R$ platí:

(S1)	$a+b = b+a$,	(N1)	$a \cdot b = b \cdot a$,
(S2)	$(a+b)+c = a+(b+c)$,	(N2)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
(S3)	$\exists!\, 0 \in R\ \forall a \in R\colon\ a = a+0$,	(N3)	$\exists!\, 1 \in R\ \forall a \in R\colon\ a = a \cdot 1$,
(S4)	$\forall a \in R\ \exists!\, x \in R\colon\ 0 = a+x$,	(N4)	$\forall a \in R, a \neq 0\ \exists!\, y \in R\colon\ 1 = a \cdot y$,
(D)	$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) = ac + bc$.		

Axiómy (S1) a (N1) nazývame **komutatívny zákon sčítania** a **komutatívny zákon násobenia**. Axiómy (S2) a (N2) nazývame **asociatívny zákon sčítania** a **asociatívny zákon násobenia**. Zátvorky v týchto zápisoch obyčajne vynechávame, t. j.

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c), \qquad \text{resp.} \quad a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Číslo 0 z axiómy (S3) nazývame **nula** (**nulový prvok**). Číslo x z axiómy (S4) nazývame **opačné číslo k číslu a**, značíme ho $x = -a$ a čítame mínus a.

túrami. Pomocou nich môžeme definovať nové vlastnosti, ako sú napríklad spojitosť, konvergencia. Topologická štruktúra sa zvykne zadávať pomocou okolí bodov a metrická štruktúra pomocou vzdialenosti dvoch bodov.

Číslo 1 z axiómy (N3) nazývame **jednotka** (**jednotkový prvok**). Číslo y z axiómy (N4) nazývame **inverzné** (**obrátené**) **číslo k číslu** a, značíme ho a^{-1}, resp. $1/a$, resp. $\frac{1}{a}$. Tieto zápisy čítame a na mínus prvú, resp. jedna lomené a. Je zrejmé, že $a^{-1} \neq 0$.

Axiómu (D) nazývame **distributívny zákon násobenia vzhľadom na sčítanie**. V praxi sa používa konvencia o priorite násobenia pred sčítaním. To znamená, že zátvorky označujúce násobenie obvykle vynechávame.

Poznámka 2.1.1.
Z axióm (S1) — (S4) a (N1) — (N4) vyplýva, že $(R;\, +)$ a $(R - \{0\}\,;\, \cdot)$ sú komutatívne grupy. Z axiómy (D) vyplýva, že $(R;\, +;\, \cdot)$ je komutatívne teleso (pozri [32]).

- **Axiómy usporiadania**

Charakteristickým znakom reálnych čísel je, že ich môžeme podľa veľkosti porovnávať a teda podľa veľkosti usporiadať. Nech a, b sú reálne čísla, potom výraz $a < b$ vyjadruje, že **číslo** a **je menšie ako číslo** b. Reláciu „$<$“ nazývame **menší**. Reláciou menší je zároveň definovaná aj relácia **väčší**, ktorú označujeme „$>$“. Výrazy $a < b$ (a je menšie ako b) a $b > a$ (b je väčšie ako a) sú ekvivalentné.

Uvedieme základné vlastnosti relácie usporiadania menší $<$, ktoré nazývame **axiómy usporiadania**. Nech $a, b, c \in R$, potom platí:

(U1) Platí práve jeden zo vzťahov: $a < b$, $a = b$, $b < a$,
(U2) $(a < b \wedge b < c) \;\Rightarrow\; a < c$, (U3) $a \not< a$, t. j. neplatí $a < a$,
(U4) $a < b \;\Rightarrow\; a+c < b+c$, (U5) $(a < b \wedge 0 < c) \;\Rightarrow\; ac < bc$.

Axióma (U1) sa nazýva **trichotómia relácie** $<$, axióma (U2) sa nazýva **tranzitívnosť relácie** $<$ a axióma (U3) **nereflexívnosť relácie** $<$. Axiómy (U4), resp. (U5) nazývame **monotónnosť sčítania**, resp. **násobenia a relácie** $<$.

Poznámka 2.1.2.
Nech A je neprázdna množina a T je binárna relácia definovaná na množine A, na ktorej platia axiómy (U1), (U2), (U3). Reláciu T potom nazývame **usporiadanie** a množinu A nazývame **usporiadaná množina**. To znamená, že množiny R, N, Z, Q sú usporiadané.

Ak pre $a, b \in R$ platí $a < b$ alebo $a = b$, potom zjednodušene píšeme $a \leq b$ a čítame a **je menšie alebo rovné** b. Ak platí $a > b$ alebo $a = b$, potom píšeme $a \geq b$ a čítame a **je väčšie alebo rovné** b.

Relácie $<$, $>$ (menší, väčší) nazývame **ostré nerovnosti** a relácie $\leq$, $\geq$ (menší alebo rovný, väčší alebo rovný) nazývame **neostré nerovnosti**.[2]

Reálne číslo x sa nazýva **kladné** [resp. **nezáporné**], ak platí $x > 0$ [resp. $x \geq 0$]. Reálne číslo x sa nazýva **záporné** [resp. **nekladné**], ak platí $x < 0$ [resp. $x \leq 0$].

Číslo 0 je nezáporné a súčasne nekladné.

Množiny všetkých kladných, záporných, nezáporných a nekladných čísel označujeme:

$$R^+ = \{x \in R\,;\, x > 0\}\,, \quad R^- = \{x \in R\,;\, x < 0\}\,, \quad R_0^+ = \{x \in R\,;\, x \geq 0\}\,, \quad R_0^- = \{x \in R\,;\, x \leq 0\}\,.$$

- **Axióma o najmenšom hornom ohraničení**

Nech $A \subset R$. Hovoríme, že číslo $a \in R$ je **horné ohraničenie množiny** A, ak pre všetky prvky $x \in A$ platí $x \leq a$. Množina A sa nazýva **zhora ohraničená**, ak existuje aspoň jedno jej horné ohraničenie.

[2] V literatúre sa niekedy používa označenie $\leqq$ a $\geqq$.

Hovoríme, že číslo $b \in R$ je **dolné ohraničenie množiny** A, ak pre všetky prvky $x \in A$ platí $b \leq x$. Množina A sa nazýva **zdola ohraničená**, ak existuje aspoň jedno jej dolné ohraničenie.

Množina A sa nazýva **ohraničená**, ak je zdola aj zhora ohraničená. Ak množina A nie je ohraničená, nazýva sa **neohraničená**.

Nech $A \subset R$. Ak $a \in R$ je horné ohraničenie množiny A a zároveň patrí do množiny A, potom a nazývame **najväčší prvok** (**maximum**) **množiny** A a označujeme $a = \max A$.

Ak $b \in R$ je dolné ohraničenie množiny A a zároveň patrí do množiny A, potom b nazývame **najmenší prvok** (**minimum**) **množiny** A a označujeme $a = \min A$.

Poznámka 2.1.3.
Je zrejmé, že ak $a, b \in R$, $b \leq a$, potom $a = \max\{a, b\}$, $b = \min\{a, b\}$.

Najmenšie z horných ohraničení množiny nazývame suprémum množiny a najväčšie z dolných ohraničení nazývame infimum množiny. Hovoríme, že $\alpha \in R$ je **suprémum** (**horná hranica**) **množiny** A a označujeme $\alpha = \sup A$, ak platí:

i) $\forall x \in A\colon\ x \leq \alpha$, ii) $\forall b \in R\colon\ (\forall x \in A\colon x \leq b) \Rightarrow \alpha \leq b$.

Hovoríme, že $\beta \in R$ je **infimum** (**dolná hranica**) **množiny** A a píšeme $\beta = \inf A$, ak:

i) $\forall x \in A\colon\ \beta \leq x$, ii) $\forall b \in R\colon\ (\forall x \in A\colon b \leq x) \Rightarrow b \leq \beta$.

Poznámka 2.1.4.
Vlastnosť i) supréma znamená, že α je horné ohraničenie množiny A. Vlastnosť ii) znamená, že každé iné horné ohraničenie množiny A je väčšie ako α, t. j. α je najmenšie horné ohraničenie.
Vlastnosti i), ii) infima sú analogické.[3]

Poslednú axiómu, bez ktorej by systém reálnych čísel nebol úplný, nazývame **axióma o najmenšom hornom ohraničení** (**axióma o hornej hranici**) a môžeme ju formulovať gramatickou vetou: *„Každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina množiny reálnych čísel má reálne suprémum.“*, t. j.

(AH) $\quad \forall A \subset R, A \neq \emptyset\colon\ (\exists a \in R\ \forall x \in A\colon\ x \leq a)\ \Rightarrow\ \exists\ \alpha = \sup A \in R.$

2.1.3 Dôsledky axióm operácií sčítania a násobenia

Z axióm operácií sčítania a násobenia vyplývajú mnohé dôsledky.

Veta 2.1.1.
Pre všetky $a, b, c \in R$ platí:

a) $a + b = a + c\ \Rightarrow\ b = c$, b) $-(-a) = a$, c) $-(a + b) = -a - b$.

Dôkaz.
a) Z axiómy (S4) vyplýva, že ku a existuje práve jedno opačné číslo $-a$.
Potom na základe axióm (S2), (S3) z rovnosti $a + b = a + c$ platí:

$$b = 0 + b = (-a + a) + b = -a + (a + b) = -a + (a + c) = (-a + a) + c = 0 + c = c.$$

b) K číslu a existuje práve jedno opačné číslo $-a \in R$ také, že $0 = a + (-a)$.
K číslu $-a$ existuje práve jedno opačné číslo $-(-a) \in R$ také, že $0 = (-a) + [-(-a)]$.
Z toho na základe časti a) vyplýva:

$$(-a) + a = a + (-a) = (-a) + [-(-a)], \quad \text{t. j. } \ a = -(-a).$$

[3] Takýmto spôsobom môžeme definovať suprémum a infimum pre podmnožiny ľubovoľnej usporiadanej množiny.

c) Čísla $a+b$, $-a-b$ sú opačné, pretože platí:

$$-a-b+(a+b)=(-a)+(-b)+a+b=[(-a)+a]+[(-b)+b]=0+0=0. \blacksquare$$

Veta 2.1.2.
Pre všetky $a,b,c\in R$ platí:
a) $ab=0 \;\Leftrightarrow\; a=0\vee b=0$,
b) $-a=(-1)a$,
c) $a(-b)=-ab$,
d) $ab=ac \;\Rightarrow\; b=c$, ak $a\neq 0$,
e) $[a^{-1}]^{-1}=a$, ak $a\neq 0$,
f) $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$, ak $a\neq 0$, $b\neq 0$.

Dôkaz.
a) Tvrdenie je ekvivalencia, takže musíme dokázať postačujúcu a nutnú podmienku.

$PP_{\Leftarrow}$: Predpokladajme, že $b=0$, potom na základe axióm (S3), (N3) a (D) platí:

$$a+0=a=a\cdot 1=a\cdot(1+0)=a\cdot 1+a\cdot 0=a+a\cdot 0=a+ab,$$

Z toho na základe vety 2.1.1 a) vyplýva $0=ab$. Pre $a=0$ je dôkaz analogický.

$NP_{\Rightarrow}$: Ak $ab=0$, $a=0$, potom tvrdenie platí.
Nech $ab=0$, $a\neq 0$.
K číslu a existuje na základe axiómy (N4) obrátené číslo $a^{-1}\neq 0$ také, že $a^{-1}a=1$.
Z toho na základe axióm (N3), (N2) a časti a) vyplýva:

$$b=1\cdot b=(a^{-1}a)\cdot b=a^{-1}(a\cdot b)=a^{-1}\cdot 0=0.$$

b) Na základe (N3), (D) a časti a) platí:

$$(-1)a+a=(-1)a+1\cdot a=[(-1)+1]a=0\cdot a=0.$$

To znamená, že čísla a, $(-1)a$ sú opačné a platí $-a=(-1)a$.

c) $a(-b)=a[(-1)b]=[(-1)a]b=(-1)\cdot(ab)=-ab$.

d) Z axiómy (N4) vyplýva, že k číslu $a\neq 0$ existuje práve jedno obrátené číslo $a^{-1}\neq 0$.
Potom po vynásobení číslom a^{-1} z rovnosti $ab=ac$ vyplýva:

$$b=1\cdot b=(a^{-1}a)b=a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac)=(a^{-1}a)c=1\cdot c=c.$$

e) K číslu $a\neq 0$ existuje práve jedno obrátené číslo $a^{-1}\neq 0$ také, že $a^{-1}a=1$.
K číslu a^{-1} existuje tiež práve jedno obrátené číslo $[a^{-1}]^{-1}$ také, že $a^{-1}[a^{-1}]^{-1}=1$.
Potom na základe časti d) platí:

$$a^{-1}a=aa^{-1}=1=a^{-1}[a^{-1}]^{-1}, \quad \text{t.j } a=[a^{-1}]^{-1}.$$

f) Čísla ab, $a^{-1}b^{-1}$ sú obrátené, pretože platí:

$$a^{-1}b^{-1}(ab)=a^{-1}b^{-1}ab=(a^{-1}a)\cdot(b^{-1}b)=1\cdot 1=1. \blacksquare$$

Medzi dôležité dôsledky axióm operácií sčítania a násobenia na množine reálnych čísel R patria existencia práve jedného riešenia x rovnice $b+x=a$ a existencia práve jedného riešenia y rovnice $by=a$. Tieto vlastnosti nazývame **jednoznačná riešiteľnosť rovníc pre operáciu sčítania** a **jednoznačná riešiteľnosť rovníc pre operáciu násobenia**.

Veta 2.1.3.
V množine R platí pre operácie sčítania a násobenia jednoznačná riešiteľnosť rovníc:
a) $\forall a,b\in R\ \exists!\, x\in R\colon\ b+x=a$,
b) $\forall a,b\in R, b\neq 0\ \exists!\, y\in R\colon\ by=a$.

Dôkaz.
a) Ľahko sa presvedčíme priamym dosadením, že hľadaným číslom je $x=a+(-b)$:

$$b+x=b+[a+(-b)]=b+[(-b)+a]=[b+(-b)]+a=0+a=a.$$

Jednoznačnosť (sporom).
Nech existujú $x_1, x_2 \in R$, $x_1 \neq x_2$ také, že $b + x_1 = a = b + x_2$. Z toho vyplýva spor:
$$x_1 = (-b + b) + x_1 = -b + (b + x_1) = -b + a = -b + (b + x_2) = (-b + b) + x_2 = x_2.$$
b) Hľadaným číslom je $y = a \cdot b^{-1}$, o čom sa tiež presvedčíme priamym dosadením:
$$by = b(ab^{-1}) = b(b^{-1}a) = (bb^{-1})a = 1 \cdot a = a.$$
Jednoznačnosť (sporom).
Nech existujú $y_1, y_2 \in R$, $y_1 \neq y_2$ také, že $by_1 = a = by_2$. Z toho vyplýva spor:
$$y_1 = 1 \cdot y_1 = (b^{-1}b)y_1 = b^{-1}(by_1) = b^{-1}a = b^{-1}(by_2) = (b^{-1}b)y_2 = 1 \cdot y_2 = y_2. \blacksquare$$

Na základe vety 2.1.3 definujeme na množine R binárne operácie odčítanie a delenie dvoch čísel. Nech $a, b \in R$, potom symbolom „$-$“ (mínus) označujeme binárnu operáciu **odčítanie dvoch čísel**, ktorá číslu a (nazývame ho **menšenec**) a číslu b (**menšiteľ**) priradí číslo $x \in R$ také, že $b + x = a$. Číslo x nazývame **rozdiel čísel a a b** a zapisujeme ho v tvare $x = a + (-b)$ alebo $x = a - b$.

Nech $a, b \in R$, $b \neq 0$. **Delením dvoch čísel** nazývame operáciu $R \times (R - \{0\}) \to R$, ktorá číslu a (nazývame ho **delenec**) a číslu b (nazývame ho **deliteľ**) priradí číslo $y \in R$ také, že platí rovnosť $by = a$. Delenie dvoch čísel označujeme symbolom „:“ (delené) alebo symbolom „/“ (lomené). Číslo y nazývame **podiel čísel a a b** a zapisujeme ho niektorým z výrazov $y = a \cdot b^{-1}$, $y = a : b$ alebo $y = a/b = \frac{a}{b}$.

Veta 2.1.4.
Nech $a, b, c, d \in R$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, potom: a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Dôkaz.
Ak použijeme axiómy (N1) — (N4), (D) a vetu 2.1.2, potom platí:
a) $NP_{\Rightarrow}$: $ab^{-1} = cd^{-1} \implies ab^{-1}bd = cd^{-1}bd \implies ad = bc.$
$PP_{\Leftarrow}$: $ad = bc \implies adb^{-1}d^{-1} = bcb^{-1}d^{-1} \implies ab^{-1} = cd^{-1}.$
b) $$(ad + bc) \cdot (bd)^{-1} = ad(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1} = adb^{-1}d^{-1} + bcb^{-1}d^{-1} =$$
$$= ab^{-1}dd^{-1} + bb^{-1}cd^{-1} = ab^{-1} \cdot 1 + 1 \cdot cd^{-1} = ab^{-1} + cd^{-1}. \blacksquare$$

Podiel čísel a a b, $b \neq 0$ v tvare $a/b = \frac{a}{b}$ nazývame **zlomok s čitateľom a a menovateľom b**. Postup opísaný vo vete 2.1.4 b) sa nazýva **úprava dvoch zlomkov na spoločného menovateľa**.

- **Množina prirodzených čísel**

Čísla 1, $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $4 = 3+1$, $\ldots$, $n = (n-1)+1$, $\ldots$ nazývame **prirodzené**.[4] Množinu, ktorá obsahuje všetky prirodzené čísla, nazývame **množina prirodzených čísel** a označujeme ju N. Symbolicky ju môžeme vyjadriť:
$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, n+2, \ldots\}.$$
Z predchádzajúcej konštrukcie prirodzených čísel vyplýva, že ak k je prirodzené číslo, potom aj $k+1$ je prirodzené číslo. Na tomto princípe je založená matematická indukcia, s ktorou sme sa zaoberali v časti 1.2.3 na strane 17.

Poznámka 2.1.5.
V množine všetkých prirodzených čísel platia axiómy (S1), (S2), (N1), (N2), (N3) a (D). Ostatné axiómy v množine N neplatia. To znamená, že odčítanie a delenie nie sú operácie na množine N. Dokazujú to napríklad čísla $1-2=-1$, resp. $\frac{1}{2}$, ktoré nepatria do N.

[4]Niektorí matematici považujú aj číslo 0 za prirodzené číslo.

- **Množina celých čísel**

Celými číslami nazývame čísla, ktoré sa dajú zapísať ako rozdiel dvoch prirodzených čísel. Množinu, ktorá obsahuje všetky celé čísla, nazývame **množina celých čísel** a označujeme ju znakom Z. Do množiny Z patria všetky prirodzené čísla, všetky čísla k nim opačné a číslo 0. To znamená, že platí:

$$Z = \{m-n\,;\, m,n\in N\} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \pm n, \ldots\}\,.$$

Symbol $\pm n$ vyjadruje číslo n a zároveň opačné číslo $-n$. V praxi sa používa tiež symbol $\mp n$, ktorý vyjadruje číslo $-n$ a opačné číslo n. Takže namiesto dvoch rovností $n\cdot(-1) = -n$ a $-n\cdot(-1) = n$, píšeme skrátene $\pm n\cdot(-1) = \mp n$.

Poznámka 2.1.6.
V množine celých čísel platia axiómy platné v množine prirodzených čísel, t. j. axiómy (S1), (S2), (N1), (N2), (N3), (D) a navyše axiómy (S3), (S4).
Axióma (N4) v množine Z neplatí, pretože delenie nie je operácia na množine Z.

- **Množina racionálnych čísel**

V množine celých čísel Z nie je pre $m,n\in Z$, $n\neq\pm1$ definovaný podiel $\frac{m}{n}$. Každé číslo, ktoré sa dá vyjadriť ako podiel dvoch celých čísel $\frac{m}{n}$, $n\neq0$, nazývame **racionálne číslo**. Množinu, ktorá obsahuje všetky racionálne čísla nazývame **množina racionálnych čísel** a označujeme symbolom Q.

Čísla, ktoré nie sú racionálne, nazývame **iracionálne**. Medzi iracionálne čísla patria napríklad $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π. Množinu obsahujúcu všetky iracionálne čísla nazývame **množina iracionálnych čísel** a označujeme symbolom I. Potom platí:

$$Q = \left\{\tfrac{m}{n}\,;\, m,n\in Z,\ n\neq0\right\}, \qquad I = R - Q.$$

Je zrejmé, že podiel dvoch racionálnych čísel s nenulovým menovateľom je opäť racionálne číslo. Racionálne číslo môže mať viacero rôznych vyjadrení, napr. $0,5 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{0{,}7}{1{,}4}$.

Poznámka 2.1.7.
V množine racionálnych čísel platia axiómy (S1) — (S4), (N1) — (N4), (D).
Je zrejmé, že platí $Q = \left\{\frac{m}{n}\,;\, m,n\in Z,\ n\neq0\right\} = \left\{\frac{m}{n}\,;\, m\in Z,\ n\in N\right\}$.[5]

Príklad 2.1.2.
Dokážte, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.

Riešenie.
Dokážeme sporom.
Nech $\sqrt{2}$ je racionálne číslo, t. j. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, kde $m,n\in N$ sú nesúdeliteľné čísla. Potom $2 = \frac{m^2}{n^2}$, t. j. $2n^2 = m^2$. To znamená, že $2\big|m$, t. j. $m = 2k$, kde $k\in N$. Z toho vyplýva $2n^2 = m^2 = 4k^2$, resp. $n^2 = 2k^2$. To znamená, že $2\big|n$. Takže čísla m, n sú súdeliteľné číslom 2. To je spor, z ktorého vyplýva $\sqrt{2}\notin Q$. ■

2.1.4 Dôsledky axióm usporiadania

Každá podmnožina usporiadanej množiny je tiež usporiadaná. To znamená, že aj množiny N, Z, Q, $I = R-Q$ sú usporiadané. Na týchto množinách platia aj ostatné axiómy usporiadania.

[5] Ak $m > 0$, potom $m\in N$. Ak $m < 0$, potom $-m\in N$ a $\frac{m}{n} = \frac{-m}{-n}$, kde $-n\in Z$, t. j. tvrdenie platí.

Veta 2.1.5.
Nech $A \in R$, $a \neq 0$, potom $-a \neq 0$ a práve jedno z čísel a, $-a$ je kladné a druhé záporné.

Dôkaz.
Z (U1) vyplýva, že platí práve jeden vzťah $a < 0$, $0 < a$. Potom na základe (U4) platí:

$$a < 0 \Rightarrow a+(-a) < 0+(-a) \Rightarrow 0 < -a, \quad 0 < a \Rightarrow 0+(-a) < a+(-a) \Rightarrow -a < 0. \ \blacksquare$$

Veta 2.1.6.
Ak $a \in R$, $a > 0$, potom aj $a^{-1} > 0$.

Dôkaz.
Sporom. Nech platí $a > 0$, $a^{-1} \leq 0$.
Ak $a^{-1} = 0$, potom dostávame spor $1 = a^{-1}a = 0 \cdot a = 0$.
Ak $a^{-1} < 0$, potom z (U5) vyplýva spor $1 = a^{-1}a < 0 \cdot a = 0$. $\blacksquare$

Veta 2.1.7.
Ak $a, b \in R$, $a \leq b$, $b \leq a$, potom platí $a = b$.

Dôkaz.
Sporom. Nech platí $a \leq b$, $b \leq a$ a zároveň $a \neq b$.
To znamená, že platí $a < b$ a zároveň $b < a$. Lenže to je spor s axiómou (U1). $\blacksquare$

Veta 2.1.8.
Nech $a, b \in R$, potom platí: $\quad a < b \iff 0 < b - a \iff -b < -a \iff a - b < 0.$

Dôkaz.
Veta predstavuje 6 ekvivalencií, čo prakticky znamená 12 implikácií. Ak uvážime zákon hypotetického sylogizmu (str.7), potom nám stačí dokázať 4 implikácie:

$$a < b \ \Rightarrow \ 0 < b - a \ \Rightarrow \ -b < -a \ \Rightarrow \ a - b < 0 \ \Rightarrow \ a < b.$$

Dôkaz týchto štyroch implikácií je uvedený v nasledujúcej schéme.

$$\begin{array}{ccccc}
a < b & \Longrightarrow & a + (-a) < b + (-a) & \Longrightarrow & 0 < b - a \\
\Uparrow & & & & \Downarrow \\
a - b + b < 0 + b & & & & 0 + (-b) < b - a + (-b) \\
\Uparrow & & & & \Downarrow \\
a - b < 0 & \Longleftarrow & -b + a < -a + a & \Longleftarrow & -b < -a. \ \blacksquare
\end{array}$$

Dôsledok 2.1.8.a.
Nech $a, b \in R$, potom platí: $\quad a \leq b \iff 0 \leq b - a \iff -b \leq -a \iff a - b \leq 0.$

Veta 2.1.9.
Nech $a, b \in R$, potom platia nasledujúce implikácie:

a) $0<a,\ 0<b \ \Rightarrow \ 0<ab$, b) $a<0,\ b<0 \ \Rightarrow \ 0<ab$, c) $a<0<b \ \Rightarrow \ ab<0$.

Dôkaz.
Dôkaz je založený na axióme (U5) a vete 2.1.5.

a) $0 < a,\ 0 < b \implies 0 \cdot b < ab \implies 0 < ab.$

b) $a < 0,\ b < 0 \implies a < 0,\ 0 < -b \implies a(-b) < 0 \cdot (-b) \implies -ab < 0 \implies 0 < ab.$

c) $a < 0,\ 0 < b \implies ab < 0 \cdot b \implies ab < 0.$ $\blacksquare$

Poznámka 2.1.8.
Ak vo vete 2.1.9 a v nasledujúcich vetách nahradíme v predpokladoch ostré nerovnosti $<$ neostrými nerovnosťami $\leq$, potom aj v tvrdeniach budú neostré nerovnosti. Uvedieme ich ako dôsledky bez dôkazov a doporučujeme ich čitateľovi vykonať ako cvičenie.
Takže napríklad z $0\leq a,\ 0\leq b$ vyplýva $0\leq ab$, ale aj z $0\leq a,\ 0<b$ vyplýva $0\leq ab$.

Dôsledok 2.1.9.a.
Nech $a,b\in R$, potom platia nasledujúce implikácie:
a) $a<0, 0\leq b \Rightarrow ab\leq 0$, b) $a\leq 0, 0<b \Rightarrow ab\leq 0$, c) $a\leq 0, 0\leq b \Rightarrow ab\leq 0$,
d) $0\leq a, 0\leq b \Rightarrow 0\leq ab$, e) $0\leq a, 0<b \Rightarrow 0\leq ab$, f) $a\leq 0, b\leq 0 \Rightarrow 0\leq ab$,
g) $a\leq 0, b<0 \Rightarrow 0\leq ab$.

Veta 2.1.10.
Nech $a,b,c,d\in R$, $a<b$, potom: a) $c<d \Rightarrow a+c<b+d$, b) $c<0 \Rightarrow bc<ac$.

Dôkaz.
a) Na základe (U4) platí: $\left.\begin{matrix} a<b \Longrightarrow a+c<b+c \\ c<d \Longrightarrow c+b<d+b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(S1),\ (U2)} a+c<b+c<b+d.$

b) $c<0 \Longrightarrow -c>0 \xrightarrow{(U5)} a(-c)<b(-c) \Longrightarrow -ac<-bc \xrightarrow{\text{veta 2.1.8}} bc<ac.$ ■

Dôsledok 2.1.10.a.
Ak $a,b,c,d\in R$, $a\leq b$, potom: a) $c<d \Rightarrow a+c<b+d$, b) $0<c \Rightarrow ac\leq bc$,
c) $c\leq d \Rightarrow a+c\leq b+d$, d) $c<0 \Rightarrow bc\leq ac$.

Veta 2.1.11.
Ak $a,b,c,d\in R$, $0<a<b$, potom: a) $0<c<d \Rightarrow ac<bd$, b) $d<c<0 \Rightarrow bd<ac$.

Dôkaz.
a) Na základe (U5) platí: $\left.\begin{matrix} a<b,\ 0<c \Longrightarrow ac<bc \\ c<d,\ 0<b \Longrightarrow cb<db \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(N1),\ (U2)} ac<bc<bd.$

b) $d<c<0 \xrightarrow{\text{veta 2.1.8}} 0<-c<-d \xrightarrow{a)} -ac<-bd \xrightarrow{\text{veta 2.1.8}} bd<ac.$ ■

Dôsledok 2.1.11.a.
Ak $a,b,c,d\in R$, $b<a<0$, $d<c<0$, potom platí nerovnosť $ac<bd$.

Dôsledok 2.1.11.b.
Ak $a,b,c,d\in R$, $0<a\leq b$, potom: a) $0<c\leq d \Rightarrow ac\leq bd$, b) $d\leq c<0 \Rightarrow bd\leq ac$,
c) $0<c<d \Rightarrow ac<bd$, d) $d<c<0 \Rightarrow bd<ac$.

Dôsledok 2.1.11.c.
Ak $a,b,c,d\in R$, $b\leq a<0$, potom: a) $d<c<0 \Rightarrow ac<bd$, b) $d\leq c<0 \Rightarrow ac\leq bd$.

Poznámka 2.1.9.
Ak vynecháme vo vete 2.1.11 predpoklad $0<a$, potom veta neplatí.
Položme napríklad $a=-6$, $b=-2$, potom pre rôzne hodnoty $0<c<d$ platí:

$$c=1,\ d=6 \Rightarrow ac>bd, \quad c=2,\ d=6 \Rightarrow ac=bd, \quad c=1,\ d=2 \Rightarrow ac<bd.$$

Veta 2.1.12.
Nech $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$, potom: $a < b \iff 1 < \frac{b}{a} \iff \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \iff \frac{a}{b} < 1$.

Dôkaz.
Analogicky, ako pri dôkaze vety 2.1.8, pre $a > 0$, $b > 0$ platí:

$$\begin{array}{ccccc} a < b & \Longrightarrow & aa^{-1} < ba^{-1} & \Longrightarrow & 1 < ba^{-1} \\ \Uparrow & & & & \Downarrow \\ b^{-1}a\, b < 1 \cdot b & & & & 1 \cdot b^{-1} < ba^{-1}\, b^{-1} \\ \Uparrow & & & & \Downarrow \\ b^{-1}a < 1 & \Longleftarrow & b^{-1}a < a^{-1}a & \Longleftarrow & b^{-1} < a^{-1}. \blacksquare \end{array}$$

Dôsledok 2.1.12.a.
Nech $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$, potom: $a \leq b \iff 1 \leq \frac{b}{a} \iff \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \iff \frac{a}{b} \leq 1$.

Veta 2.1.13.
Nech $a \in R$, $a \geq 0$ je také, že pre všetky $\varepsilon > 0$ platí $a < \varepsilon$. Potom $a = 0$.

Dôkaz.
Sporom. Nech $a > 0$. Položme $\varepsilon = a$, potom $a < a$, čo je spor s axiómou (U3). $\blacksquare$

2.1.5 Dôsledky axiómy o najmenšom hornom ohraničení

Čitateľovi sa môže zdať, že axióma (AH) platí v ľubovoľnej usporiadanej množine. Ale ako dokazuje príklad 2.1.5, opak je pravdou. Predtým ako sformulujeme niektoré dôsledky axiómy (AH), uvedieme vetu 2.1.14, ktorá vyjadruje vzťah medzi maximom a suprémom, resp. medzi minimom a infimom množiny.

Príklad 2.1.3.
Množina všetkých prirodzených čísel N je zhora neohraničená, t. j. nie je ohraničená zhora a nie je ohraničená.

Riešenie.
Sporom. Nech je množina N zhora ohraničená a nech $\sup A = \alpha \in R$.
Potom $\alpha - 1$ nie je horným ohraničením množiny N a existuje $n \in N$ také, že $\alpha - 1 < n$.
Z toho vyplýva $\alpha < n + 1$. To je spor s $\alpha = \sup N$, pretože $n+1 \in N$. $\blacksquare$

Veta 2.1.14.
Nech $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, potom platí:
a) Ak existuje $\max A$, potom $\max A = \sup A$.
b) Ak existuje $\min A$, potom $\min A = \inf A$.

Dôkaz.
a) Keďže $\max A \in A$, potom z vlastnosti i) supréma vyplýva $\max A \leq \sup A$.
Keďže $\max A$ je horné ohraničenie A, z vlastnosti ii) vyplýva $\sup A \leq \max A$.
b) Dôkaz je analogický ako v časti a). $\blacksquare$

Nech $A \subset R$, potom symbolom $-A$ označujeme množinu, ktorá obsahuje opačné čísla k číslam množiny A, t. j. $-A = \{-x\,;\, x \in A\} = \{x\,;\, -x \in A\}$.

Veta 2.1.15.
Nech $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, potom $\alpha = \sup A$ práve vtedy, ak $-\alpha = \inf(-A)$.

Dôkaz.
NP$_{\Rightarrow}$: Nech $\alpha = \sup A$. To znamená, že platia podmienky:
i) $\forall x \in A\colon\ x \leq \alpha$, ii) $\forall b \in R\colon\ (\forall x \in A\colon x \leq b) \Rightarrow \alpha \leq b$.
Potom na základe vety 2.1.8 a poznámky 2.1.8 platí:
i) $\forall x \in A\colon\ -\alpha \leq -x$, ii) $\forall b \in R\colon\ (\forall x \in A\colon\ -b \leq -x) \Rightarrow -b \leq -\alpha$.
Označme $-x = y$, $-b = c$, potom vzťah $x \in A$ znamená $y \in (-A)$. Takže platí:
i) $\forall y \in (-A)\colon\ -\alpha \leq y$, ii) $\forall c \in R\colon\ (\forall y \in (-A)\colon c \leq y) \Rightarrow c \leq -\alpha$.
Posledné dva vzťahy znamenajú, že $-\alpha = \inf(-A)$.
PP$_{\Leftarrow}$: Dôkaz je analogický ako pri NP$_{\Rightarrow}$ a odporúčame ho čitateľovi ako cvičenie. ■

Veta 2.1.16.
Nech množina $A \subset R$, $A \neq \emptyset$ je zdola ohraničená, potom existuje $\beta = \inf A \in R$, pričom $\beta = -\sup(-A)$.

Dôkaz.
Množina A je zdola ohraničená, t. j. existuje $a \in R$, že pre všetky $x \in A$ platí $a \leq x$.
Potom podľa vety 2.1.8 a poznámky 2.1.8 pre všetky $x \in A$ platí $-x \leq -a$.
Takže $-A$ je zhora ohraničená, existuje $\alpha = \sup(-A) \in R$ a podľa vety 2.1.15 platí:
$$\beta = \inf A = -\alpha = -\sup(-A). \ ■$$

Veta 2.1.17.
Nech $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, potom existuje najviac jedno $\sup A$ a najviac jedno $\inf A$.

Dôkaz.
Vetu dokážeme sporom. Nech $\alpha_1 = \sup A$, $\alpha_2 = \sup A$, pričom $\alpha_1 \neq \alpha_2$.
Keďže α_1, α_2 sú horné ohraničenia množiny A, potom z vlastnosti ii) supréma vyplýva:
$$\alpha_1 = \sup A \leq \alpha_2, \quad \alpha_2 = \sup A \leq \alpha_1, \quad \text{t. j.} \quad \alpha_1 = \alpha_2.$$
Druhá časť vety, že množina A má najviac jedno infimum, sa dokáže analogicky. ■

Veta 2.1.18.
Nech $A \subset R$, $B \subset R$ sú neprázdné množiny a nech $A \subset B$.
a) Ak A, B sú zhora ohraničené, potom $\sup A \leq \sup B$.
b) Ak A, B sú zdola ohraničené, potom $\inf B \leq \inf A$.

Dôkaz.
a) Z axiómy (AH) vyplýva, že $\sup A \in R$, $\sup B \in R$.
Keďže je $\sup B$ horným ohraničením B, musí byť tiež horným ohraničením A.
Potom z vlastnosti ii) supréma vyplýva $\sup A \leq \sup B$.
b) Na základe vety 2.1.16 platí $\inf A \in R$, $\inf B \in R$.
Keďže $A \subset B$, potom $\inf B$ je dolné ohraničenie množiny A a platí $\inf B \leq \inf A$. ■

Veta 2.1.19.
Nech $A \subset R$, $B \subset R$ sú neprázdné množiny a nech pre všetky $a \in A$, $b \in B$ platí $a \leq b$. Potom je množina A zhora ohraničená, B zdola ohraničená a platí $\sup A \leq \inf B$.

Dôkaz.
Z predpokladov vety vyplýva, že každé $a \in A$ je dolným ohraničením množiny B.
To znamená, že B je zdola ohraničená, $\inf B \in R$ a pre každé $a \in A$ platí $a \leq \inf B$.
Je zrejmé, že $\inf B$ je horným ohraničením množiny A.
To znamená, že je A zhora ohraničená a platí $\sup A \leq \inf B$. ■

Niekedy sa môžeme stretnúť s definíciou supréma a infima reálnej množiny ekvivalentným spôsobom, ako je to uvedené v nasledujúcich vetách 2.1.20 a 2.1.21. V takto definovanej teórii sa naše definície supréma a infima stávajú vetami.

Veta 2.1.20.
Nech $A \subset R$, $A \neq 0$. Potom $\alpha \in R$ je suprémum množiny A práve vtedy, ak platí:
i') $\forall x \in A\colon\ x \leq \alpha$, ii') $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in A\colon\ \ \alpha - \varepsilon < x_0$.

Dôkaz.
Vlastnosť i) z definície supréma množiny je identická s vlastnosťou i').
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech $\alpha = \sup A$ a nech neplatí vlastnosť ii').
Potom existuje $\varepsilon_0 > 0$ také, že pre všetky $x_0 \in A$ platí nerovnosť $\alpha - \varepsilon_0 \geq x_0$.
To znamená, že $\alpha - \varepsilon_0$ je horné ohraničenie množiny A a platí $\alpha = \sup A \leq \alpha - \varepsilon$.
Z toho vyplýva $0 \leq -\varepsilon_0$, t. j. $\varepsilon_0 \leq 0$, čo je spor s predpokladom $\varepsilon_0 > 0$.
$PP_{\Leftarrow}$: Sporom. Nech platí ii') a neplatí vlastnosť ii) supréma.
Potom existuje horné ohraničenie $b_0 \in R$ množiny A, pre ktoré $b_0 < \alpha$, t. j. $\alpha - b_0 > 0$.
Ak zvolíme $\varepsilon_0 = \alpha - b_0$, potom existuje $x_0 \in A$, pre ktoré platí $\alpha - \varepsilon_0 < x_0$.
Z toho vyplýva $x_0 > \alpha - \varepsilon_0 = \alpha - (\alpha - b_0) = b_0$.
To je spor, pretože $x_0 \in A$ a b_0 je horné ohraničenie A. ■

Veta 2.1.21.
Nech $A \subset R$, $A \neq 0$. Potom $\beta \in R$ je infimum množiny A práve vtedy, ak platí:
i') $\forall x \in A\colon\ \beta \leq x$, ii') $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in A\colon\ x_0 < \beta + \varepsilon$.

Dôkaz.
Dôkaz je analogický ako dôkaz vety 2.1.20. ■

2.1.6 Niektoré ďalšie dôsledky axióm reálnych čísel

- **Rozšírená množina reálnych čísel**

Aj keď je množina reálnych čísel R nekonečná, všetky jej prvky sú konečné, pretože pod pojmom číslo rozumieme **konečné číslo**. To znamená, že počet prvkov množiny nemôžeme vyjadriť číslom. Preto má zmysel rozšíriť množinu R o prvky **mínus nekonečno** a (**plus**) **nekonečno**, ktoré označujeme symbolmi $-\infty$ a ∞. Túto množinu nazývame **rozšírená množina reálnych čísel** a značíme symbolom $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$.

Operácie sčítania, odčítania, násobenia, delenia a reláciu usporiadania $<$, ktoré sme definovali pre reálne čísla, môžeme rozšíriť aj pre prvky množiny R^*. Pre všetky $a \in R$ platí:
$$-\infty < \infty, \quad -\infty < a < \infty.$$
Pre všetky $a, b \in R$, $b > 0$ definujeme výrazy:
$$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad a \pm \infty = \pm\infty,$$

$$\pm\infty\cdot\infty=\pm\infty,\quad -\infty\cdot(-\infty)=\infty,\quad \pm b\cdot\infty=\pm\infty,\quad \pm b\cdot(-\infty)=\mp\infty,$$
$$\tfrac{a}{\pm\infty}=0,\quad \tfrac{\infty}{\pm b}=\pm\infty,\quad \tfrac{-\infty}{\pm b}=\mp\infty.$$

a nedefinujeme výrazy:[6]

$$\infty-\infty,\quad \pm\infty\cdot 0,\quad \tfrac{\pm\infty}{\infty},\quad \tfrac{\infty}{\pm\infty},\quad \tfrac{\pm\infty}{0},\quad \tfrac{a}{0}.$$

Poznámka 2.1.10.
Je zrejmé, že všetky axiómy zostávajú v platnosti aj v množine R^*. Ale uvažovať o ich platnosti má význam iba v prípade, keď všetky príslušné výrazy sú definované. Napríklad pre všetky $a\in R$ platí rovnosť $a-\infty=-\infty+a=-\infty$, ale nemá význam uvažovať o platnosti rovnosti $\infty-\infty=-\infty+\infty$.

Uvažujme množinu $A\subset R^*$, $A\neq\emptyset$. Ak je množina zhora ohraničená (konečným) reálnym číslom, potom na základe axiómy (AH) existuje $\alpha=\sup A\in R$. V opačnom prípade definujeme $\sup A=\infty$.

Ak je množina $A\subset R^*$, $A\neq\emptyset$ ohraničená zdola (konečným) reálnym číslom, potom na základe vety 2.1.16 existuje $\beta=\inf A\in R$. V opačnom prípade definujeme $\inf A=-\infty$.

Z týchto úvah vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Veta 2.1.22.
Pre každú neprázdnu množinu $A\subset R^*$ existuje $\inf A\in R^*$ a $\sup A\in R^*$.

Poznámka 2.1.11.
Ak $A=\emptyset$, potom každé $a\in R^*$ je horným a zároveň aj dolným ohraničením množiny $\emptyset$. To znamená, že najmenšie z horných ohraničení prázdnej množiny je $-\infty$ a najväčšie z jej dolných ohraničení je ∞, t. j. platí $\sup\emptyset=-\infty$, $\inf\emptyset=\infty$.

- **Intervaly**

Najčastejšími množinami, s ktorými sa stretávame v matematickej analýze sú intervaly a ich konečné, resp. nekonečné zjednotenia. Nech $a,b\in R$, $a<b$, potom **ohraničenými intervalmi s krajnými bodmi a a b** (**s ľavým krajným bodom a a pravým krajným bodom b**) nazývame množiny:

$\langle a\,;\,b\rangle=\{x\in R;\ a\leq x\leq b\}$, **uzavretý interval**,
$\langle a\,;\,b)=\{x\in R;\ a\leq x< b\}$, **zľava uzavretý a sprava otvorený interval**,[7]
$(a\,;\,b\rangle=\{x\in R;\ a< x\leq b\}$, **zľava otvorený a sprava uzavretý interval**,
$(a\,;\,b)=\{x\in R;\ a< x< b\}$, **otvorený interval**.

Ak I je ohraničený interval, potom **dĺžkou intervalu I** nazývame číslo $d(I)=b-a$.

Neohraničenými intervalmi s krajným bodom $a\in R$[8] nazývame množiny:

$(-\infty\,;\,a\rangle=\{x\in R;\ x\leq a\}$, $\langle a\,;\,\infty)=\{x\in R;\ a\leq x\}$,
$(-\infty\,;\,a)=\{x\in R;\ x< a\}$, $(a\,;\,\infty)=\{x\in R;\ a< x\}$.

Množinu R zvykneme zapisovať ako neohraničený interval $(-\infty\,;\,\infty)=\{x\in R\}=R$.

Poznámka 2.1.12.
Intervaly v zmysle predchádzajúcej definície nazývame **nedegenerované**.
Ak sa krajné body a, b rovnajú, potom môžeme písať:

$$\langle a\,;\,a\rangle=\{x\in R;\ a\leq x\leq a\}=\{a\},\quad \text{resp. } (a\,;\,a)=\{x\in R;\ a<x<a\}=\emptyset.$$

To znamená, že množiny $\{a\}$ a $\emptyset$ môžeme považovať za intervaly. Nazývame ich **degenerované intervaly**. Pokiaľ nebude povedané ináč, budeme pod pojmom interval rozumieť nedegenerovaný interval.

[6] Nazývajú sa **neurčité výrazy** a bližšie sa im venujeme na strane 268.
[7] Intervaly $\langle a\,;\,b)$ a $(a\,;\,b\rangle$ stručne nazývame **polouzavreté**, resp. **polootvorené**.
[8] S ľavým, resp. pravým krajným bodom a.

- **Princíp súvislosti**

Usporiadaná množina $M \neq \emptyset$ sa nazýva **husto usporiadaná**, ak pre všetky prvky $a, b \in M$, $a < b$ existuje prvok $c \in M$ taký, že $a < c < b$.

Veta 2.1.23.
Množina R je husto usporiadaná, t. j. pre všetky $a, b \in R$, $a < b$ existuje $c \in R$, že $a < c < b$.

Dôkaz.
Nech $a, b \in R$, $a < b$, potom stačí položiť napríklad $c = \frac{a+b}{2}$. ■

Poznámka 2.1.13.
Množina racionálnych čísel Q je tiež husto usporiadaná. Lenže z príkladu 2.1.2 vyplýva, že medzi dvomi racionálnymi číslami môžu existovať (a aj existujú) medzery, ktoré vypĺňajú iracionálne čísla. Geometricky si to môžeme predstaviť tak, že ak bude bod prebiehať číselnou osou iba po racionálnych číslach, potom jeho pohyb nebude „spojitý“ (súvislý).[9]

Predtým ako uvedieme priamku ako geometrický model množiny reálnych čísel, musíme sformulovať princíp súvislosti. V niektorých axiomatických teóriach reálnych čísel sa považuje za axiómu a nahrádza axiómu (AH). Vtedy sa nazýva **axióma súvislosti**.

Nech $M \neq \emptyset$ je husto usporiadaná. Množina $A \subset M$ sa nazýva **súvislá**, ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$, platí $\{x \in M\,;\, a \leq x \leq b\} \subset A$. Z toho vyplýva, že množina $A \subset R$ sa nazýva **súvislá**, ak pre všetky $a, b \in A$, $a < b$, platí $\langle a\,;\, b\rangle \subset A$.

Poznámka 2.1.14.
Z definície vyplýva, že každý interval v množine R je súvislá množina.
Množiny N, Z, Q, I a všetky ich podmnožiny nie sú súvislé.

Veta 2.1.24 (Princíp súvislosti).
Ak $A \subset R$ je súvislá množina a obsahuje aspoň dva rôzne body, potom A je interval.

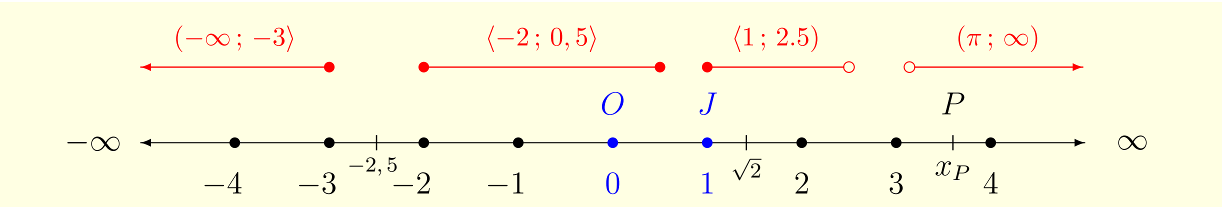
Dôkaz.
Sporom. Nech A je súvislá, obsahuje aspoň dva body a nie je interval.
Keďže A nie je interval, potom existujú $a, b \in A$, $c \notin A$ také, že $a < c < b$.
Keďže A je súvislá, potom $\langle a\,;\, b\rangle \subset A$. Lenže to znamená, že $c \notin R$.
V prípade $c \in R$ by na základe súvislosti platilo $c \in \langle a\,;\, b\rangle \subset A$, t. j. spor $c \in A$.
Označme $A_c = \{x \in R\,;\, x \leq c\}$. Je zrejmé, že $\sup A_c = c$.
Množina A_c je neprázdna, pretože $a \in A_c$ a je zhora ohraničená prvkom b.
Potom na základe (AH) platí $\sup A_c = c \in R$, čo je spor.
To znamená, že množina A je interval. ■

Teraz už môžeme reprezentovať množinu R priamkou. Zvoľme v rovine priamku p a na nej dva body O, J tak, aby vzdialenosť $|OJ| = 1$. Každému bodu $P \in p$ priradíme práve jedno reálne číslo x_P nasledujúcim spôsobom. Ak bod P leží na polpriamke OJ, potom mu priradíme číslo $x_P = |OP|$. Ak bod P neleží na polpriamke OJ, tak mu priradíme číslo $x_P = -|OP|$. Je zrejmé, že $x_O = 0$ a $x_J = 1$.

Takto definované zobrazenie je bijektívne zobrazenie množiny bodov priamky p do množiny reálnych čísel, ktoré zachováva reláciu usporiadania $<$. Priamku p nazývame **reálna číselná os**, bod O **nulový bod** a bod J **jednotkový bod** (obr. 2.1.1).[10]

[9] Z geometrie vieme, že jedinými súvislými podmnožinami priamky p sú priamka p, úsečka a polpriamka (vrátane alebo bez krajných bodov). V geometrii na priamke p chápeme súvislosť množiny tak, že s každými dvomi bodmi obsahuje aj úsečku medzi nimi.

[10] Na tejto reprezentácii je založená analytická geometria.



Obr. 2.1.1: Reálna číselná os.

- **Archimedov princíp a jeho dôsledky**

Archimedov princíp sa zvykne tiež nazývať Archimedova vlastnosť reálnych čísel a je dôležitým dôsledkom axiómy o najmenšom hornom ohraničení (AH). V niektorých teóriách sa Archimedov princíp spolu s Cantorovým princípom (veta 2.1.31) považujú za axiómy. V tomto prípade je axióma (AH) dokazovaná ako veta.

Veta 2.1.25 (Archimedov princíp).
Nech $a\in R$, $x\in R$, $x>0$, potom existuje $k\in Z$ také, že $kx \leq a < (k+1)x$.

Dôkaz.
Najprv dokážeme, že existuje $p\in Z$, pre ktoré platí $px \leq a$.
Sporom. Nech pre všetky $n\in Z$ platí $a < nx$.
To znamená, že $P=\{nx\,;\,n\in Z\}$ je zdola ohraničená číslom a a existuje $\beta=\inf P\in R$.
Potom existuje $n_0x\in A$, $n_0\in Z$ také, že platí:

$$\beta \leq n_0x < \beta + x, \qquad \text{t. j.} \;\; n_0x - x = (n_0-1)x < \beta.$$

Keďže $n_0-1\in Z$, potom $(n_0-1)x\in P$. To je spor s predpokladom $\beta=\inf P$.
To znamená, že a nie je dolným ohraničením P a existuje $p\in Z$ také, že $px\leq a$.

Analogicky existuje $q\in Z$, pre ktoré platí $a<qx$. Je zrejmé, že $p<q$.
Interval $\langle px\,;\,qx)$ rozdelíme pomocou čísel $p, p+1, \ldots, q$ na konečný počet intervalov

$$\langle px\,;\,(p+1)x)\,, \quad \langle (p+1)x\,;\,(p+2)x)\,, \quad \ldots, \quad \langle (q-1)x\,;\,qx)\,.$$

Bod a patrí do práve jedného z intervalov $\langle kx\,;\,(k+1)x)$, kde $k\in\{p, p+1, \ldots, q-1\}$. ■

Ak nahradíme vo vete 2.1.25 operáciu sčítania operáciou násobenia, dostaneme Archimedov princíp v multiplikatívnom tvare. Uvedieme ho bez dôkazu.

Veta 2.1.26 (Archimedov princíp v multiplikatívnom tvare).
Nech $x, a\in R$, $a>0$, $x>1$, potom existuje $k\in Z$ také, že $x^k \leq a < x^{k+1}$.

Príklad 2.1.4.
Nech $a\in R$, $a>0$, $A=\left\{\frac{a}{n}\,;\,n\in N\right\}$, potom $\inf A = 0$.

Riešenie.
Pre všetky $n\in N$ platí $\frac{a}{n}>0$. To znamená, že 0 je dolné ohraničenie a $\inf A\geq 0$.
Predpokladajme, že $\beta=\inf A>0$. Potom pre všetky $n\in N$ platí $\beta\leq\frac{a}{n}$.
Keďže $\beta>0$, $a>0$, potom existuje $m\in N$ také, že platí:

$$m\beta \leq a < (m+1)\beta, \qquad \text{t. j.} \;\; \tfrac{a}{m+1} < \beta.$$

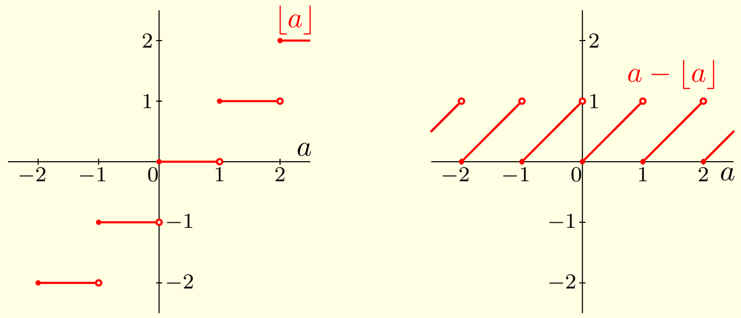
Spor s definíciou infima, pretože $m+1\in N$, $\frac{a}{m+1}\in A$. Takže $\inf A = 0$. ■

Ak položíme vo vete 2.1.25 $x = 1$, potom pre každé $a \in R$ existuje $k \in Z$ také, že platí:

$$k \leq a < k + 1.$$

Číslo k nazývame **celá časť čísla** a a označujeme $\lfloor a \rfloor$, resp. $[a]$, resp. Int a (z latinského *integer* — celý). Rozdiel $a - \lfloor a \rfloor$ nazývame **lomenou časťou čísla** $a \in R$ (viď obrázok 2.1.2).

Poznámka 2.1.15.
Existencia $\lfloor a \rfloor$ vyplýva tiež zo skutočnosti, že suprémum množiny $M = \{k \in Z\,;\ k \leq a\}$ je zároveň aj jej maximálnym prvkom. Je zrejmé, že $\sup M \in Z$ a platí $\sup M \leq a < \sup M + 1$, t. j. $\lfloor a \rfloor = \sup M$.



Obr. 2.1.2: Celá a lomená časť čísla a.

Veta 2.1.27.
Nech $a \in R$, $a > 0$, potom existuje $n \in N$ také, že $\frac{1}{n} < a$.

Dôkaz.
Keďže $a^{-1} > 0$, potom existuje $n \in N$ také, že $n - 1 \leq \frac{1}{a} < n$, t. j. $\frac{1}{n} < a$. ■

Veta 2.1.28.
Nech $a, b \in R$, $a < b$, potom existujú $s \in Q$, $v \in I$ také, že $s \in (a\,;\ b)$, $v \in (a\,;\ b)$.

Dôkaz.
Keďže $b - a > 0$, potom existuje $n \in N$, že $\frac{1}{n} < b - a$. Potom existuje $k \in Z$ také, že

$$k \leq na < k + 1, \quad \text{t. j. } \frac{k}{n} \leq a < \frac{k+1}{n} = \frac{k}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b.$$

To znamená, že stačí položiť $s = \frac{k+1}{n}$, $s \in Q$.
Keďže $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$, potom existuje $s_0 \in Q$ také, že platí $a - \sqrt{2} < s_0 < b - \sqrt{2}$.
Je zrejmé, že $a < s_0 + \sqrt{2} < b$, $v = s_0 + \sqrt{2} \notin Q$. ■

Medzi bodmi $a, b \in R$, $a < b$ existuje nekonečne veľa racionálnych čísel. Stačí predchádzajúcu vetu aplikovať na interval $(a\,;\ s)$ a nájsť racionálny bod $s_1 \in (a\,;\ s)$, potom nájsť racionálny bod $s_2 \in (a\,;\ s_1)$. Týmto spôsobom môžeme pokračovať do nekonečna. Je zrejmé, že medzi bodmi $a, b \in R$, $a < b$ existuje tiež nekonečne veľa čísel iracionálnych.

Veta 2.1.29.
Nech $r \in R$, potom $\sup \{s\,;\ s \in Q,\ s \leq r\} = r$.

Dôkaz.
Označme $A = \{s\,;\ s \in Q,\ s \leq r\}$. Pretože je r horné ohraničenie A, platí $\sup A \leq r$.
Nech $\sup A < r$, potom (veta 2.1.28) existuje $s_0 \in Q$ také, že $\sup A < s_0 < r$.
To je spor, pretože $s_0 \in A$. Z toho vyplýva $\sup A = r$. ■

Príklad 2.1.5.
Pre množinu racionálnych čísel $A = \{x \in Q\,;\ x \leq \sqrt{2}\}$ platí $\sup A = \sqrt{2} \notin Q$.
To znamená, že axióma (AH) v množine racionálnych čísel Q neplatí. ■

- **Dedekindov a Cantorov princíp**

Nech $A, B \subset R$ sú neprázdne množiny. Usporiadanú dvojicu množín $[A; B]$ nazývame **rez v množine R**, ak $A \cup B = R$ a pre všetky $a \in A$ a pre všetky $b \in B$ platí $a < b$.

Poznámka 2.1.16.
Pre množiny A a B platí $A \cap B = \emptyset$, t. j. $A = R - B = B'$ a $B = R - A = A'$.
Ak $A \cap B \neq \emptyset$, potom pre všetky $c \in A \cap B$, t. j. $c \in A$, $c \in B$ platí $c \not< c$. Čo je spor.

Veta 2.1.30 (Dedekindov princíp).
Nech $A, B \subset R$, $A \notin \emptyset$, $B \notin \emptyset$ a nech $[A; B]$ je rez v množine R. Potom buď existuje $\max A$ alebo existuje $\min B$, pričom obidve možnosti nemôžu nastať súčasne.

Dôkaz.
Z vety 2.1.19 vyplýva, že A je zhora ohraničená, B je zdola ohraničená, $\sup A \leq \inf B$.
Ak $\sup A < \inf B$. Potom existuje $d \in R$ také, že $\sup A < d < \inf B$. To znamená, že platí $d \notin A$, $d \notin B$, t. j. $d \notin (A \cup B) = R$. Dostali sme spor, t. j. $\sup A = \inf B$.

Ešte musíme dokázať, že sú množiny A a B súvislé. Dokážeme to sporom.
Nech nie je množina A súvislá, potom existujú $a_1, a_2 \in A$, $b \notin A$, t. j. $b \in B$ také, že $a_1 < b < a_2$. To znamená, že pre $b \in B$, $a_2 \in A$ platí $b < a_2$, čo je spor.
Ak nie je súvislá množina B, dôkaz je analogický. ■

Ak označíme $c = \sup A = \inf B$, potom je zrejmé, že rezmi v množine R môžu byť iba usporiadané dvojice $[(-\infty\,;\ c\rangle\,;(c\,;\ \infty)]$, resp. $[(-\infty\,;\ c)\,;\langle c\,;\ \infty)]$.

Veta 2.1.30 je ekvivalentná s princípom súvislosti a niekedy sa v literatúre formuluje ako axióma (namiesto axiómy o najmenšom hornom ohraničení, resp. princípu súvislosti) a nazýva sa **Dedekindova axióma**.

Veta 2.1.31 (Cantorov princíp vložených intervalov).
Nech $\{\langle a_n\,;\ b_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť uzavretých intervalov takých, že pre všetky $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí $\langle a_{n+1}\,;\ b_{n+1}\rangle \subset \langle a_n\,;\ b_n\rangle$. Potom existuje aspoň jedno $c \in R$, ktoré leží vo všetkých intervaloch $\langle a_n\,;\ b_n\rangle$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, t. j. pre ktoré platí:

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n\,;\ b_n\rangle\,.$$

Ak navyše pre každé $\varepsilon > 0$ existuje interval $\langle a_n\,;\ b_n\rangle$, taký že $b_n - a_n < \varepsilon$, potom taký bod $c \in R$ existuje práve jeden.

Dôkaz.
Označme $A = \{a_n\,;\ n \in N\}$, $B = \{b_n\,;\ n \in N\}$ množiny krajných bodov intervalov.
Nech $a \in A$, $b \in B$, potom existujú $j, k \in N$ také, že $a = a_j$, $b = b_k$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ak } j \leq k, \text{ potom platí } a_j \leq a_k \leq b_k \leq b_j. \\ \text{Ak } k \leq j, \text{ potom platí } a_k \leq a_j \leq b_j \leq b_k.\end{array}\right\} \text{ To znamená, že platí } a \leq b.$$

Potom z vety 2.1.19 vyplýva, že pre všetky $n \in N$ platí:

$$a_n \leq \sup A \leq \inf B \leq b_n, \qquad \text{t. j. } c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n\,;\ b_n\rangle = \langle \sup A\,;\ \inf B\rangle\,.$$

Jednoznačnosť čísla c.
Nech pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje interval $\langle a_n\, ;\, b_n\rangle$ taký, že

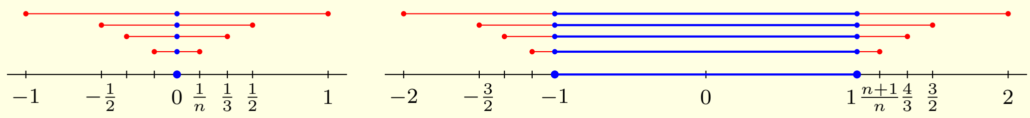
$$b_n - a_n < \varepsilon, \qquad \text{t. j.} \quad \inf B - \sup A \leq b_n - a_n < \varepsilon.$$

To znamená, že jednoprvková množina $D = \{\inf B - \sup A\}$ a množina $R^+ = \{\varepsilon > 0\}$ spĺňajú predpoklady vety 2.1.19 a platí:

$$\inf B - \sup A = \sup D \leq \inf R^+ = 0, \qquad \text{t. j.} \quad c = \inf B = \sup A. \ \blacksquare$$

Príklad 2.1.6.
Postupnosti $\{\langle -\frac{1}{n}\, ;\, \frac{1}{n}\rangle\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\langle -1-\frac{1}{n}\, ;\, 1+\frac{1}{n}\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňajú predpoklady vety 2.1.31 (obr. 2.1.3) a platí:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle -\tfrac{1}{n}\, ;\, \tfrac{1}{n}\rangle = \{0\}\,, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle -1-\tfrac{1}{n}\, ;\, 1+\tfrac{1}{n}\rangle = \langle -1\, ;\, 1\rangle\,. \ \blacksquare$$



Obr. 2.1.3: Obrázok k príkladu 2.1.6.

Cantorov princíp vložených intervalov sa v matematike využíva často. Postupnosť vložených intervalov sa spravidla konštruuje **metódou bisekcie**.[11] Pri tejto metóde sa nejaký interval $\langle a\, ;\, b\rangle$ postupne delí na dva rovnaké podintervaly. Z nich sa vyberie vhodný interval a ten sa opäť delí na dva podintervaly. Tento postup sa opakuje dovtedy, kým sa nedosiahne požadovaná presnosť.

- **Absolútna hodnota a signum čísla**

Nech $a \in R$, potom **absolútnou hodnotou čísla** a nazývame číslo $|a| = \max\{-a, a\}$. To znamená, že platí $|a| = a$, ak $a \geq 0$ a $|a| = -a$, ak $a \leq 0$ (viď obrázok 2.1.4).

Veta 2.1.32.
Pre všetky $a, b, c \in R$, $c \neq 0$ platí:

a) $|a| \geq 0$, $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$, b) $|-a| = |a|$, c) $|ab| = |a| \cdot |b|$,
d) $\left|\frac{a}{c}\right| = \frac{|a|}{|c|}$, e) $|a+b| \leq |a| + |b|$, f) $|a| - |b| \leq |a+b|$.

Dôkaz.
a), b), c), d) Dôkaz vyplýva priamo z definície.

e) Túto nerovnosť nazývame **trojuholníková nerovnosť**.
Zo vzťahov $\pm a \leq |a|$, $\pm b \leq |b|$ a z axióm (U2), (U4) vyplýva:

$$a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|, \qquad -a - b = -a + (-b) \leq |a| + (-b) \leq |a| + |b|\,.$$

To znamená, že $|a+b| = \max\{a+b, -a-b\} \leq |a| + |b|$.

f) Ak dosadíme do nerovnosti e) reálne čísla $-b$, $a+b$, dostaneme

$$|-b + (a+b)| \leq |-b| + |a+b| \ \Leftrightarrow\ |a| \leq |b| + |a+b|, \quad \text{t. j.} \ |a| - |b| \leq |a+b|\,. \ \blacksquare$$

[11] V literatúre sa môžeme stretnúť aj s názvom chytanie leva na púšti alebo hľadanie sovietskej ponorky vo švédskych výsostných vodách.

Poznámka 2.1.17.
Trojuholníkovu nerovnosť môžeme jednoducho rozšíriť pomocou matematickej indukcie na konečný počet sčítancov. Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, $n \in N$, potom platí:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|, \qquad \text{resp.} \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

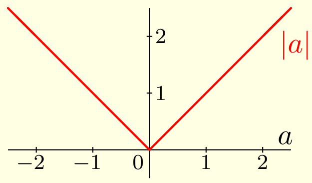
Veta 2.1.33.
Nech $a \in R$, $a > 0$, potom nerovnosť $|x| \leq a$ je ekvivalentná s nerovnosťou $-a \leq x \leq a$.

Dôkaz.
Keďže vykonané úpravy sú ekvivalentné, dokážeme $\mathrm{NP}_{\Rightarrow}$ a $\mathrm{PP}_{\Leftarrow}$ súčasne.

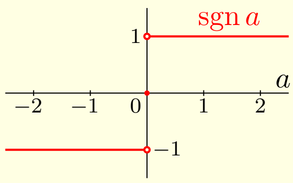
$$|x| = \max\{-x, x\} \leq a \;\Leftrightarrow\; -x \leq a,\ x \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x,\ x \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x \leq a. \blacksquare$$

Poznámka 2.1.18.
Z vety 2.1.33 vyplýva, že nerovnosť $|x| \leq a$ je ekvivalentná so vzťahom $x \in \langle -a\,;\, a\rangle$.
Výraz $|x - a|$ predstavuje z geometrického hľadiska vzdialenosť bodov a a x. Nech $a, \delta \in R$, $\delta > 0$ a nech $|x - a| \leq \delta$, potom platí:

$$|x - a| \leq \delta \iff -\delta \leq x - a \leq \delta \iff a - \delta \leq x \leq a + \delta \iff x \in \langle a - \delta\,;\, a + \delta\rangle.$$



Obr. 2.1.4: Absolútna hodnota čísla a.



Obr. 2.1.5: Signum čísla a.

Veta 2.1.34.
Množina $A \subset R$ je ohraničená práve vtedy, ak existuje $a \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $|x| \leq a$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Množina A je ohraničená, t. j. existujú čísla $c_1, c_2 \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $c_1 \leq x \leq c_2$. Potom stačí položiť $a = \max\{|c_1|, |c_2|\}$, pretože platia nerovnosti:

$$-\max\{|c_1|, |c_2|\} \leq c_1 \leq x, \qquad x \leq c_2 \leq \max\{|c_1|, |c_2|\}.$$

$PP_{\Leftarrow}$: Je zrejmé, že pre všetky $x \in A$ platí $-a \leq x \leq a$, t. j. A je ohraničená. $\blacksquare$

Poznámka 2.1.19.
Ak pre $a \in R$ označíme $a^+ = \max\{a,\ 0\}$, $a^- = \max\{-a,\ 0\}$, potom platí:

$$|a| = a^+ + a^-, \quad a = a^+ - a^-, \qquad a^+ = \tfrac{a+|a|}{2}, \quad a^- = \tfrac{a-|a|}{2}.$$

Nech $a \in R$, potom **signum**[12] **čísla** a definujeme vzťahom $\operatorname{sgn} a = \begin{cases} -1, & \text{pre } a < 0, \\ 0, & \text{pre } a = 0, \\ 1, & \text{pre } a > 0. \end{cases}$

[12] Z latinského *signum* — znamenie.

Veta 2.1.35.
Nech $a,b,c\in R$, $c\neq 0$, potom platí: a) $a=\operatorname{sgn} a\cdot|a|$, b) $\operatorname{sgn}(ab)=\operatorname{sgn} a\cdot\operatorname{sgn} b$, c) $|a|=\operatorname{sgn} a\cdot a$, d) $\operatorname{sgn}\frac{a}{c}=\operatorname{sgn} a\cdot\operatorname{sgn} c$.

Dôkaz.
a) Pre $a=0$ je rovnosť splnená triviálne. Pre $a\neq 0$ platí:

$$a>0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sgn} a\cdot|a|=1\cdot a=a, \qquad a<0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sgn} a\cdot|a|=-1\cdot(-a)=a.$$

b) Ak $a=0$ alebo $b=0$, rovnosť platí triviálne. Ak $a\neq 0\neq b$, potom z a) vyplýva:

$$\operatorname{sgn}(ab)=\frac{ab}{|ab|}=\frac{ab}{|a|\cdot|b|}=\frac{a}{|a|}\cdot\frac{b}{|b|}=\operatorname{sgn} a\cdot\operatorname{sgn} b.$$

c) Pre $a=0$ je rovnosť splnená triviálne. Pre $a\neq 0$ platí:

$$\operatorname{sgn} a\cdot a=\operatorname{sgn} a\cdot\operatorname{sgn} a\cdot|a|=(\operatorname{sgn} a)^2\cdot|a|=(\pm 1)^2\cdot|a|=|a|\,.$$

d) Pre $a=0$ je rovnosť splnená triviálne. Pre $a\neq 0$ platí:

$$\operatorname{sgn}\frac{a}{c}=\frac{\frac{a}{c}}{\left|\frac{a}{c}\right|}=\frac{a}{c}\cdot\frac{|c|}{|a|}=\frac{a}{|a|}\cdot\frac{|c|}{c}=\operatorname{sgn} a\cdot\operatorname{sgn} c. \blacksquare$$

- **Mocniny a odmocniny reálnych čísel**

Nech $a\in R$, $n\in N$, potom vzťah

$$a^n=\prod_{k=1}^{n} a=\underbrace{a\cdot a\cdots a\cdot a}_{n\text{-krát}}$$

sa nazýva **n-tá mocnina čísla a** (čítame a na n-tú). Číslo a nazývame **mocnenec** (**základ mocniny**), n nazývame **mocniteľ** (**exponent**). Pre $a\neq 0$ definujeme navyše mocniny $a^0=1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}=1/a^n$.

Poznámka 2.1.20.
Z predchádzajúcej definície vyplýva, že pre všetky $a\in R$, $a\neq 0$ platí $a^{-1}=\frac{1}{a}$, čo je v zhode s definíciou inverzného čísla k číslu a pri axióme (N4).

Poznámka 2.1.21.
S mocninou 0^0 je to trochu zložitejšie. Na základe predchádzajúceho môžeme definovať $0^0=1$, ale na základe definície výrazu $a^r=0^r=0$, $r\in R$ pre $a=0$ (str. 66) môžeme definovať[13] $0^0=0$.
V bežných prípadoch definujeme $0^0=1$. Pre použitie tejto definície existuje niekoľko závažných dôvodov. Medzi najdôležitejšie patrí binomická veta, pre ktorej všeobecnú platnosť je táto definícia nevyhnutná. Na druhej strane limita v tomto tvare patrí medzi neurčité výrazy a je potrebné ju individuálne vyčísľovať (str. 268).

Veta 2.1.36.
Nech $a,b\in R$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ a nech $m,n\in Z$, potom platí:
a) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, b) $(a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn}$, c) $a^m\cdot b^m=(ab)^m$.

Dôkaz.
Dôkaz vyplýva priamo z definície a z axióm (N1), (N2). $\blacksquare$

Poznámka 2.1.22.
Výraz a^{m^n} nemá zmysel, pretože nie je určené, či vyjadruje $(a^m)^n$ alebo $a^{(m^n)}$.
Posledné dva výrazy sa nemusia rovnať, napríklad $(2^2)^3=4^3=64$, $2^{(2^3)}=2^8=256$.

[13] Prvý pohľad je založený na funkcii $y=x^0=1$, $x\neq 0$ a druhý na funkcii $y=0^x=0$, $x>0$.

Dôsledok 2.1.36.a.
Nech $a, b \in R$, $a \neq 0 \neq b$, $m, n \in Z$, potom platí: a) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, b) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.

Dôkaz.
a) Platí $\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$.
b) Platí $\frac{a^m}{b^m} = a^m \cdot \frac{1}{b^m} = a^m b^{-m} = a^m b^{-1 \cdot m} = a^m (b^{-1})^m = (ab^{-1})^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$. ■

Veta 2.1.37.
Nech $a, b \in R$, $m, n \in Z$, potom platia nasledujúce implikácie:
a) $0 \leq a < b,\ 0 < n \implies 0 \leq a^n < b^n$,
b) $0 < a < b,\ n < 0 \implies 0 < b^n < a^n$,
c) $a \in (0\,;1),\ m < n \implies a^n < a^m$,
d) $a \in (1\,;\infty),\ m < n \implies a^m < a^n$.

Dôkaz.
a) Matematická indukcia.
Krok 1. Pre $n = 1$ platí vzťah triviálne, pretože $0 \leq a^1 = a < b = b^1$.
Krok 2. Nech platí daný vzťah pre $n = k - 1$, t. j. nech $0 \leq a^{k-1} < b^{k-1}$.
Potom z nerovnosti $0 \leq a < b$ a z vety 2.1.11 vyplýva:
$$0 \cdot 0 \leq a^{k-1} \cdot a < b^{k-1} \cdot b, \quad \text{t. j.} \quad 0 \leq a^k < b^k.$$
b) Keďže $-n \in N$, potom z a) vyplýva $0 < a^{-n} < b^{-n}$. Potom (veta 2.1.12) platí:
$$0 < (a^n)^{-1} = a^{-n} < b^{-n} = (b^n)^{-1}, \quad \text{t. j.} \quad 0 < b^n < a^n.$$
c) Keďže $0 < n - m$, potom $a^{n-m} < 1^{n-m} = 1$. Z toho na základe $a^m > 0$ vyplýva:
$$a^n = a^{n-m} \cdot a^m < 1 \cdot a^m = a^m.$$
d) Keďže $0 < n - m$, potom $1 = 1^{n-m} < a^{n-m}$. Z toho na základe $a^m > 0$ vyplýva:
$$a^m = 1 \cdot a^m < a^{n-m} \cdot a^m = a^n. \ ■$$

Nech $a \in R$, $a \geq 0$, $n \in N$, potom **n-tou odmocninou čísla a** nazývame také nezáporné číslo $x \in R_0^+$, pre ktoré platí $x^n = a$. Na označenie používame symbol $x = \sqrt[n]{a}$.

Druhú odmocninu čísla a zvykneme namiesto symbolu $\sqrt[2]{a}$ skrátene označovať $\sqrt{a}$. Z definície vyplýva, že $\sqrt[1]{a} = a$. Vzniká otázka, či n-tá odmocnina čísla $a \in R_0^+$ pre $n \in N$ existuje a či je jediná. Ako dokazuje veta 2.1.38 existuje práve jedna odmocnina $\sqrt[n]{a}$.

Veta 2.1.38.
Nech $a \in R_0^+$, $n \in N$, potom existuje práve jedno $x \in R_0^+$, pre ktoré platí $x^n = a$.

Dôkaz.
Pre $a = 0$ je tvrdenie zrejmé a taktiež pre $n = 1$ je tvrdenie zrejmé.
Nech $a > 0$, $n > 1$. Musíme ukázať existenciu a jednoznačnosť čísla $x = \sqrt[n]{a}$. Dokážeme, že platí $\sqrt[n]{a} = \sup A$, pričom $A = \{y \in R_0^+\,;\ y^n \leq a\}$.
Jednoznačnosť.
Sporom. Nech existujú $x_1, x_2 \in R$, $0 \leq x_1 < x_2$ také, že $x_1^n = x_2^n$.
Potom z vety 2.1.37 vyplýva $0 \leq x_1^n < x_2^n$. Čo je spor s predpokladom $x_1^n = x_2^n$.
Existencia.
Ukážeme, že A je neprázdna a zhora ohraničená. Označme $b = a(a+1)^{-1}$, potom platí:
$$\left.\begin{array}{l} 0<a<a+1 \xRightarrow{\text{veta 2.1.12}} 0<a(a+1)^{-1}=b<1 \xRightarrow{\text{veta 2.1.37}} b^n<b^1=b \\ 0<a \implies 0<a^2 \implies a<a^2+a=a(a+1) \implies b=a(a+1)^{-1}<a \end{array}\right\} \Rightarrow b^n<b<a.$$

To znamená, že $b\in A$, t. j. $A\neq\emptyset$.

Označme $c = a+1$, potom $c > a$, $c > 1$.
Nech $z\in R$, $c < z$ je ľubovoľné, potom $1 < z < z^n$, resp. $a < c < z < z^n$.
To znamená, že $z\notin A$, t. j. c je horné ohraničenie množiny A.

Označme $x = \sup A$. Je zrejmé, že $x^n \leq a$ a $(x+1)^n > a$.
Nech $x^n < a$, t. j. $x^n < a < (x+1)^n$. Potom platí $0 < a - x^n < (x+1)^n - x^n$.
Zvoľme $\varepsilon = \frac{a-x^n}{2[(x+1)^n - x^n]}$, potom na základe vety 2.1.12 platí:

$$0 < \frac{a-x^n}{(x+1)^n - x^n} < 1 \implies 0 < \varepsilon = \frac{1}{2}\cdot\frac{a-x^n}{(x+1)^n - x^n} < \frac{1}{2} < 1 \xrightarrow{\text{veta 2.1.37}} \varepsilon^k < 1.$$

Z toho ďalej vyplýva $x < x+\varepsilon$ a na základe binomickej vety dostávame:

$$\begin{aligned}(x+\varepsilon)^n &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\varepsilon + \binom{n}{2}x^{n-2}\varepsilon^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^n = \\ &= x^n + \varepsilon\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\varepsilon + \cdots + \binom{n}{n-1}x\varepsilon^{n-2} + \varepsilon^{n-1}\right] < \\ &< x^n + \varepsilon\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}x + 1\right] = \\ &= x^n + \varepsilon\left[x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}x + 1 - x^n\right] = x^n + \varepsilon[(x+1)^n - x^n] = \\ &= x^n + \frac{a-x^n}{2[(x+1)^n - x^n]}[(x+1)^n - x^n] = x^n + \frac{a-x^n}{2} = \frac{a}{2} + \frac{x^n}{2} < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.\end{aligned}$$

Z toho vyplýva $x+\varepsilon\in A$. Čo je spor s tým, že $x = \sup A$. To znamená, že $x^n = a$, t. j. $x = \sup A = \sqrt[n]{a}$. ■

Veta 2.1.39.
Nech $a\in R^+$, $m\in Z$, $n\in N$, potom platí $\sqrt[n]{a^m} = [\sqrt[n]{a}\,]^m$.

Dôkaz.
Označme $\sqrt[n]{a^m} = x$, $\sqrt[n]{a} = y$, potom $a^m = x^n$, $a = y^n$.
Z poslednej rovnosti vyplýva $a^m = (y^n)^m = (y^m)^n$. $\Big\} \implies a^m = x^n = (y^m)^n$.
Z toho na základe jednoznačnosti n-tej odmocniny vyplýva $\sqrt[n]{a^m} = x = y^m$.
Zo vzťahu $\sqrt[n]{a} = y$ vyplýva $[\sqrt[n]{a}\,]^m = y^m$. To znamená $\sqrt[n]{a^m} = x = y^m = [\sqrt[n]{a}\,]^m$. ■

Poznámka 2.1.23.
Nech $n\in N$ je párne, t. j. $n = 2k$, $k\in N$, potom pre všetky $a\in R$ platí $a^n \geq 0$. Takže má zmysel výraz $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{|a^n|} = \sqrt[n]{|a\cdots a|} = \sqrt[n]{|a|\cdots|a|} = \sqrt[n]{|a|^n} = |a|$.
Nech $n\in N$ je nepárne, t. j. $n = 2k+1$, $k\in N$, potom pre všetky $a\in R$, $a < 0$ platí $a^n < 0$. To znamená, že rovnica $x^n = a$ má práve jedno riešenie $x = -\sqrt[n]{|a|} = -\sqrt[n]{-a}$.

Na základe poznámky 2.1.23 definujeme pre všetky $a\in R$, $a < 0$ a pre $n\in N$ nepárne **n-tú odmocninu zo záporného čísla a** vzťahom $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} = -\sqrt[n]{-a}$.

Poznámka 2.1.24.
Ako sme ukázali, nezáporné reálne číslo a má práve jednu n-tú odmocninu.
Toto tvrdenie, ale neplatí v množine všetkých komplexných čísel C. Uvažujme napríklad číslo 1. V obore R platí, že $\sqrt{1} = \sqrt[4]{1} = 1$. V množine C sú druhé odmocniny dve, t. j. druhá odmocnina je dvojprvková množina $\sqrt{1} = \{-1, 1\}$. Štvrté odmocniny v C sú štyri, t. j. $\sqrt[4]{1} = \{-1, 1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.

Nech $a\in R$, $a > 0$ a nech s je racionálne číslo ($s\in Q$), pričom $s = \frac{m}{n}$, kde $m\in Z$, $n\in N$. Potom **s-tú mocninu čísla $a > 0$** definujeme vzťahom $a^s = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Ak $a = 0$, potom pre všetky $s\in Q^+ = \{x\in Q\,;\, x > 0\}$ definujeme $0^s = 0$.

Poznámka 2.1.25.
Z predchádzajúcej definície vyplýva, že pre $a \in R_0^+$ platí $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Musíme ale ukázať, že predchádzajúca definícia je korektná, to znamená, že a^s nezávisí od vyjadrenia s. Tento problém rieši veta 2.1.40.

Veta 2.1.40.
Nech $a \in R^+$, $s \in Q$ a nech $s = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, kde $m, p \in Z$, $n, q \in N$, potom $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$.

Dôkaz.
Z predpokladov a vety 2.1.4 vyplýva, že platí $mq = np$ a teda aj $a^{mq} = a^{np}$.
Označme $x = \sqrt[n]{a^m}$, $y = \sqrt[q]{a^p}$, potom $x = y$, t. j. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$ vyplýva zo vzťahov:

$$\left.\begin{array}{l} x^n = a^m \;\Rightarrow\; (x^n)^q = (a^m)^q \;\Rightarrow\; x^{nq} = a^{mq} \\ y^q = a^p \;\Rightarrow\; (y^q)^n = (a^p)^n \;\Rightarrow\; y^{nq} = a^{np} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; x^{nq} = y^{nq} \xRightarrow{\text{veta 2.1.38}} x = y. \blacksquare$$

Vety 2.1.36 a 2.1.37 platia aj v prípade, keď exponenty sú racionálne čísla (vety 2.1.41 a 2.1.42) a tiež v prípade, keď exponenty sú reálne čísla (vety 2.1.43 a 2.1.45).

Veta 2.1.41.
Nech $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$ a nech $s, t \in Q$, potom platí:

a) $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$, b) $(a^s)^t = (a^t)^s = a^{st}$, c) $a^s \cdot b^s = (ab)^s$.

Dôkaz.
Nech $s = mn^{-1}$, $t = pq^{-1}$, kde $m, p \in Z$, $n, q \in N$.
Označme $x = a^s$, $y = a^t$, $z = b^s$, potom $x^n = a^m$, $y^q = a^p$, $z^n = b^m$.

a) $$\left.\begin{array}{l} x^n = a^m \Rightarrow (x^n)^q = (a^m)^q \Rightarrow x^{nq} = a^{mq} \\ y^q = a^p \Rightarrow (y^q)^n = (a^p)^n \Rightarrow y^{nq} = a^{np} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; (xy)^{nq} = x^{nq}y^{nq} = a^{mq}a^{np} = a^{mq+np}.$$

Z toho vyplýva $xy = a^{\frac{mq+np}{nq}}$, t. j. $a^s a^t = xy = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{s+t}$.

b) Vyplýva z vety 2.1.36 a z vety 2.1.39.

c) $$\left.\begin{array}{l} x^n = a^m \\ z^n = b^m \end{array}\right\} \Rightarrow x^n z^n = a^m b^m \Rightarrow (xz)^n = (ab)^m \Rightarrow xz = (ab)^{\frac{m}{n}} \Rightarrow a^s b^s = xz = (ab)^s. \blacksquare$$

Veta 2.1.42.
Nech $a, b \in R$, $s, t \in Q$, potom platia nasledujúce implikácie:

a) $0 < a < b,\ 0 < s \implies 0 < a^s < b^s$, b) $0 < a < b,\ s < 0 \implies 0 < b^s < a^s$,
c) $a \in (0\,;1),\ s < t \implies a^t < a^s$, d) $a \in (1\,;\infty),\ s < t \implies a^s < a^t$.

Dôkaz.
Nech $s = mn^{-1}$, $t = pq^{-1}$, kde $m, p \in Z$, $n, q \in N$.
a) Označme $x = \sqrt[n]{a}$, $y = \sqrt[n]{b}$, t. j. $a = x^n$, $b = y^n$.
Ak $x \geq y$, potom $a = x^n \geq y^n = b$. To je spor a znamená, že $0 < \sqrt[n]{a} = x < y = \sqrt[n]{b}$.
Potom pre $m \in Z$, $m > 0$ na základe vety 2.1.37 platí:

$$0 < a^s = (\sqrt[n]{a}\,)^m = x^m < y^m = (\sqrt[n]{b}\,)^m = b^s.$$

b) $s < 0 \;\Rightarrow\; -s > 0 \xRightarrow{\text{a)}} 0 < a^{-s} < b^{-s} \;\Rightarrow\; 0 < (a^s)^{-1} < (b^s)^{-1} \xRightarrow{\text{veta 2.1.12}} 0 < b^s < a^s$.

c) Ak $nq = 1$, t. j. $n = q = 1$, potom $s, t \in Z$ a tvrdenie vyplýva z vety 2.1.37.

Nech $nq \neq 1$, t. j. $1 < nq$. Potom $0 < (nq)^{-1}$ na základe časti a) platí:
$$0 < a < 1, \quad \text{t. j.} \quad 0 < \sqrt[nq]{a} = a^{\frac{1}{nq}} < 1^{\frac{1}{nq}} = \sqrt[nq]{1} = 1.$$
Zo vzťahu $mn^{-1} = s < t = pq^{-1}$, t. j. $mq < np$ na základe vety 2.1.37 c) vyplýva:
$$(\sqrt[nq]{a})^{np} < (\sqrt[nq]{a})^{mq}, \quad \text{t. j. } a^t = a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{nq}} < a^{\frac{mq}{nq}} = a^{\frac{m}{n}} = a^s.$$
d) $1 < a \;\Rightarrow\; 0 < a^{-1} < 1 \;\overset{\text{c)}}{\Longrightarrow}\; (a^{-1})^t < (a^{-1})^s \;\Rightarrow\; a^{-t} < a^{-s} \;\xrightarrow{\text{veta 2.1.12}}\; a^s < a^t.$ ■

Mocninu čísla $a \in R_0^+$ s reálnym exponentom r $(r \in R)$ definujeme nasledovne:
$$a^r = \begin{cases} \sup\{a^s;\, s \in Q,\ s \le r\} & \text{pre } a \in (1;\infty), \\ (a^{-1})^{-r} = (\frac{1}{a})^{-r} & \text{pre } a \in (0;1), \end{cases} \qquad a^r = \begin{cases} 1^r = 1 & \text{pre } a = 1, \\ 0^r = 0 & \text{pre } a = 0,\ r > 0. \end{cases}$$

Poznámka 2.1.26.
Uvedená definícia je založená na skutočnosti, že pre $a \in (1;\infty)$, $s, t \in Q$, $s < t$ platí nerovnosť $a^s < a^t$ a že každé $r \in R$ sa dá vyjadriť v tvare $r = \sup\{s;\, s \in Q,\ s \le r\}$.

Poznámka 2.1.27.
Pre $a \in (1;\infty)$ môžeme tiež mocninu definovať vzťahom $a^r = \inf\{a^s;\, s \in Q,\ s \ge r\}$.
Pre $a \in (0;1)$ vzťahom $a^r = \sup\{a^s;\, s \in Q,\ s \ge r\}$, resp. $a^r = \inf\{a^s;\, s \in Q,\ s \le r\}$.

Veta 2.1.43.
Nech $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$ a nech $r, u \in R$, potom platí:
a) $a^r \cdot a^u = a^{r+u}$, b) $(a^r)^u = (a^u)^r = a^{ru}$, c) $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.

Dôkaz.
a) Pre $a = 1$ vzťah platí triviálne.

Ak $a > 1$, potom $a^r = \sup\{a^s;\, s \in Q,\ s \le r\}$, $a^u = \sup\{a^t;\, t \in Q,\ t \le u\}$.
Nech $s, t \in Q$, $s \le r$, $t \le u$, potom
$$s + t \le r + u,\ a^s \le a^r,\ a^t \le a^u, \quad a^{s+t} = a^s a^t \le a^r a^u.$$
Potom pre všetky $k \in Q$, $k \le r + u$ platí $a^k \le a^r a^u$. Potom (veta 2.1.19) platí:
$$a^{r+u} = \sup\{a^k;\, k \in Q,\ k \le r+u\} \le \inf\{a^r a^u\} = a^r a^u.$$
Nech $a^{r+u} < a^r a^u$, potom na základe $a^r > 0$ platí:
$$a^{r+u}(a^r)^{-1} < a^r a^u (a^r)^{-1} = a^u.$$
Keďže je množina Q husto usporiadaná a $a^u = \sup\{a^t;\, t \in Q,\ t \le u\}$,
potom existuje $t_0 \in Q$, $t_0 \le u$ také, že platí:
$$a^{r+u}(a^r)^{-1} < a^{t_0} < a^u, \quad \text{t. j.} \quad a^{r+u}a^{-t_0} < a^r.$$
Podobne existuje $s_0 \in Q$, $s_0 \le r$ také, že platí $a^{r+u}a^{-t_0} < a^{s_0} < a^r$.
Z toho vyplýva spor $a^{r+u} < a^{s_0}a^{t_0} = a^{s_0+t_0}$,
pretože na základe vzťahu $s_0 + t_0 \le r + u$ pre $s_0, t_0 \in Q$ platí:
$$a^{s_0+t_0} \in \{a^k;\, k \in Q,\ k \le r+u\}, \quad \text{t. j.} \quad a^{s_0+t_0} \le a^{r+u}.$$
To znamená, že pre $a > 1$, $r, u \in R$ platí $a^{r+u} = a^r a^u$.

Ak $a < 1$, t. j. $a^{-1} > 1$, potom
$$a^r b^r = (a^{-1})^{-r}(b^{-1})^{-r} = (a^{-1}b^{-1})^{-r} = [(ab)^{-1})]^{-r} = ab^r.$$

b) Pre $a = 1$ platí daný vzťah triviálne.

Ak $a > 1$, potom $a^r > 1$, $a^r = \sup\{a^s;\, s \in Q,\ s \le r\}$, $(a^r)^u = \sup\{(a^r)^t;\, t \in Q,\ t \le u\}$.

Nech $s, t \in Q$, $s \leq r$, $t \leq u$, potom platí:
$$a^s \leq a^r,\ (a^r)^t \leq (a^r)^u, \qquad a^{st} = (a^s)^t \leq (a^r)^t \leq (a^r)^u.$$
To znamená, že platí:
$$a^{ru} = \sup\left\{a^{st};\ st \in Q,\ st \leq ru\right\} = \sup\left\{a^k;\ k \in Q,\ k \leq ru\right\} \leq (a^r)^u.$$
Nech $a^{ru} < (a^r)^u$, potom existuje $t_0 \in Q$, $t_0 \leq u$, pre ktoré platí $a^{ru} < (a^r)^{t_0} < (a^r)^u$.
Z toho vyplýva na základe vety 2.1.42, že platí:
$$a^{\frac{ru}{t_0}} < (a^r)^{\frac{t_0}{t_0}} = a^r.$$
Potom existuje $s_0 \in Q$, $s_0 \leq r$, pre ktoré platí:
$$a^{\frac{ru}{t_0}} < a^{s_0} < a^r, \quad \text{t. j. } a^{ru} < a^{s_0 t_0}.$$
Posledná nerovnosť predstavuje spor, pretože zo vzťahu $s_0 t_0 \leq ru$ vyplýva:
$$a^{s_0 t_0} \in \left\{a^k;\ k \in Q,\ k \leq ru\right\}, \quad \text{t. j. } a^{s_0 t_0} \leq a^{ru}.$$
To znamená, že $a^{ru} = (a^r)^u$. Tým je zároveň dokázaná aj rovnosť $(a^u)^r = a^{ur} = a^{ru}$.

Ak $a < 1$, potom $a^{-1} > 1$ a platí $(a^u)^r = [(a^{-1})^{-u}]^r = (a^{-1})^{-ur} = a^{ur}$.

c) Pre $a = 1$ alebo $b = 1$ je daný vzťah splnený triviálne.

Nech $a > 1$, $b > 1$, potom $a^r = \sup\{a^s;\ s \in Q,\ s \leq r\}$, $b^r = \sup\{b^s;\ s \in Q,\ s \leq r\}$.
Nech $s \in Q$, $s \leq r$, potom
$$a^s \leq a^r,\ b^s \leq b^r, \quad \text{t. j. } (ab)^s = a^s b^s \leq a^r b^r.$$
Z toho vzplýva $(ab)^r = \sup\{(ab)^s;\ s \in Q,\ s \leq r\} \leq a^r b^r$.
Nech $(ab)^r < a^r b^r$, potom platí $(ab)^r (b^r)^{-1} < a^r$.
Potom existuje $s_0 \in Q$, $s_0 \leq r$ také, že
$$(ab)^r (b^r)^{-1} < a^{s_0} < a^r, \quad \text{t. j. } (ab)^r a^{-s_0} < b^r.$$
Analogicky existuje $t_0 \in Q$, $t_0 \leq r$ také, že
$$(ab)^r a^{-s_0} < b^{t_0} < b^r, \quad \text{t. j. } (ab)^r < a^{s_0} b^{t_0}.$$
Označme $k = \max\{s_0, t_0\}$, potom $k \in Q$, $k \leq r$ a platí:
$$(ab)^r < a^{s_0} b^{t_0} \leq a^k b^k = (ab)^k.$$
Lenže z nerovnosti $k \leq ru$ vyplýva $(ab)^k \in \{(ab)^s;\ s \in Q,\ s \leq r\}$, t. j. $(ab)^k \leq (ab)^r$.
Dostali sme spor, z ktorého vyplýva $(ab)^r = a^r b^r$.

Ak $a < 1$, $b < 1$, potom $a^{-1} > 1$, $b^{-1} > 1$ a platí:
$$a^r b^r = (a^{-1})^{-r} (b^{-1})^{-r} = (a^{-1} b^{-1})^{-r} = [(ab)^{-1}]^{-r} = (ab)^r.$$

Ak $a > 1$, $b < 1$, potom môžu nastať tri prípady. Prvé dva dokážeme sporom.
Ak $ab > 1$, $(ab)^r \neq a^r b^r$. Potom $(ab)^r (b^{-1})^r \neq a^r b^r (b^{-1})^r$. Z toho vyplýva spor:
$$a^r = (abb^{-1})^r = (ab)^r (b^{-1})^r \neq a^r b^r (b^{-1})^r = a^r b^r b^{-r} = a^r.$$
Ak $ab < 1$, $a^r b^r \neq (ab)^r$. Potom $a^r b^r [(ab)^{-1}]^r \neq (ab)^r [(ab)^{-1}]^r$. Z toho vyplýva spor:
$$1 = b^r b^{-r} = b^r (b^{-1})^r = b^r [a(ab)^{-1}]^r = a^r b^r [(ab)^{-1}]^r \neq (ab)^r [(ab)^{-1}]^r = (ab)^r (ab)^{-r} = 1.$$
Ak $ab = 1$, potom $b = a^{-1}$. Z toho vyplýva $(ab)^r = 1^r = 1 = a^r a^{-r} = a^r (a^{-1})^r = a^r b^r$. ■

Veta 2.1.44.
Nech $a, b \in R$, $0 < a < 1 < b$, $r \in R$ potom platí:

a) $0 < r \;\Rightarrow\; a^r < 1 < b^r$, b) $r < 0 \;\Rightarrow\; b^r < 1 < a^r$.

Dôkaz.
a) Nech $s \in Q$, $0 < s \leq r$, potom na základe vety 2.1.42 platí $1 < b^s$.
Keďže $b^r = \sup\{b^s;\ s \in Q,\ s \leq r\}$, potom pre všetky $s \in Q$, $0 < s \leq r$ platí $1 < b^s \leq b^r$.

Z predpokladu $a < 1$, t. j. $1 < a^{-1}1$, vyplýva:

$$1 < (a^{-1})^r = a^{-r} = (a^r)^{-1}, \quad \text{t. j. } a^r < 1.$$

b) $r < 0 \ \Rightarrow\ 0 < -r \ \Rightarrow\ (a^r)^{-1} = a^{-r} < 1 < b^{-r} = (b^r)^{-1} \ \Rightarrow\ b^r < 1 < a^r.$ ■

Veta 2.1.45.
Nech $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$, $r, u \in R$, potom platia nasledujúce implikácie:

a) $a < b,\ 0 < r \implies a^r < b^r$,
b) $a < b,\ r < 0 \implies b^r < a^r$,
c) $1 < a,\ r < u \implies a^r < a^u$,
d) $a < 1,\ r < u \implies a^u < a^r$.

Dôkaz.
a) $0 < a < b \Rightarrow 0 < 1 < \frac{b}{a},\ 0 < a^r \xrightarrow{\text{veta 2.1.44}} 1 < (\frac{b}{a})^r = \frac{b^r}{a^r} \Rightarrow a^r < a^r \frac{b^r}{a^r} = b^r.$

b) $r < 0 \ \Rightarrow\ 0 < -r \ \Rightarrow\ 0 < a^{-r} < b^{-r} \ \Rightarrow\ 0 < b^r < a^r.$

c) Označme $A_r = \{a^s\,;\ s \in Q,\ s \leq r\}$, $A_u = \{a^s\,;\ s \in Q,\ s \leq u\}$.
Potom na základe $r < u$ a vety 2.1.18 platí:

$$A_r \subset A_u, \qquad a^r = \sup A_r \leq \sup A_u = a^u.$$

Potom existujú $s_1, s_2 \in Q$ také, že $r \leq s_1 < s_2 \leq u$. Z toho vyplýva:

$$a^{s_1} < a^{s_2}, \quad \text{t. j. } a^r = \sup A_r \leq a^{s_1} < a^{s_2} \leq \sup A_u = a^u.$$

d) $a < 1 \ \Rightarrow\ 1 < a^{-1} \ \Rightarrow\ a^{-r} = (a^{-1})^r < (a^{-1})^u = a^{-u} \ \Rightarrow\ a^u < a^r.$ ■

Poznámka 2.1.28.
Podobne ako v poznámke **??** definujeme mocninu $(\pm\infty)^n$ s celočíselným exponentom.
Nech $n \in N$, $m \in Z$, potom definujeme $\infty^n = \infty$, $\infty^{-n} = 0$, $(-\infty)^m = (-1)^m \infty^m$.
Výrazy ∞^0, $(-\infty)^0$ nedefinujeme.

- **Nerovnice**

V mnohých prípadoch sa stáva, že je množina reálnych čísel vyjadrená implicitne ako množina čísel, ktoré spĺňajú nejakú nerovnicu alebo sústavu nerovníc. Takúto množinu nazývame **množina riešení** danej nerovnice, resp. sústavy nerovníc. Často býva riešením týchto nerovníc interval, prípadne zjednotenie intervalov. Pri riešení nerovníc vychádzame z axióm a ich dôsledkov. Tieto nerovnice sa snažíme pomocou ekvivalentných úprav previesť na nerovnice s rovnakými množinami riešení, ktoré vieme nájsť. S riešením nerovníc sa čitateľ už určite stretol. V tejto časti uvedieme niekoľko jednoduchých príkladov.

Príklad 2.1.7.
Určte množinu D všetkých $x \in R$, pre ktoré platí $x^2 + x - 6 < 0$.

Riešenie.
Je zrejmé, že $D = \{x \in R\,;\ x^2 + x - 6 < 0\}$. Lenže toto vyjadrenie o D veľa nehovorí.
Z vety 2.1.9 vyplýva, že vzťah $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) < 0$ platí iba v prípade, keď jeden z činiteľov $x - 2$, $x + 3$ je záporný a druhý kladný. To znamená, že musí platiť

$$x - 2 < 0,\ x + 3 > 0, \qquad \text{resp.} \quad x - 2 > 0,\ x + 3 < 0.$$

Predchádzajúce nerovnosti môžeme zapísať v tvare množín, resp. intervalov takto:

$$x - 2 < 0 \ \Leftrightarrow\ x < 2 \ \Leftrightarrow\ x \in (-\infty\,;\, 2), \quad x + 3 > 0 \ \Leftrightarrow\ -3 < x \ \Leftrightarrow\ x \in (-3\,;\, \infty),$$
$$x - 2 > 0 \ \Leftrightarrow\ 2 < x \ \Leftrightarrow\ x \in (2\,;\, \infty), \quad x + 3 < 0 \ \Leftrightarrow\ x < -3 \ \Leftrightarrow\ x \in (-\infty\,;\, -3).$$

Z toho vyplýva $x \in (-\infty\,;\, 2) \cap (-3\,;\, \infty) = (-3\,;\, 2)$, resp. $x \in (2\,;\, \infty) \cap (-\infty\,;\, -3) = \emptyset$.
To znamená, že $D = (-3\,;\, 2) \cup \emptyset = (-3\,;\, 2)$.

Iné riešenie.
Táto úloha sa dá riešiť jednoduchšie pomocou vlastností spojitých funkcií, žiaľ na takýto spôsob riešenia ešte nemáme vybudovaný dostatočný matematický aparát.
Napriek tomu toto riešenie pre ilustráciu uvedieme.
Ľavá strana nerovnice $f(x) = x^2 + x - 6$, $x \in R$ je spojitá kvadratická funkcia s nulovými bodmi -3 a 2. Z toho vyplýva, že na intervaloch $(-\infty\,;\,-3)$, $(-3\,;\,2)$ a $(2\,;\,\infty)$ nemení funkčná hodnota $f(x)$ znamienko (je buď kladná alebo záporná). Takže stačí vybrať po jednom ľubovoľnom bode z uvedených intervalov a vypočítať príslušné funkčné hodnoty.
Platí $f(-5) = 56 > 0$, $f(0) = -6 < 0$, $f(5) = 24 > 0$. Takže $D = (-3\,;\,2)$. ■

Príklad 2.1.8.
Určte množinu $D = \{x \in R\,;\, |x| - |x-2| < 0\}$.

Riešenie.
Množinu R rozdelíme bodmi 0 a 2 na tri intervaly $(-\infty\,;\,0\rangle$, $\langle 0\,;\,2\rangle$, $\langle 2\,;\,\infty)$ a na každom z nich vypočítame danú nerovnicu. Označme $d = |x| - |x-2|$. Potom platí:

$$(-\infty\,;\,0\rangle: \quad d = -x - (2-x) = -2 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty\,;\,0\rangle\,.$$
$$\langle 0\,;\,2\rangle: \quad d = x - (2-x) = 2x - 2 < 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in \langle 0\,;\,2\rangle \cap (-\infty\,;\,1) = \langle 0\,;\,1)\,.$$
$$\langle 2\,;\,\infty): \quad d = x - (x-2) = 2 < 0 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Z toho vyplýva $D = (-\infty\,;\,0\rangle \cup \langle 0\,;\,1) \cup \emptyset = (-\infty\,;\,1)$. ■

Príklad 2.1.9.
Nech $a, r \in R$, $r > 0$ sú dané čísla. Určte množinu $D = \{x \in R\,;\, |x-a| \le r\}$.

Riešenie.
Predpokladajme najprv, že $x - a \le 0$, t. j. $x \le a$, resp. $x \in (-\infty\,;\,a\rangle$.
To znamená, že je daná nerovnica ekvivalentná s nerovnicou $a - x \le r$, t. j. $a - r \le x$.
Jej riešením na množine R je interval $x \in (a-r\,;\,\infty)$ a riešením na intervale $(-\infty\,;\,a\rangle$ je množina $(-\infty\,;\,a\rangle \cap (a-r\,;\,\infty) = (a-r\,;\,a\rangle$.
Ak $x - a \ge 0$, potom $x \in \langle a\,;\,\infty)$ a $|x-a| = x - a \le r$, t. j. $x \le a + r$.
Riešením poslednej nerovnice je interval $\langle a\,;\,\infty) \cap (\infty\,;\,a+r) = \langle a\,;\,a+r)$.
Z predchádzajúceho vyplýva, že $D = (a-r\,;\,a\rangle \cup \langle a\,;\,a+r) = \langle a-r\,;\,a+r\rangle$.

Iné riešenie.
Z geometrického hľadiska predstavuje výraz $|x-a|$ vzdialenosť bodov x a a.
Z toho vyplýva, že nerovnosť $|x-a| \le r$ reprezentuje množinu bodov x, ktorých vzdialenosť od bodu a je menšia alebo rovná číslu r.
Na číselnej osi je to úsečka so stredom v bode a, dĺžkou $2r$ a krajnými bodmi $a-r$, $a+r$.
Z toho vyplýva $D = \{x \in R\,;\, |x-a| \le r\} = \langle a-r\,;\,a+r\rangle$. ■

Poznámka 2.1.29.
Obdobným postupom ako v príklade 2.1.9 dostaneme:

$$\{x \in R\,;\, |x-a| < r\} = (a-r\,;\,a+r)\,,$$
$$\{x \in R\,;\, |x-a| > r\} = R - \{x \in R\,;\, |x-a| \le r\} = (-\infty\,;\,a-r) \cup (a+r\,;\,\infty)\,,$$
$$\{x \in R\,;\, |x-a| \ge r\} = R - \{x \in R\,;\, |x-a| < r\} = (-\infty\,;\,a-r\rangle \cup \langle a+r\,;\,\infty)\,.$$

Cvičenia

2.1.1. Nech $a \in Q$, $b \in I$, potom $(a+b) \in I$. Dokážte.

2.1.2. Nech $a, b \in Q$, $\sqrt{ab} \in I$, potom $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \in I$. Dokážte.

2.1.3. Dokážte, že nasledujúce čísla sú iracionálne:
a) $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, c) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, d) $\sqrt{15}$, e) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, f) $\sqrt{5}$.

2.1.4. Nech $s_1, s_2, \ldots, s_n \in Q$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Q$, $n \in N$, pričom $\sqrt{n} \notin Q$. Dokážte, že sa dá súčin $(s_1 + t_1\sqrt{n})(s_2 + t_2\sqrt{n}) \cdots (s_n + t_n\sqrt{n})$ vyjadriť v tvare $(s + t\sqrt{n})$, kde $s, t \in N$.

2.1.5. Dokážte dôsledky 2.1.8.a, 2.1.9.a a), b), c), d), e), f), g), 2.1.10.a a), b), c), d).

2.1.6. Dokážte dôsledky 2.1.11.a, 2.1.11.b a), b), c), d), 2.1.11.c a), b), 2.1.12.a.

2.1.7. Dokážte, že pre $a, b \in R$ platia nasledujúce tvrdenia:
a) $a < b < -1 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$, c) $a > b,\ b < -1 \;\Rightarrow\; \frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}$,
b) $a > b > 0 \;\Rightarrow\; \frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}$, b) $a > 0,\ b > 0 \;\Rightarrow\; 2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

2.1.8. Dokážte, že pre $a, b, c \in R$ platia nasledujúce tvrdenia:
a) $a \leq b,\ 0 < b,\ 0 < c \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, b) $a > b,\ 0 < b,\ 0 < c \;\Rightarrow\; \frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$,
c) $a < b < -c,\ 0 < c \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, d) $a > b,\ 0 < c,\ b < -c \;\Rightarrow\; \frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$.

2.1.9. Nájdite infimum a suprémum nasledujúcich množín: ♣
a) $\left\{\frac{2n+1}{n};\, n \in N\right\}$, b) $\left\{\frac{2+(-1)^n}{n};\, n \in N\right\}$, c) $\left\{\frac{1+\cdots+n}{n^2};\, n \in N\right\}$,
d) $\left\{\sin\frac{1}{n!};\, n \in N\right\}$, e) $\left\{\frac{1}{n+\frac{1}{n}};\, n \in N\right\}$, f) $\left\{\sqrt{n+\sqrt{n}};\, n \in N\right\}$.

2.1.10. Nájdite infimum a suprémum nasledujúcich množín: ♣
a) $\{a \in R;\, |2a+1| < a < |a-1|\}$, b) $\{a \in R;\, |a^2-1| < a < |a+1|\}$.

2.1.11. Nech $A, B \subset R$ sú neprázdne ohraničené množiny. Označme **súčet**, **súčin množín** A, B symbolmi $A+B = \{a+b;\, a \in A, b \in B\}$, $AB = \{ab;\, a \in A, b \in B\}$ a n**-tú mocninu množiny** A, $n \in N$ symbolom $A^n = \{a^n;\, a \in A\}$. Dokážte, že platí:
a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, b) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$,
c) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$, d) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$,
e) $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$, f) $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$,
g) $\sup A^n = (\sup A)^n$, h) $\inf A^n = (\inf A)^n$.

2.1.12. Nech $A, B \subset R$ sú neprázdne ohraničené množiny. Dokážte, že aj množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A+B$, AB, A^n pre $n \in N$ sú ohraničené množiny.

2.1.13. Dokážte trojuholníkovu nerovnosť $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, pričom $n \in N$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$.

2.1.14. Dokážte, že pre všetky $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$, $ab = 1$ platí $2 \leq a + b$.

2.1.15. Dokážte, že pre $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$, $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ platí $n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

2.1.16. Dokážte, že pre všetky $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$ platí $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$.
[Návod: Nerovnosť $0 \leq (a_1 + b_1 x)^2 + (a_2 + b_2 x)^2$ platí pre všetky $x \in R$.]

2.1.17. Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$, pričom $n \in N$, $n \geq 2$. Dokážte, že platí:
a) $n \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}$, b) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

2.1.18. Dokážte, že pre všetky $n \in N$ platí:
a) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$, b) $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$,
c) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 3$, d) $\frac{1}{3} < \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$.

2.1.19. Dokážte, že pre všetky $n \in N$ platí: a) $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!}$, b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

2.1.20. Dokážte, že pre všetky $n \in N$ platí $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n$.

2.1.21. Riešte v množine R nerovnice: ♣
a) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \leq 2$, b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} \geq 2$,
c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} < 0$, d) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} > 0$,
e) $|x| + |x+1| + |x+2| \leq 2$, f) $x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) > 0$.

2.1.22. Riešte v množine R sústavy nerovníc: ♣
a) $3x - 2 \leq 2x + 1 < 6x - 1$, b) $3x + 2 < 2x - 2 < 3x + 5$,
c) $0 < 2|x-3| + 3|2x-3| < 3x - 1$, d) $3x - 3 < 2x + 1$, $x - 4 < 3x - 2$,
e) $0 < x^2 - 3x + 2$, $0 < x^2 - 4x + 3$, f) $0 < x^2 - 3x + 2$, $0 < x^2 + 2x - 1$.

2.1.23. Riešte v množine R nerovnice: ♣
a) $2x^2 - 3x + 2 < 0$, b) $2x^3 - 3x + 1 < 0$, c) $2x^2 - 3x - 2 < 0$,
d) $x^2 + x + 1 < 0$, e) $0 < x^2 - 5x - 24$, f) $0 < x^2 - 14x - 24$,
g) $0 < x^2 - 2x + 5$, h) $0 < 2x^2 + 3x + 4$, i) $0 < x^3 + x^2 - 2x$.

2.1.24. Riešte v množine R nerovnice: ♣
a) $1 + \frac{x+4}{x+3} < \frac{x+2}{x+1}$, b) $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} \leq 3$, c) $1 < \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-2}$.
d) $\frac{x+1}{x+3} - \frac{x+5}{x+6} < 0$, e) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x+4}{x-4} < 2$, f) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{2x+2}{2x+3} < 2$,
g) $0 < \frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}$, h) $0 < \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$, i) $\frac{|x+2|}{x-2} < \frac{|x+3|}{x-3}$.

2.1.25. Riešte v množine R nerovnice: ♣
a) $0 < \frac{x-2}{x+4}$, b) $\frac{x(x+2)}{x^2-1} < x$, c) $\frac{x+1}{x+3} \leq \frac{x+5}{x+7}$, d) $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-1}{x+1}$,
e) $1 < \frac{x-2}{x+4}$, f) $\frac{x+2}{x^2-x} < 2$, g) $\frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-1}{x+1}$, h) $\frac{x+2}{x-2} \leq \frac{x}{x-1}$.

2.1.26. Nájdite všetky $x \in R$, pre ktoré predstavujú nasledujúce výrazy reálne čísla: ♣
a) $\sqrt{x-3} + \sqrt{4-x}$, b) $\frac{x}{\sqrt{x-3}} + \frac{x}{\sqrt{4-x}}$, c) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{\frac{4-x}{4-x}}$.

2.1.27. Nájdite všetky $x \in R$, pre ktoré predstavujú nasledujúce výrazy reálne čísla: ♣

a) $\sqrt{(1-x)^{-1}}$, b) $\sqrt{1-\operatorname{sgn} x}$, c) $\sqrt{\operatorname{sgn} x - 1}$, d) $\sqrt{|x| - x}$,

e) $\sqrt{\frac{x}{x\operatorname{sgn} x - x}}$, f) $\frac{x}{\sqrt{x\operatorname{sgn} x - x}}$, g) $\frac{x\operatorname{sgn} x - x}{x\operatorname{sgn} x + x}$, h) $\frac{x^2-2}{3-x^2}$,

i) $\sqrt{x^3 + x^2 - x}$, j) $\sqrt{x\operatorname{sgn} x - x}$, k) $\sqrt{\operatorname{sgn} x - x^2}$, l) $\sqrt{x + x^3}$.

2.1.28. Dokážte, že ak $a, b \in R$, potom: a) $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2}$.

2.1.29. Dokážte, že ak $a, b \in R$, $a \le b$, potom: $\frac{(a-b)^2}{8b} \le \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \le \frac{(a-b)^2}{8a}$.

2.1.30. Do akej množiny patrí číslo x, ak platí: ♣

a) $x^2 + 3x - 1 \in (2\,;\,3)$, b) $x^2 - 4x + 1 \in \langle 2\,;\,\infty)$, c) $x^2 + x - 1 \in R - \langle 1\,;\,2)$.

2.1.31. Určte veľkosti strán pravouhlého trojuholníka, ak rozdiel odvesien je rovný 1 a prepona je dlhšia ako 11. ♣

2.1.32. Ako musíme zvoliť parameter $a \in R$ v danej rovnici: ♣

a) $ax^2 + (2a-1)x - 2 = 0$, aby jej korene boli z intervalu $(-2\,;\,2\rangle$.
b) $x^2 + ax + 12 = 0$, aby mala reálne, resp. komplexné korene.
c) $x^2 + 5x + a = 0$, aby mala reálne, resp. komplexné korene.

2.1.33. Dokážte, že zo všetkých pravouhlých rovnobežníkov s daným obvodom s má najväčší plošný obsah štvorec.

2.1.34. Dokážte, že zo všetkých pravouhlých rovnobežníkov s daným plošným obsahom P má najmenší obvod štvorec.

2.2 Topologické a metrické vlastnosti reálnych čísel

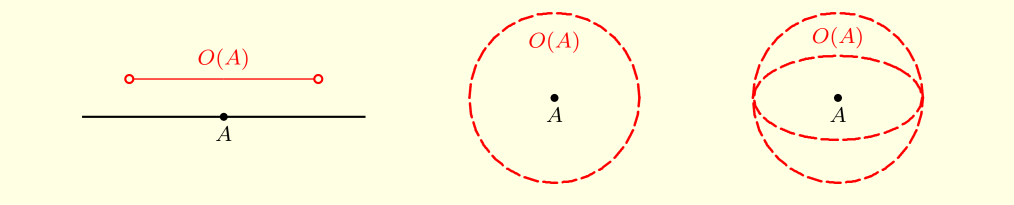
2.2.1 Okolie bodu

Topologická štruktúra vyjadruje polohové vzťahy medzi prvkami a podmnožinami danej množiny, ktoré charakterizujú vzdialenosť skúmaných objektov. Samotné slovo *topológia*[14] sa zaviedlo do matematiky v polovici 19. storočia. Pomocou topologických pojmov môžeme definovať napríklad spojitosť a limitu funkcie, konvergenciu postupnosti. Základným topologickým pojmom je **okolie bodu**. Najprv uvedieme geometrickú interpretáciu okolia bodu. Situácia je znázornená na obrázku 2.2.6.

Okolím bodu A na priamke je vnútro úsečky so stredom v bode A (t. j. úsečka bez krajných bodov), okolím bodu A v rovine je vnútro kruhu so stredom v bode A a okolím bodu A v priestore je vnútro gule so stredom v bode A. Okolie označujeme symbolmi $O(A)$, $O_1(A)$, O_2, $O'(A)$, O a podobne.

Označme množinu bodov priamky (roviny, priestoru, resp. nejakej množiny) symbolom M. Nech $A \in M$, potom množina všetkých okolí bodu A tvorí systém podmnožín množiny M. Nazývame ho **systém okolí bodu A** a označujeme $\mathcal{O}_A$. **Systémom okolí bodov množiny M** nazývame zjednotenie systémov okolí $\mathcal{O}_A$, kde $A \in M$.

[14] Z gréckeho *topos* — miesto a *logos* — zákon, slovo.



Obr. 2.2.6: Okolie $O(A)$ bodu A na priamke, v rovine a v priestore.

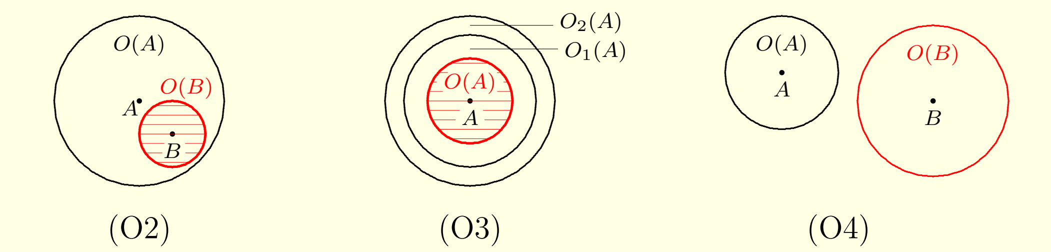
Systémy okolí bodov množiny M spĺňajú vlastnosti (O1), (O2), (O3), (O4), ktoré nazývame **axiómy okolí**. Do matematiky ich zaviedol na začiatku 20. storočia nemecký matematik *Felix Hausdorff* [1868–1942], preto sa tiež nazývajú **Hausdorffove axiómy**.

(O1) Ku každému bodu $A \in M$ existuje aspoň jedno okolie $O(A)$, t. j. $\mathcal{O}_A \neq \emptyset$ a pre každé okolie $O \in \mathcal{O}_A$ platí $A \in O$.

(O2) Pre každé okolie $O(A) \in \mathcal{O}_A$ a pre každý bod $B \in O(A)$, $B \neq A$, existuje okolie $O(B) \in \mathcal{O}_B$ také, že $O(B) \subset O(A)$.

(O3) Pre všetky okolia $O_1(A), O_2(A) \in \mathcal{O}_A$ existuje okolie $O(A) \in \mathcal{O}_A$ také, že platí $O(A) \subset O_1(A) \cap O_2(A)$.

(O4) Ak $A \neq B$, potom existujú $O(A) \in \mathcal{O}_A$, $O(B) \in \mathcal{O}_B$ také, že $O(A) \cap O(B) = \emptyset$.



Obr. 2.2.7: Vlastnosti (O2), (O3), (O4) okolí bodov.

Z uvedených axióm okolí vyplývajú mnohé dôsledky. Najdôležitejší z nich je uvedený v nasledujúcej vete.

Veta 2.2.1.
Nech $A, B \in M$, $O(A) \in \mathcal{O}_A$, $O(B) \in \mathcal{O}_B$ a nech bod $C \in O(A) \cap O(B)$.
Potom existuje $O(C) \in \mathcal{O}_C$ tak, že $O(C) \subset O(A) \cap O(B)$.

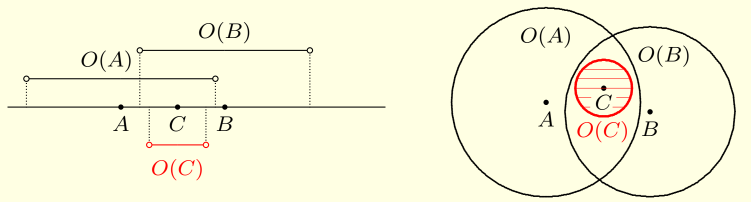
Dôkaz.

$$\left.\begin{array}{l} C \in O(A) \xRightarrow{(O2)} \exists O_1 \in \mathcal{O}_C\colon\ O_1 \subset O(A) \\ C \in O(B) \xRightarrow{(O2)} \exists O_2 \in \mathcal{O}_C\colon\ O_2 \subset O(B) \end{array}\right\} \xRightarrow{(O3)} \exists O(C) \in \mathcal{O}_C\colon\ O(C) \subset O_1 \cap O_2.$$

$O_1 \cap O_2 \subset O(A) \cap O(B) \implies O(C) \subset O(A) \cap O(B)$ (viď obrázok 2.2.8). ■

- **Okolie bodu v množine R**

Ako sme už spomínali, množinu R geometricky reprezentuje priamka. Nech $a \in R$, potom interval $(a - \delta\,;\, a + \delta)$, kde δ je nejaké kladné číslo, nazývame **δ-okolím bodu a** (**okolím bodu a**). Číslo δ



Obr. 2.2.8: Obrázok k vete 2.2.1.

nazývame **polomer** (**charakteristika**) **okolia**. Okolie bodu a označujeme $O_\delta(a)$, $O(\delta, a)$, resp. $O(a)$ v prípade, že veľkosť polomeru δ nie je podstatná.

Interval $(r\,;\,\infty)$, kde $r \in R$ nazývame **okolím** (**r-okolím**) **bodu** ∞ a označujeme $O_r(\infty)$, resp. $O(\infty)$. Interval $(-\infty\,;\,r)$, kde $r\in R$ nazývame **okolím** (**r-okolím**) **bodu** $-\infty$ a označujeme $O_r(-\infty)$, resp. $O(-\infty)$. Systém všetkých okolí bodov ∞ [resp. $-\infty$] budeme označovať $\mathcal{O}_\infty$ [resp. $\mathcal{O}_{-\infty}$].

Niekedy je výhodné z okolia $O(a)$, $a\in R$ vyňať bod a. Množinu $O(a)-\{a\}$ nazývame **prstencovým** (**rýdzim**) **δ-okolím bodu** $a\in R$ a označujeme $P_\delta(a)$, $P(\delta, a)$, resp. $P(a)$.

Poznámka 2.2.1.
Okolia $O(\pm\infty)$ sú zároveň aj prstencovými okoliami bodov $\pm\infty$.

Poznámka 2.2.2.
Za okolie môžeme považovať tiež množiny R a $\emptyset$. Množina $R = (-\infty\,;\,\infty)$ je okolím ľubovoľného bodu $a \in R^*$ (t. j. aj $\pm\infty$) s polomerom $r = \infty$ a množina $\emptyset = (a\,;\,a)$ je okolím každého bodu $a \in R$ s polomerom $r = 0$.

Je zrejmé, že systém všetkých okolí všetkých bodov z množiny R spĺňa axiómy (O1), (O2), (O3), (O4). Okolia bodov $a \in R^*$ je niekedy výhodné vyjadriť pomocou absolútnej hodnoty, t. j. pomocou vzdialenosti jednotlivých bodov. Nech $a\in R$, $\delta, r\in R$, $\delta > 0$, potom:

$$\begin{aligned}
O_\delta(a) &= (a-\delta\,;\,a+\delta) = \{x\in R\,;\; a-\delta < x < a+\delta\} = \\
&= \{x\in R\,;\; \delta < x-a < \delta\} = \{x\in R\,;\; |x-a| < \delta\},\\
P_\delta(a) &= O_\delta(a)-\{a\} = (a-\delta\,;\,a+\delta)-\{a\} = (a-\delta\,;\,a)\cup(a\,;\,a+\delta) = \\
&= \{x\in R\,;\; a-\delta<x<a\}\cup\{x\in R\,;\; a<x<a+\delta\} = \{x\in R\,;\; 0<|x-a|<\delta\},\\
O_r(\infty) &= (r\,;\,\infty) = \{x\in R\,;\; r<x<\infty\}, \qquad O_r(-\infty) = (-\infty\,;\,r) = \{x\in R\,;\; -\infty<x<r\}.
\end{aligned}$$

Príklad 2.2.1.
Každý otvorený interval $(a\,;\,b)$, kde $a, b\in R$, $a < b$, je okolím nejakého bodu $c\in R$.
Je zrejmé, že bod $c = \frac{a+b}{2}$ a polomer $\delta = \frac{b-a}{2}$. ■

Poznámka 2.2.3.
Všetky body v rovine môžeme vyjadriť pomocou karteziánskych súradníc usporiadanou dvojicou reálnych čísel. Preto rovinu obyčajne označujeme R^2. Nech $a, x\in R^2$, $a = [a_1; a_2]$, $x = [x_1; x_2]$. Pre vzdialenosť bodov a a x platí $\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}$, takže okolia $O_\delta(a)$, $P_\delta(a)$ môžeme vyjadriť v tvare:

$$O_\delta(a) = \{x\in R^2\,;\; \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} < \delta\},$$
$$P_\delta(a) = O_\delta(a)-\{a\} = \{x\in R^2\,;\; 0 < \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2} < \delta\}.$$

V priestore R^3 je situácia podobná. Ak $a, x \in R^3$, $a = [a_1;\, a_2;\, a_3]$, $x = [x_1;\, x_2;\, x_3]$, potom:

$$O_\delta(a) = \{x \in R^3\,;\; \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2} < \delta\},$$

$$P_\delta(a) = O_\delta(a) - \{a\} = \{x \in R^3\,;\; 0 < \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2} < \delta\}.$$

- **Relatívne okolie bodu**

Ak skúmame vzájomnú polohu bodov a podmnožín nejakej množiny $A \subset R$, väčšinou nás nezaujímajú body nepatriace do množiny A. V tomto prípade budeme okolia uvažovať bez bodov, ktoré nepatria do množiny A.

Nech $A \subset R$, $a \in A$ a nech $O_\delta(a) \in \mathcal{O}_a$, potom množinu $O_\delta(a) \cap A$ nazývame **relatívnym okolím (relatívnym δ-okolím**, resp. **relatívnym okolím s polomerom δ) bodu a v množine A (vzhľadom na množinu A)** a označujeme $O^A_\delta(a)$, resp. $O^A(a)$.

V matematike sa často používajú okolia vzhľadom na množinu $(-\infty\,;\, a\rangle$, resp. $\langle a\,;\, \infty)$, t. j. ľavé a pravé okolia. **Pravým δ-okolím bodu a** nazývame množinu $O^+_\delta(a) = O_\delta(a) \cap \langle a\,;\, \infty) = \langle a\,;\, a+\delta)$ a množinu $O^-_\delta(a) = O_\delta(a) \cap (-\infty\,;\, a\rangle = (a-\delta\,;\, a\rangle$ nazývame **ľavým δ-okolím bodu a**. Podobne $P^+_\delta(a) = (a\,;\, a+\delta)$ nazývame **pravým prstencovým δ-okolím bodu a** a $P^-_\delta(a) = (a-\delta\,;\, a)$ nazývame **ľavým prstencovým δ-okolím bodu a**.

2.2.2 Otvorené a uzavreté množiny

Nech $A \subset R$, $A \neq \emptyset$. Bod $a \in A$ sa nazýva **vnútorný bod množiny A**, ak existuje okolie $O(a) \in \mathcal{O}_a$ také, že $O(a) \subset A$. Množinu všetkých vnútorných bodov množiny A nazývame **vnútro množiny A** a označujeme $\operatorname{int} A$, resp. A^0.

Bod $a \in R$ sa nazýva **vonkajší bod množiny A** práve vtedy, ak je vnútorným bodom doplnku $A' = R - A$. Množinu všetkých vonkajších bodov množiny A nazývame **vonkajšok množiny A** a označujeme $\operatorname{ext} A$.

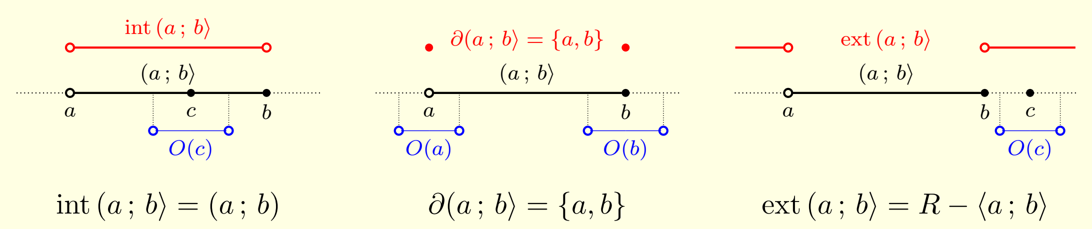
Ak bod $a \in R$ nie je ani vnútorným bodom, ani vonkajším bodom množiny A, potom ho nazývame **hraničný bod množiny A**. To znamená, že v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod z množiny A a aspoň jeden bod z množiny A'. Množinu všetkých hraničných bodov množiny A nazývame **hranica množiny A** a označujeme ∂A.

Poznámka 2.2.4.
Nech $A \subset R$, potom pre množiny A a A' platí $\partial A = \partial A'$, $\operatorname{int} A = \operatorname{ext} A'$, $\operatorname{ext} A = \operatorname{int} A'$.
Množiny $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$ sú disjunktné, t. j. $\operatorname{int} A \cap \partial A = \operatorname{int} A \cap \operatorname{ext} A = \operatorname{ext} A \cap \partial A = \emptyset$.
Z toho vyplýva $(\operatorname{int} A \cup \partial A)' = \operatorname{ext} A$, $(\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A)' = \partial A$, $(\operatorname{ext} A \cup \partial A)' = \operatorname{int} A$.

Poznámka 2.2.5.
Nech $A \subset R$, $B \subset R$ sú neprázdne množiny také, že $A \subset B$.
Z definície vyplýva, že ak je a vnútorným bodom množiny A, potom je tiež vnútorným bodom B. A naopak, ak je a vonkajším bodom B, potom je tiež vonkajším bodom A.

Príklad 2.2.2.
a) Pre množiny $\emptyset$, R platí: $\operatorname{int} \emptyset = \partial\emptyset = \partial R = \operatorname{ext} R = \emptyset$, $\operatorname{ext} \emptyset = \operatorname{int} R = R$.

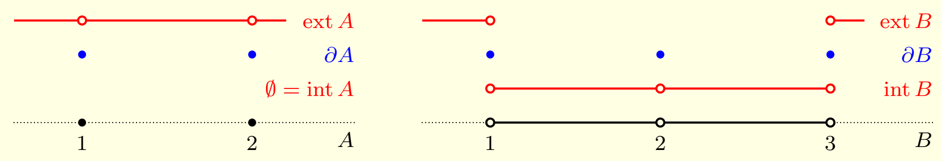
b) Pre množinu racionálnych čísel Q platí $\partial Q = R$.



Obr. 2.2.9: Množiny int $(a;\ b\rangle$, $\partial(a;\ b\rangle$, ext $(a;\ b\rangle$ z príkladu 2.2.2 c).

c) Ak $a, b \in R$, $a < b$, potom platí (obr. 2.2.9):
$\partial(a\,;\,b) = \partial(a\,;\,b\rangle = \partial\langle a\,;\,b) = \partial\langle a\,;\,b\rangle = \{a,b\}$,
$\operatorname{ext}(a\,;\,b) = \operatorname{ext}(a\,;\,b\rangle = \operatorname{ext}\langle a\,;\,b) = \operatorname{ext}\langle a\,;\,b\rangle = R - \langle a\,;\,b\rangle = (-\infty\,;\,a) \cup (b\,;\,\infty)$,
$\operatorname{int}(a\,;\,b) = \operatorname{int}(a\,;\,b\rangle = \operatorname{int}\langle a\,;\,b) = \operatorname{int}\langle a\,;\,b\rangle = (a\,;\,b)$.

d) Nech $A = \{1, 2\}$, $B = (1\,;\,2) \cup (2\,;\,3)$, potom platí (obr. 2.2.10):
$\operatorname{int} A = \emptyset$, $\operatorname{ext} A = R - \{1, 2\}$, $\partial A = A$, $\operatorname{int} B = B$, $\operatorname{ext} B = (-\infty\,;\,1) \cup (3\,;\,\infty)$, $\partial B = \{1, 2, 3\}$. ■



Obr. 2.2.10: Obrázok k príkladu 2.2.2 d).

Bod $a \in R$ sa nazýva **hromadný bod množiny** $A \subset R$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod z množiny A, ktorý je rôzny od bodu a, t. j. v každom jeho prstencovom okolí $P(a)$ leží aspoň jeden bod z množiny A. To znamená, že pre všetky prstencové okolia $P(a)$ platí $P(a) \cap A \neq \emptyset$.

Z predchádzajúcej definície vyplýva, že bod a je hromadný bod množiny A práve vtedy, ak pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje prvok $b \neq a$ taký, že $b \in O_\varepsilon(a) \cap A$.

Hromadné body množiny reálnych čísel môžu byť obojstranné alebo jednostranné. Bod a sa nazýva **obojstranným hromadným bodom množiny** A, ak v každom jeho ľavom prstencovom okolí $P^-(a)$ a v každom jeho pravom prstencovom okolí $P^+(a)$ leží aspoň jeden bod z množiny A.

Bod a sa nazýva **ľavým** [resp. **pravým**] **hromadným bodom množiny** A, ak v každom jeho ľavom prstencovom okolí $P^-(a)$ [resp. pravom prstencovom okolí $P^+(a)$] leží aspoň jeden bod z množiny A. Súhrnne ich nazývame **jednostrannými hromadnými bodmi**. Priamo z definície vyplýva nasledujúca veta.

Veta 2.2.2.
Bod a je obojstranným hromadným bodom množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak je ľavým a zároveň aj pravým hromadným bodom množiny A.

Uzáverom množiny $A \subset R$ (**uzáverom v množine** R) nazývame zjednotenie množiny A s množinou všetkých hromadných bodov $a \in R$ množiny A. Uzáver množiny A označujeme symbolom $\overline{A}$. Množina $A \subset R$ sa nazýva **uzavretá** (**uzavretá v množine** R), ak obsahuje všetky svoje hromadné body $a \in R$, t. j. ak $A = \overline{A}$.

Bod $a \in A$, ktorý nie je hromadným bodom množiny A sa nazýva **izolovaný bod množiny** A. Množina, ktorá obsahuje iba izolované body sa nazýva **izolovaná množina**. Množina $A \subset R$ sa nazýva **otvorená**, ak každý jej bod je vnútorný, t. j. ak $A = \operatorname{int} A$.

Poznámka 2.2.6.
Z definície vyplýva, že ak bod a je hromadným bodom množiny $A \subset R$, potom je tiež hromadným bodom ľubovoľnej jej nadmnožiny $B \subset R$.

Poznámka 2.2.7.
Množina prirodzených čísel $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ nemá hromadný bod patriaci do R. Ale je zrejmé, že v každom okolí bodu ∞ leží aspoň jedno prirodzené číslo. Preto rozšírime definíciu hromadného bodu na množinu $R^* = R \cup \{\pm\infty\}$.

Bod $a \in R^*$ sa nazýva **hromadný bod množiny** $A \subset R$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod z množiny A, ktorý je rôzny od bodu a.

Poznámka 2.2.8.
Je zrejmé, že ak v danom okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod, ktorý je rôzny od a, leží ich tam nekonečne veľa. To znamená, že $a \in R$ je hromadným bodom množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí leží nekonečne veľa bodov z množiny A, ktoré sú rôzne od bodu a.

Poznámka 2.2.9.
Pri vyšetrovaní hromadných bodov nejakej reálnej množiny $A \subset R$ budeme overovať aj body $\pm\infty$. Napríklad medzi hromadné body intervalu $(1\,;\,\infty)$ patrí aj bod ∞.

Príklad 2.2.3.
a) Množina $\emptyset$ je otvorená a zároveň uzavretá, množina R je otvorená.

b) Nech $a, b \in R$, $a < b$. Interval $(a\,;\,b)$ je otvorená množina, $\langle a\,;\,b\rangle$ je uzavretá množina[15] a $(a\,;\,b\rangle$, $\langle a\,;\,b)$ nie sú ani otvorené ani uzavreté množiny. Uzáverom všetkých týchto množín je $\langle a\,;\,b\rangle$.

c) Interval $(-\infty\,;\,1)$ je otvorená množina. Jeho uzáverom je množina $(-\infty\,;\,1\rangle \cup \{-\infty\}$.

d) Množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nemá hromadné body. To znamená, že obsahuje všetky svoje hromadné body a je uzavretá. Navyše každý jej bod je izolovaný.

e) Množina $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ neobsahuje svoj hromadný bod ∞, preto nie je uzavretá. Všetky jej body sú izolované, takže je izolovaná.

f) Množina $Q = \left\{\frac{m}{n}\,;\, m \in Z, n \in N\right\}$ nie je uzavretá, pretože neobsahuje všetky svoje hromadné body (neobsahuje napríklad hromadný bod $\sqrt{2}$). Nie je ani otvorená, pretože žiaden jej bod nie je vnútorný. ■

Príklad 2.2.4.
Nájdite hromadné body množiny $A = \left\{\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\,;\, n \in N\right\}$.

Riešenie.
Body $\frac{1}{n}$, $1 + \frac{1}{n}$ patriace do množiny A môžeme zoradiť podľa veľkosti:
$$0 < \cdots < \tfrac{1}{n+1} < \tfrac{1}{n} < \tfrac{1}{n-1} < \cdots < \tfrac{1}{3} < \tfrac{1}{2} < 1 < \cdots < 1 + \tfrac{1}{n+1} < 1 + \tfrac{1}{n} < \cdots < 2.$$
Nech $\delta = \frac{1}{(n+1)^2}$, $n \in N$. Uvažujme okolia
$$O_\delta(\tfrac{1}{n}) = \left(\tfrac{1}{n} - \delta\,;\, \tfrac{1}{n} + \delta\right), \quad O_\delta(1 + \tfrac{1}{n}) = \left(1 + \tfrac{1}{n} - \delta\,;\, 1 + \tfrac{1}{n} + \delta\right).$$

[15] Preto aj názov otvorený a uzavretý interval.

Ukážeme, že množina A je izolovaná. Nech $n \in N$, potom platí:

$$(1+\tfrac{1}{n}) - (1+\tfrac{1}{n+1}) = \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \tfrac{1}{n(n+1)} > \tfrac{1}{(n+1)^2},$$

$$(1+\tfrac{1}{n-1}) - (1+\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n} = \tfrac{n-(n-1)}{(n-1)n} = \tfrac{1}{n(n-1)} > \tfrac{1}{(n+1)^2}.$$

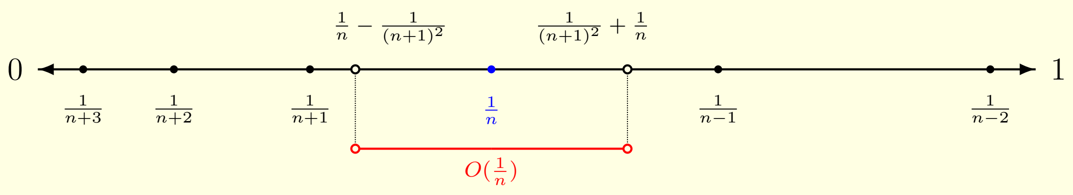
Z toho vyplýva, že do okolia $O_\delta(\frac{1}{n})$ nepatrí okrem bodu $\frac{1}{n}$ žiadny iný bod z množiny A (obr. 2.2.11). Taktiež do okolia $O_\delta(1+\frac{1}{n})$ nepatrí okrem bodu $1+\frac{1}{n}$ žiadny iný bod z množiny A. To znamená, že platí:

$$O_\delta(\tfrac{1}{n}) \cap A = \{\tfrac{1}{n}\}, \qquad O_\delta(1+\tfrac{1}{n}) \cap A = \{1+\tfrac{1}{n}\}.$$

Takže body $\frac{1}{n}$ a $1+\frac{1}{n}$ sú izolované body množiny A.
Z vety 2.1.27 vyplýva, že pre každé $\delta > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že $0 < \frac{1}{n_0} < \delta$, t. j.

$$0-\delta < \tfrac{1}{n_0} < 0+\delta, \qquad \text{t. j.} \quad 1-\delta < 1+\tfrac{1}{n_0} < 1+\delta.$$

To znamená, že body 0 a 1 sú hromadné body množiny A. ■



Obr. 2.2.11: Obrázok ku príkladu 2.2.4.

Veta 2.2.3.
Nech $A \subset R$, potom A je otvorená práve vtedy, ak $A' = R - A$ je uzavretá.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech je A otvorená a A' nie je uzavretá.
A' nie je uzavretá, t. j. existuje jej hromadný bod $a \in R$ taký, že $a \notin A'$, t. j. $a \in A$.
A je otvorená, potom existuje okolie $O(a) \subset A$, t. j. $O(a) \cap A' = \emptyset$. To je ale spor s tým, že a je hromadný bod množiny A'.

$PP_{\Leftarrow}$: Sporom. Nech A' je uzavretá a A nie je otvorená.
A nie je otvorená, t. j. existuje bod $a \in A$, ktorý nie je vnútorný. To znamená, že a je hraničný bod a v každom jeho okolí $O(a)$ leží aspoň jeden bod $b \in A'$, $b \neq a$. To znamená, že $a \in A$, t. j. $a \notin A'$, je hromadný bod množiny A'. Spor s tým, že A' je uzavretá. ■

Veta 2.2.4.
Nech $A \subset R$, potom $A \cup \partial A = \overline{A}$.

Dôkaz.
Nech $a \in A \cup \partial A$. Ak $a \in A$, potom $a \in \overline{A}$.
Ak $a \in \partial A$ a $a \notin A$, potom pre každé okolie $O(a) \in \mathcal{O}_a$ platí $O(a) \cap A \neq \emptyset$.
To znamená, že a je hromadný bod množiny A, t. j. $a \in \overline{A}$.

Nech $a \in \overline{A}$. Ak $a \in A$, potom $a \in A \cup \partial A$.
Ak $a \notin A$, potom a je hromadný bod množiny A a pre všetky $O(a) \in \mathcal{O}_a$ platí $O(a) \cap A \neq \emptyset$.
Keďže $a \notin A$, potom $a \in A'$. Z toho vyplýva $a \in O(a) \cap A'$.
To znamená, že a je hraničný bod množiny A, t. j. $a \in A \cup \partial A$. ■

Dôsledok 2.2.4.a.
Nech $A \subset R$, označme $\overline{(\overline{A})} = \overline{\overline{A}}$. Potom platí $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, t. j. množina $\overline{A}$ je uzavretá.

Dôkaz.
Množina ext A je otvorená. Potom množina $(\operatorname{ext} A)' = A \cup \partial A = \overline{A}$ je uzavretá. ■

Veta 2.2.5.
Nech $A \subset R$, potom: a) A je otvorená práve vtedy, ak $A \cap \partial A = \emptyset$.
b) A je uzavretá práve vtedy, ak $A \cup \partial A = A$.

Dôkaz.
a) Vyplýva priamo z definície.
b) Z definície uzáveru a z vety 2.2.4 vyplýva $A = \overline{A} = A \cup \partial A$. ■

Veta 2.2.6.
Nech $A \subset R$, $B \subset R$, potom platí: a) $A \subset B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subset \overline{B}$, b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Dôkaz.
a) Vyplýva priamo z definície.
b) $A \subset A \cup B,\; B \subset A \cup B \;\Longrightarrow\; \overline{A} \subset \overline{A \cup B},\; \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \;\Longrightarrow\; \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
Nech platí $\overline{A} \cup \overline{B} \subsetneq \overline{A \cup B}$.
Potom existuje bod $a \in \overline{A \cup B}$ taký, že $a \notin \overline{A} \cup \overline{B}$.
To znamená, že a nie je hromadným bodom množiny A a ani množiny B.
Potom existujú okolia $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_a$ také, že $(O_1 - \{a\}) \cap A = (O_2 - \{a\}) \cap B = \emptyset$.
Nech okolie $O(a) \in \mathcal{O}_a$ je také, že platí $O(a) \subset O_1 \cap O_2$. Potom

$$(O(a) - \{a\}) \cap A = (O(a) - \{a\}) \cap B = \emptyset, \qquad \text{t. j. } (O(a) - \{a\}) \cap (A \cup B) = \emptyset.$$

Takže a nie je hromadný, ale izolovaný bod množiny $A \cup B$ a platí $a \in A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. To je spor a dokazuje tvrdenie vety. ■

Veta 2.2.7.
Ak sú množiny $A, B \subset R$ otvorené, potom sú množiny $A \cap B$, $A \cup B$ tiež otvorené.

Dôkaz.
Nech $a \in A \cap B$, potom existujú okolia $O_1(a) \subset A$, $O_2(a) \subset B$. Potom na základe axiómy (O3) existuje okolie $O(a) \subset O_1 \cap O_2 \subset A \cap B$, t. j. $A \cap B$ je otvorená.
Nech $a \in A \cup B$, potom $a \in A$ alebo $a \in B$. To znamená, že a je vnútorným bodom množiny A alebo vnútorným bodom množiny B, t. j. je vnútorným bodom množiny $A \cup B$. To znamená, že je množina $A \cup B$ otvorená. ■

Veta 2.2.8.
Ak sú množiny $A, B \subset R$ uzavreté, potom sú množiny $A \cap B$, $A \cup B$ tiež uzavreté.

Dôkaz.
A, B sú uzavreté, potom sú otvorené A', B', $A' \cup B'$, $A' \cap B'$ a uzavreté množiny

$$(A' \cup B')' = A'' \cap B'' = A \cap B, \qquad (A' \cap B')' = A'' \cup B'' = A \cup B. \;■$$

Je zrejmé, že tvrdenia predchádzajúcej vety ostanú v platnosti aj v prípade konečného počtu množín $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset R$. Uvádzame ich bez dôkazov ako dôsledky 2.2.8.a a 2.2.8.b. Vo vetách 2.2.9 a 2.2.10 sú tieto tvrdenia rozšírené na nekonečný systém množín $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Dôsledok 2.2.8.a.
Ak $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset R$, $n \in N$ sú otvorené, potom aj množiny $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ sú otvorené.

Dôsledok 2.2.8.b.
Ak $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset R$, $n \in N$ sú uzavreté, potom aj množiny $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ sú uzavreté.

Veta 2.2.9.
Ak sú množiny $A_k \subset R$, $k \in N$ otvorené, potom je množina $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ otvorená.

Dôkaz.
Nech $a \in A$, potom existuje otvorená množina A_m taká, že $a \in A_m$. Keďže je a vnútorným bodom množiny A_m, je tiež vnútorným bodom nadmnožiny A. To znamená, že A je otvorená množina. ■

Veta 2.2.10.
Ak sú množiny $A_k \subset R$, $k \in N$ uzavreté, potom je množina $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ uzavretá.

Dôkaz.
Z predpokladov vyplýva, že A'_k a $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A'_k$ sú otvorené množiny.
Potom na základe de Morganových zákonov je množina $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \left[\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A'_k\right]'$ uzavretá. ■

Príklad 2.2.5.
a) Množina $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}\,;\, \frac{1}{k}\right) = \{0\}$ nie je otvorená, je uzavretá. To znamená, že prienik nekonečného systému otvorených množín nemusí byť otvorená množina.

b) Množina $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{k}\right\} = \left\{\frac{1}{k}\,;\, k \in N\right\}$ nie je uzavretá, pretože neobsahuje svoj hromadný bod a to číslo 0. To znamená, že zjednotenie nekonečného systému uzavretých množín nemusí byť uzavretá množina. ■

2.2.3 Metrické vlastnosti čísel

S pojmami ako dĺžka vektora, skalárny súčin dvoch vektorov, vzdialenosť dvoch bodov sme sa už stretli v analytickej geometrii. Tieto pojmy predstavujú metrické vlastnosti množiny a v tejto časti sa budeme zaoberať metrickými vlastnosťami reálnych čísel.

Množinu $R^1 = R$ môžeme považovať za špeciálny prípad množiny R^n, $n \in N$. Preto sa sústredíme na množinu R^n všeobecne pre $n \in N$.

Ako vieme z algebry ([32], str. 86), množina $R^n = \{(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)\,;\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$[16] tvorí lineárny priestor. Nazývame ho **Euklidov** (**euklidovský**) **n-rozmerný priestor** a preto ho tiež niekedy označujeme symbolom E^n.

Prvky priestoru R^n zvykneme nazývať **vektory** (**n-rozmerné vektory**). Je zrejmé, že všetky vlastnosti, ktoré odvodíme pre R^n, budú platiť aj pre množinu R.

Nech $x, y \in R^n$, $x = (x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$, $y = (y_1;\, y_2;\, \ldots;\, y_n)$, potom **skalárnym súčinom vektorov x a y** nazývame číslo definované vzťahom:

$$(x, y) = ((x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n), (y_1;\, y_2;\, \ldots;\, y_n)) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Pomocou skalárneho súčinu môžeme vybudovať v priestore R^n geometriu s použitím vzdialeností a uhlov, ako sme zvyknutí v rovine, resp. v priestore. Základné vlastnosti práve definovaného skalárneho súčinu sú uvedené v nasledujúcej vete 2.2.11.

[16] V analýze sa zvyknú súradnice bodov označovať v okrúhlych zátvorkách.

Poznámka 2.2.10.
S pojmom vektor sme sa už stretli v geometrii. Vektor $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ v priestore R^n graficky predstavuje orientovanú úsečku z bodu $O = (0; 0; \ldots; 0)$ do $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$. To znamená, že vektor vyjadruje smer (orientáciu) a vzdialenosť od začiatku súradnicového systému, t. j. od bodu O. Musíme si ešte uvedomiť, že orientovanú úsečku z bodu $A=(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ do bodu $B=(b_1; b_2; \ldots; b_n)$ reprezentuje vektor $B-A = (b_1-a_1; b_2-a_2; \ldots; b_n-a_n)$.

Veta 2.2.11.
Nech $x, y, z \in R^n$, $n \in N$ a nech $c \in R$, potom platí:

a) $(x, y) \geq 0$, $(x, x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = (0; 0; \ldots; 0)$,
b) $(x, y) = (y, x)$,
c) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
d) $(cx, y) = c\,(x, y)$.

Dôkaz.
Vyplýva priamo z definície. ■

Nech $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R^n$, $n \in N$, potom číslo $|x|$ definované vzťahom

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

nazývame (**euklidovská**) **norma vektora** x. Vektor $x \in R^n$, pre ktorý platí $|x| = 1$ nazývame **jednotkový**, resp. **normovaný vektor**. Norma vektora $x \in R^n$ predstavuje z geometrického hľadiska dĺžku vektora x, preto sa niekedy nazýva **dĺžka vektora** x.

V priestore R sa norma vektora $x \in R$, t. j. reálneho čísla x, redukuje na absolútnu hodnotu. Vyplýva to zo vzťahov $|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x^2} = |x|$.

Lema 2.2.12 (Cauchyho nerovnosť).
Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_n \in R$, $n \in N$, potom platí: $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$.

Poznámka 2.2.11.
Cauchyho nerovnosť sa často používa a zvykne sa formulovať aj v iných tvaroch (viď veta 2.2.19, str. 86). Ak označíme $x, y \in R^n$, $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $y = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$, potom ju môžeme formálne písať v tvare $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$, resp. $(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$.

Veta 2.2.13.
Nech $x, y \in R^n$, $n \in N$ a nech $c \in R$, potom platí:

a) $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = (0; 0; \ldots; 0)$,
b) $|cx| = |c| \cdot |x|$,
c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Dôkaz.
a) Vyplýva priamo z definície.
b) $|cx| = \sqrt{(cx, cx)} = \sqrt{c\,(x, cx)} = \sqrt{c\,(cx, x)} = \sqrt{c^2\,(x, x)} = |c|\,\sqrt{(x, x)} = |c| \cdot |x|$.
c) Nech $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $y = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$, potom na základe lemy 2.2.12 platí:

$$|x + y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right)^2 = (|x| + |y|)^2. \blacksquare$$

Nech $x, y \in R^n$, pričom $x = (x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$, $y = (y_1;\, y_2;\, \ldots;\, y_n)$, potom zobrazenie $\rho\colon\ R^n \times R^n \to R$ definované vzťahom

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

nazývame (**euklidovská**) **metrika priestoru** R^n. Číslo $\rho(x, y)$ nazývame **vzdialenosť vektorov** x **a** y.

Poznámka 2.2.12.
Euklidovská metrika reprezentuje vzdialenosť bodov, ako ju poznáme z geometrie.
Napríklad pre všetky $x, y \in R$ platí $\rho(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$ a pre všetky $x, y \in R^2$, $x = (x_1;\, x_2)$, $y = (y_1;\, y_2)$ platí $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Veta 2.2.14.
Nech $x, y, z \in R^n$, $n \in N$, potom platí:
a) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, c) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Dôkaz.
a), b) Vyplýva z definície.
c) $\rho(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$. ■

Dôsledok 2.2.14.a.
Nech $x, y, z, v \in R^n$, $n \in N$, potom platí:
a) $|\rho(x, y) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, z)$, b) $|\rho(x, y) - \rho(z, v)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, v)$.

Dôkaz.
a) Vyplýva zo vzťahov:

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \;\Rightarrow\; \rho(x, y) - \rho(y, z) \leq \rho(x, z),$$
$$\rho(z, y) \leq \rho(z, x) + \rho(x, y) \;\Rightarrow\; \rho(z, y) - \rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(x, y) - \rho(x, y) = \rho(x, z).$$

b) Z časti a) a vety 2.1.32 e) vyplýva:

$$|\rho(x, y) - \rho(z, v)| = |\rho(x, y) - \rho(y, z) + \rho(y, z) - \rho(z, v)| \leq$$
$$\leq |\rho(x, y) - \rho(y, z)| + |\rho(y, z) - \rho(z, v)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, v).$$ ■

Poznámka 2.2.13.
Nerovnosti c) vo vete 2.2.13 a c) vo vete 2.2.14 nazývame **trojuholníková nerovnosť**. Je to analógia z geometrie známej nerovnosti, ktorá vyjadruje vzťah medzi dĺžkami strán v trojuholníku. Nerovnosť b) z dôsledku 2.2.14.a sa nazýva **štvoruholníková**.

Nech $A \subset R^n$, $A \neq \emptyset$, potom suprémum množiny vzdialeností ľubovoľných dvoch bodov $x, y \in A$ nazývame **diameter** (**priemer**) **množiny** A a označujeme $\operatorname{diam} A$, t. j.

$$\operatorname{diam} A = \sup \{\rho(x, y)\,;\; x, y \in A\}.$$

Ak platí $\operatorname{diam} A < \infty$, potom sa množina A nazýva **ohraničená**. Ak $\operatorname{diam} A = \infty$, potom sa množina A nazýva **neohraničená**.

Poznámka 2.2.14.
Z predchádzajúcej definície vyplýva, že množina $A \subset R^n$ je ohraničená práve vtedy, ak existuje $c \in R$ tak, že pre všetky $x, y \in A$ platí $\rho(x, y) \leq c$. Z toho vyplýva, že $\operatorname{diam} A = \inf \{c \in R; \forall x, y \in A\colon\ \rho(x, y) \leq c\}$.
Ak $n = 1$, potom je množina $A \subset R$ ohraničená práve vtedy, ak existuje $c \in R$ také, že pre všetky $x, y \in A$ platí $|x - y| \leq c$.

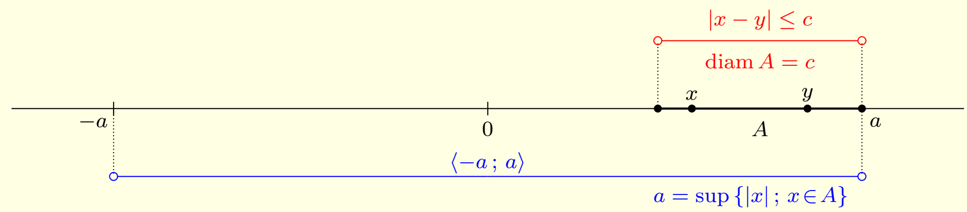
Definícia ohraničenej množiny $A \subset R$ z poznámky 2.2.14 je ekvivalentná s definíciou ohraničenej množiny z predchádzajúcej kapitoly. Obidve definície znamenajú, že A je podmnožinou nejakého uzavretého ohraničeného intervalu. Táto skutočnosť vyplýva z vety 2.1.34 a je vyjadrená vo vete 2.2.15 a na obrázku 2.2.12.[17]

Veta 2.2.15.
Ak $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, potom platí: $\exists a \in R\ \forall x \in A\colon\ |x| \leq a \ \Leftrightarrow\ \exists c \in R\ \forall x, y \in A\colon\ |x-y| \leq c$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: $\exists a \in R\ \forall x \in A\colon\ |x| \leq a \ \Rightarrow\ \forall x, y \in A\colon\ |x-y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y| \leq 2a = c$.
$PP_{\Leftarrow}$: Sporom, nech pre množinu A platí:

$$(\exists c \in R\ \forall x, y \in A\colon\ |x-y| \leq c) \ \wedge\ (\forall a \in R\ \exists x \in A\colon\ |x| > a)\,.$$

Položme $a = |y| + c$, potom existuje $x \in A$ také, že platí $|x| > a = |y| + c$, t. j. $|x| - |y| > c$.
Z toho vyplýva na základe vety 2.1.32 f) spor $|x-y| \geq |x| - |y| > c$. ■



Obr. 2.2.12: Obrázok k poznámke 2.2.14.

Príklad 2.2.6.
Nech $x_1, x_2, \ldots, x_k \in R^n$, $k \in N$, $n \in N$, potom:
a) $\operatorname{diam}\{x_1\} = \rho(x_1, x_1) = 0$,
b) $\operatorname{diam}\{x_1, x_2\} = \max\{\rho(x_1, x_1), \rho(x_1, x_2), \rho(x_2, x_2)\} = \rho(x_1, x_2)$,
c) $\operatorname{diam}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = \max\{\rho(x_i, x_j)\,;\, i, j = 1, 2, \ldots, k\}$. ■

Nech $a \in R^n$, $n \in N$, $\delta \in R$, $\delta > 0$, potom množinu $O_\delta(a) = \{x \in R^n; \rho(x, a) < \delta\}$ nazývame **δ-okolím bodu** a a množinu $P_\delta(a) = O_\delta(a) - \{a\} = \{x \in R^n; 0 < \rho(x, a) < \delta\}$ nazývame **prstencovým δ-okolím bodu** a.

Je zrejmé (poznámka 2.2.3), že pre množiny R, R^2, R^3 je táto definícia okolia ekvivalentná s definíciou okolia uvedenou na začiatku tejto časti.

Príklad 2.2.7.
Nech $a \in R^n$, $n \in N$ a nech $O_\delta(a)$ je okolie bodu a s polomerom $\delta \in R$, $\delta > 0$.
Potom pre všetky $x, y \in O_\delta(a)$ platí $\rho(x, y) \leq \rho(x, a) + \rho(a, y) < \delta + \delta = 2\delta$, t. j. $\operatorname{diam} O_\delta(a) = 2\delta$. ■

[17] Pre $n = 2$ [resp. $n = 3$] to znamená, že existuje kruh [resp. guľa] s polomerom c tak, že množina A je podmnožinou tohto kruhu [resp. gule].

2.2.4 Metrické priestory

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali množinou R, prípadne R^n, kde $n \in N$. Metriku a s ňou súvisiace pojmy (norma, topológia, skalárny súčin, ...) môžeme definovať všeobecne nad ľubovoľnými množinami.

Nech $X \neq \emptyset$, potom zobrazenie $\rho\colon X \times X \to R$ nazývame **metrika množiny X**, ak pre všetky prvky $x, y, z \in X$ platí:

a) $\rho(x,y) \geq 0$, $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, b) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, c) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Vlastnosť b) nazývame symetria a vlastnosť c) trojuholníková nerovnosť. Množinu X nazývame **metrický priestor s metrikou ρ**. Prvky $x \in X$ nazývame **body metrického priestoru** a číslo $\rho(x,y)$ nazývame **vzdialenosť bodu x od bodu y**.

Veta 2.2.16.
Nech ρ je metrika v priestore $X \neq \emptyset$, nech $x, y, z, v \in X$, potom platí:

a) $|\rho(x,y) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,z)$, b) $|\rho(x,y) - \rho(z,v)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,v)$.

Dôkaz.
Dôkaz je identický z dôkazom dôsledku 2.2.14.a. ■

Poznámka 2.2.15.
Metrika rozširuje pojem vzdialenosti dvoch bodov (známy z geometrie) na prvky ľubovoľnej množiny X. Metriku môžeme definovať na ľubovoľnej neprázdnej množine.
Nech $X \neq \emptyset$ a nech $a \in R$ je ľubovoľné kladné číslo. Potom zobrazenie $\rho_a\colon X \times X \to R$ definované pre všetky $x, y \in X$, $x \neq y$ vzťahmi $\rho_a(x,x) = 0$, $\rho_a(x,y) = a$ spĺňa všetky tri vlastnosti metriky a nazýva sa **triviálna metrika na množine** X. Je zrejmé, že triviálnych metrík môžeme na množine X definovať nekonečne veľa.

Príklad 2.2.8.
Okrem euklidovskej metriky sa v priestore R^n, $n \in N$ často používajú pre $x, y \in R^n$, $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $y = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$ metriky ρ_1, ρ_2 definované vzťahmi:

$$\rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad \text{resp.} \quad \rho_2(x,y) = \max\{|x_i - y_i|\,;\, i = 1, 2, \ldots, n\}. \blacksquare$$

Príklad 2.2.9.
V priestore Q^n, $n \in N$ môžeme podobne ako v euklidovskom priestore R^n definovať pre body $x, y \in Q^n$, $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $y = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$ rôzne metriky napríklad vzťahmi:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad \rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x,y) = \max\{|x_i - y_i|; i = 1, 2, \ldots, n\}. \blacksquare$$

Medzi špeciálne typy metrických priestorov patria lineárne normované priestory, ktorých štúdium presahuje rámec týchto skrípt a patrí do funkcionálnej analýzy. Preto sa obmedzíme iba na vysvetlenie ich postavenia medzi metrickými priestormi. Najprv zopakujeme pojem lineárneho priestoru nad telesom reálnych čísel[18].

Vlastnosti lineárnych priestorov by mali byť čitateľovi známe z algebry, preto ich nebudeme uvádzať. V tejto časti sa obmedzíme na lineárne priestory definované nad telesom reálnych čísel R. Väčšinu výsledkov, ktoré odvodíme, môžeme rozšíriť na ľubovoľné lineárne priestory.

[18] V [32], str. 85 je definovaný lineárny priestor nad ľubovoľným telesom.

Množina $X \neq \emptyset$ sa nazýva **lineárny priestor na telesom** R, ak je na X definovaná binárna operácia $\oplus\colon\ X^2 \to X$ a vonkajšia operácia $\otimes\colon\ R \times X \to X$ tak, že platí:
Usporiadaná dvojica $(X, \oplus)$ tvorí komutatívnu grupu, t. j. pre všetky $x, y, z \in X$ platí:

$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$, $\quad \exists! \Theta \in X\ \forall x \in X\colon x \oplus \Theta = x$,
$\forall x \in X\ \exists! y = \ominus x\colon x \oplus y = \Theta$, $\quad x \oplus y = y \oplus x$

a pre všetky $x, y \in X$, $c, d \in R$ a pre $1 \in R$ platí:

$c \otimes (d \otimes x) = (cd) \otimes x$, $\quad (c + d) \otimes x = (c \otimes x) \oplus (d \otimes x)$,
$1 \otimes x = x$, $\quad c \otimes (x \oplus y) = (c \otimes x) \oplus (c \otimes y)$.

Prvky lineárneho priestoru niekedy nazývame **vektory** a lineárny priestor nazývame **vektorovým priestorom**. Prvok Θ nazývame neutrálny (nulový) prvok grupy $(X, \oplus)$ a prvok $\ominus x$ nazývame opačný prvok k prvku x. Potom $x \ominus y = x \oplus (\ominus y)$.

Nech X je lineárny priestor. Zobrazenie, ktoré každému vektoru $x \in X$ priradí reálne číslo $|x|$ nazývame **norma priestoru** X ak, pre všetky $x, y \in X$, $c \in R$ platí:

a) $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$, $\quad$ b) $|c \otimes x| = |c| \cdot |x|$, $\quad$ c) $|x \oplus y| \leq |x| + |y|$.

Lineárny priestor X nazývame **normovaný**, ak je v ňom definovaná norma.

Veta 2.2.17.
Nech X je lineárny normovaný priestor. Ak pre všetky $x, y \in X$ definujeme zobrazenie $\rho\colon\ X^2 \to R$ vzťahom $\rho(x, y) = |x \ominus y|$, potom ρ je metrika na X.

Dôkaz.
Vlastnosť a) z definície metriky je splnená triviálne. Nech $x, y, z \in X$, potom platí:

b) $\rho(y, x) = |y \ominus x| = |(-1) \otimes (x \ominus y)| = |-1| \cdot |x \ominus y| = |x \ominus y| = \rho(x, y)$.

c) $\rho(x, y) = |x \ominus y| = |(x \ominus z) \oplus (z \ominus y)| \leq |x \ominus z| + |z \ominus y| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$. ■

Poznámka 2.2.16.
Z predchádzajúceho vyplýva, že lineárny normovaný priestor je špeciálnym prípadom metrického priestoru. Pod metrikou v lineárnom normovanom priestore budeme vždy rozumieť metriku definovanú vzťahom, ktorý je uvedený vo vete 2.2.17.

Príklad 2.2.10.
V priestore R^n môžeme pre $x \in R^n$, $x = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ definovať normu[19] tiež vzťahmi

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \text{resp.} \quad |x|_2 = \max\{|x_i|\,;\ i = 1, 2, \ldots, n\}. \ ■$$

Nech X je lineárny priestor nad telesom reálnych čísel R a Θ je jeho nulový prvok. Zobrazenie, ktoré každým dvom prvkom $x, y \in X$ priradí číslo (x, y), nazývame **skalárny súčin prvkov** x **a** y, ak pre všetky $x, y, z \in X$ a $c \in R$ platí:

a) $(x, y) \geq 0$, $\ (x, x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \Theta$, $\quad$ b) $(x, y) = (y, x)$,
d) $(x \oplus y, z) = (x, z) + (y, z)$, $\quad$ c) $(c \otimes x, y) = c\,(x, y)$.

Lineárny priestor X potom nazývame **priestor so skalárnym súčinom**.

Ak X je lineárny priestor so skalárnym súčinom, potom môžeme na ňom definovať normu (viď veta 2.2.20) a teda aj metriku. To znamená, že X je metrickým priestorom.

[19] Podobne ako metriku v príklade 2.2.8.

Lema 2.2.18.
Nech X je lineárny priestor nad telesom R, nech $x, y, z \in X$, $c \in R$, potom platí:
a) $(x, y \oplus z) = (x, y) + (x, z)$, b) $(x, c \otimes y) = c\,(x, y)$, b) $(x, \Theta) = 0$.

Dôkaz.
a) $(x, y \oplus z) = (y \oplus z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z)$.
b) $(x, c \otimes y) = (c \otimes y, x) = c\,(y, x) = c\,(x, y)$.
c) $(x, \Theta) = (x, y \oplus (-1 \otimes y)) = (x, y) + (x, -1 \otimes y) = (x, y) - (x, y) = 0$. ■

Veta 2.2.19 (Cauchyho nerovnosť).
Nech X je lineárny priestor so skalárnym súčinom, potom pre všetky $x, y \in X$ platí:
$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}, \quad \text{t. j.} \quad (x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)\,.$$

Dôkaz.
Ak $y = \Theta$, potom je nerovnosť splnená triviálne.
Ak $y \neq \Theta$, potom $(y, y) > 0$. Nech $c \in R$, potom $x \oplus (c \otimes y) \in X$ a platí:
$$0 \leq (x \oplus (c \otimes y), x \oplus (c \otimes y)) = (x, x \oplus (c \otimes y)) + (c \otimes y, x \oplus (c \otimes y)) =$$
$$= (x, x) + (x, c \otimes y) + (c \otimes y, x) + (c \otimes y, c \otimes y) =$$
$$= (x, x) + 2\,(x, c \otimes y) + c\,(y, c \otimes y) = (x, x) + 2c\,(x, y) + c^2\,(y, y)\,.$$
Z toho vyplýva:
$$0 \leq \frac{c^2(y,y) + 2c(x,y) + (x,x)}{(y,y)} = c^2 + 2c\,\frac{(x,y)}{(y,y)} + \frac{(x,x)}{(y,y)} =$$
$$= c^2 + 2c\frac{(x,y)}{(y,y)} + \frac{(x,y)^2}{(y,y)^2} - \frac{(x,y)^2}{(y,y)^2} + \frac{(x,x)}{(y,y)} = \left[c + \frac{(x,y)}{(y,y)}\right]^2 + \frac{(x,x)(y,y) - (x,y)^2}{(y,y)^2}.$$
Táto nerovnosť platí pre všetky $x, y \in X$ a všetky $c \in R$, t. j. aj pre $c = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$.
Po dosadení do nerovnosti dostávame:
$$0 \leq \left[-\frac{(x,y)}{(y,y)} + \frac{(x,y)}{(y,y)}\right]^2 + \frac{(x,x)(y,y) - (x,y)^2}{(y,y)^2} = \frac{(x,x)(y,y) - (x,y)^2}{(y,y)^2}.$$
Pretože menovateľ posledného zlomku je kladný, musí byť čitateľ nezáporný, t. j. platí:
$$(x, x)\,(y, y) - (x, y)^2 \geq 0, \quad \text{resp.} \quad (x, x)\,(y, y) \geq (x, y)^2\,. \;■$$

Veta 2.2.20.
Nech X je lineárny priestor so skalárnym súčinom. Potom zobrazenie $|\cdot| : X \to R$ definované pre každé $x \in X$ vzťahom $|x| = \sqrt{(x, x)}$ je normou v priestore X.

Dôkaz.
Nech $x, y \in X$, $c \in R$. Vlastnosť a) z definície normy je splnená triviálne.
b) $|c \otimes x| = \sqrt{(c \otimes x, c \otimes x)} = \sqrt{c\,(x, c \otimes x)} = \sqrt{c\,(c \otimes x, x)} = \sqrt{c^2\,(x, x)} = |c| \cdot |x|$.
c) Vyplýva na základe Cauchyho nerovnosti z nasledujúcej nerovnosti:
$$|x \oplus y|^2 = (x \oplus y, x \oplus y) = (x, x) + 2\,(x, y) + (y, y) = |x|^2 + 2\,(x, y) + |y|^2 \leq$$
$$\leq |x|^2 + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + |y|^2 = |x|^2 + 2\,|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2\,. \;■$$

Poznámka 2.2.17.
Ak X je lineárny priestor so skalárnym súčinom, potom Cauchyho nerovnosť môžeme písať v tvare $(x, y) \leq |x| \cdot |y|$.

Nech $X \neq \emptyset$ je metrický priestor s metrikou ρ. Nech $x \in X$ a nech $\delta \in R$, $\delta > 0$, potom **δ-okolím bodu x** nazývame množinu $O_\delta(x) = \{y \in X \,;\, \rho(x,y) < \delta\}$.

Nech $A \subset X$, bod $a \in A$ sa nazýva **vnútorný bod množiny A**, ak existuje okolie $O(a)$ bodu a také, že $O(a) \subset A$, t. j. ak existuje $\delta \in R$, $\delta > 0$ tak, že $O_\delta(a) \subset A$.

Bod $a \in X$ sa nazýva **hromadný bod množiny $A \subset X$** práve vtedy, ak v každom jeho okolí leží aspoň jeden bod z množiny A, ktorý je rôzny od bodu a.

Množina $A \subset X$ sa nazýva **otvorená (v priestore X)**, ak každý jej bod je vnútorný. Množina $A \subset X$ sa nazýva **uzavretá v priestore X**, ak obsahuje všetky svoje hromadné body $a \in X$. Ak je množina $A \subset X$ otvorená a zároveň uzavretá v priestore X, nazýva sa **obojaká množina v priestore X**.

Diametrom (priemerom) množiny $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ nazývame $\operatorname{diam} A = \sup\{\rho(x,y) \,;\, x, y \in A\}$. Ak platí $\operatorname{diam} A < \infty$, potom sa množina A nazýva **ohraničená** a ak platí $\operatorname{diam} A = \infty$, množina A sa nazýva **neohraničená**.

Poznámka 2.2.18.
Podobným spôsobom môžeme v metrickom priestore X definovať aj ostatné pojmy (vonkajší bod, hranica, uzáver, ...), ale pre obmedzený rozsah publikácie ich neuvádzame.[20]
V metrických priestoroch platia analogické tvrdenia ako v priestore R^n. Niektoré z nich sú uvedené bez dôkazov vo vetách 2.2.21 a 2.2.22.

Veta 2.2.21.
Nech $X \neq \emptyset$ je metrický priestor, potom:

a) Množiny $\emptyset$, X sú otvorené a uzavreté zároveň.
b) Množina $A \subset X$ je otvorená práve vtedy, ak je $A'_X = X - A$ uzavretá v X.

Veta 2.2.22.
Nech $X \neq \emptyset$ je metrický priestor, potom:

a) Prienik konečného systému otvorených množín z X je otvorená množina.
b) Zjednotenie ľubovoľného systému otvorených množín z X je otvorená množina.
c) Zjednotenie konečného systému uzavretých množín z X je uzavretá množina.
d) Prienik ľubovoľného systému uzavretých množín z X je uzavretá množina.

Nech $X \neq \emptyset$, potom systém $\mathcal{S}$ podmnožín množiny X nazývame **topológia na množine X** a množinu X nazývame **topologický priestor**, ak platí:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{S}$.
b) Prienik konečného počtu množín z $\mathcal{S}$ patrí do $\mathcal{S}$.
c) Zjednotenie ľubovoľného počtu množín z $\mathcal{S}$ patrí do $\mathcal{S}$.

Množiny patriace do topológie $\mathcal{S}$ nazývame **otvorené množiny topologického priestoru X** a ich komplementy nazývame **uzavreté množiny topologického priestoru X**.[21] Množiny $\emptyset$, X sú otvorené aj uzavreté v topologickom priestore X.

Nech $X \neq \emptyset$ je metrický priestor s metrikou ρ. Ak označíme symbolom $\mathcal{S}$ systém všetkých otvorených podmnožín v metrickom priestore X, potom je zrejmé, že $\mathcal{S}$ spĺňa podmienky a), b), c) z predchádzajúcej definície. To znamená, že systém $\mathcal{S}$ je topológia na množine X a každý metrický priestor je zároveň aj topologický priestor.

Uvedený topologický priestor nazývame **topologický priestor priradený metrickému priestoru X s metrikou ρ**, resp. **topologický priestor indukovaný metrickým priestorom X s metrikou ρ**.

[20] Čitateľ ich nájde napr. v [39, 40].
[21] Musíme odlišovať od otvorených a uzavretých množín v metrickom priestore.

Poznámka 2.2.19.
Vo všeobecnosti môže byť na množine zostrojených viac topológií, ale na každej množine $X \neq \emptyset$ môžeme zostrojiť tzv. **diskrétnu topológiu** $\mathcal{S}_1 = 2^X = \{A\,;\ A \subset X\}$ a **antidiskrétnu** (**indiskrétnu**) **topológiu** $\mathcal{S}_2 = \{\emptyset, X\}$.
Tieto topológie sú takpovediac extremálne. Topológia $\mathcal{S}_1$ obsahuje všetky podmnožiny množiny X, takže každá množina $A \subset X$ je v topológii $\mathcal{S}_1$ otvorená a uzavretá.
Topológia $\mathcal{S}_2$ obsahuje minimálny počet množín a otvorené v $\mathcal{S}_2$ sú iba množiny $\emptyset$ a X.
Navyše pre každú topológiu $\mathcal{S}$ zostrojenú nad množinou X platí vzťah $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_1$.

Poznámka 2.2.20.
Systém všetkých otvorených podmnožín euklidovského priestoru R^n, $n \in N$, t. j. systém:
$$\mathcal{E} = \{A\,;\ A \subset R^n,\ A \text{ je otvorená}\}$$
tvorí topológiu. Nazýva sa **euklidovská topológia**.

Nech $X \neq \emptyset$ je topologický priestor s topológiou $\mathcal{S}$, potom systém podmnožín $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ nazývame **bázou topológie** $\mathcal{S}$, ak pre každú množinu $A \in \mathcal{S}$ a každý bod $a \in A$ existuje aspoň jedna množina $B \in \mathcal{B}$ tak, že platí $a \in B$ a $B \subset A$.

Príklad 2.2.11.
Označme $\mathcal{O}$ systém všetkých okolí všetkých bodov z priestoru R^n, t. j. $\mathcal{O} = \{O_\delta(x); x \in R^n, \delta \in R, \delta > 0\}$. Potom $\mathcal{O}$ tvorí bázu euklidovskej topológie $\mathcal{E}$. ■

Poznámka 2.2.21.
Ak zhrnieme doterajšie poznatky o euklidovskom priestore R^n, $n \in N$, potom môžeme povedať, že R^n je lineárny priestor so skalárnym súčinom, normovaný, metrický a topologický priestor.

Príklad 2.2.12.
Nech $X = \{a, b\}$, $a \neq b$, potom môžeme topológiu definovať viacerými spôsobmi:

a) Ak $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$, potom množiny $\{a\}$, $\{b\}$, sú uzavreté.

b) Ak $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, potom množina $\{a\}$ je otvorená a množina $\{b\}$ je uzavretá.

c) Ak $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{b\}, X\}$, potom množina $\{b\}$ je otvorená a množina $\{a\}$ je uzavretá.

d) Ak $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$, potom množiny $\{a\}$, $\{b\}$ sú uzavreté. ■

Príklad 2.2.13.
Nech $n \in N$, potom systém $\mathcal{S}$ všetkých otvorených podmnožín metrického priestoru Q^n, t. j. systém $\mathcal{S} = \{A\,;\ A \subset Q^n,\ A \text{ je otvorená}\}$, tvorí topológiou v priestore Q^n. ■

Cvičenia

2.2.1. Dokážte, že v euklidovskom priestore R^n, $n \in N$ je zjednotením konečného počtu otvorených množín otvorená množina a zjednotením konečného počtu uzavretých množín uzavretá množina.

2.2.2. Dokážte Cauchyho nerovnosť (lema 2.2.12).
[Návod: Pre všetky $t \in R$, $x, y \in R^n$ platí $P(t) = \sum_{i=1}^{n}(tx_i + y_i)^2 \geq 0$. To znamená, že kvadratická rovnica $P(t) = 0$ má najviac jeden reálny koreň, t. j. záporný diskriminant. Iný návod: Pre všetky $x, y \in R^n$ platí $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0$.]

2.2.3. Nájdite všetky hromadné body množín: ♣

a) $\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\,;\, m,n\in N\}$, b) $\{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n}\,;\, m,n\in N\}$, c) $\{\frac{1}{n}\,;\, n\in N\}$,

d) $\{\frac{1}{m^2}+n\,;\, m,n\in N\}$, e) $\{\frac{1}{m}+n^2\,;\, m,n\in N\}$, f) $\{\frac{1}{n^2}\,;\, n\in N\}$,

g) $\{p^2+q^2\,;\, p,q\in Q\}$, h) $\{\frac{1}{n}+p^2\,;\, n\in N,\ p\in Q\}$, i) $\{\frac{1}{p^2}\,;\, p\in Q\}$.

2.2.4. Dokážte, že každá množina, ktorá má nekonečne veľa prvkov, má aspoň jeden hromadný bod.

2.2.5. Dokážte, že zobrazenia ρ_1 a ρ_2 z príkladu 2.2.8 sú metrikami v R^n.

2.2.6. Zostrojte v priestore R^n, $n=2,3,4,5$ s euklidovskou metrikou množinu A s $n+1$ prvkami tak, aby $\{\rho(x,y)\,;\, x,y\in A\}=\{0,1\}$. ♣

2.2.7. Nech R^n, $n\in N$ je euklidovský metrický priestor. Určte diameter množín A, B, $A\cap Q^n$, $B\cap Q^n$, kde $A=(0\,;\,1)^n$, $B=\langle 0\,;\,1\rangle^n$ (karteziánsky súčin n intervalov). ♣

2.2.8. Dokážte, že v euklidovskom priestore R^n, $n\in N$ (s euklidovskou metrikou) platí pre ľubovoľnú množinu $A\subset R^n$ a jej uzáver vzťah $\operatorname{diam} A=\operatorname{diam}\overline{A}$.

2.2.9. Dokážte, že v euklidovskom priestore R^n, $n\in N$ (s euklidovskou metrikou) je pre každé $x\in R^n$ množina $R^n-\{x\}$ otvorená.

2.2.10. Dokážte, že v euklidovskom priestore R neexistujú okrem množín $\emptyset$ a R iné obojaké množiny.

2.2.11. Nech $X=X_1\times X_2$, kde $X_1\neq\emptyset$ je metrický priestor s metrikou ρ_1 a $X_2\neq\emptyset$ je metrický priestor s metrikou ρ_2. Dokážte, že zobrazenie $\rho\colon X\times X\to R$ definované pre $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in X$, predpisom $\rho(x,y)=\rho((x_1;\,x_2)\,,(y_1;\,y_2))=\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)\}$ je metrika na X.

2.2.12. Nech $X=\{1,2,3\}$ a nech $\rho\colon X\times X\to R$ je zobrazenie definované vzťahmi $\rho(1,1)=0$, $\rho(1,2)=1$, $\rho(1,3)=2$, $\rho(2,1)=1$, $\rho(2,2)=0$, $\rho(2,3)=3$, $\rho(3,1)=2$, $\rho(3,2)=3$, $\rho(3,3)=0$. Je zobrazenie ρ metrikou na X? ♣

2.2.13. Zostrojte množinu $X\neq\emptyset$ a zobrazenie $\rho\colon X\times X\to R$ tak, aby: ♣

a) Zobrazenie ρ malo vlastnosti a), b) a nemalo vlastnosť c) metriky.
b) Zobrazenie ρ malo vlastnosti a), c) a nemalo vlastnosť b) metriky.
c) Zobrazenie ρ malo vlastnosti b), c) a nemalo vlastnosť a) metriky.

2.2.14. Zvoľte za množinu X v cvičení 2.2.13 postupne množiny R, R^2, R^3, Q, Q^2, Q^3 a zostrojte zobrazenie ρ s uvedenými vlastnosťami.

2.2.15. Nech $X\neq\emptyset$ je množina a nech $\rho\colon X\times X\to R$ je zobrazenie také, že pre všetky $x\in X$ platí $\rho(x,x)=0$ a pre všetky $x,y\in X$, $x\neq y$ platí $\rho(x,y)\neq 0$. Nech pre ľubovoľné $x,y,z\in X$ platí nerovnosť $\rho(z,x)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$. Dokážte, že zobrazenie ρ je metrika na X. (Nepredpokladáme nezápornosť a symetriu zobrazenia ρ.)

2.2.16. Nech $X\neq\emptyset$ je metrický priestor s triviálnou metrikou ρ_a, kde $a\in R$, $a>0$.

a) Dokážte, že každá množina $A\subset X$ je obojaká v X.
b) Dokážte, že pre každú množinu $A\subset X$ platí $A=\operatorname{int} A$, $\partial A=\emptyset$.

2.2.17. Nech ρ_1 a ρ_2 sú dve metriky definované na množine $X \neq \emptyset$. Rozhodnite, či je metrikou na množine X tiež zobrazenie $\rho\colon\ X \times X \to R$ definované pre $x, y \in X$ vzťahom: ♣

a) $\rho(x,y) = \rho_1(x,y) + \rho_2(x,y)$,
b) $\rho(x,y) = \max\{\rho_1(x,y),\ \rho_2(x,y)\}$,
c) $\rho(x,y) = \rho_1(x,y) \cdot \rho_2(x,y)$,
d) $\rho(x,y) = \min\{\rho_1(x,y),\ \rho_2(x,y)\}$.

2.2.18. Zostrojte topológiu na množine $X = \{1, 2, 3\}$, aby mala práve: ♣

a) 3 prvky, b) 4 prvky, c) 5 prvkov, d) 6 prvkov, e) 7 prvkov.

2.2.19. Nech x je ľubovoľná nekonečná množina a nech $\mathcal{S}$ je systém jej podmnožín, ktorý obsahuje $\emptyset$ a každú množinu $A \subset X$, ktorej doplnok je konečná množina, t. j. $\mathcal{S} = \{A \subset X; A'_X = X - A$ je konečná$\}$. Dokážte, že $\mathcal{S}$ je topológia na X.[22]

2.2.20. Nech x je neprázdna množina a nech $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ sú topológie definované na X. Dokážte, že systémy $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ a $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ sú tiež topológie na X.

2.2.21. Určte, či systém $\mathcal{B}$ tvorí bázu euklidovskej topológie v priestore R. ♣

a) $\mathcal{B} = \{(x\,;\,y)\ ;\ x, y \in R\}$,
b) $\mathcal{B} = \left\{O_\delta(x)\,;\, x \in R, \delta = \frac{1}{n},\ n \in N\right\}$,
c) $\mathcal{B} = \{(x\,;\,y)\ ; \in R,\ y \in Q\}$,
d) $\mathcal{B} = \left\{O_\delta(x)\,;\, x \in Q, \delta = \frac{1}{n},\ n \in N\right\}$,
e) $\mathcal{B} = \{(x\,;\,y)\ ;\ x, y \in Q\}$,
f) $\mathcal{B} = \{(-\infty\,;\,x)\ ;\ x \in R\} \cup \{(x\,;\,\infty)\ ;\ x \in R\}$.

2.3 Postupnosti reálnych čísel

2.3.1 Základné pojmy

Pojem postupnosti sme zaviedli už v predchádzajúcej kapitole. **Postupnosťou** nazývame každé zobrazenie, ktorého definičným oborom je množina prirodzených čísel N. V tejto časti sa budeme zaoberať postupnosťami, ktorých obory hodnôt sú podmnožinami množiny reálnych čísel.

Postupnosťou reálnych čísel (**reálnou postupnosťou**) nazývame každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej množina hodnôt (obor hodnôt) je podmnožina množiny R. To znamená, že všetky $n \in N$ platí $a_n \in R$. Pokiaľ nepovieme ináč, budeme pod pojmom postupnosť rozumieť postupnosť reálnych čísel.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadávame **explicitným** (**všeobecným**) **vyjadrením** člena a_n ako funkciu premennej n alebo **rekurentným zadaním** prvého člena a člena a_n pomocou predchádzajúcich členov. Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zadaná **explicitne** (**všeobecným vzorcom**), resp. **rekurentne**.

Hovoríme, že **postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$** (**postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovnajú**) práve vtedy, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n$. Rovnosť postupností symbolicky zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka 2.3.1.
Nesmieme zabúdať, že reálna postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zobrazením $f\colon\ N \to R$, t. j.

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{[n; f(n)]\ ;\ n \in N\} = \{[1; f(1)], [2; f(2)], [3; f(3)], \ldots, [n; f(n)], \ldots\}.$$

To znamená, že každý člen a_n prakticky predstavuje usporiadanú dvojicu $[n; f(n)]$.

Príklad 2.3.1.
a) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ môžeme explicitne zadať vzťahom $a_n = 2n-1$, $n \in N$ a rekurentne vzťahmi $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$ pre $n \in N$.

b) Postupnosť $\{5^{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rekurentne zadaná vzťahmi $a_1 = 25$, $a_{n+1} = 25a_n$, $n \in N$.

c) Explicitný zápis $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in N$ definuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. ■

[22] Množinu X s topológiou $\mathcal{S}$ nazývame **topologický priestor konečných doplnkov**.

Poznámka 2.3.2.
Ak poznáme konečný počet členov postupnosti, neznamená to, že poznáme celú postupnosť. Napríklad čísla $1, 2, 4$ predstavujú prvé tri členy každej z postupností

$$\{1, 2, 4, 1, 2, 4, \ldots\}\,,\ \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}\,,\ \{1, 2, 4, 1, 2, 4, \ldots\}\,,\ \{1, 2, 4, 1, 1, 1, \ldots\}\,.$$

Poznámka 2.3.3.
Niekedy je potrebné definovať postupnosť nie od prvého člena, ale od nejakého člena a_k, kde $k \in N$. V praxi sa často stretávame s postupnosťami zadanými od nultého člena, t. j. s postupnosťami $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Dokonca sa môže stať, že k je záporné celé číslo.
Postupnosť v takom prípade zapisujeme symbolom $\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$.
Ak označíme postupne pre $n \in N$ členy $b_n = a_{n+k-1}$, potom platí:

$$\{a_n\}_{n=k}^{\infty} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} = \{a_{1+k-1}, a_{2+k-1}, \ldots\} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}\,.$$

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **ohraničená zdola** [resp. **ohraničená zhora**], ak je ohraničená zdola [resp. ohraničená zhora] množina jej hodnôt. Ak je ohraničená zdola a zároveň ohraničená zhora, potom sa nazýva **ohraničená**.

Ak nie je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená zdola [resp. zhora], potom sa nazýva **neohraničená zdola** [resp. **zhora**]. Ak nie je ohraničená, nazýva sa **neohraničená**.

Poznámka 2.3.4.
Z predchádzajúcej definície vyplýva, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **ohraničená zdola**, ak existuje $m \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n$.
Analogicky je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **ohraničená zhora**, ak existuje $M \in R$ tak, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq M$.
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **ohraničená**, ak existujú $m, M \in R$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $m \leq a_n \leq M$, t. j. ak existuje $s \in R$, že pre všetky $n \in N$ platí $|a_n| \leq s$.
Postupnosť je neohraničená, ak nie je ohraničená zdola alebo nie je ohraničená zhora.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva:
- **rastúca** [resp. **klesajúca**], ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$ [resp. $a_n > a_{n+1}$].
- **neklesajúca** [resp. **nerastúca**], ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \leq a_{n+1}$ [resp. $a_n \geq a_{n+1}$].
- **stacionárna** (**konštantná**), ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n = a_1 = a$, t. j. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **monotónna**, ak je neklesajúca, nerastúca alebo stacionárna. Ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca alebo klesajúca, potom sa nazýva **rýdzo monotónna**.

Nech $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Potom sa postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazýva **podpostupnosť** (**vybraná postupnosť z**) **postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Príklad 2.3.2.
Určíme niektoré vybrané postupnosti z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$.
Ak vyberieme párne členy, t. j. $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, potom

$$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots\} = \{4n-1\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}\,.$$

Ak $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$, potom

$$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{n^2}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots\} = \{2n^2-1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 7, 17, 31, \ldots\}\,.$$

Vybrané sú tiež postupnosti $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$, $\{2n-1\}_{n=2}^{\infty}$, $\{101, 109, 235, 637, \ldots\}$. ■

Súčtom, **rozdielom**, **súčinom**, resp. **podielom postupností** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **a** $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame postupnosti $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n-b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. V prípade podielu predpokladáme, že pre všetky $n\in N$ platí $b_n\neq 0$.

Poznámka 2.3.5.
Z danej postupnosti môžeme vytvoriť nové postupnosti mnohými spôsobmi, napríklad

$$\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{\sin a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{\ln a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{5a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

2.3.2 Limita postupnosti

Jedným zo základných pojmov v matematickej analýze je limita[23] a s ňou spojené limitné procesy. V tejto časti sa budeme zaoberať limitami postupností. S tým súvisí pojem hromadná hodnota postupnosti. Najprv si to ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 2.3.3.
a) Uvažujme postupnosť

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}.$$

Postupnosť je klesajúca a s rastúcou hodnotou n sa členy a_n blížia k bodu 0. Bod 0 je hranica, ktorú nikdy neprekročia. Môžeme povedať, že sa body a_n hromadia v bode 0.

b) Uvažujme postupnosť

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{n, \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots\right\}.$$

Nepárne členy a_n sa neobmedzene zväčšujú a párne členy zmenšujú. Nepárne sa približujú (hromadia) k bodu ∞. Párne členy sa približujú (hromadia) k bodu 0. ■

Hovoríme, že bod $a\in R^*$ je **hromadnou hodnotou** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa členov a_n takých, že $a_n\in O(a)$.

Ak $a\in R$, potom hovoríme o **vlastnej hromadnej hodnote**. Ak $a=-\infty$ alebo $a=\infty$, potom hovoríme o **nevlastnej hromadnej hodnote**.

Poznámka 2.3.6.
Bod $a\in R$ je vlastnou hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé $\varepsilon>0$ existuje nekonečne veľa členov a_n takých, že platí $a_n\in(a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon)$, t. j. $|a_n-a|<\varepsilon$.
Bod ∞ [resp. $-\infty$] je nevlastnou hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé $K\in R$ [resp. $L\in R$] existuje nekonečne veľa členov a_n takých, že $K<a_n$ [resp. $a_n<L$].

Veta 2.3.1.
Každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu hromadnú hodnotu.

Dôkaz.
Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neohraničená zhora, potom pre každé $\alpha\in R$ existuje aspoň jedno $a_n>\alpha$. Vzhľadom na to, že čísel väčších ako α existuje nekonečne veľa, musí existovať aj nekonečne veľa členov $a_n>\alpha$. To znamená, že $a=\infty$ je hromadnou hodnotou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neohraničená zdola, potom analogicky je hromadnou hodnotou $a=-\infty$.

[23]Odvodené z latinského slova *limes* — hranica.

Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, potom existuje interval $\langle b_1\,;\,c_1\rangle$ taký, že všetky $a_n \in \langle b_1\,;\,c_1\rangle$. Označme jeho dĺžku $d = c_1 - b_1$ a rozdeľme ho na dva rovnaké intervaly

$$\left\langle b_1\,;\,\tfrac{b_1+c_1}{2}\right\rangle, \qquad \left\langle \tfrac{b_1+c_1}{2}\,;\,c_1\right\rangle.$$

V aspoň jednom z nich leží nekonečne veľa členov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme ho $\langle b_2\,;\,c_2\rangle$. Pre jeho dĺžku platí $c_2 - b_2 = \frac{d}{2} = \frac{d}{2^{2-1}}$. Rozdeľme $\langle b_2\,;\,c_2\rangle$ na dva rovnaké intervaly

$$\left\langle b_2\,;\,\tfrac{b_2+c_2}{2}\right\rangle, \qquad \left\langle \tfrac{b_2+c_2}{2}\,;\,c_2\right\rangle.$$

V aspoň jednom z nich leží nekonečne veľa členov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme ho $\langle b_3\,;\,c_3\rangle$. Pre jeho dĺžku platí $c_3 - b_3 = \frac{d}{2^2} = \frac{d}{2^{3-1}}$. Rozdeľme $\langle b_3\,;\,c_3\rangle$ na dva rovnaké intervaly, atď.

Predpokladajme, že pre $m \in N$ máme zostrojený interval $\langle b_m\,;\,c_m\rangle$. Rozdelíme ho na dva rovnaké intervaly a symbolom $\langle b_{m+1}\,;\,c_{m+1}\rangle$ označme ten z intervalov

$$\left\langle b_m\,;\,\tfrac{b_m+c_m}{2}\right\rangle, \qquad \left\langle \tfrac{b_m+c_m}{2}\,;\,c_m\right\rangle$$

v ktorom leží nekonečne veľa členov a_n. Pre jeho dĺžku platí $c_{m+1} - b_{m+1} = \frac{d}{2^m}$.
Je zrejmé, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje interval $\langle b_m\,;\,c_m\rangle$ taký, že $c_m - b_m < \frac{d}{2^{m-1}} < \varepsilon$.
Potom (veta 2.1.31) existuje práve jeden bod $a \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \langle b_m\,;\,c_m\rangle$.
Ak to zhrnieme, potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje interval $\langle b_m\,;\,c_m\rangle$, v ktorom leží nekonečne veľa členov a_n, pre ktoré platí $|a_n - a| \leq c_m - b_m < \varepsilon$. To znamená, že a je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Dôsledok 2.3.1.a.
Ak je postupnosť ohraničená, potom má aspoň jednu reálnu hromadnú hodnotu $a \in R$.
Ak je postupnosť neohraničená zhora, potom má hromadnú hodnotu ∞.
Ak je postupnosť neohraničená zdola, potom má hromadnú hodnotu $-\infty$.

Poznámka 2.3.7.
Musíme odlišovať hromadné hodnoty (body) postupnosti od hromadných bodov množiny hodnôt postupnosti a definičného oboru postupnosti. Definičným oborom každej postupnosti je množina N, ktorá má práve jeden hromadný bod ∞.
Z vety 2.3.1 vyplýva, že každá postupnosť má aspoň jednu hromadnú hodnotu, ale množina hodnôt hromadný bod mať nemusí. Napríklad postupnosť $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ má jednu hromadnú hodnotu 1, ale množina jej hodnôt $\{1\}$ hromadné body nemá.

Označme E **množinu všetkých hromadných hodnôt postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Suprémum množiny E nazývame **limes superior** (**horná limita**) **postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, resp. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Analogicky infimum množiny E nazývame **limes inferior** (**dolná limita**) **postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, resp. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Poznámka 2.3.8.
Označme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = A$, pričom $a, A \in R$. Nech $\varepsilon > 0$.
Z definície vyplýva, že v intervale $(-\infty\,;\,a-\varepsilon)$ leží konečný počet členov a_n. Predpokladajme, že v tomto intervale leží nekonečne veľa členov a_n. Potom z dôkazu vety 2.3.1 vyplýva, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadnú hodnotu menšiu alebo rovnú ako $a-\varepsilon$. To je spor s tým, že a je infimum množiny hromadných hodnôt.
Podobne v intervale $(A+\varepsilon\,;\,\infty)$ leží najviac konečný počet členov a_n.
Z toho vyplýva, že v množine $(-\infty\,;\,a-\varepsilon) \cup (A+\varepsilon\,;\,\infty)$ leží konečný počet členov a_n, t. j. od nejakého indexu ležia všetky členy a_n v intervale $(a-\varepsilon\,;\,A+\varepsilon)$.

To znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$a_n \in (a - \varepsilon\,;\, A + \varepsilon)\,, \quad \text{t. j.} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon < a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon.$$

Príklad 2.3.4.
Bod 0 je hromadnou hodnotou postupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Riešenie.
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca a ohraničená zdola bodom 0.
Nech $\varepsilon > 0$, potom základe vety 2.1.27 existuje $n_0 \in N$ tak, že $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.
Potom pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad 0 - \varepsilon < a_n < 0 + \varepsilon.$$

To znamená, že pre nekonečne veľa členov a_n platí $a_n \in O_\varepsilon(0)$. ■

Príklad 2.3.5.
a) Postupnosť $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$ má dve hromadné hodnoty 0 a 1.
b) Postupnosť $\{2n - 1\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ má jednu nevlastnú hromadnú hodnotu ∞.
c) Postupnosť $\{n, -n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 2, -2, \ldots\}$ má dve nevlastné hromadné hodnoty ∞ a $-\infty$.
d) Postupnosť $\left\{n, \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ má dve hromadné hodnoty 0 a ∞.
e) Postupnosť $\left\{0, \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ má jednu hromadnú hodnotu 0. ■

Bod $a \in R^*$ nazývame **limita postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, ak je a jedinou hromadnou hodnotou tejto postupnosti, t. j. ak platí $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$. Limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označujeme symbolom $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R$, potom bod a nazývame **vlastná limita postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a hovoríme, že **postupnosť** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje k číslu** a. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **konvergentná postupnosť**. Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu 0, potom ju nazývame **nulová postupnosť**.

Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ [resp. $-\infty$], potom bod $\pm\infty$ nazývame **nevlastná limita postupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a hovoríme, že **postupnosť** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **diverguje do** ∞, [resp. $-\infty$].

Ak $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, potom hovoríme, že **postupnosť** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **osciluje**.

Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **diverguje**, ak osciluje alebo diverguje do $\pm\infty$. Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $a \in R$, potom hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje**.

Poznámka 2.3.9.
Ak nie je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, je divergentná a môžu nastať tri prípady:
a) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, t. j. postupnosť diverguje do $-\infty$.
b) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, t. j. postupnosť diverguje do ∞.
c) $\liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n$, t. j. $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje a postupnosť osciluje.

Príklad 2.3.6.
a) Postupnosti $\{0, 1, 0, 1, \ldots\}$, $\{n, -n\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{n, \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ oscilujú, t. j. ich limita neexistuje.
b) Limita postupností $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{0, \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovná 0, t. j. konvergujú k číslu 0.
c) Postupnosti $\{2n - 1\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^3\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^n\}_{n=1}^{\infty}$ divergujú do ∞. ■

Príklad 2.3.7.
Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}_{n=1}^{\infty}$, $a \in R$ je konštantná postupnosť, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a = a$. ■

Z definície vyplýva, že každá postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ môže mať najviac jednu limitu
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \text{kde } a \in R^*.$$

Veta 2.3.2.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R^*$ práve vtedy, ak pre každé okolie $O(a)$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n \in O(a)$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech existuje $O(a)$ také, že pre všetky $n_0 \in N$ existuje $n \geq n_0$ také, že $a_n \notin O(a)$. T. j. existuje nekonečne veľa $a_n \notin O(a)$. Potom na základe dôkazu vety 2.3.1 má postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ďaľšiu hromadnú hodnotu $b \neq a$. To je spor s definíciou limity.

$PP_{\Leftarrow}$: Je zrejmé, že a je hromadným bodom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukážeme sporom, že je jediným. Ak $b \neq a$ je hromadným bodom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom v každom okolí $O(b)$ existuje nekonečne veľa $a_n \in O(b)$. Ak zvolíme $O(b) \cap O(a) = \emptyset$, potom neexistuje n_0 také, aby pre všetky $n \geq n_0$ platilo $a_n \in O(a)$. To je spor. ■

Poznámka 2.3.10.
Nech $a \in R$, uvedieme symbolické vyjadrenie limity postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N,\ n \geq n_0\colon\ a_n \in (a-\varepsilon\,;\, a+\varepsilon)\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K \in R\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N,\ n \geq n_0\colon\ K < a_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall L \in R\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N,\ n \geq n_0\colon\ a_n < L.$$

Veta 2.3.3.
Bod $a \in R^*$ je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, ak existuje vybraná postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Nech $a \in R^*$ je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Ak $a \in R$, potom pre každé $k \in N$ existuje nekonečne veľa a_n takých, že $|a_n - a| < \frac{1}{k}$. Potom postupne pre každé k vyberieme jeden z týchto členov tak, aby jeho index bol väčší ako index predtým vybratého a označíme a_{k_n}. Z konštrukcie vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.
Ak $a = \infty$ [resp. $a = -\infty$], potom pre každé $k \in N$ existuje nekonečne veľa členov a_n takých, že platí $k < a_n$ [$a_n < k$]. Analogicky zvolíme pre každé $k \in N$ jeden z nich a označíme a_{k_n}, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$ [resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = -\infty$].
$PP_{\Leftarrow}$: Vyplýva z definície hromadnej hodnoty, limity a z poznámky 2.3.10. ■

Príklad 2.3.8.
a) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0,1\}_{n=1}^{\infty} = \{0,1,0,1,\ldots\}$ má dve hromadné hodnoty 0, 1.
Vybrané postupnosti sú $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{0,0,0,\ldots\}$ a $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1,1,1,\ldots\}$, pričom
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

b) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-n, 0, n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 0, 1, -2, 0, 2, -3, 0, 3, \ldots\}$ má tri hromadné hodnoty $-\infty$, 0 a ∞, pričom príslušné vybrané postupnosti sú napríklad

$$\{-n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, -2, -3, \ldots\}, \quad \{0\}_{n=1}^{\infty} = \{0, 0, 0, \ldots\}, \quad \{n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 3, \ldots\}. \blacksquare$$

V mnohých prípadoch môžeme o konvergencii postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozhodnúť aj bez toho, aby sme poznali jej limitu. Táto skutočnosť vyplýva z axiómy o najmenšom hornom ohraničení. Základné kritérium pre nutnú a postačujúcu podmienku konvergencie postupnosti, je uvedené v nasledujúcej vete.

Veta 2.3.4 (Cauchy–Bolzanov princíp konvergencie postupnosti).
Postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje práve vtedy, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $m, n \in N$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Potom pre každé $\varepsilon > 0$, t. j. aj $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $m, n \in N$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Potom pre všetky $m, n \in N$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí:

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$PP_{\Leftarrow}$: Sporom. Nech má postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dve rôzne hromadné hodnoty a', a''.
Potom existujú podpostupnosti $\{a_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = a'$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{j_n} = a''$.
Potom pre každé $\varepsilon > 0$, t. j. aj pre $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ platí:
Existuje $n_1 \in N$ také, že pre všetky $i_n \in N$, $i_n \geq n_1$ platí $|a_{i_n} - a'| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Existuje $n_2 \in N$ také, že pre všetky $j_n \in N$, $j_n \geq n_2$ platí $|a_{j_n} - a''| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Pre všetky $m, n \in N$ $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Potom pre každé $i_n, j_n \in N$, $i_n \geq \max\{n_1, n_2, n_0\}$, $j_n \geq \max\{n_1, n_2, n_0\}$ platí:

$$|a' - a''| \leq |a' - a_{i_n}| + |a_{i_n} - a_{j_n}| + |a_{j_n} - a''| < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Z toho vyplýva, že pre každé $\varepsilon > 0$ platí $|a' - a''| < \varepsilon$.
Potom na základe vety 2.1.13 platí $|a' - a''| = 0$, t. j. $a' = a''$. To je spor.
To znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má práve jednu hromadnú hodnotu a konverguje. $\blacksquare$

Ako dokazuje príklad 2.3.9, v priestore všetkých racionálnych čísel veta 2.3.4 neplatí. To znamená, že aj keď postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ racionálnych čísel spĺňa Cauchy–Bolzanovu podmienku konvergencie, nemusí konvergovať k racionálnemu číslu.

Niekedy je výhodné v predpokladoch vety 2.3.4 nahradiť hodnotu m hodnotou $n + k$, kde $k \in N$ je ľubovoľné.

Dôsledok 2.3.4.a.
Postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje práve vtedy, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ a všetky $k \in N$ platí $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$.

Príklad 2.3.9.
Zostrojte postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ racionálnych čísel, ktorá konverguje k iracionálnemu číslu.

Riešenie.
Postupnosť $\left\{\sqrt{2} - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a zhora ohraničená číslom $\sqrt{2}$.
Pre všetky $n \in N$ zvoľme bod $a_n \in Q$ tak, aby (obr. 2.3.13) platilo

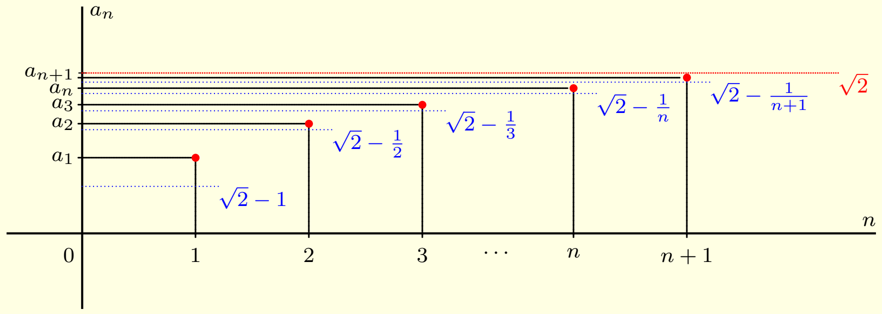
$$\sqrt{2} - \tfrac{1}{n} < a_n < \sqrt{2} - \tfrac{1}{n+1}, \qquad \text{t. j.} \quad a_n \in \left(\sqrt{2} - \tfrac{1}{n}\,;\ \sqrt{2} - \tfrac{1}{n+1}\right).$$

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a pre všetky $n \in N$ platí $\sqrt{2} - a_n < \frac{1}{n}$.
Nech $\varepsilon > 0$, potom existuje $n_0 \in N$ také, že $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ a pre všetky $m \in N$, $m \geq n_0$ platí:

$$\left|\sqrt{2} - a_m\right| = \sqrt{2} - a_m < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

To znamená, že racionálna postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k iracionálnemu číslu $\sqrt{2}$, t. j. nekonverguje v množine Q. Ale $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňa predpoklady vety 2.3.4, pretože pre všetky $m, n \in N$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ platí:

$$|a_m - a_n| = \sqrt{2} - a_{n_0} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \blacksquare$$



Obr. 2.3.13: Obrázok k príkladu 2.3.9.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **cauchyovská** (**fundamentálna**), ak spĺňa Cauchy–Bolzanov princíp konveregencie, t. j. ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $m, n \in N$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Z definície vyplýva, že v množine reálnych čísel R je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná práve vtedy, ak je fundamentálna. V množine Q toto tvrdenie neplatí, ale je zrejmé, že každá konvergentná postupnosť je fundamentálna.

Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazývajú **ekvivalentné**, ak existuje postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$ a pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n c_n$. Ekvivalentné postupnosti značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. V opačnom prípade píšeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \not\sim \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Príklad 2.3.10.

a) $\{n+1\}_{n=1}^{\infty} \sim \{n\}_{n=1}^{\infty}$, pretože $n+1 = n(1+\frac{1}{n})$ a $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$.

b) $\{n\}_{n=2}^{\infty} \sim \{n\}_{n=1}^{\infty}$, pretože postupnosť $\{n\}_{n=2}^{\infty}$ môžeme vyjadriť v tvare $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$.

c) $\{n^2\}_{n=1}^{\infty} \not\sim \{n\}_{n=1}^{\infty}$, pretože pre $n \in N$ platí $n^2 = n \cdot n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \neq 1$. $\blacksquare$

2.3.3 Prehľad základných tvrdení

V tejto časti sformulujeme a dokážeme niektoré jednoduché tvrdenia, ktoré nám uľahčia prácu s postupnosťami a hlavne s limitami postupností. Ako sme už uviedli, pod pojmom postupnosť budeme rozumieť postupnosť reálnych čísel.

Veta 2.3.5.
Bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak existuje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov množiny A, kde $a_n \neq a$ pre všetky $n \in N$ taká, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Dôkaz.
Z poznámky 2.2.8 vyplýva, že bod $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny $A \subset R$ práve vtedy, ak v každom jeho okolí leží nekonečne veľa bodov, ktoré sú rôzne od bodu a.
Na druhej strane je bod a hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že v každom jeho okolí leží nekonečne veľa bodov z tejto postupnosti, t. j. bodov $a_n \in A$, $a_n \neq a$.
Keďže uvedené tvrdenia sú ekvivalentné, dôkaz je ukončený. ■

Príklad 2.3.11.
Bod 0 je hromadným bodom intervalu $(0\,;\,2)$. Postupnosť $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu 0 a pre všetky $n \in N$ platí $\frac{1}{n} \neq 0$, $\frac{1}{n} \in (0\,;\,2)$. ■

Veta 2.3.6.
Nech existuje $k \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq k$ platí $a_n = b_n$.
Potom množiny hromadných hodnôt postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa rovnajú.

Dôkaz.
Ak $a \in R^*$ je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom v každom okolí $O(a)$ existuje nekonečne veľa bodov $a_n = b_n$. To znamená, že a je hromadným bodom $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Ak $b \in R^*$ je hromadnou hodnotou $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom v každom okolí $O(b)$ existuje nekonečne veľa bodov $b_n = a_n$. To znamená, že b je hromadnou hodnotou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Dôsledok 2.3.6.a.
Nech existuje $k \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq k$ platí rovnosť $a_n = b_n$.
Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje práve vtedy, ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a limity sa rovnajú.

Poznámka 2.3.11.
Z vety 2.3.6 vyplýva, že **konečný počet členov postupnosti neovplyvní konvergenciu, resp. divergenciu postupnosti**. V budúcnosti budeme tvrdenia pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ formulovať v zjednodušenom tvare pre všetky členy a_n. V zmysle vety 2.3.6 budú tieto tvrdenia platiť aj v prípade, keď vynecháme konečný počet členov.

Veta 2.3.7.
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť a nech $a \in R^*$, potom
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ práve vtedy, ak pre každú podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech existuje podpostupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = b \neq a$.
Z vety 2.3.3 vyplýva, že b je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Takže postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má dve rôzne hromadné hodnoty a nemá limitu. To je spor.
$PP_{\Leftarrow}$: Z vety 2.3.3 vyplýva, že a je jedinou hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. ■

Dôsledok 2.3.7.a.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, potom pre všetky $k \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = a$.

Dôsledok 2.3.7.b.
Ak sa z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dajú vybrať podpostupnosti $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{l_n}\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n}$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

Príklad 2.3.12.
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, 2, 0, 2, \ldots\}$ osciluje.
Stačí vybrať konštantné postupnosti $\{0, 0, 0, \ldots\} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{2, 2, 2, \ldots\} = \{2\}_{n=1}^{\infty}$,
pre ktoré platí $\lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq 2 = \lim_{n\to\infty} 2$. ■

Príklad 2.3.13.
Dokážte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Riešenie.
Z príkladu 2.3.4 a vyplýva, že bod 0 je jedinou hromadnou hodnotou postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. ■

Veta 2.3.8.
Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, potom je ohraničená.

Dôkaz.
Sporom. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a nie je ohraničená.
Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zhora, potom z dôsledku 2.3.1.a vyplýva, že ∞ je jej hromadným bodom.
To je spor s konvergenciou a znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená.
Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je ohraničená zdola, dôkaz je analogický. ■

Poznámka 2.3.12.
Opačné tvrdenie z predchádzajúcej vety neplatí. Ohraničená postupnosť nemusí konvergovať. Napríklad postupnosť $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, ale nekonverguje.

Veta 2.3.9 (Bolzano–Weierstrass).
Z každej ohraničenej postupnosti sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť.

Dôkaz.
Z vety 2.3.1 vyplýva, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má aspoň jednu reálnu hromadnú hodnotu a. Z vety 2.3.3 vyplýva existencia vybranej postupnosti, ktorá konverguje k a. ■

Množina $A \subset R$ sa nazýva **kompaktná (v množine R)**, ak z každej postupnosti bodov množiny A sa dá vybrať postupnosť, ktorá v nej konverguje.

To znamená, že množina A je kompaktná práve vtedy, ak pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $a_n \in A$ pre všetky $n \in N$, platí $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$.

Najjednoduchším príkladom kompaktnej množiny je prázdna množina. Z nasledujúcej vety vyplýva, že každá konečná množina a každý uzavretý interval sú kompaktné množiny.

Veta 2.3.10.
Množina $A \subset R$ je kompaktná práve vtedy, ak je uzavretá a ohraničená.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Uzavretosť. Nech a je hromadný bod množiny A.
Potom (veta 2.3.5) existuje postupnosť bodov z A, ktorá konverguje ku a.
Z kompaktnosti vyplýva, že $a \in A$. To znamená, že je A uzavretá.
Ohraničenosť. Sporom, nech A nie je ohraničená.
Ak je neohraničená zhora, potom pre každé $n \in N$ existuje bod $a_n \in A$ taký, že $a_n > n$.

Je zrejmé, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje do ∞.
Potom (veta 2.3.7) každá jej vybraná postupnosť diverguje do ∞.
To znamená, že z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nedá vybrať konvergentná podpostupnosť a množina A nie je kompaktná. To je spor.
Ak je množina A neohraničená zdola, postup je analogický.

PP$_{\Leftarrow}$: Ak je množina A ohraničená, potom aj každá postupnosť bodov množiny A je ohraničená a podľa vety 2.3.9 sa z nej dá vybrať konvergentná postupnosť.
Pretože je množina A uzavretá, limita tejto postupnosti patrí do A. ■

Veta 2.3.11.
Každá monotónna postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu (aj nevlastnú) a platí:

a) Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesajúca, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\,;\, n\in N\}$.

b) Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\,;\, n\in N\}$.

Dôkaz.
a) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca, t. j. pre $m, n\in N$, $n < m$ platí $a_n \leq a_m$.
Nech nie je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zhora ohraničená.
Potom pre všetky $K\in R$ existuje $n_0\in N$ také, že platí:

$$a_{n_0} > K, \quad \text{t. j.} \quad \sup\{a_n\,;\, n\in N\} = \infty.$$

To znamená, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$a_n \geq a_{n_0} > K, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Nech je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zhora ohraničená, označme $\sup\{a_n\,;\, n\in N\} = a$.
Je zrejmé, že $a\in R$ a pre všetky $n\in N$ platí $a_n \leq a$.
Z toho vyplýva, že pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0\in N$ také, že $a_{n_0} > a - \varepsilon$.
Potom pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$. Z toho vyplýva:

$$|a - a_n| = a - a_n < \varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

b) Dôkaz je analogický. Druhá možnosť je využiť neklesajúcu postupnosť $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Poznámka 2.3.13.
Z vety vyplýva, že ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesajúca [resp. nerastúca], potom pre všetky $n\in N$ platí $a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ [resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq a_n$].

Dôsledok 2.3.11.a.
Ak je postupnosť neklesajúca a ohraničená zhora, resp. nerastúca a ohraničená zdola, potom konverguje.

Dôsledok 2.3.11.b.
Ak je postupnosť rastúca a neohraničená zhora, potom diverguje do ∞ a ak je klesajúca a neohraničená zdola, potom diverguje do $-\infty$.

Veta 2.3.12.
Z každej konvergentnej postupnosti sa dá vybrať monotónna podpostupnosť.

Dôkaz.
Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a\in R$. Dôkaz rozložíme na niekoľko častí.

a) Ak pre nekonečne veľa členov platí $a_n = a$, potom vyberieme podpostupnosť $\{a\}_{n=1}^{\infty}$.

b) Nech pre všetky členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n > a$.
Bod a je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
To znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečne veľa členov a_n takých, že platí:

$$0 \leq |a_n - a| = a_n - a < \varepsilon.$$

Vybranú monotónnu postupnosť $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ zostrojíme nasledovne.
Položíme $a_{k_1} = a_1$ a označíme $\varepsilon = a_{k_1} - a$.
Člen a_{k_2} vyberieme tak, aby $k_2 > k_1$, $a_{k_2} - a < \frac{\varepsilon}{2}$.
Člen a_{k_3} vyberieme tak, aby $k_3 > k_2$, $a_{k_3} - a < \frac{\varepsilon}{2^2}$.
Člen a_{k_n} vyberieme tak, aby $k_n > k_{n-1}$, $a_{k_n} - a < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$.
Je zrejmé, že $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca a podľa vety 2.3.7 konverguje k a.

c) Nech pre všetky členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n < a$, potom môžeme analogickým spôsobom ako v časti b) zostrojiť rastúcu podpostupnosť.

d) Ak nie je splnená ani jedna z možností a), b), c), potom rovnosť $a_n = a$ platí iba pre konečný počet členov a_n. V tomto prípade pre nekonečne veľa členov a_n platí $a_n > a$ alebo pre nekonečne veľa členov a_n platí $a_n < a$ (môžu nastať obidve možnosti).
Týchto nekonečne veľa členov tvorí vybranú postupnosť z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a z nej môžeme na základe časti b), resp. časti c) vybrať monotónnu podpostupnosť, ktorá bude zároveň aj podpostupnosťou pôvodnej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Veta 2.3.13.
Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, pričom $a, b \in R^*$ a nech $c \in R$.
Ak majú príslušné výrazy v množine R^* zmysel, potom platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = |a|$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$.

Dôkaz.
Dokážeme iba a), d), ostatné časti sa dokážu analogicky.

a) Ak $c = 0$, $a \in R$, potom tvrdenie platí triviálne.
Ak $c = 0$, $a = \pm\infty$, potom výraz ca nemá zmysel, ale platí $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

Nech $c \neq 0$, $a \in R$. Potom pre každé $\varepsilon > 0$, t. j. aj $\varepsilon \left|\frac{1}{c}\right| > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon \left|\frac{1}{c}\right|$.
To znamená, že pre postupnosť $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$|ca_n - ca| = |c| \cdot |a_n - a| < |c|\, \varepsilon \left|\tfrac{1}{c}\right| = \varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} ca_n = ca.$$

Nech $c \neq 0$, $a = \infty$. Potom pre každé $s \in R$, t. j. aj $\left|\frac{1}{c}\right| s \in R$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\left|\frac{1}{c}\right| s < a_n$.
To znamená, že $s < ca_n$ pre $c > 0$ a $s > ca_n$ pre $c < 0$, t. j.

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = \infty = ca \text{ pre } c > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} ca_n = -\infty = ca \text{ pre } c < 0.$$

Pre $c \neq 0$, $a = -\infty$ je dôkaz podobný ako v prípade $c \neq 0$, $a = \infty$.

d) Nech $a, b \in R$.
Z vety 2.3.8 vyplýva, že je postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená.
To znamená, že existuje $s \in R$, $s > 0$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $|b_n| < s$.

Zvoľme hodnotu s tak, aby platilo $|a| < s$.
Z predpokladov vyplýva, že pre každé $\varepsilon > 0$, t. j. aj $\frac{\varepsilon}{2s} > 0$ platí:
Existuje $n_1 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_1$ platí $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2s}$.
Existuje $n_2 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_2$ platí $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2s}$.
Potom pre všetky $n \in N$, $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |b_n - b| \cdot |a| < \frac{\varepsilon}{2s} s + \frac{\varepsilon}{2s} s = \varepsilon.$$

To znamená, že postupnosť $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu ab.

Nech $a \in R$, $a > 0$, $b = \infty$.
Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_1 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_1$ platí:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Ak zvolíme ε tak, aby $\varepsilon < \frac{a}{2}$, potom platí:

$$\frac{a}{2} < a - \frac{a}{2} < a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon < a + \frac{a}{2} < \frac{3a}{2}.$$

Nech $K \in R$, $K > 0$ je ľubovoľné.
Potom existuje $n_2 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_2$ platí $\frac{2K}{a} < b_n$.
Z toho vyplýva, že pre všetky $n \in N$, $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí:

$$a_n b_n > \frac{a}{2} \cdot \frac{2K}{a} = K, \quad \text{t. j.} \ \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab = \infty.$$

Ak $a < 0$, $b = \infty$, potom $-a > 0$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} [-(-a_n) b_n] = -\lim_{n\to\infty} (-a_n b_n) = -\infty = ab.$$

Nech $a = b = \infty$.
Potom pre všetky $K \in R$ (predpokladajme $K > 1$) platí:
Existuje $n_1 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_1$ platí $a_n > K$.
Existuje $n_2 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_2$ platí $b_n > K$.
Z toho vyplýva, že pre všetky $n \in N$, $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí:

$$a_n b_n > K^2 > K > 1, \quad \text{t. j.} \ \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab = \infty.$$

Pre $a = 0$, $b = \pm\infty$, resp. $a = \pm\infty$, $b = 0$ výraz ab nemá zmysel a ostatné prípady ($a = b = -\infty$, resp. $a = \infty$, $b \in R$, ...) vyplývajú z predchádzajúcich častí. ■

Dôsledok 2.3.13.a.
Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in R^*$, $k \in N$, potom $\lim_{n\to\infty} a_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k = a^k$.

Dôkaz.
Stačí položiť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a použiť $(k-1)$-krát časť d). ■

Poznámka 2.3.14.
Ak si spomenieme na konštrukciu mocniny a^k reálneho čísla a s reálnym exponentom k, potom môžeme predchádzajúce tvrdenie prirodzeným spôsobom rozšíriť na $k \in R$.
Dôkaz tohto tvrdenia nebudeme robiť.

Veta 2.3.14.
Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, pričom $a, b \in R^*$ a nech $b_n \neq 0$ pre všetky $n \in N$.
Ak majú príslušné výrazy v množine R^* zmysel, potom platí:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}$, b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

Dôkaz.
a) Nech $b \in R$, $b \neq 0$.

Z predpokladov vyplýva, že pre každé $\varepsilon > 0$, t. j. aj pre $\frac{\varepsilon b^2}{2} > 0$ a $\left|\frac{b}{2}\right| > 0$ platí:

Existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $|b_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{2}$.

Existuje $n_1 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_1$ platí $|b_n - b| < \left|\frac{b}{2}\right|$.

Potom (viď obrázok 2.3.14) pre všetky $n \in N$, $n \geq n_1$ platí:

$$|b| - |b_n| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{|b|}{2} < |b_n|, \quad \text{resp.} \quad \left|\frac{1}{b_n}\right| = \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $n \in N$, $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ platí:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n \cdot b}\right| = |b_n - b| \cdot \left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot \left|\frac{1}{b}\right| < \frac{\varepsilon b^2}{2} \cdot \left|\frac{2}{b}\right| \cdot \left|\frac{1}{b}\right| = \varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

Nech $b = \infty$.

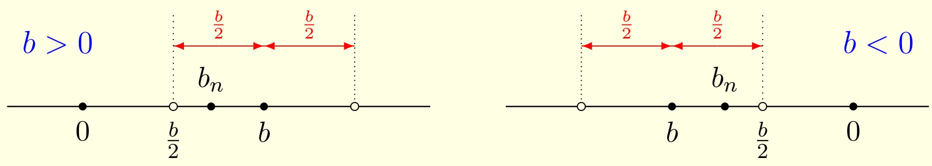
Potom pre každé $K > 0$ existuje $n_0 \in N$, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $K < b_n$.

Ak označíme $\varepsilon = \frac{1}{K} > 0$, potom pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$0 < \left|\frac{1}{b_n} - 0\right| = \frac{1}{b_n} < \frac{1}{K} = \varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Prípad $b = -\infty$ sa dokáže analogicky.

b) Vyplýva z časti a) a z vety 2.3.13. ■



Obr. 2.3.14: Obrázok k dôkazu vety 2.3.14 a).

Príklad 2.3.14.

Vypočítajte $\lim_{n\to\infty} n^q$, kde $q \in R$.

Riešenie.

Ak $q = 0$, potom $\lim_{n\to\infty} n^q = \lim_{n\to\infty} n^0 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

Nech $q > 0$.

Postupnosť $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, pretože pre všetky $n \in N$ (veta 2.1.45) platí $n^q < (n+1)^q$.

Predpokladajme, že je $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená zhora.

Potom existuje $M \in R$, $M > 0$ také, že pre všetky $n \in N$ platí $n^q \leq M$.

Keďže $\frac{1}{q} > 0$, potom (veta 2.1.45) pre všetky $n \in N$ platí $n \leq M^{\frac{1}{q}}$. To je spor.

Z toho vyplýva na základe dôsledku 2.3.11.b, že $\lim_{n\to\infty} n^q = \infty$.

Ak $q < 0$, t. j. $-q > 0$, potom na základe vety 2.3.14 platí:

$$\lim_{n\to\infty} n^q = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-q}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Z predchádzajúceho vyplýva $\lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} 0, & \text{pre } q < 0, \\ 1, & \text{pre } q = 0, \\ \infty, & \text{pre } q > 0. \end{cases}$ ■

Poznámka 2.3.15.
Z príkladu 2.3.14 vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = \begin{cases} 0, & \text{pre } q > 0, \\ 1, & \text{pre } q = 0, \\ \infty, & \text{pre } q < 0. \end{cases}$

Vety 2.3.13 a 2.3.14 sú dôležité pri výpočte limít, pretože zjednodušujú ich výpočet. Ale ako dokazujú nasledujúce príklady, ich tvrdenia sa vo všeobecnosti nedajú obrátiť.

Ak niektorý z čiastkových výrazov nemá zmysel, neznamená to ešte, že daná limita neexistuje. V tomto prípade sa tieto vety nedajú použiť a musíme nájsť limitu iným spôsobom. Niekedy pomôže vhodná úprava výrazu, ktorým je daná postupnosť definovaná.

Príklad 2.3.15.
Limity $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ neexistujú, ale

$$\lim_{n\to\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}] = \lim_{n\to\infty} 0 = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n} = \lim_{n\to\infty} |(-1)^n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1. \ \blacksquare$$

Príklad 2.3.16.
Pre limity $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} (n^2 - n) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} (n-1) = \infty \cdot \infty = \infty,$$

aj keď nasledujúce výrazy nemajú zmysel

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} n^2}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = \frac{\infty}{\infty}, \qquad \lim_{n\to\infty} n^2 - \lim_{n\to\infty} n = \infty - \infty. \ \blacksquare$$

Príklad 2.3.17.
Vypočítajte limitu postupnosti $\left\{\frac{n^2+n}{n^2-2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2-2}$.

Riešenie.
Vetu 2.3.14 b) nemôžeme použiť priamo, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+n) = \lim\limits_{n\to\infty} (n^2-2) = \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2-2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1. \ \blacksquare$$

Príklad 2.3.18.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3(1-2n^{-3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-2n^{-3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\left(n-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\infty-0}{1+0} = \infty.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-n^3}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \infty \cdot \frac{1-0}{1+0} = \infty. \ \blacksquare$

Poznámka 2.3.16.
Hodnotu limity môžeme vypočítať rôznymi spôsobmi.
Musíme si ale dávať pozor, aby sme nedostali nedefinované výrazy, ako napríklad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4-n^3}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(n^2-n\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\infty-\infty}{1+0} = \infty - \infty.$$

Veta 2.3.15.
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ práve vtedy, ak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Vyplýva z vety 2.3.13 c).

$PP_{\Leftarrow}$: Pre každé $n\in N$ platí $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$. Potom na základe vety o zovretí platí:
$$0 = -\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} (-|a_n|) \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \blacksquare$$

Dôsledok 2.3.15.a.
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ práve vtedy, ak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

Dôkaz.
Z predchádzajúcej vety vyplýva:
$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} a_n = a. \blacksquare$$

Veta 2.3.16.
Nech $a_n > 0$ pre všetky $n\in N$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ práve vtedy, ak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí:
$$0 < a_n = |a_n - 0| < \varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad 0 < \varepsilon^{-1} < \tfrac{1}{a_n}.$$
Ak označíme $K = \varepsilon^{-1}$, potom pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $K < \frac{1}{a_n}$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

$PP_{\Leftarrow}$: Vyplýva z vety 2.3.14 a). $\blacksquare$

Poznámka 2.3.17.
Príklad 2.3.18 b) môžeme vypočítať tiež pomocou časti a) a vety 2.3.16.
Pre všetky $n\in N$, $n > 1$ platí $\frac{n^2+n}{n^3-2} > 0$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-2} = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2+n} = \infty$.

Veta 2.3.17.
Nech existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$.
Ak existujú $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b\in R^*$, potom platí $a \leq b$.

Dôkaz.
Sporom, nech platí $a > b$.
Potom existujú okolia $O(a)\in\mathcal{O}_a$, $O(b)\in\mathcal{O}_b$ také, že $O(a)\cap O(b) = \emptyset$.
Je zrejmé, že pre všetky $x\in O(a)$, $y\in O(b)$ platí $x > y$. Ďalej platí:

Existuje $n_1\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_1$ platí $a_n\in O(a)$.

Existuje $n_2\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_2$ platí $b_n\in O(b)$.

Potom pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $a_n > b_n$, čo je spor. $\blacksquare$

Poznámka 2.3.18.
Tvrdenie vety 2.3.17 sa nezmení, ak nahradíme $a_n \leq b_n$ nerovnosťou $a_n < b_n$.
Napríklad pre všetky $n\in N$, $n\neq 1$ platí $n < n^2$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Dôsledok 2.3.17.a.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje a pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq b$.

Dôkaz.
Ak pre $n\in N$ položíme $b_n = b$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b = b$. ■

Dôsledok 2.3.17.b.
Ak pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$, potom:
a) Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.
b) Ak $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Dôkaz.
a) Pre každé $K\in R$ existuje $n_1\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_1$ platí $K < a_n$.
Potom pre všetky $n\in N$, $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ platí $K < a_n \leq b_n$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

b) Dôkaz je analogický ako dôkaz časti a). ■

Dôsledok 2.3.17.c (Veta o zovretí).
Nech pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $a\in R^*$.
Potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Dôkaz.
Vyplýva z nerovností $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} c_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} c_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

Dôsledok 2.3.17.d.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Dôkaz.
Nech $s\in R$, $s > 0$ je také, že pre všetky $n\in N$ platí nerovnosť $0 \leq |b_n| \leq s$.
Potom pre všetky $n\in N$ platí $0 \leq |a_n b_n| \leq |s a_n| = s\,|a_n|$, t. j.
$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_n b_n| \leq \lim_{n\to\infty} s\,|a_n| = s \lim_{n\to\infty} |a_n| = s \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$
To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n b_n| = \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. ■

Príklad 2.3.19.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1} - n\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1} - n\right] \cdot \frac{\sqrt{n+1}+n}{\sqrt{n+1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1-n^2}{\sqrt{n+1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} \frac{1+\frac{1}{n}-n}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1+0-\infty}{0+1} = -\infty,$

resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1} - n\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \left[\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right] = \infty \cdot (\sqrt{1+0} - \infty) = \infty(1-\infty) = -\infty.$ ■

Poznámka 2.3.19.
Príklad 2.3.19 b), c) môžeme riešiť aj iným spôsobom. Pre všetky $n\in N$ platí:
$$-n < \sqrt{n+1} - n < -n - 1 + 2\sqrt{n+1} - 1 + 2 = -\left[\sqrt{n+1} - 1\right]^2 + 2.$$
Z toho vyplýva:
$$-\infty = \lim_{n\to\infty} (-n) \leq \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1} - n\right] \leq \lim_{n\to\infty} \left(-\left[\sqrt{n+1} - 1\right]^2 + 2\right) = -\infty.$$

Veta 2.3.18.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, potom existuje $n_0 \in N$, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

Dôkaz.
Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
Potom existujú okolia $O(a), O(b)$ také, že $O(a) \cap O(b) = \emptyset$. Navyše platí:
Existuje $n_1 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_1$ platí $a_n \in O(a)$.
Existuje $n_2 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_2$ platí $b_n \in O(b)$.
Keďže $a < b$, potom pre všetky $x \in O(a)$, $y \in O(b)$ platí $x < y$.
Z toho vyplýva, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $a_n < b_n$. ■

Dôsledok 2.3.18.a.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < a$, $a \in R$, potom existuje $n_0 \in N$, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n < a$.

Dôsledok 2.3.18.b.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > a$, $a \in R$, potom existuje $n_0 \in N$, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n > a$.

Príklad 2.3.20.
Vypočítajte limitu **geometrickej postupnosti** $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, kde $a \in R$.

Riešenie.
Ak $a > 1$, t. j. $a - 1 > 0$, potom na základe Bernoulliho nerovnosti pre všetky $n \in N$ platí:
$$a^n = [1 + (a-1)]^n \geq 1 + n(a-1), \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} a^n \geq \lim_{n\to\infty} [1 + n(a-1)] = \infty.$$
Ak $a = 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.
Ak $0 < a < 1$, t. j. $1 < \frac{1}{a}$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{a})^n = \lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = \infty$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
Ak $a = 0$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0^n = 0$.
Ak $-1 < a < 0$, t. j. $0 < -a < 1$, potom pre všetky $n \in N$ platí:
$$-(-a)^n \leq a^n \leq (-a)^n, \quad \text{t. j.} \quad 0 = -\lim_{n\to\infty} (-a)^n \leq \lim_{n\to\infty} a^n \leq \lim_{n\to\infty} (-a)^n = 0.$$
Ak $a = -1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ neexistuje, pretože $1 = \lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a^{2n+1} = -1$.
Ak $a < -1$, potom $1 < a^2$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, pretože platí:
$$\lim_{n\to\infty} a^{2n} = \lim_{n\to\infty} (a^2)^n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = a \lim_{n\to\infty} a^{2n} = -\infty$$
Ak to zhrnieme, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \nexists, & \text{pre } a \in (-\infty\,;\,-1\rangle\,, \\ 0, & \text{pre } a \in (-1\,;\,1)\,, \\ 1, & \text{pre } a = 1, \\ \infty, & \text{pre } a \in (1\,;\,\infty)\,. \end{cases}$ ■

Príklad 2.3.21.
Dokážte, že pre všetky $a \in R$, $a > 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Riešenie.
Nech $a > 1$, potom $\sqrt[n]{a} > 1$, t. j. $\sqrt[n]{a} - 1 > 0$.
Z Bernoulliho nerovnosti vyplýva, že pre všetky $n \in N$ platí:
$$a = [\sqrt[n]{a}\,]^n = [1 + (\sqrt[n]{a} - 1)]^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1) > 0.$$

Potom pre všetky $n \in N$ platí:
$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < a\tfrac{1}{n}, \qquad \text{t. j. } 1 < \sqrt[n]{a} < a\tfrac{1}{n} + 1.$$
Z toho vyplýva:
$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \le \lim_{n\to\infty} \left(a\tfrac{1}{n} + 1\right) = a \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} + 1 = a \cdot 0 + 1 = 1.$$
Nech $a < 1$, t. j. $\frac{1}{a} > 1$. Potom platí:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$
Nech $a = 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$. ■

Poznámka 2.3.20.
V minulosti bola veľmi populárna tzv. **Fibonacciho postupnosť**[24] $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$, ktorú rekurentne vyjadrujeme výrazmi $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ pre $n \in N$.
Pre všetky $n \in N$ môžeme n-tý člen vyjadriť vzťahom $a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$.

2.3.4 Eulerovo číslo

Jednou z najčastejšie používaných a najdôležitejších konštánt je Eulerovo číslo, ktoré tvorí základ prirodzených logaritmov. Označujeme ho symbolom e a spolu s Ludolfovým číslom π patrí medzi najdôležitejšie konštanty.

Veta 2.3.19.
Postupnosť $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k iracionálnemu číslu.

Dôkaz.
Konvergencia.
Použijeme Cauchy–Bolzanov princíp konvergencie.
Postupnosť $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, t. j. pre všetky $m, n \in N$, $n < m$ platí:
$$0 < e_m - e_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} + \frac{1}{m!} =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots m}\right] < \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\right] = (*).$$
Z rovnosti $a^{m-n} - b^{m-n} = (a-b)(a^{m-n-1} + a^{m-n-2}b + \cdots + ab^{m-n-2} + b^{m-n-1})$ vyplýva:
$$1^{m-n} - \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)}\right] \cdot \left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\right].$$
Potom platí:
$$(*) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^{m-n}}}{1 - \frac{1}{(n+1)}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{\frac{(n+1)^{m-n}-1}{(n+1)^{m-n}}}{\frac{n+1-1}{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^{m-n}-1}{(n+1)^{m-n}} \cdot \frac{n+1}{n} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!\,n}.$$
Je zrejmé, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že platí:
$$\varepsilon^{-1} < n_0!\, n_0, \qquad \text{t. j. } \frac{1}{n_0!\, n_0} < \varepsilon.$$
Potom pre všetky $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $m, n \in N$, $m \ge n = n_0$ platí:
$$0 \le e_m - e_n < \frac{1}{n_0!\, n_0} < \varepsilon.$$
To znamená, že postupnosť $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.
Označme $\lim\limits_{m\to\infty} e_m = \mathrm{e}$. Z vlastností postupnosti $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva, že $\mathrm{e} > 2$.

[24] *Leonardo Fibonacci* [1170–1250] — vlastným menom *Leonardo Pisánsky*, taliansky obchodník a matematik.

Iracionálnosť.
Sporom. Nech $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in N$ sú nesúdeliteľné.
Nech $n \in N$ je ľubovoľné, potom pre všetky $m \in N$, $m > n$ platí:
$$0 < e_m - e_n < \frac{1}{n!\,n}.$$
Z toho na základe vety 2.3.17 vyplýva, že pre všetky $n \in N$ platí:
$$0 \leq \lim_{m\to\infty} (e_m - e_n) = \lim_{m\to\infty} e_m - \lim_{m\to\infty} e_n = \mathrm{e} - e_n \leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{n!\,n} = \frac{1}{n!\,n}.$$
Keďže je postupnosť $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca, pre všetky $n \in N$ platí:
$$e_n < \mathrm{e}, \quad \text{t. j.} \quad 0 < \mathrm{e} - e_n \leq \frac{1}{n!\,n}.$$
Ak zvolíme $n = q$, potom platí:
$$0 < \mathrm{e} - e_q = \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) \leq \frac{1}{q!\,q}. \tag{2.1}$$
Ak položíme $q = 1$, potom platí:
$$0 < \mathrm{e} - e_1 = \frac{p}{1} - \left(1 + \frac{1}{1!}\right) = p - 2 \leq \frac{1}{q!\,q} = 1, \quad \text{t. j.} \quad 0 < p - 2 \leq 1.$$
Z toho vyplýva $p = 3$, t. j. $\mathrm{e} = \frac{p}{q} = 3$. Potom pre všetky $n \in N$ platí:
$$3 - e_n \leq \frac{1}{n!\,n}.$$
Spor, pretože pre $n = 2$ daný vzťah neplatí $(0,5 = 3 - e_2 \not\leq \frac{1}{2!2} = 0,25)$.
Ak $q > 1$, potom po vynásobení nerovnosti (2.1) číslom $q!$, dostaneme
$$0 < p\,(q-1)! - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) q! \leq \frac{1}{q} < 1.$$
Spor, pretože rozdiel dvoch prirodzených čísel je číslo celé a nie číslo z intervalu $(0\,;1)$.
Z toho vyplýva, že číslo e sa nedá písať v tvare $e = \frac{p}{q}$ a nie je racionálne. ■

Číslo e z predchádzajúcej vety, t. j. limitu postupnosti $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame **Eulerovo číslo**. Jeho hodnota je približne $2,718\,281\,827$.

Príklad 2.3.22.
Dokážte, že $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

Riešenie.
Nech $n \in N$, označme $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
Z nerovnosti $(n+1)^2 > 1$ vyplýva:
$$\frac{1}{(n+1)^2} < 1, \quad \text{t. j.} \quad \frac{1}{(n+1)^2} > -1.$$
Potom na základe Bernoulliho nerovnosti platí:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n+1}{n} \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} = \frac{n+1}{n} \left[\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} =$$
$$= \frac{n+1}{n} \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > \frac{n+1}{n} \left[1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right] = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1.$$
Pre všetky $n \in N$ platí $\frac{1}{n(n+1)} > -1$, potom z Bernoulliho nerovnosti vyplýva:
$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1} \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2} = \frac{n}{n+1} \left[\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}\right]^{n+2} =$$
$$= \frac{n}{n+1} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2} > \frac{n}{n+1} \left[1 + \frac{n+2}{n(n+2)}\right] = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1.$$
To znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca.
Ak uvážime, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n < b_n$, potom
$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < \cdots < b_2 < b_1.$$

To znamená, že sú postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničené a na základe vety 2.3.11 konvergujú. Potom sú splnené predpoklady vety 2.3.13 a platí:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \left(1+\tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Ešte treba ukázať, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e}$.
Nech $n \in N$, potom pre $k = 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} < \frac{1}{k!}.$$

Keďže $\binom{n}{0}\frac{1}{n^0} = 1$, potom na základe binomickej vety platí:

$$a_n = \binom{n}{0}\frac{1}{n^0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} < 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e_n.$$

Tým sme dokázali platnosť nerovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} e_n$.

Ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} e_n$.
Nech $n \in N$ je pevné, potom pre $m = 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$a_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \geq 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \cdots + \binom{n}{m}\frac{1}{n^m}.$$

Z toho na základe vety 2.3.17 a vety 2.3.13 b) vyplýva, že pre všetky $m \in N$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} + \cdots + \lim_{n\to\infty} \binom{n}{m}\frac{1}{n^m} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{1}{k!}\right] = 1 + \sum_{k=1}^{m} 1^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = e_m.$$

Potom z dôsledku 2.3.17.a vyplýva:

$$\lim_{m\to\infty} \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right] \geq \lim_{m\to\infty} e_m, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right] \geq \lim_{m\to\infty} e_m = \mathrm{e}\,.$$

To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e}$. ■

Poznámka 2.3.21.
Pomocou postupností $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ z vety 2.3.19 a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ z príkladu 2.3.22 môžeme hodnotu čísla e vyjadriť numericky s ľubovoľnou presnosťou $\varepsilon > 0$.
Stačí zvoliť $n \in N$ tak, aby platilo

$$0 < \mathrm{e} - e_n < \frac{1}{n!\,n} < \varepsilon, \qquad \text{resp.} \quad 0 < \mathrm{e} - a_n < b_n - a_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \varepsilon.$$

Ak chceme určiť e s presnosťou $\varepsilon = 0{,}000\,001 = 10^{-6}$, potom nám postačí člen e_9, ale nestačí člen $a_{2\,700\,000}$. Platí totiž

$$\frac{1}{9\cdot 9!} \approx 3{,}062\cdot 10^{-7} < 10^{-6}, \qquad \frac{1}{2\,700\,000}\left(1+\frac{1}{2\,700\,000}\right)^{2\,700\,000} \approx 1{,}007\cdot 10^{-6} > 10^{-6}.$$

Príklad 2.3.23.
Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$.

Riešenie.
Zo vzťahu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1\cdot \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \mathrm{e}^{-1}\,. ■$$

Príklad 2.3.24.
Dokážte, že pre $a \in R$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$.

Riešenie.
Ak $a=0$, potom $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = 1^n = 1$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = 1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^a$.

Nech $a \neq 0$. Najprv vypočítame $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}$.

Ak $a>0$, potom pre všetky $n>a$ existuje $k_n \in N$ také, že platí:

$$k_n \leq \frac{n}{a} < k_n+1, \qquad \text{t. j.} \quad \frac{1}{k_n+1} \leq \frac{a}{n} < \frac{1}{k_n}.$$

Potom pre všetky $n \in N$ platí:

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \leq \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} \leq \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \leq \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} \leq \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right).$$

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť prirodzených čísel, ktorá diverguje do ∞. Z príkladu 2.3.22 vyplýva, že postupnosť $\left\{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a postupnosť $\left\{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a obe konvergujú k číslu e. Potom platí:

$$\mathrm{e} = (1+0)^{-1}\cdot \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right) = \mathrm{e}\cdot\left(1+\frac{1}{\infty}\right) = \mathrm{e}\cdot(1+0) = \mathrm{e}\,.$$

Ak $a<0$, potom pre všetky $n>-a>0$ existuje $k_n \in N$ také, že platí:

$$k_n \leq \frac{n}{-a} < k_n+1, \quad \text{t. j.} \quad -\frac{1}{k_n} \leq \frac{a}{n} < -\frac{1}{k_n+1}.$$

Z toho vyplýva:

$$\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{-k_n-1} \leq \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} \leq \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{-k_n},$$

$$\left[\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\right]^{-1}\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{-1} \leq \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} \leq \left[\left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\right]^{-1}\left(1-\frac{1}{k_n+1}\right).$$

Potom na základe príkladu 2.3.23 platí:

$$\mathrm{e} = (\mathrm{e}^{-1})^{-1}\cdot(1-0)^{-1} \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} \leq (\mathrm{e}^{-1})^{-1}\cdot(1-0) = \mathrm{e}\,.$$

Takže pre všetky $a \neq 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} = \mathrm{e}$. Potom z poznámky 2.3.14 vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a = \mathrm{e}^a\,. \blacksquare$$

Príklad 2.3.25.
a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = \left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = \mathrm{e}^2$.
b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n = \mathrm{e}^{\infty} = \infty$. $\blacksquare$

Príklad 2.3.26.
Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right) = 1$.

Riešenie.
Nech $n \in N$, označme $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Z príkladu 2.3.22 vyplýva, že pre všetky $n\in N$ platí:
$$1 < 2 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < \mathrm{e} < b_n < b_{n-1} < \cdots < b_2 < b_1.$$
Potom pre všetky $n\in N$, $n > 1$ platí:
$$1 + \tfrac{1}{n} = \sqrt[n]{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n} = \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\mathrm{e}} < \sqrt[n]{b_{n-1}} = \sqrt[n]{\left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^n} = 1 + \tfrac{1}{n-1}.$$
Z toho vyplýva:
$$1 = \tfrac{n}{n} < n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) < \tfrac{n}{n-1}, \quad \text{t. j.} \quad 1 \leq \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1\right) \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{n}{n-1} = 1. \blacksquare$$

Príklad 2.3.27.
Dokážte, že pre všetky $a > 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$.

Riešenie.
Podobným spôsobom ako v príklade 2.3.24 môžeme ukázať, že platí:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a}\left(\mathrm{e}^{\frac{a}{n}} - 1\right) = 1, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\mathrm{e}^{\frac{a}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}^a} - 1\right) = a.$$
Keďže pre všetky $a > 0$ platí $a = \mathrm{e}^{\ln a}$, potom
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\mathrm{e}^{\ln a}} - 1\right) = \ln a. \blacksquare$$

Príklad 2.3.28.
Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Riešenie.
Uvažujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ z príkladu 2.3.22.
Pre všetky $n\in N$, $n \geq 3$ platí:
$$1 < 2 = a_1 < a_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \left(\tfrac{n+1}{n}\right)^n = \tfrac{(n+1)^n}{n^n} \leq \mathrm{e} < 3 \leq n,$$
$$1 < 1\cdot n^n < (n+1)^n < n\cdot n^n = n^{n+1},$$
$$1 < \sqrt[n+1]{n+1} = \left[(n+1)^n\right]^{\frac{1}{n(n+1)}} < \left[n^{n+1}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}} = \sqrt[n]{n}.$$
To znamená, že je postupnosť $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=3}^{\infty}$ klesajúca a zdola ohraničená číslom 1, t. j. konverguje k $a \geq 1$.
Keďže aj vybraná postupnosť $\left\{\sqrt[2n]{2n}\right\}_{n=2}^{\infty}$ konverguje k a, platí:
$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{2n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \sqrt{1\cdot a} = \sqrt{a}.$$
Vzťahu $1 \leq a = \sqrt{a}$ vyhovuje iba číslo $a = 1$, takže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. $\blacksquare$

Príklad 2.3.29.
Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Riešenie.
Najprv dokážeme matematickou indukciou, že pre všetky $n\in N$ platí $n! > (\frac{n}{3})^n$.
Pre $n = 1$ je nerovnosť splnená triviálne.
Predpokladajme, že pre $n = k$ platí $k! > (\frac{k}{3})^k$.
Z príkladu 2.3.28 vyplýva, že pre všetky $k\in N$ platí $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k > \frac{1}{3}$, t. j.
$$(k+1)! = (k+1)\,k! > (k+1)\left(\tfrac{k}{3}\right)^k = (k+1)\left(\tfrac{k}{3}\right)^k\left(\tfrac{k+1}{k+1}\right)^k =$$
$$= (k+1)\left(\tfrac{k+1}{3}\right)^k\left(\tfrac{k}{k+1}\right)^k > (k+1)\left(\tfrac{k+1}{3}\right)^k\tfrac{1}{3} = \left(\tfrac{k+1}{3}\right)^{k+1}.$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $n\in N$ platí:

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{\left(\tfrac{n}{3}\right)^n} = \tfrac{n}{3}, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} \geq \lim_{n\to\infty} \tfrac{n}{3} = \infty. \ \blacksquare$$

Príklad 2.3.30.
Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Riešenie.
Najprv dokážeme matematickou indukciou, že pre všetky $n\in N$, $n \geq 6$ platí $n! < (\frac{n}{2})^n$.
Pre $n = 6$ nerovnosť platí, pretože $720 = 6! < 3^6 = 729$.
Predpokladajme, že pre $n = k$ platí $k! < (\frac{k}{2})^k$.
Z príkladu 2.3.28 vyplýva, že pre všetky $k\in N$ platí $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k < \frac{1}{2}$, t. j.

$$(k+1)! = (k+1)\ k! < (k+1)\left(\tfrac{k}{2}\right)^k = (k+1)\left(\tfrac{k}{2}\right)^k\left(\tfrac{k+1}{k+1}\right)^k =$$
$$= (k+1)\left(\tfrac{k+1}{2}\right)^k\left(\tfrac{k}{k+1}\right)^k < (k+1)\left(\tfrac{k+1}{2}\right)^k\tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

Z toho vyplýva:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{n!}{n^n} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{n}{2}\right)^n \tfrac{1}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2^n} = \tfrac{1}{\infty} = 0. \ \blacksquare$$

Veta 2.3.20.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = a\in R^*$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a$.

Dôkaz.
Nech $a\in R$.
Ak $\varepsilon\in R$, potom existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$a - \varepsilon < a_{n+1} - a_n < a + \varepsilon, \qquad \text{t. j.} \quad a - \varepsilon + a_n < a_{n+1} < a + \varepsilon + a_n.$$

Nech $k\in N$, potom pre všetky $n = n_0 + k \geq n_0$, t. j. $a_n = a_{n_0+k}$ platí:

$$k(a-\varepsilon) + a_{n_0} < \cdots < 2(a-\varepsilon) + a_{n_0+k-2} = a - \varepsilon + a - \varepsilon + a_{n_0+k-2} <$$
$$< a - \varepsilon + a_{n_0+k-1} = a - \varepsilon + a_{n-1} < a_n < a + \varepsilon + a_{n-1} = a + \varepsilon + a_{n_0+k-1} <$$
$$< a + \varepsilon + a + \varepsilon + a_{n_0+k-2} = 2(a+\varepsilon) + a_{n_0+k-2} < \cdots < k(a+\varepsilon) + a_{n_0}.$$

Ak dosadíme $k = n - n_0$, $k\in N$, potom platí:

$$(n-n_0)(a-\varepsilon) + a_{n_0} < a_n < (n-n_0)(a+\varepsilon) + a_{n_0},$$
$$\left(1 - \tfrac{n_0}{n}\right)(a-\varepsilon) + \tfrac{a_{n_0}}{n} < \tfrac{a_n}{n} < \left(1 - \tfrac{n_0}{n}\right)(a+\varepsilon) + \tfrac{a_{n_0}}{n}.$$

Pretože n_0, a_{n_0} sú pre dané ε konštanty, potom platí:

$$a - \varepsilon = (1-0)(a-\varepsilon) + 0 = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 - \tfrac{n_0}{n}\right)(a-\varepsilon) + \tfrac{a_{n_0}}{n}\right] \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{n} \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 - \tfrac{n_0}{n}\right)(a+\varepsilon) + \tfrac{a_{n_0}}{n}\right] = (1-0)(a+\varepsilon) + 0 = a + \varepsilon.$$

Keďže je ε ľubovoľné, potom na základe vety 2.1.13 platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a$.

Nech $a = \infty$. Nech $K\in R$, potom existuje $n_0\in N$, že pre všetky $n\in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$a_{n+1} - a_n > K, \qquad \text{t. j.} \quad a_{n+1} > K + a_n.$$

Potom pre všetky $n = n_0 + k \geq n_0$, $k\in N$ platí:

$$a_n = a_{n_0+k} > K + a_{n_0+k-1} > 2K + a_{n_0+k-2} > \cdots > k\cdot K + a_{n_0} = (n-n_0)\cdot K + a_{n_0}.$$

Potom platí:

$$\frac{a_n}{n} > K\frac{n-n_0}{n} + a_{n_0}, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \geq \lim_{n\to\infty} \left[K\frac{n-n_0}{n} + a_{n_0}\right] = K \cdot 1 + 0 = K.$$

Keďže sme K volili ľubovoľne, platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \infty$.

Nech $a = -\infty$. Ak označíme $b_n = -a_n$, $n \in N$, potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n\to\infty} [-a_{n+1} - (-a_n)] = -\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = \infty.$$

Z toho, na základe už dokázaného, vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \infty, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = -\infty. \blacksquare$$

Dôsledok 2.3.20.a.
Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R^*$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$.

Dôkaz.
Označme $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ pre všetky $n \in N$. Potom pre všetky $n \in N$ platí:

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n, \quad \text{t. j.} \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n).$$

To znamená, že sú splnené predpoklady vety 2.3.20 a platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = a. \blacksquare$$

Príklad 2.3.31.
Vypočítajte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$.

Riešenie.
Označme $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$. Keďže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, potom (dôsledok 2.3.20.a) platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \blacksquare$$

Poznámka 2.3.22.
Tvrdenia v predchádzajúcej vete a dôsledku nemôžeme obrátiť. Je ale zrejmé, že ak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n), \qquad \text{resp.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n$$

existujú, potom sa nutne rovnajú.

Príklad 2.3.32.
Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, potom na základe príkladu 2.3.15 platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} [a_{n+1} - a_n] = \lim_{n\to\infty} [(-1)^{n+1} - (-1)^n] = \lim_{n\to\infty} 2(-1)^{n+1} \nexists.$$

Podobne platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1+1-1+\cdots+(-1)^n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \nexists$. $\blacksquare$

Príklad 2.3.33.
Z príkladu 2.3.19 vieme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right]$ existuje a je nulová.

Ak označíme $a_n = \sqrt{n}$ pre $n \in N$ a využijeme poznámku 2.3.22, potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0. \blacksquare$$

Veta 2.3.21.
Nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n > 0$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Dôkaz.
Nech $a \in R$. Je zrejmé, že platí $a \geq 0$.
Ak $\varepsilon \in R$, $0 < \varepsilon < a$, potom existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:
$$a - \varepsilon < \tfrac{a_{n+1}}{a_n} < a + \varepsilon, \quad \text{t. j. } (a-\varepsilon)a_n < a_{n+1} < (a+\varepsilon)a_n.$$
Nech $k \in N$, potom pre všetky $n = n_0 + k \geq n_0$, t. j. $a_n = a_{n_0+k}$ platí:
$$(a-\varepsilon)^k a_{n_0} < \cdots < (a-\varepsilon)^2 a_{n_0+k-2} = (a-\varepsilon)(a-\varepsilon)a_{n_0+k-2} <$$
$$< (a-\varepsilon)a_{n_0+k-1} = (a-\varepsilon)a_{n-1} < a_n < (a+\varepsilon)a_{n+1} = (a+\varepsilon)a_{n_0+k-1} <$$
$$< (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)a_{n_0+k-2} = (a+\varepsilon)^2 a_{n_0+k-2} < \cdots < (a+\varepsilon)^k a_{n_0}.$$
Ak dosadíme do predchádzajúceho vzťahu výraz $k = n - n_0 \in N$, dostaneme
$$(a-\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0} = (a-\varepsilon)^k a_{n_0} < \ a_n \ < (a+\varepsilon)^k a_{n_0} = (a+\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0},$$
$$(a-\varepsilon)^{1-\frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}} = (a-\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}} < \sqrt[n]{a_n} < (a+\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}} = (a+\varepsilon)^{1-\frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}}.$$
Pretože n_0, a_{n_0} sú pre dané ε konštanty, platí:
$$a - \varepsilon = (a-\varepsilon)^{1-0} \cdot 1 = \lim_{n\to\infty} (a-\varepsilon)^{1-\frac{n_0}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{n_0}} \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} (a+\varepsilon)^{1-\frac{n_0}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{n_0}} = (a+\varepsilon)^{1-0} \cdot 1 = a + \varepsilon.$$
Pretože je ε ľubovoľné, na základe vety 2.1.13 platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Nech $a = \infty$.
Nech $K \in R$, potom existuje $n_0 \in N$, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:
$$K < \tfrac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \text{t. j. } a_{n+1} > K \cdot a_n.$$
Zvoľme $K > 1$, potom pre všetky $n = n_0 + k \geq n_0$, $k \in N$ platí:
$$a_n = a_{n_0+k} > K\, a_{n_0+k-1} > K^2\, a_{n_0+k-2} > \cdots > K^k\, a_{n_0} = K^{n-n_0}\, a_{n_0}.$$
Potom platí:
$$\sqrt[n]{a_n} > K^{\frac{n-n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}}, \quad \text{t. j. } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \lim_{n\to\infty} \left[K^{\frac{n-n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}}\right] = K \cdot 1 = K.$$
Lenže K sme volili ľubovoľne, takže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$. ■

Dôsledok 2.3.21.a.
Nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n > 0$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R^*$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

Dôkaz.
Označme $s_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ pre všetky $n \in N$. Potom pre všetky $n \in N$ platí:
$$a_{n+1} = \tfrac{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \tfrac{s_{n+1}}{s_n}, \quad \text{t. j. } a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{s_{n+1}}{s_n}.$$
Z toho na základe vety 2.3.21 vyplýva:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{s_{n+1}}{s_n} = a. \ ■$$

Veta 2.3.22.
Nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \in R^*$.

a) Ak $a < 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Ak $a > 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Dôkaz.
a) Zvoľme $q \in R$ tak, aby $a < q < 1$. Potom (dôsledok 2.3.18.a) existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} < q$, t. j. $a_n < q^n$. Z toho vyplýva:
$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$
b) Zvoľme $q \in R$, aby $1 < q < a$. Potom (dôsledok 2.3.18.b) existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $q < \sqrt[n]{a_n}$, t. j. $q^n < a_n$. Z toho vyplýva:
$$\infty = \lim_{n\to\infty} q^n \leq \lim_{n\to\infty} a_n. \blacksquare$$

Veta 2.3.23.
Nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n > 0$ a nech $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in R^*$.

a) Ak $a < 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. b) Ak $a > 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Dôkaz.
Vyplýva priamo z viet 2.3.21 a 2.3.22. ■

Poznámka 2.3.23.
Ak platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$,
potom vo všeobecnosti o konvergencii postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nevieme rozhodnúť.
Napríklad pre postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{1\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Príklad 2.3.34.
Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n}$, kde $a > 0$, $q > 0$.

Riešenie.
Ak $a = 1$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$.
Nech $a \neq 1$. Označme $a_n = \frac{n^q}{a^n}$, $n \in N$. Potom platí:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} \frac{a^n}{n^q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a} \left(\frac{n+1}{n}\right)^q = \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q = \frac{1}{a} \cdot 1^q = \frac{1}{a}.$$
T. j. pre $a > 1$ platí $\frac{1}{a} < 1$ a pre $a < 1$ platí $\frac{1}{a} > 1$. Potom (veta 2.3.23) platí:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n} = \infty \quad \text{pre} \quad a \leq 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n} = 0 \quad \text{pre} \quad a > 1. \blacksquare$$

Príklad 2.3.35.
Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$.

Riešenie.
Uvažujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Potom pre $n \in N$ platí $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.
Tvrdenie vyplýva z vety 2.3.21 a zo vzťahu
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\ n!}{(n+1)!\ n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}. \blacksquare$$

Príklad 2.3.36.
Dokážte, že ak $a\in R$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Riešenie.
Nech $k\in N$ je také, že $k > |a| > 0$, t. j. $1 > \frac{|a|}{k}$. Potom platí:
$$0 < \frac{|a|^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{(k+1)\cdots n} < \frac{1}{k!} \cdot \frac{|a|^n}{k\cdots k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k^k}{k^k} \cdot \frac{|a|^n}{k^{n-k}} = \frac{k^k}{k!} \cdot \left[\frac{|a|}{k}\right]^n.$$
Z toho vyplýva:
$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{n!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k^k}{k!} \left[\frac{|a|}{k}\right]^n = \frac{k^k}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{|a|}{k}\right]^n = 0, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Iné riešenie.
Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $n\in N$. Na základe viet 2.3.22 a 2.3.15 platí:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1, \quad \text{t. j.} \quad 0 = \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Iné riešenie.
Označme $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $n\in N$. Potom na základe vety 2.3.23 platí:
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{a^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = \frac{|a|}{\infty} = 0 < 1, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \blacksquare$$

Príklad 2.3.37.
Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, kde $a\in R$, $a > 0$, $a \neq \mathrm{e}$.

Riešenie.
Označme $a_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pre $n\in N$. Potom platí:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{a^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\, n^n}{(n+1)^n} = a \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \frac{a}{\mathrm{e}}.$$
Potom (veta 2.3.23) platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ pre $a < \mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ pre $a > \mathrm{e}$. $\blacksquare$

Príklad 2.3.38.
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n}{2} - \frac{1+\cdots+n}{n+2}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n}{2} - \frac{n(n+1)}{2(n+2)}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n}\,\frac{(\frac{2}{3})^n+1}{2(\frac{2}{3})^n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n+1}{2(\frac{2}{3})^n+3} = \frac{0+1}{2\cdot 0+3} = \frac{1}{3}$. $\blacksquare$

Príklad 2.3.39.
Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n}$.

Riešenie.
Pre všetky $n\in N$ platí $\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n < 1$, t. j. $\sqrt[n]{\frac{1}{3}} \leq \sqrt[n]{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} < 1$.

Z toho vyplýva $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3}} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq 1$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1$. Potom
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]} = \lim_{n\to\infty} 3 \sqrt[n]{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 3 \cdot 1 = 3. \blacksquare$$

Príklad 2.3.40.
Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}-1} = \infty$.

Riešenie.
$$\left.\begin{array}{l} \text{Pre } n\in N,\ n > 1 \text{ platí } \sqrt[n]{n} > 1, \text{ t. j. } \sqrt[n]{n} - 1 > 0. \\ \text{Keďže } \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \text{ potom } \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0. \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{veta 2.3.16}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}-1} = \infty. \blacksquare$$

Príklad 2.3.41.
Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne vzťahmi $a_0 \geq 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$.

Riešenie.
Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Potom na základe dôsledku 2.3.7.a platí:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}, \quad \text{t. j.} \quad a^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (a_n + 6) = a + 6.$$
To znamená, že a je riešením kvadratickej rovnice
$$a^2 - a - 6 = (a - 3) \cdot (a + 2) = 0.$$
Koreň $a = -2 < 0$ nevyhovuje. Z toho vyplýva $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.
Ešte musíme ukázať, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.
Ak $a_0 = 3$, potom pre všetky $n \in N$ platí $a_n = 3$, t. j. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.
Ak $a_0 < 3$, potom pre všetky $n \in N$ na základe matematickej indukcie platí $a_n < 3$. Platí totiž
$$a_1 = \sqrt{a_0 + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3, \qquad a_n < 3 \;\Rightarrow\; a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3.$$
Keďže sú všetky členy a_n kladné a $a_n - 3 < 0$, platí:
$$a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - a_n - 6 = (a_n - 3)(a_n + 2) < 0, \quad \text{t. j.} \quad a_n^2 < a_{n+1}^2, \quad \text{t. j.} \quad a_n < a_{n+1}.$$
To znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca, zhora ohraničená, t. j. konverguje.
Pre $a_0 > 3$ je dôkaz analogický a prenechávame ho čitateľovi ako cvičenie. ■

Príklad 2.3.42.
Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, pričom $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$, $a_0 = c$, kde $c \in R$, $c > 0$.

Riešenie.
Je zrejmé, že pre všetky $n \in N \cup \{0\}$ platí $a_n > 0$. Ďalej platí:
$$a_{n+1}^2 - c = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2c + \frac{c^2}{a_n^2}\right) - c = \frac{1}{4}\left(a_n^2 - 2c + \frac{c^2}{a_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{c}{a_n}\right)^2 \geq 0.$$
Z toho vyplýva, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq \sqrt{c}$. Potom platí:
$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{c}{a_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n^2 - c}{a_n} \geq 0.$$
To znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola ohraničená, t. j. konverguje.
Ak označíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, potom zo vzťahu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ vyplýva:
$$0 = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n - \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{c}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{c}{a}\right) = \frac{a^2 - c}{2a}.$$
Danej rovnici vyhovujú $a = \pm\sqrt{c}$, takže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$. ■

Poznámka 2.3.24.
Pomocou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ z príkladu 2.3.42 môžeme numericky vypočítať hodnotu $\sqrt{c}$ pre ľubovoľné $c \in R$, $c > 0$.
Odvodíme chybu výpočtu.
Z príkladu 2.3.42 vyplýva, že pre všetky $n \in N$ platí $\sqrt{c} \leq a_n$. Potom
$$\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{c}{a_n} \leq \frac{c}{\sqrt{c}} = \sqrt{c}.$$
Z toho vyplýva, že pre chybu výpočtu pre $n \in N$ platí:
$$0 \leq a_n - \sqrt{c} \leq 2a_n - a_n - \frac{c}{a_n} = 2a_n - 2a_{n+1}, \quad \text{t. j.} \quad 0 \leq a_{n+1} - \sqrt{c} \leq a_n - a_{n+1}.$$
Na ukážku vypočítame $\sqrt{3}$.
$$c = a_0 = 3, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1,75, \quad a_3 = 1,732\,142\,857, \quad a_4 = 1,732\,050\,810.$$
Hodnota vypočítaná kalkulačkou je $\sqrt{3} \approx 1,732\,050\,808$.
Ako vidíme, už pri člene a_4 je chyba menšia ako $2 \cdot 10^{-9}$.

Príklad 2.3.43.
Vypočítajte limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0,2; 0,23; 0,233; 0,2333; \ldots\}$.

Riešenie.
Ak označíme $q = 0,1 < 1$, potom pre $n \in N$ platí:
$a_1 = 0,2, \quad a_2 = 0,2 + 0,03, \quad a_3 = 0,2 + 0,03 + 0,003 = 0,2 + 0,03(1 + q), \quad \ldots,$
$a_n = 0,2 + 0,03(1 + q + \cdots + q^{n-2}) = 0,2 + 0,03\frac{1-q^{n-1}}{1-q}, \ \ldots$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[0,2 + 0,03\tfrac{1-q^{n-1}}{1-q}\right] = 0,2 + 0,03\tfrac{1}{1-q} = 0,2 + \tfrac{0,03}{0,9} = \tfrac{7}{30}. \ \blacksquare$$

2.3.5 Postupnosti bodov metrických priestorov

Pojem konvergencie môžeme jednoduchým spôsobom rozšíriť na postupnosti bodov metrického priestoru. Podobne môžeme definovať v metrických priestoroch aj ostatné pojmy (napr. podpostupnosť, ohraničená postupnosť, ...) a odvodiť analogické tvrdenia, ako pre číselné postupnosti.

Na druhej strane môžeme pomocou konvergentných postupností zjednodušiť a sprehľadniť niektoré pojmy v metrických priestoroch (napr. hromadný bod množiny, uzáver množiny, ...). Pre obmedzený rozsah uvedieme iba niektoré z nich.

Nech $X \neq \emptyset$ je metrický priestor s metrikou ρ a nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov priestoru X (t. j. pre všetky $n \in N$ platí $x_n \in X$). Hovoríme, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje k bodu** $x \in X$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Prvok x nazývame **limitou postupnosti** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ak neexistuje bod $x \in X$, ku ktorému postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, potom hovoríme, že postupnosť **diverguje**. Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov metrického sa nazýva **ohraničená**, ak je ohraničená množina hodnôt tejto postupnosti.

Poznámka 2.3.25.
Z predchádzajúcej definície vyplýva, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru X konverguje k bodu $x \in X$ práve vtedy, ak konverguje číselná postupnosť $\{\rho(x_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ k číslu 0, t. j. ak $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Z definície hromadného bodu množiny $A \subset X$ a z definície konvergentnej postupnosti v metrickom priestore vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Veta 2.3.24.
Nech $X \neq \emptyset$ je metrický priestor s metrikou ρ a nech $A \subset X$.
Bod $a \in X$ je hromadným bodom množiny A práve vtedy, ak existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in A$, $x_n \neq a$ pre $n \in N$, ktorá konverguje k bodu a, t. j. platí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Označme $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pre každé $n \in N$.
Z definície vyplýva, že v okolí $O_\varepsilon(a)$ leží aspoň jeden bod $x_n \neq a$ taký, že $x_n \in A$.
Je zrejmé, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu a.
$PP_{\Leftarrow}$: Vyplýva priamo z definície limity postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Nech $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.
Inými slovami body x_n ležia v okolí $O_\varepsilon(a)$. $\blacksquare$

Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru $X \neq \emptyset$ sa nazýva **cauchyovská** (**fundamentálna**), ak spĺňa Cauchy–Bolzanov princíp konveregencie, t. j. ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $m, n \in N$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

V priestore R je pojem fundamentálnej a konvergentnej postupnosti ekvivalentný. Vzťah medzi konvergentnou a fundamentálnou postupnosťou je uvedený vo vete 2.3.25. Opačné tvrdenie vety neplatí v každom metrickom priestore (viď príklad 2.3.9), ale iba v niektorých metrických priestoroch.

Veta 2.3.25.
Každá konvergentná postupnosť bodov z metrického priestoru je fundamentálna.

Dôkaz.
Dôkaz je analogický ako dôkaz $\text{NP}_{\Rightarrow}$ vo vete 2.3.4. ■

Metrický priestor $X \neq \emptyset$ s metrikou ρ sa nazýva **úplný metrický priestor**, ak každá fundamentálna postupnosť bodov z priestoru X konverguje v priestore X. To znamená, že ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je fundamentálna, potom $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$.

Ako sme už spomínali, množina R s euklidovskou metrikou je na rozdiel od množiny Q úplný metrický priestor. Medzi úplné metrické priestory patrí tiež každý euklidovský priestor R^n, $n \in N$.

Nech $X \neq \emptyset$ je metrický priestor s metrikou ρ. Množina $A \subset X$ sa nazýva **kompaktná** (**v priestore** X) práve vtedy, ak sa z každej postupnosti bodov množiny A dá vybrať postupnosť, ktorá konverguje v množine A. V euklidovskom priestore R^n, $n \in N$ platí analogické tvrdenie ako v R. Vyjadruje to nasledujúca veta.

Veta 2.3.26.
Nech R^n, $n \in N$ je euklidovský metrický priestor. Potom množina $A \subset R^n$ je kompaktná práve vtedy, ak je uzavretá a ohraničená.

Dôkaz.
Dôkaz je analogický ako pri vete 2.3.10 a prenechávame ho čitateľovi. ■

Cvičenia

2.3.1. Napíšte niekoľko prvých členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vyslovte a dokážte hypotézu o monotónnosti a o ohraničenosti postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre všetky $n \in N$ platí: ♣

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, b) $a_n = \frac{n+3}{2n-1}$, c) $a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1}$, d) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$,
e) $a_n = n^2 - 1$, f) $a_n = n^2 - n$, g) $a_n = \frac{1}{n^3+1}$, h) $a_n = (-n)^{n-2}$,
i) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$, j) $a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$, k) $a_n = \frac{n^4-n+1}{n^4+1}$. l) $a_n = n^{n-2}$,

2.3.2. Nájdite množinu hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak: ♣
a) $a_n = \frac{2}{n+3}$ pre n nepárne a $a_n = 3^{-n}$ pre n párne,
b) $a_n = \frac{n+1}{n-1}$ pre n nepárne a $a_n = \frac{3^n}{1+3^n}$ pre n párne,
c) $a_n = 1 + 3^{-n}$ pre n nepárne a $a_n = \frac{n}{n+1}$ pre n párne,
d) $a_n = \frac{n}{2n+3}$ pre n nepárne a $a_n = \frac{2n+3}{n}$ pre n párne.

2.3.3. Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a postupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje. Zistite, aké sú postupnosti $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{1}{a_n b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Uveďte príklady takýchto postupností. ♣

2.3.4. Predpokladajme, že obe postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergujú. Zistite, aké sú postupnosti $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{1}{a_n b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Uveďte príklady takýchto postupností. ♣

2.3.5. Nájdite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré platí: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0,$
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 1,$
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) \neq 0,$
d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty.$

2.3.6. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadaná rekurentne vzťahmi $a_{n+1} = 1+a_n-n,\ a_1 = 1$ je nerastúca a ohraničená zhora. Určte a dokážte všeobecný vzorec pre člen a_n, $n\in N$ a vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ♣

2.3.7. Nájdite rekurentné vyjadrenie člena a_n, $n\in N$ postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: ♣

a) $\{2^n + 3\}_{n=1}^{\infty}$,
b) $\{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$,
c) $\{1 - n\}_{n=1}^{\infty}$,
d) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

2.3.8. Nájdite všeobecný vzorec pre n-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadanej rekurentne: ♣

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1,$
b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = -a_n,$
c) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2(n+1)a_n,$

2.3.9. Nájdite množiny hromadných hodnôt nasledujúcich postupností: ♣

a) $\{(-1)^n \sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$,
b) $\{(-n)^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$,
c) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$,
d) $\{n^{-2n}\}_{n=1}^{\infty}$,
e) $\{n + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$,
f) $\{(-n)^n\}_{n=1}^{\infty}$,
g) $\left\{(-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)\right\}_{n=1}^{\infty}$.

2.3.10. Na začiatku pokusu v čase $t_0 = 0$ bolo v skúmavke n_0 baktérií. Ich počet po t minútach je určený vzťahom $n_t = n_0 k^t$, kde k je nejaká konštanta. Na konci druhej minúty bolo v skúmavke $n_2 = 5\,000$ baktérií a na konci piatej minúty ich bolo $n_5 = 625\,000$. Koľko baktérií bolo v skúmavke na začiatku pokusu? ♣

2.3.11. Nech $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť štvorcov, kde S_1 je štvorec so stranou $a_1 = a > 0$ a pre $n \in N$, $n \geq 2$ má štvorec S_n vrcholy umiestnené v stredoch strán štvorca S_{n-1}. ♣

a) Určte všeobecný vzorec pre dĺžku strany a_n štvorca S_n, $n\in N$.
b) Určte súčet obvodov štvorcov S_n.
c) Určte súčet obsahov štvorcov S_n.

2.3.12. Pre aké $a \in R$ konverguje postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{n+1}{n}$ pre n párne a $a_n = \frac{1-an}{2n+1}$ pre n nepárne. ♣

2.3.13. Určte, ktoré z nasledujúcich rekurentne zadaných postupností konvergujú: ♣

a) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{\sqrt{a_n} + 1},$
b) $a_0 = 11,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 5},$
c) $a_0 = 2,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2},$
d) $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2},$
e) $a_0 = 0,\ a_{n+1} = \mathrm{e}^{1-a_n},$
f) $a_0 = 2,\ a_{n+1} = \mathrm{e}^{1-a_n},$

2.3.14. Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rekurentne zadaná vzťahmi: ♣

a) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2},\ a_0 > 0,$
b) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12},\ a_0 > 0,$
c) $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 20},\ a_0 > 0,$
d) $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2},\ a_0 \in \langle -1\,;\,1\rangle,$
e) $a_{n+1} = \mathrm{e}^{1-a_n},\ a_0 \in R.$
f) $a_{n+1} = \frac{a_n^2+4}{4},\ a_0 \in \langle -1\,;\,1\rangle,$
g) $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+a_n},\ a_0 > 0,$
h) $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n},\ a_0 = 1,$

2.3.15. Určte $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, ak pre všetky $n\in N$ platí: ♣

a) $a_n = \frac{n\sin n!}{n^2+1}$, b) $a_n = \frac{n\cos n!}{n^2+1}$, c) $a_n = \frac{n\sin n!}{n^2-1}$, d) $a_n = \frac{n\cos n!}{n^2-1}$.

2.3.16. Určte limity nasledujúcich postupností, t. j. vyjadrite periodické čísla ako zlomky: ♣

a) $\{0,1; 0,13; 0,135; 0,1355; \ldots\}$, b) $\{0,5; 0,53; 0,533; 0,5333; \ldots\}$,
c) $\{0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; \ldots\}$, d) $\{0,5; 0,50; 0,505; 0,5050; \ldots\}$,
e) $\{0,6; 0,66; 0,666; 0,6666; \ldots\}$, f) $\{0,1; 0,12; 0,121; 0,1212; \ldots\}$.

2.3.17. Určte $a\in R$ tak, aby nasledujúce limity boli vlastné: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^a+5}{1+n^3}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[a+\frac{1}{n}\right]^n$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{a+1}{3}\right]^n$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-a^n}{1+a^n}$.

2.3.18. Nájdite všetky čísla $a, b\in R$ tak, aby platilo: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n+2}+an+b\right]=0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n+2}+an+b\right]=0$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^a}{n^2+1}+bn\right]=0$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n^a+1}+bn\right]=0$,

2.3.19. Nech $a_1=1$, $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$, $n\in N$. Dokážte, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

2.3.20. Nech $a\in R$, $a\geq 0$. Vypočítajte limitu nasledujúcich postupností: ♣

a) $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$, b) $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$,

c) $\left\{\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}, \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}}, \ldots\right\}$, d) $\left\{\sqrt{a}, \sqrt{a+\sqrt{a}}, \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots\right\}$.

2.3.21. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+4+5+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+1}$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2}{1-n^2}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1}$.

2.3.22. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-n+1}{2n^2+1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-n+1}{2n^4+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-n+1}{2n^6+1}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n+2}-\frac{n^2}{n+3}\right]$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{2n^2}{n+2}-2n\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2-3n+2}{3n^2-n+1}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n-\frac{n^2}{n+1}\right]$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-3n^2+2}{n^2+1}$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2+1}{n+3}\right]$.

2.3.23. Vypočítajte nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3^n}{n-3^n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n+1}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n-1}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-n}{n^4}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-2}$, j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n n+1}{n!+1}$,

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n\, n!}{(3n)^n}$, n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$, o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n-1}{n+1}\right]^n$, p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n-3}{n}\right]^{\frac{n}{2}}$,

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{2n-1}{2n+1}\right]^n$, r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1-\frac{5}{n}\right]^n$, s) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1-\frac{1}{3n}\right]^n$, t) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n+6}{n+5}\right]^n$.

2.3.24. Vypočítajte nasledujúce limity: $\clubsuit$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{4})^n-(\frac{1}{3})^n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n^5+1}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}{n}$.

2.3.25. Nech $a, b\in R$, $b \geq a > 0$. Vypočítajte nasledujúce limity: $\clubsuit$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n-b^n}{a^{n+1}-b^{n+1}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right]^n$.

2.3.26. Nech $a\in R$. Vypočítajte nasledujúce limity: $\clubsuit$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{a^n+1}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^n+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^{2n}+1}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{a+3}{2}\right]^n$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[a+\frac{1}{n}\right]^n$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} a^2\sqrt{\frac{n-a}{n}}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n-a}{n+a}\right]^n$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1-3^n}$.

2.3.27. Nech $a, b\in R$. Vypočítajte nasledujúce limity: $\clubsuit$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right]$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n}-\sqrt{n-a}\right]$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n(n-a)}-n\right]$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+1}-n\right]$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+n}-n\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+1}-n\right]$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n-\sqrt{n^2-1}\right]$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3-1}-n\right]$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sqrt{n^2+1}-n\right]$,

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{an^2}{n+1}-\frac{bn^2}{n-1}\right]$, k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n-a}-\frac{n^2}{n-b}\right]$, l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-an^2+3n}{n+5}$.

2.3.28. Nech $a, b\in R$. Vypočítajte nasledujúce limity: $\clubsuit$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right]$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[3n-\sqrt{9n^2-10n+1}\right]$,

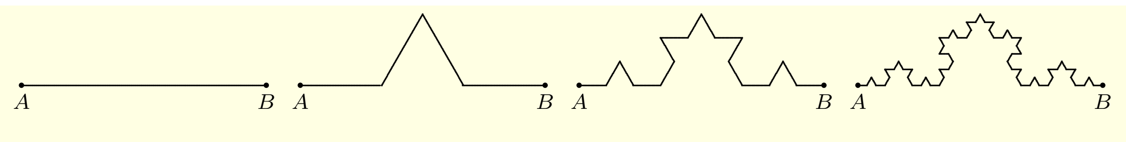
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+n+1}-\sqrt[3]{n^3-n+1}\right]$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right]$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{(n-a)(n-b)}-n\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n-\sqrt{n+1}}\right]$.

2.3.29. Nech $a, b\in R$, $a \geq b \geq 0$. Vypočítajte nasledujúce limity: $\clubsuit$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} [2\sqrt{a}\,]^n$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a^n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} na^n$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[n\sqrt[n]{a}-1]^2}{[n\sqrt[n]{b}-1]^2}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right]$.



Obr. 2.3.15: Lomená čiara z cvičenia 2.3.30.

2.3.30. Na obrázku 2.3.15 je znázornený postup konštrukcie lomenej čiary, ktorá vznikne z úsečky AB. Každá jednotlivá úsečka sa postupne rozdelí na tri rovnaké časti, pričom stredná časť sa zväčší na dvojnásobok (dve strany rovnostranného trojuholníka). Tento proces sa opakuje do nekonečna. Vypočítajte dĺžku lomenej čiary, ak $|AB| = 1$. $\clubsuit$

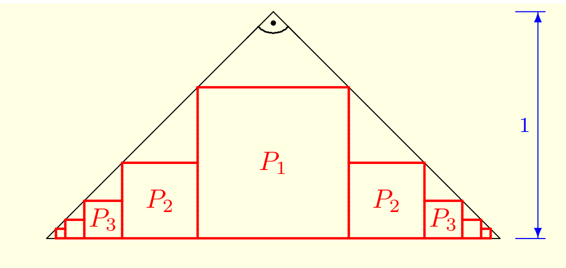
2.4 Číselné rady

2.4.1 Základné pojmy

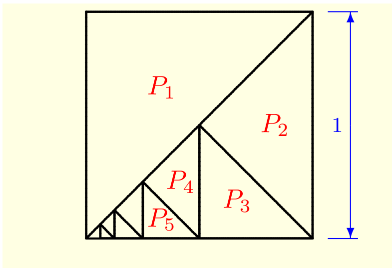
Číselné rady úzko súvisia s číselnými postupnosťami a zovšeobecňujú pojem spočítavania konečného počtu sčítancov na nekonečný počet. S problémom spočítať nekonečne veľa členov sa zaoberal už starogrécky matematik *Archimedes* [asi 287–212 pred n.l.] pri výpočte obsahu výseku paraboly.

S výrazmi, ktoré obsahujú nekonečne veľa sčítancov sa nepriamo stretávame už v základnej škole. Jednoduchým príkladom sú zlomky. Napríklad číslo $10/3 = \frac{10}{3}$ môžeme vyjadriť v tvare periodického čísla $3,\overline{3} = 3,333\,333\ldots$, resp. v tvare nekonečného počtu sčítancov

$$\frac{10}{3} = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots.$$



Obr. 2.4.16: Príklad 2.4.1.



Obr. 2.4.17: Príklad 2.4.2.

S výrazmi ktoré obsahujú súčet nekonečného počtu čísel sa môžeme stretnúť aj v geometrii. Ilustrujú to nasledujúce príklady.

Príklad 2.4.1.
Uvažujme rovnoramenný pravouhlý trojuholník T (obr. 2.4.16) s preponou dlhou 2. Výška trojuholníka T má dĺžku 1 a odvesny $\sqrt{2}$. Obsah trojuholníka T je určený vzťahmi

$$P = \frac{2\cdot 1}{2} = 1, \qquad \text{resp.} \quad P = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Uvažujme (nekonečnú) postupnosť štvorcov vpísaných do trojuholníka T tak, ako to vidíme na obrázku 2.4.16. Prvý štvorec má stranu dlhú $\frac{2}{3}$ a jeho obsah je $P_1 = \frac{4}{9}$. Druhý štvorec (sú dva) má stranu polovičnej dĺžky ako prvý štvorec a jeho obsah je $P_2 = \frac{P_1}{4}$. Tretí štvorec (sú dva) má stranu polovičnej dĺžky ako druhý štvorec a jeho obsah je $P_3 = \frac{P_2}{4} = \frac{P_1}{4^2}$. Takto pokračujeme pre všetky $n \in N$.
Je zrejmé, že súčet obsahov jednotlivých štvorcov je menší ako obsah trojuholníka T, t. j.

$$1 = P > P_1 + 2P_2 + \cdots + 2P_n + \cdots = P_1 + \frac{2P_1}{4} + \frac{2P_1}{4^2} + \cdots + \frac{2P_1}{4^{n-1}} + \cdots. \blacksquare$$

Príklad 2.4.2.
Nech S je štvorec so stranou dlhou 1. Jeho obsah P sa rovná číslu $1^2 = 1$.
Štvorec S rozdeľme uhlopriečkou na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Obsah jedného z nich označíme P_1 a druhý rozdelíme na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Obsah jedného z nich označíme P_2 a druhý opäť rozdelíme na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Takto budeme pokračovať pre všetky $n \in N$ (obr. 2.4.17).
Je zrejmé, že tieto trojuholníky pokryjú celý štvorec S, t. j. súčet ich obsahov je rovný číslu $P = 1$. Každý nasledujúci trojuholník má obsah rovný polovici obsahu predchádzajúceho trojuholníka. Obsah prvého je $P_1 = \frac{P}{2} = \frac{1}{2}$. To znamená, že platí:

$$1 = P = P_1 + \frac{P_1}{2} + \frac{P_1}{2^2} + \cdots + \frac{P_1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots. \blacksquare$$

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť, potom **nekonečným číselným radom** (**nekonečným radom čísel**) vytvoreným z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazývame výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Stručne ho nazývame **rad** (**číselný rad**) a označujeme symbolom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Čísla a_1, a_2, ... nazývame **členy radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, pričom a_n sa nazýva **n-tý člen**.[25]

Poznámka 2.4.1.
Číselné rady a postupnosti úzko súvisia. Rad je jednoznačne určený postupnosťou. To znamená, že rad môžeme zadať **všeobecným vyjadrením** (**explicitne**) každého člena a_n, $n \in N$ alebo **rekurentným vyjadrením** prvého člena a členov a_n, $n \in N$.
Napríklad rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$ je explixcitne zadaný vzorcom $a_n = 2^n$, $n \in N$ a rekurentne je zadaný vzťahmi $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n$, $n \in N$.

Poznámka 2.4.2.
Pre spočítavanie nekonečného počtu sčítancov neplatia všetky pravidlá platné pri konečných počtoch sčítancov. Napríklad, ak aplikujeme asociatívny zákon na číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, dostaneme spor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \begin{cases} (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0, \\ 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1. \end{cases}$$

Neskôr (pri prerovnaní radu) ukážeme, že neplatí ani komutatívny zákon.

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad a nech $k \in N$ je ľubovoľné. Potom konečný súčet

$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

nazývame **k-tým čiastočným súčtom radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a nekonečný súčet

$$r_k = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$$

nazývame **k-tým zvyškom radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Postupnosť

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1 + \cdots + a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

nazývame **postupnosť čiastočných súčtov radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka 2.4.3.
Z definície vyplýva, že pre všetky $k \in N$ platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n} = s_k + r_k.$$

[25] Ak chápeme $n \in N$ ako premennú, potom a_n predstavuje n-tý všeobecný člen radu.

Poznámka 2.4.4.
Vzťah medzi radom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a jeho postupnosťou čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný. Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je pre $n\in N$ jednoznačne určená vzťahmi

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2, \quad \ldots, \quad s_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n, \quad \ldots .$$

Ak položíme $s_0 = 0$, potom je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pre $n\in N$ jednoznačne určený vzťahmi

$$a_1 = s_1 = s_1 - s_0, \quad a_2 = s_2 - s_1, \quad \ldots, \quad a_n = s_n - s_{n-1}, \quad \ldots .$$

Hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **má súčet** $s\in R^*$ a zapisujeme

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

práve vtedy, ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, t. j. platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

Ak $s \in R$, potom hovoríme, že **rad** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje k číslu** s (**je konvergentný k číslu** s) alebo stručne, že **rad konverguje** (**je konvergentný**).

Ak rad nemá konečný súčet, potom hovoríme, že **rad diverguje** (**je divergentný**). Ak $s = \infty$ [resp. $s = -\infty$], potom **rad diverguje do** ∞ [resp. **do** $-\infty$] a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \qquad \left[\text{resp. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty\right].$$

Ak rad súčet nemá, t. j. ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, potom hovoríme, že **rad osciluje**.

Poznámka 2.4.5.
Číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ buď konverguje alebo diverguje. Ak rad diverguje, potom buď osiluje alebo diverguje do ∞ [resp. do $-\infty$]. Je zrejmé, že všetky tieto možnosti sa vylučujú.

Príklad 2.4.3.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$, pretože platí $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, pretože platí $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1) = -\infty$, pretože platí $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ osciluje, pretože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 0, -1, 0, \ldots\}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje. ■

Poznámka 2.4.6.
Vo vete 2.3.19 sme vyšetrovali postupnosť čiastočných súčtov konvergentného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n!} = 1 + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{4!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} + \cdots = \mathrm{e}\,.$$

Príklad 2.4.4.
Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$.

Riešenie.
Nech $n \in N$, potom pre členy a_n platí:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Potom n-tý čiastočný súčet tohto radu môžeme vyjadriť vzťahom

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Z toho vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1$, t. j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. ■

Príklad 2.4.5.
Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)}$, pričom $p \in N$.

Riešenie.
Nech $n \in N$, potom pre členy radu platí:

$$a_n = \frac{1}{n(n+p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{n(n+p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{n+p-n}{n(n+p)} = \frac{1}{p} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right].$$

Ak platí $n > p$, potom pre n-tý čiastočný súčet s_n tohto radu platí:

$$ps_n = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{1+p}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+p}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+p}\right] + \left[\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1+p}\right] + \cdots$$
$$\cdots + \left[\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n}\right] + \left[\frac{1}{n-p+1} - \frac{1}{n+1}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1+p}\right] + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right] =$$
$$= \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right].$$

Z toho vyplýva $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{p} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}\right]$. ■

Poznámka 2.4.7.
Ak položíme $p = 1$, dostaneme rovnaký výsledok ako v príklade 2.4.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{p} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}\right] = \frac{1}{1} \cdot 1 = 1.$$

Pre $p = 2$, $p = 3$ dostaneme výsledky

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] = \frac{11}{18}.$$

V predchádzajúcich príkladoch sme členy radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ rozložili na rozdiel dvoch členov nejakej postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Tento poznatok zhrnieme do nasledujúcej vety.

Veta 2.4.1.
Nech existuje $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n = b_n - b_{n+p}$, kde $p \in N$.

Ak existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_p - p \cdot b$.

Dôkaz.
Ak $n \in N$, $n \geq p$, potom pre n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n =$$
$$= (b_1 - b_{1+p}) + (b_2 - b_{2+p}) + \cdots + (b_p - b_{2p}) + (b_{p+1} - b_{2p+1}) + \cdots + (b_n - b_{n+p}) =$$
$$= b_1 + b_2 + \cdots + b_p - b_{n+1} - b_{n+2} - \cdots - b_{n+p}.$$

Keďže pre všetky $p \in N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+p} = b$, potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_p - b_{n+1} - b_{n+2} - \cdots - b_{n+p}) =$$
$$= b_1 + \cdots + b_p - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - \cdots - \lim_{n\to\infty} b_{n+p} = b_1 + \cdots + b_p - p \cdot b. \blacksquare$$

Príklad 2.4.6.
Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)\cdots(a+n+k)}$, kde $k \in N$, $a \geq 0$.

Riešenie.
Pre všetky $n \in N$, $k \in N$, $a \geq 0$ platí:

$$a_n = \frac{1}{k}\frac{a+n+k-a-n}{(a+n)(a+n+1)\cdots(a+n+k-1)(a+n+k)} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{(a+n)\cdots(a+n+k-1)} - \frac{1}{(a+n+1)\cdots(a+n+k)}\right] = b_n - b_{n+1},$$

pričom $b_n = \frac{1}{k}\frac{1}{(a+n)\cdots(a+n+k-1)}$. Z toho vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)\cdots(a+n+k-1)} = \frac{1}{k}\frac{1}{\infty\cdots\infty} = 0.$$

Potom na základe vety 2.4.1 platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = b_1 - 0 = \frac{1}{k}\frac{1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}.$$

Pre $a = 0$ a pre $k = 1$, $k = 2$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k}\frac{1}{k!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

Príklad 2.4.7.
Vypočítajte súčet **harmonického radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$.

Riešenie.
Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a podľa vety 2.3.11 má limitu.
Pre prvé štyri členy vybranej postupnosti $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$s_1 = s_{2^0} = 1 \geq 1 + \tfrac{0}{2},$$
$$s_2 = s_{2^1} = s_1 + \tfrac{1}{2} \geq 1 + \tfrac{0}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{1}{2},$$
$$s_4 = s_{2^2} = s_2 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \geq 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{2}{2},$$
$$s_8 = s_{2^3} = s_4 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} \geq 1 + \tfrac{2}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = 1 + \tfrac{2}{2} + \tfrac{4}{8} = 1 + \tfrac{3}{2}.$$

Dokážeme, že pre všetky $n \in N$ platí $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.
Použijeme matematickú indukciu. Pre s_1 sme vzťah už dokázali.
Predpokladajme, že platí vzťah $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$. Potom pre $s_{2^{k+1}}$ platí:

$$s_{2^{k+1}} = s_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k}{2} + \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k-\text{krt}} = 1 + \frac{k}{2} + \frac{2^k}{2^{k+1}} = 1 + \frac{k+1}{2}.$$

Takže pre všetky $n \in N$ platí $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$. Z toho vyplýva:
$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} \geq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{n}{2}\right) = \infty, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty.$$
To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, t. j. rad diverguje a platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. ■

Príklad 2.4.8.
Nech $q \in R$. Vyšetrite konvergenciu **geometrického radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots$.

Riešenie.
Ak $q = 1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$.
Ak $q \neq 1$, potom pre n-tý čiastočný súčet geometrického radu platí:
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = (q^{n-1} + \cdots + q + 1)\tfrac{q-1}{q-1} = \tfrac{q^n-1}{q-1}.$$
Potom na základe príkladu 2.3.20 o limite geometrickej postupnosti platí:
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n-1}{q-1} = \begin{cases} \nexists, & \text{pre } q \leq -1, \ \text{ t. j. osciluje,} \\ \frac{\infty-1}{q-1} = \infty, & \text{pre } q > 1, \ \text{ t. j. diverguje do } \infty, \\ \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}, & \text{pre } q \in (-1\,;\,1)\,, \ \text{ t. j. konverguje.} \end{cases}$$ ■

Poznámka 2.4.8.
V príklade 2.4.8 sme použili rovnosť, ktorá pre $a, b \in R$, $n \in N$ má tvar
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Príklad 2.4.9.
Vyšetrite konvergenciu číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Riešenie.
Nech $n \in N$, potom pre n-tý čiastočný súčet daného radu platí:
$$s_n = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \tfrac{1}{\sqrt{n}} > \tfrac{1}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \tfrac{1}{\sqrt{n}} = \tfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$
Z toho vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, t. j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$. ■

2.4.2 Vlastnosti konvergentných radov

V tejto časti uvedieme niektoré základné vlastnosti číselných radov, ako aj niektoré kritéria na určovanie konvergentných, resp. divergentných radov.

Veta 2.4.2 (Nutná podmienka konvergencie radu).
Ak číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz.
Platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in R$. Z toho pre všetky $n \in N$ vyplýva $a_n = s_n - s_{n-1}$, t. j.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$ ■

Poznámka 2.4.9.
Ako dokazujú príklady 2.4.7 a 2.4.9, tvrdenie v predchádzajúcej vete sa nedá obrátiť.
To znamená, že z podmienky $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nevyplýva konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôsledok 2.4.2.a.
Ak nie je splnená podmienka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Príklad 2.4.10.
Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(-1)^n = -1+2-3+4-5+\cdots$ nekonverguje, pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie. Limita $\lim\limits_{n\to\infty} n(-1)^n$ totiž neexistuje. ■

Pri vyšetrovaní konvergencie číselných radov má dôležitú úlohu tzv. Cauchy–Bolzanov princíp konvergencie, ktorý nám umožní overiť konvergenciu radu bez toho, aby sme poznali jeho súčet. Vyplýva z Cauchy–Bolzanovho princípu konvergencie pre číselné postupnosti (veta 2.3.4, str. 96), ktorý je v prípade postupnosti čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ sformulovaný v leme 2.4.3.

Lema 2.4.3.
Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje práve vtedy, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $m, n \in N$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ platí $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

Veta 2.4.4 (Cauchy–Bolzanov princíp konvergencie radu).
Číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n, k \in N$, $n \geq n_0$ platí $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$.

Dôkaz.
Tvrdenie vyplýva priamo z definície konvergencie radu a z lemy 2.4.3.
Ak položíme $m = n + k$, potom $m > n$ a pre postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$|s_m - s_n| = |s_{n+k} - s_n| = |(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}) - (a_1 + \cdots + a_n)| =$$
$$= |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}|\,.$$

Takže sú tvrdenia $|s_m - s_n| < \varepsilon$, $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$ ekvivalentné a veta platí. ■

Veta 2.4.5.
Nech $k \in N$. Potom rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a jeho k-tý zvyšok $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ buď obidva konvergujú alebo obidva divergujú do ∞ alebo obidva divergujú do $-\infty$ alebo obidva oscilujú.
Ak má jeden z týchto radov súčet, potom má súčet aj druhý rad a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}.$$

Dôkaz.
Hodnota $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ predstavuje n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a hodnota $t_n = a_{k+1} + \cdots + a_{k+n}$ predstavuje n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$. Potom platí:

$$s_{k+n} = a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+n} = a + t_n.$$

Je zrejmé, že $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ je reálne číslo.
Z vety 2.3.7 vyplýva, že pokiaľ limity existujú, platí $\lim\limits_{n\to\infty} s_{k+n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{k+n} = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_k + t_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + \lim_{n\to\infty} t_n.$$

To znamená, že tvrdenie vety platí. ■

Poznámka 2.4.10.
V praxi sa číselné rady používajú na numerický výpočet hodnôt reálnych funkcií. Väčšinou súčet konkrétneho číselného radu nedokážeme spočítať presne a preto ho aproximujeme vhodným čiastočným súčtom s_n. Zvyšok r_n vyjadruje chybu výpočtu a preto je dôležité vedieť odhadnúť jeho hodnotu. Ak chceme, aby chyba výpočtu bola menšia ako vopred zvolené $\varepsilon > 0$, potom musíme nájsť také $n \in N$, aby platilo $|r_n| < \varepsilon$.

Dôsledok 2.4.5.a.
Nech existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$.
Potom rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ buď obidva konvergujú alebo obidva divergujú do ∞ alebo obidva divergujú do $-\infty$ alebo obidva oscilujú.

Dôkaz.
Z predpokladov vyplýva, že pre $k \geq n_0$ sú k-te zvyšky radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ rovnaké. To znamená, že majú rovnaké vlastnosti vzhľadom na konvergenciu, resp. divergenciu.
Potom z vety 2.4.5 vyplýva, že aj rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ majú rovnaké vlastnosti. ■

Dôsledok 2.4.5.b.
Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ vznikne z radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ zmenou konečného počtu členov, potom buď obidva konvergujú alebo obidva divergujú do ∞ alebo divergujú do $-\infty$ alebo oscilujú.

Dôkaz.
Keďže majú rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ rôzny konečný počet členov, potom existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$. Zvyšok vyplýva z dôsledku 2.4.5.a. ■

Poznámka 2.4.11.
Predchádzajúce dôsledky tvrdia, že ak v číselnom rade zmeníme konečný počet členov, jeho konvergencia (divergencia do $\pm\infty$, oscilácia) sa nezmení. Toto platí pre rady vo všeobecnosti, **konečný počet členov nemá vplyv na vlastnosti radu**.
To znamená, že ak budeme skúmať najekú vlastnosť radu, potom konečný počet členov na túto vlastnosť nnemá vplyv.

Číselné rady môžeme sčítavať, odčítavať, násobiť číslom. Ostatné operácie, ako sú napríklad vzájomné násobenie radov a prerovnanie radu, zavedieme neskôr.

Nech $c \in R$, potom číselné rady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c a_n$$

nazývame **súčet**, **rozdiel radov** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ a **násobok radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **číslom** c.

Veta 2.4.6.
Nech $c \in R$ a nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$, pričom $t, s \in R^*$.
Ak majú príslušné výrazy v R^* zmysel, potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \pm t, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cs.$$

Dôkaz.
Ak označíme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti čiastočných súčtov radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom sú postupnosti $\{s_n \pm t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c\, s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosťami čiastočných súčtov radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ a tvrdenie vyplýva z vety 2.3.13. ■

Poznámka 2.4.12.
Ak $c = 0$, potom pre ľubovoľný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\, a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$.

Opačné tvrdenie v predchádzajúcej vete neplatí. Napríklad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}]$ konverguje k číslu 0, aj keď rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nemajú súčty.

Príklad 2.4.11.
Nech $a, b, p, q \in R$, $|p| > 1$, $|q| > 1$. Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ap^n + bq^n}{p^n q^n}$.

Riešenie.
Z príkladu 2.4.8 vyplýva, že pre $|p| > 1$, $|q| > 1$, t. j. $\left|\frac{1}{p}\right| < 1$, $\left|\frac{1}{q}\right| < 1$ platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{p-1}{p}} = \frac{p}{p-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{q}{q-1}.$$

To znamená, že sú splnené predpoklady vety 2.4.6 a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ap^n + bq^n}{p^n q^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a}{q^n} + \frac{b}{p^n}\right] = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{aq}{q-1} + \frac{bp}{p-1}. \ \blacksquare$$

V poznámke 2.4.2 sme uviedli príklad číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, pre ktorý neplatil asociatívny zákon. Problém je v tom, že tento rad nemá súčet. Ako ukazuje nasledujúca veta, ak rad súčet má, potom asociatívny zákon platí.

Veta 2.4.7.
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s \in R^*$, $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť indexov. Potom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + \cdots + a_{k_1}}_{c_1} + \underbrace{a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}}_{c_2} + \cdots \underbrace{a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}}_{c_n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = s.$$

Dôkaz.
Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Potom pre postupnosť $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ platí:

$$t_1 = c_1 = a_1 + \cdots + a_{k_1} = s_{k_1}, \quad t_2 = c_1 + c_2 = a_1 + \cdots + a_{k_2} = s_{k_2}, \quad \ldots$$
$$t_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_1 + \cdots + a_{k_n} = s_{k_n}, \quad \ldots .$$

To znamená, že $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. ∎

Dôsledok 2.4.7.a.
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ vznikne z radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vynechaním všetkých nulových členov.
Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s \in R^*$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = s$.

Dôkaz.
Označme $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$ rastúcu postupnosť indexov všetkých nenulových členov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Potom číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ môžeme vyjadriť v tvare

$$\underbrace{(a_1 + \cdots + a_{i_1})}_{c_1 = a_{i_1}} + \underbrace{(a_{i_1+1} + \cdots + a_{i_2})}_{c_2 = a_{i_2}} + \cdots + \underbrace{(a_{i_{n-1}+1} + \cdots + a_{i_n})}_{c_n = a_{i_n}} + \cdots .$$

Ak $a_1 \neq 0$, potom zrejme $i_1 = 1$ a výraz $a_1 + \cdots + a_{i_1}$ predstavuje jeden člen $a_{i_1} = a_1$.
Tým sú splnené predpoklady vety 2.4.7 a platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = s$. ∎

Dôsledok 2.4.7.b.
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ vznikne z radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vložením ľubovoľného (aj spočítateľného) počtu nulových členov.
Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s \in R^*$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = s$.

Dôkaz.
Sporom. Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = t \in R^*$, $t \neq s$.

Keďže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vznikne z $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ vynechaním nulových členov, z dôsledku 2.4.7.a vyplýva spor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = t$. ∎

Poznámka 2.4.13.
Dôsledok 2.4.7.a môže byť v niektorých prípadoch užitočný. Ak vylúčime z radu s nezápornými členmi všetky jeho nulové členy, dostaneme rad s kladnými členmi s rovnakým súčtom. Potom pri vyšetrovaní konvergencie radu môžeme použiť aj podielové kritéria, ktoré obsahujú jednotlivé členy v menovateli zlomku.

2.4.3 Číselné rady s nezápornými členmi

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi, t. j. nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$, Potom je jeho postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesajúca a podľa vety 2.3.11 má limitu. To znamená, že každý **rad s nezápornými členmi má súčet**.

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, ak je postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená zhora a diverguje do ∞ práve vtedy, ak je postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ neohraničená zhora.

V mnohých problémoch nie je nutné vypočítať súčet radu. Je ale dôležité dokázať rozhodnúť, či rad konverguje alebo diverguje. Preto uvedieme niektoré kritéria, ktoré túto úlohu zjednodušia. Žiadne kritérium však nie je univerzálne a neumožní nám rozhodnúť o konvergencii alebo divergencii každého radu.

Veta 2.4.8.
Nech $0 \leq a_n \leq b_n$ pre všetky $n \in N$ a nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$, potom $0 \leq s \leq t \leq \infty$.

Dôkaz.
Ak $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú príslušné postupnosti čiastočných súčtov, potom pre $n \in N$ platí:

$$0 \leq s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq b_1 + \cdots + b_n = t_n, \quad \text{t. j.} \quad 0 \leq s = \lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} t_n = t. \ \blacksquare$$

Dôsledok 2.4.8.a.
Nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$ a nech $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná postupnosť z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Ak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, potom konverguje tiež rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$.

Dôkaz.
Označme $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť, ktorá vznikne z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že nahradíme všetky jej členy nepatriace do podpostupnosti $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ číslom 0, t. j.

$$b_n = 0, \quad \text{pre} \quad n \notin \{k_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad b_n = a_n, \quad \text{pre} \quad n \in \{k_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Potom pre všetky $n \in N$ platí $0 \leq b_n \leq a_n$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.
Po vynechaní nulových členov v rade $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dostaneme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ a ten konverguje na základe dôsledku 2.4.7.a. $\blacksquare$

Ak si uvedomíme, že zmenou konečného počtu členov sa konvergencia, resp. divergencia radu nezmení (viď poznámka 2.4.11), potom z vety 2.4.8 ihneď vyplýva nasledujúce kritérium konvergencie.

Veta 2.4.9 (1. porovnávacie kritérium).
Nech[26] existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$.

a) Ak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom konverguje tiež rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Ak diverguje do ∞ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, potom diverguje do ∞ tiež rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Príklad 2.4.12.
Vyšetrite konvergenciu radov: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Riešenie.
a) Pre všetky $n \in N$ platí $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n(n+1)$, t. j. $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$.
Keďže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje (príklad 2.4.4), konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

[26] V literatúre sa tiež niekedy nazýva kritérium o konvergentnej majorante a divergentnej minorante.

b) Pre všetky $n\in N$ platí $\sqrt[3]{n} \leq n$, t. j. $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Keďže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (príklad 2.4.7), diverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. ■

Príklad 2.4.13.

Vyšetrite konvergenciu **Riemannovho rad** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}$.

Riešenie.

Pre $p \leq 0$ rad diverguje, pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie (veta 2.4.2). Z poznámky 2.3.15 vyplýva, že platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 1, \quad \text{pre } p = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \infty, \quad \text{pre } p < 0.$$

Pre $p = 1$ dostávame harmonický rad, ktorý diverguje (príklad 2.4.7).

Pre $0 < p < 1$ Riemannov rad diverguje na základe 1. porovnávacieho kritéria.
Z vety 2.1.45 vyplýva, že pre všetky $n\in N$, $n \geq 2$ platí $n^p < n^1$, t. j. $n^{-p} > \frac{1}{n} \geq 0$.

Pre $p = 2$ dostávame rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, ktorý konverguje (príklad 2.4.12).

Pre $p > 2$ rad konverguje na základe 1. porovnávacieho kritéria, pretože pre všetky $p > 2$, $n\in N$, $n \geq 2$ platí $n^p > n^2$, t. j. $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n^2}$.

Pre $1 < p < 2$ rad konverguje, ale dôkaz tohto tvrdenia s našimi doterajšími vedomosťami je pomerne pracný a preto ho vykonáme neskôr (príklad 4.3.8 na strane 326). ■

Dôsledok 2.4.9.a (Limitný tvar).

Nech pre všetky $n\in N$ (okrem konečného počtu) platí $0 < a_n \leq b_n$.

Ak $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ súčasne konvergujú alebo divergujú do ∞.

Dôkaz.

$\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená (veta 2.3.8), t. j. existujú $0 < L < K < \infty$ také, že pre všetky $n\in N$ platí:

$$L < \frac{a_n}{b_n} < K, \qquad \text{t. j. } \; L\,b_n < a_n < K\,b_n.$$

Zvyšok vyplýva z 1. porovnávacieho kritéria a z vety 2.4.6.

Ak konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, potom konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Lb_n$ a potom konverguje aj $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak diverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, potom diverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Kb_n$ a potom diverguje aj $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. ■

Príklad 2.4.14.

Vyšetrite konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$.

Riešenie.

Pre všetky $n\in N$ platí:

$$0 < n^2 + n = n(n+1) \leq (2n-1)2n = 4n^2 - 2n, \qquad \text{t. j. } \; 3n \leq 3n^2 \iff 1 \leq n.$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $n\in N$ platí:

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} = b_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)2n} = \frac{1}{4} > 0.$$

Keďže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje (príklad 2.4.4), konverguje tiež $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$. ■

Príklad 2.4.15.
Uvažujme rady z príkladu 2.4.12.

a) Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konverguje, pretože konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{-2}}{[n(n+1)]^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

b) O divergencii radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ pomocou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nevieme rozhodnúť, pretože platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{n}\right]^{-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2} = \infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left[\sqrt[3]{n}\right]^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0. \blacksquare$$

Veta 2.4.10 (2. porovnávacie kritérium).
Nech existuje $n_0 \in N$, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $a_n > 0$, $b_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

a) Ak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom konverguje tiež rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Ak diverguje do ∞ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, potom diverguje do ∞ tiež rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôkaz.
Nech $n \in N$, $n \geq n_0$, potom platí $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, t. j. $0 < \frac{b_n}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$.

Ak označíme $L = \frac{b_{n_0}}{a_{n_0}}$, potom $L > 0$ a pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$0 < L = \frac{b_{n_0}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_{n_0+1}}{a_{n_0+1}} \leq \cdots \leq \frac{b_n}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \leq \cdots, \quad \text{t. j.} \quad La_n \leq b_n.$$

Potom na základe 1. porovnávacieho kritéria a vety 2.4.6 platí:

a) Ak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} La_n$ a potom aj $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Ak diverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, potom diverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} La_n$ a potom aj $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. $\blacksquare$

Príklad 2.4.16.
Uvažujme rady z príkladu 2.4.12 a príkladu 2.4.15.

a) Ak pre $n \in N$ označíme $b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, potom platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} = \frac{n^2+2n}{(n+2)^2}, \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2}.$$

Keďže pre všetky $n \in N$ platí $n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$, potom tiež platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$.
Pretože konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

b) Ak pre $n \in N$ označíme $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, potom platí:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, \qquad \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}}.$$

Keďže pre všetky $n \in N$ platí $1 + \frac{1}{n} > 1$, potom na základe vety 2.1.45 c) platí:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} > \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} = \frac{b_n}{b_{n+1}}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Pretože diverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. $\blacksquare$

Veta 2.4.11 (Podielové d'Alembertovo kritérium).
Nech[27] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi a nech $n_0 \in N$ je také, že platí:

a) Ak pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, kde $q \in (0\,;\,1)$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Ak pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do ∞.

Dôkaz.
Vyplýva z 2. porovnávacieho kritéria.
a) Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$.

Keďže geometrický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ pre $q \in (0\,;\,1)$ konverguje, konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\frac{1}{1} = 1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje. ■

Veta 2.4.12 (Limitné d'Alembertovo kritérium).
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi a nech existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$.

a) Ak $p < 1$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Ak $p > 1$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do ∞.

c) Existujú konvergentné aj divergentné rady, pre ktoré $p = 1$.

Dôkaz.
a) Je zrejmé, že $p \geq 0$. Z vlastností limity (poznámka 2.3.10) vyplýva,
že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - p \right| < \varepsilon, \qquad \text{t. j. } \; p - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < p + \varepsilon.$$

Ak zvolíme ε tak, aby $q = p + \varepsilon < 1$, potom pre $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$.

To znamená, že sú splnené predpoklady vety 2.4.11 a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Keďže $p > 1$, potom z vety 2.3.23 vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

To znamená, že nie je splnená nutná podmienka konvergencie a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

c) Napríklad konvergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-2}$ a divergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. ■

Príklad 2.4.17.
Vyšetrite konvergenciu radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k+1} = \frac{1}{2\cdot 6^k}$, $a_{2k} = \frac{1}{6^k}$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Riešenie.
Daný rad môžeme vyjadriť v tvare

$$\frac{1}{2\cdot 6^0} + \frac{1}{6^1} + \frac{1}{2\cdot 6^1} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{2\cdot 6^2} + \cdots + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{2\cdot 6^k} + \frac{1}{6^{k+1}} + \frac{1}{2\cdot 6^{k+1}} + \cdots.$$

[27] *Jean Baptiste d'Alembert* [1717–1783] — francúzsky matematik, fyzik a filozof.

Pre všetky $n = 2k$, resp. $n = 2k+1$, kde $k \in N$, platí:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{6^k}{2\cdot 6^k} = \frac{1}{2} = 2^{-1}, \quad \text{resp.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{2\cdot 6^k}{6^{k+1}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 3^{-1}.$$
Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje a limitné d'Alembertovo kritérium použiť nemôžeme.
Ale je zrejmé, že pre všetky $n \in N$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{2} < 1$.
To znamená, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje na základe podielového d'Alembertovho kritéria. ■

Poznámka 2.4.14.
Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a nech spĺňa predpoklady vety 2.4.11.
Potom pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, t. j. $a_{n+1} \leq q a_n$.
Nech $k \in N$, $k \geq n_0$, potom pre všetky $n \in N$ platí:
$$a_{k+n} \leq q a_{k+n-1} \leq q^2 a_{k+n-2} \leq \cdots \leq q^{n-1} a_{k+1} \leq q^n a_k.$$
Potom k-ty zvyšok radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ môžeme odhadnúť vzťahom
$$r_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n} + \cdots \leq a_{k+1} + q a_{k+1} + \cdots + q^{n-1} a_{k+1} + \cdots =$$
$$= a_{k+1}(1 + q + \cdots + q^{n-1} + q^n + \cdots) = \frac{a_{k+1}}{1-q} \leq \frac{q a_k}{1-q}.$$

Veta 2.4.13 (Odmocninové Cauchyho kritérium).
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi a nech $n_0 \in N$ je také, že platí:

a) Ak pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, kde $q \in (0\,;1)$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Ak pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do ∞.

Dôkaz.
Vyplýva z 1. porovnávacieho kritéria, pretože platí:
a) Pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, t. j. $a_n \leq q^n$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje.

b) Pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, t. j. $a_n \geq 1$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje. ■

Veta 2.4.14 (Limitné Cauchyho kritérium).
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi a nech existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$.

a) Ak $p < 1$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Ak $p > 1$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do ∞.

c) Existujú konvergentné aj divergentné rady, pre ktoré $p = 1$.

Dôkaz.
a) Je zrejmé, že $p > 0$. Z vlastností limity (poznámka 2.3.10) vyplýva,
že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:
$$\left|\sqrt[n]{a_n} - p\right| < \varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad p - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < p + \varepsilon.$$

Ak zvolíme ε tak, aby $q=p+\varepsilon<1$, potom pre $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n}<q<1$.

To znamená, že sú splnené predpoklady vety 2.4.13 a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Keďže $p>1$, potom z vety 2.3.22 vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

c) Napríklad konvergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ a divergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. ■

Poznámka 2.4.15.
Z vety 2.3.21 vyplýva, že ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$, potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p$.

To znamená, že odmocninové kritérium je účinnejšie ako podielové kritérium. Ak o konvergencii radu môžeme rozhodnúť pomocou d'Alembertovho podielového kritéria, potom o konvergencii môžeme tiež rozhodnúť pomocou Cauchyho odmocninového kritéria. Ako dokazuje príklad 2.4.18, opačné tvrdenie neplatí.

Poznámka 2.4.16.
Predpoklad a) pri podielovom, resp. odmocninovom kritériu nemôžeme zjednodušiť.
Nemôžeme ho nahradiť predpokladom, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1, \quad \text{resp.} \quad \sqrt[n]{a_n}<1.$$
Napr. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje, aj keď $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}<1$, $\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}<1$.

Príklad 2.4.18.
Vyšetrite konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_{2k-1}=\frac{1}{2^k}$, $a_{2k}=\frac{1}{3^k}$ pre $k\in N$.

Riešenie.
Daný rad môžeme vyjadriť v tvare
$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{3^{k-1}}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}+\cdots.$$
Podielové d'Alembertovo kritérium nemôžeme použiť, pretože pre všetky $n=2k-1$, resp. $n=2k$, kde $k\in N$, $k=2,3,4,\ldots$, platí:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}=\frac{2^k}{3^k}<1, \quad \text{resp.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\frac{a_{2(k+1)-1}}{a_{2k}}=\frac{3^k}{2^{k+1}}>1.$$
Odmocninové Cauchyho kritérium ale použiť môžeme, pretože pre všetky $n=2k-1$, resp. $n=2k$, $k\in N$ platí:
$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}}=\frac{1}{\sqrt[2k-1]{2^k}}\leq\frac{1}{\sqrt[2k]{2^k}}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{resp.} \quad \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[2k]{a_{2k}}=\frac{1}{\sqrt[2k]{3^k}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$
Z toho vyplýva, že pre všetky $n\in N$ platí $\sqrt[n]{a_n}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}<1$ a rad konverguje. ■

Poznámka 2.4.17.
Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a nech spĺňa predpoklady vety 2.4.13.

Potom pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n}\leq q<1$, t. j. $a_n\leq q^n$.

Nech $k\in N$, $k\geq n_0$, potom k-ty zvyšok radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ môžeme odhadnúť vzťahom
$$r_k=a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+n}+\cdots\leq q^{k+1}+q^{k+2}+\cdots+q^{k+n}+\cdots=$$
$$=q^{k+1}(1+q+\cdots+q^n+\cdots)=\frac{q^{k+1}}{1-q}.$$

Príklad 2.4.19.
Vyšetrite konvergenciu radov: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, kde $a > 0$.

Riešenie.
a) Ak pre $n \in N$ označíme $a_n = \frac{n^n}{n!}$, potom platí:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)!\, n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 1.$$
Z toho vyplýva na základe limitného d'Alembertovho kritéria, že daný rad diverguje.

Z poznámky 2.4.15 vyplýva, že divergenciu tohto radu môžeme dokázať aj na základe limitného Cauchyho kritéria. Z príkladu 2.3.35 vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$.

b) Ak pre $n \in N$ označíme $a_n = \frac{a^n}{n!}$, potom na základe príkladu 2.3.29 platí:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} n!}{(n+1)!\, a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{a}{\infty} = 0.$$
Potom podľa obidvoch limitných kritérií rad konverguje pre všetky $a > 0$. ■

Veta 2.4.15 (Raabeho kritérium).
Nech[28] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi a nech existuje $n_0 \in N$, také že platí:

a) Existuje $r \in (1\,; \infty)$, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] \geq r$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] \leq 1$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do ∞.

Dôkaz.
a) Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:
$$n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = n\frac{a_n}{a_{n+1}} - n \geq r, \qquad \text{t. j.} \quad n\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq n + r.$$
Z toho vyplýva, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:
$$na_n \geq (n+r)a_{n+1} = (n+1)a_{n+1} + (r-1)a_{n+1} > (n+1)a_{n+1}. \tag{2.2}$$
Potom je $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesajúca,[29] zdola ohraničená a existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a$.

Ak označíme $b_n = na_n - (n+1)a_{n+1}$ pre všetky $n \in N$,
potom pre n-tý čiastočný súčet s_n radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ platí:
$$s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = [a_1 - 2a_2] + [2a_2 - 3a_3] + \cdots + [na_n - (n+1)a_{n+1}] = a_1 - (n+1)a_{n+1}.$$
Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pretože
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} [a_1 - (n+1)a_{n+1}] = a_1 - \lim_{n\to\infty} (n+1)a_{n+1} = a_1 - \lim_{n\to\infty} na_n = a_1 - a.$$
Zo vzťahu (2.2) vyplýva, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:
$$b_n = na_n - (n+1)a_{n+1} > (r-1)a_{n+1}, \qquad \text{t. j.} \quad a_{n+1} < (r-1)^{-1} b_n.$$
Potom sú splnené predpoklady 1. porovnávacieho kritéria a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ konverguje.

Z toho vyplýva, že aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $na_n \leq (n+1)a_{n+1}$.

[28] *Wilhelm Raabe* [1831–1910] — nemecký matematik.
[29] Klesajúca v zmysle poznámky 2.4.11, t. j. klesajúca pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$.

Takže je postupnosť $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca a existuje $k \in R$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí:

$$k \leq na_n, \quad \text{t. j.} \quad \tfrac{k}{n} = k\tfrac{1}{n} \leq a_n.$$

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k\frac{1}{n}$ je diverguje a podľa 1. porovnávacieho kritéria diverguje aj $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

Veta 2.4.16 (Limitné Raabeho kritérium).
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s kladnými členmi a nech existuje $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = t$.

a) Ak $t > 1$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Ak $t < 1$, potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do ∞.

Dôkaz.
Dôkaz je analogický ako pri d'Alembertovom, resp. Cauchyho integrálnom kritériu.
Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$t - \varepsilon < n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] < t + \varepsilon.$$

a) Ak zvolíme číslo $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $1 < r = t - \varepsilon$, potom sú splnené predpoklady časti a) Raabeho kritéria a daný rad konverguje.

b) Ak zvolíme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $t + \varepsilon < 1$, potom sú splnené predpoklady časti b) predpoklady Raabeho kritéria a daný rad diverguje. ■

Poznámka 2.4.18.
Raabeho kritérium je ešte účinnejšie ako Cauchyho odmocninové kritérium. Limita v Raabeho limitnom tvare môže byť aj nevlastná ($r = \infty$) a vtedy daný rad konverguje.

Príklad 2.4.20.
Nech $a > 0$. Uvažujme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ z príkladu 2.4.19 b). Tento rad konverguje aj na základe Raabeho limitného kritéria, pretože pre všetky $a > 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a^n\ (n+1)!}{n!\ a^{n+1}} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n+1}{a} - 1\right] = \infty(\infty - 1) = \infty. \ ■$$

Príklad 2.4.21.
Nech $a > 0$. Vyšetrite konvergeciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$.

Riešenie.
Limitné d'Alembertovo kritérium použiť nemôžeme, pretože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n)(n+1)!}{n!\ a(a+1)\cdots(a+n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a+n+1} = 1.$$

Limitné Cauchyho kritérium tiež nemôžeme použiť, pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
Ak použijeme Raabeho limitné kritérium, potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\frac{a}{n+1} = a \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = a.$$

Z toho vyplýva, že pre $a < 1$ rad diverguje a pre $a > 1$ rad konverguje.
Ak $a = 1$, potom dostaneme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, ktorý diverguje. ■

2.4.4 Absolútna, relatívna konvergencia a alternujúce rady

Doteraz sme sa zaoberali číselnými radmi s kladnými, resp. nezápornými členmi. Tieto rady buď konvergujú alebo divergujú do ∞. Rady vo všeobecnosti môžu mať aj kladné aj záporné členy. Pri vyšetrovaní konvergencie radov je niekedy jednoduchšie skúmať rady s absolútnymi hodnotami ich členov.

Hovoríme, že **rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne** (**je absolútne konvergentný**) práve vtedy, ak konverguje rad absolútnych hodnôt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Hovoríme, že **rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne** (**neabsolútne**) práve vtedy, ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje do ∞.

Veta 2.4.17.
Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, potom konverguje.

Dôkaz.
Rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Potom z Cauchy–Bolzanovho princípu konvergencie vyplýva, že ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n, k \in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Potom z trojuholníkovej nerovnosti (poznámka 2.1.17) vyplýva:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

To znamená, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ■

Poznámka 2.4.19.
Ak geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje, potom konverguje absolútne.

Geometrický rad konverguje pre $q \in (-1\,;\,1)$, t. j. $|q| \in \langle 0\,;\,1)$.

To znamená, že $\sum_{n=1}^{\infty} |q^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |q|^n$ je tiež konvergentný geometrický rad.

Príklad 2.4.22.
Vyšetrite konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Riešenie.
Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ pre všetky $n \in N$ platí:

$$s_{2n} = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n} = 0, \qquad s_{2n+1} = s_{2n} + \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{1}{n+1}.$$

Potom rad konverguje k číslu 0, pretože platí:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = 0, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.$$

Rad nekonverguje absolútne, pretože platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{n} = \infty. \;■$$

Poznámka 2.4.20.
Rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je rad s nezápornými členmi. To znamená, že pri vyšetrovaní absolútnej konvergencie daných radov môžeme použiť všetky predchádzajúce kritéria.

Poznámka 2.4.21.
Z dôsledku 2.4.8.a vyplýva, že ak $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná postupnosť z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (absolútne), potom tiež konverguje (absolútne) rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$. Pre relatívne konvergentné rady tento dôsledok neplatí.

Napríklad rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ z príkladu 2.4.22 konverguje, ale diverguje rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{n} + \cdots .$$

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad. Rady[30] $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ majú nezáporné členy. To znamená, že majú vždy súčet, pričom môže byť aj nevlastný. Ak označíme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = s^+, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = s^-,$$

potom na základe vety 2.4.6, pokiaľ majú výrazy $s^+ \pm s^-$ v R^* zmysel, platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = s^+ - s^-, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) = s^+ + s^-. \tag{2.3}$$

Veta 2.4.18.
Rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje práve vtedy, ak konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$.

Dôkaz.
NP$_{\Rightarrow}$: Pre všetky $n \in N$ platí $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$, $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$.
Potom na základe 1. porovnávacieho kritéria konvergujú tiež rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$.

PP$_{\Leftarrow}$: Vyplýva zo vzťahu (2.3) a z vety 2.4.6. ■

Dôsledok 2.4.18.a.
Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne, potom rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ divergujú do ∞.

Dôsledok 2.4.18.b.
Označme $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ rady, ktoré vzniknú z radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vynechaním všetkých jeho nezáporných, resp. nekladných členov. Potom platí:

a) Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne, potom rady $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ konvergujú.

b) Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne, potom $\sum_{n=1}^{\infty} m_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$.

[30] Poznámka 2.1.19 na strane 61: $a^+ = \max\{a,\ 0\}$, $a^- = \max\{-a,\ 0\}$.

Dôkaz.
Rady $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ obsahujú iba záporné, resp. kladné členy radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Vzniknú z radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, resp. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ vynechaním všetkých nulových členov a na základe dôsledku 2.4.7.a majú rovnaké súčty. ■

Poznámka 2.4.22.
Z predchádzajúcej vety 2.4.18 vyplýva ako priamy dôsledok taktiež veta 2.4.17.

Nech pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$ [resp. $a_n \leq 0$], potom rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

nazývame **rad so striedavými znamienkami** (**alternujúci rad**).

Veta 2.4.19 (Leibnizovo kritérium).
Nech je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$ [resp. $a_n \leq 0$] a nech

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca [resp. neklesajúca], b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Potom alternujúci rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje.

Dôkaz.
Predpokladajme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť s nezápornými členmi.

Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$, t. j. $a_n - a_{n+1} \geq 0$.

Pre postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ pre všetky $n \in N$ platí:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq a_1 - a_2, \\ s_{2n} &= a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1, \\ s_{2(n+1)} &= s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n} + 0 = s_{2n}. \end{aligned}$$

To znamená, že vybraná postupnosť $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a ohraničená, t. j. konverguje a má konečnú limitu $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$, pre ktorú platí:

$$a_1 - a_2 \leq s_{2n} \leq a_1, \quad \text{t. j.} \quad a_1 - a_2 \leq \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s \leq a_1. \tag{2.4}$$

Pre vybranú postupnosť $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = s + 0 = s.$$

Potom $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$, t. j. rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje.

Navyše zo vzťahu (2.4) vyplýva:

$$a_1 - a_2 \leq \lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \leq a_1. \tag{2.5}$$

Pre neklesajúcu postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s nekladnými členmi je dôkaz analogický. ■

Dôsledok 2.4.19.a.
Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňa predpoklady Leibnizovho kritéria, potom pre k-tý zvyšok r_k platí:

$$a_{k+1} - a_{k+2} \leq (-1)^k r_k \leq a_{k+1} \qquad \left[\text{resp. } a_{k+1} - a_{k+2} \geq (-1)^k r_k \geq a_{k+1}\right].$$

Dôkaz.
Nech je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca postupnosť s nezápornými členmi.
Ak pre všetky $n \in N$ položíme $b_n = a_{k+n}$, potom pre k-tý zvyšok platí:
$$r_k = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k+n+1} a_{k+n} = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, \quad \text{t. j.} \quad (-1)^k r_k = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n.$$
Rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ je alternujúci a spĺňa predpoklady Leibnizovho kritéria.
Potom zo vzťahu (2.5) vyplýva:
$$a_{k+1} - a_{k+2} = b_1 - b_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = (-1)^k r_k \leq b_1 = a_{k+1}.$$
Ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesajúca postupnosť s nekladnými členmi, potom $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca s nezápornými členmi a pre ich k-te zvyšky r_k, t_k platí $r_k = -t_k$.
Pre postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ z predchádzajúceho vyplýva, že platí:
$$c_{k+1} - c_{k+2} \leq (-1)^k t_k \leq c_{k+1}, \quad \text{t. j.} \quad -a_{k+1} + a_{k+2} \leq -(-1)^k r_k \leq -a_{k+1}. \blacksquare$$

Poznámka 2.4.23.
Predpokladajme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ spĺňa predpoklady Leibnizovho kritéria. Potom na základe dôsledku 2.4.19.a platí, že ak rad aproximujeme k-tým čiastočným súčtom s_k, potom pre chybu aproximácie platí $|a_{k+1} - a_{k+2}| \leq |r_k| \leq |a_{k+1}|$.

Príklad 2.4.23.
Určte konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$.

Riešenie.
Tento rad so striedavými znamienkami sa nazýva **anharmonický rad** a konverguje na základe Leibnizovho kritéria, pretože postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Anharmonický rad konverguje k číslu[31] $\ln 2$ a je relatívne konvergentný, pretože platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$
Hodnotu $\ln 2$ môžeme numericky vyjadriť pomocou k-teho čiastočného súčtu tohto radu a chyba výpočtu je daná k-tym zvyškom r_k. Potom z dôsledku 2.4.19.a vyplýva:
$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = a_{k+1} - a_{k+2} \leq |r_k| \leq a_{k+1} = \frac{1}{k+1}. \blacksquare$$

Niekedy je pri vyšetrovaní konvergencie daného radu výhodné jeho členy vyjadriť v tvare súčinu $a_n \cdot b_n$, $n \in N$ a overovať predpoklady pre $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Veta 2.4.20.
Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú reálne postupnosti, nech $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $n \in N$ a nech:

a) existuje konečná $\lim_{n\to\infty} s_n b_n$, b) rad $\sum_{n=1}^{\infty} s_n (b_n - b_{n+1})$ konverguje.

[31] Výpočet tohto súčtu je s našimi doterajšími vedomosťami síce možný, ale dosť pracný. Čitateľ ho nájde napríklad v [18]. Pomerne jednoducho ho môžeme vypočítať pomocou tzv. funkcionálnych radov.

Potom číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} s_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} s_n (b_n - b_{n+1}). \tag{2.6}$$

Dôkaz.
Nech $n \in N$. Označme n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n+1})$ symbolom t_n.

Pre n-tý čiastočný súčet $w_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ potom platí:

$$w_n = s_1b_1 + (s_2 - s_1)b_2 + (s_3 - s_2)b_3 + \cdots + (s_{n-1} - s_{n-2})b_n + (s_n - s_{n-1})b_n =$$
$$= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n = t_{n-1} + s_nb_n.$$

Z predpokladov potom vyplýva, že existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} [t_{n-1} + s_nb_n] = \lim_{n\to\infty} t_{n-1} + \lim_{n\to\infty} s_nb_n = \lim_{n\to\infty} t_n + \lim_{n\to\infty} s_nb_n.$$

To znamená, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje a podmienka (2.6) platí. ■

Poznámka 2.4.24.
Ak sú splnené predpoklady vety 2.4.20 a navyše platí $\lim\limits_{n\to\infty} s_nb_n = 0$, potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n (b_n - b_{n+1}).$$

Toto je splnené napríklad v prípade, že je postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Príklad 2.4.24.
Pomocou vety 2.4.20 dokážte konvergenciu anharmonického radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Riešenie.
Označme $a_n = (-1)^{n+1}$, $b_n = \frac{1}{n}$ pre $n \in N$. Potom pre všetky $k \in N$ platí $s_{2k-1} = 1$, resp. $s_{2k} = 0$. Takže je postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená. Navyše platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
To znamená, že sú splnené predpoklady vety 2.4.20 a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_{2k-1}}{(2k-1)2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}.$$

Rad na pravej strane konverguje (pr. 2.4.14), t. j. konverguje aj anharmonický rad. ■

Poznámka 2.4.25.
Z príkladu 2.4.24 vyplýva, že platí:

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{12} + \frac{1}{34} + \frac{1}{56} + \frac{1}{78} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \cdots .$$

Veta 2.4.21 (Abelovo kritérium).
Nech:[32] a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna a ohraničená.

[32] *Niels Henrik Abel* [1802–1829] — nórsky matematik.

Potom číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Dôkaz.
Z dôsledku 2.3.11.a vyplýva, že $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, t. j. existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Označme $t_n = |b_1 - b_2| + |b_2 - b_3| + \cdots + |b_n - b_{n+1}|$ pre $n \in N$.
Ak je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca, potom platí $b_n - b_{n+1} \geq 0$, t. j. $|b_n - b_{n+1}| = b_n - b_{n+1}$ a tiež
$$t_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1} = |b_1 - b_{n+1}|\,.$$
Ak je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesajúca, potom platí $b_n - b_{n+1} \leq 0$, t. j. $|b_n - b_{n+1}| = b_{n+1} - b_n$ a tiež
$$t_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1 = |b_1 - b_{n+1}|\,.$$
Z toho vyplýva, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ konverguje, pretože platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} |b_1 - b_{n+1}| = \left|b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}\right| = |b_1 - b|\,.$$
Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, t. j. existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n) = s$.
Potom je $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená (veta 2.3.8) a existuje $M > 0$, že pre všetky $n \in N$ platí:
$$0 \leq |s_n| \leq M, \qquad \text{t. j.} \;\; 0 \leq |s_n(b_n - b_{n+1})| \leq M\,|b_n - b_{n+1}|\,.$$
Potom sú splnené predpoklady 1. porovnávacieho kritéria a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |s_n(b_n - b_{n+1})|$ konverguje. Z toho vyplýva, že konverguje tiež rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n+1})$.
Z už dokázaného vyplýva, že existuje konečná limita
$$\lim_{n\to\infty} s_n b_n = \lim_{n\to\infty} s_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = s \cdot b.$$
Tým pádom sú splnené oba predpoklady vety 2.4.20 a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. ■

Poznámka 2.4.26.
Požiadavku monotónnosti postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemôžeme vynechať. Ak položíme
$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad b_n = (-1)^n,$$
potom predpoklady platia, ale rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Príklad 2.4.25.
Vyšetrite konvergenciu číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ln\left[a + \frac{1}{n}\right]$, kde $a > 0$.

Riešenie.
Označme $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $b_n = \ln\left[a + \frac{1}{n}\right]$. Potom pre všetky $a > 0$, $n \in N$ platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \qquad a + 1 \geq a + \tfrac{1}{n} \geq a + \tfrac{1}{n+1} \geq a.$$
Potom z vlastností funkcie logaritmus[33] vyplýva, že pre všetky $a > 0$, $n \in N$ platí:
$$\ln(a+1) \geq \ln\left[a + \tfrac{1}{n}\right] = b_n \geq b_{n+1} = \ln\left[a + \tfrac{1}{n+1}\right] \geq \ln a.$$
Potom na základe Abelovho kritéria rad konverguje pre všetky $a > 0$. ■

[33] Bližšie sa jej venujeme v časti 3.1.3 na strane 193.

Veta 2.4.22 (Dirichletovo kritérium).

Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a nech:

a) $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená,

b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Potom číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Dôkaz.

Keďže je $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, potom (dôsledok 2.3.17.d) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n b_n = 0$.

Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca, potom pre všetky $n\in N$ platí:

$$b_n - b_{n+1} \geq 0, \quad \text{t. j.} \quad |b_n - b_{n+1}| = b_n - b_{n+1}.$$

Potom pre n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ platí:

$$t_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1})] = b_1 - b_{n+1}.$$

Z toho vyplýva, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ konverguje, pretože

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_1 - 0 = b_1.$$

Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, t. j. existuje $M > 0$, že pre všetky $n\in N$ platí:

$$0 \leq |s_n| \leq M, \quad \text{t. j.} \quad 0 \leq |s_n(b_n - b_{n+1})| \leq M\,|b_n - b_{n+1}|\,.$$

Potom sú splnené predpoklady 1. porovnávacieho kritéria a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |s_n(b_n - b_{n+1})|$ konverguje. Z toho vyplýva, že konverguje tiež rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n+1})$.

Tým pádom sú splnené oba predpoklady vety 2.4.20 a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. ■

Poznámka 2.4.27.

Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ spĺňa predpoklady Leibnizovho kritéria, potom spĺňa tiež predpoklady Dirichletovho kritéria. Ak je $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca, potom položíme $a_n = (-1)^{n+1}$, $b_n = c_n$. Ak je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesajúca, potom položíme $a_n = (-1)^n$, $b_n = -c_n$.

To znamená, že Leibnizovo kritérium je špeciálnym prípadom Dirichletovho kritéria.

Príklad 2.4.26.

Vyšetrite konvergenciu číselného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}$, kde $a\in R$.

Riešenie.

Ak $a = k\pi$, $k\in Z$, potom dostávame konvergentný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nk\pi}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$.

Ak $a \neq k\pi$, $k\in Z$, potom overíme predpoklady Dirichletovho kritéria.

Ak označíme $a_n = \sin na$, $b_n = \frac{1}{n}$, potom je postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ klesajúca a platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Z príkladu 1.2.4 vyplýva, že pre všetky $a\neq k\pi$, $k\in N$ a $n\in N$ platí:

$$|s_n| = |\sin a + \sin 2a + \cdots + \sin na| = \left| \frac{\sin \frac{(n+1)a}{2} \ \sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{a}{2}\right|}.$$

To znamená, že $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a daný rad konverguje. ■

2.4.5 Prerovnanie radov a rady s predpísaným súčtom

Už sme spomínali, že pre nekonečné rady vo všeobecnosti neplatí asociatívny zákon. Platí iba pre konvergentné rady (veta 2.4.7). S komutatívnym zákonom je to trochu zložitejšie. Ako dokazuje príklad 2.4.27, komutatívny zákon nemusí platiť ani pre konvergentné rady. Aby platil, je potrebná absolútna konvergencia radu.

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad a nech $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť prirodzených čísel taká, že obsahuje každé prirodzené číslo práve raz.[34] Potom rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + \cdots + a_{k_n} + \cdots$$

nazývame **prerovnaným radom** (**prerovnaním**) **radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Príklad 2.4.27.
Uvažujme konvergentný rad z príkladu 2.4.23

$$\ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots .$$

Označme jeho n-tý čiastočný súčet symbolom s_n.
Ak ho prerovnáme pomocou postupnosti $\{2k-1,\ 2(2k-1),\ 2{\cdot}2k\}_{k=1}^{\infty}$, dostaneme rad

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{2k-1} - \tfrac{1}{2(2k-1)} - \tfrac{1}{22k} + \cdots .$$

Pre jeho n-tý čiastočný súčet, kde $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+2$, $k \in N$, potom platí:

$$t_{3k} = \left[1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right] + \left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8}\right] + \cdots + \left[\tfrac{1}{2k-1} - \tfrac{1}{2(2k-1)} - \tfrac{1}{2\cdot 2k}\right] =$$
$$= \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right] + \left[\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8}\right] + \cdots + \left[\tfrac{1}{2(2k-1)} - \tfrac{1}{2\cdot 2k}\right] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[1 - \tfrac{1}{2}\right] + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right] + \cdots + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2k-1} - \tfrac{1}{2k}\right] = \tfrac{1}{2}s_{2k} = \tfrac{s_{2k}}{2},$$
$$t_{3k+1} = t_{3k} + \tfrac{1}{2k+1} = \tfrac{s_{2k}}{2} + \tfrac{1}{2k+1}, \qquad t_{3k+2} = \tfrac{s_{2k}}{2} + \tfrac{1}{2k+1} - \tfrac{1}{2(2k+1)}.$$

Z toho vyplýva, že pre limity čiastočných súčtov t_{3k}, t_{3k+1}, t_{3k+2} platí:

$$\lim_{k\to\infty} t_{3k} = \tfrac{1}{2}\lim_{k\to\infty} s_{2k}, \quad \lim_{k\to\infty} t_{3k+1} = \tfrac{1}{2}\lim_{k\to\infty} s_{2k} + 0, \quad \lim_{k\to\infty} t_{3k+2} = \tfrac{1}{2}\lim_{k\to\infty} s_{2k} + 0 - 0.$$

To znamená, že prerovnaný rad konverguje k (inému) číslu $\tfrac{1}{2}\lim\limits_{k\to\infty} s_{2k} = \tfrac{\ln 2}{2}$. ■

V predchádzajúcom príklade sme prerovnaním konvergentného radu dostali konvergentný rad s iným súčtom. Prerovnaním konvergentného radu môžeme dostať aj divergentný rad. Dokonca môžeme tento rad prerovnať tak, aby konvergoval k vopred zvolenému súčtu. Vyjadruje to veta 2.4.23 a jej silnejšia formulácia 2.4.24.

Veta 2.4.23 (Riemann).
Nech číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne a nech $\alpha \in R^*$ je ľubovoľné.

Potom existuje prerovnanie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ také, že platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \alpha$.

Dôkaz.
Dôkaz je formálne náročný a preto ho nebudeme robiť.

[34] Postupnosť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je bijekcia množiny N na množinu N. To znamená, že pre každé $n \in N$ existuje $m \in N$ také, že platí $k_m = n$ (surjekcia) a pre všetky $m, n \in N$, $m \neq n$ platí $k_n \neq k_m$ (injekcia).

Je založený na dôsledku 2.4.18.a, t. j. na divergencii číselných radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$. Jeho hlavná myšlienka je dobre viditeľná na príklade 2.4.28. ■

Veta 2.4.24 (Riemann).
Nech $\alpha, \beta \in R^*$, $\alpha \leq \beta$ a nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne. Potom existuje prerovnanie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s postupnosťou čiastočných súčtov $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ také, že platí:

$$\liminf_{n\to\infty} t_n = \alpha \leq \beta = \limsup_{n\to\infty} t_n.$$

Príklad 2.4.28.
Prerovnajte anharmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, aby konvergoval k číslu $\alpha = \frac{5}{4}$.

Riešenie.
Z príkladu 2.4.23 vyplýva, že anharmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relatívne.
Rozdeľme kladné a záporné členy tohto radu do dvoch radov

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2k} = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \cdots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2k-1} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} - \cdots.$$

Z dôsledku 2.4.18.b vyplývajú nasledujúce vzťahy pre súčty radov

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty.$$

Z radu $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ vyberieme toľko prvých členov, aby ich súčet bol väčší ako $\alpha = 1,25$.
Potom k nim pridáme toľko prvých členov z radu $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$, aby ich spoločný súčet bol menší ako α. V našom prípade to bude

$$1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3} \approx 1,333 > 1,25, \qquad 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{6} \approx 0,8333 < 1,25.$$

K týmto členom pridáme toľko prvých nevybratých členov radu $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, aby spoločný súčet všetkých týchto členov bol väčší ako α. Potom dostaneme

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{811}{630} \approx 1,287 > 1,25.$$

Potom k nim pridáme prvé členy radu $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$, aby ich súčet bol menší ako α, t. j.

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1307}{1260} \approx 1,037 < 1,25.$$

Týmto spôsobom môžeme teoreticky pokračovať bez obmedzenia do nekonečna, pretože $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} m_n = -\infty$. Prerovnaný rad bude konvergovať k číslu $\alpha = 1,25$.
Prakticky pokračujeme po požadovanú presnosť. Pre ilustráciu uvedieme ešte štyri kroky

$$\begin{aligned}
&1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} &&\approx 1,272 > 1,25,\\
&1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} - \tfrac{1}{6} &&\approx 1,105 < 1,25,\\
&1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{21} &&\approx 1,264 > 1,25,\\
&1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{19} + \tfrac{1}{21} - \tfrac{1}{8} &&\approx 1,139 < 1,25.
\end{aligned}$$ ■

Poznámka 2.4.28.
Pre absolútne konvergentné rady Riemannove vety neplatia. V tomto prípade každé prerovnanie daného radu konverguje k rovnakému súčtu. Najprv uvedieme lemu 2.4.25 a jej dôsledok, ktoré nám značne zjednodušia dôkaz tohto tvrdenia.

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi a nech $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\} \subset N$ je konečná množina (množina indexov vybraných členov radu). Potom **konečným súčtom radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **určeným množinou** K nazývame súčet

$$S_K = a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_m} = \sum_{n=1}^{m} a_{k_n} = \sum_{k_n \in K} a_{k_n}.$$

Poznámka 2.4.29.
Pretože je množina $\{1, 2, \ldots, n\}$ konečná, pre n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_{\{1,2,\ldots,n\}}.$$

Lema 2.4.25.
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad s nezápornými členmi.
Potom sa súčet tohto radu rovná suprému množiny všetkých jeho konečných súčtov, t. j.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{S_K\,;\ K \subset N,\ K \text{ je konečná}\}.$$

Dôkaz.
Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca, pretože pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq 0$. Máme dokázať, že platí:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{S_K\,;\ K \subset N,\ K \text{ je konečná}\}.$$

Keďže pre všetky $n \in N$ je množina $\{1, 2, \ldots, n\}$ konečná, platí:

$$\{s_n\,;\ n \in N\} = \left\{S_{\{1,2,\ldots,n\}}\,;\ n \in N\right\} \subset \{S_K\,;\ K \subset N,\ K \text{ je konečná}\}.$$

Potom z vety 2.3.11 vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sup\left\{S_{\{1,2,\ldots,n\}}\,;\ n \in N\right\} \leq \sup\{S_K\,;\ K \subset N,\ K \text{ je konečná}\}.$$

Každá konečná množina $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ je ohraničená.
Ak označíme $n_0 = \max K$, potom pre všetky $k_i \in K$ platí $k_i \leq n_0$. Z toho vyplýva:

$$S_K = a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_m} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} = s_{n_0}.$$

Potom z vlastností supréma vyplýva dokazované tvrdenie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup\left\{S_{\{1,2,\ldots,n\}}\,;\ n \in N\right\} = \sup\{S_K\,;\ K \subset N,\ K \text{ je konečná}\}. \blacksquare$$

Dôsledok 2.4.25.a.
Každé prerovnanie radu s nezápornými členmi má rovnaký súčet ako pôvodný rad.

Dôkaz.
Stačí si uvedomiť, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a každé jeho prerovnanie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ majú rovnakú množinu všetkých konečných súčtov. Potom podľa lemy 2.4.25 majú rovnaký súčet. ■

Veta 2.4.26.
Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne práve vtedy, ak každé jeho prerovnanie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ konverguje absolútne a má rovnaký súčet ako pôvodný rad.

Dôkaz.
NP$_{\Rightarrow}$: Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}|$ je prerovnaním radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ s nezápornými členmi. Potom na základe dôsledku 2.4.25.a konverguje k rovnakému súčtu.

Z vety 2.4.18 vyplýva, že rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konvergujú a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Ak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ prerovnaním radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, potom sú rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}^-$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}^+$ prerovnaniami radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a z dôsledku 2.4.25.a vyplýva:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \qquad \text{t. j.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

PP$_{\Leftarrow}$: Nepriamo.
Nech každé prerovnanie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje k rovnakému súčtu ako pôvodný rad a nech rad nekonverguje absolútne. Potom tento rad konverguje relatívne a na základe Riemannovej vety existuje také jeho prerovnanie, ktoré diverguje do ∞. Spor. ■

Príklad 2.4.29.
Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ak $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ pre n nepárne, $a_n = \frac{-1}{2^{n-1}}$ pre n párne.

Riešenie.
Daný rad môžeme zapísať v tvare

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \tfrac{1}{2^2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^4} - \tfrac{1}{2^3} + \cdots = \left[-\tfrac{1}{2}\right]^2 + \left[-\tfrac{1}{2}\right]^1 + \left[-\tfrac{1}{2}\right]^4 + \left[-\tfrac{1}{2}\right]^3 + \cdots .$$

Tento rad je prerovnaním geometrického radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ s koeficientom $q = -\frac{1}{2}$, ktorý konverguje absolútne (poznámka 2.4.19). Potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\tfrac{1}{2}\right]^n = -\left[-\tfrac{1}{2}\right]^0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\tfrac{1}{2}\right]^n = -1 + \tfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = -1 + \tfrac{2}{3} = -\tfrac{1}{3}. \ ■$$

Ďalej sa budeme zaoberať **úlohou ako nájsť nejaký rad s predpísaným súčtom**. Princíp tvorby takýchto radov môžeme často využiť pri určovaní súčtov konkrétnych číselných radov. Vytvoriť rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s konkrétnym súčtom $s \in R^*$ nie je zložité.

Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Označme $s_0 = 0$. Ak pre $n \in N$ položíme

$$a_1 = s_1 = s_1 - s_0, \quad a_2 = s_2 - s_1, \quad a_3 = s_3 - s_2, \quad \ldots, \quad a_n = s_n - s_{n-1}, \quad \ldots,$$

potom pre n-tý čiastočný súčet t_n radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:

$$t_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) = s_n.$$

Z toho vyplýva, že platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

Niekedy je výhodné vyjadriť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocou nulovej postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, t. j. postupnosti, ktorá konverguje k číslu 0. Potom pre $n\in N$ stačí položiť

$$s_n = s + b_n, \quad \text{resp.} \quad s_n = s - b_n, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s \pm b_n) = s \pm 0 = s.$$

Potom pre n-tý člen radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:

$$a_1 = s_1 = s \pm b_1, \qquad a_n = s_n - s_{n-1} = (s \pm b_n) - (s \pm b_{n-1}) = \pm(b_n - b_{n-1}).$$

To znamená, že ak je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca, prípadne neklesajúca postupnosť, dokážeme vytvoriť rad s predpísaným súčtom $s\neq 0$, ktorý má iba nezáporné, resp. nekladné členy. Je zrejmé, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je v tomto prípade absolútne konvergentný.

Príklad 2.4.30.
Ak položíme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, potom pre všetky $n\in N$, $n \geq 2$ platí:

$$a_1 = s_1 = 1, \qquad a_n = s_n - s_{n-1} = \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n-1} = \tfrac{n-1-n}{n(n-1)} = \tfrac{-1}{(n-1)n}.$$

Potom pre daný číselný rad platí:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{1}{(n-1)n} = 1 - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{23} - \cdots - \tfrac{1}{(n-1)n} - \cdots .$$

Z toho navyše vyplýva $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1.$ ■

Príklad 2.4.31.
Zostrojte číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ tak, aby konvergoval k súčtu $s = 1$.

Riešenie.
Položíme $a_1 = s \pm b_1$, $s_n = \pm(b_n - b_{n-1})$, pričom $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

a) Ak $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, potom $a_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{2\cdot 1+1}{1\cdot(1+1)}$ a pre $n = 2, 3, 4, \ldots$ platí:

$$a_n = b_n - b_{n-1} = \tfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \tfrac{(-1)^n}{n} = (-1)^{n+1}\left[\tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n}\right] = (-1)^{n+1}\tfrac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Z toho vyplýva $1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{3}{12} - \frac{5}{23} + \frac{7}{34} - \frac{9}{45} + \cdots$.

b) Ak $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, potom $a_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot(1+1)^2}$ a pre $n = 2, 3, 4, \ldots$ platí:

$$a_n = -(b_n - b_{n-1}) = -\tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{n^2} = \tfrac{-n^2+n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2} = \tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

Z toho vyplýva $1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{3}{14} + \frac{5}{49} + \frac{7}{916} + \frac{9}{1625} + \cdots$. ■

Vytváranie radov s predpísaným súčtom nie je samoúčelné. Znalosť súčtu niektorého radu môžeme využiť pri určovaní súčtu iného radu (viď nasledujúci príklad).

Príklad 2.4.32.
Určte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{23} + \frac{1}{45} + \frac{1}{67} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)} + \cdots$.

Riešenie.
Z poznámky 2.4.25 a z príkladu 2.4.30 vyplýva, že platí:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 9} + \cdots = 1,\\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots = \ln 2,\\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} &= \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{8\cdot 9} + \cdots = \ ?.
\end{aligned}$$

Potom na základe vety 2.4.6 platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = 1 - \ln 2$. ■

Príklad 2.4.33.
Na záver uvedieme bez výpočtu niektoré číselné rady a ich súčty. Nech $a \in R$, potom platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}. \ ■$$

2.4.6 Súčiny číselných radov

Nech $a = a_0 + a_1 + \cdots + a_m$, $b = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$ sú dva číselné výrazy s konečnými počtami členov (príklad 1.2.9). Ak ich vynásobíme, potom dostaneme výraz

$$\begin{aligned}
c &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_m)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) =\\
&= (a_0b_0 + a_0b_1 + \cdots + a_0b_n) + (a_1b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_1b_n) + \cdots + (a_mb_0 + a_mb_1 + \cdots + a_mb_n).
\end{aligned}$$

Ak výraz c prerovnáme, potom ho môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned}
c = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + (a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3) + \cdots\\
\cdots + (a_mb_{n-2} + a_{m-1}b_{n-1} + a_{m-2}b_n) + (a_mb_{n-1} + a_{m-1}b_n) + a_mb_n.
\end{aligned}$$

Súčet indexov $i + j$ výrazov a_ib_j v jednej zátvorke je konštantný. Potom formálne platí:

$$c = \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_ib_j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_ib_j = \sum_{k=0}^{m+n}\sum_{i+j=k} a_ib_j.$$

Predchádzajúcu úvahu môžeme vykonať aj pre nekonečné rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ a ich súčin môžeme chápať rôznymi spôsobmi. Tieto súčiny sa ale nemusia vždy rovnať. Pre ďalšie účely bude výhodnejšie, ak budeme číselné rady indexovať od čísla 0.

Ak pre každé $m = 0, 1, 2, \ldots$ existuje súčet číselného radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nb_m$, potom môžeme **súčin radov** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ vyjadriť v tvare dvojnásobného radu

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots)b_0 + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots)b_1 + \cdots\\
&\qquad \cdots + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots)b_m + \cdots =\\
&= (a_0b_0 + a_1b_0 + \cdots + a_nb_0 + \cdots) + (a_0b_1 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_1 + \cdots) + \cdots\\
&\qquad \cdots + (a_0b_m + a_1b_m + \cdots + a_nb_m + \cdots) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_nb_m.
\end{aligned}$$

Ak pre každé $n = 0, 1, 2, \dots$ existuje súčet $\sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m$, potom analogicky platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = (a_0b_0 + a_0b_1 + \cdots + a_0b_m + \cdots) + (a_1b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_1b_m + \cdots) + \cdots$$
$$\cdots + (a_nb_0 + a_nb_1 + \cdots + a_nb_m + \cdots) + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_nb_m.$$

Ak členy súčinu radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ prerovnáme, potom číselný rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots$$
$$\cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_ib_{n-i} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0) + \cdots =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_ib_j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}$$

nazývame **Cauchyho súčinom radov $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$**.

Poznámka 2.4.30.
Cauchyho súčin číselných radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots + (a_1b_n + \cdots + a_nb_1) + \cdots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_1b_n + \cdots + a_ib_{n+1-i} + \cdots + a_nb_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n+1} a_ib_j = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_ib_{n+1-i}.$$

Cauchyho súčin týchto radov môžeme určiť aj iným spôsobom. Ak položíme $a_0 = b_0 = 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ a pre Cauchyho súčin platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0) + \cdots$$
$$\cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_ib_{n-i} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0) + \cdots =$$
$$= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots + (a_1b_n + \cdots + a_nb_1) + \cdots .$$

Poznámka 2.4.31.
Predstavu Cauchyho súčinu radov si môžeme ilustrovať na násobení dvoch polynómov nekonečného stupňa. Ak vynásobíme dva polynómy nekonečného stupňa

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x + \cdots , \qquad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n = b_0 + b_1x + b_2x + \cdots$$

dostaneme opäť polynóm nekonečného stupňa

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}x^n.$$

Uvedieme niektoré základné vlastnosti súčinu dvoch radov. Zameriame sa hlavne na Cauchyho súčin, ktorý má v praktických aplikáciach najväčší význam. Na základe predchádzajúcich úvah môžeme pre súčin dvoch radov sformulovať nasledujúcu vetu.

Veta 2.4.27.
Nech $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ sú číselné rady. Ak niektorý zo súčinových radov

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_m, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

konverguje absolútne, potom konvergujú absolútne aj ostatné dva a majú rovnaký súčet.

Dôkaz.
Tvrdenie priamo vyplýva z vety 2.4.26. ■

Príklad 2.4.34.
Súčin číselných radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ sa rovná číslu $\frac{\pi^2}{6} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{6}$.

Ak ich súčin vyjadríme pomocou dvojnásobných radov, dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m(m+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \cdot 1\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m(m+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m(m+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right] = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m(m+1)} \cdot \frac{\pi^2}{6}\right] = \frac{\pi^2}{6} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{\pi^2}{6} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Predchádzajúce rady sú s nezápornými členmi. To znamená, že konvergujú absolútne a pre Cauchyho súčin týchto radov na základe vety 2.4.27 platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{i^2} \frac{1}{(n+1-i)(n+2-i)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1^2}\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{(n-1)n} + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \frac{1}{i^2}\frac{1}{(n+1-i)(n+2-i)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2}\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{n^2}\frac{1}{1\cdot 2}\right] = \frac{\pi^2}{6}. \ ■$$

Príklad 2.4.35.
Číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje na základe Leibnizovho kritéria.

Pre Cauchyho súčin radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i a_{n+1-i} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} \frac{(-1)^{n+1-i}}{\sqrt{n+1-i}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{i(n+1-i)}}.$$

Keďže pre všetky $n \in N$, $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $\sqrt{i}\sqrt{n+1-i} \leq \sqrt{n}\sqrt{n} = n$, potom

$$|c_n| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i(n+1-i)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{n+1-i}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Z toho vyplýva, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| \geq 1$. To znamená, že nemôže platiť $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Potom nie je splnená nutná podmienka konvergencie, t. j. rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ nekonverguje. ■

Z predchádzajúceho príkladu vyplýva, že Cauchyho súčin dvoch konvergentných radov nemusí konvergovať. Ale ako ukazuje nasledujúca veta, ak aspoň jeden z týchto radov konverguje absolútne, potom Cauchyho súčin konverguje.

Veta 2.4.28.
Ak rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = t$ konvergujú, pričom aspoň jeden z nich absolútne,

potom Cauchyho súčin týchto radov $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje a má súčet st, t. j. platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

Dôkaz.
Nech $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolútne a nech $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| = S$. Označme pre $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \quad S_n = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|, \quad t_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n.$$

Ak označíme $h_n = t - t_n$, potom pre n-tý čiastočný súčet w_n radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ platí:

$$\begin{aligned} w_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) = \\ &= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(b_0 + b_1) + a_n b_0 = \\ &= a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_n t_0 = a_0(t - h_n) + a_1(t - h_{n-1}) + \cdots + a_n(t - h_0) = \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)t - (a_0 h_n + a_1 h_{n-1} + \cdots + a_n h_0) = s_n t - (a_0 h_n + \cdots + a_n h_0). \end{aligned}$$

Zo vzťahu $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \lim\limits_{n\to\infty} (t - t_n) = t - t = 0$ vyplýva:

Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_1 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_1$ platí $|h_n| < \varepsilon$.
Existuje $K > 0$, že pre všetky $n = 0, 1, 2, \ldots$ platí $|h_n| < K$ $(\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená).

Keďže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, potom na základe Cauchy–Bolzanovho princípu konvergencie radov pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_2 \in N$ také, že pre všetky $n, k \in N$, $n \geq n_2$ platí:

$$\big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}|\big| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Ak označíme $m = \max\{n_1, n_2\}$, potom pre všetky $n \in N$, $n \geq m + m = 2m$ platí:

$$\begin{aligned} |a_0 h_n + \cdots + a_n h_0| \leq \big[\, |a_0| \cdot |h_n| + |a_1| \cdot |h_{n-1}| + \cdots + |a_m| \cdot |h_{n-m}| \,\big] + \\ + \big[\, |a_{m+1}| \cdot |h_{n-m-1}| + \cdots + |a_{n-1}| \cdot |h_1| + |a_n| \cdot |h_0| \,\big] = \\ \leq \big[\, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m| \,\big]\varepsilon + \big[\, |a_{m+1}| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n| \,\big] K \leq A\varepsilon + \varepsilon K. \end{aligned}$$

Potom pre všetky $\varepsilon > 0$ platí:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_0 h_n + \cdots + a_n h_0| \leq \lim_{n\to\infty} (A + K)\varepsilon = (A + K)\varepsilon.$$

Z toho na základe vety 2.1.13 vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty} |a_0 h_n + \cdots + a_n h_0| = 0, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} (a_0 h_n + \cdots + a_n h_0) = 0.$$

Pretože $\lim\limits_{n\to\infty} s_n t = t \lim\limits_{n\to\infty} s_n = st$, potom platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} [s_n t - (a_0 h_n + \cdots + a_n h_0)] = st - 0 = st. \blacksquare$$

Dôsledok 2.4.28.a.
Ak rady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergujú absolútne, potom ich Cauchyho súčin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje tiež absolútne.

Dôkaz.
Označme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| = S$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n| = T$. Potom pre všetky $n = 0, 1, 2, \ldots$ platí:

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| \leq S, \qquad |b_0| + |b_1| + \cdots + |b_n| \leq T.$$

Pre n-tý čiastočný súčet $(n = 0, 1, 2, \dots)$ radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$ platí:

$$w_n = |c_0| + |c_1| + \dots + |c_n| = |a_0b_0| + |a_0b_1 + a_1b_0| + \dots + |a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0| \le$$
$$\le |a_0b_0| + \Big[|a_0b_1| + |a_1b_0|\Big] + \dots + \Big[|a_0b_n| + |a_1b_{n-1}| + \dots + |a_nb_0|\Big] =$$
$$= |a_0| \Big[|b_0| + |b_1| + \dots + |b_n|\Big] + |a_1| \Big[|b_0| + |b_1| + \dots + |b_{n-1}|\Big] + \dots + |a_n| \cdot |b_0| \le$$
$$\le |a_0|T + |a_1|T + \dots + |a_n|T = \Big[|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|\Big]T \le ST.$$

To znamená, že postupnosť $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a ohraničená zhora.

Z toho vyplýva $0 \le \lim\limits_{n\to\infty} w_n \le ST$, t. j. rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguje absolútne. ■

Príklad 2.4.36.
Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$, kde $q \in (-1\,;\,1)$.

Riešenie.
Pre všetky $n = 0, 1, 2, \dots$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\,|q|^{n+1}}{(n+1)\,|q|^n} = |q| \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = |q| < 1,$$

T. j. rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$ konverguje absolútne na základe d'Alembertovho kritéria.

Pre všetky $n = 0, 1, 2, \dots$ a pre všetky $i = 0, 1, \dots, n$ platí:

$$a_n = (n+1)q^n = q^0q^n + q^1q^{n-1} + \dots + q^iq^{n-i} + \dots + q^{n-1}q^1 + q^nq^0 = \textstyle\sum_{i=0}^{n} q^iq^{n-i}.$$

To znamená, že $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$ je Cauchyho súčinom radov $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

Keďže $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje absolútne (poznámka 2.4.19), potom platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}. \ \blacksquare$$

Príklad 2.4.37.
Vyšetrite konvergenciu Cauchyho súčinu radov $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$, kde $a, b \in R$.

Riešenie.
Tieto rady konvergujú absolútne, pretože pre všetky $a, b \in R$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|a^{n+1}\right| n!}{|a^n|(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = 0 < 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\left|b^{n+1}\right| n!}{|b^n|(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|b|}{n+1} = 0 < 1.$$

Pre n-tý člen Cauchyho súčinu daných radov na základe binomickej vety platí:

$$c_n = \frac{a^0}{0!}\frac{b^n}{n!} + \frac{a^1}{1!}\frac{b^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{a^i}{i!}\frac{b^{n-i}}{(n-i)!} + \dots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\frac{b^1}{1!} + \frac{a^n}{n!}\frac{b^0}{0!} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!}\frac{b^{n-i}}{(n-i)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{a^ib^{n-i}}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^ib^{n-i} = \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

Z príkladu 2.4.33 vieme, že platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \mathrm{e}^a$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \mathrm{e}^b$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \mathrm{e}^{a+b}$.

Z dôsledku 2.4.28.a vyplýva, že Cauchyho súčin konverguje absolútne a že platí:
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}. \blacksquare$$

Veta 2.4.29 (Abel).
Ak konvergujú rady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = t$ a tiež konverguje Cauchyho súčin týchto radov $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = w$, potom platí $w = st$.

Dôkaz.
Pre n-té čiastočné súčty ($n = 0, 1, 2, \dots$) platí:
$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n, \qquad t_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n, \qquad w_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n.$$
Ak označíme $g_n = s - s_n$, $h_n = t - t_n$, potom $s_n = s - g_n$, $t_n = t - h_n$. Z toho vyplýva:
$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} (s - s_n) = s - s = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} (t - t_n) = t - t = 0.$$
Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Potom existujú $n_1, n_2 \in N$ také, že
$$\forall n \in N,\ n \geq n_1\colon\ |g_n| < \varepsilon, \qquad \forall n \in N,\ n \geq n_2\colon\ |h_n| < \varepsilon. \tag{2.7}$$
Z vety 2.3.8 vyplýva, že sú postupnosti $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ ohraničené.
Potom existujú $K_g > 0$, $K_h > 0$ také, že pre všetky $n = 0, 1, 2, \dots$ platí:
$$|g_n| \leq K_g \leq K, \qquad |h_n| \leq K_h \leq K, \quad \text{kde } K = \max\{K_g, K_h\}. \tag{2.8}$$
Keďže $\lim_{n\to\infty} w_n = w$, potom na základe dôsledku 2.3.20.a platí:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_0+g_1+\dots+g_n}{n+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{h_0+h_1+\dots+h_n}{n+1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{w_0+w_1+\dots+w_n}{n+1} = w.$$
Označme $\sigma = w_1 + w_2 + \dots + w_n$. Potom na základe dôkazu vety 2.4.28 platí:
$$\begin{aligned}
\sigma &= a_0t_0 + (a_0t_1 + a_1t_0) + (a_0t_2 + a_1t_1 + a_2t_0) + \dots + (a_0t_n + a_1t_{n-1} + \dots + a_nt_0) = \\
&= (a_0 + a_1 + \dots + a_n)t_0 + (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})t_1 + \dots + (a_0 + a_1)t_{n-1} + a_0t_n = \\
&= s_nt_0 + s_{n-1}t_1 + \dots + s_0t_n = (s - g_n)(t - h_0) + (s - g_{n-1})(t - h_1) + \dots + (s - g_0)(t - h_n) = \\
&= (st - sh_0 - tg_n + h_0g_n) + (st - sh_1 - tg_{n-1} + h_1g_{n-1}) + \dots + (st - sh_n - tg_0 + h_ng_0) = \\
&= (n+1)st - s(h_0 + h_1 + \dots + h_n) - t(g_0 + g_1 + \dots + g_n) + (h_0g_n + h_1g_{n-1} + \dots + h_nt_0).
\end{aligned}$$
Označme $m = \max\{n_1, n_2\}$.
Zo vzťahov (2.7), (2.8) vyplýva, že pre všetky $n \in N$, $n \geq m + m = 2m$ platí:
$$\begin{aligned}
|h_0g_n + h_1g_{n-1} + \dots + h_nt_0| &= |h_0g_n| + |h_1g_{n-1}| + \dots + |h_nt_0| = \\
&= |h_0|\cdot|g_n| + |h_1|\cdot|g_{n-1}| + \dots + |h_m|\cdot|t_{n-m}| + |h_{m+1}|\cdot|t_{n-m-1}| + \dots + |h_n|\cdot|t_0| \leq \\
&\leq |h_0|\,\varepsilon + |h_1|\,\varepsilon + \dots + |h_m|\,\varepsilon + \varepsilon\,|t_{n-m-1}| + \varepsilon\,|t_{n-m-2}| + \dots + \varepsilon\,|t_0| \leq \\
&\leq \underbrace{K\varepsilon + K\varepsilon + \dots + K\varepsilon}_{(m+1)-\text{krát}} + \underbrace{\varepsilon K + \varepsilon K + \dots + \varepsilon K}_{(n-m)-\text{krát}} = (n+1)K\varepsilon.
\end{aligned}$$
Potom pre všetky $n \in N$, $n \geq m$ platí:
$$\left| \frac{h_0g_n + h_1g_{n-1} + \dots + h_nt_0}{n+1} \right| = \frac{|h_0g_n + h_1g_{n-1} + \dots + h_nt_0|}{n+1} \leq \frac{(n+1)K\varepsilon}{n+1} = K\varepsilon.$$
Keďže ε je ľubovoľné, potom na základe vety 2.1.13 platí:
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{h_0g_n + h_1g_{n-1} + \dots + h_nt_0}{n+1} \right| = 0, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{h_0g_n + h_1g_{n-1} + \dots + h_nt_0}{n+1} = 0.$$
Ak to zhrnieme, potom dostaneme
$$\begin{aligned}
w = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma}{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)st - s(h_0 + \dots + h_n) - t(g_0 + \dots + g_n) + (h_0g_n + \dots + h_nt_0)}{n+1} = \\
&= st - s\lim_{n\to\infty} \frac{h_0 + \dots + h_n}{n+1} - t\lim_{n\to\infty} \frac{g_0 + \dots + g_n}{n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{h_0g_n + \dots + h_nt_0}{n+1} = st. \blacksquare
\end{aligned}$$

Príklad 2.4.38.
Vypočítajte súčet Cauchyho súčinu radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Riešenie.
Z príkladu 2.4.23 vyplýva, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \ln 2$.
Pre n-tý $(n = 0, 1, 2, \dots)$ člen Cauchyho súčinu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$ platí:

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \frac{(-1)^{n+1-i+1}}{n+1-i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{i(n+1-i)} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{n+1}{i(n+1-i)} =$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(n+1-i)+i}{i(n+1-i)} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{i} + \frac{1}{n+1-i}\right] =$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{1}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i}.$$

Postupnosť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová, pretože na základe príkladu 2.3.31 platí:
$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right] \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 0 \cdot 2 = 0.$$
Postupnosť $\{|c_n|\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca, pretože pre všetky $n \in N$ platí:
$$|c_n| - |c_{n+1}| = \frac{2}{n+1} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right] - \frac{2}{n+2} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right] =$$
$$= \left[\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right] \cdot \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right] - \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \geq$$
$$\geq \frac{(2n+4)-(2n+2)}{(n+1)(n+2)} \cdot [1 + 0 + \dots + 0] - \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 0.$$
To znamená, že alternujúci rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje podľa Leibnizovho kritéria.
Potom sú splnené predpoklady Abelovej vety 2.4.29 a platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n+1} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln^2 2. \blacksquare$$

Cvičenia

2.4.1. Vyšetrite konvergenciu radov: ♣

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt{n}}$,

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$, m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$,

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$, q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$, r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$, s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$, t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$,

u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$, w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$, x) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^2}$, y) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$.

2.4.2. Vyšetrite konvergenciu radov: ♣

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n+1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+1}{n^2}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-4)^2}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$,

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n^2}$, p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{3}{8}\right)^n$, s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

u) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$, v) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, w) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$, x) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n^{\ln n}}$.

2.4.3. Vyšetrite konvergenciu radov: ♣

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{\sqrt{n}}}$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n \cdot n}}$,

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots n^2}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[2]{3}\sqrt[3]{3} \cdots \sqrt[n]{3}}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}$,

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 11 \cdots (10n-9)}{(2n-1)!}$, q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$, r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^4}$.

2.4.4. Vyšetrite konvergenciu radov: ♣

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n}-\sqrt{n-1}]$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{2n-1}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^{2n-1}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!(n+3)!3^n}{(2n)!}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n}\right)$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3-(-1)^n}{(-1)^n 2n}$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}\right)$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$,

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{n+1}(n+1)}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n-1)}$, q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{(n^2+1)\pi}{n}$, r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$,

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$, t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$, u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$,

v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$, w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$, x) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln n}(\ln n)^n$.

2.4.5. Vyšetrite konvergenciu radov: ♣

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n n}{n+1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)!}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{101\cdot 102\cdot 103\cdots(100+n)}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000\cdot 1002\cdot 1004\cdots(998+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n-2)}$,

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000\cdot 1001\cdot 1002\cdots(999+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$.

2.4.6. Vypočítajte súčet radov: ♣

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{n+3}{n}^{-1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+7)}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right]$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$, i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{5}{7}\right)^n$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}]$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n+7)(4n+11)}$.

2.4.7. Vyšetrite relatívnu a absolútnu konvergenciu radov: ♣

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n-1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3+\ln n}$,

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{6^n}$, k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$, l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$,

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$, n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n+1}$, o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

2.4.8. Pre aké $a\in R$ konvergujú rady: ♣

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,e^n}{n^{n+a}}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^a$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^a \sin\frac{\pi}{n}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$.

2.4.9. Nech rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergujú. ♣ Čo platí o konvergencii radov:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$.

2.4.10. Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Čo platí o konvergencii radov: ♣

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$.

2.4.11. Dokážte, že ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom tiež konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

2.4.12. Dokážte, že ak konvergujú číselné rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$, potom konvergujú tiež rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)^2$.

2.4.13. Dokážte, že ak $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0$, potom číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

2.4.14. Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}$. ♣

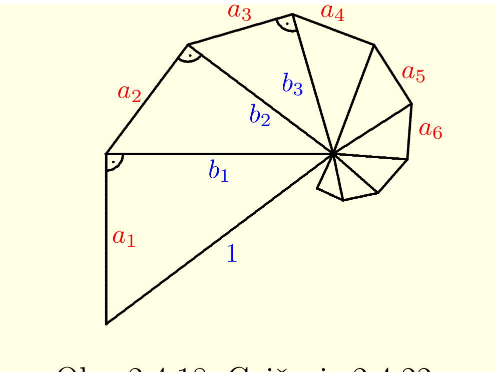
2.4.15. Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n + 7^{n+1}}{14^n}$. ♣

2.4.16. Dokážte, že platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

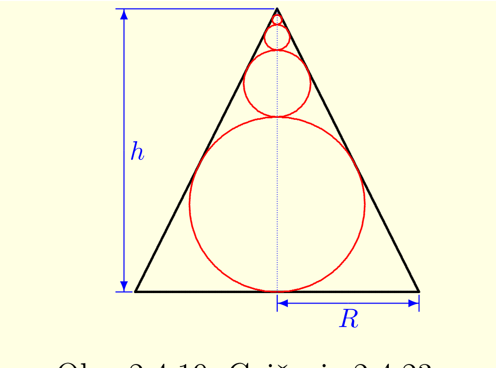
2.4.17. Dokážte: a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

2.4.18. Prerovnajte rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, aby divergoval do ∞, do $-\infty$ a konvergoval k 0.

2.4.19. Prerovnajte rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, aby divergoval do ∞, do $-\infty$ a konvergoval k 0.



Obr. 2.4.18: Cvičenie 2.4.22.



Obr. 2.4.19: Cvičenie 2.4.23.

2.4.20. Určte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a jeho n-tý člen a_n, ak jeho n-tý čiastočný súčet je: ♣

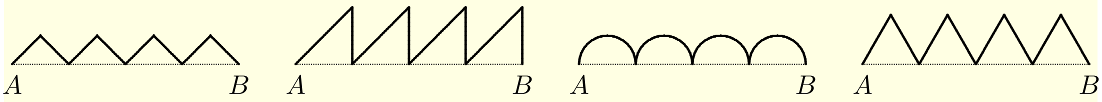
a) $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, b) $s_n = 1 + \frac{1}{2^n}$, c) $s_n = \frac{(-1)^n}{n}$, d) $s_n = \frac{n-2}{2n}$.

2.4.21. Nájdite súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s chybou menšou ako ε, ak: ♣

a) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\varepsilon = 0,1$, b) $a_n = \frac{1}{n^3}$, $\varepsilon = 0,01$, c) $a_n = \frac{1}{n^2+2n-3}$, $\varepsilon = 0,03$.

2.4.22. Nech $a_1 \in (0\,;\,1)$. Uvažujme pravouhlý trojuholník s preponou 1 a odvesnami a_1, b_1. Nech b_1 predstavuje preponu podobného pravouhlého trojuholníka s odvesnami a_2, b_2. Nech b_2 predstavuje preponu podobného pravouhlého trojuholníka s odvesnami a_3, b_3. Takto zostrojíme nekonečnú postupnosť podobných pravouhlých trojuholníkov s odvesnami a_n, b_n (obr. 2.4.18). Zistite, či rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Ak áno, vypočítajte jeho súčet a. Vypočítajte súčet obsahov P týchto trojuholníkov. ♣

2.4.23. Do rotačného kužeľa s výškou h a polomerom podstavy R sú postupne vpísané gule (obr. 2.4.19). Nájdite súčet objemov týchto gulí. ♣

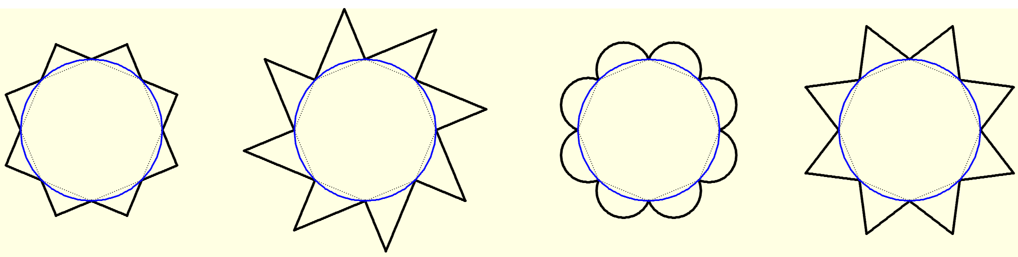


Obr. 2.4.20: Cvičenie 2.4.24.

2.4.24. Úsečka AB dĺžky $d > 0$ je rozdelená deliacimi bodmi na $n \in N$ rovnakých častí. Nad každou z týchto častí zostrojíme (viď obrázok 2.4.20): ♣

a) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou, ktorá leží na úsečke AB,
b) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s odvesnou, ktorá leží na úsečke AB,
c) polkružnicu, ktorej priemer leží na úsečke AB,
d) rovnostranný trojuholník.

Vypočítajte dĺžku takto vzniknutej čiary pre $n \to \infty$ a porovnajte ju s hodnotou d.



Obr. 2.4.21: Cvičenie 2.4.25.

2.4.25. Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšeme pravidelný n-uholník, $n \in N$. Nad každou z jeho strán zostrojíme smerom von z kružnice (viď obrázok 2.4.21): ♣

a) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou, ktorá leží na strane n-uholníka,
b) pravouhlý rovnoramenný trojuholník s odvesnou, ktorá leží na strane n-uholníka,
c) polkružnicu, ktorej priemer leží na strane n-uholníka,
d) rovnostranný trojuholník.

Vypočítajte dĺžku takto vzniknutej čiary pre $n \to \infty$ a porovnajte s obvodom kružnice o.

2.4.26. Vypočítajte obsah plochy, ktorú ohraničujú obrazce z cvičenia 2.4.25 a porovnajte ju s obsahom P vnútra kružnice. ♣

2.5 Komplexné čísla

Požiadavka, aby každá algebraická rovnica mala aspoň jedno riešenie, viedla k rozšíreniu množiny reálnych čísel na množinu komplexných čísel. Význam komplexných čísel zďaleka presahuje túto oblasť. Poznatky o komplexných číslach sa často používajú v rôznych technických oboroch, hlavne v elektrotechnike. Neskôr sa budeme komplexným číslam venovať podrobnejšie. Zatiaľ sa obmedzíme iba na ich základné vlastnosti, ktoré nám pomôžu pri lepšom chápaní niektorých pojmov.

Z doterajšieho štúdia vieme, že pre každé $x \in R$ platí $x^2 \geq 0$. To znamená, že napríklad rovnica $x^2 = -1$ nemá v množine reálnych čísel R riešenie. Z tohto dôvodu zavádzame nový prvok s označením i, pre ktorý platí $\mathrm{i}^2 = -1$.

Prvok i nazývame **imaginárna jednotka**[35] a ľubovoľný výraz $a + \mathrm{i}\, b$, kde $a, b \in R$, nazývame **komplexné číslo**.

Množinu všetkých komplexných čísel označujeme C a nazývame **množina komplexných čísel**. Symbolicky ju môžeme vyjadriť $C = \{a + \mathrm{i}\, b\,;\, a, b \in R\}$.

Ak $y = a + \mathrm{i}\, b$ je komplexné číslo, potom reálne číslo a nazývame **reálna časť komplexného čísla z** a označujeme $a = \operatorname{Re} z$. Reálne číslo b nazývame **imaginárna časť komplexného čísla z** a označujeme $b = \operatorname{Im} z$.

2.5.1 Operácie s komplexnými číslami

Nech $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$, $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$ sú komplexné čísla. **Rovnosť $z_1 = z_2$** znamená, že sa rovnajú reálne a aj imaginárne časti týchto čísel, t. j. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Je zrejmé, že každé reálne číslo je zároveň aj komplexné číslo. Sú to komplexné čísla s nulovou imaginárnou časťou, t. j. $z = a + \mathrm{i} \cdot 0 = a \in R$.

Ak má komplexné číslo nulovú reálnu časť, t. j. ak $z = 0 + \mathrm{i}\, b = \mathrm{i}\, b$, potom ho nazývame **rýdzo imaginárne číslo**.

V množine C definujeme operácie **sčítania** a **násobenia** pre $z_1, z_2 \in C$ vzťahmi

$$z_1 + z_2 = (a_1 + \mathrm{i}\, b_1) + (a_2 + \mathrm{i}\, b_2) = (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + \mathrm{i}\, b_1) \cdot (a_2 + \mathrm{i}\, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

V množine C platia axiómy (S1) — (S4), (N1) — (N4) a (D).[36] Nulový prvok je $0 = 0 + \mathrm{i} \cdot 0$ a jednotkový prvok je $1 = 1 + \mathrm{i} \cdot 0$.

Rozdiel čísel z_1, z_2 definujeme vzťahom

$$z_1 - z_2 = (a_1 + \mathrm{i}\, b_1) - (a_2 + \mathrm{i}\, b_2) = (a_1 - a_2) + \mathrm{i}(b_1 - b_2)$$

a **podiel čísel z_1, $z_2 \neq 0$** definujeme vzťahom

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + \mathrm{i}\, b_1}{a_2 + \mathrm{i}\, b_2} = \frac{a_1 + \mathrm{i}\, b_1}{a_2 + \mathrm{i}\, b_2} \cdot \frac{a_2 - \mathrm{i}\, b_2}{a_2 - \mathrm{i}\, b_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \mathrm{i}\, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \tag{2.9}$$

V množine C nie je definované usporiadanie $<$, preto tu neplatia axiómy (U1) — (U5) a (AH). Keby tieto axiómy platili, potom by muselo platiť $\mathrm{i} > 0$ alebo $\mathrm{i} < 0$. Potom by na základe vety 2.1.9 platilo $-1 = \mathrm{i}^2 > 0$ alebo $-1 = (-\mathrm{i})^2 > 0$, čo je spor.

Príklad 2.5.1.
Ak $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 2 + 3\,\mathrm{i}$, potom platí:

$$z_1 z_2 = (1 + \mathrm{i})(2 + 3\,\mathrm{i}) = 2 + 5\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i}^2 = -1 + 5\,\mathrm{i},$$
$$\tfrac{z_1}{z_2} = \tfrac{1+\mathrm{i}}{2+3\,\mathrm{i}} = \tfrac{(1+\mathrm{i})(2-3\,\mathrm{i})}{(2+3\,\mathrm{i})(2-3\,\mathrm{i})} = \tfrac{5-\mathrm{i}}{13} = \tfrac{5}{13} - \tfrac{\mathrm{i}}{13}, \qquad \tfrac{z_2}{z_1} = \tfrac{2+3\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \tfrac{(2+3\,\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \tfrac{5+\mathrm{i}}{2} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}. \ \blacksquare$$

[35] Niekedy, hlavne v elektrotechnickej praxi, sa imaginárna jednotka značí symbolom j.

[36] To znamená, že množina C s operáciami $+$, $\cdot$ je komutatívne teleso.

Nech $z = a + \mathrm{i}\, b$, $a, b \in R$, potom číslo $\overline{z} = a - \mathrm{i}\, b$ nazývame **komplexne združené číslo s číslom** z (**k číslu** z). Čísla z a $\overline{z}$ nazývame **komplexne združené**.

Z definície čísla $\overline{z}$ vyplýva, že pre komplexne združené čísla z a $\overline{z}$ platí:

$$z + \overline{z} = 2a, \qquad z - \overline{z} = 2\,\mathrm{i}\, b, \qquad z\overline{z} = a^2 - \mathrm{i}^2 b^2 = a^2 + b^2.$$

Veta 2.5.1.
Nech $z_1, z_2, z_3 \in C$, $z_3 \neq 0$, potom platí:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$, c) $\overline{\frac{z_1}{z_3}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_3}}$, d) $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$.

Dôkaz.
Časti a), d) vyplývajú priamo z definície.

b) Nech $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$, $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$, potom tvrdenie vyplýva z rovností

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1)} = (a_1a_2 - b_1b_2) - \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1),$$
$$\overline{z_1}\ \overline{z_2} = (a_1 - \mathrm{i}\, b_1) \cdot (a_2 - \mathrm{i}\, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) - \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1).$$

c) Nech $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$, $z_3 = a_3 + \mathrm{i}\, b_3$, $z_3 \neq 0$. Tvrdenie vyplýva na základe (2.9) z rovností

$$\overline{\left[\frac{z_1}{z_3}\right]} = \overline{\frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_3^2+b_3^2} + \mathrm{i}\,\frac{a_3b_1-a_1b_3}{a_3^2+b_3^2}} = \frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_3^2+b_3^2} - \mathrm{i}\,\frac{a_3b_1-a_1b_3}{a_3^2+b_3^2}, \qquad \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_3}} = \frac{a_1-\mathrm{i}\, b_1}{a_3-\mathrm{i}\, b_3} = \frac{a_1+\mathrm{i}(-b_1)}{a_3+\mathrm{i}(-b_3)} = \frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_3^2+b_3^2} + \mathrm{i}\,\frac{-a_3b_1+a_1b_3}{a_3^2+b_3^2}. \blacksquare$$

2.5.2 Geometrická interpretácia komplexných čísel

Každé komplexné číslo $z = a + \mathrm{i}\, b$ je jednoznačne určené usporiadanou dvojicou reálnych čísel $[a; b]$, takže môžeme písať $C = \{[a; b]\ ;\ a, b \in R\}$.

Nech $z_1 = [a_1; b_1]$, $z_2 = [a_2; b_2]$, potom pre operácie $+$ a $\cdot$ platí:

$$[a_1; b_1] + [a_2; b_2] = [a_1 + a_2; b_1 + b_2]\,, \qquad [a_1; b_1] \cdot [a_2; b_2] = [a_1a_2 - b_1b_2; a_1b_2 + a_2b_1]\,.$$

Ak zvolíme v rovine súradnice, potom komplexné číslo $z = a + \mathrm{i}\, b$ určuje práve jeden bod so súradnicami $[a; b]$. Rovinu, ktorá predstavuje komplexné čísla, nazývame **Gaussova rovina** (**rovina komplexných čísel**).

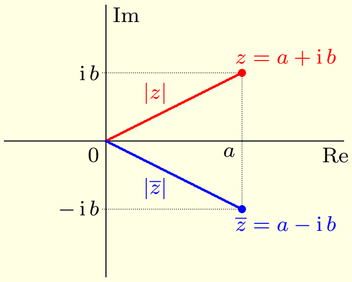
Reálne čísla a znázorňujeme na súradnicovej osi, ktorú nazývame **reálna os** a rýdzo komplexné čísla $\mathrm{i}\, b$ na druhej osi, ktorú nazývame **imaginárna os** (obr.2.5.22). Komplexné čísla z, $\overline{z}$ reprezentujú body, ktoré sú symetrické podľa reálnej osi.

Poznámka 2.5.1.
Komplexné číslo $z = a + \mathrm{i}\, b$ môžeme v rovine reprezentovať vektorom s počiatočným bodom $[0; 0]$ a koncovým bodom $[a; b]$. Súčet $z_1 + z_2$, resp. rozdiel $z_1 - z_2$ môžeme potom interpretovať ako sčítanie, resp. odčítanie zodpovedajúcich vektorov (obr.2.5.23).

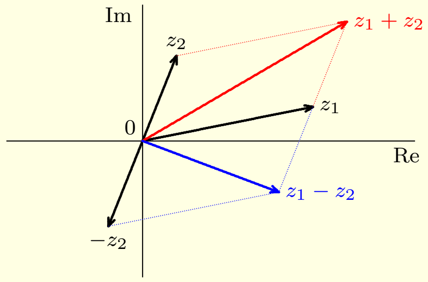
Nech $z = a + \mathrm{i}\, b$ je komplexné číslo. **Absolútnou hodnotou čísla** z nazývame $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Z geometrického hľadiska predstavuje $|z|$ vzdialenosť bodov 0 a z (obr.2.5.22). Absolútna hodnota komplexného čísla má rovnaké vlastnosti ako absolútna hodnota reálneho čísla.

Ak je z reálne, t. j. $z = a + \mathrm{i} \cdot 0$, potom platí $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$. To znamená, že absolútna hodnota reálneho čísla z je zhodná s absolútnou hodnotou komplexného čísla z. Z definície vyplýva priamo nasledujúca veta.

Veta 2.5.2.
Nech $z \in C$, potom platí: a) $|z| = |\overline{z}|$, b) $|z|^2 = z\overline{z}$.



Obr. 2.5.22: Rovina komplexných čísel.



Obr. 2.5.23: Súčet komplexných čísel.

Poznámka 2.5.2.
V množine C definujeme metriku predpisom $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, pre $z_1, z_2 \in C$.
Takto definovaný metrický priestor má rovnaké vlastnosti ako euklidovský metrický priestor R^2. To znamená, že pri vyšetrovaní množiny C môžeme využiť metrické vlastnosti množiny R^2 a tiež vlastnosti metrických priestorov.

Nech $z = a + \mathrm{i}\, b$, $z \neq 0$ je komplexné číslo. Potom existuje číslo $\varphi \in R$ také, že

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{2.10}$$

Číslo φ predstavuje veľkosť orientovaného uhla, ktorý zviera kladná časť reálnej osi s vektorom reprezentujúcim komplexné číslo z (obr.2.5.24). Každé číslo $\varphi \in R$, ktoré vyhovuje rovniciam (2.10), nazývame **hodnota argumentu komplexného čísla** z.

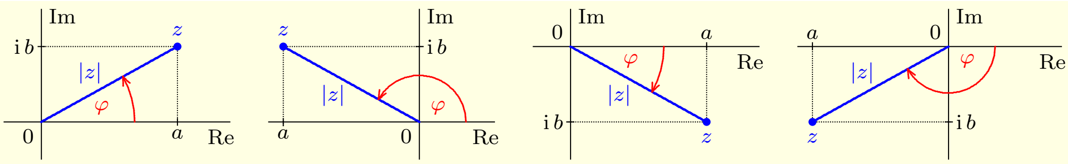
Množinu všetkých hodnôt argumentov komplexného čísla z označujeme symbolom $\arg z$ a nazývame **argument komplexného čísla** z.

Pre komplexné číslo $z = 0$ argument nedefinujeme.

Z vlastností funkcií sínus a kosínus[37] vyplýva, že ak $\varphi \in \arg z$, potom pre všetky $k \in Z$ platí $\varphi + 2k \in \arg z$. Ak $\varphi_1 \in \arg z$, $\varphi_2 \in \arg z$, potom $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, kde $k \in Z$.

To znamená, že ak φ je hodnota argumentu z, potom $\arg z = \{\varphi + 2k\pi\, ;\, k \in Z\}$.

Z predchádzajúceho vyplýva, že každé komplexné číslo $z \neq 0$ môžeme vyjadriť v tzv. **goniometrickom tvare** $z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, kde $\varphi \in \arg z$.



Obr. 2.5.24: Hodnota argumentu φ komplexného čísla $z = a + \mathrm{i}\, b$.

Poznámka 2.5.3.
Je zrejmé, že goniometrický tvar komplexného čísla z nie je určený jednoznačne. Hodnôt argumentu φ existuje nekonečne veľa, preto si z nich jednu vyberieme. Túto hodnotu nazývame **hlavná hodnota argumentu komplexného čísla** z a označujeme $\operatorname{Arg} z$. Volíme ju obyčajne z intervalu $(-\pi\, ;\, \pi\rangle$.[38]

[37] Bližšie sa im budeme venovať v nasledujúcej kapitole.
[38] Je to vec dohody, niekedy sa volí hlavná hodnota argumentu z intervalu $\langle 0\, ;\, 2\pi)$.

Príklad 2.5.2.
a) $z = -1 - \mathrm{i} = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = \sqrt{2}\big(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\big) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.
Platí $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$, $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}$.
b) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\big) = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$. ■

V nasledujúcej vete sú uvedené dva dôležité vzorce, ktoré nám zjednodušia výpočty s komplexnými číslami. Ich dôkaz presahuje rámec týchto skrípt, preto ho neuvádzame.

Veta 2.5.3.
Nech $z_1, z_2 \in C$, pričom $z_1 = |z_1|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $z_2 = |z_2|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$. Potom platí:
$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,[\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \psi)], \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\varphi - \psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi - \psi)].$$

Dôsledok 2.5.3.a (Moivreov vzorec).
Ak[39] $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \in C$, $n \in N$, potom platí $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$.

Dôsledok 2.5.3.b.
Ak $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \in C$, $n \in N$, potom rovnica $w^n = z$ má práve n riešení
$$w_{k+1} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad \text{kde } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

K množine komplexných čísel C pridávame bod ∞, ktorý nazývame **nekonečno**. Bod ∞ je práve jeden a má trochu iný význam ako body $\pm\infty$ pri reálnych číslach. Nedefinujeme výrazy $\pm\infty + b\,\mathrm{i}$, $a \pm \mathrm{i}\,\infty$, $\pm\infty \pm \mathrm{i}\,\infty$, ale definujeme iba jeden bod ∞. Množinu $C^* = C \cup \{\infty\}$ nazývame **uzavretou** (**rozšírenou**) **množinou komplexných čísel** (**Gaussovou rovinou**). Pre $z \in C$ definujeme operácie
$$z \pm \infty = \infty \pm z = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{z} = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \quad \frac{z}{0} = \infty,$$
pričom **nedefinujeme** $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$ a $\frac{0}{0}$. Pre $n \in N$ platí:
$$\infty^n = \infty, \quad \infty^{-n} = 0, \quad 0^{-n} = \infty, \quad \infty^0 = 1, \quad 0^0 = 1, \quad |\infty| = \overline{\infty} = \infty.$$

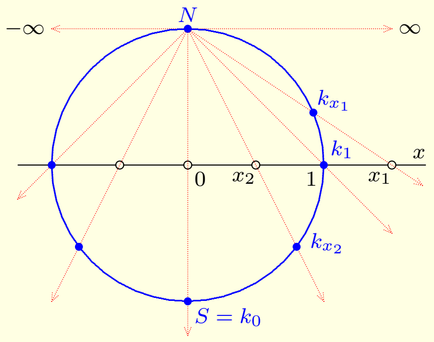
Najlepšie nám túto predstavu objasní geometrický model. Uvažujme reálnu os R v rovine R^2. Zostrojme kružnicu k so stredom v bode 0 a polomerom $r = 1$ (obr.2.5.25). Priamka kolmá na reálnu os v bode 0 pretína kružnicu k v dvoch bodoch. Označme ich N (severný pól) a S (južný pól).

Nech $x \in R$ je ľubovoľný bod ležiaci na reálnej osi. Uvažujme polpriamku, ktorá začína v bode N a prechádza bodom x. Polpriamka Nx pretína kružnicu k v dvoch bodoch. Jeden z nich je N a druhý označme k_x. Takýmto spôsobom priradíme každému bodu x reálnej osi práve jeden bod k_x z kružnice k.

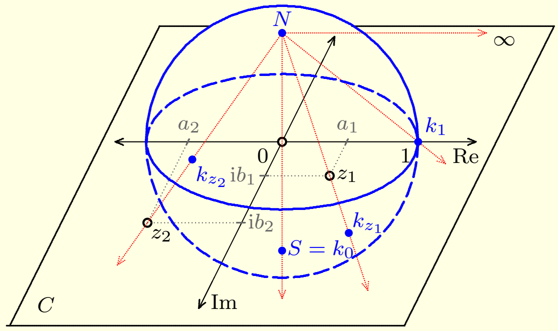
Bodu 0 je priradený južný pól S. Takýmto spôsobom je tiež každému bodu z kružnice k (okrem bodu N) priradený práve jeden bod z reálnej osi. Bodu N sú priradené dva body $\pm\infty$. Polpriamky Nx sú dotyčnice, t. j. pretínajú reálnu os v nekonečne alebo v mínus nekonečne.

Nejednoznačnosť s bodom N je odstránená pri komplexných číslach. Geometrický model je podobný a nazýva sa **stereografická projekcia guľovej sféry na rovinu** (obr.2.5.26). Uvažujme v R^3 rovinu komplexných čísel C a zostrojme guľovú plochu k so stredom v bode $0 = 0 + \mathrm{i}\,0$ a polomerom $r = 1$.

Kružnicu, ktorá je prienikom guľovej plochy k s Gaussovou rovinou C, nazveme v súlade so stereografickou projekciou rovníkom. Prienik guľovej plochy k s priamkou kolmou na rovinu C a prechádzajúcou bodom 0 nazveme N (severný pól) a S (južný pól).



Obr. 2.5.25: Rovinná projekcia reálnych čísel.



Obr. 2.5.26: Stereografická projekcia komplexných čísel.

Nech $z \in C$ je ľubovoľný bod. Aj v tomto prípade priradíme bodu z jednoznačne bod x_z ležiaci na guľovej ploche k. Bod x_z je prienikom polpriamky Nz s plochou k. Bodu N priradíme (práve jeden) bod ∞.

Nech $z \in C$, $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$. Množinu $O_\varepsilon(z) = \{z' \in C\,;\, |z - z'| < \varepsilon\}$ nazývame (**kruhovým**) **ε-okolím bodu z**. Bod z nazývame **stred okolia $O_\varepsilon(z)$** a číslo ε nazývame **polomer** (**charakteristika**) **okolia $O_\varepsilon(z)$**. Množinu $O_\varepsilon(\infty) = \{z \in C^*\,;\, |z| > \varepsilon^{-1}\}$ nazývame (**kruhovým**) **ε-okolím bodu ∞**. Bod ∞ nazývame **stred okolia $O_\varepsilon(\infty)$** a číslo ε nazývame jeho **polomer**. Z definície vyplýva, že bod ∞ patrí do každého svojho okolia.

Ak $O_\varepsilon(z)$ je kruhovým okolím bodu $z \in C^*$, potom množinu $P_\varepsilon(z) = O_\varepsilon(z) - \{z\}$ nazývame **prstencové ε-okolie bodu z**. Podobne ako pri reálnych číslach, ak nebude polomer okolia bodu $z \in C^*$ podstatný, budeme ho vynechávať.

Poznámka 2.5.4.
Z definície je zrejmé, že pojem okolia $O_\varepsilon(z)$, resp. $P_\varepsilon(z)$, $z \in C$ sa zhoduje s pojmom okolia, resp. prstencového okolia v euklidovskej rovine R^2.

Príklad 2.5.3.
Dokážte, že pre všetky $\alpha, \beta \in R$ platia tzv. **súčtové vzorce**

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Riešenie.
Označme $z_1 = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, $z_2 = \cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta$. Súčtové vzorce vyplývajú zo vzťahov (veta 2.5.3):

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) = \\ = \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{i}\sin\alpha\cos\beta + \mathrm{i}\cos\alpha\sin\beta + \mathrm{i}^2\sin\alpha\sin\beta = \\ = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta). \ \blacksquare \end{aligned}$$

[39] *Abraham de Moivre* [1667–1754] — anglický matematik francúzskeho pôvodu.

2.5.3 Postupnosti komplexných čísel

Postupnosť komplexných čísel $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, t. j. postupnosť ktorej množina hodnôt je podmnožina množiny C nazývame **postupnosťou komplexných čísel**. Ako sme už spomínali, množina C tvorí metrický priestor s metrikou $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ definovanou pre všetky $z_1, z_2 \in C$.

Pre postupnosti komplexných čísel môžeme definovať skoro všetky vlastnosti ako pre reálne postupnosti. V tejto časti sa obmedzíme iba na konvergenciu. Nech $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel. Hovoríme, že postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje k bodu** $z \in C$, ak pre každé $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $\rho(z_n, z) < \varepsilon$. Prvok z nazývame **limitou postupnosti** $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označujeme $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Ak postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje, potom hovoríme, že **postupnosť** $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ **diverguje**. Hovoríme, že **postupnosť** $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ **diverguje do** ∞, ak pre každé $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $|z_n| > \varepsilon^{-1}$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Poznámka 2.5.5.
Z poznámky 2.3.25 vyplýva, že postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje ku komplexnému číslu $z \in C$ práve vtedy, ak $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.

Poznámka 2.5.6.
Divergencia postupnosti v množine C má trochu iný význam ako divergencia v R.
Ak považujeme postupnosť $\{(-n)^n\}_{n=1}^{\infty}$ za postupnosť reálnych čísel, potom má dve hromadné hodnoty $-\infty$, ∞. To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} (-n)^n$ neexistuje.
Ak považujeme $\{(-n)^n\}_{n=1}^{\infty}$ za postupnosť komplexných čísel, potom $\lim\limits_{n\to\infty} (-n)^n = \infty$.

Postupnosť $\{|z_n - z|\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezáporných reálnych čísel. Ako ukazuje nasledujúca veta, môžeme problém konvergencie postupnosti komplexných čísel previesť na problém konvergencie reálnych čísel. Pre postupnosti komplexných čísel platia analogické vety o konvergencii ako pre reálne postupnosti. Musíme samozrejme vylúčiť vety, v ktorých sa uvažuje usporiadanie, ktoré nie je v množine C definované.

Veta 2.5.4.
Nech $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel, potom platí:
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z = a + \mathrm{i}\, b,\ z \in C \iff \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = a,\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = b.$$

Dôkaz.
Nech pre všetky $n \in N$ platí $z_n = a_n + \mathrm{i}\, b_n$, $a_n, b_n \in R$.
$NP_{\Rightarrow}$: Nech $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z = a + \mathrm{i}\, b$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$. Pre všetky $n \in N$ platí:
$$|a_n - a| = \sqrt{(a_n - a)^2} \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = |z_n - z|,$$
$$|b_n - b| = \sqrt{(b_n - b)^2} \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = |z_n - z|\,.$$
Z toho vyplýva na základe vety 2.3.17 a dôsledku 2.3.15.a
$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0,\ \lim_{n\to\infty} |b_n - b| = 0, \quad \text{t. j. } \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = a,\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = b.$$
$PP_{\Leftarrow}$: Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Označme $z = a + \mathrm{i}\, b$, potom pre všetky $n \in N$ platí:
$$|z_n - z|^2 = (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 \leq (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + 2\,|a_n - a|\,|b_n - b| = [|a_n - a| + |b_n - b|]^2\,.$$
To znamená, že pre všetky $n \in N$ platí $|z_n - z| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$. Potom
$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |z_n - z| \leq \lim_{n\to\infty} [|a_n - a| + |b_n - b|] = 0, \quad \text{t. j. } \lim_{n\to\infty} z_n = z = a + \mathrm{i}\, b. \ \blacksquare$$

Poznámka 2.5.7.
Z vety 2.5.4 vyplýva, že ak existuje konečná limita postupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \operatorname{Re}\left[\lim_{n\to\infty} z_n\right] + \mathrm{i}\operatorname{Im}\left[\lim_{n\to\infty} z_n\right] = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n + \mathrm{i}\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

Príklad 2.5.4.
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n+1}{n} + \mathrm{i}\,\frac{n-1}{n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} + \mathrm{i}\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1 + \mathrm{i}.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(-n)^n}{n} + \mathrm{i}\,\frac{n-1}{n}\right]$ neexistuje, pretože neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-n)^n}{n}$. ■

Cvičenia

2.5.1. Určte $\overline{z}$, $|z|$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$, z^2, z^3, ak: ♣

a) $z = 1+\mathrm{i}$, b) $z = 2+3\,\mathrm{i}$, c) $z = -1+\mathrm{i}$, d) $z = -16\,\mathrm{i}$, e) $z = \sqrt{3}+\mathrm{i}$,
f) $z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, g) $z = \frac{5}{2-\mathrm{i}}$, h) $z = \frac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$, i) $z = \frac{2+\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}$, j) $z = \frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

2.5.2. Nech $z = a + \mathrm{i}\,b$, určte $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$ a goniometrický tvar čísla $w = \frac{z}{\overline{z}}$. ♣

2.5.3. Vypočítajte pre vetky $n \in N$ hodnotu $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n$. ♣

2.5.4. Vyjadrite v goniometrickom tvare komplexné čísla: ♣

a) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{10}$, b) $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}$, c) $(-1+\mathrm{i})^{7}$, d) $(1+\mathrm{i})^{7}$, e) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{12}$.

2.5.5. Dokážte, že pre všetky $z_1, z_2 \in C$ platí $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2$.

2.5.6. Pre aké $z_1, z_2 \in C$ platí $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$? ♣

2.5.7. Vypočítajte $(1-\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)^n$, kde $n \in N$, $\varphi \in R$. ♣

2.5.8. Zistite, aké musia byť komplexné čísla z_1, z_2, aby ich súčin, resp. podiel bol: ♣

a) reálny, b) rýdzo imaginárny, c) imaginárny (nie reálny a nie rýdzo imaginárny).

„Tati, bila tě někdy tvoje maminka?“
„Ne, jenom tvoje.“
úryvok z filmu SLUNCE, SENO A PÁR FACEK

„Mi řekni, prosím tě, co na tom chlastu máš?“
„Ja ti to řeknu a ty začneš chlastat taky.“
úryvok z filmu SLUNCE, SENO A PÁR FACEK

Mladý gentleman, ktorý sa chce oženiť, by sa rád zoznámil so skúseným mužom, ktorý by ho od tohto kroku odradil.
inzerát v londýnskych TIMES [1896]

Ach milí priatelia, priatelia neexistujú!
ARISTOTELES

Je lepšie ľutovať, že sme niečo zažili,
ako ľutovať, že sme to nezažili.
GIOVANNI BOCCACCIO

„Čo robíte, keď máte niekoho rád?“ opýtal sa niekto pána Keunera.
„Vytvorím si o ňom obraz a snažím sa, aby sa mu podobal“ odpovedal pán Kreuner.
„Kto? Ten obraz?“
„Nie, ten človek.“
BERTOLT BRECHT

Boh mi odpustí, je to nakoniec jeho remeslo.
HEINRICH HEINE — posledné slová pred smrťou [1856]

Priateľ je ten, kto vie o vás všetko
a napriek tomu vás má stále rovnako rád.
ELBERT HUBBARD

Pesimista je človek, ktorý keď ho postavia pred dve zlá, vyberie si obe.
ELBERT HUBBARD

Zo všetkých hlupákov je najneznesitelnejší zcestovaný hlupák.
Prináša si hlúposti iných národov a pridáva ich ku svojim.
ALEXANDER HUMBOLDT

Lekársky výskum urobil také pokroky,
že už napokon na svete niet zdravého človeka.
THOMAS HENRY HUXLEY

Rečník má vyčerpať tému, nie poslucháčov.
WINSTON CHURCHIL

Povedz mi čo čítaš a ja ti poviem, kde si tú knihu ukradol.
ILJA ILF

Každá brzda si myslí, že je záchranna.
TOMÁŠ JANOVIC

Mám rád prácu, priam ma fascinuje.
Celé hodiny vydržím sa na ňu dívať.
JEROME K. JEROME

Zaujímam sa o budúcnosť, pretože v nej
hodlám stráviť zvyšok svojho života.
CHARLES KETTERING

Chceš realizovať svoje sny? Prebuď sa!
RUDYARD KIPLING

Vyspať sa s ňou, to ano, ale žiadne dôvernosti.
KARL KRAUS

Kapitola 3

Reálne funkcie reálnej premennej

3.1 Reálne funkcie

V tejto kapitole sa budeme zaoberať zobrazeniami, ktorých definičný obor aj obor hodnôt sú podmnožinami množiny reálnych čísel R, prípadne rozšírenej množiny reálnych čísel R^*. Takéto zobrazenia nazývame reálne funkcie reálnej premennej.

Nech $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je zobrazenie. Ak pre všetky $x \in D(f)$ platí, že $f(x) \in R$ (obrazy sú reálne čísla), t. j. platí $H(f) = f[D(f)] = \{f(x)\,;\, x \in D(f)\} \subset R$, potom zobrazenie f nazývame **reálna funkcia**. Ak $D(f) \subset R$, potom zobrazenie f nazývame **funkcia reálnej premennej**.

Hodnoty x nazývame **nezávislé premenné** a hodnoty $f(x)$ nazývame **závislé premenné**, resp. **funkčné hodnoty funkcie f v bode x**. Množinu $D(f)$ nazývame **definičný obor funkcie f** a $H(f)$ nazývame **obor hodnôt funkcie f**.

Funkcie sa vo väčšej miere začali skúmať až v 17. storočí v súvislosti s rozmachom prírodných vied. Ako prvý začal pojem funkcia systematicky používať *Jacob Bernoulli* na začiatku 18. storočia. V tomto období si ale matematici funkciu predstavovali ako analytický výraz zložený nejakým spôsobom z premenných a konštánt (reálnych čísel), napríklad $y = \sqrt{x+1}$, $y = x^2$ a pod.

Až v 19. storočí nastal posun v chápaní funkcie a pojem funkcie nadobudol presnejší tvar, ktorý je nezávislý od analytického vyjadrenia funkcie: „*Závislá premenná y je funkciou nezávislej premennej x, ak každej hodnote x (z definičného oboru premennej x) zodpovedá presne určená hodnota y.*“

Tvar vzťahu medzi x a y je pritom nepodstatný. Napríklad *P. L. Dirichlet* sa pri štúdiu trigonometrických radov zaoberal funkciou χ (v súčasnosti sa nazýva **Dirichletova**) definovanou $\chi(x) = 1$ pre x racionálne a $\chi(x) = 0$ pre x iracionálne. Takto definovaná funkcia bola pre dovtedajších matematikov nemysliteľná.

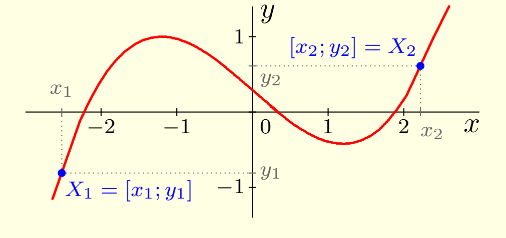
Pojem funkcie sa ustálil vybudovaním teórie množín a reálne funkcie sú iba špeciálnym prípadom funkcií, resp. zobrazení. Pokiaľ nepovieme ináč, budeme pod pojmom **funkcia** rozumieť **reálnu funkciu jednej reálnej premennej**.

Poznámka 3.1.1.
Reálne číselné postupnosti, ktorými sme sa zaoberali v predchádzajúcej kapitole, sú špeciálnym prípadom reálnych funkcií s definičným oborom $N \subset R$.

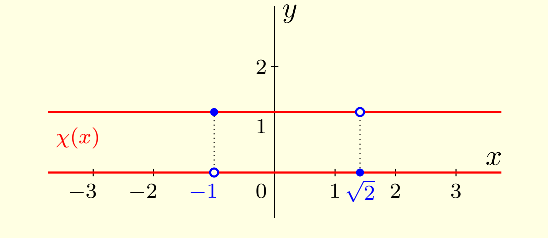
Funkcia $y = f(x)$ je množina usporiadaných dvojíc $[x; f(x)]$, kde $x \in D(f)$. Takže ju môžeme v euklidovskej rovine R^2 graficky zobraziť ako množinu bodov, ktoré majú v **pravouhlom súradnicovom**

systéme[1] súradnice $[x; f(x)]$. Túto množinu, t. j. množinu $\{[x;y] \in R^2\,;\, x \in D(f),\ y = f(x)\}$ nazývame **graf funkcie** $y = f(x)$.

Karteziánsky súradnicový systém sa skladá z dvoch na seba kolmých **súradnicových osí**, ktoré obyčajne označujeme x, y a nazývame x**-ová** a y**-ová** (**súradnicová**) **os**. Ich priesečník označujeme symbolom 0 alebo O a nazývame **počiatok súradnicového systému**. Každému bodu $X \in R^2$ je priradená dvojica hodnôt $[x; y]$, ktoré nazývame x**-ová súradnica** a y**-ová súradnica**. Situácia je znázornená na obrázku 3.1.1.



Obr. 3.1.1: Karteziánsky systém.



Obr. 3.1.2: Dirichletova funkcia $\chi(x)$.

Geometrická interpretácia funkcie nám v mnohých prípadoch pomôže pri skúmaní vlastností danej funkcie. Pojem grafu je ale u mnohých ľudí spojený s pojmom krivka,[2] t. j. „súvislá čiara“. Táto predstava je ale vzhľadom k veľkej všeobecnosti pojmu funkcie a aj pojmu krivka zavádzajúca. Existujú funkcie, ktorých grafy majú veľmi málo spoločné s touto predstavou, dokonca sa dajú veľmi ťažko nakresliť. Príkladom je Dirichletova funkcia, ktorej body ležia na priamkách $y = 0$ a $y = 1$, ale nevypĺňajú tieto priamky úplne. Na každej z priamok je vynechaných nekonečne veľa bodov a nekonečne veľa bodov tam ešte ostane (obr. 3.1.2). Z vety 2.1.28 vyplýva, že medzi každými dvomi bodmi ležiacimi na týchto priamkách je vždy aspoň jedna medzera.

Funkcia je určená svojim definičným oborom a vzťahom medzi nezávislou a závislou premennou. Predpis $y = f(x)$, $x \in D(f)$ vyjadruje aj obor hodnôt $H(f)$. Definičným oborom býva často interval alebo zjednotenie intervalov. Ak nie je definičný obor funkcie zadaný, resp. ak je ako definičný obor zadaná množina reálnych čísel R, potom v zmysle poznámky 1.3.8, budeme pod definičným oborom rozumieť množinu reálnych čísel, pre ktoré má daný vzťah zmysel. Túto množinu nazývame **prirodzený** (**maximálny**) **definičný obor funkcie**.[3]

To znamená, že predpisy $y = f(x)$, resp. $y = f(x)$, $x \in R$, resp. $y = f(x)\colon\ R \to R$ predstavujú funkciu zadanú výrazom $f(x)$ s maximálnym definičným oborom. Na druhej strane funkcia $y = f(x)$, $x \in A$, $A \subset R$, resp. $y = f(x)\colon\ A \to R$, $A \subset R$ predstavuje funkciu zadanú výrazom $f(x)$ s definičným oborom A. Obor hodnôt funkcie $y = f(x)$ reprezentuje množina $H(f) = \{f(x)\,;\, x \in D(f)\}$, kde $D(f)$ je definičný obor funkcie f.

Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$, $x \in A$ je **injektívna** (**injekcia**, **prostá**), ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, t. j. ak zo vzťahu $f(x_1) = f(x_2)$ vyplýva $x_1 = x_2$.

Ak $f(A) = B$, potom hovoríme, že funkcia $y = f(x)$, $x \in A$ **zobrazuje množinu** A **na množinu** B a funkciu f nazývame **surjektívna** (**surjekcia**, **na množinu** B). To znamená, že funkcia f je surjektívna, ak ku každému $y \in B$ existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$ Ak $f(A) \subset B$, potom hovoríme, že funkcia f **zobrazuje množinu** A **do množiny** B.

[1]Tiež sa nazýva (**karteziánsky**) **súradnicový systém**, (**karteziánska**) **súradnicová sústava**, resp. **systém karteziánskych súradníc**.

[2]Krivkám sa bližšie venujeme na strane 204.

[3]Je to tzv. **existenčný obor výrazu**, ktorým je funkcia definovaná.

Ak je funkcia f injektívna a zároveň surjektívna (prostá na), nazývame ju **bijektívna** (**bijekcia**, **prostá na množinu**, **jednojednoznačná**).

Príklad 3.1.1.
Predpis $f\colon\ y=x^2$ vyjadruje funkciu $f(x)=x^2$, $x\in R$, t. j. $f(x)=x^2$, $f\colon\ R\to R$.
Predpis $f\colon\ y=\sqrt{x}$ vyjadruje funkciu $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in\langle 0\,;\,\infty)$, t. j. $f\colon\ \langle 0\,;\,1\rangle\to R$.
Predpis $f\colon\ y=\sqrt{x}$, $x\in\langle 0\,;\,1\rangle$ vyjadruje inú funkciu $f(x)=\sqrt{x}$, $f\colon\ \langle 0\,;\,1\rangle\to R$ alebo presnejšie povedané funkciu $f\colon\ \langle 0\,;\,1\rangle\to\langle 0\,;\,1\rangle$. ∎

Výraz, ktorým je daná funkcia definovaná, môže mať rôzne tvary. Najčastejšie a pre účely matematickej analýzy najvhodnejšie je analytické zadanie vzorcom, t. j. rovnicou $y=f(x)$, $x\in D(f)$ alebo niekoľkými takýmito rovnicami pre rôzne časti definičného oboru. Výraz $f(x)$ na pravej strane rovnice obsahuje najviac jednu premennú x a nadobúda pre konkrétne x jednoznačné hodnoty. Hovoríme, že funkcia f je zadaná **explicitne**.

Funkcia môže byť analyticky zadaná aj ináč ako vzťahom $y=f(x)$, $x\in D(f)$. Časté je **parametrické vyjadrenie** (obr. 3.1.3), t. j. vyjadrenie dvojicou rovníc

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\quad t\in J,$$

kde φ, ψ sú zobrazenia (funkcie) definované na množine $J\subset R$. Množina J býva obyčajne interval. Premenná t sa nazýva **parameter** a má pomocný význam, pretože nás zaujíma vzťah medzi x a y. Predchádzajúce rovnice definujú reláciu $f\subset R^2$:

$$f=\left\{[x;y]\in R^2\,;\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in J\right\}. \tag{3.1}$$

Táto relácia môže byť za určitých podmienok funkciou. Je to v prípade, keď je zobrazenie $x=\varphi(t)$, $t\in J$ prosté a ku každému $\varphi(t)$, $t\in J$ existuje práve jedno $\psi(t)$. Vtedy hovoríme, že funkcia f je definovaná **parametricky** (funkciu **parametrizujeme**) rovnicami $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in J$.

Keďže je zobrazenie $x=\varphi(t)$ na množine J prosté (t. j. je bijektívne), existuje k nemu inverzné zobrazenie $t=\varphi^{-1}(x)$, ktoré je definované na nejakej množine $M=\varphi(J)$. Funkciu f môžeme potom vyjadriť v tvare

$$y=f(x)=\psi(t)=\psi\left[\varphi^{-1}(x)\right],\ \ x\in M. \tag{3.2}$$

Prechod od systému rovníc $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in J$ k tvaru (3.2) nazývame **eliminácia**[4] **parametra** t v parametrickom vyjadrení funkcie f.

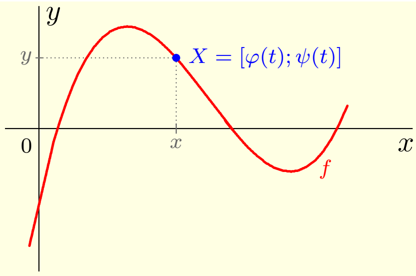
Poznámka 3.1.2.
Funkciu $y=f(x)$, $x\in D(f)$ môžeme parametrizovať nekonečným množstvom funkcií. Stačí zvoliť funkciu $x=\varphi(t)$, $t\in J$ tak, aby bola prostá na množinu $D(f)$, t. j. aby bola bijekciou $J\to D(f)$. Hodnotu y môžeme potom vyjadriť $y=f(x)=f(\varphi(t))$, $t\in J$. Je zrejmé, že najjednoduchšie parametrické vyjadrenie má tvar $x=t$, $y=f(t)$, $t\in D(f)$.

Funkcia f môže byť zadaná rovnicou $F(x,y)=0$, kde F je zobrazenie z množiny R^2 do R. Niekedy sa navyše požaduje, aby platilo $[x;y]\in A$, kde $A\subset R^2$ je vopred daná množina. Predchádzajúca rovnica opäť definuje nejakú reláciu $f\subset R^2$:

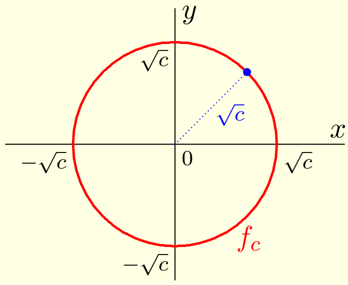
$$f=\left\{[x;y]\in R^2\,;\ F(x,y)=0\right\},\ \text{ resp. } f=\left\{[x;y]\in R^2\,;\ F(x,y)=0,[x;y]\in A\right\}. \tag{3.3}$$

Ak je relácia f funkciou, potom hovoríme, že funkcia f je definovaná **implicitne** rovnicou $F(x,y)=0$. Ak uvážime $y=f(x)$, potom môžeme písať $F(x,f(x))=0$.

[4] Teoreticky vieme eliminovať parameter z každého vyjadrenia, prakticky to ale môže byť problém.



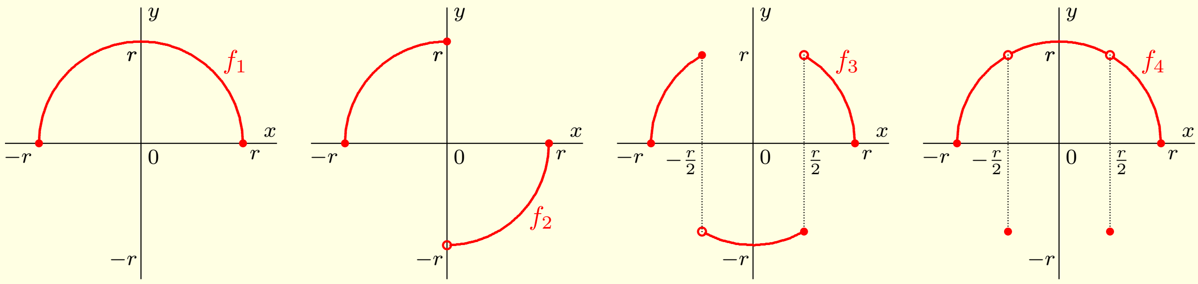
Obr. 3.1.3: Funkcia $f\colon\ x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ zadaná parametricky.



Obr. 3.1.4: Kružnica $x^2 + y^2 - c = 0$, $c \geq 0$ z príkladu 3.1.2.

Poznámka 3.1.3.
Funkcia $y = f(x)$, ktorá je zadaná implicitne rovnicou $F(x, y) = 0$ sa obyčajne vyšetruje metódami matematickej analýzy funkcií viac premenných.[5]

Príklad 3.1.2.
Uvažujme reláciu $f_c = \{[x; y] \in R^2\,;\ x^2 + y^2 = c\}$, kde $c \in R$ (obr. 3.1.4).
Pre $c = 0$ dostaneme reálnu funkciu $f_0 = \{[0; 0]\}$, ktorú môžeme explicitne vyjadriť napríklad v tvare $f\colon\ y = x$, $x \in \{0\}$ alebo v tvare $f\colon\ y = 0$, $x \in \{0\}$.
Pre $c < 0$ dostaneme $f_c = \emptyset$, pretože pre všetky $x, y \in R$ platí $x^2 + y^2 - c \geq -c > 0$.
Pre $c > 0$ dostaneme reláciu $f_c = \left\{ \left[x; \pm\sqrt{c - x^2}\right]\,;\ x \in \langle -\sqrt{c}\,;\ \sqrt{c}\rangle \right\}$, ktorá funkciou nie je. Predstavuje kružnicu so stredom v počiatku $[0; 0]$ a s polomerom $\sqrt{c}$. ■



Obr. 3.1.5: Funkcie f_1, f_2, f_3, f_4 z poznámky 3.1.4.

Poznámka 3.1.4.
Kružnica $f_r = \{[x; y]\,;\ x^2 + y^2 = r^2\}$, $r > 0$ z príkladu 3.1.2 funkciou nie je, pretože každému $x \in (-r\,;\ r)$ sú priradené dve hodnoty $\pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Ak danému x priradíme iba jednu z nich, dostaneme funkciu s definičným oborom $\langle -r\,;\ r\rangle$. Je zrejmé, že takýchto funkcií existuje nekonečne veľa a môžeme ich definovať rozmanitým spôsobom. Patrí sem napríklad funkcia f definovaná pre všetky racionálne $x \in \langle -r\,;\ r\rangle$ vzťahom $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ a pre všetky iracionálne $x \in \langle -r\,;\ r\rangle$ vzťahom $f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$.

[5] Funkciami viacerých premenných sa budeme zaoberať v nasledujúcej časti tejto učebnice.

Ďalšie príklady sú znázornené na obrázku 3.1.5, sú to funkcie

$$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2},\ x \in \langle -r\,;\,r\rangle, \qquad f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2}, & x \in \langle -r\,;\,0\rangle, \\ -\sqrt{r^2 - x^2}, & x \in (0\,;\,r\rangle, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2}, & x \in \left\langle -r\,;\,\frac{r}{2}\right\rangle \cup \left(\frac{r}{2}\,;\,r\right\rangle, \\ -\sqrt{r^2 - x^2}, & x \in \left(-\frac{r}{2}\,;\,\frac{r}{2}\right\rangle, \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2}, & x \neq \pm\frac{r}{2}, \\ -\sqrt{r^2 - x^2}, & x = \pm\frac{r}{2}. \end{cases}$$

Príklad 3.1.3.
Funkciu $f\colon y = |x|,\ x \in R$ môžeme zadať rôznymi spôsobmi. Týchto spôsobov je zrejme nekonečne veľa. Na ilustráciu uvedieme niektoré z nich:

Explicitne: $y = \sqrt{x^2}$, resp. $y = \max\{-x, x\}$, resp. $y = \begin{cases} -x, & \text{pre } x < 0, \\ x, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

Parametricky: $x = t,\ y = |t|,\ t \in R$, resp. $x = t,\ y = \sqrt{t^2},\ t \in R$, resp. $x = t^3,\ y = |t^3|,\ t \in R$.
Implicitne: $y^2 - x^2 = 0,\ y \geq 0$, resp. $y - |x| = 0$, resp. $y - \sqrt{x^2} = 0$. ■

Funkcia $y = f(x),\ x \in D(f)$ môže byť niekedy zadaná aj **tabuľkou**, t. j. dvojicami hodnôt nezávislej premennej x a funkčnej hodnoty $f(x)$. Táto metóda sa používa najmä v prípadoch, keď chceme nájsť závislosť medzi nejakými nameranými hodnotami. Je zrejmé, že takýmto spôsobom môžeme definovať funkciu úplne iba, ak jej definičný obor je konečná množina. Ale na objasnenie situácie to v mnohých prípadoch stačí.

V technických aplikáciach sa niekedy funkcia zadáva tiež **graficky**, pomocou nakresleného grafu. Z grafu môžeme hodnoty funkcie určiť iba približne a teda pre ďalšie matematické spracovanie je táto metóda prinajmenšom málo vhodná, aj keď jej nemôžeme poprieť praktický význam.

Poznámka 3.1.5.
Okrem pravouhlého karteziánskeho súradnicového systému sa na vyjadrenie funkcie v rovine R^2 niekedy používa tzv. **polárny súradnicový systém**, ktorý sa skladá z jedného pevného bodu (počiatku systému) a z polpriamky z neho vychádzajúcej (polárna os). Súradnice jednotlivých bodov sú určené vzdialenosťou od počiatku a rovinným uhlom, ktorý tvoria tento bod, počiatok systému a polárna os. Bližšie sa s polárnym súradnicovým systémom zaoberáme v časti určenej rovinným krivkám na strane 205.

Príklad 3.1.4.
Nech $x_1, x_2 \in R,\ x_1 \neq x_2$ a $y_1, y_2 \in R$ sú dané čísla.
Určte koeficienty $a, b \in R$ funkcie $f\colon\ y = ax + b$ tak, aby $[x_1; y_1] \in f,\ [x_2; y_2] \in f$.

Riešenie.
Máme určiť $a, b \in R$ tak, aby $y_1 = ax_1 + b,\ y_2 = ax_2 + b$. Po odčítaní rovníc dostaneme

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1), \qquad \text{t. j. } a = \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Z prvej rovnice vyjadríme koeficient b a dosadíme a. Potom platí:

$$b = y_1 - ax_1 = y_1 - \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \tfrac{y_1 x_2 - y_1 x_1 - y_2 x_1 + y_1 x_1}{x_2 - x_1} = \tfrac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Funkcia $f\colon\ y = ax + b$ má potom tvar

$$y = \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \tfrac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} = \tfrac{y_2 x - y_1 x + y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} = \tfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2 + \tfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} y_1. \ ■$$

Poznámka 3.1.6.
Funkcia $f\colon\ y = ax + b$, kde $a, b \in R$, sa nazýva **lineárna funkcia**. Jej grafom je priamka. Takže sme hľadali rovnicu priamky, ktorá je určená dvomi rôznymi bodmi. Hodnota a predstavuje smernicu tejto priamky, t. j. tangens uhla, ktorý zviera s osou x.

3.1.1 Základné vlastnosti funkcií

Funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ sa nazýva **ohraničená zdola** [resp. **ohraničená zhora**] **na množine** $A \subset D(f)$, ak je jej množina funkčných hodnôt $f(A) = \{f(x)\,;\, x \in A\}$ ohraničená zdola [resp. ohraničená zhora], t. j. ak existuje číslo $m \in R$ [resp. $M \in R$] také, že pre všetky $x \in A$ platí $m \leq f(x)$ [resp. $f(x) \leq M$].

Funkcia f sa nazýva **ohraničená na množine** A, ak je ohraničená zdola a aj zhora na množine A, t. j. ak existujú $m, M \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $m \leq f(x) \leq M$.

Ak nie je funkcia f ohraničená zdola [resp. zhora] na množine A, potom sa nazýva **neohraničená zdola** [resp. **zhora**] **na množine** A.

Ak funkcia f nie je ohraničená (t. j. nie je ohraničená zdola alebo zhora) na množine A, potom sa nazýva **neohraničená na množine** A

Poznámka 3.1.7.
Uvedené vlastnosti boli definované na podmnožine $A \subset D(f)$, preto hovoríme o **lokálnych vlastnostiach**. V prípade, že nejaká vlastnosť platí na celom definičnom obore $D(f)$ (t. j. ak $D(f) = A$), potom hovoríme **o globálnej vlastnosti** a prívlastok „na množine $D(f)$“ vynechávame.

Funkcia f sa nazýva **ohraničená zdola** [resp. **ohraničená zhora**], ak existuje číslo $m \in R$ [resp. $M \in R$] také, že pre všetky $x \in D(f)$ platí $m \leq f(x)$ [resp. $f(x) \leq M$].

Funkcia f sa nazýva **ohraničená**, ak je ohraničená zdola a aj zhora na množine, t. j. ak existujú $m, M \in R$ také, že pre všetky $x \in D(f)$ platí $m \leq f(x) \leq M$.

Ak nie je funkcia f ohraničená zdola [resp. zhora], potom sa nazýva **neohraničená zdola** [resp. **zhora**]. Ak funkcia f nie je ohraničená (t. j. nie je ohraničená zdola alebo zhora), potom sa nazýva **neohraničená**.

Príklad 3.1.5.
a) Funkcia $f\colon\ y = x^2 + 1$ je ohraničená zdola a nie je ohraničená zhora.
Na intervale $(0\,;\,1)$ je ohraničená, pretože pre všetky $x \in (0\,;\,1)$ platí $1 < x^2 + 1 < 2$.
b) Funkcia $f\colon\ y = (x^2 + 1)^{-1}$ je ohraničená.
Pre všetky $x \in R$ platí $1 \leq x^2 + 1$, t. j. $0 < (x^2 + 1)^{-1} \leq 1$. ■

Infimum [resp. suprémum] množiny funkčných hodnôt $f(A)$ nazývame **infimum** [resp. **suprémum**] **funkcie** f **na množine** A a označujeme symbolmi $\inf f(A) = \inf\limits_{x \in A} f(x) = \inf\{f(x)\,;\, x \in A\}$ [resp. $\sup f(A) = \sup\limits_{x \in A} f(x) = \sup\{f(x)\,;\, x \in A\}$].

Infimum [resp. suprémum] funkcie f na celom definičnom obore $D(f)$ nazývame **infimum** [resp. **suprémum**] **funkcie** f a označujeme $\inf f(x)$ [resp. $\sup f(x)$].

Poznámka 3.1.8.
Z definície vyplýva, že ak je funkcia f ohraničená zdola [resp. zhora] na množine A, potom $\inf f(A)$ [resp. $\sup f(A)$] je číslo. Ak je funkcia f neohraničená zdola [resp. zhora] na množine A, potom $\inf f(A) = -\infty$ [resp. $\sup f(A) = \infty$].

Ak existuje najmenší [resp. najväčší] prvok množiny funkčných hodnôt $f(A)$, potom ho nazývame **najmenšia hodnota** (**minimálna hodnota, minimum**) [resp. **najväčšia hodnota** (**maximálna hodnota, maximum**)] **funkcie** f **na množine** A a označujeme $\min\limits_{x \in A} f(x) = \min\{f(x)\,;\, x \in A\}$ [resp. $\max\limits_{x \in A} f(x) = \max\{f(x)\,;\, x \in A\}$].

Je zrejmé, že pre aspoň jedno $x_0 \in A$ platí $f(x_0) = \min f(A)$ [resp. $f(x_0) = \min f(A)$]. Ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x_0) \leq f(x)$ [resp. $f(x) \geq f(x_0)$], potom hovoríme, že **funkcia f nadobúda (má) v bode x_0 na množine A minimum** [resp. **maximum**].

Ak platia ostré nerovnosti, t. j. ak pre všetky $x \in A$, $x \neq x_0$ platí $f(x_0) < f(x)$ [resp. $f(x) > f(x_0)$], potom hovoríme, že **funkcia f nadobúda (má) v bode x_0 na množine A ostré minimum** [resp. **ostré maximum**].

Minimum a maximum funkcie f na množine A nazývame súhrnne **(ostré) extrémy funkcie f na množine A**.

Ak $A = D(f)$, potom hovoríme o **globálnych (absolútnych) extrémoch funkcie f** a označujeme ich symbolmi $\min f(x)$, resp. $\max f(x)$.

Ak $A = O(x_0)$, kde $O(x_0) \subset D(f)$ je nejaké okolie, potom hovoríme o **lokálnych extrémoch funkcie f**.

To znamená, že **funkcia f má v bode x_0 lokálne minimum** [resp. **maximum**], ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$ platí $f(x_0) \leq f(x)$ [resp. $f(x_0) \geq f(x)$].

Funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne minimum [resp. **maximum**], ak existuje $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$ platí $f(x_0) < f(x)$ [resp. $f(x_0) > f(x)$].

Poznámka 3.1.9.
Ak existuje $\min \{f(x) ; x \in A\}$, potom $\min \{f(x) ; x \in A\} = \inf \{f(x) ; x \in A\}$.
Ak existuje $\max \{f(x) ; x \in A\}$, potom $\max \{f(x) ; x \in A\} = \sup \{f(x) ; x \in A\}$.

Príklad 3.1.6.
Uvažujme funkciu $f\colon\ y = x^2 + 1$.
Ak $A = D(f)$, potom $\inf f(x) = \min f(x) = 1$, $\sup f(x) = \infty$ a $\max f(x)$ neexistuje.
Ak $A = (0 ; 1)$, potom $\inf\limits_{x \in A} f(x) = 1$, $\sup\limits_{x \in A} f(x) = 2$, $\min\limits_{x \in A} f(x)$ a $\max\limits_{x \in A} f(x)$ neexistujú.
Ak $A = \langle 0 ; 1 \rangle$, potom $\inf\limits_{x \in A} f(x) = \min\limits_{x \in A} f(x) = 1$, $\sup\limits_{x \in A} f(x) = \max\limits_{x \in A} f(x) = 2$. ■

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva **rastúca** [resp. **klesajúca**] **na množine $A \subset D(f)$**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ [resp. $f(x_1) > f(x_2)$].

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva **neklesajúca** [resp. **nerastúca**] **na množine $A \subset D(f)$**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ [resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$].

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva **konštantná na množine $A \subset D(f)$**, ak pre všetky $x_1, x_2 \in A$ platí $f(x_1) = f(x_2)$, t. j. ak existuje $c \in R$ také, že pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = c$. Konštantnú funkciu zjednodušene zapisujeme $f(x) = \text{konšt.}$, špeciálne funkcia $f(x) = 0$, $x \in A$ sa nazýva **nulová funkcia na množine A**.

V zmysle poznámky 3.1.7 sa funkcia f nazýva **rastúca** [resp. **klesajúca**, resp. **neklesajúca**, resp. **nerastúca**], ak pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ [resp. $f(x_1) > f(x_2)$, resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$, resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$]. Ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = c$, kde $c \in R$, potom sa nazýva **konštantná**.

Funkcia f sa nazýva **monotónna**, ak je neklesajúca alebo nerastúca (t. j. aj rastúca, klesajúca alebo konštantná). Ak je funkcia f iba rastúca alebo klesajúca, potom sa nazýva **rýdzo (ostro) monotónna**.

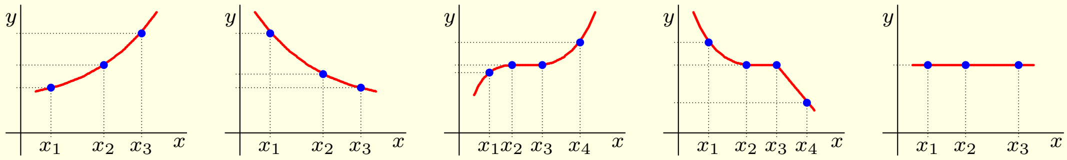
Niekedy je výhodné definovať pojem rastúcej alebo klesajúcej funkcie v bode. Funkcia f sa nazýva **rastúca** [resp. **klesajúca**] **v bode $x_0 \in D(f)$**, ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^-(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$ [resp. $f(x) > f(x_0)$] a pre všetky $x \in O^+(x_0)$ platí $f(x_0) < f(x)$ [resp. $f(x_0) > f(x_0)$].

Funkcia f sa nazýva **neklesajúca** [resp. **nerastúca**] **v bode $x_0 \in D(f)$**, ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^-(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ [resp. $f(x) \geq f(x_0)$] a pre všetky $x \in O^+(x_0)$ platí $f(x_0) \leq f(x)$ [resp. $f(x_0) \geq f(x_0)$].

Z predchádzajúcich definícií vyplýva nasledujúca veta.

Veta 3.1.1.
Funkcia f je rastúca [resp. klesajúca] na otvorenom intervale $(a\,;\,b)$ práve vtedy, ak je rastúca [resp. klesajúca] v každom bode $x_0 \in (a\,;\,b)$.

Na obrázku 3.1.6 sú postupne uvedené grafy rastúcej, klesajúcej, neklesajúcej (ale nie rastúcej), nerastúcej (ale nie klesajúcej) a konštantnej funkcie.



Obr. 3.1.6: Grafy rastúcej, klesajúcej, neklesajúcej, nerastúcej a konštantnej funkcie.

Príklad 3.1.7.
a) Funkcia $f\colon\ y = x + 1$ je rastúca na $D(f) = R$, pretože pre $x_1, x_2 \in R$, $x_1 < x_2$ platí:

$$f(x_1) = x_1 + 1 < x_2 + 1 = f(x_2).$$

b) Funkcia $f\colon\ y = \lfloor x \rfloor$ je neklesajúca na R, konštantná na $\langle k\,;\,k+1)$, $k \in Z$.

c) Funkcia $f\colon\ y = x^2$ je klesajúca na intervale $(-\infty\,;\,0\rangle$ a rastúca na intervale $\langle 0\,;\,\infty)$.

d) Funkcia $f\colon\ y = \frac{x}{x}$ je konštantná na množine $R - \{0\}$. ■

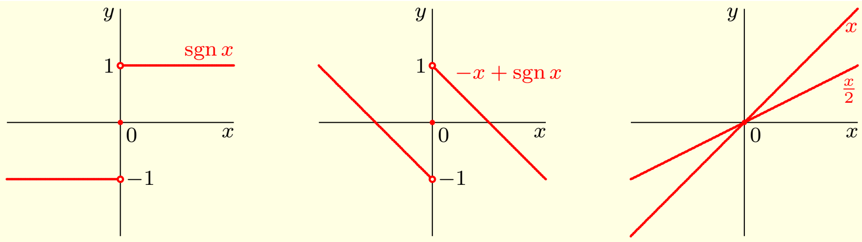
Z predchádzajúcich definícií vyplýva nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu.

Veta 3.1.2.
Nech $y = f(x)$ je funkcia a nech $A \subset D(f)$, potom platí:

a) Funkcia $f =$ konšt. na A práve vtedy, ak je neklesajúca a nerastúca na A.
b) Ak je funkcia f rastúca na A, potom je funkcia f neklesajúca na A.
c) Ak je funkcia f klesajúca na A, potom je funkcia f nerastúca na A.
d) Funkcia f je rastúca na A práve vtedy, ak je neklesajúca na A a na každej podmnožine $B \subset A$ (s aspoň dvomi prvkami) nie je konštantná.
e) Funkcia f je klesajúca na A práve vtedy, ak je nerastúca na A a na každej podmnožine $B \subset A$ (s aspoň dvomi prvkami) nie je konštantná.
f) Ak je funkcia f rastúca na A, potom je rastúca v každom vnútornom bode $x_0 \in A$.
g) Ak je funkcia f klesajúca na A, potom je klesajúca v každom vnútornom bode $x_0 \in A$.

Poznámka 3.1.10.
Tvrdenia f), g) z predchádzajúcej vety neplatia, ak x_0 je hraničný bod množiny A. Dokazuje to napríklad funkcia $f\colon\ y = x^2$, ktorá je klesajúca na intervale $(-\infty\,;\,0\rangle$ a rastúca na intervale $\langle 0\,;\,\infty)$. V bode $x_0 = 0$ nie je funkcia f ani klesajúca, ani rastúca.
Ako dokazuje nasledujúci príklad, ak je funkcia f rastúca [resp. klesajúca] v jednom bode $x_0 \in A$, ešte nemusí byť rastúca [resp. klesajúca] v jeho okolí.

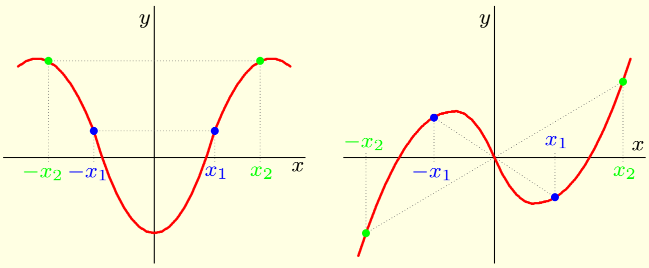
Príklad 3.1.8.
a) Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je rastúca v bode 0, konštantná na $(-\infty\,;\,0)$ a na $(0\,;\,\infty)$.
b) Funkcia $f(x) = -x + \operatorname{sgn} x$ je rastúca v bode 0 a klesajúca na $(-\infty\,;\,0)$ a $(0\,;\,\infty)$.
c) Funkcia $f(x) = x$ pre $x \in Q$, $f(x) = \frac{x}{2}$ pre $x \in R - Q$ je rastúca v bode $x_0 = 0$, je rastúca na množine Q a tiež na množine $R - Q$. Na druhej strane je zrejmé, že neexistuje reálny interval I, na ktorom je f rastúca (obr. 3.1.7). ■



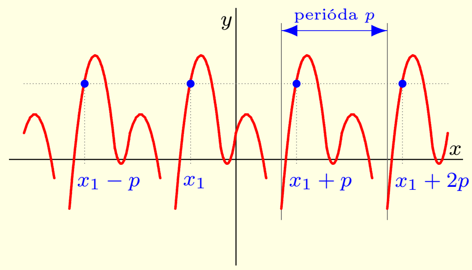
Obr. 3.1.7: Grafy funkcií z príkladu 3.1.8 a), b), c).

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva **párna** [resp. **nepárna**], ak pre všetky $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a navyše $f(x) = f(-x)$ [resp. $f(x) = -f(-x)$].

Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y a graf nepárnej funkcie je súmerný podľa bodu $[0; 0]$, t. j. podľa počiatku súradnicového systému (obrázok 3.1.8).



Obr. 3.1.8: Graf párnej a nepárnej funkcie.



Obr. 3.1.9: Graf periodickej funkcie.

Príklad 3.1.9.
a) Funkcia $y = |x|$ je párna (obr. 2.1.4) a funkcia $y = \operatorname{sgn} x$ je nepárna (obr. 2.1.5).
b) Funkcia $y =$ konšt. je párna a funkcia $y = 0$ je párna a zároveň aj nepárna.
c) Funkcia $y = x^2$, $x \in R$ je párna, ale funkcia $y = x^2$, $x \in \langle 0\,;\,1\rangle$ párna nie je.
d) Funkcie $y = x^{-5}$, $y = x^{-3}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ sú nepárne.
e) Dirichletova funkcia $y = \chi(x)$ je párna. ■

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva **periodická**, ak existuje $p \in R$, $p \neq 0$ také, že $x \in D(f)$ práve vtedy, ak $x + p \in D(f)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x + p) = f(x)$, t.j ak platí:
$$x \in D(f) \iff x + p \in D(f), \qquad \forall x \in D(f)\colon\ f(x + p) = f(x).$$

Číslo p nazývame **perióda funkcie** f (obrázok 3.1.9). Najmenšia kladná perióda (pokiaľ existuje) sa nazýva **primitívna** (**základná**) **perióda funkcie** f.

Poznámka 3.1.11.
Nech $y = f(x)$ je periodická funkcia s periódou p a nech $k \in Z$, $k \neq 0$.
Ľahko sa matematickou indukciou presvedčíme, že aj číslo kp je periódou funkcie f.

Poznámka 3.1.12.
Je dobré si uvedomiť, že ak je funkcia $y = f(x)$ periodická s periódou p (nech $p > 0$), potom ju stačí vyšetrovať na intervale s dĺžkou p, napríklad na intervale $\langle 0\,;\, p)$.
Namiesto tohto intervalu môžeme použiť ľubovoľný interval $\langle a\,;\, a+p)$, resp. $(a\,;\, a+p\rangle$, kde a je ľubovoľné číslo. Každý interval s dĺžkou p nazývame **interval periodicity**.

Príklad 3.1.10.
a) Goniometrické funkcie[6] $y = \sin x$, $y = \cos x$ sú periodické so základnou periódou 2π.

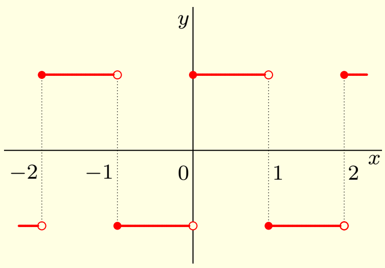
b) Goniometrické funkcie $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$ sú periodické so základnou periódou π.

c) Funkcia $y =$ konšt. je periodická, pričom periódou je každé $p \in R$, $p \neq 0$.
To znamená, že táto funkcia nemá základnú periódu.

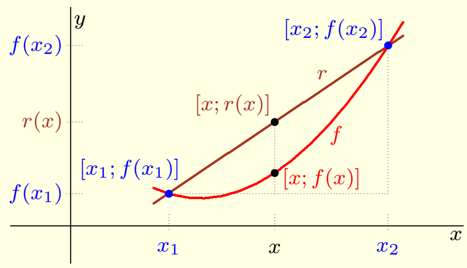
d) Funkcia $y = x - \lfloor x \rfloor$ je periodická s periódou 1 (str. 58, obr. 2.1.2).

e) Dirichletova funkcia χ je periodická, pričom periódou je každé $p \in Q$, $p \neq 0$. ∎

Príklad 3.1.11.
Funkcia $y = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ je periodická so základnou periódou 2 (obr. 3.1.10). Pre $x \in R$ platí:
$$f(x+2) = (-1)^{\lfloor x+2 \rfloor} = (-1)^{\lfloor x \rfloor + 2} = (-1)^{\lfloor x \rfloor} \cdot (-1)^2 = (-1)^{\lfloor x \rfloor} = f(x).$$ ∎



Obr. 3.1.10: Funkcia $y=(-1)^{\lfloor x \rfloor}$.



Obr. 3.1.11: Konvexná funkcia.

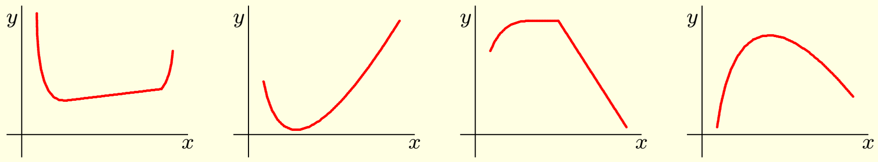
Funkcia f sa nazýva **konvexná** [resp. **konkávna**] **na intervale** $I \subset D(f)$, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$ také, že $x_1 < x < x_2$ platí:
$$f(x) \leq r(x) = \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) + \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) \quad [\text{resp.}\ \ f(x) \geq r(x)]. \tag{3.4}$$
Ak platia ostré nerovnosti, t. j. ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí:
$$f(x) < r(x) = \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) + \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) \quad [\text{resp.}\ \ f(x) > r(x)], \tag{3.5}$$
potom funkciu f nazývame **rýdzo konvexná** [resp. **rýdzo konkávna**] **na intervale** I.

Funkcia f sa nazýva **rýdzo konvexná** [resp. **rýdzo konkávna**] **v bode** $x_0 \in D(f)$, ak existuje okolie $O(x_0)$, v ktorom je funkcia f rýdzo konvexná [resp. **rýdzo konkávna**].

[6] Bližšie sa im venujeme v nasledujúcej časti.

Hovoríme, že funkcia f **má v bode** $x_0 \in D(f)$ **inflexný bod** (**má v bode** x_0 **inflexiu**), ak existuje okolie $O(x_0)$ také, že v ľavom okolí $O^-(x_0)$ je funkcia f rýdzo konvexná [resp. rýdzo konkávna] a v pravom okolí $O^+(x_0)$ rýdzo konkávna [resp. rýdzo konvexná].

Na obrázku 3.1.12 sú postupne uvedené grafy konvexnej (nie však rýdzo), rýdzo konvexnej, konkávnej (nie rýdzo) a rýdzo konkávnej funkcie.



Obr. 3.1.12: Grafy konvexnej, rýdzo konvexnej, konkávnej a rýdzo konkávnej funkcie.

Poznámka 3.1.13.
Vzťah $f(x) \leq r(x)$ [resp. $f(x) \geq r(x)$] graficky (obrázok 3.1.11) znamená, že každý bod $[x; f(x)]$ leží pod [resp. nad] priamkou r určenou bodmi $[x_1; f(x_1)]$, $[x_2; f(x_2)]$, t. j. rovnicou (príklad 3.1.4):

$$r(x) = \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x + \tfrac{f(x_1)x_2-f(x_2)x_1}{x_2-x_1} = \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) + \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1).$$

Veta 3.1.3.
Funkcia f je konvexná [resp. konkávna] na intervale $I \subset D(f)$ práve vtedy, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí:

$$\tfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leq \tfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad \left[\text{resp. } \tfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \geq \tfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right]. \tag{3.6}$$

Funkcia f je rýdzo konvexná [resp. rýdzo konkávna] na intervale $I \subset D(f)$ práve vtedy, ak pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí:

$$\tfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} < \tfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad \left[\text{resp. } \tfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} > \tfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right]. \tag{3.7}$$

Dôkaz.
Vetu dokážeme pre konvexnú funkciu, dôkaz pre ostatné funkcie je analogický.

$NP_{\Rightarrow}$: Zo vzťahu (3.4) vyplýva, že pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí:

$$0 \leq \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) + \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) - f(x) = \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) + \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) - \tfrac{x_2-x_1}{x_2-x_1}f(x).$$

Po vynásobení výrazom $x_2 - x_1 > 0$ a roznásobení dostaneme nerovnosť

$$0 \leq xf(x_2) - x_1f(x_2) + x_2f(x_1) - xf(x_1) - x_2f(x) + x_1f(x). \tag{3.8}$$

$PP_{\Leftarrow}$: Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ platí:

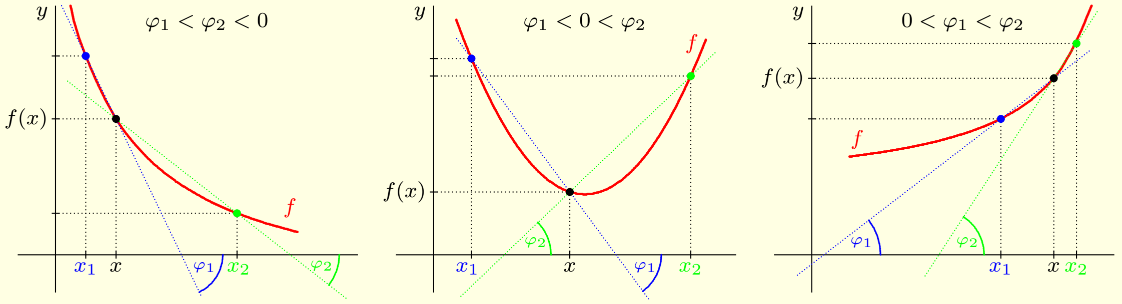
$$0 \leq \tfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} - \tfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = \tfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} - \tfrac{f(x)-f(x-1)}{x-x_1}.$$

Po vynásobení výrazmi $x_2 - x > 0$, $x - x_1 > 0$ dostaneme tiež nerovnosť (3.8)

$$\begin{aligned} 0 \leq (x-x_1)[f(x_2)-f(x)] - (x_2-x)[f(x)-f(x_1)] = \\ = xf(x_2) - xf(x) - x_1f(x_2) + x_1f(x) - x_2f(x) + x_2f(x_1) + xf(x) - xf(x_1) = \\ = xf(x_2) - x_1f(x_2) + x_1f(x) - x_2f(x) + x_2f(x_1) - xf(x_1). \end{aligned}$$

Všetky úpravy, ktoré sme použili v $NP_{\Rightarrow}$ a $PP_{\Leftarrow}$ sú ekvivalentné.
To znamená, že vzťahy (3.4) a (3.6) sú navzájom ekvivalentné a veta je dokázaná. ■

Poznámka 3.1.14.
Z geometrického hľadiska predstavujú podiely $\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$, $i=1,2$ smernice priamok r_i, ktoré prechádzajú bodmi $[x; f(x)]$ a $[x_i; f(x_i)]$, $i=1,2$.
To znamená, že v prípade konvexnej [resp. rýdzo konvexnej] funkcie sa smernica priamky r_i (a tým pádom aj uhol φ_i, ktorý zviera s osou x) nezmenší [resp. zväčší] pre $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ (obrázok 3.1.13). V prípade konkávnej [resp. rýdzo konkávnej] funkcie sa naopak smernica priamky r_i nezväčší [resp. zmenší] pre $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$.



Obr. 3.1.13: Príklady konvexných funkcií z poznámky 3.1.14.

Dôsledok 3.1.3.a.
Ak je funkcia f konvexná [resp. konkávna] na intervale $I \subset D(f)$, potom pre všetky $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, $x_1 \neq x \neq x_2$ platí:

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad \left[\text{resp. } \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \geq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right].$$

Ak je funkcia f rýdzo konvexná [resp. rýdzo konkávna], potom platia ostré nerovnosti.

Dôkaz.
Tvrdenie dokážeme pre konvexnú funkciu (dôkaz pre konkávnu, rýdzo konvexnú, rýdzo konkávnu funkciu je analogický). Pre polohu bodov x, x_1, x_2 môžu nastať tri prípady.

a) Ak $x_1 < x < x_2$, potom je dané tvrdenie rovnaké ako tvrdenie vety 3.1.3.

b) Ak $x < x_1 < x_2$, potom z vety 3.1.3 vyplýva, že platí:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \qquad \text{t. j. } \ 0 \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}.$$

Po vynásobení výrazmi $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 - x > 0$ a roznásobení dostaneme

$$0 \leq (x_1-x)[f(x_2)-f(x_1)] - (x_2-x_1)[f(x_1)-f(x)] =$$
$$= x_1f(x_2) - x_1f(x_1) - xf(x_2) + xf(x_1) - x_2f(x_1) + x_2f(x) + x_1f(x_1) - x_1f(x),$$

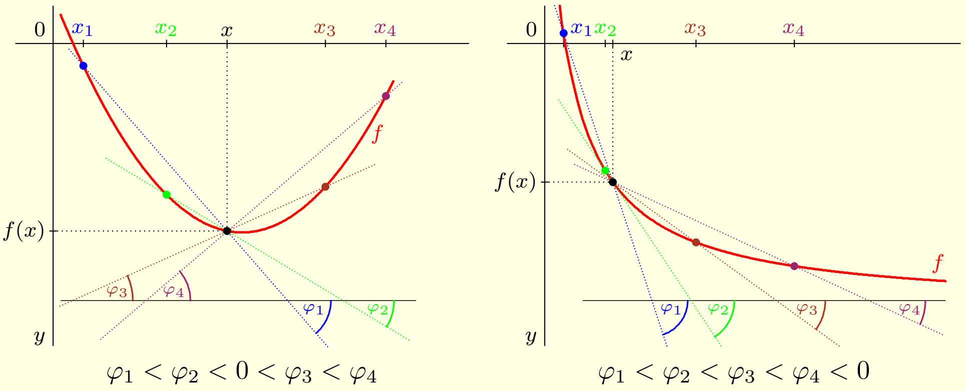
pričom výraz $x_1f(x_1) - x_1f(x_1)$ sa vynuluje. Po pripočítaní $xf(x) - xf(x)$ a zmenení poradia jednotlivých členov na pravej strane predchádzajúceho výrazu dostaneme

$$0 \leq x_1f(x_2) - x_1f(x) - xf(x_2) + xf(x) - x_2f(x_1) + x_2f(x) + xf(x_1) - xf(x) =$$
$$= (x_1-x)[f(x_2)-f(x)] - (x_2-x)[f(x_1)-f(x)].$$

Po vydelení výrazmi $x_1 - x > 0$, $x_2 - x > 0$, dostaneme dokazovanú nerovnosť.

c) Pre $x_1 < x_2 < x$ je dôkaz rovnaký ako v časti b). ■

Poznámka 3.1.15.
Z predchádzajúceho dôsledku vyplýva, že nerovnosti (3.6), resp. (3.7) nezávisia na polohe bodu $x \in I$ a platia pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, $x_1 \neq x$, $x_2 \neq x$.
Geometrická interpretácia je analogická ako pri poznámke 3.1.14. V prípade konvexnej [resp. rýdzo konvexnej] funkcie (obrázok 3.1.14) sa smernica priamky r_i nezmenšuje [resp. zväčšuje] pre ľubovoľné $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots$ a v prípade konkávnej [resp. rýdzo konkávnej] funkcie sa naopak smernica priamky r_i nezväčšuje [resp. zmenšuje].



Obr. 3.1.14: Príklady konvexých funkcií z poznámky 3.1.15.

Príklad 3.1.12.
a) Funkcia $y = \sin x$ je rýdzo konkávna na $\langle 0\,;\, \pi \rangle$ a rýdzo konvexná na $\langle \pi\,;\, 2\pi \rangle$.

b) Funkcia $y = x^2$ je rýdzo konvexná na R a funkcia $y = -x^2$ je rýdzo konkávna na R.

c) Funkcia $y =$ konšt. je konvexná (nie rýdzo) a konkávna (nie rýdzo) na R.

d) Funkcia $y = ax + b$ je konvexná aj konkávna na R pre všetky $a, b \in R$. ■

Veta 3.1.4.
Funkcia $y = f(x)$ je konvexná [resp. konkávna] na intervale $I \subset D(f)$ práve, vtedy ak pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ a pre všetky $p \in R$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ platí:
$$f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2) \quad [\text{resp.} \quad f(px_1 + qx_2) \geq pf(x_1) + qf(x_2)].$$

Dôkaz.
Vetu dokážeme iba pre konvexnosť, pre konkávnosť sa dokáže analogicky.

NP$_\Rightarrow$: Nech $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Potom pre všetky $p \in (0\,;\, 1)$, $q = 1 - p$ existuje $x \in (x_1\,;\, x_2)$ také, že
$$p = \tfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \qquad q = 1 - p = \tfrac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} - \tfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \tfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$
Potom platí:
$$px_1 + qx_2 = \tfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \tfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 = \tfrac{x_2 x_1 - x x_1 + x x_2 - x_1 x_2}{x_2 - x_1} = \tfrac{x(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x.$$
Takže $x_1 < px_1 + (1 - p)x_2 < x_2$. Potom z konvexnosti vyplýva:
$$f(px_1 + qx_2) = f(x) \leq \tfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + \tfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) = qf(x_2) + pf(x_1).$$
PP$_\Leftarrow$: Nech $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, $p \in (0\,;\, 1)$, $q = 1 - p$. Označme $x = px_1 + qx_2$, potom platí:
$$x_1 < x_1 + q(x_2 - x_1) = (1 - q)x_1 + qx_2 = px_1 + (1 - p)x_2 = x_2 + p(x_1 - x_2) < x_2.$$

To znamená, že $px_1 + (1-p)x_2 = x \in (x_1\,;\,x_2)$. Z toho vyplýva:

$$\left.\begin{array}{l} x = (1-q)x_1 + qx_2 = x_1 + q(x_2 - x_1) \\ x = px_1 + (1-p)x_2 = x_2 - p(x_2 - x_1) \end{array}\right\} \implies p = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad q = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Potom platí $f(x) = f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$. ■

Hovoríme, že bod $c \in D(f)$ je **nulový bod (koreň) funkcie** $y = f(x)$, ak platí $f(c) = 0$. Korene funkcie f nájdeme riešením rovnice $f(x) = 0$, $x \in D(f)$.

Príklad 3.1.13.
a) Funkcie $y = |x|$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^2 + x^4$ majú jediný koreň $c = 0$.

b) Dirichletova funkcia $\chi(x)$ má nekonečne veľa koreňov, sú to všetky iracionálne čísla.

c) Funkcia $y = x^2 + 2$ nemá koreň, pretože pre všetky $x \in R$ platí $x^2 + 2 \geq 2 > 0$. ■

3.1.2 Operácie s funkciami

Funkcie sú množiny, ktorých prvkami sú usporiadané dvojice vzorov x a obrazov $f(x)$. Takže aj relácie a operácie s funkciami musíme chápať ako relácie a operácie s množinami.

- **Rovnosť a usporiadanie funkcií**

Rovnosť funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$ predstavuje rovnosť dvoch množín. To znamená, že musia byť ekvivalentné vzťahy $[x; y] \in f$ a $[x; y] \in g$. Potom musí platiť $D(f) = D(g)$ a $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in D(f)$.

Hovoríme, že **funkcia** $y = f(x)$ **sa rovná funkcii** $y = g(x)$, ak $D(f) = D(g)$ a pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$. Rovnosť funkcií f a g symbolicky zapisujeme $f = g$. V opačnom prípade hovoríme, že **funkcia** f **sa nerovná funkcii** g a zapisujeme $f \neq g$.

Funkcie $y = f(x)$, $y = g(x)$ sa nemusia rovnať na celom svojom definičnom obore, môžu sa rovnať iba na jeho časti. Nech $A \subset D(f) \cap D(g)$. Hovoríme, že **funkcia** f **sa rovná funkcii** g **na množine** A, ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = g(x)$. Zapisujeme $f = g$, $x \in A$, resp. $f = g$ na množine A.

Príklad 3.1.14.
Nech $f\colon\ y = 1$, $g\colon\ y = \frac{x}{x}$, potom $f \neq g$, pretože $R = D(f) \neq D(g) = R - \{0\}$.
Keďže pre všetky $x \neq 0$ platí $1 = \frac{x}{x}$, potom $f = g$ na množine $R - \{0\}$. ■

Nech množina $A \subset D(f) \cap D(g)$. Hovoríme, že **funkcia** f **je menšia** [resp. **väčšia**] **ako funkcia** g **na množine** A, ak pre všetky $x \in A$ platí $f(x) < g(x)$ [resp. $f(x) > g(x)$]. Zapisujeme $f < g$ [resp. $f > g$], $x \in A$ alebo $f < g$ [resp. $f > g$] na množine A.

Ak pripustíme aj rovnosť funkcií f, g na množine A, potom stručne píšeme $f \leq g$ [resp. $f \geq g$], $x \in A$.

Príklad 3.1.15.
Nech $f\colon\ y = x$, $g\colon\ y = x^2$. Na množine R neplatí ani jedna z relácií $f < g$, $f = g$, $f > g$. Ale $f < g$ na množine $R - \langle 0\,;\,1\rangle$, $f = g$ na množine $\{0, 1\}$, $f > g$ na množine $(0\,;\,1)$. ■

Poznámka 3.1.16.
Z príkladu 3.1.15 vyplýva, že vo všeobecnosti nemôžeme porovnávať funkcie f, g.[7] Je ale zrejmé, že môžeme určiť množiny, na ktorých platia relácie $f < g$, $f = g$ alebo $f > g$.

[7] V takomto prípade hovoríme o čiastočnom usporiadaní menší $<$ na množine všetkých funkcií.

- **Algebraické operácie s funkciami**

Funkcie môžeme sčítavať, odčítavať, násobiť a deliť. Nech $y = f(x)$, $y = g(x)$ sú funkcie definované na množine $A \subset R$, potom **súčet** $f + g$, **rozdiel** $f - g$, **súčin** fg, **podiel** $\frac{f}{g}$, kde $g(x) \neq 0$ pre $x \in A$, **funkcií** f **a** g **na množine** A definujeme vzťahmi:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in A.$$

Absolútnu hodnotu $|f|$ **funkcie** f **na množine** A definujeme $|f|(x) = |f(x)|$, $x \in A$.

Poznámka 3.1.17.
Operácie sčítania a násobenia funkcií môžeme definovať pre viac funkcií. Špeciálne pre $n \in N$ definujeme n**-tú mocninu** f^n **funkcie** f vzťahom $f^n(x) = [f(x)]^n$.

Príklad 3.1.16.
Nech $f\colon\ y = \sin x + 2$, $g\colon\ y = x^2$, potom

$$f \pm g\colon\ y = \sin x + 2 \pm x^2, \quad fg\colon\ y = x^2 \sin x + 2x^2, \quad \frac{g}{f}\colon\ y = \frac{x^2}{\sin x + 2}. \ \blacksquare$$

- **Zúženie funkcie na množinu**

Uvažujme funkciu $y = f(x)$, $x \in D(f)$ a množinu $A \subset D(f)$. Hovoríme, že funkcia $y = h(x)$, $x \in A$ je **zúžením (reštrikciou) funkcie** f **na množinu** A, ak pre všetky $x \in A$ platí $h(x) = f(x)$. Označujeme $h = f|_A$.

Je zrejmé, že graf funkcie h je časťou grafu f. Zúženie funkcie na množinu vykonávame napríklad vtedy, ak máme viac funkcií a chceme z nich pomocou algebraických operácií tvoriť ďalšie funkcie, alebo nás zaujíma chovanie nejakej funkcie iba na danej množine.

Príklad 3.1.17.
a) Funkcia $y = x^2$, $x \in \langle -1\,;\, 1)$ je zúžením funkcie $y = x^2$, $x \in R$ na interval $\langle -1\,;\, 1\rangle$.

b) Funkcia $y = 1$, $x \in Q$ je zúžením Dirichletovej funkcie $\chi(x)$, $x \in R$ na množinu Q.

c) Funkcia $y = 0$, $x \in \langle 0\,;\, 1)$ je zúžením funkcie $y = \lfloor x \rfloor$, $x \in R$ na interval $\langle 0\,;\, 1)$. $\blacksquare$

- **Zložená a inverzná funkcia**

Ďalšia dôležitá operácia je **skladanie funkcií** a s tým súvisiaci pojem **zloženej funkcie** (**zloženého zobrazenia**), ktorý sme už definovali v kapitole 1.

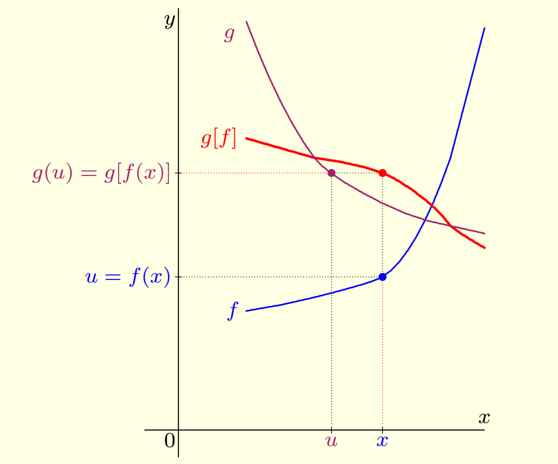
Nech $y = f(x)$, $x \in A$ a $y = g(x)$, $x \in B$ sú funkcie také, že $H(f) \subset B$. Potom funkcia $y = F(x)$, $x \in A$ definovaná pre všetky $x \in A$ vzťahom $F(x) = g[f(x)]$, sa nazýva **zložená funkcia** f **a** g a označuje sa $g(f)$, resp. $f \circ g$. Funkcia f sa nazýva **vnútorná zložka** (**vnútorná funkcia**) a funkcia g sa nazýva **vonkajšia zložka** (**vonkajšia funkcia**) zloženej funkcie. Skladanie dvoch funkcií je ilustrované na obrázku 3.1.15.

Ak sú funkcie f, g zadané analyticky $u = f(x)$, $y = g(u)$, $H(f) \subset D(g)$, potom vzorec pre zloženú funkciu $g(f)$ dostaneme tak, že vo výraze $y = g(u)$ dosadíme za premennú u výraz $f(x)$. Hovoríme, že **vykonávame substitúciu premennej** u **výrazom** $f(x)$.

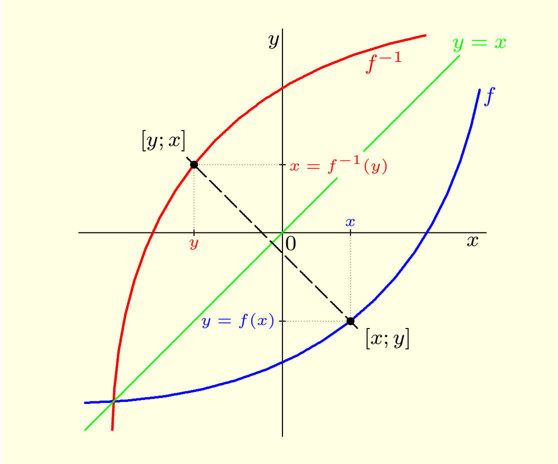
Príklad 3.1.18.
Nech $f\colon\ y = x^2$, $g\colon\ y = \sin x$. Nájdite zložené funkcie $f(g)$ a $g(f)$.

Riešenie.
Keďže $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0\,;\, \infty)$, $D(g) = R$, $H(g) = \langle -1\,;\, 1\rangle$, potom

$$f(g)\colon\ y = f[g(x)] = [g(x)]^2 = (\sin x)^2 = \sin^2 x, \quad g(f)\colon\ y = g[f(x)] = \sin f(x) = \sin x^2. \ \blacksquare$$



Obr. 3.1.15: Graf zloženej funkcie.



Obr. 3.1.16: Graf inverznej funkcie.

Poznámka 3.1.18.
V mnohých prípadoch potrebujeme danú funkciu, ktorú považujeme za zloženú, rozložiť na vnútornú a vonkajšiu zložku. Takýto rozklad väčšinou nebýva jednoznačný, preto ho musíme prispôsobiť našim možnostiam a daným požiadavkám.

Príklad 3.1.19.
Funkciu $F\colon\ y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$ môžeme považovať za zloženú funkciu $F = g(f)$, pričom platí $f\colon\ y = 1 - x^2$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$, $g\colon\ y = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0\,;\,\infty)$. ■

Predpokladajme, že je $y = f(x)$, $x \in D(f)$ injektívna, t. j. pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$. To znamená, že $y = f(x)\colon\ D(f) \to H(f)$ je bijektívna.[8]

Potom k f existuje **inverzná funkcia** $x = f^{-1}(y)$, $y \in H(f)$ taká, že $x = f^{-1}(y)$ práve vtedy, ak $y = f(x)$. Je zrejmé, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$.

Keďže sa usporiadané dvojice $[x; y] \in f$ a $[y; x] \in f^{-1}$ líšia iba poradím prvkov, sú grafy funkcie f a inverznej funkcie f^{-1} osovo súmerné podľa priamky $y = x$ (obrázok 3.1.16).

Poznámka 3.1.19.
Už sme spomínali, že funkcia je špeciálnym prípadom zobrazenia. Takže výsledky, ktoré sme odvodili v kapitole 1 pre inverzné zobrazenia, platia aj pre reálne funkcie reálnej premennej. To znamená, že platia tvrdenia vety 1.3.6:

Nech je funkcia $f\colon\ D(f) \to H(f)$ je bijektívna, potom platí:

a) $f^{-1}\colon\ H(f) \to D(f)$ je bijektívna,
b) $(f^{-1})^{-1} = f$,
c) $\forall y \in D(f^{-1}) = H(f)\colon\ f[f^{-1}(y)] = y$,
d) $\forall x \in H(f^{-1}) = D(f)\colon\ f^{-1}[f(x)] = x$.

V niektorých prípadoch, keď je funkcia f zadaná jednoduchými vzťahmi, dokážeme inverznú funkciu f^{-1} určiť bez problémov. Napríklad, ak je zadaná nie príliž zložitým analytickým vzorcom $y = f(x)$, vypočítame funkciu $x = f^{-1}(y)$ tak, že riešime rovnicu $y = f(x)$ vzhľadom k neznámej x.

Spravidla sa dodržiava dohoda, že argument funkcie f a inverznej funkcie f^{-1} značíme rovnakým symbolom. Preto namiesto $x = f^{-1}(y)$ píšeme $y = f^{-1}(x)$.

[8] Surjektívnosť je zaručená existenciou vzoru pre každý obraz z množiny $H(f)$.

Príklad 3.1.20.
Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f\colon\ y = 3x + 2,\ x \in R$.

Riešenie.
Je zrejmé, že funkcia f je prostá. Ak riešime rovnicu $y = 3x + 2$ vzhľadom k x, dostaneme $x = \frac{y-2}{3}$. Z toho vyplýva $f^{-1}\colon\ y = \frac{x-2}{3},\ x \in R$. ■

Príklad 3.1.21.
Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f\colon\ y = x^5 + x^3 + 1,\ x \in R$.

Riešenie.
Funkcia f je prostá na R. Dokážeme sporom.
Nech $x_1, x_2 \in R$, $x_1 \neq x_2$ sú také, že
$$x_1^5 + x_1^3 + 1 = f(x_1) = f(x_2) = x_2^5 + x_2^3 + 1, \quad \text{t. j.}\ \ x_1^5 + x_1^3 = x_2^5 + x_2^3.$$
Potom čísla x_1 a x_2 majú rovnaké znamienko. Obe sú kladné alebo sú obe záporné, t. j. $x_1x_2 > 0$. Možnosť $x_1 = x_2 = 0$ je vylúčená, pretože $x_1 \neq x_2$. Z toho vyplýva:
$$x_1^5 - x_2^5 = x_2^3 - x_1^3,$$
$$(x_1 - x_2)(x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4) = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2),$$
$$-(x_1^4 + x_1^2\,x_1x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2\,x_2^2 + x_2^4) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$
Posledná rovnosť nemôže nikdy nastať, pretože ľavá strana je vždy záporná a pravá strana je vždy kladná. To je spor, ktorý dokazuje, že funkcia f je prostá na R.
To znamená, že existuje inverzná funkcia $f^{-1} = \{[y; x]\ ;\ y = x^5 + x^3 + 1,\ x \in R\}$. Avšak s jej analytickým vyjadrením sú „mierne" problémy. ■

Poznámka 3.1.20.
Nech $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$ je parametrické vyjadrenie funkcie f. Ak je φ prostá na J, potom existuje inverzná funkcia $t = \varphi^{-1}(x)$ a f môžeme vyjadriť v explicitnom tvare
$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),\ \ x \in \varphi(J).$$
Tento prechod k explicitnému vyjadreniu nazývame **vylúčenie parametra** t.

Veta 3.1.5.
Ak je funkcia f rýdzo monotónna, potom je prostá.

Dôkaz.
Dôkaz je zrejmý a vyplýva priamo z definície. ■

Poznámka 3.1.21.
Ako dokazuje príklad 3.1.22, funkcia f môže byť prostá a nemusí byť rýdzo monotónna. To znamená, že tvrdenie vety 3.1.5 nemôžeme obrátiť.

Veta 3.1.6.
Ak je funkcia f rastúca [resp. klesajúca], potom f^{-1} je tiež rastúca [resp. klesajúca].

Dôkaz.
Nech $y = f(x)$, $x \in D(f)$ je rastúca (pre klesajúcu funkciu je dôkaz analogický).
Potom pre všetky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ platí $y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$. Potom (veta 3.1.5) je f prostá, t. j. existuje funkcia $x = f^{-1}(y)$, $y \in D(f^{-1}) = H(f)$.

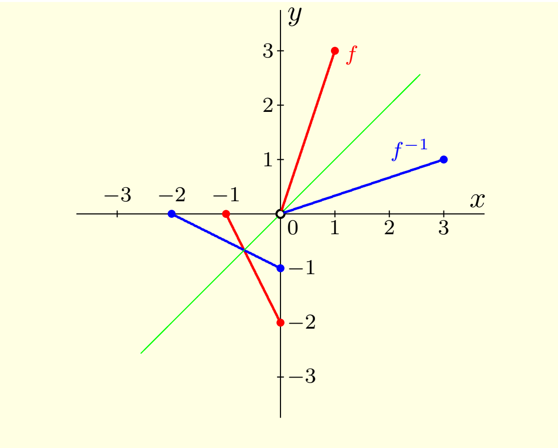
Nech f^{-1} nie je rastúca, t. j. existujú $y_1, y_2 \in D(f^{-1})$, $y_2 < y_1$ také, že platí:

$$x_2 = f^{-1}(y_2) \geq f^{-1}(y_1) = x_1.$$

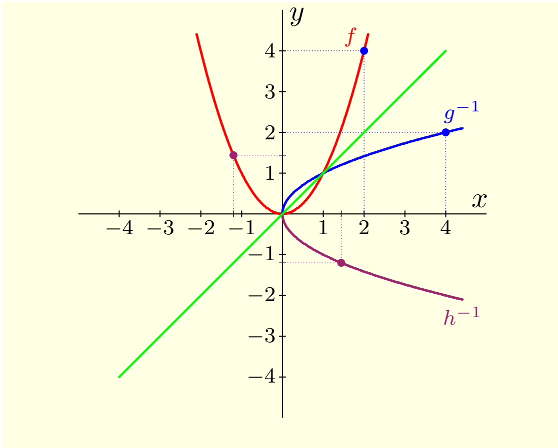
Pretože je f^{-1} prostá, platí $x_2 = f^{-1}(y_2) > f^{-1}(y_1) = x_1$.
To znamená, že pre $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) = y_1 > y_2 = f(x_2)$, čo je spor.
Z toho vyplýva, že aj funkcia f^{-1} je rastúca (obr. 3.1.16). ■

Príklad 3.1.22.
Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f\colon\ y = \begin{cases} 2x+2, & \text{pre } x \in \langle -1\,;\,0\rangle\,, \\ 3x+3, & \text{pre } x \in (0\,;\,1\rangle\,. \end{cases}$

Riešenie.
Funkcia f je prostá a nie je rýdzo monotónna na $D(f) = \langle -1\,;\,1\rangle$.
Na intervale $\langle -1\,;\,0\rangle$ je klesajúca a na intervale $(0\,;\,1\rangle$ je rastúca (obr. 3.1.17).
Ľahko overíme, že $f^{-1}\colon\ y = \begin{cases} \frac{x}{2} - 1, & \text{pre } x \in \langle 0\,;\,2\rangle\,, \\ \frac{x}{3} - 1, & \text{pre } x \in (3\,;\,6\rangle\,. \end{cases}$ ■



Obr. 3.1.17: Graf k príkladu 3.1.22.



Obr. 3.1.18: Graf k príkladu 3.1.23.

Poznámka 3.1.22.
Často sa stáva, že funkcia f nie je prostá na celom definičnom obore $D(f)$, ale je prostá iba na nejakej časti $A \subset D(f)$. V tomto prípade môžeme utvoriť reštrikciu $g = f|_A$, ku ktorej inverzná funkcia g^{-1} existuje. Funkciu g^{-1} potom nazývame **inverznou funkciou k funkcii f na množine** A.

Príklad 3.1.23.
Funkcia $f\colon\ y = x^2$, $x \in R$ nie je prostá, ale je prostá na intervaloch $(-\infty\,;\,0\rangle$, $\langle 0\,;\,\infty)$.
Funkcia $g = f|_{(-\infty\,;\,0\rangle}$ má inverznú funkciu $g^{-1} = -\sqrt{x}$, $x \in \langle 0\,;\,\infty)$ a funkcia $h = f|_{\langle 0\,;\,\infty)}$ má inverznú funkciu $h^{-1} = \sqrt{x}$, $x \in \langle 0\,;\,\infty)$ (obr. 3.1.18). ■

3.1.3 Elementárne funkcie

Predmetom štúdia matematickej analýzy reálnych funkcií reálnej premennej sú funkcie a ich vlastnosti. Niektoré vlastnosti sme už definovali a k niektorým sa postupne dopracujeme. Vychádzame pritom z malého počtu funkcií (zadaných pomerne jednoduchým spôsobom), ktoré nazývame elementárne.

Elementárne funkcie majú veľký praktický význam, pretože sa pomocou nich dajú popísať (aspoň približne) mnohé prírodné a spoločenské zákonitosti a taktiež mnohé veľmi zložité funkcie.

Elementárnou funkciou nazývame každú funkciu, ktorú dokážeme utvoriť z funkcií

$$y = \text{konšt.},\quad y = x,\quad y = e^x,\quad y = \ln x,\quad y = \sin x,\quad y = \arcsin x,\quad y = \operatorname{arctg} x$$

pomocou sčítania, odčítania, násobenia, delenia a skladania funkcií.

- **Racionálna celistvá funkcia**

Polynómom (racionálnou celistvou funkciou)[9] nazývame funkciu

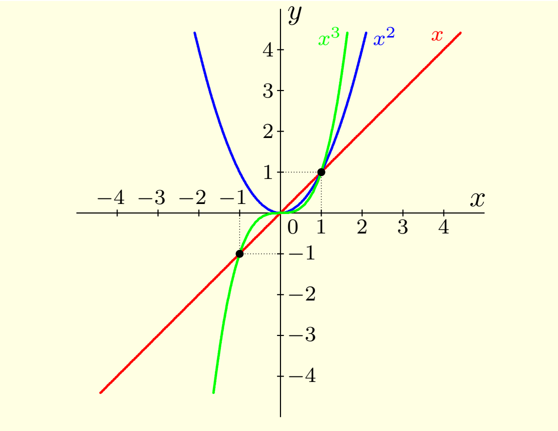
$$f_n\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \qquad \text{kde}\ \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in R,\ n \in N \cup \{0\}\,.$$

Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazývame **koeficienty polynómu** f_n. Ak $a_n \neq 0$, potom n nazývame **stupeň polynómu** f_n. Prirodzeným definičným oborom polynómu f_n je množina R.

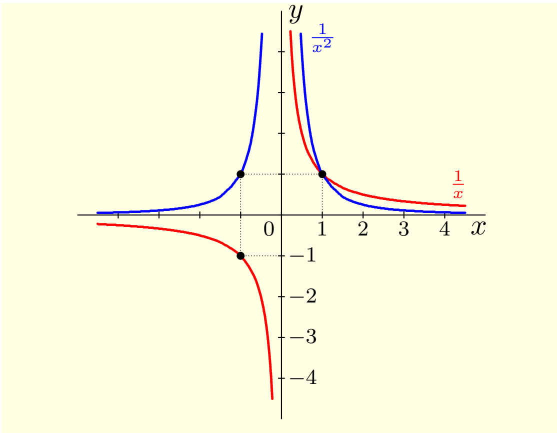
Polynóm druhého stupňa $f_2\colon\ y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ sa nazýva **kvadratická funkcia** a polynóm prvého stupňa $f_1\colon\ y = a_0 + a_1x$, $a_1 \neq 0$ sa nazýva **lineárna funkcia**. Polynómom nultého stupňa $f_0\colon\ y = a_0$, $a_0 \neq 0$ je **konštantná funkcia**.

Polynóm $f\colon\ y = 0$ predstavuje **nulovú funkciu** a jeho stupeň definujeme -1.

Z algebry vieme, že polynóm f_n stupňa n $(n \in N)$ má najviac n koreňov v množine reálnych čísel R.[10] Polynóm nultého stupňa, t. j. $f_0\colon\ y = a_0$, $a_0 \neq 0$ korene nemá a korene nulovej funkcie $f\colon\ y = 0$ sú všetky $x \in D(f)$.



Obr. 3.1.19: $f\colon\ y = x^n$, $n = 1, 2, 3$.



Obr. 3.1.20: $f\colon\ y = \frac{1}{x^n}$, $n = 1, 2$.

Príklad 3.1.24.

Funkcia $f_n\colon\ y = x^n$, $n \in N$ je definovaná pre všetky $x \in R$.

Jej grafom je tzv. **parabola stupňa** n. Pre $n = 1$ je to priamka a pre $n = 2$ je to parabola. Funkcia f_n má pre všetky $n \in N$ práve jeden nulový bod $x = 0$.

Na základe vety 2.1.37 môžeme odvodiť aj niektoré ďalšie vlastnosti funkcie f.

Pre n párne je funkcia f párna, klesajúca na intervale $(-\infty\,;\,0\rangle$ a rastúca na intervale $\langle 0\,;\,\infty)$. Oborom hodnôt je množina $\langle 0\,;\,\infty)$.

Pre n nepárne je funkcia f nepárna, rastúca na intervale $(-\infty\,;\,\infty) = R$. Oborom hodnôt je množina R (obr. 3.1.19). ■

[9] Viac informácií o polynómoch čitateľ nájde v [32].

[10] V množine komplexných čísel C má práve n koreňov (vrátane násobnosti).

Príklad 3.1.25.
Funkcia $f\colon\ y = x^3 - 2x^2$ má nulové body $x_{1,2} = 0$ (dvojnásobný) a $x_3 = 2$.
Jej graf je načrtnutý na obrázku 3.1.21. ■

- **Racionálna lomená funkcia**

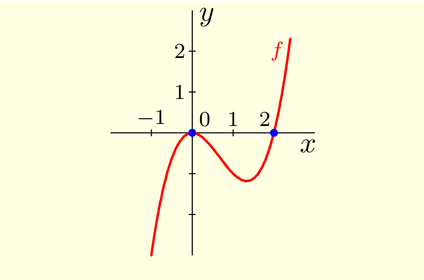
  Racionálnou lomenou funkciou nazývame funkciu

$$f\colon\ y = \frac{f_n(x)}{f_m(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+b_mx^m},$$

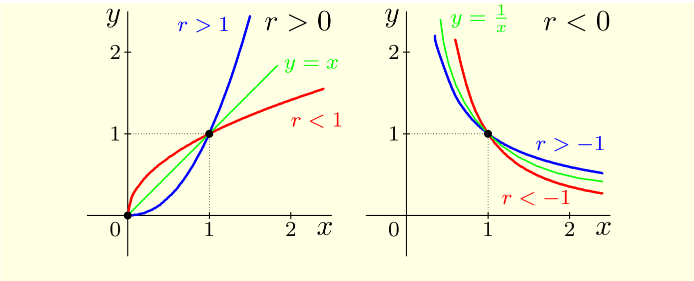
kde f_n, f_m sú polynómy stupňov n a m, pričom $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $b_0, b_1, \ldots, b_m \in R$, $n, m \in N - \{0\}$. Aby mala f zmysel, musí mať nenulový menovateľ. To znamená, že jej prirodzeným definičným oborom je množina R okrem nulových bodov polynómu f_m.

Poznámka 3.1.23.
Racionálna celistvá funkcia je špeciálnym prípadom racionálnej lomenej funkcie.
Stačí položiť $f_m\colon\ y = b_0$, $b_0 \neq 0$ vo vyjadrení racionálnej lomenej funkcie f.

Príklad 3.1.26.
Funkcia $f\colon\ y = x^{-n}$, $n \in N$ je definovaná pre všetky $x \in R - \{0\}$.
Jej grafom je tzv. **hyperbola stupňa** $n+1$. Funkcia f nemá nulový bod (obr. 3.1.20).
Pre n párne je f párna, rastúca na $(-\infty\,;\,0\rangle$, klesajúca na $\langle 0\,;\,\infty)$, $H(f) = (0\,;\,\infty)$.
Pre n nepárne je f nepárna, klesajúca na $(-\infty\,;\,0)$ a na $(0\,;\,\infty)$, $H(f) = R - \{0\}$. ■



Obr. 3.1.21: $f\colon\ y = x^3 - 2x^2$.



Obr. 3.1.22: $f\colon\ y = x^r$ pre $r > 0$ a $r < 0$.

- **Mocninná funkcia s reálnym exponentom**

  Mocninnou funkciou nazývame funkciu

$$f\colon\ y = x^r, \qquad \text{kde } \ r \in R.$$

Pre $r \in N$ je polynómom a pre $r \in Z^-$ je racionálnou lomenou funkciou. Pre $r > 0$, $r \notin N$ je jej prirodzeným definičným oborom interval $\langle 0\,;\,\infty)$ a pre $r < 0$, $r \notin Z^-$ je jej prirodzeným definičným oborom interval $(0\,;\,\infty)$.

Základné vlastnosti mocninných funkcií vyplývajú z vety 2.1.45. Pre $r > 0$ je funkcia f rastúca a pre $r < 0$ je klesajúca (obr. 3.1.22). Inverznou funkciou k funkcii $f\colon\ y = x^r$, $r \neq 0$ je mocninná funkcia $f^{-1}\colon\ y = x^{\frac{1}{r}}$.

- **Exponenciálna funkcia**

  Exponenciálnou funkciou so základom a, $a > 0$ nazývame funkciu

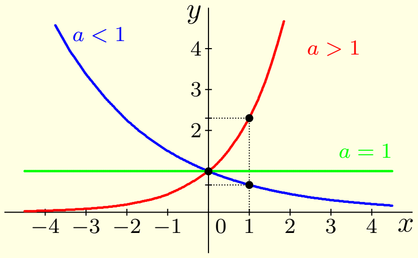
$$f\colon\ y = a^x.$$

Jej prirodzeným definičným oborom je množina R a oborom hodnôt je interval $(0\,;\,\infty)$.

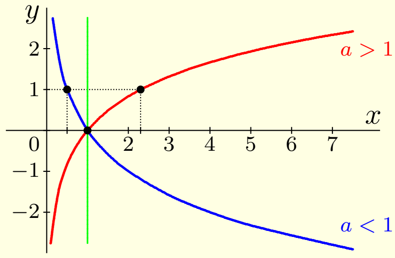
Ak $a=1$, potom sa f rovná konštantnej funkcii $y=1$. Exponenciálna funkcia je rýdzo monotónna pre $a \neq 1$, pre $a \in (0\,;\,1)$ je klesajúca a pre $a \in (1\,;\,\infty)$ je rastúca. Jej graf nazývame **exponenciálna krivka** alebo **exponenciála** (obr. 3.1.23).

Každá exponenciálna krivka prechádza bodmi $[0;1]$ a $[1;a]$, pretože pre všetky čísla $a \in (0\,;\,\infty)$ platí $a^0=1$ a $a^1=a$. Navyše grafy funkcií $y=a^x$ a $y=a^{-x}$ sú symetrické podľa osi y. Vyplýva to zo vzťahu $a^x=a^{-x}=(a^{-1})^{-x}$, ktorý platí pre všetky $x \in R$.

Najdôležitejšia z exponenciálnych funkcií je funkcia so základom e (Eulerovo číslo, veta 2.3.19), t. j. funkcia $f\colon\ y=\mathrm{e}^x$. Niekedy sa označuje symbolom $y=\exp x$.



Obr. 3.1.23: $f\colon\ y=a^x$, $a>0$.



Obr. 3.1.24: $f\colon\ y=\log_a x$, $a>0$, $a \neq 1$.

- **Logaritmická funkcia**

Exponenciálna funkcia $y=a^x$, $a>0$, $a \neq 1$ je rýdzo monotónna na svojom definičnom obore, t. j. k nej existuje inverzná funkcia. To znamená, že pre každé $y \in (0\,;\,\infty)$ existuje práve jedno $x \in R$ také, že $y=a^x$. Toto číslo označujeme $x=\log_a y$ a nazývame **logaritmus čísla y so základom a (pri základe a)**.

Funkcia $f\colon\ y=\log_a x$, $x \in (0\,;\,\infty)$ sa nazýva **logaritmická funkcia so základom a**. Funkcia f je inverzná k exponenciálnej funkcii $y=a^x$, $x \in R$. Graf funkcie f sa nazýva **logaritmická krivka** a je osovo súmerný podľa priamky $y=x$ s grafom funkcie $y=a^x$. Je zrejmé, že každá logaritmická krivka prechádza bodom $[1;0]$ a bodom $[a;1]$.

Funkcia f je rýdzo monotónna, pre $a \in (0\,;\,1)$ je klesajúca a pre $a \in (1\,;\,\infty)$ je rastúca (obr. 3.1.24). Logaritmus so základom 10 nazývame **dekadický** a označujeme $y=\log x$. Logaritmus so základom e nazývame **prirodzený** a označujeme[11] $y=\ln x$.

Poznámka 3.1.24.
Nech $a \in R$, $a>0$, $a \neq 1$. Označme $f\colon\ y=\log_a x$, $x \in (0\,;\,\infty)$ a $g\colon\ y=a^x$, $x \in R$.
Funkcie f, g sú inverzné, takže pre všetky $x \in (0\,;\,\infty)$ platí $x=g[f(x)]=a^{\log_a x}$
a pre všetky $x \in R$ platí $x=f[g(x)]=\log_a a^x$.

Veta 3.1.7.
Nech $a>0$, $a \neq 1$, potom pre všetky $x, x_1, x_2 \in (0\,;\,\infty)$, $r \in R$ platí:

a) $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 x_2)$, b) $\log_a x^r = r \log_a x$,

c) $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \frac{x_1}{x_2}$, d) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ pre všetky $b>0$, $b \neq 1$.

[11] Niekedy (hlavne v anglickej literatúre) sa označenie $y=\log x$ používa pre prirodzený logaritmus.

Dôkaz.

a) Ak označíme $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$, potom $x_1 = a^{y_1}$, $x_2 = a^{y_2}$. Z toho vyplýva:

$$x_1 x_2 = a^{y_1} a^{y_2} = a^{y_1+y_2}, \quad \text{t. j.} \quad \log_a (x_1 x_2) = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

b) Označme $y = \log_a x^r$, potom $x^r = a^y$, t. j. $x = a^{\frac{y}{r}}$. Z toho vyplýva:

$$\log_a x = \frac{y}{r}, \quad \text{t. j.} \quad r \log_a x = y = \log_a x^r.$$

c) Z častí a), b) vyplýva:

$$\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2^{-1} = \log_a (x_1 x_2^{-1}) = \log_a \frac{x_1}{x_2}.$$

d) Označme $y = \log_b x$, $z = \log_b a$, potom $x = b^y$, $a = b^z$. Z toho vyplýva:

$$\left.\begin{array}{l} x^z = (b^y)^z = b^{yz} \\ a^y = (b^z)^y = b^{yz} \end{array}\right\} \Rightarrow \ x^z = a^y \ \Rightarrow \ \log_a x^z = \log_a a^y \ \Rightarrow \ z \log_a x = y \log_a a = y.$$

Keďže $a \neq 1$, t. j. $z = \log_b a \neq 0$, potom platí $\log_a x = \frac{y}{z}$. ■

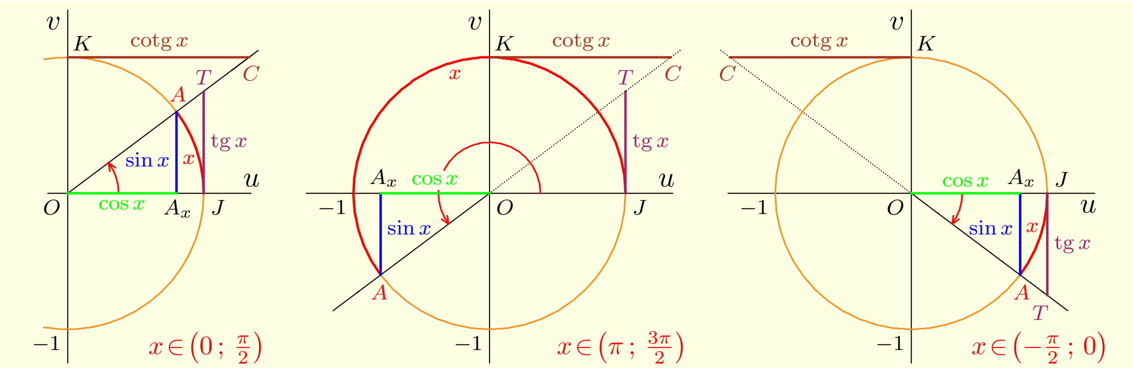
Poznámka 3.1.25.

Mocninná funkcia $y = x^r$, $r \in R$, exponenciálna funkcia $y = a^x$, $a > 0$ a logaritmická funkcia $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ sú elementárne funkcie, pretože sa dajú vyjadriť v tvare

$$y = x^r = \mathrm{e}^{\ln x^r} = \mathrm{e}^{r \ln x}, \qquad y = a^x = \mathrm{e}^{\ln a^x} = \mathrm{e}^{x \ln a}, \qquad y = \log_a x = \tfrac{\ln x}{\ln a}.$$

- **Goniometrické funkcie**

Základné **goniometrické funkcie**[12] sú sínus, kosínus, tangens, kotangens a čitateľovi sú určite známe. V stručnosti si ich pripomenieme. Definujú sa pomocou jednotkovej kružnice v rovine R^2. Táto definícia nie je s našimi doterajšími znalosťami úplne korektná, pretože sa v nej používa neelementárny pojem „dĺžka orientovaného oblúka“, ktorý bude presne formalizovaný až neskôr, v integrálnom počte.[13] Nebolo by však účelné odložiť vyšetrovanie týchto funkcií na neskoršiu dobu.



Obr. 3.1.25: Funkcie $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Uvažujme v rovine R^2 súradnicový systém s osami u a v a kružnicu so stredom v bode $O = [0; 0]$ a s polomerom $r = 1$. Označme $J = [1; 0]$. Každému $x \in R$ je priradený práve jeden orientovaný uhol JOA (zvoľme bod $A = [u; v]$, aby ležal na kružnici). Číslo x vyjadruje veľkosť tohto uhla **v oblúkovej miere**

[12] Tiež sa nazývajú **trigonometrické funkcie**.

[13] Goniometrické funkcie sa môžu definovať tiež pomocou tzv. nekonečných radov.

v jednotkách **radiány**. Pre $x < 0$ je orientácia tohto uhla súhlasná so smerom otáčania hodinových ručičiek a naopak pre $x > 0$ je orientácia tohto uhla opačná k smeru otáčania hodinových ručičiek.

Prvú súradnicu bodu A nazývame **kosínus uhla** x a označujeme $\cos x$, druhú súradnicu nazývame **sínus uhla** x a označujeme $\sin x$. To znamená, že $A = [\cos x; \sin x]$. Tým sú definované funkcie $\cos x$ a $\sin x$ pre všetky $x \in R$. Pre $\cos x \neq 0$, resp. $\sin x \neq 0$ definujeme **tangens** a **kotangens uhla** x vzťahmi

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Poznámka 3.1.26.
Graficky sú hodnoty goniometrických funkcií v bode x znázornené na obr. 3.1.25. Úsečka OA_x predstavuje $\cos x$ a úsečka AA_x predstavuje $\sin x$. Keďže majú úsečky OJ, OK veľkosť 1, potom z podobnosti trojuholníkov OA_xA, OJT a OA_xA, CKO vyplýva:

$$\operatorname{tg} x\colon\ TJ = \frac{TJ}{OJ} = \frac{AA_x}{OA_x}, \qquad \operatorname{cotg} x\colon\ CK = \frac{CK}{OK} = \frac{OA_x}{AA_x}.$$

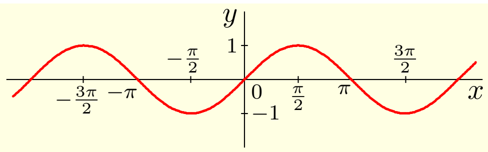
Obvod kružnice s polomerom $r = 1$ je rovný hodnote 2π, kde π je tzv. **Ludolfovo číslo**.[14] To znamená, že veľkosť oblúka od bodu J po bod J (kružnica) je 2π.

Veľkosť oblúka od bodu $J = [1; 0]$ po bod $[0; 1]$ (štvrtina kružnice) je $\frac{\pi}{2}$ a od bodu J po bod $[0; -1]$ je $-\frac{\pi}{2}$, resp. $2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$. Je zrejmé, že ak sa veľkosť oblúku x zväčší o 2π (dĺžku kružnice), hodnoty goniometrických funkcií sa nezmenia.

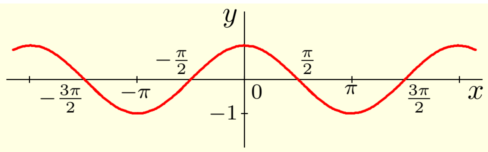
Poznámka 3.1.27.
Niekedy sa na vyjadrenie veľkosti uhla používajú **deväťdesiatinové stupne**, ktoré značíme °. Jeden stupeň sa delí na 60 **minút** ($1° = 60'$) a jedna minúta sa delí na 60 **sekúnd** ($1' = 60''$). Uhlu 2π zodpovedá 360° a uhlu $\frac{\pi}{2}$ zodpovedá 90°. Uhol $x°$ prevedieme na rádiany pomocou vzorca $\pi \frac{x°}{180°}$.

Funkcia $y = \sin x$ zobrazuje množinu R na $\langle -1; 1\rangle$, jej graf nazývame **sínusoida**. Je nepárna, periodická s periódou 2π, rastúca na intervaloch $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$ a klesajúca na intervaloch $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in Z$. Jej nulové body sú $0 + 2k\pi$, $\pi + 2k\pi$, t. j. $k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.26).

Funkcia $y = \cos x$ zobrazuje množinu R na $\langle -1; 1\rangle$, jej graf nazývame **kosínusoida**. Je párna a periodická s periódou 2π, je klesajúca na intervaloch $\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi\rangle$ a rastúca na intervaloch $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\rangle$, $k \in Z$. Jej nulové body sú $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, t. j. $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.27).



Obr. 3.1.26: $f\colon\ y = \sin x$.



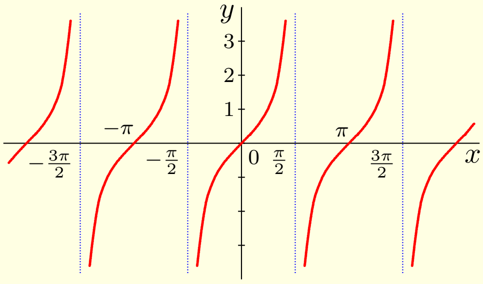
Obr. 3.1.27: $f\colon\ y = \cos x$.

Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{tg} x$ zobrazuje množinu $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\right\}$ na množinu R, jej graf nazývame **tangenta**. Je nepárna, periodická s periódou π, rastúca na intervaloch $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$ a jej nulové body sú $k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.28).

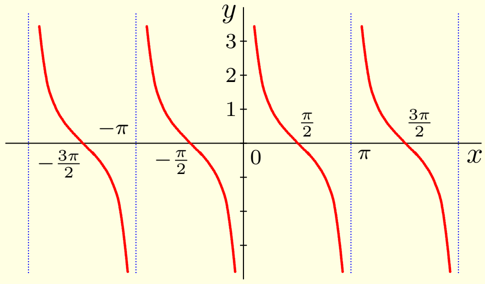
Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x$ zobrazuje množinu $R - \{k\pi; k \in Z\}$ na množinu R, jej graf nazývame **kotangenta**. Je nepárna, periodická s periódou π, klesajúca na intervaloch $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in Z$ a jej nulové body sú $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ (obr. 3.1.29).

Z definície vyplýva, že pre všetky $x \in R - \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in Z\right\}$ platí $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

[14] Číslo π je iracionálne a jeho hodnota je približne $3,141592654$.



Obr. 3.1.28: $f\colon\ y = \operatorname{tg} x$.



Obr. 3.1.29: $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x$.

Poznámka 3.1.28.
Goniometrické funkcie sa v matematickej analýze používajú často. V tabuľke 3.1.1 sú uvedené niektoré dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus na intervale $\langle 0\,;\, \frac{\pi}{2}\rangle$.

$\sin 0 = \cos\frac{\pi}{2}$	$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$	$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$	$\sin\frac{\pi}{2} = \cos 0$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Tabuľka 3.1.1: Niektoré dôležité hodnoty funkcií sínus a kosínus.

Pre všetky $x \in R$ tvoria hodnoty $\cos x$, $\sin x$ súradnice bodu A. Sú to odvesny pravouhlého trojuholníka s preponou 1. Potom z Pytagorovej vety pre všetky $x \in R$ platí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{3.9}$$

Z vlastností funkcií sínus a tangens vyplýva, že pre všetky $x \in \left(0\,;\, \frac{\pi}{2}\right)$ platí:

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x. \tag{3.10}$$

Uvedená nerovnosť je dôležitá a využíva sa pomerne často (dokážeme ju neskôr pomocou diferenciálneho počtu). Názorne si ju môžeme ilustrovať na obrázku 3.1.25. Dĺžka oblúku x je väčšia ako súradnica $\sin x$ a menšia ako dotyčnica $\operatorname{tg} x$.

Na záver spomenieme ešte niektoré vzťahy, ktoré platia pre goniometrické funkcie. Väčšina z nich je (aspoň by mala byť) čitateľovi známa. Prakticky všetky môžeme odvodiť zo vzťahu (3.9) a zo súčtových vzorcov uvedených vo vete 3.1.8.

Veta 3.1.8 (Súčtové vzorce pre funkcie sínus a kosínus).
Pre všetky $x, y \in R$ platí:

a) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, b) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

Dôkaz.
Vzťahy sú dokázané v príklade 2.5.3. ■

Dôsledok 3.1.8.a.
Pre všetky $x \in R$ platí: a) $\sin(x + \pi) = -\sin x$, b) $\cos(x + \pi) = -\cos x$,
c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

Dôsledok 3.1.8.b (Vzorce pre dvojnásobný uhol).
Pre všetky $x \in R$ platí: a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

Dôsledok 3.1.8.c (Vzorce pre polovičný uhol).
Pre všetky $x \in R$ platí: a) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, b) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Dôsledok 3.1.8.d.
Pre všetky $x, y \in R$ platí:
a) $\sin(x+y)\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$, b) $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x$.

Dôkaz.
a) $\sin(x+y)\sin(x-y) = (\sin x \cos y + \cos x \sin y) \cdot (\sin x \cos y - \cos x \sin y) =$
$= \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = (1-\cos^2 x)\cos^2 y - \cos^2 x(1-\cos^2 y) =$
$= \cos^2 y - \cos^2 x \cos^2 y - \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x.$
b) $\cos(x+y)\cos(x-y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \cdot (\cos x \cos y + \sin x \sin y) =$
$= \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y = (1-\sin^2 x)\cos^2 y - \sin^2 x(1-\cos^2 y) =$
$= \cos^2 y - \sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x.$ ■

Príklad 3.1.27.
Dokážte, že pre všetky $x \in R$ platia vzťahy:
a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, b) $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$.

Riešenie.
Z predchádzajúcej vety, z jej dôsledkov a zo vzťahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ vyplýva:
a) $\sin 3x = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\cos x \sin x \cos x =$
$= 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$
b) $\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sin x \sin x \cos x =$
$= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) = -3\cos x + 4\cos^3 x.$ ■

Veta 3.1.9.
Pre všetky $x, y \in R$ platí:
a) $\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$, b) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,

c) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, d) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

Dôkaz.
Nech $x, y \in R$, potom platí $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$, $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$.
Jednotlivé tvrdenia vety dostaneme, ak vhodne spočítame alebo odpočítame rovnosti

$$\sin x = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\cos y = \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$ ■

Dôsledok 3.1.9.a.
Pre všetky $x, y \in R$ platí:

a) $\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$, b) $\cos x \sin y = \frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2}$,

c) $\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$, d) $\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$.

Dôkaz.
Ak označíme $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$, potom platí:

$$\alpha + \beta = 2x,\ \alpha - \beta = 2y, \quad \text{t. j.}\ \ x = \tfrac{\alpha+\beta}{2},\ y = \tfrac{\alpha-\beta}{2}.$$

Dokazované tvrdenia sú totožné s rovnosťami vo vete 3.1.9 pre hodnoty α, β. ■

Veta 3.1.10 (Súčtové vzorce pre funkcie tangens a kotangens).
Nech $x, y \in R$ a nech sú všetky príslušné výrazy definované, potom platí:

a) $\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}$, b) $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

Dôkaz.

a) $\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\cos(x\pm y)}{\sin(x\pm y)} = \frac{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y}{\sin x \cos y \pm \cos x \sin y} \cdot \frac{(\sin x \sin y)^{-1}}{(\sin x \sin y)^{-1}} = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}$.

b) $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos(x\pm y)} = \frac{\sin x \cos y \pm \cos x \sin y}{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y} \cdot \frac{(\cos x \cos y)^{-1}}{(\cos x \cos y)^{-1}} = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$. ■

Dôsledok 3.1.10.a.
Nech $x \in R$ a nech sú všetky príslušné výrazy definované, potom platí:

a) $\operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}{2}$, b) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x}$.

Pre goniometrické funkcie môžeme jednoducho odvodiť vzťahy pre vyjadrenie každej z nich pomocou inej goniometrickej funkcie. Tieto vzťahy pre $x \in \left(0\,;\, \frac{\pi}{2}\right)$ uvádzame bez dôkazu v tabuľke 3.1.2. Pre ostatné hodnoty $x \in R$ platia rovnaké vzťahy, ktoré sa však môžu líšiť znamienkom (podľa príslušného oboru hodnôt).

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
$\sin x =$	$\sin x$	$\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}$
$\cos x =$	$\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x =$	$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\operatorname{cotg} x}$
$\operatorname{cotg} x =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{cotg} x$

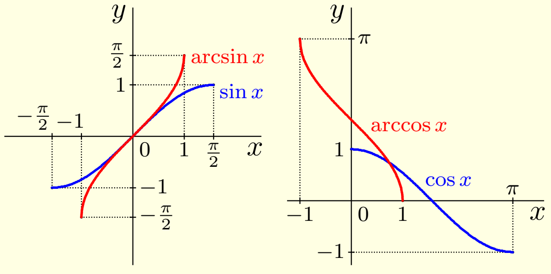
Tabuľka 3.1.2: Vzťahy medzi goniometrickými funkciami pre $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

- **Cyklometrické funkcie**

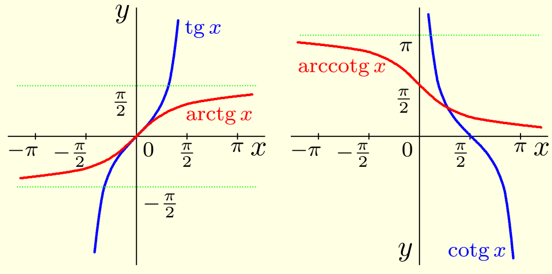
Ku goniometrickým funkciám neexistujú inverzné funkcie, pretože nie sú prosté na svojom definičnom obore. Keď ich zúžime na vhodné intervaly tak, aby tieto zúženia boli prosté funkcie, potom k nim inverzné funkcie utvoriť môžeme. Tieto funkcie sa nazývajú **cyklometrické funkcie**.

Funkcia $f\colon\ y = \sin x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ je bijektívna, rastúca, nepárna a jej oborom hodnôt je interval $\langle -1\,;\, 1\rangle$. Inverznú funkciu $g = f^{-1}$ nazývame **arkussínus** a značíme symbolom $g\colon\ y = \arcsin x$ (obr. 3.1.30). Funkcia arkussínus je rastúca, nepárna a zobrazuje interval $\langle -1\,;\, 1\rangle$ na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Funkcia $f\colon\ y = \cos x,\ x \in \langle 0\,;\, \pi\rangle$ je bijektívna, klesajúca a jej oborom hodnôt je interval $\langle -1\,;\, 1\rangle$. Inverznú funkciu $g = f^{-1}$ nazývame **arkuskosínus** a označujeme ju symbolom $g\colon\ y = \arccos x$ (obr. 3.1.30). Funkcia arkuskosínus je klesajúca a zobrazuje interval $\langle -1\,;\, 1\rangle$ na interval $\langle 0\,;\, \pi\rangle$.



Obr. 3.1.30: Funkcie $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.



Obr. 3.1.31: Funkcie $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$.

Veta 3.1.11.
Pre všetky $x \in \langle -1\,;\, 1\rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Dôkaz.
Nech $x \in \langle -1\,;\, 1\rangle$. Pre všetky $z \in R$ na základe vety 3.1.8 platí:
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - z\right) = \sin\tfrac{\pi}{2}\cos z - \cos\tfrac{\pi}{2}\sin z = \cos z.$$
Označme $y = \arcsin x$, $z = \arccos x$, potom $y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, $z \in \langle 0\,;\, \pi\rangle$. Z toho vyplýva:
$$x = \sin y = \cos z = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - z\right).$$
Keďže body y, $\frac{\pi}{2} - z$ patria do intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, platí:
$$y = \tfrac{\pi}{2} - z, \qquad \text{t. j. } \tfrac{\pi}{2} = y + z = \arcsin x + \arccos x. \ \blacksquare$$

Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2} \right)$ je bijektívna, rastúca, nepárna a jej oborom hodnôt je množina R. Inverznú funkciu $g = f^{-1}$ nazývame **arkustangens** a označujeme ju symbolom $g\colon\ y = \operatorname{arctg} x$ (obr. 3.1.31). Funkcia arkustangens je rastúca, nepárna a zobrazuje množinu R na interval $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2} \right)$.

Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x,\ x \in (0\,;\, \pi)$ je bijektívna, klesajúca a jej oborom hodnôt je množina R. Inverznú funkciu $g = f^{-1}$ nazývame **arkuskotangens** a označujeme ju symbolom $g\colon\ y = \operatorname{arccotg} x$ (obr. 3.1.31). Funkcia arkuskotangens je klesajúca a zobrazuje množinu R na interval $(0\,;\, \pi)$.

Veta 3.1.12.
Pre všetky $x \in R$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

Dôkaz.
Nech $x \in R$ a nech $z \in (0\,;\, \pi)$. Potom $\frac{\pi}{2} - z$ patrí do intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2} \right)$ a platí:
$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - z\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos z - \cos\frac{\pi}{2}\sin z}{\cos\frac{\pi}{2}\cos z + \sin\frac{\pi}{2}\sin z} = \frac{\cos z}{\sin z} = \operatorname{cotg} z.$$

Označme $y = \operatorname{arctg} x$, $z = \operatorname{arccotg} x$, potom $y \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$, $z \in (0\,;\,\pi)$. Z toho vyplýva:

$$x = \operatorname{tg} y = \operatorname{cotg} z = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - z\right).$$

Keďže body y a $\frac{\pi}{2} - z$ patria do intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$, platí:

$$y = \tfrac{\pi}{2} - z, \qquad \text{t. j. } \tfrac{\pi}{2} = y + z = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x. \ \blacksquare$$

- **Hyperbolické funkcie**

Sínus hyperbolický a **kosínus hyperbolický**, definujeme vzťahmi

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ x \in R, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ x \in R.$$

Tangens hyperbolický a **kotangens hyperbolický** definujeme vzťahmi

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \ x \in R, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \ x \in R - \{0\}.$$

Poznámka 3.1.29.

Keďže pre všetky $x \in R$ platí $e^x \neq 0$, môžeme hyperbolické funkcie vyjadriť v tvare

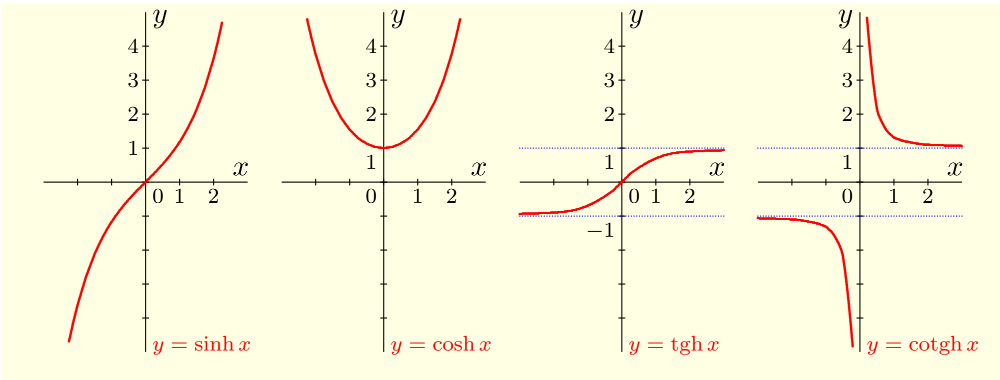
$$\sinh x = \frac{e^{2x} - 1}{2\,e^x}, \quad \cosh x = \frac{e^{2x} + 1}{2\,e^x}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Funkcia $f\colon\ y = \sinh x$ zobrazuje množinu R na množinu R, je nepárna, rastúca a teda aj prostá. Má jeden nulový bod $x = 0$ (obr. 3.1.32).

Funkcia $f\colon\ y = \cosh x$ zobrazuje množinu R na interval $\langle 1\,;\,\infty)$, je párna, klesajúca na intervale $(\infty\,;\,0\rangle$ a rastúca na intervale $\langle 0\,;\,\infty)$ (obr. 3.1.32).

Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{tgh} x$ zobrazuje množinu R na interval $(-1\,;\,1)$, je nepárna, rastúca a prostá. Má jeden nulový bod $x = 0$ (obr. 3.1.32).

Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{cotgh} x$ zobrazuje množinu $R - \{0\}$ na množinu $R - \langle -1\,;\,1\rangle$, je nepárna, klesajúca na intervaloch $(-\infty\,;\,0)$ a $(0\,;\,\infty)$, je prostá (obr. 3.1.32).



Obr. 3.1.32: Hyperbolické funkcie $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$ a $\operatorname{cotgh} x$.

Hyperbolické funkcie majú podobné vlastnosti a platia pre ne podobné vzťahy ako pre goniometrické funkcie, preto sú aj ich názvy odvodené od goniometrických funkcií. Priamo z definície vyplýva nasledujúca veta.

Veta 3.1.13.

Pre všetky $x \in R$ platí: a) $\sinh x \pm \cosh x = \pm\, e^{\pm x}$, b) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Poznámka 3.1.30.
Rovnosť $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ znamená, že body so súradnicami $[\cosh x; \sinh x]$ ležia na hyperbole danej rovnicou $y^2 - x^2 = 1$. Odtiaľ pochádza názov hyperbolické funkcie.

Veta 3.1.14 (Súčtové vzorce pre hyperbolický sínus a kosínus).
Pre všetky $x, y \in R$ platí: a) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$,
b) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$.

Dôkaz.
Dokážeme iba jeden vzťah, pretože ostatné dôkazy sú analogické.

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sin y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} =$$
$$= \frac{(e^x e^y - e^{-x} e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^{-y}) + (e^x e^y + e^{-x} e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^{-y})}{4} =$$
$$= \frac{2 e^x e^y - 2 e^{-x} e^{-y}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y). \blacksquare$$

Dôsledok 3.1.14.a (Vzorce pre dvojnásobný argument).
Pre všetky $x \in R$ platí: a) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$, b) $\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$.

Dôsledok 3.1.14.b (Vzorce pre polovičný argument).
Pre všetky $x \in R$ platí: a) $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$, b) $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$.

Veta 3.1.15.
Pre všetky $x, y \in R$ platí: a) $\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$,
b) $\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$,
c) $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$,
d) $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$.

Dôkaz.
Dôkaz je analogický ako dôkaz vety 3.1.9.

Dôsledok 3.1.15.a.
Pre všetky $x, y \in R$ platí: a) $\sinh(x+y) + \sinh(x-y) = 2 \sinh x \cosh y$,
b) $\sinh(x+y) - \sinh(x-y) = 2 \cosh x \sinh y$,
c) $\cosh(x+y) + \cosh(x-y) = 2 \cosh x \cosh y$,
d) $\cosh(x+y) - \cosh(x-y) = 2 \sinh x \sinh y$.

Dôkaz.
Dôkaz je analogický ako v dôsledku 3.1.9.a. $\blacksquare$

Veta 3.1.16 (Súčtové vzorce pre hyperbolický tangens a kotangens).
Nech $x, y \in R$ a nech v časti b) pri $\operatorname{cotgh}(x-y)$ navyše $x \neq y$, potom platí:
a) $\operatorname{tgh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$, b) $\operatorname{cotgh}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cotgh} x \operatorname{cotgh} y}{\operatorname{cotgh} x \pm \operatorname{cotgh} y}$.

Dôkaz.
Dôkaz je analogický ako dôkaz vety 3.1.10.

Dôsledok 3.1.16.a.
Pre všetky $x \in R$ platí: a) $\operatorname{tgh} 2x = \frac{2 \operatorname{tgh} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, b) $\operatorname{cotgh} 2x = \frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{2 \operatorname{cotgh} x}$.

Veta 3.1.17 (Moivreov vzorec).
Pre všetky $x \in R$, $n \in N$ platí $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh nx \pm \sinh nx$.

Dôkaz.
Dokážeme matematickou indukciou.
Pre $n = 1$ platí vzorec triviálne.
Nech vzorec platí pre $n = k - 1$, t. j. nech platí:

$$(\cosh x \pm \sinh x)^{k-1} = \cosh (k-1)x \pm \sinh (k-1)x.$$

Potom pre $n = k$ na základe vety 3.1.14 platí:

$$\begin{aligned}(\cosh x \pm \sinh x)^k &= (\cosh x \pm \sinh x)^{k-1} \cdot (\cosh x \pm \sinh x) = \\ &= [\cosh (k-1)x \pm \sinh (k-1)x] \cdot (\cosh x \pm \sinh x) = \\ &= \cosh (k-1)x \cosh x \pm \sinh (k-1)x \cosh x \pm \\ &\qquad \pm \cosh (k-1)x \sinh x + \sinh (k-1)x \sinh x = \\ &= [\cosh (k-1)x \cosh x + \sinh (k-1)x \sinh x] \pm \\ &\qquad \pm [\sinh (k-1)x \cosh x + \cosh (k-1)x \sinh x] = \cosh kx \pm \sinh kx. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Podobne ako goniometrické funkcie, môžeme aj hyperbolické funkcie vyjadriť navzájom jednu funkciu pomocou druhej funkcie. V tabuľke 3.1.2 sú uvedené tieto vzťahy pre argumenty $x > 0$. Pre ostatné hodnoty x platia taktiež tieto vzťahy, môžu sa však líšiť znamienkom (podľa príslušného oboru hodnôt).

	$\sinh x$	$\cosh x$	$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{cotgh} x$
$\sinh x =$	$\sinh x$	$\sqrt{\cosh^2 x - 1}$	$\frac{\operatorname{tgh} x}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}$
$\cosh x =$	$\sqrt{\sinh^2 x + 1}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{cotgh} x}{\sqrt{\operatorname{cotgh}^2 x - 1}}$
$\operatorname{tgh} x =$	$\frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}$	$\frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}$	$\operatorname{tgh} x$	$\frac{1}{\operatorname{cotgh} x}$
$\operatorname{cotgh} x =$	$\frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x}$	$\frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}$	$\frac{1}{\operatorname{tgh} x}$	$\operatorname{cotgh} x$

Tabuľka 3.1.3: Vzťahy medzi hyperbolickými funkciami pre $x > 0$.

- **Hyperbolometrické funkcie**

Funkcie $\sinh x$, $\operatorname{tgh} x$ a $\operatorname{cotgh} x$ sú bijektívne na celom svojom definičnom obore, funkcia $\cosh x$ je bijektívna na intervale $\langle 0\,; \infty)$. Inverzné funkcie k týmto funkciám nazývame **hyperbolometrické funkcie**.

Inverzná funkcia k funkcii $\sinh x$ sa nazýva **argument sínusu hyperbolického** a označuje sa symbolom $\operatorname{argsinh} x$. Zobrazuje množinu R na množinu R a je rastúca (obr. 3.1.33).

Inverzná funkcia k funkcii $\cosh x$ sa nazýva **argument kosínusu hyperbolického** a označuje sa $\operatorname{argcosh} x$. Zobrazuje interval $\langle 1\,;\,\infty)$ na interval $\langle 0\,;\,\infty)$ a je rastúca (obr. 3.1.33).

Veta 3.1.18.
Pre všetky $x \in R$ platí $\operatorname{argsinh} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2+1}\right]$.

Dôkaz.
Nech $x \in R$. Potom $y = \operatorname{argsinh} x$ práve vtedy, ak platí $x = \sinh y = \frac{e^{2y}-1}{2\,e^y}$.
Posledný vzťah predstavuje rovnicu s neznámou $y \in R$.
Označme $e^y = t$, potom $t > 0$, $y = \ln t$ a rovnicu môžeme písať v tvare

$$x = \tfrac{t^2-1}{2t}, \quad \text{t. j.} \quad t^2 - 2xt - 1 = 0.$$

Táto rovnica má dve riešenia $t_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Nech $x \in R$, potom platí:

$$x \leq \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}, \quad \text{t. j.} \quad t_1 = x + \sqrt{x^2+1} > 0,\ t_2 = x - \sqrt{x^2+1} < 0.$$

Z toho vyplýva, že $\operatorname{argsinh} x = y = \ln t_1 = \ln\,[x + \sqrt{x^2+1}]$. ■

Veta 3.1.19.
Pre všetky $x \in \langle 1\,;\,\infty)$ platí $\operatorname{argcosh} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right]$.

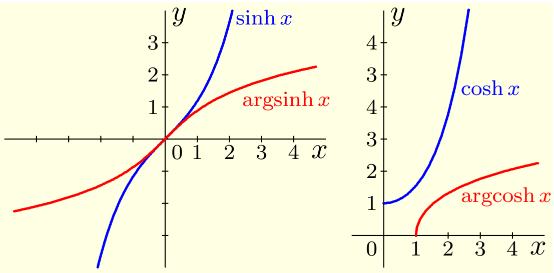
Dôkaz.
Dôkaz je podobný ako pri vete 3.1.18.
Pre $x \in \langle 1\,;\,\infty)$ riešime rovnicu $x = \frac{e^{2y}+1}{2\,e^y}$ s neznámou $y > 0$.
Ak označíme $e^y = t$, potom $t > 1$, $y = \ln t$ a platí:

$$x = \tfrac{t^2+1}{2t}, \quad \text{t. j.} \quad 0 = t^2 - 2tx + 1.$$

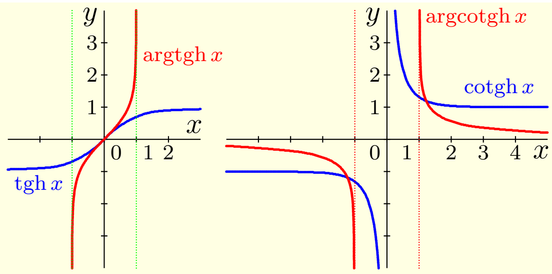
Rovnica má dve riešenia $t_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2-1}$ a je zrejmé, že $t_1 = x + \sqrt{x^2-1} > 1$.
Predpokladajme, že $x > 1$, $t_2 = x - \sqrt{x^2-1} > 1$. Potom dostaneme spor

$$x - 1 > \sqrt{x^2-1} \implies x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > x^2 - 1 \implies -2x > -2 \implies x < 1.$$

Z toho vyplýva, že $\operatorname{argcosh} x = y = \ln t_1 = \ln\,[x + \sqrt{x^2-1}]$. ■



Obr. 3.1.33: Funkcie $y = \operatorname{argsinh} x$, $y = \operatorname{argcosh} x$.



Obr. 3.1.34: Funkcie $y = \operatorname{argtgh} x$, $y = \operatorname{argcotgh} x$.

Inverzná funkcia k funkcii $\operatorname{tgh} x$ sa nazýva **argument tangensu hyperbolického** a označuje sa $\operatorname{argtgh} x$. Zobrazuje interval $(-1\,;\,1)$ na množinu R a je rastúca (obr. 3.1.34).

Inverzná funkcia k funkcii $\operatorname{cotgh} x$ sa nazýva **argument kotangensu hyperbolického** a označuje sa $\operatorname{argcotgh} x$. Definovaná je na množine $R - \langle -1\,;\,1\rangle$. Zobrazuje interval $(-\infty\,;\,-1)$ na interval $(-\infty\,;\,0)$ a interval $(1\,;\,\infty)$ na interval $(0\,;\,\infty)$. Na každom z intervalov $(-\infty\,;\,-1)$, $(1\,;\,\infty)$ je klesajúca (obr. 3.1.34).

Veta 3.1.20.
Pre všetky $x \in (-1\,;\,1)$ platí $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{2}$.

Dôkaz.
Nech $x \in (-1\,;\,1)$. Potom $y = \operatorname{argtgh} x$ práve vtedy, ak $x = \operatorname{tgh} y = \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$.
Označme $e^{2y} = t$, potom $t > 0$, $2y = \ln t$. Z toho vyplýva:

$$x = \frac{t-1}{t+1} \implies xt + x = t - 1 \implies x + 1 = t - xt = (1-x)t \implies t = \frac{1+x}{1-x}.$$

Je zrejmé, že pre všetky $x \in (-1\,;\,1)$ platí $t > 0$, takže $2y = \ln\frac{1+x}{1-x}$. ■

Veta 3.1.21.
Pre všetky $x \in R - \langle -1\,;\,1\rangle$ platí $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{2}$.

Dôkaz.
Nech $x \in R - \langle -1\,;\,1\rangle$. Potom $y = \operatorname{argtgh} x$ práve vtedy, ak $x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$.
Označme $e^{2y} = t$, potom $t > 0$, $2y = \ln t$. Z toho vyplýva:

$$x = \frac{t+1}{t-1} \implies xt - x = t + 1 \implies xt - t = x + 1 \implies t = \frac{x+1}{x-1}.$$

Je zrejmé, že pre všetky $x \in R - \langle -1\,;\,1\rangle$ platí $t > 0$, takže $2y = \ln\frac{x+1}{x-1}$. ■

Poznámka 3.1.31.
Z vlastností logaritmických funkcií vyplýva, že pre $\operatorname{argtgh} x$, $\operatorname{argcotgh} x$ platí:

$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \ln\sqrt{1+x} - \ln\sqrt{1-x},$$

$$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \ln\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \ln\sqrt{x+1} - \ln\sqrt{x-1}.$$

Ako sme už spomínali, elementárne funkcie popisujú mnohé prírodné a spoločenské zákonitosti. Na záver uvedieme funkciu, ktorá by mohla potešiť nejedno srdiečko.

Príklad 3.1.28.
Rovnica[15] $(x^2+y^2-1)^3 = x^2y^3$ určuje dve funkcie (viď obr. 3.1.35)

$$f_1\colon\ y = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{\sqrt[3]{x^4} - 4x^2 + 4}}{2}, \qquad f_2\colon\ y = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{\sqrt[3]{x^4} - 4x^2 + 4}}{2}.$$

Výraz pod odmocninou $\sqrt[3]{x^4} - 4x^2 + 4$ sa rovná nule práve vtedy, ak platí:

$$x_{1,2} = \frac{\pm 1}{8\sqrt{3}}\sqrt{193 + \frac{385}{\sqrt[3]{55873+1536\sqrt{1299}}} + \sqrt[3]{55873+1536\sqrt{1299}}} \approx \pm 1{,}139028165.$$

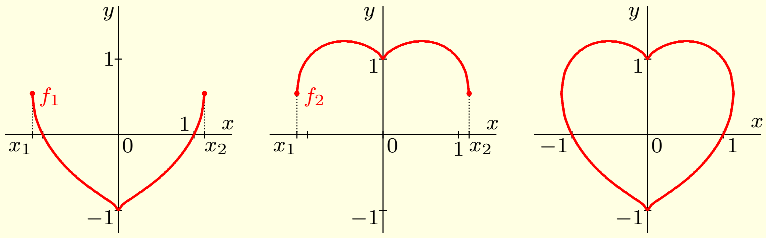
Keďže pre funkcie $f_{1,2}$ platí $f_1(0) = -1$, $f_2(0) = 1$, potom ich definičný obor je interval ohraničený bodmi $x_{1,2}$, t. j. $D(f_{1,2}) = \langle -1{,}139028165\,;\,1{,}139028165\rangle$. ■

3.1.4 Krivky

Každú binárnu reláciu $f = \{[x;y] \in R^2\}$ môžeme v euklidovskej rovine R^2 reprezentovať bodmi X so súradnicami $[x;y]$. V tomto prípade sa používa pojem (rovinná) krivka.

Ak je $f \in R^2$ binárna relácia, potom množinu $\{X \in R^2\,;\ X = [x;y]\,,\,[x;y] \in f\}$ nazývame **rovinná krivka** (**krivka v rovine** R^2), alebo iba stručne **krivka**.

[15] Rez priestorovej rovnice srdca $(x^2 + \frac{9z^2}{4} + y^2 - 1)^3 - x^2y^3 - \frac{9z^2y^3}{80} = 0$ do roviny $z = 0$.



Obr. 3.1.35: Grafy funkcií $f_{1,2}$ z príkladu 3.1.28.

Krivku najčastejšie popisujeme parametricky, t. j. pomocou množiny
$$\left\{X\in R^2\,;\; X=[x;y]\,,\;\; x=\varphi(t),\;\; y=\psi(t),\;\; t\in J\right\}, \tag{3.11}$$
kde φ, ψ sú funkcie definované na množine $J\subset R$.

Ak je relácia f definovaná implicitne rovnicou $F(x,y)=0$, potom môžeme krivku f reprezentovať množinou bodov $X=[x;y]\in R^2$, ktoré vyhovujú rovnici $F(x,y)=0$, t. j.
$$f=\left\{X\in R^2\,;\; X=[x;y]\,,\;\; F(x,y)=0\right\}.$$

Pojem krivky môžeme prirodzeným spôsobom rozšíriť do trojrozmerného Euklidovského priestoru R^3. V praxi sa krivky popisujú najčastejšie pomocou parametrického vyjadrenia, preto uvedieme iba nasledujúcu definíciu. V priestore R^3 definujeme (**priestorovú**) **krivku** analogicky pomocou relácie
$$f=\left\{X\in R^3\,;\; X=[x;\,y;\,z]\,,\;\; x=\varphi(t),\;\; y=\psi(t),\;\; z=\chi(t),\;\; t\in J\right\},$$
kde φ, ψ, χ sú funkcie definované na množine $J\subset R$.

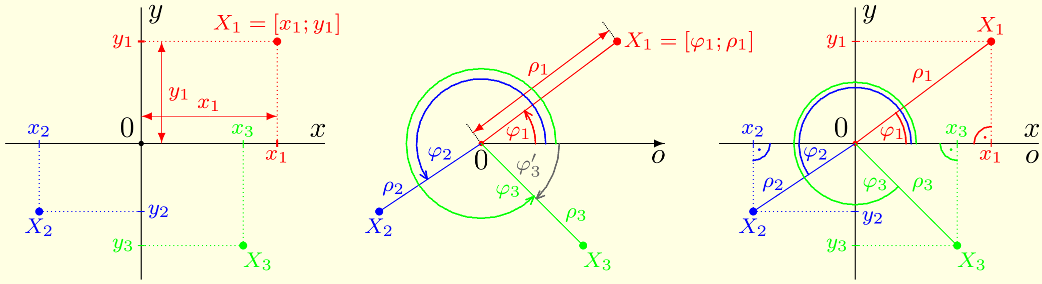
Poznámka 3.1.32.
Je zrejmé, že rovinnú krivku f môžeme vyjadriť v rôznych tvaroch. Ak je krivka zadaná parametricky, potom vylúčením (elimináciou) parametra môžeme dostať jej vyjadrenie v tvare $F(x,y)=0$ alebo pomocou vzťahov $y=f(x)$, resp. $x=g(y)$.
Na druhej strane, ak je krivka f zadaná vzťahom $y=f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$, potom stačí položiť $x=t$, $y=f(t)$, $t\in\langle a\,;\,b\rangle$ a máme jej parametrické vyjadrenie.

V niektorých prípadoch je výhodné vyjadriť krivku v rovine v takzvaných **polárnych súradniciach**. **Polárny súradnicový systém** v rovine R^2 sa skladá z počiatku a z jednej poloosi z neho vychádzajúcej, ktorú nazývame polárna os. **Počiatok** (**pól**) **polárneho súradnicového systému** stotožníme s počiatkom 0 karteziánskeho pravouhlého súradnicového systému. **Polárna os** o je polpriamka vychádzajúca z bodu 0 a stotožníme ju s kladnou x-ovou poloosou (obr. 3.1.36) karteziánskeho systému.

Ak má bod X v karteziánskom pravouhlom systéme súradnice $[x;y]$, potom v polárnych súradniciach mu priradíme dvojicu súradníc $[\varphi;\rho]$. Súradnica ρ predstavuje vzdialenosť bodu X od počiatku 0 a nazýva sa **sprievodič** (**rádiusvektor**) **bodu** X. To znamená, že platí $\rho=|0X|$. Súradnica φ predstavuje orientovaný uhol, ktorý zviera polárna os o s polpriamkou $0X$ a nazýva sa **polárny uhol** (**amplitúda**) **bodu** X.

Krivku môžeme v polárnom systéme vyjadriť vzťahom $f=\{[\varphi;\rho]\in R^2\}$. Ak je každému φ priradené najviac jedno ρ, potom f predstavuje **v polárnom systéme funkciu**.

Z definície a zo základných vlastností goniometrických funkcií vyplýva, že pre karteziánske súradnice $[x;y]$ a polárne súradnice $[\varphi;\rho]$ daného bodu X platí:
$$x=\rho\cdot\cos\varphi,\;\; y=\rho\cdot\sin\varphi,\qquad \text{pričom}\quad \rho\in\langle 0\,;\,\infty)\,,\;\; \varphi\in(-\infty\,;\,\infty)\,. \tag{3.12}$$



Obr. 3.1.36: Pravouhlý a polárny súradnicový systém v Euklidovskej rovine R^2.

Z toho vyplýva:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cdot \cos^2 \varphi + \rho^2 \cdot \sin^2 \varphi = \rho^2, \quad \text{t. j.} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.13}$$

Zo vzťahov (3.12) a (3.13) pre $\rho \neq 0$ vyplýva:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3.14}$$

Poznámka 3.1.33.
Musíme si uvedomiť, že každý bod $X \in R^2$ má v karteziánskom systéme súradnice určené jednoznačne, čo neplatí pre polárny systém. V polárnych súradniciach má bod X nekonečne veľa vyjadrení, pretože funkcie sínus a kosínus sú periodické s periodou 2π. Je zrejmé, že stačí zmeniť polárny uhol φ o ľubovoľnú hodnotu $2k\pi$, $k \in Z$.
Z tohto dôvodu sa pre rozsah polárneho uhla φ zvykne určiť interval dĺžky 2π. Obyčajne je to interval $\langle 0\,; 2\pi)$ alebo interval $(-\pi\,; \pi\rangle$. Bod X_3 na obrázku 3.1.36 má polárne súradnice $X_3 = [\varphi_3; \rho_3]$, resp. $X_3 = [\varphi'_3; \rho_3]$, pričom platí $\varphi_3 > 0$, $\varphi'_3 < 0$, $\varphi_3 = \varphi'_3 + 2\pi$.

Poznámka 3.1.34.
V praxi sa pri zápise polárnych súradníc daného bodu $X = [\varphi; \rho]$ zvykne pripustiť aj záporná hodnota jeho sprievodiča, t. j. $\rho < 0$. V tomto prípade je bod X totožný s bodom, ktorý je stredovo súmerný podľa počiatku polárneho súradnicového systému s bodom $X' = [\varphi; -\rho]$. Amplitúdy týchto bodov sú posunuté o hodnotu π, resp. $-\pi$. To znamená, že bod X je totožný s bodom $[\varphi + \pi; -\rho]$ pre $\varphi \in \langle 0\,; \pi)$, resp. s bodom $[\varphi - \pi; -\rho]$ pre $\varphi \in \langle \pi\,; 2\pi)$. Situácia je ilustrovaná na obrázku 3.1.37.

Ak je rovinná krivka f zadaná (v karteziánskom systéme súradníc) implicitne rovnicou $F(x, y) = 0$ a použijeme vzťahy (3.12), dostaneme rovnicu s premennými ρ, φ, t. j.

$$F(x, y) = F(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = G(\rho, \varphi) = 0,$$

ktorú nazývame **implicitné vyjadrenie** krivky f v polárnom systéme súradníc.

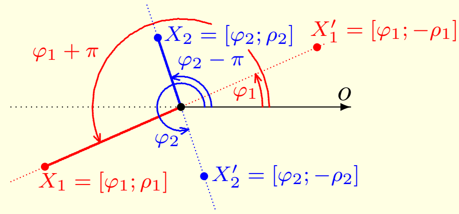
Ak sa z poslednej rovnice dá vyjadriť ρ ako funkcia premennej φ, t. j. ak $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in M$, potom dostávame **explicitné vyjadrenie** krivky f v polárnych súradniciach.

Ak je krivka f zadaná explicitne v polárnom systéme vzťahmi $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha\,; \beta\rangle$ a použijeme vzťahy (3.12), dostaneme nasledujúce parametrické vyjadrenie krivky f

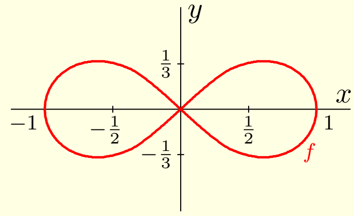
$$x = \rho \cdot \cos \varphi = g(\varphi) \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi = g(\varphi) \cdot \cos \varphi.$$

Pretože parametrom je polárny uhol φ, hovoríme o **polárnom parametrickom vyjadrení** (**polárnej parametrizácii**) krivky f.

Ak je krivka f určená explicitne v polárnych súradniciach v tvare $\rho = g(\varphi)$, $\varphi \in M$ a použijeme vzťahy (3.13), (3.14), potom dostaneme jej implicitné (v lepšom prípade aj explicitné) vyjadrenie v karteziánskom systéme.



Obr. 3.1.37: Bod so záporným sprievodičom ($\rho < 0$).



Obr. 3.1.38: Bernoulliho lemniskáta $f\colon\ (x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Príklad 3.1.29.
Krivka f na obrázku 3.1.38 sa nazýva Bernoulliho lemniskáta[16] a v karteziánskom systéme je implicitne určená rovnicou

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2, \qquad \text{t. j.} \quad f = \left\{[x;y] \in R^2\,;\ (x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2\right\}.$$

Zo vzťahov (3.12) vyplýva:

$$(x^2+y^2)^2 = (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = \rho^4, \quad x^2 - y^2 = \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\cos 2\varphi,$$

Z toho vyplýva $\rho^4 = \rho^2\cos 2\varphi$. To znamená, že krivka f má v polárnych súradniciach tvar

$$\rho^2 = \cos 2\varphi, \qquad \text{resp.} \quad \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Je zrejmé, že musí platiť $\cos 2\varphi \geq 0$. Predpokladajme, že $\varphi \in \langle 0\,;\, 2\pi)$, t. j. $2\varphi \in \langle 0\,;\, 4\pi)$, potom z vlastností funkcie kosínus vyplýva:

$$\cos 2\varphi \geq 0 \iff 2\varphi \in \left\langle 0\,;\, \tfrac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \tfrac{3\pi}{2}\,;\, \tfrac{5\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \tfrac{7\pi}{2}\,;\, 4\pi\right).$$

Z toho vyplýva, že explicitné vyjadrenie krivky f má v polárnych súradniciach tvar

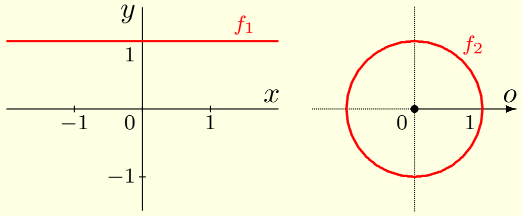
$$\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad \varphi \in \left\langle 0\,;\, \tfrac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \tfrac{3\pi}{4}\,;\, \tfrac{5\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \tfrac{7\pi}{4}\,;\, 2\pi\right). \ \blacksquare$$

Poznámka 3.1.35.
Krivka f_1 definovaná v karteziánskom pravouhlom systéme vzťahom $y = f_1(x) = 1$, $x \in R$ zodpovedá konštantnej funkcii, ktorej grafom je priamka rovnobežná s osou x.
Krivka f_2 definovaná v polárnom systéme vzťahom $\rho = f_2(\varphi) = 1$, $\varphi \in R$ zodpovedá taktiež konštantnej funkcii (ale v polárnom systéme). Jej grafom je kružnica so stredom v počiatku súradnicového systému 0 a polomerom $\rho = 1$ (viď obr. 3.1.39). Je zrejmé, že v karteziánskom systéme krivka f_2 funkciou nie je.

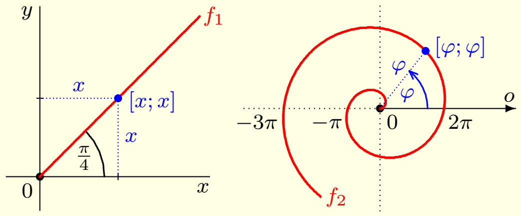
Príklad 3.1.30.
Uvažujme krivku f_1 definovanú v karteziánskom systéme vzťahom $f_1\colon\ y = x$, $x \in \langle 0\,;\, \infty)$. Táto krivka je funkciou a jej grafom je polpriamka (obr. 3.1.40 vľavo). V polárnom systéme táto krivka nepredstavuje funkciu, pretože má tvar $f_1\colon\ \rho \in \langle 0\,;\, \infty)$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
Na druhej strane Archimedova špirála $f_2\colon\ \rho = \varphi$, $\varphi \in \langle 0\,;\, \infty)$ je funkciou v polárnom systéme, ale nie je funkciou v karteziánskom systéme (obr. 3.1.40 vpravo).

Poznámka 3.1.36.
Ak je krivka f funkciou, t. j. sa dá (aspoň teoreticky) vyjadriť v tvare $y = f(x)$, $x \in \langle a\,;\, b\rangle$, potom ju môžeme reprezentovať jej grafom, t. j. množinou $\{X = [x; f(x)]\,;\ x \in \langle a\,;\, b\rangle\}$. Musíme si uvedomiť,

[16] Bernoulliho lemniskáta je špeciálnym prípadom Cassiniových kriviek (viď str. 227).



Obr. 3.1.39: Konštantné funkcie $f_1 \colon y = 1$, $x \in R$, $f_2 \colon \rho = 1$, $\varphi \in R$.

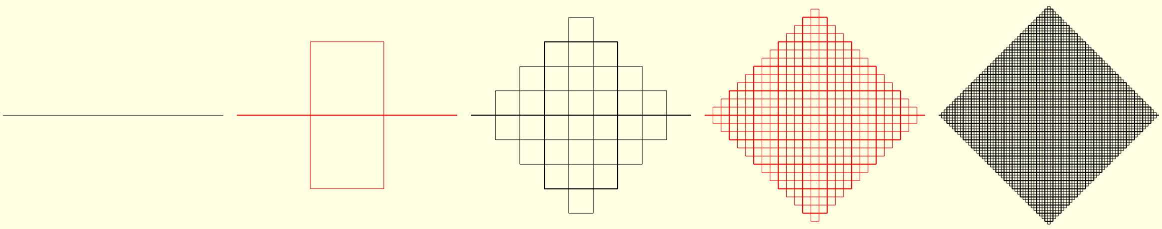


Obr. 3.1.40: Polpriamka $f_1 \colon y = x$, $x \in \langle 0;\, \infty)$ a špirála $f_2 \colon \rho = \varphi$, $\varphi \in \langle 0;\, \infty)$.

že vo všeobecnosti nemusí krivka f reprezentovať funkciu (presnejšie graf funkcie). Napríklad systém $x = 1$, $y = t$, $t \in (-\infty\,;\,\infty)$, neurčuje funkciu. Predstavuje priamku, ktorá je rovnobežná s osou y, pričom vzdialenosť medzi nimi je 1.

Z fyzikálneho hľadiska si môžeme krivku f (či už rovinnú alebo priestorovú) predstaviť ako stopu, ktorú vytvorí pohybujúci sa hmotný bod. Reálnu premennú t v parametrickom vyjadrení krivky môžeme interpretovať ako čas prebiehajúci v (časovom) intervale $J = \langle \alpha\,;\,\beta \rangle$. Jej grafické vyjadrenie v rovine R^2, resp. v priestore R^3 sa zvykne nazývať **trajektória pohybu** daného hmotného bodu.

Bod $X_\alpha = [\varphi(\alpha); \psi(\alpha)]$ sa nazýva **počiatočný bod trajektórie** daného pohybu, resp. **počiatočný bod krivky** f. Bod $X_\beta = [\varphi(\beta); \psi(\beta)]$ sa nazýva **koncový bod trajektórie** daného pohybu, resp. **koncový bod krivky** f. Ak platí $X_\alpha = X_\beta$, potom hovoríme o **uzavretej trajektórii**, resp. o **uzavretej krivke**. V opačnom prípade hovoríme o **otvorenej trajektórii**, resp. o **otvorenej krivke**.[17]

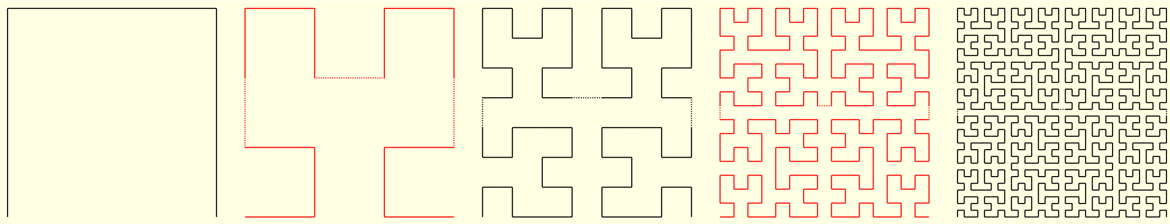


Obr. 3.1.41: Konštrukcia Peanovej krivky.

Trajektória daného pohybu môže byť veľmi zložitým geometrickým útvarom a vo všeobecnosti nesúhlasí s intuitívne chápaným pojmom krivky (ako súvislej čiary). Pohyb môže byť napríklad taký, že sa bude hmotný bod v niektorej konkrétnej polohe nachádzať niekoľko, prípadne aj nekonečne veľakrát. Pomerne jednoducho sa dajú skonštruovať rovinné krivky, ktoré vyplnia nejaký dvojrozmerný rovinný útvar. Príklady kriviek, ktoré vyplnia štvorec uviedli už v roku 1890 taliansky matematik *Giuseppe Peano* [1858–1932] a v roku 1891 nemecký matematik *David Hilbert* (obrázky 3.1.41, resp. 3.1.42).

V súvislosti s Peanovou a Hilbertovou krivkou je namieste spomenúť tzv. **fraktálnu geometriu**. Fraktálna geometria sa na rozdiel od klasickej geometrie zaoberá nepravidelnosťami jednotlivých objektov. Absolútna väčšina útvarov v reálnom svete má nepravidelný tvar a preto ich popisujeme iba približne. Pritom dochádza k značnej deformácii daného modelu a k značnej strate informácií.

[17] S týmto súvisí aj skutočnosť, že pod pojmom krivka si obyčajne predstavujeme súvislú čiaru. Vo všeobecnosti to ale nemusí byť pravidlom.

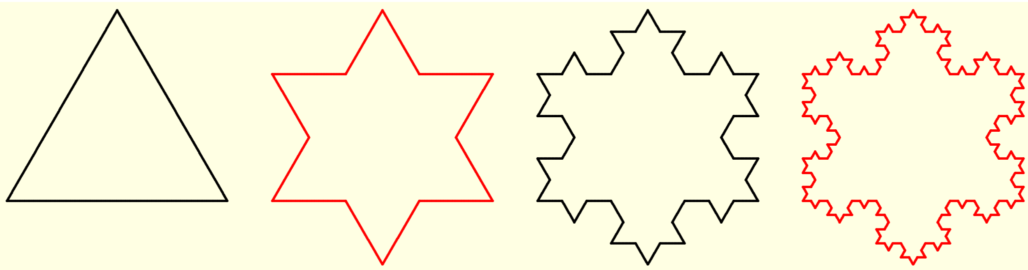


Obr. 3.1.42: Konštrukcia Hilbertovej krivky.

Po prvý raz použil slovo **fraktál**[18] francúzsky matematik *Benoit Mandelbrot* [1924]. Fraktál je ľubovoľný geometricky nepravidelný útvar, z ktorého po rozdelení vznikne v ideálnom prípade niekoľko navzájom podobných (zmenšených) kópií pôvodného celku. Často majú mnohé ďalšie zaujimavé vlastnosti, ako sú napríklad už spomínané pokrytie dvojrozmerného útvaru jednorozmernou krivkou, nekonečne dlhý obvod alebo nekonečne malý obsah. Fraktály nie sú zaujimavé iba pre matematikov, pre fyzikov, chemikov, geodetov a mnohých ďalších vedcov, ale aj pre umelcov a prakticky pre všetkých ľudí.

Ak máme zmerať dĺžku pobrežia skutočného ostrova, potom môžeme použiť viacero metód. Jedna z možností[19] je použiť meradlo s rozumnou dĺžkou, napríklad kružidlo s priemerom (t. j. vzdialenosťou hrotov) 1 m. Výsledné meranie bude predstavovať určitú aproximáciu skutočnej dĺžky pobrežia. Ak celé meranie zopakujeme s polovičnou dĺžkou meradla, zistíme, že výsledok sa o niečo zväčší. Podarilo sa nám totiž zachytiť viac detailov. Teoreticky sa môžeme zmenšovaním meradla (t. j. zachytením väčšieho a väčšieho množstva detailov) dopracovať k nekonečnej dĺžke tohto pobrežia.

Ako príklad môžeme uviesť (obrázok 3.1.43) fraktál známy ako Kochova snehová vločka alebo Kochov ostrov, ktorý publikoval už v roku 1904 švédsky matematik *Niels Fabian Helge von Koch* [1870–1924].



Obr. 3.1.43: Konštrukcia van Kochovej snehovej vločky.

Príklad 3.1.31.
Vypočítajte obvod o Kochovej snehovej vločky.

Riešenie.
Predpokladajme, že začneme konštruovať Kochovu snehovú vločku z rovnostranného trojuholníka (obrázok 3.1.43) so stranou majúcou veľkosť $d > 0$. Obvod trojuholníka je $3d$.
Pri prvej iterácii sa každá strana trojuholníka (na obrázku vľavo) rozdelí na 3 rovnaké časti veľkosti $\frac{d}{3}$, pričom sa stredná časť „natiahne“ na dve rovnako veľké časti. Takže z každej strany pôvodného troju-

[18] Z latinského *fractus* — zlomený, rozlámaný.
[19] *Mandelbrot:* How long is the coast of Great Britain, 1977.

holníka vzniknú štyri nové strany s dĺžkou $\frac{d}{3}$ a jej dĺžka sa zväčší na $\frac{4d}{3}$. To znamená, že sa obvod útvaru zväčší na hodnotu $\frac{3\cdot 4d}{3} = 4d$.
Pri všetkých nasledujúcich iteráciach sa každá strana daného útvaru analogicky rozdelí na tri rovnaké časti, pričom stredná z nich sa „natiahne" na dvojnásobok svojej veľkosti. Prakticky to znamená, že sa pri každej novej iterácii pôvodná strana, a tým aj celý obvod, zväčší na $\frac{4}{3}$ pôvodnej veľkosti.
To znamená, že obvody iterovaných útvarov tvoria geometrickú postupnosť

$$\left\{3d,\ 3d\left(\tfrac{4}{3}\right),\ 3d\left(\tfrac{4}{3}\right)^2,\ \ldots,\ 3d\left(\tfrac{4}{3}\right)^n,\ \ldots\right\} = \left\{3d\left(\tfrac{4}{3}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Obvod o Kochovej snehovej vločky sa rovná limite tejto postupnosti. Keďže $\frac{4}{3} > 1$, potom na základe príkladu 2.3.20 platí:

$$o = \lim_{n\to\infty}\left[3d\left(\tfrac{4}{3}\right)^n\right] = 3d\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{4}{3}\right)^n = 3d\cdot\infty = \infty. \blacksquare$$

Na záver uvedieme niektoré najznámejšie rovinné krivky a ich vyjadrenia v karteziánskom a prípadne aj polárnom systéme súradníc. Je samozrejmé, že medzi krivky môžeme zaradiť všetky funkcie. Niektorými z nich sme sa zaoberali v predchádzajúcej časti.

- **Kužeľosečky**

Kužeľosečky sú najznámejšie krivky a patria sem parabola, kružnica, elipsa a hyperbola. Medzi kužeľosečky môžeme zaradiť aj priamku, ktorá je grafom lineárnej funkcie. V tomto prípade hovoríme o **nevlastnej** (**degenerovanej**) **kužeľosečke**. Parabolu, kružnicu, elipsu a hyperbolu potom nazývame **vlastné** (**nedegenerované**) **kužeľosečky**.

Kružnica je rovinná krivka, ktorú definujeme ako množinu bodov X v rovine, ktoré majú od daného, pevného bodu S rovnakú vzdialenosť r. Bod S nazývame **stred kružnice** a nenulovú vzdialenosť r nazývame **polomer kružnice**.

Implicitne definujeme kružnicu k so stredom v bode $S = [c; d]$ a polomerom $r > 0$ v karteziánskom systéme súradníc (obr. 3.1.44) ako množinu

$$\left\{X \in R^2\,;\ X = [x; y]\,,\ (x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2\right\}. \tag{3.15}$$

To znamená, že je kružnica k implicitne určená rovnicou

$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2, \qquad \text{resp.}\ \ \frac{(x-c)^2}{r^2} + \frac{(y-d)^2}{r^2} = 1.$$

Určíme explicitný tvar rovnice kružnice k. Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva:

$$(y-d)^2 = r^2 - (x-c)^2, \qquad \text{t. j.}\ \ y = d \pm \sqrt{r^2 - (x-c)^2}.$$

Aby bol posledný výraz definovaný, musí platiť $0 \le r^2 - (x-c)^2 = (r-x+c)(r+x-c)$, t. j. $x \in \langle c-r\,;\, c+r\rangle$. To znamená, že[20] $k = k^+ \cup k^-$, pričom

$$k^{\pm}\colon\ y = d \pm \sqrt{r^2 - (x-c)^2},\quad x \in \langle c-r\,;\, c+r\rangle\,.$$

Parametrické vyjadrenie kružnice k určíme pomocou vzťahu (3.15). Parametrom bude polárny uhol $t \in \langle 0\,;\, 2\pi)$ so stredom v bode $S = [c; d]$. Uhol $t = 0$ zodpovedá polpriamke, ktorá začína v bode S a je rovnobežná s osou x. Na základe definície goniometrických funkcií sínus a kosínus (viď strana 194) má parametrické vyjadrenie kružnice k so stredom v bode $S = [c; d]$ a polomerom $r > 0$ tvar (obr. 3.1.45)

$$x = c + r\cos t,\quad y = d + r\sin t,\quad t \in \langle 0\,;\, 2\pi)\,.$$

Pre polárne súradnice $S = [\varphi_0; \rho_0]$ stredu kružnice k (obr. 3.1.46) platí $c = \rho_0\cos\varphi_0$, $d = \rho_0\sin\varphi_0$. Ak dosadíme do vzťahu (3.15) výrazy $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, potom na základe súčtových vzorcov pre goniometrické funkcie platí:

$$r^2 = (x-c)^2 + (y-d)^2 = (\rho\cos\varphi - \rho_0\cos\varphi_0)^2 + (\rho\sin\varphi - \rho_0\sin\varphi_0)^2 =$$

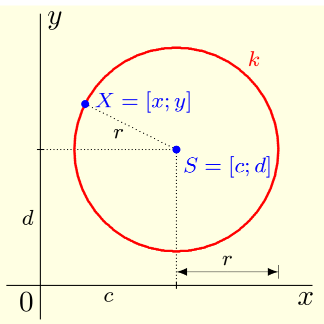
[20] Polkružnice $k^+\colon\ y = d + \sqrt{r^2-(x-c)^2}$, $k^-\colon\ y = d - \sqrt{r^2-(x-c)^2}$, ktoré tvoria kružnicu k.

$$= \rho^2 \cos^2 \varphi - 2\rho\rho_0 \cos\varphi \cos\varphi_0 + \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0 + \rho^2 \sin^2 \varphi - 2\rho\rho_0 \sin\varphi \sin\varphi_0 + \rho_0^2 \sin^2 \varphi_0 =$$
$$= \rho^2 \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi\right) - 2\rho\rho_0 \left(\cos\varphi \cos\varphi_0 + \sin\varphi \sin\varphi_0\right) + \rho_0^2 \left(\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0\right) =$$
$$= \rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos\left(\varphi - \varphi_0\right) + \rho_0^2.$$

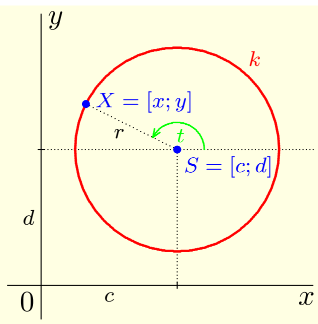
To znamená, že v polárnom systéme súradníc je kružnica k so stredom $S = [\varphi_0; \rho_0]$ a polomerom $r > 0$ implicitne vyjadrená rovnicou

$$k\colon\ \rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos\left(\varphi - \varphi_0\right) + \rho_0^2 = r^2.$$

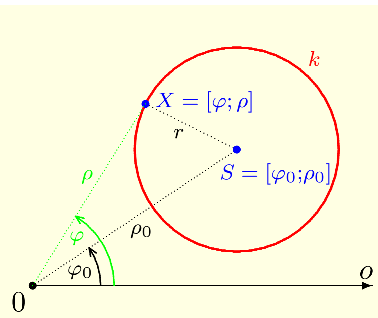
Poznámka 3.1.37.
Ak má kružnica k s polomerom r stred v počiatku $S = [0; 0]$, potom ju môžeme implicitne vyjadriť pomocou rovnice $x^2 + y^2 = r^2$, resp. explicitne $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.
Ak je v polárnom systéme stred kružnice k s polomerom r umiestnený do jej počiatku $S = [0; 0]$, potom jej vyjadrenie má tvar $\rho^2 = r^2$, t. j. tvar $\rho(\varphi) = r$, $\varphi \in \langle 0\,;\, 2\pi)$.



Obr. 3.1.44: Kružnica $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$.



Obr. 3.1.45: Kružnica $x = c + r\cos t$, $y = d + \sin t$.



Obr. 3.1.46: Kružnica $\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos\left(\varphi - \varphi_0\right) + \rho_0^2 = r^2$.

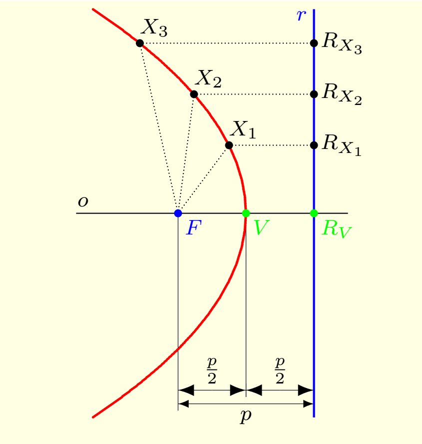
Parabola je rovinná krivka definovaná ako množina bodov X v rovine, ktoré majú od pevne daného bodu F a pevne danej priamky r rovnakú vzdialenosť. Bod F nazývame **ohnisko paraboly** a priamku r nazývame **riadiaca** (**direkčná**) **priamka paraboly**.

Označme R_X priesečník riadiacej priamky r s priamkou, ktorá je kolmá na r a prechádza bodom X (obr. 3.1.47). Úsečku XF nazývame (**ohniskový**) **sprievodič bodu** X a úsečku XR_X nazývame (**priamkový**) **sprievodič bodu** X. Z definície paraboly vyplýva, že pre sprievodiče bodu X platí $|Xr| = |XR_X| = |XF|$.

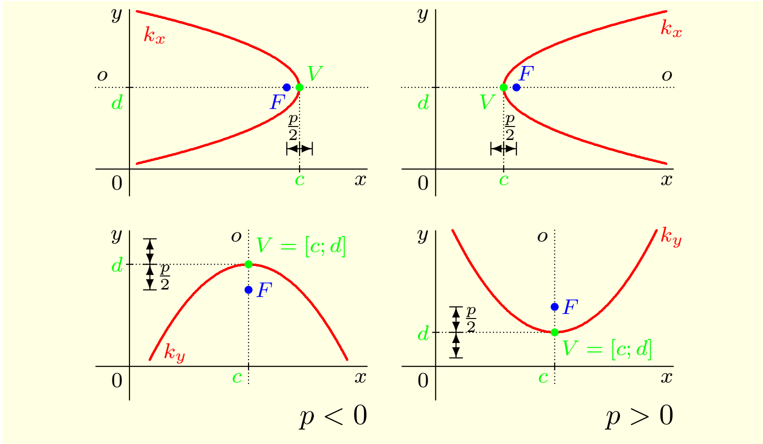
Vzdialenosť $p = |Fr|$, t. j. vzdialenosť ohniska F od riadiacej priamky r, nazývame **poloparameter paraboly**. Vzdialenosť $2p$ nazývame **parametrom paraboly**. Priamka o, ktorá prechádza ohniskom F a je kolmá na riadiacu priamku r, sa nazýva **os paraboly**. Priesečník V paraboly s osou o nazývame **vrchol paraboly**.[21]

Pri analytickom vyjadrení paraboly pripúšťame aj záporný parameter $p < 0$. V tomto prípade je táto parabola stredovo súmerná podľa spoločného vrchola V s parabolou s parametrom $-p > 0$ (obrázok 3.1.48).

[21] Vrchol V je bod ležiaci na parabole, ktorý má najmenšiu vzdialenosť od riadiacej priamky r a od ohniska F, t. j. VF, VR_V predstavujú najmenšie sprievodiče bodov paraboly.



Obr. 3.1.47: Parabola s ohniskom F.



Obr. 3.1.48: Parabola implicitne určená rovnicami $k_y\colon\ 2p(y-d) = (x-c)^2$, $k_x\colon\ 2p(x-c) = (y-d)^2$.

V karteziánskom systéme súradníc môže byť parabola orientovaná tak, že je jej os rovnobežná so súradnicovou osou x alebo je rovnobežná so súradnicovou osou y. Parabola k_y s vrcholom $V = [c; d]$, parametrom $2p$ a osou o, ktorá je rovnobežná s osou y (obr. 3.1.48), je daná implicitne vzťahom

$$k_y\colon\ 2p(y-d) = (x-c)^2. \tag{3.16}$$

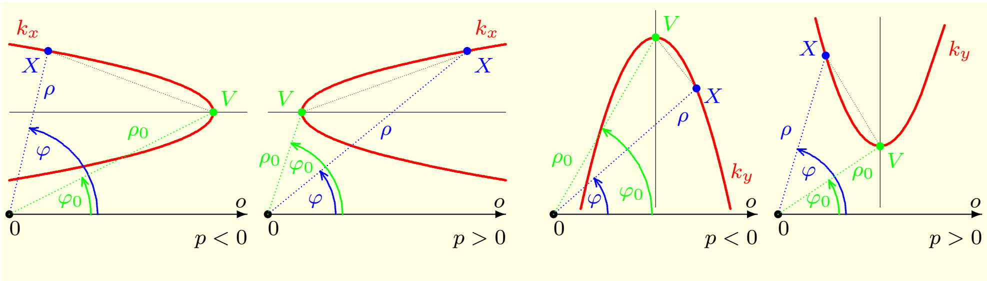
Parabola k_x s vrcholom $V = [c; d]$, parametrom $2p$ a osou o, ktorá je rovnobežná so súradnicovou osou x (obr. 3.1.48), je daná implicitne vzťahom

$$k_x\colon\ 2p(x-c) = (y-d)^2. \tag{3.17}$$

Zo vzťahov (3.16) a (3.17) vyplývajú pre k_y, k_x nasledujúce explicitné vyjadrenia[22]

$$k_y\colon\ y = d + \tfrac{(x-c)^2}{2p},\ x \in R, \qquad k_x = k_x^+ \cup k_x^-,\ k_x^{\pm}\colon\ y = d \pm \sqrt{2p(x-c)},\ x \in M_x.$$

Aby bola odmocnina definovaná, musí platiť $2p(x-c) \geq 0$, t. j. $px \geq pc$. Z toho vyplýva $x \geq c$, t. j. $M_x = \langle c\,;\,\infty)$ pre $p > 0$ a $x \leq c$, t. j. $M_x = (-\infty\,;\,c\rangle$ pre $p < 0$.



Obr. 3.1.49: Parabola s vrcholom $V = [\varphi_0; \rho_0]$, osou rovnobežnou s polárnou osou (vľavo) a osou kolmou na polárnu os (vpravo).

Ak bude vrchol V totožný s počiatkom súradnicového systému, t. j. ak bude platiť $V = [0; 0]$, potom zo vzťahov (3.16) a (3.17) vyplývajú vyjadrenia

$$k_y\colon\ 2py = x^2, \qquad k_x\colon\ 2px = y^2.$$

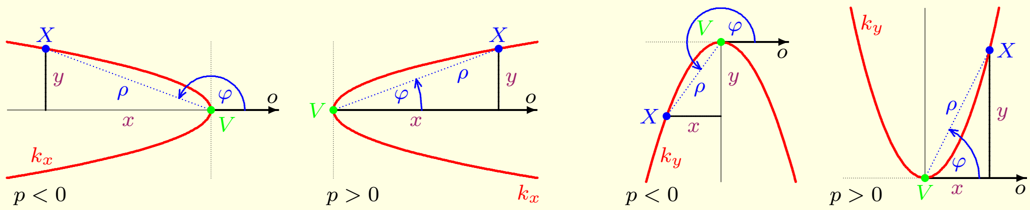
[22] Parabola k_x sa skladá z dvoch funkcií $k_x^+\colon\ y = d + \sqrt{2p(x-c)}$ a $k_x^-\colon\ y = d - \sqrt{2p(x-c)}$.

Pri praktickom použití sa môžeme stretnúť s rôznymi vyjadreniami paraboly v polárnom systéme súradníc. Uvažujme parabolu s vrcholom $V = [\varphi_0; \rho_0]$ a parametrom $2p$, ktorej os je rovnobežná s polárnou osou o (obr. 3.1.49 vľavo). Jej vyjadrenie v karteziánskom systéme má tvar $k_x\colon\ 2p(x-c) = (y-d)^2$, pričom $c = \rho_0 \cos\varphi_0$, $d = \rho_0 \sin\varphi_0$. Pre všetky body $X = [\varphi; \rho] \in k_x$ platí $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Z toho vyplýva, že parabola s osou rovnobežnou s polárnou osou má v polárnom systéme implicitné vyjadrenie

$$k_x\colon\ 2p\,(\rho\cos\varphi - \rho_0\cos\varphi_0) = (\rho\sin\varphi - \rho_0\sin\varphi_0)^2 . \tag{3.18}$$

Parabola s vrcholom $V = [\varphi_0; \rho_0]$, parametrom $2p$ a osou kolmou na polárnu os o (obr. 3.1.49 vpravo) má v karteziánskom systéme tvar $k_y\colon\ 2p(y-d) = (x-c)^2$, pričom $c = \rho_0\cos\varphi_0$, $d = \rho_0\sin\varphi_0$. Pre body $X = [\varphi; \rho] \in k_y$ platí $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Parabola k_y má potom v polárnom systéme tvar:

$$k_y\colon\ 2p\,(\rho\sin\varphi - \rho_0\sin\varphi_0) = (\rho\cos\varphi - \rho_0\cos\varphi_0)^2 . \tag{3.19}$$



Obr. 3.1.50: Parabola v polárnom systéme súradníc s vrcholom $V = [0; 0]$, osou totožnou s polárnou osou (vľavo) a osou kolmou na polárnu os (vpravo).

Vzťahy (3.18) a (3.19) sa zjednodušia, ak posunieme vrchol alebo ohnisko príslušnej paraboly do počiatku systému. Parabola k_x s vrcholom $V = [0; 0]$ má potom os totožnú s polárnou osou o (obr. 3.1.50) a pre jej vyjadrenie v polárnom systéme súradníc platí:

$$k_x\colon\ 2p\rho\cos\varphi = \rho^2\sin^2\varphi, \quad \text{kde } \varphi \in \left(-\tfrac{\pi}{2}\,;\,\tfrac{\pi}{2}\right) \text{ pre } p>0, \text{ resp. } \varphi\in\left(\tfrac{\pi}{2}\,;\,\tfrac{3\pi}{2}\right) \text{ pre } p<0. \tag{3.20}$$

Pre implicitný tvar paraboly k_y s vrcholom $V = [0; 0]$ analogicky platí:

$$k_y\colon\ 2p\rho\sin\varphi = \rho^2\cos^2\varphi, \quad \text{kde } \varphi\in(0\,;\,\pi) \text{ pre } p>0, \text{ resp. } \varphi\in(\pi\,;\,2\pi) \text{ pre } p<0. \tag{3.21}$$

Poznámka 3.1.38.
Pre $\sin\varphi \neq 0$ môžeme implicitný výraz (3.20) upraviť na explicitný tvar

$$\rho(\varphi) = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = 2p\cos\varphi\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = 2p\cos\varphi\,[1+\operatorname{cotg}^2\varphi] .$$

Rovnosť $\sin\varphi = 0$ nastáva pre $\varphi = 0$, resp. pre $\varphi = \pi$ a zodpovedá vrcholu paraboly. Vo vrchole paraboly definujeme $\rho(\varphi) = 0$. Ak to zhrnieme, potom môžeme parabolu k_x so stredom $V = [0; 0]$ vyjadriť v polárnom systéme v implictnom tvare

$$k_x\colon\ \rho(\varphi) = 2p\cos\varphi\left[1+\operatorname{cotg}^2\varphi\right], \quad \begin{cases} \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)-\{0\},\ \rho(0)=0 & \text{pre } p>0, \\ \varphi\in\left(\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right)-\{\pi\},\ \rho(\pi)=0 & \text{pre } p<0. \end{cases}$$

Analogicky pre parabolu k_y so stredom $V = [0; 0]$ vyplýva z výrazu (3.21) vzťah

$$k_y\colon\ \rho(\varphi) = 2p\sin\varphi\,[1+\operatorname{tg}^2\varphi], \quad \begin{cases} \varphi\in(0\,;\,\pi)-\left\{\frac{\pi}{2}\right\},\ \rho\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 & \text{pre } p>0, \\ \varphi\in(\pi\,;\,2\pi)-\left\{\frac{3\pi}{2}\right\},\ \rho\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0 & \text{pre } p<0. \end{cases}$$

Uvažujme parabolu s parametrom $2p$ a s ohniskom $F = [0; 0]$ umiestnenom v počiatku polárneho súradnicového systému, v ktorom je polárna os o totožná s kladnou časťou karteziánskej súradnicovej osi x. Parabola k_x má os totožnú s polárnou osou o (obr. 3.1.51 vľavo). Pre $p > 0$ platí $V = \left[\pi; \frac{p}{2}\right]$, $\varphi \in (0\,;\, 2\pi)$ a zo vzťahu (3.18) vyplýva:

$$2p\left(\rho\cos\varphi + \tfrac{p}{2}\right) = 2p\left(\rho\cos\varphi - \tfrac{p}{2}\cos\pi\right) = \left(\rho\sin\varphi - \tfrac{p}{2}\sin\pi\right)^2 = \rho^2\sin^2\varphi.$$

Pre $p < 0$ platí $V = \left[0; -\frac{p}{2}\right]$, $\varphi \in (-\pi\,;\, \pi)$ a zo vzťahu (3.18) analogicky vyplýva:

$$2p\left(\rho\cos\varphi + \tfrac{p}{2}\right) = 2p\left(\rho\cos\varphi + \tfrac{p}{2}\cos 0\right) = \left(\rho\sin\varphi + \tfrac{p}{2}\sin 0\right)^2 = \rho^2\sin^2\varphi.$$

To znamená, že parabola k_x s ohniskom $F = [0; 0]$ je implicitne určená vzťahom

$$k_x\colon\ 2p\rho\cos\varphi + p^2 = \rho^2\sin^2\varphi, \qquad \text{kde } \varphi \in (0\,;\, 2\pi) \text{ pre } p > 0, \text{ resp. } \varphi \in (-\pi\,;\, \pi) \text{ pre } p < 0. \qquad (3.22)$$

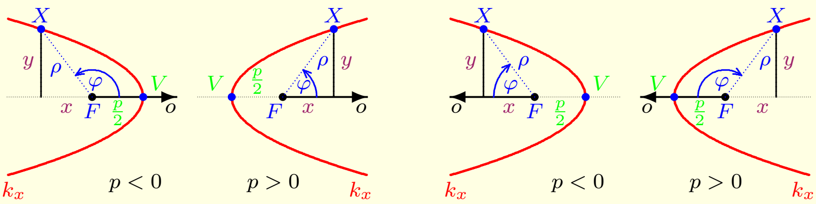
Poznámka 3.1.39.
Výraz (3.22) môžeme odvodiť tiež zo vzťahu (3.17). Stačí si uvedomiť, že vrchol paraboly k_x má karteziánske súradnice $V = \left[-\frac{p}{2}; 0\right]$ a že pre polárne a karteziánske súradnice ľubovoľného bodu $X \in k_x$ platia vzťahy $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Ak uvážime rovnosť $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$, potom zo vzťahu (3.22) vyplýva:

$$0 = \rho^2 - \rho^2\cos^2\varphi - 2p\rho\cos\varphi - p^2 = \rho^2 - (\rho\cos\varphi + p)^2 = (\rho - \rho\cos\varphi - p)\,(\rho + \rho\cos\varphi + p)\,,$$

t. j. $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$ alebo $\rho = -\frac{p}{1+\cos\varphi}$. Keďže pre všetky $\varphi \in R$ platí nerovnosť $0 \leq 1 \pm \cos\varphi$, pre explicitné vyjadrenie paraboly k_x potom platí:

$$\rho(\varphi) = \tfrac{-p}{1+\cos\varphi},\ \varphi \in (-\pi\,;\, \pi) \text{ pre } p<0, \quad \rho(\varphi) = \tfrac{p}{1-\cos\varphi},\ \varphi \in (0\,;\, 2\pi) \text{ pre } p>0. \qquad (3.23)$$



Obr. 3.1.51: Parabola k_x s ohniskom $F = [0; 0]$, s polarnou osou totožnou s kladnou polosou x, resp. so zápornou polosou x.

Ak je polárna os o orientovaná opačným smerom, t. j. ak je totožná so zápornou časťou karteziánskej súradnicovej osi x (obr. 3.1.51 vpravo), potom pre polárne a karteziánske[23] súradnice bodov $X \in k_x$ platí $-x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, t. j. $x = -\rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Vrchol V má v karteziánskom systéme súradnice[24] $V = \left[-\frac{p}{2}; 0\right]$. Pre polárne explicitné vyjadrenie danej paraboly potom (vzťah (3.17)) platí:

$$2p\left(-\rho\cos\varphi + \tfrac{p}{2}\right) = (\rho\sin\varphi - 0)^2\,, \qquad \text{t. j.} \quad -2p\rho\cos\varphi + p^2 = \rho^2\sin^2\varphi,$$

pričom $\varphi \in (0\,;\, 2\pi)$ pre $p < 0$ a $\varphi \in (-\pi\,;\, \pi)$ pre $p > 0$.

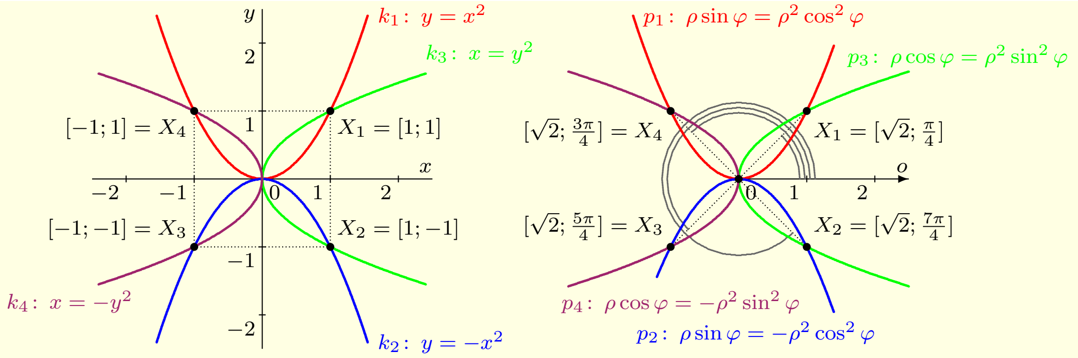
Posledná rovnica, podobne ako rovnica (3.22), má dve riešenia $\rho = -\frac{p}{1-\cos\varphi}$ a $\rho = \frac{p}{1+\cos\varphi}$, ktoré predstavujú explicitný tvar paraboly k_x

$$\rho(\varphi) = \tfrac{-p}{1-\cos\varphi},\ \varphi \in (0\,;\, 2\pi) \text{ pre } p<0, \quad \rho(\varphi) = \tfrac{p}{1+\cos\varphi},\ \varphi \in (-\pi\,;\, \pi) \text{ pre } p>0. \qquad (3.24)$$

[23] Karteziánske súradnice bodov roviny sa nemenia, mení sa iba ich vzťah s polárnymi súradnicami.
[24] Vrchol V má polárne súradnice $V = \left[0; \frac{p}{2}\right]$ pre $p > 0$ a $V = \left[\pi; -\frac{p}{2}\right]$ pre $p < 0$.

Poznámka 3.1.40.
Vzťahy (3.23), (3.24) vyjadrujú rovnaké paraboly. Stačí si uvedomiť, že paraboly s parametrami $2p$ a $-2p$ a ohniskom $F=[0;0]$ sú symetrické podľa karteziánskej osi y (tak ako polárne osi na obrázku 3.1.51). Ak dosadíme do vzťahov (3.23) výraz $q=-p$, dostaneme vzťahy (3.24) a naopak. Platí totiž

$$\rho=\frac{-p}{1+\cos\varphi}=\frac{-(-q)}{1+\cos\varphi}=\frac{q}{1+\cos\varphi},\ \ \varphi\in(-\pi\,;\,\pi)\,,\quad \text{pre } p=-q<0,\ \ \text{t. j. } q>0,$$
$$\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi}=\frac{-q}{1-\cos\varphi},\ \ \varphi\in(0\,;\,2\pi)\,,\quad \text{pre } p=-q>0,\ \ \text{t. j. } q<0.$$



Obr. 3.1.52: Paraboly k_1, k_2, k_3, k_4 a p_1, p_2, p_3, p_4 z príkladu 3.1.32.

Príklad 3.1.32.
Na obrázku 3.1.52 sú znázornené paraboly zadané v karteziánskom systéme vzťahmi

$$k_1:\ y=x^2, x\in R,\quad k_2:\ y=-x^2, x\in R,\quad k_3:\ x=y^2, y\in R,\quad k_4:\ x=-y^2, y\in R$$

a paraboly zadané v polárnom systéme implicitnými vzťahmi

$$p_1:\ \rho\sin\varphi=\rho^2\cos^2\varphi,\ \varphi\in(0\,;\,\pi)\,,\qquad p_2:\ \rho\sin\varphi=-\rho^2\cos^2\varphi,\ \varphi\in(\pi\,;\,2\pi)\,,$$
$$p_3:\ \rho\cos\varphi=\rho^2\sin^2\varphi,\ \varphi\in\left(-\tfrac{\pi}{2}\,;\,\tfrac{\pi}{2}\right),\qquad p_4:\ \rho\cos\varphi=-\rho^2\sin^2\varphi,\ \varphi\in\left(\tfrac{\pi}{2}\,;\,\tfrac{3\pi}{2}\right).$$

Pre uvedené paraboly platí $k_1=p_1$, $k_2=p_2$, $k_3=p_3$, $k_4=p_4$. ■

Elipsa je rovinná krivka definovaná ako množina bodov X v rovine, ktoré majú od dvoch daných, pevných bodov F_1 a F_2 konštantný súčet vzdialeností $2a$, pre ktorý platí[25] $2a>|F_1F_2|\geq 0$. Body F_1 a F_2 nazývame **ohniská elipsy**. Stred S úsečky F_1F_2 nazývame **stred elipsy**. Úsečky XF_1, XF_2 nazývame **sprievodiče bodu** X. Vzdialenosť $e=|SF_1|=|SF_2|$ nazývame (**lineárna**) **excentricita elipsy**. Pomer $\varepsilon=\frac{e}{a}$ nazývame **číselná excentricita elipsy**. Je zrejmé, že platí $\varepsilon<1$.

Priamka F_1F_2 sa nazýva **hlavná os elipsy** a priamka k nej kolmá, ktorá prechádza stredom elipsy S sa nazýva **vedľajšia os elipsy** (obr. 3.1.53). Priesečníky A, B elipsy s hlavnou osou nazývame **hlavné vrcholy elipsy** a priesečníky C, D s vedľajšou osou nazývame **vedľajšie vrcholy elipsy**. Polpriamky SA, SB nazývame **hlavné polosi elipsy** a polpriamky SC, SD nazývame **vedľajšie polosi elipsy**.

Pre hlavnú os platí $|AB|=2a$, $|SA|=|SB|=a$. Ak označíme $|SC|=|SD|=b$, t. j. $|CD|=2b$, potom z Pytagorovej vety v trojuholníku DSF_2 vyplýva:

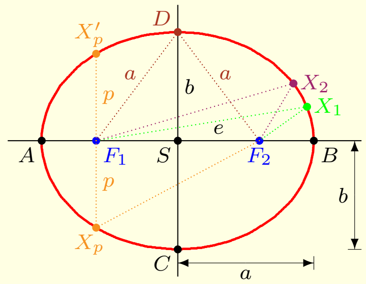
$$a^2=b^2+e^2,\quad b=\sqrt{a^2-e^2},\quad e=\sqrt{a^2-b^2},\quad \varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

[25]Prípad $2a=|F_1F_2|$ predstavuje úsečku F_1F_2.

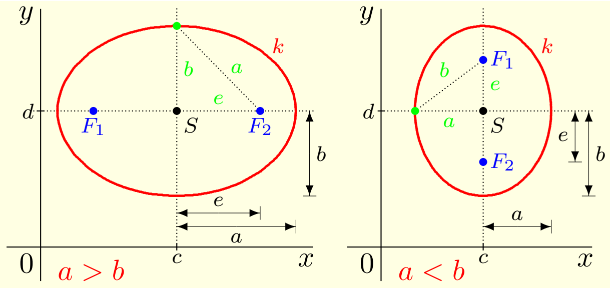
Dĺžku tetivy, ktorá je kolmá na hlavnú os a prechádza ohniskom ($X_P X_p'$ na obr. 3.1.53), nazývame **parameter elipsy** a značíme $2p$. Z vlastností elipsy vyplýva $p + |X_pF_2| = 2a$, t. j. $|X_pF_2| = 2a - p$ a z Pytagorovej vety v trojuholníku $F_1X_pF_2$ vyplýva:

$$p^2 = |X_pF_2|^2 - (2e)^2 = (2a-p)^2 - 4e^2 = 4a^2 - 4ap + p^2 - 4(a^2 - b^2) = 4b^2 - 4ap + p^2.$$

Z toho vyplýva rovnosť $0 = 4b^2 - 4ap$, t. j. pre parameter elipsy platí $2p = \frac{2b^2}{a}$.



Obr. 3.1.53: Elipsa s hlavnou polosou a a vedľajšou polosou b.



Obr. 3.1.54: Elipsa implicitne určená rovnicou $k\colon\ b^2(x-c)^2 + a^2(y-d)^2 = a^2b^2$.

Poznámka 3.1.41.

Je zrejmé, že pre hlavnú a vedľajšiu polos v elipse platí $a \geq b$. Pre $a = b$ platí $e = 0$, t. j. $|F_1F_2| = 0$. V tomto prípade dostávame kružnicu so stredom v bode $F_1 = F_2 = S$ a polomerom $a = b$. Takže kružnica je špeciálnym prípadom elipsy.

V karteziánskom systéme súradníc (obr. 3.1.54) je elipsa k so stredom $S = [c; d]$ a polosami $a > 0$, $b > 0$, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými osami,[26] implicitne definovaná ako množina bodov $X = [x; y] \in R^2$, pre ktoré platí:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1, \qquad \text{t. j. } b^2(x-c)^2 + a^2(y-d)^2 = a^2b^2. \tag{3.25}$$

Z predchádzajúceho vzťahu vyplývajú nasledujúce rovnosti

$$\frac{(y-d)^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-c)^2}{a^2} = \frac{a^2-(x-c)^2}{a^2}, \qquad \text{t. j. } y - d = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-c)^2}.$$

Aby bol posledný výraz definovaný, musí platiť $0 \leq a^2 - (x-c)^2 = (a - x + c)(a + x - c)$, t. j. $x \in \langle c - a\,;\, c + a\rangle$. To znamená, že pre explicitné vyjadrenie elipsy k platí:

$$k = k^+ \cup k^-, \quad k^\pm\colon\ y = d \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-c)^2}, \quad x \in \langle c - a\,;\, c + a\rangle\,.$$

Parametrické vyjadrenie elipsy k s polosami $a > 0$ (rovnobežnou s osou x), $b > 0$ (rovnobežnou s osou y) a stredom $S = [c; d]$ je podobné ako pri kružnici a má tvar

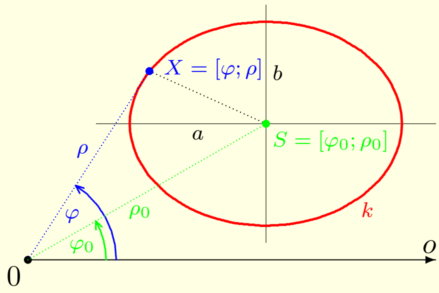
$$x = c + a\cos t, \quad y = d + b\sin t, \quad t \in \langle 0\,;\, 2\pi)\,.$$

Ak umiestnime počiatok súradnicového systému do stredu S, t. j. ak platí $S = [0; 0]$, potom pre implicitné a parametrické vyjadrenie elipsy k s polosami $a > 0$, $b > 0$ (rovnobežnými so súradnicovými osami x a y) platí:

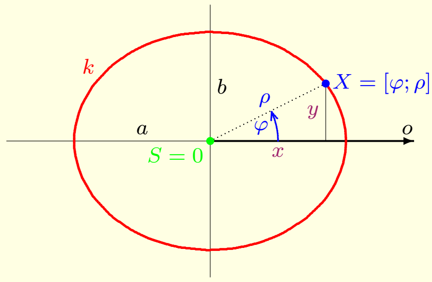
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{resp. } x = a\cos t, \ y = b\sin t, \ t \in \langle 0\,;\, 2\pi)\,.$$

V polárnom systéme súradníc pre stred $S = [\varphi_0; \rho_0]$ elipsy k s polosami $a > 0$, $b > 0$ platia vzťahy $c = \rho_0\cos\varphi_0$, $d = \rho_0\sin\varphi_0$. Elipsa je orientovaná tak, že polos a je rovnobežná s polárnou osou o. Ak

[26] Os $2a$ je rovnobežná so súradnicovou osou x a os $2b$ je rovnobežná s y. Hlavnou osou je väčšia z nich.



Obr. 3.1.55: Elipsa s polosou a rovnobežnou s polárnou osou o.



Obr. 3.1.56: Elipsa so stredom S v počiatku polárneho systému.

dosadíme $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ do vzťahu (3.25), potom pre implicitné vyjadrenie tejto elipsy k v polárnom systéme platí:

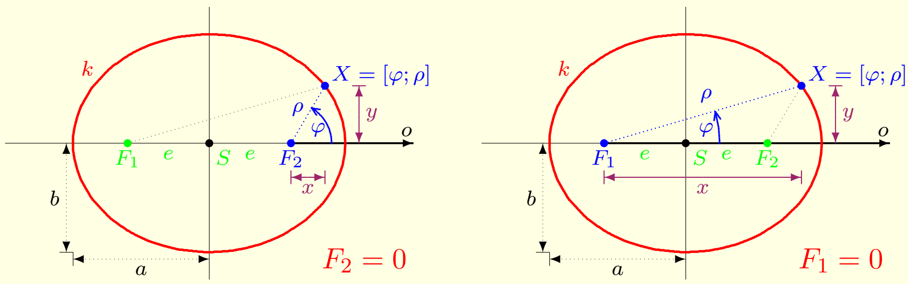
$$k\colon\ b^2(\rho\cos\varphi - \rho_0\cos\varphi_0)^2 + a^2(\rho\sin\varphi - \rho_0\sin\varphi_0)^2 = a^2b^2. \tag{3.26}$$

Situácia sa podstatne zjednoduší, ak umiestníme stred, resp. ohnisko elipsy do počiatku polárneho súradnicového systému a s polárnou osou ztotožníme jednu z jej polosí. Pre $S = [\varphi_0; \rho_0] = [0; 0]$, potom (obr. 3.1.56) z predchádzajúceho výrazu vyplýva:

$$a^2b^2 = b^2\rho^2\cos^2\varphi + a^2\rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\left[b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi\right].$$

Ak má elipsa k hlavnú polos a (t. j. $a \geq b$), potom platí $e^2 = a^2 - b^2$. Zo vzťahu $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ pre implictný tvar elipsy k so stredom $S = [0; 0]$ potom vyplýva:

$$k\colon\ \rho^2 = \frac{a^2b^2}{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\varphi} = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}, \quad \varphi\in\langle 0\,;\,2\pi)\,. \tag{3.27}$$



Obr. 3.1.57: Elipsa s hlavnou polosou ležiacou na polárnej osi a s ohniskom $[0; 0]$.

Nech k je elipsa so stredom S, hlavnou polosou a a vedľajšou polosou b. Umiestnime počiatok polárneho systému do jej ohniska F_2 tak, že bude polárna os o ležať na hlavnej polosi a (obr. 3.1.57 vľavo). Stred S elipsy k má polárne súradnice $S = [\pi; e]$ a karteziánske súradnice stredu elipsy sú $S = [e\cos\pi; e\sin\pi] = [-e; 0]$. Zo vzťahu (3.26) potom vyplýva:

$$a^2b^2 = b^2(\rho\cos\varphi + e)^2 + a^2(\rho\sin\varphi)^2 = b^2\rho^2\cos^2\varphi + 2b^2\rho e\cos\varphi + b^2e^2 + a^2\rho^2\sin^2\varphi.$$

Z rovností $e^2 = a^2 - b^2$, $a^2\sin^2\varphi = a^2 - a^2\cos^2\varphi$ potom vyplýva:

$$a^2b^2 = \rho^2\left[b^2\cos^2\varphi + a^2 - a^2\cos^2\varphi\right] + 2b^2\rho e\cos\varphi + b^2a^2 - b^2b^2,$$

$$0 = \rho^2 \left[a^2 - e^2 \cos^2 \varphi\right] + 2b^2 \rho e \cos\varphi - b^4.$$

Posledná rovnica má dve riešenia $\rho_1 = \frac{b^2}{e\cos\varphi + a}$, $\rho_2 = \frac{b^2}{e\cos\varphi - a}$. Zo vzťahov

$$e\cos\varphi - a \le e - a = \sqrt{a^2 - b^2} - a < 0, \qquad e\cos\varphi + a \ge -e + a = -\sqrt{a^2 - b^2} + a > 0$$

vyplýva, že daným podmienkam vyhovuje iba kladné riešenie ρ_1. Pre explicitný tvar elipsy k so stredom v ohnisku F_2 v polárnom systéme potom platí:

$$k\colon\ \rho(\varphi) = \frac{b^2}{a+e\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1+\frac{e\cos\varphi}{a}} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \quad \varphi \in \langle 0\,;\, 2\pi). \tag{3.28}$$

Ak umiestnime počiatok polárneho systému namiesto F_2 do ohniska F_1 a polárnu os do polpriamky F_1F_2 (obr. 3.1.57 vpravo), potom bude mať stred elipsy k v polárnom systéme súradnice $[0; e]$ a v karteziánskom systéme súradnice $S = [e; 0]$. Analogicky potom platí:

$$a^2b^2 = b^2(\rho\cos\varphi - e)^2 + a^2(\rho\sin\varphi)^2 = b^2\rho^2\cos^2\varphi - 2b^2\rho e\cos\varphi + b^2e^2 + a^2\rho^2\sin^2\varphi.$$

Posledný vzťah predstavuje kvadratickú rovnicu, ktorá má dve riešenia. Platí

$$0 = \rho^2\left[a^2 - e^2\cos^2\varphi\right] - 2b^2\rho e\cos\varphi - b^4, \qquad \rho_1 = \frac{-b^2}{e\cos\varphi - a}, \quad \rho_2 = \frac{-b^2}{e\cos\varphi + a}.$$

Podmienkam vyhovuje iba $\rho_1 > 0$. Elipsa k so stredom F_1 má potom explicitný tvar

$$k\colon\ \rho(\varphi) = \frac{b^2}{a-e\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1-\frac{e\cos\varphi}{a}} = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \quad \varphi \in \langle 0\,;\, 2\pi). \tag{3.29}$$

Hyperbola je rovinná krivka definovaná ako množina bodov X v rovine, ktoré majú od dvoch daných, pevných a rôznych bodov F_1 a F_2 konštantný rozdiel vzdialeností $2a$, pre ktorý platí[27] $0 < 2a < |F_1F_2|$. Body F_1 a F_2 nazývame **ohniská hyperboly**. Stred S úsečky F_1F_2 nazývame **stred hyperboly**. Úsečky XF_1, XF_2 nazývame **sprievodiče bodu X**. Vzdialenosť $e = |SF_1| = |SF_2|$ nazývame (**lineárna**) **excentricita hyperboly**. Pomer $\varepsilon = \frac{e}{a}$ nazývame **číselná excentricita hyperboly**. Je zrejmé, že platí $\varepsilon > 1$.

Priamka F_1F_2 sa nazýva **reálna os hyperboly** a priamka k nej kolmá, ktorá prechádza stredom hyperboly S sa nazýva **imaginárna os hyperboly** (obr. 3.1.58). Priesečníky A, B hyperboly s hlavnou osou nazývame **hlavné vrcholy hyperboly**. Body C, D ležiace na imaginárnej osi, ktorých vzdialenosť od hlavných vrcholov je rovná excentricite hyperboly e, nazývame **vedľajšie** (**imaginárne**) **vrcholy hyperboly**. Polpriamky SA, SB nazývame **reálne polosi hyperboly** a polpriamky SC, SD nazývame **vedľajšie** (**imaginárne**) **polosi hyperboly**. Ak pre hlavnú a imaginárnu os platí rovnosť $a = b$, potom hyperbolu nazývame **rovnoosá hyperbola**.

Pre reálnu os platí $|AB| = 2a$, $|SA| = |SB| = a$. Ak označíme $|SC| = |SD| = b$, t. j. $|CD| = 2b$, potom z Pytagorovej vety v trojuholníku DSF_2 vyplýva:

$$a^2 + b^2 = e^2, \quad b = \sqrt{e^2 - a^2}, \quad e = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Dĺžku tetivy, ktorá je kolmá na reálnu os a prechádza ohniskom hyperboly (X_PX_p' na obr. 3.1.58), nazývame **parameter hyperboly** a označujeme symbolom $2p$. Z vlastností hyperboly vyplýva rovnosť $|X_pF_2| - p = 2a$, t. j. $|X_pF_2| = 2a + p$. Z Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku $F_1X_pF_2$ potom vyplývajú vzťahy

$$p^2 = |X_pF_2|^2 - (2e)^2 = (2a+p)^2 - 4e^2 = 4a^2 + 4ap + p^2 - 4(a^2+b^2) = 4ap - 4b^2 + p^2,$$

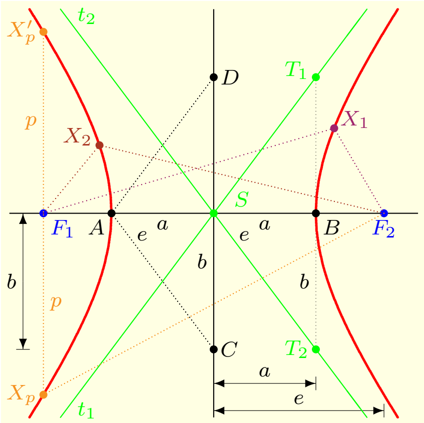
t. j. $0 = 4ap - 4b^2$. To znamená, že pre parameter hyperboly platí $2p = \frac{2b^2}{a}$.

V karteziánskom súradnicovom systéme (obr. 3.1.59) sú hyperboly k_x, k_y so stredom $S = [c; d]$ a s osami $2a > 0$, $2b > 0$, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými osami,[28] implicitne definované ako množiny bodov $X = [x; y] \in R^2$, pre ktoré platí:

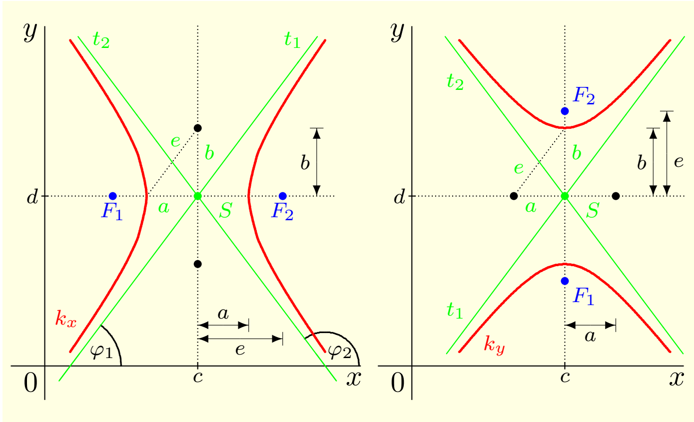
$$k_x\colon\ \frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1, \quad \text{t. j.}\ \ b^2(x-c)^2 - a^2(y-d)^2 = a^2b^2, \tag{3.30}$$

[27] Prípad $2a = |F_1F_2|$ predstavuje dve polpriamky so začiatočnými bodmi F_1 a F_2, ktoré ležia na priamke F_1F_2 a nemajú spoločné body. T. j. predstavuje všetky body priamky F_1F_2 okrem vnútorných bodov úsečky F_1F_2. Prípad $2a = 0$ predstavuje os úsečky F_1F_2, t. j. priamku.

[28] Os $2a$ je rovnobežná so súradnicovou osou x a os $2b$ je rovnobežná s osou y.



Obr. 3.1.58: Hyperbola.



Obr. 3.1.59: Hyperboly k_x, k_y.

$$k_y\colon\ \frac{(x-c)^2}{a^2}-\frac{(y-d)^2}{b^2}=-1,\qquad \text{t. j. } b^2(x-c)^2-a^2(y-d)^2=-a^2b^2. \tag{3.31}$$

Hyperbola k_x je orientovaná tak, že $2a$ (rovnobežná s osou x) je jej reálna os a $2b$ je imaginárna os. Naopak k_y má reálnu os $2b$ (rovnobežnú s osou y) a imaginárnu os $2a$. Pre lineárnu excentricitu platí $e=\sqrt{a^2+b^2}$, ale pre číselné excentricity platia vzťahy

$$k_x\colon\ \varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},\qquad k_y\colon\ \varepsilon=\frac{e}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}.$$

Hyperbola k_y sa v literatúre častejšie vyjadruje v tvare

$$k_y\colon\ \frac{(y-d)^2}{b^2}-\frac{(x-c)^2}{a^2}=1,\qquad \text{t. j. } a^2(y-d)^2-b^2(x-c)^2=a^2b^2.$$

Pre rovnoosé hyperboly k_x a k_y z predchádzajúcich vzťahov vyplýva vyjadrenie:

$$k_x\colon\ (x-c)^2-(y-d)^2=a^2,\qquad k_y\colon\ (x-c)^2-(y-d)^2=-a^2.$$

Zo vzťahov (3.30) a (3.31) (analogicky ako zo vzťahu (3.25) pri explicitnom tvare elipsy) vyplývajú nasledujúce explicitné vyjadrenia pre hyperboly k_x a k_y

$$k_x=k_x^+\cup k_x^-,\quad k_x^\pm\colon\ y=d\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x-c)^2-a^2},\ x\in R-(c-a\,;\,c+a)\,,$$

$$k_y=k_y^+\cup k_y^-,\quad k_y^\pm\colon\ y=d\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x-c)^2+a^2},\ x\in(-\infty\,;\,\infty)\,.$$

Priamky (obr. 3.1.59), ktoré sa dotýkajú hyperboly k_x, resp. k_y v nekonečne vzdialených bodoch[29] $\pm\infty$ sa nazývajú **asymptoty hyperboly** k_x resp. k_y. Asymptoty hyperboly k_x a taktiež asymptoty hyperboly k_y prechádzajú stredom $S=[c;d]$ danej hyperboly a v karteziánskom systéme majú rovnice

$$t_{1,2}\colon\ y-d=\pm\frac{b}{a}(x-c),\qquad \text{t. j. } t_1\colon\ y=d+\frac{b}{a}(x-c),\quad t_2\colon\ y=d-\frac{b}{a}(x-c).$$

Pomery $\pm\frac{b}{a}$ predstavujú tangensy uhlov $\varphi_{1,2}$ (smernice), ktoré zvierajú asymptoty $t_{1,2}$ so súradnicovou osou x (obr. 3.1.59). To znamená, že platí[30]

$$\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\pm\frac{b}{a},\qquad \text{t. j. } \varphi_1=\operatorname{arctg}\frac{b}{a},\quad \varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{-b}{a}+\pi=\pi-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\pi-\varphi_1.$$

Ak uvážime definície goniometrických funkcií a vlastnosti k_x, k_y, potom pre φ_1 platí:

$$k_x\colon\ \varphi_1=\arccos\frac{a}{e}=\arccos\frac{1}{\varepsilon},\qquad k_y\colon\ \varphi_1=\arcsin\frac{b}{e}=\arcsin\frac{1}{\varepsilon}. \tag{3.32}$$

Príklad 3.1.33.

Na obrázku 3.1.60 sú znázornené rovnoosé hyperboly $k_x\colon\ x^2-y^2=9$, $k_y\colon\ y^2-x^2=9$ so stredom v bode $S=[0;0]$ a polosoami $a=b=3$. Pre lineárnu a číselnú excentricitu týchto hyperbol platia vzťahy $e=\sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{2}$, $\varepsilon=\sqrt{2}$. Hyperbola k_x má ohniská $F_{1,2}=\big[\pm3\sqrt{2};0\big]$ a hyperbola k_y má

[29] To znamená, že sa priamky t_1, resp. t_2 približujú k danej hyperbole a nikdy sa jej nedotknú.

[30] Uhol φ_2 nie je z intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right)$ ale z intervalu $\left(\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right)$. Preto je tam posunutie o uhol π.

ohniská $F_{1,2} = [0; \pm 3\sqrt{2}]$. Obe tieto hyperboly majú rovnaké asymptoty určené rovnicami $t_1\colon\ y = x$, $t_2\colon\ y = -x$. ■

Hyperbolu, rovnako ako každú krivku, môžeme v parametrickom tvare vyjadriť mnohými spôsobmi. Najjednoduchšie je vyjadrenie pomocou hyperbolických funkcií. Hyperbola k_x s hlavnou polosou $a > 0$ (rovnobežnou s osou x), s imaginárnou polosou $b > 0$ (rovnobežnou s osou y) a stredom $S = [c; d]$ má v parametrickom vyjadrení tvar

$$k_x\colon\ x = c \pm a\cosh t, \quad y = d + b\sinh t, \quad t \in R.$$

Vyjadrenie pomocou goniometrických funkcií je trochu zložitejšie a má tvar

$$k_x\colon\ x = c + \tfrac{a}{\sin t}, \quad y = d + \tfrac{b\cos t}{\sin t}, \quad t \in (0\,;\,\pi) \cup (\pi\,;\,2\pi)\,,$$

$$\text{resp.}\quad k_x\colon\ x = c + \tfrac{a}{\cos t}, \quad y = d + \tfrac{b\sin t}{\cos t}, \quad t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}\,;\,\tfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\tfrac{\pi}{2}\,;\,\tfrac{3\pi}{2}\right).$$

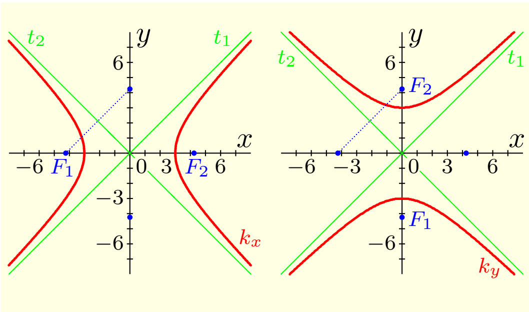
Poznámka 3.1.42.

Ak v predchádzajúcich parametrických vyjadreniach hyperboly k_x navzájom vymeníme parametrizujúce funkcie pre súradnice x a y, dostaneme parametrické vyjadrenie pre hyperbolu k_y, t. j. pre hyperbolu so stredom $S = [c; d]$, s imaginárnou polosou $a > 0$ (rovnobežnou s osou x) a hlavnou polosou $b > 0$ (rovnobežnou s osou y). Potom platí:

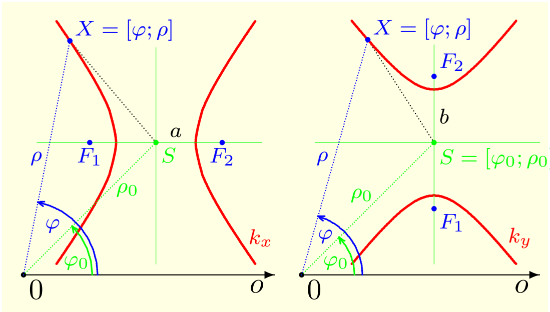
$$k_y\colon\ x = c + a\sinh t, \quad y = d \pm b\cosh t, \quad t \in R,$$

$$\text{resp.}\quad k_y\colon\ x = c + \tfrac{a\cos t}{\sin t}, \quad y = d + \tfrac{b}{\sin t}, \quad t \in (0\,;\,\pi) \cup (\pi\,;\,2\pi)\,,$$

$$\text{resp.}\quad k_y\colon\ x = c + \tfrac{a\sin t}{\cos t}, \quad y = d + \tfrac{b}{\cos t}, \quad t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}\,;\,\tfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\tfrac{\pi}{2}\,;\,\tfrac{3\pi}{2}\right).$$



Obr. 3.1.60: Rovnoosé hyperboly z príkladu 3.1.33.



Obr. 3.1.61: Hyperbola s polosami rovnobežnými s polárnou osou.

Predpokladajme, že sú hyperboly k_x, k_y s polosami $a > 0$, $b > 0$ umiestnené v polárnom súradnicovom systéme tak, že ich polos a je rovnobežná s polárnou osou o (obr. 3.1.61). To znamená, že hyperbola k_x má reálnu polos rovnobežnú s polárnou osou a hyperbola k_y má reálnu polos kolmú na polárnu os. Pre ich stred $S = [\varphi_0; \rho_0]$ platí $c = \rho_0 \cos\varphi_0$, $d = \rho_0 \sin\varphi_0$. Ak dosadíme $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ do vzťahov (3.30) a (3.31), dostaneme pre hyperboly k_x, k_y nasledujúce implicitné vyjadrenia

$$k_{x,y}\colon\ b^2(\rho\cos\varphi - \rho_0\cos\varphi_0)^2 - a^2(\rho\sin\varphi - \rho_0\sin\varphi_0)^2 = \pm a^2b^2. \tag{3.33}$$

Ak umiestnime stred hyperboly S do počiatku polárneho súradnicového systému (obr. 3.1.62), t. j. ak $S = [\varphi_0; \rho_0] = [0; 0]$, potom pre dané vyjadrenia platí:

$$k_{x,y}\colon\ b^2(\rho\cos\varphi - 0)^2 - a^2(\rho\sin\varphi - 0)^2 = \rho^2b^2\cos^2\varphi - \rho^2a^2\sin^2\varphi = \pm a^2b^2.$$

To znamená, že hyperbola so stredom $S=[0;0]$ má implicitné vyjadrenie

$$k_x\colon\ \rho^2\left[b^2\cos^2\varphi-a^2\sin^2\varphi\right]=a^2b^2,\qquad k_y\colon\ \rho^2\left[b^2\cos^2\varphi-a^2\sin^2\varphi\right]=-a^2b^2.$$

Hyperbola k_x má reálnu polos a totožnú s polárnou osou o a imaginárnu polos b. Pre jej číselnú excentricitu platí $\varepsilon=\frac{e}{a}$. Implicitné vyjadrenie má potom tvar

$$k_x\colon\ \rho^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi-a^2(1-\cos^2\varphi)}=\frac{a^2b^2}{-a^2+(a^2+b^2)\cos^2\varphi}=\frac{b^2}{-1+\varepsilon^2\cos^2\varphi}. \tag{3.34}$$

Aby mala rovnica zmysel, musí platiť $-1+\varepsilon^2\cos^2\varphi>0$. Z toho vyplýva:

$$\cos^2\varphi>\tfrac{1}{\varepsilon^2},\qquad \text{t. j.}\quad \cos\varphi\in\left\langle -1\,;\,-\tfrac{1}{\varepsilon}\right)\cup\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\,;\,1\right\rangle.$$

Ak označíme φ_1 uhol asymptoty t_1 s osou o, potom zo vzťahu (3.32) vyplýva[31]

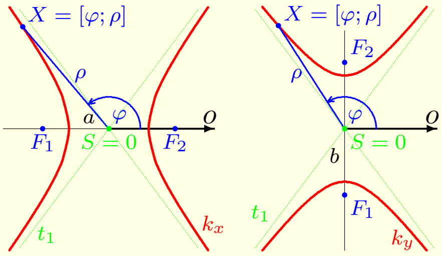
$$\varphi\in(-\varphi_1\,;\,\varphi_1)\cup(\pi-\varphi_1\,;\,\pi+\varphi_1),\qquad \text{kde}\quad \varphi_1=\arccos\tfrac{1}{\varepsilon}=\arccos\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Hyperbola k_y má reálnu polos b kolmú na polárnu os o a imaginárnu polos má a (obr. 3.1.62). Pre číselnú excentricitu platí $\varepsilon=\frac{e}{b}$. Implicitné vyjadrenie má tvar

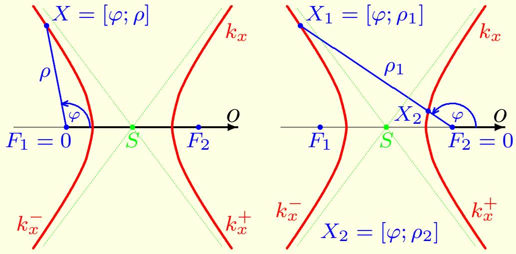
$$k_y\colon\ \rho^2=\frac{-a^2b^2}{b^2(1-\sin^2\varphi)-a^2\sin^2\varphi}=\frac{-a^2b^2}{b^2-(a^2+b^2)\sin^2\varphi}=\frac{a^2}{-1+\varepsilon^2\sin^2\varphi}. \tag{3.35}$$

Pre uhol φ musí platiť $-1+\varepsilon^2\sin^2\varphi>0$ Ak označíme φ_1 uhol asymptoty t_1 s osou o, potom (analogicky ako pri hyperbole k_x) zo vzťahu (3.32) vyplýva[32]

$$\varphi\in(\varphi_1\,;\,\pi-\varphi_1)\cup(\pi+\varphi_1\,;\,2\pi-\varphi_1),\qquad \text{kde}\quad \varphi_1=\arcsin\tfrac{1}{\varepsilon}=\arcsin\tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Obr. 3.1.62: Hyperbola so stredom v počiatku polárneho systému.



Obr. 3.1.63: Hyperbola s ohniskom v počiatku polárneho systému.

Umiestnime hyperbolu do súradnicového systému tak, aby v počiatku bolo jedno z jej ohnísk $F_{1,2}$ a aby polárna os o ležala na reálnej osi (obr. 3.1.63).

Umiestnime počiatok polárneho systému do ohniska F_2 hyperboly k_x (obr. 3.1.63 vpravo). Stred S hyperboly k_x má polárne súradnice $S=[\pi;e]$ a Karteziánske súradnice $S=[e\cos\pi;e\sin\pi]=[-e;0]$. Zo vzťahu (3.33) vyplýva:

$$\begin{aligned}a^2b^2=b^2(\rho\cos\varphi-e\cos\pi)^2-a^2(\rho\sin\varphi-e\sin\pi)^2&=b^2(\rho\cos\varphi+e)^2-a^2(\rho\sin\varphi)^2=\\ &=b^2\rho^2\cos^2\varphi+2b^2\rho e\cos\varphi+b^2e^2-a^2\rho^2\sin^2\varphi=\\ &=\rho^2\left[b^2\cos^2\varphi-a^2(1-\cos^2\varphi)\right]+2b^2\rho e\cos\varphi+b^2(a^2+b^2).\end{aligned}$$

Dostali sme rovnicu $0=\rho^2\left[-a^2+e^2\cos^2\varphi\right]+2b^2\rho e\cos\varphi+b^4$, ktorá má dve riešenia

$$\rho_{1,2}=\frac{-b^2}{e\cos\varphi\pm a}=\frac{-\frac{b^2}{a}}{\frac{e\cos\varphi}{a}\pm1}=\frac{-p}{\varepsilon\cos\varphi\pm1}=\frac{p}{-\varepsilon\cos\varphi\mp1}.$$

[31] $\varphi\in(-\varphi_1\,;\,\varphi_1)$ zodpovedá pravej časti a $\varphi\in(\pi-\varphi_1\,;\,\pi+\varphi_1)$ zodpovedá ľavej časti hyperboly k_x.
[32] $\varphi\in(\varphi_1\,;\,\pi-\varphi_1)$ zodpovedá hornej časti a $\varphi\in(\pi+\varphi_1\,;\,2\pi-\varphi_1)$ zodpovedá dolnej časti k_y.

Pre uhol φ musí platiť $-\varepsilon\cos\varphi+1>0$, resp. $-\varepsilon\cos\varphi-1>0$. Ak označíme φ_1 uhol asymptoty t_1 s osou o a použijeme vzťah (3.32), potom pre $k_x^+\colon\ \rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ platí:

$$1>\varepsilon\cos\varphi \iff \tfrac{1}{\varepsilon}>\cos\varphi, \quad \text{t. j. } \varphi\in(\varphi_1\,;\,2\pi-\varphi_1)\,,\ \varphi_1=\arccos\tfrac{1}{\varepsilon}.$$

Vzťah k_x^+ predstavuje pravú časť hyperboly k_x (obr. 3.1.63 vpravo). Pre ľavú časť tejto hyperboly $k_x^-\colon\ \rho=\frac{p}{-1-\varepsilon\cos\varphi}$ platí analogicky:

$$-1>\varepsilon\cos\varphi \iff \tfrac{-1}{\varepsilon}>\cos\varphi, \quad \text{t. j. } \varphi\in(\pi-\varphi_1\,;\,\pi+\varphi_1)\,,\ \varphi_1=\arccos\tfrac{1}{\varepsilon}.$$

Ak to zhrnieme, potom hyperbola k_x s ohniskom F_2 v počiatku polárneho systému a s reálnou osou totožnou s polárnou osou je určená vzťahmi

$$\begin{aligned} k_x=k_x^-\cup k_x^+, \qquad & k_x^-\colon\ \rho(\varphi)=\tfrac{p}{-\varepsilon\cos\varphi-1},\ \varphi\in(\pi-\varphi_1\,;\,\pi+\varphi_1)\,,\\ & k_x^+\colon\ \rho(\varphi)=\tfrac{p}{-\varepsilon\cos\varphi+1},\ \varphi\in(\varphi_1\,;\,2\pi-\varphi_1)\,, \end{aligned} \tag{3.36}$$

kde $\varphi_1=\arccos\frac{1}{\varepsilon}=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ je uhol asymptoty t_1 s polárnou osou o.

Ak umiestnime počiatok polárneho systému namiesto F_2 do ohniska F_1 a polárnu os do polpriamky F_1F_2 (obr. 3.1.63 vľavo), potom bude mať stred elipsy k v polárnom systéme súradnice $[0;e]$ a v karteziánskom systéme súradnice $S=[e;0]$. Zo vzťahu (3.33) vyplýva:

$$\begin{aligned} a^2b^2 &= b^2(\rho\cos\varphi-e\cos 0)^2-a^2(\rho\sin\varphi-e\sin 0)^2=b^2(\rho\cos\varphi-e)^2-a^2(\rho\sin\varphi)^2=\\ &= b^2\rho^2\cos^2\varphi-2b^2\rho e\cos\varphi+b^2e^2-a^2\rho^2\sin^2\varphi=\\ &= \rho^2\left[b^2\cos^2\varphi-a^2(1-\cos^2\varphi)\right]-2b^2\rho e\cos\varphi+b^2(a^2+b^2). \end{aligned}$$

Z toho vyplýva kvadratická rovnica $0=\rho^2\left[-a^2+e^2\cos^2\varphi\right]-2b^2\rho e\cos\varphi+b^4$ s riešeniami

$$\rho_{1,2}=\frac{b^2}{e\cos\varphi\pm a}=\frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{e\cos\varphi}{a}\pm 1}=\frac{p}{\varepsilon\cos\varphi\pm 1}=\frac{p}{\varepsilon\cos\varphi\mp 1}.$$

Pre uhol φ musí platiť $\varepsilon\cos\varphi+1>0$, resp. $\varepsilon\cos\varphi-1>0$. Ak označíme φ_1 uhol asymptoty t_1 s osou o a použijeme vzťah (3.32), potom pre $k_x^-\colon\ \rho=\frac{p}{\varepsilon\cos\varphi+1}$ platí:

$$\varepsilon\cos\varphi>-1 \iff \cos\varphi>\tfrac{-1}{\varepsilon}, \quad \text{t. j. } \varphi\in(-\pi+\varphi_1\,;\,\pi-\varphi_1)\,,\ \varphi_1=\arccos\tfrac{1}{\varepsilon}.$$

Výraz k_x^- predstavuje ľavú časť hyperboly k_x (obr. 3.1.63 vľavo). Pre pravú časť tejto hyperboly $k_x^+\colon\ \rho=\frac{p}{\varepsilon\cos\varphi-1}$ platí analogicky:

$$\varepsilon\cos\varphi>1 \iff \cos\varphi>\tfrac{1}{\varepsilon}, \quad \text{t. j. } \varphi\in(-\varphi_1\,;\,\varphi_1)\,,\ \varphi_1=\arccos\tfrac{1}{\varepsilon}.$$

Ak to zhrnieme, potom hyperbola k_x s ohniskom F_1 v počiatku polárneho systému a s reálnou osou totožnou s polárnou osou je určená vzťahmi

$$\begin{aligned} k_x=k_x^-\cup k_x^+, \qquad & k_x^-\colon\ \rho(\varphi)=\tfrac{p}{\varepsilon\cos\varphi-1},\ \varphi\in(\pi-\varphi_1\,;\,-\pi+\varphi_1)\,,\\ & k_x^+\colon\ \rho(\varphi)=\tfrac{p}{\varepsilon\cos\varphi+1},\ \varphi\in(-\varphi_1\,;\,\varphi_1)\,, \end{aligned} \tag{3.37}$$

kde $\varphi_1=\arccos\frac{1}{\varepsilon}=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ je uhol asymptoty t_1 s polárnou osou o.

Poznámka 3.1.43.
Vo všeobecnosti nemusia byť kužeľosečky v rovine orientované tak, že sú ich osi rovnobežné so súradnicovými osami. V tomto prípade môžeme otočiť súradnicový systém okolo počiatku alebo danú kužeľosečku (okolo stredu, prípadne okolo ohniska) do daného smeru a použiť predchádzajúce výsledky.

- **Cykloida**

Cykloida je rovinná krivka, ktorú pri kotúľaní kružnice k po danej priamke opisuje daný bod B, ktorý je pevný vzhľadom na kružnicu[33] k (obr. 3.1.64).

[33]Poloha bodu B sa vzhľadom na otáčajúcu sa kružnicu k nemení. Otáča sa spolu s touto kružnicou k a jeho vzdialenosť $|SB|$ od stredu kružnice k je konštantná.

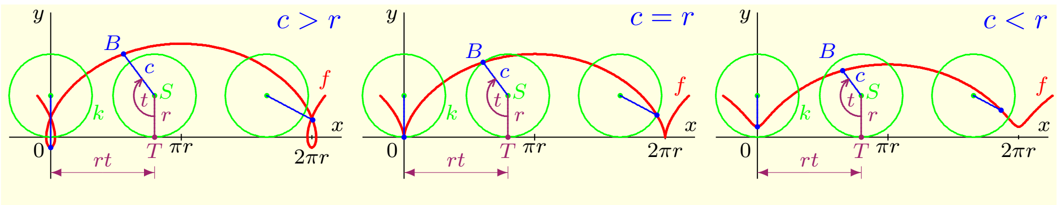
Ak zvolíme karteziánsky systém tak, aby daná priamka bola totožná so súradnicovou osou x a stred S kružnice k a bod B (ktorého pohyb sledujeme) ležali na začiatku pohybu na súradnicovej osi y, potom je cykloida f určená parametrickými rovnicami

$$f\colon\ x = rt - c\sin t, \quad y = r - c\cos t, \qquad t\in R, \tag{3.38}$$

kde $r > 0$ je polomer kružnice k, hodnota $c \geq 0$ predstavuje vzdialenosť bod B od stredu S kružnice k, t. j. $c = |BS|$. Parameter t zodpovedá orientovanému uhlu (obr. 3.1.64), ktorý zviera polpriamka ST s polpriamkou SB (t. j. súradnicová os y a priamka SB).

Ak je bod B totožný so stredom S, t. j. ak $c = |BS| = 0$, potom zo vzťahu (3.38) vyplýva $f\colon\ x = rt$, $y = r$, $t \in R$. To znamená, že sa cykloida f redukuje na priamku, ktorá je rovnobežná s pôvodnou priamkou, pričom ich vzdialenosť je r.

Ak bod B leží na obvode kružnice k (ak $c = r$), potom sa cykloida nazýva **obyčajná**. Ak bod B leží vo vnútri kružnice k (ak $c < r$), potom sa cykloida nazýva **skrátená**. Ak bod B leží mimo kružnice k (ak $c > r$), potom sa cykloida nazýva **predĺžená**.



Obr. 3.1.64: Predĺžená, obyčajná a skrátená cykloida.

- **Hypocykloida**

Hypocykloida je rovinná krivka, ktorú pri kotúľaní kružnice k po vnútornej strane pevne danej kružnice K opisuje bod B, ktorý je pevný vzhľadom na[33] k (obr. 3.1.65).

Zvoľme karteziánsky systém tak, aby bol jeho počiatok totožný so stredom pevnej kružnice K a stred S otáčajúcej sa kružnice k ležal na začiatku pohybu na kladnej súradnicovej polosi x. Predpokladajme, že bod B, ktorého pohyb sledujeme, leží na začiatku pohybu na súradnicovej osi x (v prieniku kladnej časti osi x a kružnice K). Hypocykloida f je potom určená parametrickými rovnicami

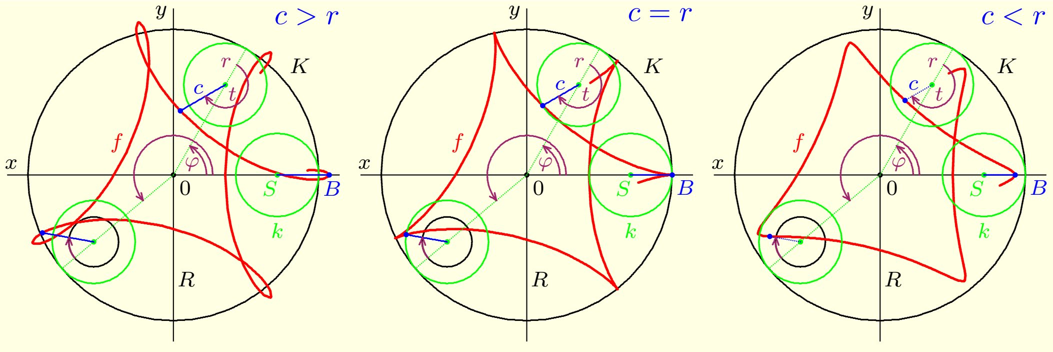
$$f\colon\ x = (R-r)\cos\tfrac{rt}{R} + c\cos\tfrac{(R-r)t}{R},\ \ y = (R-r)\sin\tfrac{rt}{R} - c\sin\tfrac{(R-r)t}{R}, \quad t\in R, \tag{3.39}$$

kde $R > 0$ je polomer pevnej kružnice K, $r > 0$ je polomer otáčajúcej sa kružnice k, $c \geq 0$ je vzdialenosť bod B od stredu S kružnice k, t. j. $c = |BS|$. Parameter t zodpovedá orientovanému uhlu (obr. 3.1.65), ktorý zviera polpriamka ST s polpriamkou SB (t. j. spojnica stredov kružníc k a K s priamkou SB). Aby sa mohla kružnica k otáčať okolo kružnice K, musí platiť nerovnosť $R > r$.

Označme φ uhol otočenia bodu S od začiatku otáčania, t. j. orientovaný uhol kladnej polosi x s polpriamkou spájajúcou počiatok súradnicového systému a stred S. Dĺžka oblúka pohybujúcej sa kružnice k, ktorá zodpovedá uhlu t je rovná rt. Na druhej strane dĺžka oblúka pevnej kružnice K, ktorá zodpovedá uhlu φ je rovnaká a rovná sa $R\varphi$. To znamená, že platí $rt = R\varphi$, t. j. $t = \frac{R\varphi}{r}$. Ak dosadíme výraz $t = \frac{R\varphi}{r}$ do vzťahu (3.39), potom dostaneme ekvivalentné parametrické vyjadrenie hypocykloidy

$$f\colon\ x = (R-r)\cos\varphi + c\cos\tfrac{(R-r)\varphi}{r},\ \ y = (R-r)\sin\varphi - c\sin\tfrac{(R-r)\varphi}{r}, \quad \varphi\in R. \tag{3.40}$$

Ak bod B leží na obvode kružnice k (ak $c = r$), hypocykloida sa nazýva **obyčajná**. Ak bod B leží vo vnútri kružnice k (ak $c < r$), hypocykloida sa nazýva **skrátená**. Ak bod B leží mimo kružnice k (ak $c > r$), potom sa hypocykloida nazýva **predĺžená**.



Obr. 3.1.65: Predĺžená, obyčajná a skrátená hypocykloida.

Ak platí $B = S$, t. j. $c = |BS| = 0$, potom zo vzťahu (3.40) vyplýva pre hypocykloidu vyjadrenie $f\colon\ x = (R-r)\cos\varphi,\ y = (R-r)\sin\varphi,\ \varphi\in R$. To znamená, že sa hypocykloida f redukuje na kružnicu, ktorá je sústredná s kružnicou K a má polomer $R-r$.

Ak je pomer $m = \frac{R}{r}$ prirodzené číslo, potom hypocykloida (obr. 3.1.66) splynie do m súvislých oblúkov a stačí ju definovať na intervale dĺžky 2π, napr. pre $\varphi\in\langle 0\,;\,2\pi)$. Pre polomery platí $R = mr$, $R-r = (m-1)r$ a hypocykloida má tvar

$$f\colon\ x = (m-1)r\cos\varphi + c\cos{(m-1)\varphi},\ y = (m-1)r\sin\varphi - c\sin{(m-1)\varphi},\quad \varphi\in\langle 0\,;\,2\pi)\,.$$

V praxi sa často používa obyčajná hypocykloida s pomerom $m = 4$, t. j. $R = 4r$, $c = r$, ktorá sa nazýva **asteroida**, resp. **hviezdica** (obr. 3.1.66). Na základe príkladu 3.1.27 potom pre súradnice asteroidy pre $\varphi\in\langle 0\,;\,2\pi)$ platí:

$$x = 3r\cos\varphi + r\cos 3\varphi = 3r\cos\varphi + r(-3\cos\varphi + 4\cos^3\varphi) = 4r\cos^3\varphi = R\cos^3\varphi,$$

$$y = 3r\sin\varphi - r\sin 3\varphi = 3r\sin\varphi - r(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi) = 4r\sin^3\varphi = R\sin^3\varphi.$$

Z toho vyplýva $x^2 = R^2[\cos^2\varphi]^3$, $y^2 = R^2[\sin^2\varphi]^3$. Po odmocnení dostaneme

$$\cos^2\varphi = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{R^2}},\ \sin^2\varphi = \frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{R^2}},\qquad \text{t. j.}\ \ 1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \sqrt[3]{\frac{x^2}{R^2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{R^2}} = 1.$$

To znamená, že pre asteroidu platí:

$$f\colon\ x = R\cos^3\varphi,\ y = R\sin^3\varphi,\ \varphi\in\langle 0\,;\,2\pi)\,,\qquad \text{resp.}\ \ f\colon\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{R^2}. \tag{3.41}$$

Ak $m = 2$, t. j. $r = \frac{R}{2}$, potom sa hypocykloida skladá z dvoch oblúkov, ktoré tvoria elipsu. Jej parametrické vyjadrenie má na základe vzťahu (3.40) tvar

$$f\colon\ x = \left(\tfrac{R}{2} + c\right)\cos\varphi,\ y = \left(\tfrac{R}{2} - c\right)\sin\varphi,\quad \varphi\in R.$$

V tomto prípade pre obyčajnú hypocykloidu platí $c = r = \frac{R}{2}$. Obidva jej oblúky splynú do jednej úsečky $f\colon\ x = R\cos\varphi,\ y = 0,\ \varphi\in R$, ktorá tvorí priemer pevnej kružnice K.

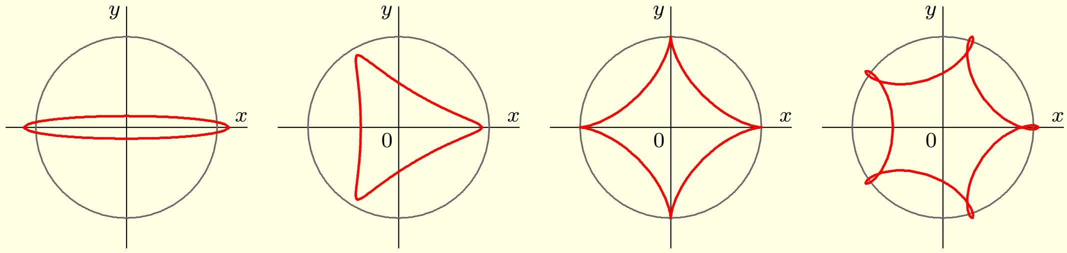
- **Epicykloida**

Epicykloida je rovinná krivka, ktorú pri kotúľaní kružnice k po vonkajšej strane pevne danej kružnice K opisuje bod B, ktorý je pevný vzhľadom na[34] k (obr. 3.1.67).

Zvoľme karteziánsky systém tak, aby bol jeho počiatok totožný so stredom pevnej kružnice K a stred S otáčajúcej sa kružnice k ležal na začiatku pohybu na kladnej súradnicovej polosi x. Predpokladajme, že bod B, ktorého pohyb sledujeme, leží na začiatku pohybu na súradnicovej osi x (v prieniku kladnej časti osi x a kružnice K). Epicykloida f je potom určená parametrickými rovnicami

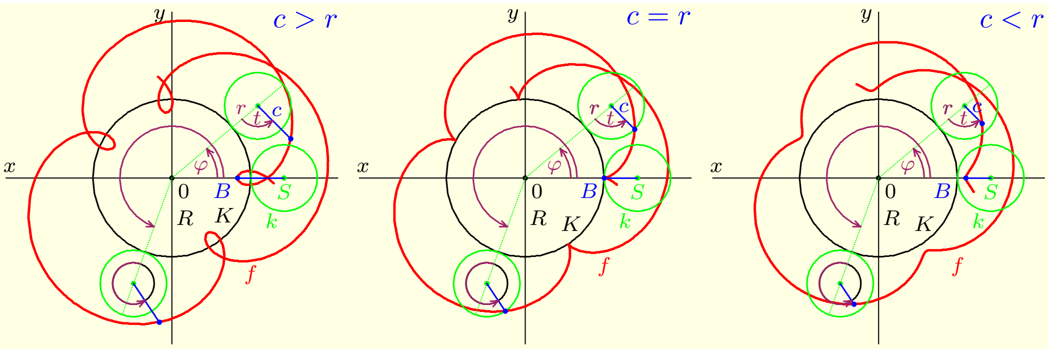
$$f\colon\ x = (R+r)\cos\tfrac{rt}{R} - c\cos\tfrac{(R+r)t}{R},\ y = (R+r)\sin\tfrac{rt}{R} - c\sin\tfrac{(R+r)t}{R},\quad t\in R, \tag{3.42}$$

[34] Poloha bodu B sa vzhľadom na otáčajúcu sa kružnicu k nemení. Otáča sa spolu s touto kružnicou k a jeho vzdialenosť $|SB|$ od stredu kružnice k je konštantná.



Obr. 3.1.66: Predĺžená hypocykloida s dvomi, skrátená hypocykloida s tromi, obyčajná hypocykloida so štyrmi (asteroida) a predĺžená hypocykloida s piatimi oblúkmi.

kde $R > 0$ je polomer pevnej kružnice K, $r > 0$ je polomer otáčajúcej sa kružnice k, $c \geq 0$ je vzdialenosť bod B od stredu S kružnice k, t. j. $c = |BS|$. Parameter t zodpovedá orientovanému uhlu (obr. 3.1.67), ktorý zviera polpriamka ST s polpriamkou SB (t. j. spojnica stredov kružníc k a K s priamkou SB).



Obr. 3.1.67: Predĺžená, obyčajná a skrátená epicykloida.

Označme φ uhol otočenia bodu S od začiatku otáčania, t. j. orientovaný uhol kladnej polosi x s polpriamkou spájajúcou počiatok súradnicového systému a stred S. Dĺžka oblúka pohybujúcej sa kružnice k, ktorá zodpovedá uhlu t je rovná rt. Na druhej strane dĺžka oblúka pevnej kružnice K, ktorá zodpovedá uhlu φ je rovnaká a rovná sa $R\varphi$. To znamená, že platí $rt = R\varphi$, t. j. $t = \frac{R\varphi}{r}$. Ak to dosadíme do vzťahu (3.42), dostaneme ekvivalentné parametrické vyjadrenie epicykloidy

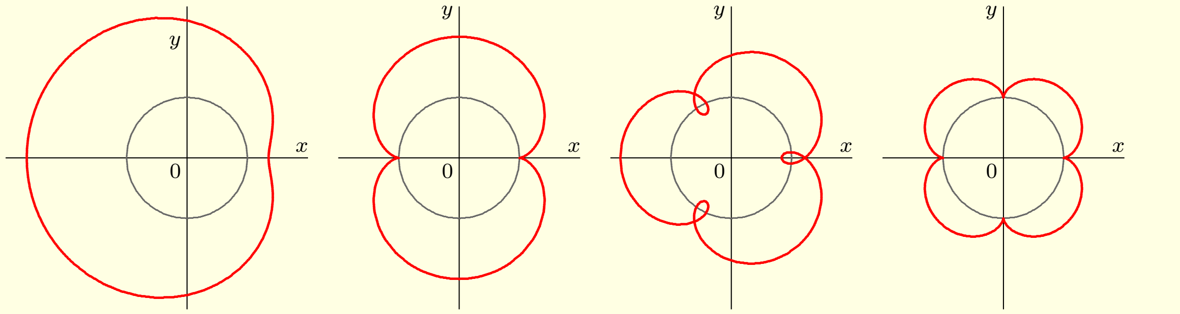
$$f\colon\ x = (R+r)\cos\varphi - c\cos\frac{(R+r)\varphi}{r},\ \ y = (R+r)\sin\varphi - c\sin\frac{(R+r)\varphi}{r},\quad \varphi\in R. \tag{3.43}$$

Ak bod B leží na obvode kružnice k (ak $c = r$), epicykloida sa nazýva **obyčajná**. Ak bod B leží vo vnútri kružnice k (ak $c < r$), epicykloida sa nazýva **skrátená**. Ak bod B leží mimo kružnice k (ak $c > r$), potom sa epicykloida nazýva **predĺžená**.

Ak platí $B = S$, t. j. $c = |BS| = 0$, potom zo vzťahu (3.43) vyplýva pre epicykloidu vyjadrenie $f\colon\ x = (R+r)\cos\varphi,\ y = (R+r)\sin\varphi,\ \varphi \in R$. To znamená, že sa f redukuje na kružnicu, ktorá je sústredná s kružnicou K a má polomer $R+r$.

Ak je pomer $m = \frac{R}{r}$ prirodzené číslo, potom epicykloida (obr. 3.1.68) splynie do m súvislých oblúkov a stačí ju definovať na intervale dĺžky 2π, napr. pre $\varphi \in \langle 0\,;\, 2\pi)$. Pre polomery potom platí $R = mr$, $R + r = (m+1)r$ a epicykloida má tvar

$$f\colon\ x = (m+1)r\cos\varphi - c\cos{(m+1)\varphi},\ \ y = (m+1)r\sin\varphi - c\sin{(m+1)\varphi},\quad \varphi\in\langle 0\,;\, 2\pi)\,.$$



Obr. 3.1.68: Skrátená epicykloida s jedným, obyčajná epicykloida s dvomi, predĺžená epicykloida s tromi a obyčajná epicykloida so štyrmi oblúkmi.

Obyčajná epicykloida s pomerom $m = 1$, t. j. $R = r$, sa nazýva **kardioida**, resp. **srdcovka**. Pre jej parametrické vyjadrenie zo vzťahu (3.43) vyplýva:

$$x = 2r\cos\varphi - r\cos 2\varphi = 2r\cos\varphi - r(2\cos^2\varphi - 1) = 2r\cos\varphi(1-\cos\varphi) + r,$$

$$y = 2r\sin\varphi - r\sin 2\varphi = 2r\sin\varphi - 2r\sin\varphi\cos\varphi) = 2r\sin\varphi(1-\cos\varphi).$$

To znamená, že parametrické vyjadrenie kardioidy f má tvar

$$f\colon\ x = 2r\cos\varphi(1-\cos\varphi) + r,\ y = 2r\sin\varphi(1-\cos\varphi),\quad \varphi\in\langle 0\,;\,2\pi)\,. \tag{3.44}$$

Odvodíme implicitné vyjadrenie kardioidy. Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva:

$$(x-r)^2 + y^2 = 4r^2\cos^2\varphi(1-\cos\varphi)^2 + 4r^2\sin^2\varphi(1-\cos\varphi)^2 = 4r^2(1-\cos\varphi)^2.$$

Keďže pre všetky $\varphi\in R$ platí $1-\cos\varphi \geq 0$, po odmocnení dostaneme

$$1-\cos\varphi = \tfrac{\sqrt{(x-r)^2+y^2}}{2r},\qquad \cos\varphi = 1 - \tfrac{\sqrt{(x-r)^2+y^2}}{2r} = \tfrac{2r-\sqrt{(x-r)^2+y^2}}{2r}.$$

Dosadením týchto výrazov do x vo vzťahu (3.44) vylúčime parameter φ z rovnice

$$x - r = 2r\cos\varphi(1-\cos\varphi) = \tfrac{2r\sqrt{(x-r)^2+y^2}-[(x-r)^2+y^2]}{2r}.$$

Z toho vyplýva $2r(x-r) = 2r\sqrt{(x-r)^2+y^2} - [(x-r)^2+y^2]$, t. j.

$$2r\sqrt{(x-r)^2+y^2} = (x-r)^2 + y^2 + 2r(x-r) = (x-r)(x-r+2r) + y^2 =$$
$$= (x+r) + y^2 = x^2 + y^2 - r^2.$$

To znamená, že kardioida f má karteziánskom systéme implicitný tvar

$$f\colon\ 2r\sqrt{(x-r)^2+y^2} = x^2+y^2-r^2,\qquad \text{resp.}\quad f\colon\ 4r^2[(x-r)^2+y^2] = [x^2+y^2-r^2]^2.$$

Na záver odvodíme polárnu rovnicu kardioidy f. Umiestnime počiatok polárneho systému do bodu B na začiatku otáčania tak, aby polárna os ležala na kladnej časti karteziánskej osi x (obr. 3.1.69). To znamená, že počiatok polárneho systému má karteziánske súradnice $[0; r]$. Označme polárny uhol v tomto systéme symbolom ϕ a sprievodič bodu symbolom ρ. Pre súradnice bodu $X = [\phi; \rho] \in f$ na základe vzťahu (3.44) platí:

$$\rho\cos\phi = x - r = 2r\cos\varphi(1-\cos\varphi),\qquad \rho\sin\phi = y = 2r\sin\varphi(1-\cos\varphi),$$

kde $X = [x; y]$ sú jeho karteziánske súradnice. Ďalej platí:

$$\rho^2 = \rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi = (x-r)^2 + y^2 = 4r^2[\cos^2\varphi + \sin^2\varphi](1-\cos\varphi)^2.$$

To znamená, že platí $\rho^2 = 4r^2(1-\cos\varphi)^2$, t. j. $(1-\cos\varphi)^2 = \frac{\rho^2}{4r^2}$. Z toho vyplýva:[35]

$$|1-\cos\varphi| = 1-\cos\varphi = \tfrac{\rho}{2r},\qquad \cos\varphi = 1 - \tfrac{\rho}{2r}.$$

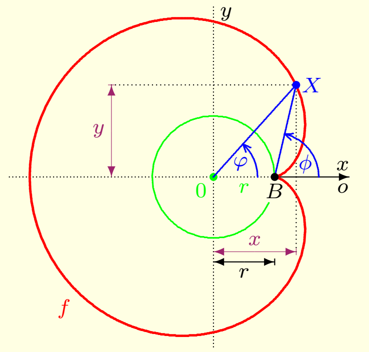
[35]Pre všetky $\varphi\in R$ platí $1-\cos\varphi \geq 0$.

Po dosadení týchto výrazov do vzťahu $\rho\cos\phi = 2r\cos\varphi(1-\cos\varphi)$ dostaneme

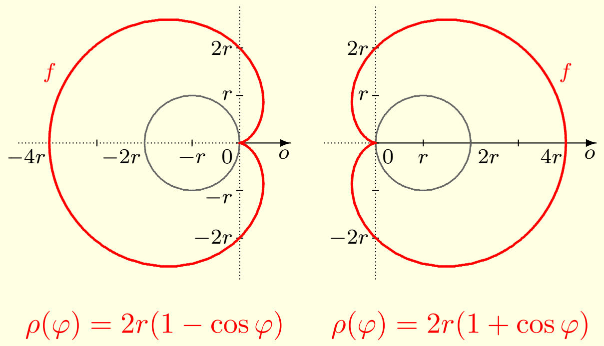
$$\rho\cos\phi = 2r\left(1-\tfrac{\rho}{2r}\right)\tfrac{\rho}{2r} = \rho\left(1-\tfrac{\rho}{2r}\right), \quad \text{t. j.} \quad \rho = 2r - 2r\cos\phi.$$

Ak orientujeme polárnu os o opačne (t. j. súhlasne so zápornou časťou osi x), dostaneme analogickým postupom rovnicu $f\colon\ \rho = 2r + 2r\cos\phi$. Ak použijeme pre polárny uhol zaužívané označenie φ (obr. 3.1.70), potom pre polárne rovnice kardioidy f platí:

$$f\colon\ \rho(\varphi) = 2r(1-\cos\varphi), \quad \text{resp.} \quad f\colon\ \rho(\varphi) = 2r(1+\cos\varphi).$$



Obr. 3.1.69: Kardioida v polárnom systéme.



Obr. 3.1.70: Kardioida určená polárnymi rovnicami $f\colon\ \rho(\varphi) = 2r(1\pm\cos\varphi)$.

- **Cassiniove krivky**

Cassiniova[36] **krivka** je definovaná ako množina bodov X v rovine, ktoré majú od dvoch daných, pevných bodov F_1 a F_2 konštantný súčin vzdialeností[37] $a^2 > 0$. V karteziánskom systéme súradníc s počiatkom v strede úsečky F_1F_2 a súradnicovou osou x totožnou s priamkou F_1F_2 je Cassiniova krivka implicitne určená rovnicou

$$f\colon\ (x^2+y^2)^2 - 2e^2(x^2-y^2) = a^4 - e^4,$$

pričom e predstavuje polovicu vzdialeností bodov F_1 a F_2, t. j. $2e = |F_1F_2|$. Ak použijeme substitúciu $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ a uvážime platnosť vzťahov $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$, $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, potom dostaneme v polárnom systéme vyjadrenie[38]

$$f\colon\ \rho^4 - 2e^2\rho^2\cos 2\varphi = a^4 - e^4, \quad \text{t. j.} \quad f\colon\ \rho^2 = e^2\cos 2\varphi \pm \sqrt{e^4\cos^2 2\varphi + a^4 - e^4}.$$

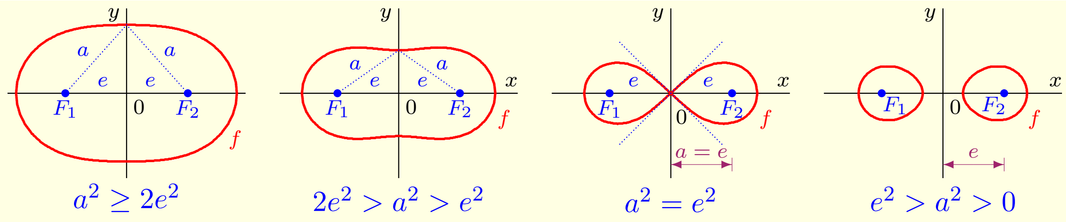
Ak platí nerovnosť $a^2 \geq 2e^2$, potom má krivka tvar podobný elipse (obr.3.1.71). Pre $2e^2 > a^2 > e^2$ má tvar oblúka s dvomi záhybmi. Pre $e^2 \geq a^2 > 0$ sa krivka skladá z dvoch samostatných oblúkov. V prípade $e^2 > a^2$ sú tieto oblúky oddelené a v prípade $e^2 = a^2$ sa pretínajú v strede úsečky F_1F_2. Cassiniova krivka sa nazýva **lemniskáta** (resp. **Bernoulliho lemniskáta**). Jej vyjadrenie má tvar

$$f\colon\ (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), \quad \text{resp.} \quad \rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi,\ \varphi\in\left\langle -\tfrac{\pi}{4};\tfrac{\pi}{4}\right\rangle \cup \left\langle \tfrac{3\pi}{4};\tfrac{5\pi}{4}\right\rangle.$$

- **Špirály**

Bod, ktorý sa otáča okolo pevne daného bodu F, pričom sa jeho vzdialenosť od tohto bodu zväčšuje (podľa zadaného predpisu), opisuje **špirálu**. Bod F sa nazýva **začiatok** (**počiatok**) **špirály**. Z praktických dôvodov sa špirály vyjadrujú najčastejšie v polárnych súardniciach. Špirály študoval už okolo roku 225 pred n.l. *Archimedes*.

[36] *Giovanni Domenico Cassini* [1625–1712] — francúzsky astronóm talianskeho pôvodu.
[37] Prípad $a^2 = 0$, t. j. $a = 0$ predstavuje dva izolované body F_1, F_2.
[38] Na ľavej strane je kvadratická rovnica pre neznámu ρ^2 a na pravej jej riešenie.



Obr. 3.1.71: Cassiniove krivky.

Archimedova špirála je rovinná krivka, ktorú opisuje bod pohybujúci sa konštantnou rýchlosťou po danej polpriamke vychádzajúcej z počiatku špirály. Táto polpriamka sa navyše otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou okolo svojho začiatku. Polárna rovnica Archimedovej špirály (obr. 3.1.72) s počiatkom umiestnenom v počiatku systému má tvar

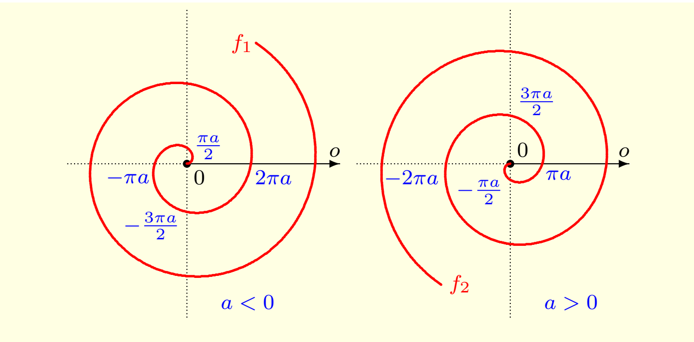
$$\rho(\varphi) = a\varphi, \ \ \varphi \in \langle 0\,;\,\infty), \ a > 0, \quad \text{resp.} \ \ \rho(\varphi) = a\varphi, \ \ \varphi \in (-\infty\,;\,0\rangle, \ a < 0.$$

Logaritmická špirála je rovinná krivka určená v polárnom systéme rovnicou

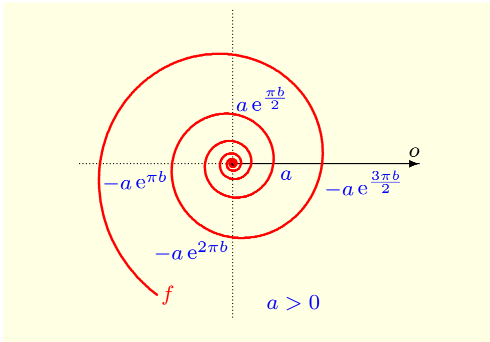
$$\rho(\varphi) = a\,\mathrm{e}^{b\varphi}, \quad \varphi \in (-\infty\,;\,\infty), \ a \neq 0, \ b > 0.$$

Logaritmická špirála (obr. 3.1.73) pretína všetky polpriamky vychádzajúce z počiatku systému pod rovnakým uhlom α, pre ktorý platí $\operatorname{cotg}\alpha = b$. Počiatok logaritmickej špirály zodpovedá bodu, ku ktorému sa špirála približuje pre $\varphi \to -\infty$ a je totožný s počiatkom systému. Niekedy sa tiež nazýva **asymptotický bod logaritmickej špirály**.

Poznámka 3.1.44.
Na obrázku 3.1.73 je zostrojená logaritmická špirála s parametrami $a > 0$, $b > 0$. Pre parameter $a < 0$ je špirála rovnaká ako pre $-a > 0$, pričom sú tieto dve špirály otočené okolo asymptotického bodu o uhol π.[39] V prípade $b < 0$ by sa logaritmická špirála otáčala opačným, t. j. záporným smerom a asymptotický bod by sme dostali pre $\varphi \to \infty$.



Obr. 3.1.72: Archimedova špirála.



Obr. 3.1.73: Logaritmická špirála.

Špirály predstavujú rozsiahlu skupinu rovinných kriviek a existuje ich veľké množstvo. Na ukážku spomenieme **Fermatovu**[40] **špirálu** definovanú polárnymi rovnicami

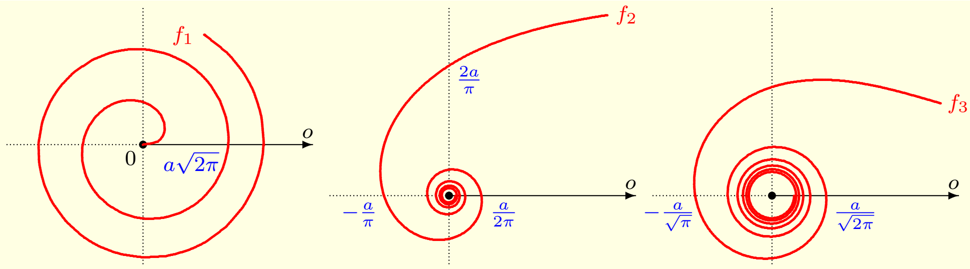
$$\rho(\varphi) = \sqrt{a^2\varphi}, \ \ \varphi \in \langle 0\,;\,\infty), \ a \neq 0, \quad \text{resp.} \ \ \rho(\varphi) = a\sqrt{\varphi}, \ \ \varphi \in \langle 0\,;\,\infty), \ a > 0,$$

[39] Rovnako ako Archimedova špirála na obrázku 3.1.72.
[40] *Pierre de Fermat* [1601–1665] — francúzsky právnik a matematik.

hyperbolickú špirálu a špirálu (obr. 3.1.74) postupne definované polárnymi rovnicami

$$\rho(\varphi) = \tfrac{a}{\varphi},\ \ \varphi \in (0\,;\,\infty)\,,\ a > 0, \qquad \rho(\varphi) = \tfrac{a}{\sqrt{\varphi}},\ \ \varphi \in (0\,;\,\infty)\,,\ a > 0.$$

Poznámka 3.1.45.
Počiatky hyperbolickej špirály $\rho(\varphi) = \frac{a}{\varphi}$ a špirály $\rho(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$ dostaneme pre $\varphi \to \infty$. Naopak pre $\varphi \to 0$, t. j. klesajúce kladné φ, sa vzdialenosť medzi daným bodom a počiatkom neohraničene zväčšuje.



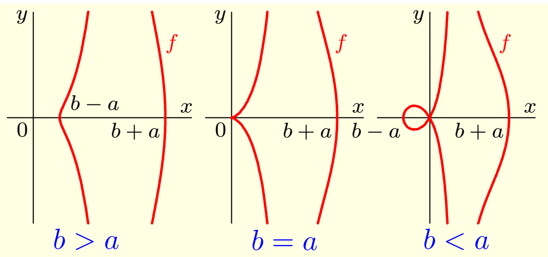
Obr. 3.1.74: Fermatova špirála f_1, hyperbolická špirála f_2 a špirála f_3: $\rho(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$.

Konchoida (obr. 3.1.75) je rovinná krivka definovaná vzťahmi

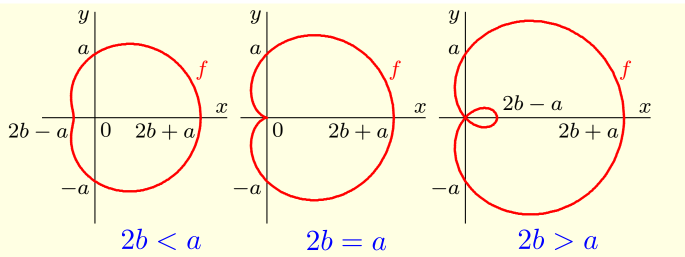
$$f\colon\ (x-b)^2\,(x^2+y^2) = a^2x^2,\ \ a>0,\ b>0, \qquad \text{resp.}\ \ \rho = a + \tfrac{b}{\cos\varphi},\ \ a>0,\ b>0.$$

Pascalova[41] závitnica (obr. 3.1.76) je rovinná krivka definovaná vzťahmi

$$f\colon\ \left(x^2+y^2-2bx\right)^2 = a^2\left(x^2+y^2\right),\ \ a>0,\ b>0, \quad \text{resp.}\ \ \rho = a + 2b\cos\varphi,\ \ a>0,\ b>0.$$



Obr. 3.1.75: Konchoida.



Obr. 3.1.76: Pascalova závitnica.

Lamého[42] krivka (obr. 3.1.77) je rovinná krivka implicitne definovaná rovnicou

$$f_n\colon\ \left(\tfrac{x}{a}\right)^n + \left(\tfrac{y}{b}\right)^n = 1,\ \ a>0,\ b>0,\ n\neq 0.$$

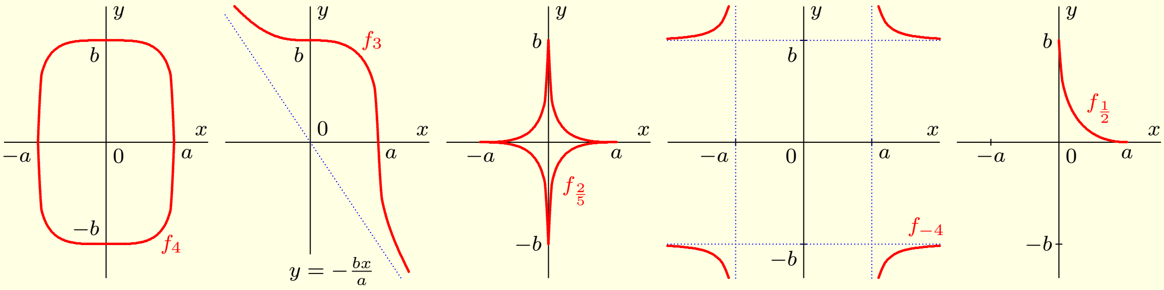
Pre $n\in N$ párne je Lamého krivka uzavretá a tvorí ovál, ktorý pretína súradnicové osi v bodoch $[\pm a; 0]$, $[0; \pm b]$. Špeciálne pre $n=2$ dostaneme elipsu f_2: $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$.

Pre $n=1$ dostaneme priamku f_1: $\frac{x}{2}+\frac{y}{b}=1$, pre $n=\frac{2}{3}$ dostaneme asteroidu $f_{\frac{2}{3}}$: $\sqrt[3]{(\frac{x}{a})^2}+\sqrt[3]{(\frac{y}{b})^2}=1$ s polosami dĺžky a a b. Ak zvolíme $n=-1$, potom dostaneme hyperbolu f_{-1}: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$.

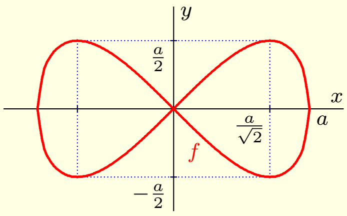
Osmička (obr. 3.1.78) je rovinná krivka zadaná vzťahmi

$$f\colon\ x^4 = a^2\left(x^2-y^2\right),\ \ a\neq 0 \qquad \text{resp.}\ \ \rho^4\cos^4\varphi = a^2\cos 2\varphi,\ \ a\neq 0.$$

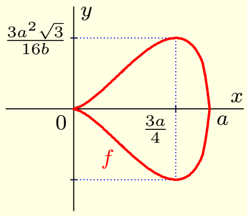
[41] *Blaise Pascal* [1623–1662] — francúzsky matematik a fyzik.
[42] *Gabriel Lamé* [1795–1870] — francúzsky matematik.



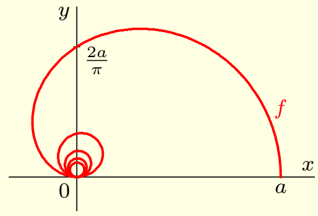
Obr. 3.1.77: Lamého krivka.



Obr. 3.1.78: Osmička.



Obr. 3.1.79: Srdcová kvartika.



Obr. 3.1.80: Konchleoida.

Srdcová (resp. **hrušková**) **kvartika** (obr. 3.1.79) je rovinná krivka zadaná vzťahmi

$$f\colon\ b^2y^2 = x^3\,(a-x)\,,\ \ a>0,\ b>0.$$

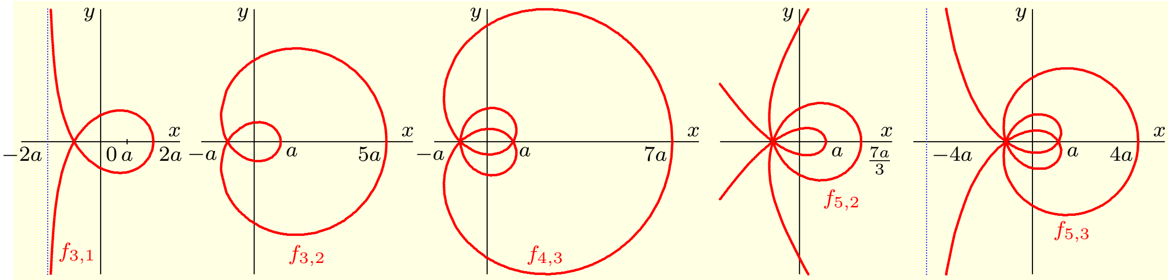
Konchleoida (obr. 3.1.80) je rovinná krivka definovaná v polárnom systéme rovnicou

$$\rho = \tfrac{a\sin\varphi}{\varphi},\ \ a>0.$$

Plateauova[43] **krivka** (obr. 3.1.81) je rovinná krivka parametricky definovaná

$$f_{m,n}\colon\ x = a\,\tfrac{\sin(m+n)t}{\sin(m-n)t},\ \ y = 2a\,\tfrac{\sin mt\ \sin nt}{\sin(m-n)t},\ \ m,n\in N,\ m\neq n,\ a>0,\ t\in R.$$

Z vlastností funkcie sínus vyplýva, že sú grafy funkcií $f_{m,n}$ a $f_{n,m}$ symetrické podľa y-ovej súradnicovej osi. V prípade $m=2n$ dostaneme pre krivku parametrické vyjadrenie $f\colon\ x = a + 2a\cos 2nt$, $y = 2a\sin 2nt$, t. j. kružnicu so stredom $[a;0]$ a polomerom $2a$.



Obr. 3.1.81: Plateauova krivka.

Freethova[44] **nefroida** (obr. 3.1.82 vľavo) je rovinná krivka definovaná v polárnom systéme súradníc explicitným vzťahom

$$f\colon\ \rho = a\left(1 + 2\sin\tfrac{\varphi}{2}\right),\ \ a>0,\ \varphi\in R.$$

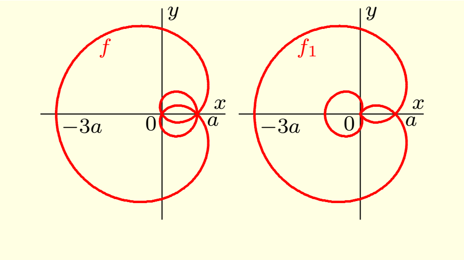
[43] *Joseph Antoine Ferdinand Plateau* [1801–1883] — belgický fyzik a matematik.
[44] *T. J. Freeth* [1819–1904] — anglický matematik.

Poznámka 3.1.46.
Na obrázku 3.1.82 vpravo je rovinná krivka, ktorá je definovaná explicitným vzťahom

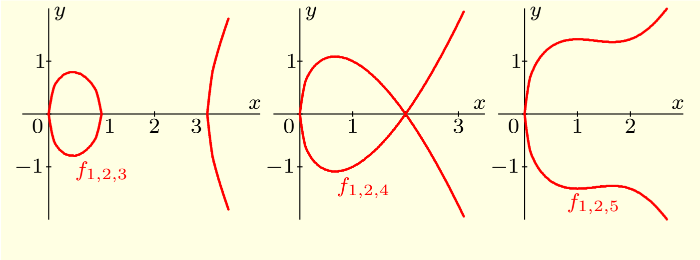
$$f_1\colon\ \rho = a\left|1 + 2\sin\tfrac{\varphi}{2}\right|,\ \ a>0,\ \ \varphi\in R.$$

Newtonova divergentná parabola (obr. 3.1.83) je rovinná krivka

$$f_{a,b,c}\colon\ a^2y^2 = x\left(x^2 - 2bx + c\right),\ \ a\neq 0,\ \ b,c\in R.$$



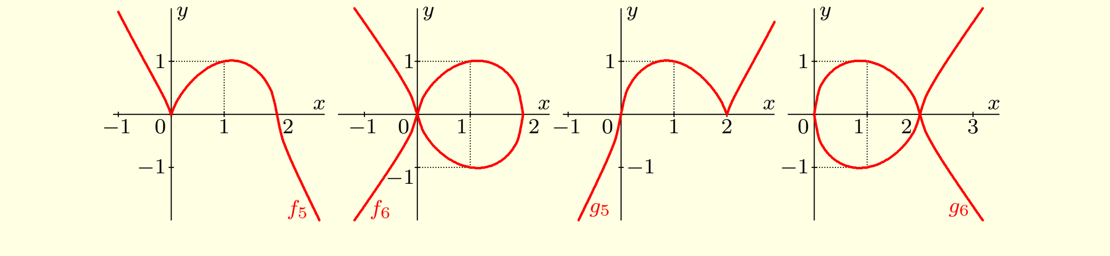
Obr. 3.1.82: Freethova nefroida.



Obr. 3.1.83: Newtonova divergentná parabola.

Sluzeho[45] **perlovka** (obr. 3.1.84) je rovinná krivka definovaná implicitne vzťahom

$$f\colon\ y^n = k(a-x)^p x^m,\ \ n,m,p\in N,\ \ a>0,\ \ k>0.$$



Obr. 3.1.84: Sluzeho perlovky $f_n\colon\ y^n = (2-x)^3x^4$, $g_n\colon\ y^n = (2-x)^4x^3$.

Kappa krivka (obr. 3.1.85) je rovinná krivka zadaná implicitnými vzťahmi

$$f\colon\ y^2\left(x^2+y^2\right) = a^2x^2,\ \ a>0,\qquad \text{resp.}\ \ \rho^2 = a^2\operatorname{cotg}^2\varphi,\ \ a>0.$$

Tschirnhausova[46] **kubika** (obr. 3.1.86) je rovinná krivka implicitne definovaná

$$f\colon\ 3ay^2 = x(x-a)^2,\ \ a>0.$$

Serpentína (obr. 3.1.87) je rovinná krivka implicitne zadaná rovnicou

$$f\colon\ y(x^2+ab) = a^2x,\ \ a>0,\ \ b>0.$$

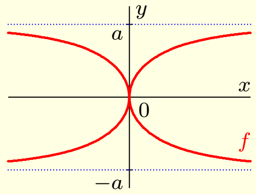
Strofoida (kolmá strofoida) (obr. 3.1.88) je rovinná krivka definovaná vzťahmi

$$f\colon\ y^2(a+x) = x^2(a-x),\ \ a>0,\qquad \text{resp.}\ \ \rho = a\tfrac{\cos(2\varphi)}{\cos\varphi},\ \ a>0.$$

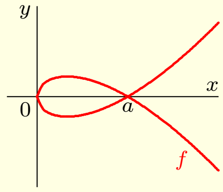
Maclaurinov[47] **trisektrix** (obr. 3.1.88) je rovinná krivka definovaná vzťahmi

$$f\colon\ y^2(a+x) = x^2(3a-x),\ \ a>0,\qquad \text{resp.}\ \ \rho = 2a\tfrac{\sin(3\varphi)}{\sin(2\varphi)},\ \ a>0.$$

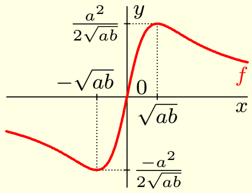
[45] *René François Walter de Sluze* [1622–1685] — belgický fyzik a matematik.
[46] *Ehrenfried Walter von Tschirnhaus* [1651–1708] — nemecký matematik a filozof.
[47] *Colin Maclaurin* [1698–1746] — anglický matematik.



Obr. 3.1.85: Kappa krivka.



Obr. 3.1.86: Tschirnhausova kubika.



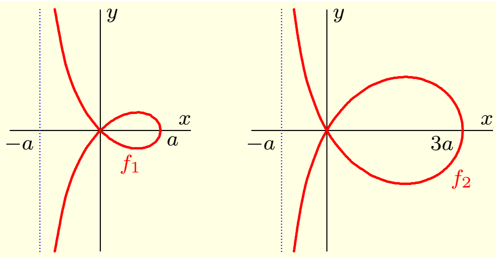
Obr. 3.1.87: Serpentina.

Descartov list (obr. 3.1.89) je rovinná krivka implicitne zadaná rovnicou

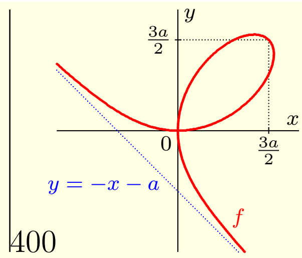
$$f\colon\ x^3+y^3=3axy,\ \ a>0, \qquad \text{resp.}\quad f\colon\ \rho(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)=3a\sin\varphi\cos\varphi, \quad a>0.$$

Parametricky môžeme Descartov list vyjadriť v tvare

$$f\colon\ x=\tfrac{3at}{1+t^3},\ \ y=\tfrac{3at^2}{1+t^3},\ \ t\in(-\infty\,;\,-1)\cup(-1\,;\,\infty)\,.$$



Obr. 3.1.88: Strofoida f_1, Maclaurinov trisektrix f_2.



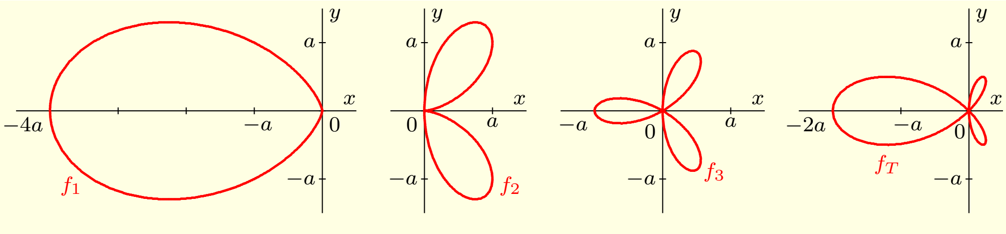
Obr. 3.1.89: Descartov list.

List (obr. 3.1.90) je rovinná krivka implicitne definovaná rovnicou

$$f\colon\ (x^2+y^2)(x^2+xb+y^2)=4axy^2,\ \ a>0,\ \ b\geq 0.$$

V polárnom systéme môžeme list vyjadriť vzťahom

$$f\colon\ \rho=\cos\varphi\,\big[4a\sin^2\varphi-b\big]\,,\ \ a>0,\ \ b\geq 0.$$



Obr. 3.1.90: Jednolístok f_1, dvojlístok f_2, trojlístok f_3 a torpédová krivka f_T.

Ak položíme $b=4a$, dostaneme **jednolist** (**list**, **lístok**) f_1. Pre jeho vyjadrenie platí:

$$f_1\colon\ (x^2+y^2)^2=4ax^3,\ \ a>0, \qquad \text{resp.}\quad f_1\colon\ \rho=4a\cos\varphi\,\big[\sin^2\varphi-1\big]\,,\ \ a>0.$$

Pre $b=0$ dostaneme **dvojlist** (**dvojlístok**) f_2, ktorý má tvar

$$f_2\colon\ (x^2+y^2)^2=4axy^2,\ \ a>0, \qquad \text{resp.}\quad f_2\colon\ \rho=4a\cos\varphi\sin^2\varphi,\ \ a>0.$$

Pre $b=a$ dostaneme **trojlist** (**trojlístok**) f_3, ktorý má tvar

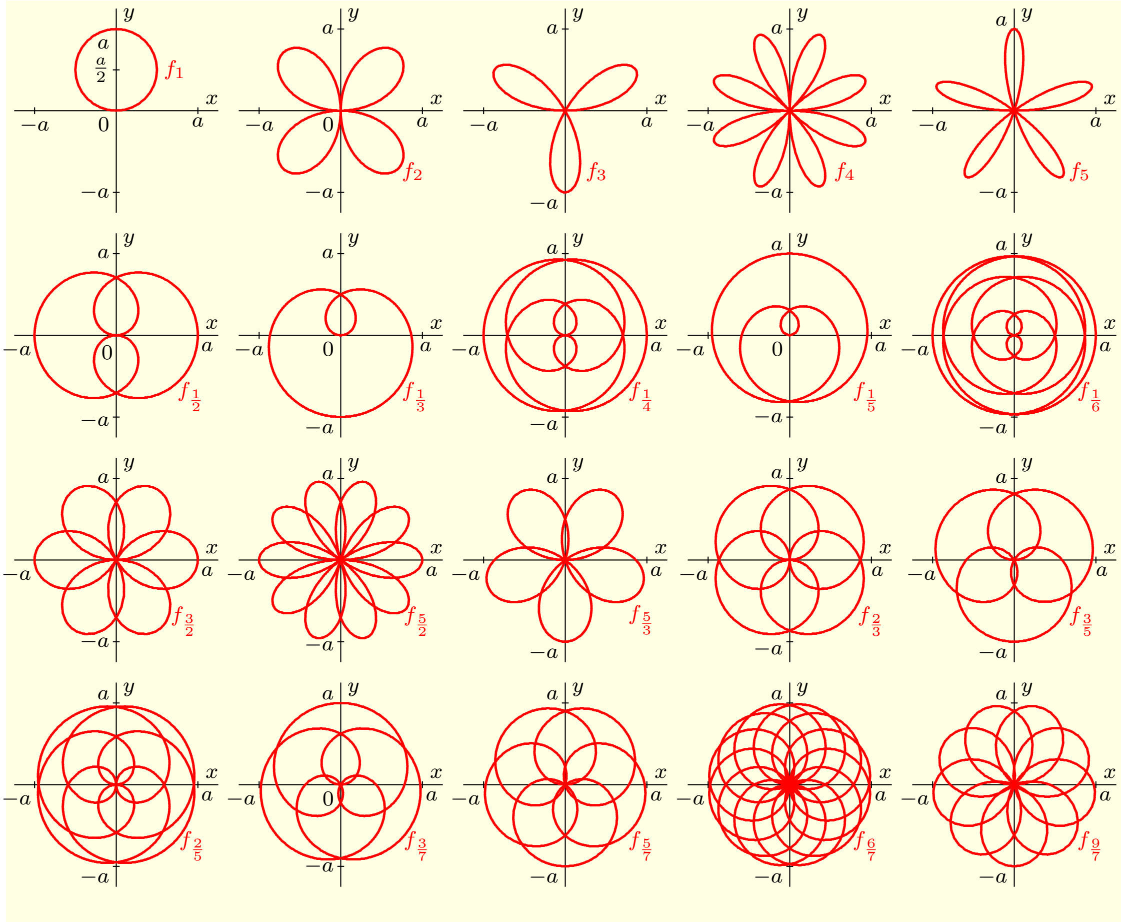
$$f_3\colon\ (x^2+y^2)^2=3axy^2-ax^3,\ \ a>0, \qquad \text{resp.}\quad f_3\colon\ \rho=a\cos\varphi\,\big[4\sin^2\varphi-1\big]\,,\ \ a>0.$$

Pre $b = 2a$ sa krivka nazýva **torpédová krivka** a má tvar

$$f_T\colon\ (x^2+y^2)^2 = 2axy^2 - 2ax^3,\ a>0, \qquad \text{resp.} \quad f_T\colon\ \rho = 2a\cos\varphi\left[2\sin^2\varphi - 1\right],\ a>0.$$

Veľmi zaujímavá a variabilná je rovinná krivka, ktorú nazývame **ruža** (**ružica**, resp. **rhodonea**) (obr. 3.1.91). V polárnom systéme je definovaná vzťahom[48]

$$f_c\colon\ \rho = a\sin c\varphi,\ a>0,\ c>0,\ \varphi\in R.$$



Obr. 3.1.91: Ruža.

Pre $c = 1$ dostaneme kruh, pre $c = 2$ štvorlístok, pre $c = 3$ trojlístok (viď obr. 3.1.90) a pre $c = 5$ päťlístok. Všeobecne pre nepárne $c = 2k+1$, $k \in N$ dostaneme c-lístok a pre párne $c = 2k$, $k \in N$ dostaneme $2c$-lístok.

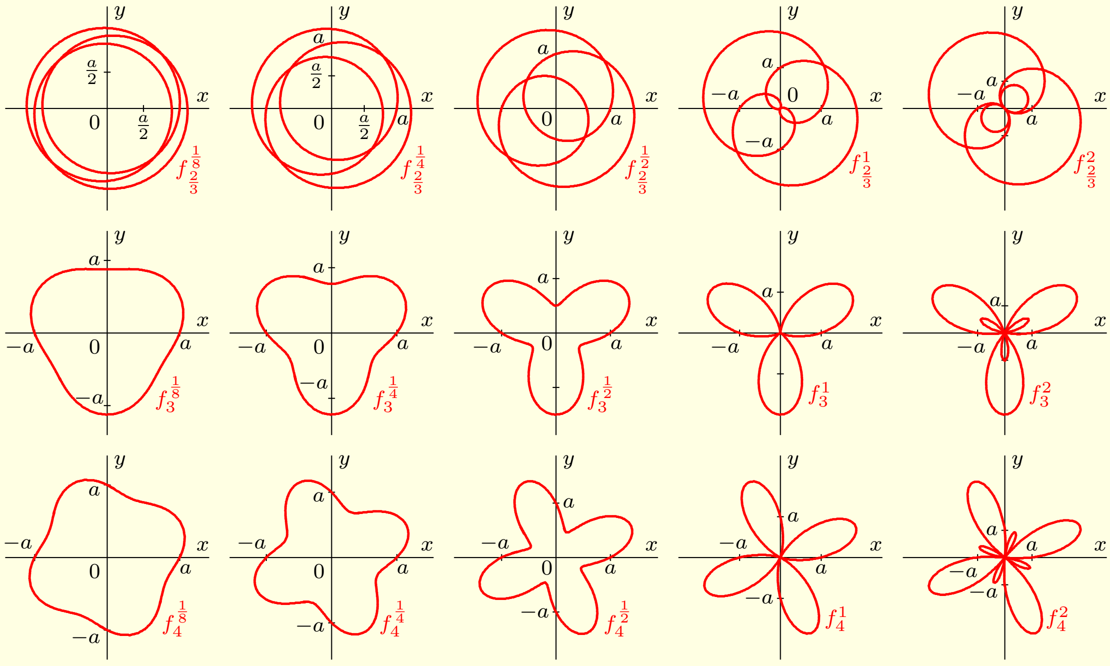
V prípade $c = \frac{1}{2}$ dostala táto krivka meno po známom nemeckom maliarovi a grafikovi *Albrechtovi Dürerovi* [1471–1528] a nazýva sa **Dürerov list**.

S predchádzajúcou krivkou rhodonea úzko súvisí **botanická krivka** (obr. 3.1.92), ktorá je v polárnom systéme definovaná vzťahom

$$f_c^d\colon\ \rho = a(1+d\sin c\varphi),\ a>0,\ c>0,\ d>0,\ \varphi\in R.$$

Rovinnú krivku v tvare **srdca** môžeme definovať mnohými spôsobmi. Je to napríklad krivka implicitne určená rovnicou $f\colon\ (x^2+y^2-1)^3 = x^2y^3$ z príkladu 3.1.28 (obr. 3.1.35).

[48] V literatúre sa tiež niekedy vyjadruje v tvare $f\colon\ \rho = a\cos c\varphi$, $a>0$, $c>0$, $\varphi\in R$. V tomto prípade je jej graf krivky f otočený oproti grafu krivky f_c o uhol $\frac{\pi}{2}$.



Obr. 3.1.92: Botanická krivka.

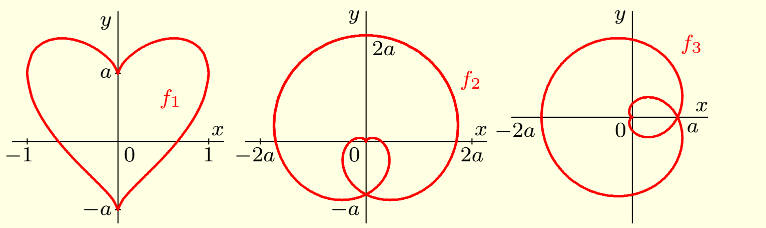
Tvar srdca má tiež krivka (obr. 3.1.93), ktorá je explicitne definovaná vzťahmi

$$f_1\colon\ y = a\left[\sqrt[3]{x^2} \pm \sqrt{1-x^2}\right],\ \ a>0,\ x\in\langle -1\,;\,1\rangle$$

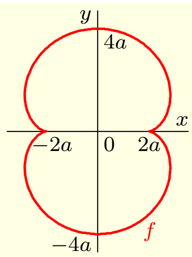
a časti kriviek $f_{2,3}$, ktoré sú v polárnom systéme súradníc explicitne definované vzťahmi

$$f_2\colon\ \rho = 2a\sin^2\left(\tfrac{\pi}{8} - \tfrac{\varphi}{4}\right),\ \ a>0,\ \varphi\in R, \qquad f_3\colon\ \rho = a\left(1+\sin\tfrac{\varphi}{2}\right),\ \ a>0,\ \varphi\in R.$$

Krivka f_2 má tvar srdca pre $\varphi\in\left\langle \frac{7\pi}{2}\,;\,\frac{11\pi}{2}\right\rangle$ a krivka f_3 pre $\varphi\in\langle 2\pi\,;\,4\pi\rangle$.



Obr. 3.1.93: Krivky v tvare srdca.



Obr. 3.1.94: Nefroida.

Nefroida (obr. 3.1.94) je rovinná krivka parametricky zadaná vzťahmi

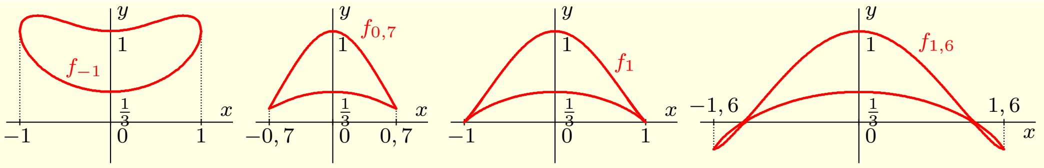
$$f\colon\ x = a(3\cos t - \cos 3t),\ \ y = a(3\sin t - \sin 3t),\ \ a>0,\ t\in R.$$

Dvojrohová krivka (obr. 3.1.95) je rovinná krivka definovaná implicitne vzťahom

$$f_a\colon\ y^2(a^2-x^2) = (x^2+2ay-a)^2,\ \ a\neq 0.$$

Sínusová špirála (obr. 3.1.96) je implictne definovaná v polárnom systéme vzťahom

$$f_c\colon\ \rho^c = a^c\cos c\varphi,\ \ a>0,\ c\in R.$$

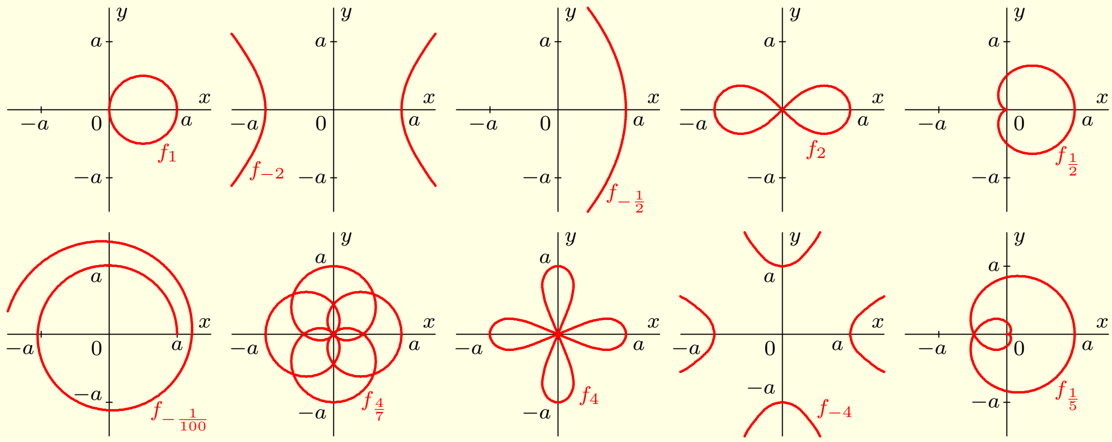


Obr. 3.1.95: Dvojrohová krivka.

Pre $c = -1$ platí $f_{-1}\colon\ \rho^{-1} = \frac{1}{a}\cos(-\varphi)$, t. j. $f_{-1}\colon\ \rho = \frac{a}{\cos\varphi}$. Po jednoduchej úprave pomocou vzťahov (3.12) dostaneme rovnicu priamky

$$f_{-1}\colon\ x = \frac{a}{\cos\varphi}\cos\varphi = a,\ y = \frac{a}{\cos\varphi}\sin\varphi = a\operatorname{tg}\varphi,\ \varphi\in R,\qquad \text{t. j. } f_{-1}\colon\ x = a,\ y\in R.$$

Analogickým spôsobom môžeme odvodiť ďalšie špeciálne prípady tejto krivky. Napríklad pre $c = 1$ dostaneme kružnicu so stredom v bode $\left[\frac{a}{2}; 0\right]$ a polomerom $\frac{a}{2}$, pre $c = -2$ dostaneme hyperbolu so stredom v počiatku systému a s hlavnými vrcholmi v bodoch $[\pm a; 0]$, pre $c = -\frac{1}{2}$ dostaneme parabolu s vrcholom v bode $[a; 0]$. Pre $c = 2$ dostaneme Bernoulliho lemniskátu, pre $c = \frac{1}{2}$ dostaneme kardioidu, pre $c = -\frac{1}{100}$ dostaneme špirálu a pre $c = \frac{4}{7}$ dostaneme ružu (viď obr. 3.1.96).



Obr. 3.1.96: Sínusova špirála.

Diablova (čertova) krivka (obr. 3.1.97) je rovinná krivka implicitne definovaná

$$f_{a,b}\colon\ y^2(y^2 - a^2) = x^2(x^2 - b^2),\ a, b\in R,$$

resp. v polárnom systéme implicitne definovaná rovnicou

$$f_{a,b}\colon\ \rho^2(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi,\ a, b\in R.$$

Parametricky ju môžeme v karteziánskom systéme vyjadriť vzťahmi

$$f_{a,b}\colon\ x = \cos t\sqrt{\frac{a^2\sin^2 t - b^2\cos^2 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}},\ y = \sin t\sqrt{\frac{a^2\sin^2 t - b^2\cos^2 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}},\ a, b\in R,\ t\in R.$$

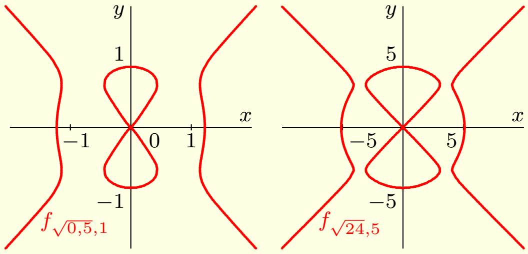
Diablovu krivku pre $a^2 = 24$, $b^2 = 25$, t.j krivku $f_{\sqrt{24},5}\colon\ y^2(y^2 - 24) = x^2(x^2 - 25)$, nazývame **elektromotorická krivka** (obr. 3.1.97 vpravo).

Deltoida (obr. 3.1.98) je rovinná krivka definovaná implicitne vzťahom

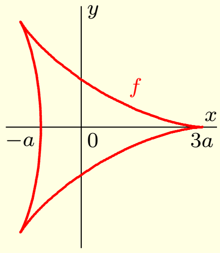
$$f\colon\ \left(x^2 + y^2 + 12ax + 9a^2\right)^2 = 4a(2x + 3a)^3,\ a > 0,$$

resp. parametricky vzťahmi

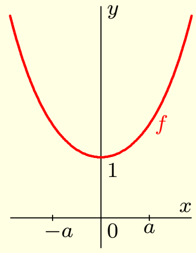
$$f\colon\ x = a\left(2\cos t + \cos(2t)\right),\ y = a\left(2\sin t - \sin(2t)\right),\ a > 0,\ t\in R.$$



Obr. 3.1.97: Diablova krivka (vľavo), elektromotorická krivka (vpravo).



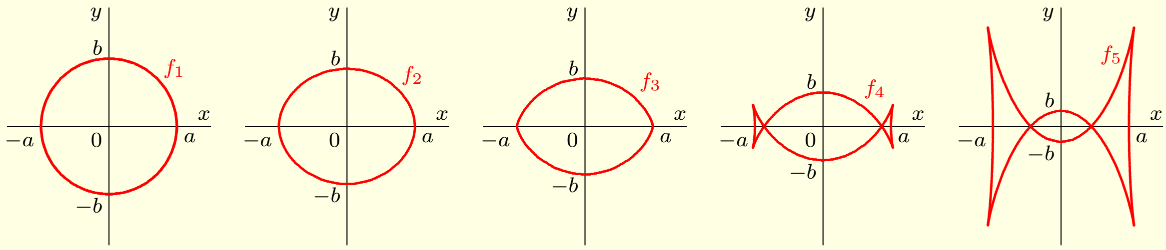
Obr. 3.1.98: Deltoida.



Obr. 3.1.99: Reťazovka.

Ideálne ohybné vlákno, ktoré je upevnené a zavesené v dvoch bodoch, má v rovnovážnej polohe tvar reťazovky. **Reťazovka** (obr. 3.1.99) je rovinná krivka zadaná vzťahom

$$f\colon\ y = \cosh\tfrac{x}{a} = \tfrac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2},\ \ a > 0,\ \ x \in R.$$



Obr. 3.1.100: Talbotova krivka.

Talbotova[49] krivka (obr. 3.1.100) je rovinná krivka, ktorá je v karteziánskom systéme súradníc definovaná parametrickými rovnicami

$$f\colon\ x = \tfrac{\left[a^2 + c^2 \sin^2 t\right] \cos t}{a},\ \ y = \tfrac{\left[a^2 - 2c^2 + c^2 \sin^2 t\right] \sin t}{b},\ \ a \geq b > 0,\ \ c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Pre $a = b$, t. j. $c = 0$ dostaneme kružnicu $f\colon\ x = a\cos t,\ y = a\sin t$ s polomerom a a stredom v počiatku súradnicového systému (f_1 na obr. 3.1.100). Pre $c^2 < \frac{a^2}{2}$, t. j. pre $a > b > \frac{a}{\sqrt{2}}$ dostaneme elipsu s ohniskami, ktorých vzdialenosť je rovná hodnote $2c$ (f_2 na obr. 3.1.100). Pre $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$, dostaneme krivku v tvare šošovky (f_3 na obr. 3.1.100) a pre $0 < b < \frac{a}{\sqrt{2}}$, krivku pripomínajúcu obal z cukríka (f_4, f_5 na obr. 3.1.100).

Lissajousova[50] krivka (obr. 3.1.101) je rovinná krivka parametricky zadaná vzťahmi

$$f_n\colon\ x = a\sin(nt + c),\ \ y = b\sin t,\ \ a > 0,\ \ b > 0,\ \ c \in R,\ \ n \in N,\ \ t \in R.$$

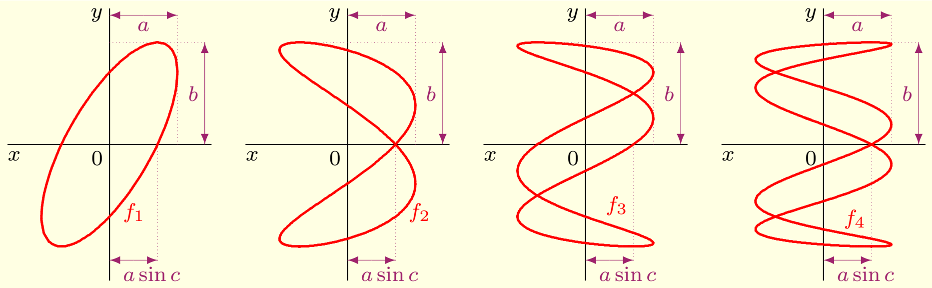
Spirická krivka (obr. 3.1.102) je rovinná krivka definovaná explicitným vzťahom

$$f_c\colon\ (r^2 - a^2 + c^2 + x^2 + y^2)^2 = 4r^2(c^2 + x^2),\ \ a > 0,\ \ c \geq 0,\ \ r > 0,\ \ c \leq r + a.$$

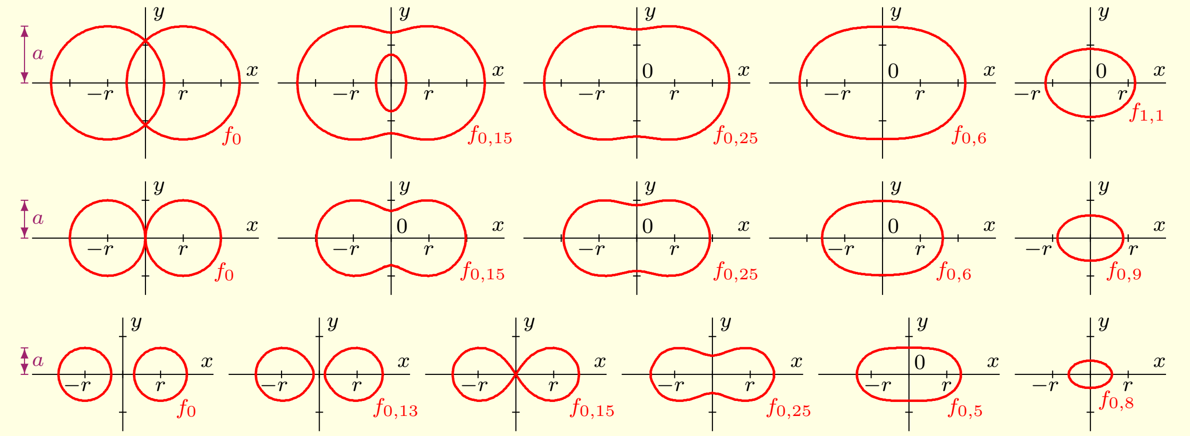
Predchádzajúci výraz môžeme vyjadriť v tvare $r^2 - a^2 + c^2 + x^2 + y^2 = \pm 2r\sqrt{x^2 + c^2}$, t. j.

$$r^2 \pm 2r\sqrt{x^2 + c^2} + x^2 + c^2 + y^2 = \left(r \pm \sqrt{x^2 + c^2}\right)^2 + y^2 = a^2.$$

[49] *William Henry Fox Talbot* [1800–1877] — anglický fyzik, chemik, fotograf a vynálezca.
[50] *Jules Antoine Lissajous* [1822–1880] — francúzsky fyzik.



Obr. 3.1.101: Lissajousova krivka.



Obr. 3.1.102: Spirická krivka ($r = 0,5$, $a = 0,75$, resp. $a = 0,5$, resp. $a = 0,35$).

Z toho vyplýva, že pre $c = r + a$ sa spirická krivka skladá iba z jedného bodu $[0; 0]$. Pre $c = 0$ sa spirická krivka skladá z dvoch rovnakých kružníc $f_0\colon (r \pm x)^2 + y^2 = a^2$, t. j. kružníc so stredmi $[\pm r; 0]$ a polomerom a.

Spirickú krivku tvorí napríklad priečny rez anuloidu,[51] t. j. rez kolmý na kružnicu, ktorú vytvorí stred rotujúcej kružnice. Hodnota a predstavuje polomer rotujúcej kružnice, hodnota r predstavuje vzdialenosť stredu anuloidu od stredu rotujúcej kružnice. Hodnota c predstavuje vzdialenosť roviny tohto rezu od stredu anuloidu.

Wattova[52] krivka (obr. 3.1.103) je rovinná krivka implicitne definovaná vzťahmi

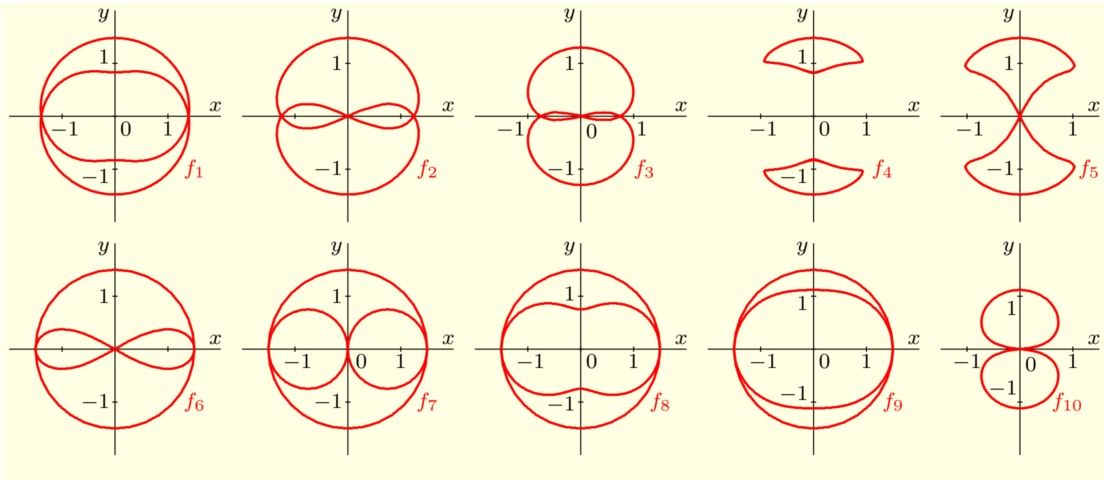
$$f\colon\ \rho^2 = b^2 - \left[a \sin\varphi \pm \sqrt{c^2 - a^2\cos^2\varphi}\right]^2,\ \ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Wattovu krivku opisuje napríklad stred úsečky dĺžky $2c$, ktorej konce sú upevnené na obvodoch dvoch daných kruhov s rovnakým polomerom b, ktoré sa otáčajú okolo svojich stredov (napríklad stred spojnice na kolesách parnej lokomotívy). Hodnota $2a$ predstavuje vzdialenosť stredov týchto kruhov.

Pre všetky Wattove krivky na obrázku 3.1.103 platí $b = 1,5$, pre ostatné parametre platí $f_1\colon\ a = 0,5$, $c = 0,75$, $f_2\colon\ a = 1,25$, $c = 1,5$, $f_3\colon\ a = 0,75$, $c = 1,5$, $f_4\colon\ a = 0,75$, $c = 0,5$, $f_5\colon\ a = 1$, $c = 0,75$, $f_6\colon\ a = 1,5$, $c = 1,5$, $f_7\colon\ a = 0,75$, $c = 0,75$, $f_8\colon\ a = 0,65$, $c = 0,65$, $f_9\colon\ a = 0,5$, $c = 0,5$, $f_{10}\colon\ a = 0,75$, $c = 1,75$.

[51] **Anuloid** je priestorové teleso, ktoré tvarom pripomína pneumatiku (presnejšie dušu) automobilu. Vznikne rotáciou kružnice, resp. gule okolo daného pevného bodu, ktorý nazývame **stred anuloidu**.

[52] *James Watt* [1736–1819] — škótsky inžinier, ktorý zdokonalil parný stroj.



Obr. 3.1.103: Wattova krivka.

Cvičenia

3.1.1. Rozhodnite, či sú nasledujúce relácie funkciami: ♣

a) $f=\{[x;\,y]\in R^2\,;\; x+|y-1|=0\}$,
b) $f=\{[x;\,y]\in R^2\,;\; |x-1|+y=0\}$,
c) $f=\{[x;\,y]\in R^2\,;\; |x|+|y|=2, y\geq 0\}$,
d) $f=\{[x;\,y]\in R^2\,;\; |x-1|+|y|=0\}$,
e) $f=\{[x;\,y]\in R^2\,;\; x^2+y^2-2x=0\}$,
f) $f=\{[x;\,y]\in R^2\,;\; x^2+y^2-2x=-1\}$,
g) $f=\{[x;\,y]\in R^2\,;\; x^2+y^2-2x=-2\}$,
h) $f=\{[x;\,y]\in R^2\,;\; y^2+2y+1=0\}$.

3.1.2. Určte prirodzený definičný obor funkcie $y=f(x)$ zadanej predpisom: ♣

a) $y=\arcsin\ln x$,
b) $y=\operatorname{arctg}\operatorname{tg}x$,
c) $y=\arcsin\frac{1}{x}$,
d) $y=\sqrt{\sin x^2}$,
e) $y=\sqrt{x\sin^2\pi x}$,
f) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$,
g) $y=\sqrt{\cos\sqrt{x}}$,
h) $y=\sqrt{\cos x^2}$,
i) $y=\frac{x+2}{2x^2-1}$,
j) $y=\frac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$,
k) $y=\ln\sin\frac{\pi}{x}$,
l) $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$,
m) $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$,
n) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$,
o) $y=\frac{2}{2-\lfloor x\rfloor}$,
p) $y=\frac{\sqrt{x-2}}{x-4}$,
q) $y=\sqrt{\sin x+1}$,
r) $y=\ln\ln\ln x$,
s) $y=\sqrt{\ln\operatorname{tg}x}$,
t) $y=\sqrt{|x|-x}$,
u) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$,
v) $y=\frac{x^2}{1+x}$,
w) $y=\ln\frac{x}{x+1}$,
x) $y=\ln\frac{x+2}{x-3}$.

3.1.3. Určte prirodzený definičný obor funkcie $y=f(x)$ zadanej predpisom: ♣

a) $y=\sqrt{1-\operatorname{tg}2x}$,
b) $y=\ln(x^2-4)$,
c) $y=\ln(x-2)+\ln(x+2)$,
d) $y=\sqrt{\sin x\cos x}$,
e) $y=\sqrt{\sin x}\sqrt{\cos x}$,
f) $y=\sqrt{\ln\sin x}+\sqrt{\ln\cos x}$,
g) $y=\arccos(2\sin x)$,
h) $y=\ln|1-\sqrt{x}|$,
i) $y=\ln|x^2-2x-6|$,
j) $y=\ln(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$,
k) $y=\ln(1-\operatorname{tg}x)$,
l) $y=\ln(2\cos x-\sqrt{3})$,
m) $y=\arcsin\sin x$,
n) $y=\arcsin\cos x$,
o) $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{2+x}$,
p) $y=\sin\arcsin x$,
q) $y=\sin\arccos x$,
r) $y=\cos\arccos x$,
s) $y=\sqrt{2-\sqrt{x}}$,
t) $y=\sqrt{3x-x^3}$,
u) $y=\sqrt{4+x}+\sqrt{-x}$.

3.1.4. Určte prirodzený definičný obor funkcie $y=f(x)$ zadanej predpisom: ♣

a) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$,
b) $y=\arccos\frac{2x}{1+x}$,
c) $y=\ln\frac{x^2-3x+2}{x+1}$,

d) $y = \arcsin \log \frac{x}{10}$, e) $y = \frac{x}{\sin(2x-1)}$, f) $y = \frac{\arcsin(x+1)}{\sqrt{x^2+x-6}}$,
g) $y = \arcsin \frac{10x}{x^2+16}$, h) $y = \frac{\sqrt{2\,\mathrm{e}^x-1}}{\ln(2-\mathrm{e}^x)}$, i) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x}} - \sqrt{\frac{x+1}{x}}$,
j) $y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$, k) $y = \arccos \frac{1-\mathrm{e}^x}{2}$, l) $y = \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}-1}$,
m) $y = \sin \ln \frac{1}{3x+1}$, n) $y = \frac{\ln(2x-3)}{\sqrt{x^2-1}}$, o) $y = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$,
p) $y = \arcsin \frac{1-x^3}{1+x^3}$, q) $y = \frac{1}{1-(-1)^{\lfloor x \rfloor}}$, r) $y = \arcsin \frac{x}{x+1}$.

3.1.5. Zostrojte graf funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom:
a) $y = \lfloor \sin^2 x \rfloor$, b) $y = \lfloor \cos^2 x \rfloor$, c) $y = \sin(x+1)$, d) $y = |x| - |x-1|$,
e) $y = \arcsin 3x$, f) $y = \sin 3x$, g) $y = 3 \sin x$, h) $y = \max\{x, x^2\}$,
i) $y = \mathrm{e}^{\lfloor x \rfloor}$, j) $y = \lfloor \mathrm{e}^x \rfloor$, k) $y = \lfloor \ln x \rfloor$, l) $y = \arcsin x + 1$,
m) $y = x + \sin x$, n) $y = x \sin x$, o) $y = x^2 + \sin x$, p) $y = \arcsin(x+1)$,
q) $y = x^2 \sin x$, r) $y = x^3 \sin x$, s) $y = \lfloor \sin x \rfloor$, t) $y = |x + |x| + 1|$,
u) $y = \frac{\sin x}{x^2}$, v) $y = \frac{4}{x-1}$, w) $y = \frac{x+1}{x-1}$, x) $y = \frac{1}{x^2-2x+1}$.

3.1.6. Zostrojte graf parametricky zadanej funkcie $y = f(x)$ a určte jej explictný tvar.
a) $x = 1 - t$, $y = t$, $t \in (-\infty\,;\,\infty)$, b) $x = t$, $y = t^2$, $t \in (-\infty\,;\,\infty)$,
c) $x = 1 - t^2$, $y = t^2$, $t \in (-\infty\,;\,\infty)$, d) $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in (-\infty\,;\,\infty)$,
e) $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0\,;\,2\pi)$, f) $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0\,;\,\pi \rangle$,
g) $x = t - t^2$, $y = t^2 - t^3$, $t \in (-\infty\,;\,\infty)$, h) $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $t \in \langle 0\,;\,2\pi)$,
i) $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $t \in R$, j) $x = \frac{t}{1+t^3}$, $y = \frac{t^2}{1+t^3}$, $t \in R - \{-1\}$.

3.1.7. Zistite, či sa rovnajú funkcie f a g, ak platí: ♣
a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x^2}$, b) $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{x}{x}$, c) $f(x) = x$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$.

3.1.8. Ktoré z funkcií $f\colon\ y = \frac{1}{x^2+x}$, $g\colon\ y = \frac{1}{x^2+\sqrt{x^2}}$, $h\colon\ y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ sa rovnajú? ♣

3.1.9. Dokážte, že ak sú funkcie f, g párne, resp. nepárne, potom sú funkcie fg, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ (pokiaľ sú definované) párne.

3.1.10. Dokážte, že ak je funkcia f párna a g nepárna, potom sú funkcie fg, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ (pokiaľ sú definované) nepárne.

3.1.11. Rozhodnite, či je funkcia $y = f(x)$ párna alebo nepárna. ♣
a) $y = x^2 + \sin x^2$, b) $y = \cos(\pi - x)$, c) $y = x \cosh x$, d) $y = \sin x + \cos x$,
e) $y = x \ln |x|$, f) $y = x - x^3$, g) $y = x - x^2$, h) $y = \chi(x) - \chi^2(x)$,
i) $y = \frac{|x|}{x}$, j) $y = x^2 + |x|$, k) $y = x + \sin x$, l) $y = |x| + \cos x$,
m) $y = \ln \frac{2-x}{2+x}$, n) $y = \frac{\sinh x}{\sin x}$, o) $y = \frac{2^x+2^{-x}}{2}$, p) $y = \frac{2^x-2^{-x}}{2}$,
q) $y = \frac{2^x+1}{2^x-1}$, r) $y = x\frac{2^x+1}{2^x-1}$, s) $y = \frac{x}{2^x-1}$, t) $y = \frac{x+1}{x-1}$,
u) $y = \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, v) $y = \frac{1}{2+\cos^3 x}$, w) $y = \frac{\sin x}{x}$, x) $y = \frac{x+\operatorname{tgh} x}{3+2\cos x}$.

3.1.12. Nech $y = f(x)$ je ľubovoľná funkcia definovaná na intervale $(-k\,;\,k)$, kde $k \in R$, $k > 0$. Dokážte, že funkcia $f(x) + f(-x)$ je párna a funkcia $f(x) - f(-x)$ je nepárna na intervale $(-k\,;\,k)$.

3.1.13. Rozložte funkciu $y = f(x)$ na súčet párnej a nepárnej funkcie. ♣

a) $y = x + 1$, b) $y = x + |x|$, c) $y = x^2 + |x|$, d) $y = x^2 + x$,
e) $y = \chi(x)$, f) $y = e^x$, g) $y = \frac{1}{x+1}$, h) $y = x^2 - 2x + 1$,
i) $y = x - \lfloor x \rfloor$, j) $y = x + \lfloor x \rfloor$, k) $y = (-1)^{\lfloor x-1 \rfloor}$, l) $y = \lfloor x \rfloor + |x|$.

3.1.14. Doplňte definíciu funkcie $y = f(x)$ tak, aby bola párna, resp. nepárna. ♣

a) $y = x - 1$, $x > 0$, b) $y = |x - 1|$, $x > 0$, c) $y = \sqrt{x + 1}$, $x > 0$,
d) $y = \frac{1}{x+1}$, $x > 0$, e) $y = x + \lfloor x \rfloor$, $x > 0$, f) $y = x^2 - x$, $x > 0$.

3.1.15. Je funkcia $y = f(x)$ periodická? Ak áno, určte jej primitívnu periódu: ♣

a) $y = |\sin x|$, b) $y = \sin x^2$, c) $y = \sin^2 x$, d) $y = (-1)^{\lfloor x-1 \rfloor}$,
e) $y = x - \lfloor x \rfloor$, f) $y = \lfloor \chi(x) \rfloor$, g) $y = \chi(\lfloor x \rfloor)$, h) $y = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

3.1.16. Je funkcia $y = f(x)$ periodická? Ak áno, určte jej primitívnu periódu: ♣

a) $y = \sin x + \cos x$, b) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$, c) $y = \operatorname{sgn}(x - \lfloor x \rfloor)$,
d) $y = \sin x + \cos 2x$, e) $y = \arcsin \sin x$, f) $y = \cos x - 3 \sin 4x$,
g) $y = \ln |\sin x + \cos x|$, h) $y = 2^{3+\sin 2x}$, i) $y = x \arccos x$,
j) $y = \frac{1+(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}$, k) $y = \frac{3^{\lfloor x \rfloor}+(-3)^{\lfloor x \rfloor}}{3^{\lfloor x \rfloor}}$, l) $y = \frac{1+(-2)^{\lfloor x \rfloor}}{3^{\lfloor x \rfloor}}$.

3.1.17. Zostrojte funkciu $y = f(x)$ s primitívnou periódou $p = 1$, ak platí: ♣

a) $y = x^2$, $x \in (0\,;\,1\rangle$, b) $y = x^2$, $x \in (1\,;\,2\rangle$, c) $y = \sqrt{x}$, $x \in (3\,;\,4\rangle$.

3.1.18. Zostrojte periodickú funkciu $y = f(x)$, $D(f) \subset R$ s primitívnou periódou p a načrtnite jej graf tak, aby funkcia $f(x)$ bola: ♣

a) Párna, rastúca na intervale $\langle 3\,;\,4\rangle$, $p = 4$ a $f(1) = 0$.
b) Párna, rastúca na intervale $\langle 1\,;\,2\rangle$ a klesajúca na intervale $\langle 6\,;\,8\rangle$.
c) Nepárna, rastúca na intervale $\langle 1\,;\,4)$ a klesajúca na intervale $\langle 7\,;\,9\rangle$.
d) Nepárna, $p = 6$, $f(x) = 9 - x$ pre $x \in \langle 7\,;\,9\rangle$ a interval $\langle 0\,;\,1\rangle \notin D(f)$.
e) Nepárna, $p = 6$, $f(x) = 9 - x$ pre $x \in \langle 7\,;\,9\rangle$ a interval $(0\,;\,1) \notin D(f)$.
f) Párna, $p = 8$, $f(x) = 3 - x$ pre $x \in \langle 0\,;\,3\rangle$ a interval $(3\,;\,4\rangle \notin D(f)$.

3.1.19. Nech sú funkcie f, g periodické s primitívnou periódou $p \neq 0$. Dokážte, že funkcie $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ (pokiaľ sú definované) sú periodické.

3.1.20. Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia $y = f(x)$ monotónna: ♣

a) $y = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$, b) $y = (x^2 - x)^3$, c) $y = 2^{x^2-3x+2}$, d) $y = 2^{|x-2|+|x+1|}$,
e) $y = x^2 - 3x + 2$, f) $y = x^4 - 3x^2 + 2$, g) $y = x - |x|$, h) $y = \ln^2 x - \ln x$,
i) $y = 2 - 3x$, j) $y = x^3 - x$, k) $y = \sqrt{2 - 3x}$, l) $y = |x + 3| - |x|$,
m) $y = x - \lfloor x \rfloor$, n) $y = |x + 1|$, o) $y = x + |x|$, p) $y = x + \sqrt{x - 1}$,
q) $y = \frac{x}{x-3}$, r) $y = \frac{x+2}{x-3}$, s) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, t) $y = \ln \frac{x^2+3x}{x+2}$.

3.1.21. Zistite, či je funkcia $y = f(x)$, $x \in D(f)$ ohraničená zhora alebo zdola a určte jej suprémum a infimum, prípadne maximum a minimum, ak existuje. ♣

a) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \langle 0\,;\,\infty)$,
b) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$,
c) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-1\,;\,1\rangle$,
d) $y = 1 - 3x$, $x \in \langle 0\,;\,5)$,
e) $y = x^2 - 4x + 5$, $x \in R$,
f) $y = x^2 - 4x + 5$, $x \in \langle 3\,;\,6)$.

3.1.22. Nájdite maximum a minimum funkcie $y = f(x)$ zadanej predpisom: ♣

a) $y = x^2 - 3x + 1$,
b) $y = x^3 - 3x + 1$,
c) $y = x^2 + |x|$,
d) $y = x^2 - |x|$,
e) $y = \sin^2 x$,
f) $y = \sin x^2$,
g) $y = 2 + \sin x$,
h) $y = \sin(x + 1)$.

3.1.23. Nech $f\colon\ y = x$, $g\colon\ y = 1 - x^2$, $h\colon\ y = \sin x$. Určte funkcie $f(g)$, $g(f)$, $f(h)$, $h(f)$, $g(h)$, $h(g)$, $f[g(h)]$, $f[h(g)]$, $g[f(h)]$, $g[h(f)]$, $h[f(g)]$, $h[g(f)]$. ♣

3.1.24. Nájdite funkcie $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$, $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$, ak: ♣

a) $f(x) = 2x$, $g(x) = 4 - x$,
b) $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$,
c) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sqrt{1 - |x|}$,
d) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \sinh x$,
e) $f(x) = \operatorname{argsinh} x$, $g(x) = \cosh x$,
f) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$,
g) $f(x) = (x + 1)^2$, $g(x) = \sqrt{x}$,
f) $f(x) = x^2$, $g(x) = \lfloor x \rfloor$,
i) $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$, $g(x) = x^2 - x$,
j) $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $g(x) = \frac{1}{x+2}$.

3.1.25. Nájdite funkcie $|g|$, $f + g$, g^2, fg, $\frac{f}{g}$, $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$ a ich definičné obory, ak $f(x) = x$ pre $x < 0$ a $f(x) = x^2$ pre $x \geq 0$ a platí: ♣

a) $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x < 0, \\ x^2 + 1, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$
b) $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pre } x < 0, \\ x + 1, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

3.1.26. Nájdite zložené funkcie $f_2 = f(f)$, $f_3 = f(f(f))$, $\ldots$, $f_n = f(f(f \cdots f(f)))$, ak funkcia $f_1 = f$ je definovaná predpisom: ♣

a) $f(x) = 1 + x$,
b) $f(x) = 1 - x$,
c) $f(x) = \frac{1+x}{x}$,
d) $f(x) = \frac{x}{1+x}$,
e) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$,
f) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$,
g) $f(x) = \frac{x}{1-x}$,
h) $f(x) = \frac{x}{x-1}$,
i) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$,
j) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$,
k) $f(x) = \frac{1-x}{x}$,
l) $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

3.1.27. Nech je daná funkcia $y = f(x)$. Nájdite všetky $x \in R$ tak, aby platilo: ♣

a) $y = \frac{1+x}{1-x} \leq 1$,
b) $y = \frac{1+x^2}{(1-x)^2} \geq 2$,
c) $y = \frac{1-\sqrt{1-2x^2}}{x} < 1$.

3.1.28. Nech $f\colon\ y = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1\,;\,1)$. Dokážte, že $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$.

3.1.29. Nech sú funkcie f, g elementárne a nech pre všetky $x \in D(f)$ platí $f(x) > 0$. Dokážte, že funkcia f^g je elementárna.
[Návod: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.]

3.1.30. Nájdite inverznú funkciu k funkcii $y = f(x)$ zadanej predpisom: ♣

a) $y = x^2 - 1$, $x \in \langle 2\,;\,5\rangle$,
b) $y = \frac{x}{x+3}$, $x \in R - \{3\}$,
c) $y = x^2 - 8x + 16$, $x \in \langle 4\,;\,5\rangle$,
d) $y = \sin(3x - 1)$, $|3x - 1| < \frac{\pi}{2}$,
e) $y = \ln \sqrt{x - 1}$, $x \in (1\,;\,\infty\rangle$,
f) $y = \ln(\sqrt{x} - 1)$, $x \in (1\,;\,\infty\rangle$.

3.1.31. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcie $y = f(x)$ tak, aby bola prostá. Potom k nej určte inverznú funkciu $y = f^{-1}(x)$. ♣

a) $y = 1 + 2\operatorname{tg} x$, b) $y = \arcsin\sin x$, c) $y = \sqrt{1 + \sin x}$, d) $y = \arccos \mathrm{e}^x$,
e) $y = \ln\cos x$, f) $y = \mathrm{e}^{1-x^2} - 1$, g) $y = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$, h) $y = \mathrm{e}^{x-1} - 1$,
i) $y = |x|(-1)^{\lfloor x \rfloor}$, j) $y = x^2 - 2x - 1$, k) $y = x^4 - 1$, l) $y = \sqrt{|x+1|}$,
m) $y = \frac{x-1}{2-3x}$, n) $y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, o) $y = \sqrt{\arcsin\frac{x}{3}}$, p) $y = \frac{1-2^x}{1+2^x}$.

3.1.32. Nájdite definičný obor a obor hodnôt funkcie $y = f(x)$ tak, aby bola prostá. Potom k nej určte inverznú funkciu $y = f^{-1}(x)$. ♣

a) $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$, b) $y = 1 + \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}$, c) $y = 1 + \arccos(2x - 1)$,
d) $y = \begin{cases} x, & \text{pre } x < 0, \\ 2x, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$ e) $y = \begin{cases} x, & \text{pre } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$ f) $y = \begin{cases} x^2, & \text{pre } x < 0, \\ x, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

3.1.33. Dokážte vzťahy pre goniometrické funkcie z tabuľky 3.1.2.

3.1.34. Dokážte vzťahy pre hyperbolické funkcie z tabuľky 3.1.3.

3.2 Limita funkcie

Pri vyšetrovaní funkcie je dôležité charakterizovať jej lokálne vlastnosti, t. j. jej chovanie v okolí ľubovoľného bodu. Zaujímajú nás napríklad hodnoty funkcie v okolí nejakého bodu, v ktorom nie je definovaná. Na začiatok uvedieme niekoľko príkladov.

Príklad 3.2.1.
Nech $f\colon\ y = f(x)$ a nech $a \in R$ je daný bod. V matematike má dôležitú úlohu podiel

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Zaujíma nás, ako sa mení podiel prírastku funkcie $f(x) - f(a)$ a prírastku argumentu $x - a$, t. j. ako sa mení hodnota funkcie $g(x)$ v okolí bodu a. Z fyzikálneho hľadiska predstavuje funkcia $g(x)$ zmenu priemernej rýchlosti telesa pohybujúceho sa rýchlosťou $f(x)$ v časovom intervale $x - a$. ■

Príklad 3.2.2.
Uvažujme funkciu $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$. Pre všetky $x \in R$, $x \neq 2$ platí:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2.$$

Je zrejmé, že ak sa bude hodnota argumentu x blížiť k číslu 2 (ozn. $x \to 2$), potom sa hodnota funkcie $f(x)$ bude blížiť k číslu $2 + 2 = 4$, t. j. $f(x) \to 4$.
To znamená, že ak bude nejaká postupnosť argumentov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergovať k bodu 2, potom bude príslušná postupnosť funkčných hodnôt $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergovať k bodu 4.
V prípade $x \to 5$ platí $f(x) \to 7$ a v prípade $x \to \infty$ platí $f(x) \to \infty$.
Takže je logické položiť $f(2) = 4$ a funkcia bude definovaná pre všetky $x \in R$. ■

Všimnime si, že daná funkcia nemusí byť definovaná v bode, v okolí ktorého ju skúmame. V každom prípade je tento bod hromadným bodom definičného oboru funkcie. Ak to zhrnieme, zaujíma nás ako sa správa hodnota závislej premennej $f(x)$ v prípade, že sa hodnota nezávislej premennej x blíži k bodu a.

Nech $a \in R^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie $f\colon\ y = f(x)$ a nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov, ktorá sa blíži k bodu a. Nech $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ pre všetky $n \in N$. Potom skúmame, k akej hodnote $b \in R^*$ (pokiaľ existuje) sa blíži postupnosť príslušných funkčných hodnôt $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, t. j. aká je hodnota

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n), \quad \text{ak} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Ak sa všetky takéto postupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ blížia k tej istej hodnote $b \in R^*$, potom hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu rovnú b. Teraz prejdeme k presnej definícii limity funkcie v danom bode.

Hovoríme, že **funkcia $y = f(x)$ má v bode $a \in R^*$ limitu rovnú $b \in R^*$** (**limita funkcie f v bode a sa rovná bodu b**)[53] a označujeme $\lim_{x\to a} f(x) = b$, ak:

a) Bod a je hromadným bodom množiny $D(f)$.

b) Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Ak $a \in R$, potom hovoríme **o limite vo vlastnom bode a**. Ak $a = \pm\infty$, potom hovoríme **o limite v nevlastnom bode a**. Ak $b \in R$, potom hovoríme **vlastnej limite** a ak $b = \pm\infty$, hovoríme **o nevlastnej limite**.

Poznámka 3.2.1.
Pretože a je hromadný bod množiny $D(f)$, potom existuje (veta 2.3.5) aspoň jedna postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že pre všetky $n \in N$ platí $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Z definície vyplýva, že pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Poznámka 3.2.2.
Z definície jednoznačnosti limity postupnosti vyplýva jednoznačnosť limity funkcie f v danom bode a. Predpokladajme, že existujú dve hodnoty $b_1, b_2 \in R^*$ také, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = b_2.$$

Potom pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ takú, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ dostávame spor

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b_1, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b_2.$$

Príklad 3.2.3.
Vypočítajte $\lim_{x\to a} c$, kde $c \in R$, $a \in R^*$.

Riešenie.
Označme $f\colon\ y = c$. Je zrejmé, že $a \in R^*$ je hromadným bodom $D(f) = R$.
Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R - \{a\}$ je ľubovoľná postupnosť taká, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c. \ \blacksquare$$

Príklad 3.2.4.
Vypočítajte $\lim_{x\to 0} \chi(x)$, kde $\chi(x) = 1$ pre $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \notin Q$.

Riešenie.
Je zrejmé, že bod 0 je hromadným bodom množiny $D(\chi) = R$.

[53] Táto definícia sa nazýva **definícia limity funkcie v zmysle Heineho**, resp. **Heineho definícia limity funkcie v bode a**.

Pre postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{\sqrt{2}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n} = 0$ a pre všetky $n\in N$

$$\tfrac{1}{n}\in D(\chi),\ \tfrac{1}{n}\neq 0,\ \chi\left(\tfrac{1}{n}\right) = 1, \qquad \tfrac{\sqrt{2}}{n}\in D(\chi),\ \tfrac{\sqrt{2}}{n}\neq 0,\ \chi\left(\tfrac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0.$$

Potom $\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ neexistuje, pretože

$$\lim_{n\to\infty}\chi\left(\tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\chi\left(\tfrac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0. \blacksquare$$

Príklad 3.2.5.
Nech $f\colon\ y = x^2$. Vypočítajte $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x^2$, kde $a\in R^*$.

Riešenie.
Každý bod $x = a\in R^*$ je hromadným bodom množiny $D(f) = R$.
Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť reálnych čísel rôznych od a taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Potom pre príslušnú postupnosť $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ na základe vety 2.3.13 platí:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n\cdot\lim_{n\to\infty} x_n = a\cdot a = \begin{cases} a^2, & \text{pre } a\in R,\\ \infty, & \text{pre } a = \pm\infty.\end{cases}$$

Z toho vyplýva, že pre $a\in R$ platí $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$ a pre $a = \pm\infty$ platí $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = \infty$. $\blacksquare$

Príklad 3.2.6.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

Riešenie.
Označme $f\colon\ y = \sin\frac{1}{x}$. Je zrejmé, že bod 0 je hromadný bod množiny $D(f) = R - \{0\}$.
Uvažujme postupnosti $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(2n\pi)^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, ktoré konvergujú k číslu 0. Pre všetky $n\in N$ platí $\alpha_n\neq 0$, $\beta_n\neq 0$ a tiež pre všetky $n\in N$ platí:

$$f(\alpha_n) = f\left(\tfrac{1}{2n\pi}\right) = \sin(2n\pi) = 0,\ \ f(\beta_n) = f\left(\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

Z toho vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(\beta_n) = 1$, t. j. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ neexistuje. $\blacksquare$

Príklad 3.2.7.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$.

Riešenie.
Bod 0 je hromadným bodom množiny R, ktorá je definičným oborom funkcie $y = \sin x$.
Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset R - \{0\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
Potom existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $x_n\in\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$. Potom (viď obrázok 3.1.25) pre všetky $n\in N$, $n\geq n_0$ platí $-|x_n|\leq\sin x_n\leq |x_n|$. Z toho vyplýva:

$$0 = -\lim_{n\to\infty} x_n = -\lim_{n\to\infty}|x_n| \leq \lim_{n\to\infty}\sin x_n \leq \lim_{n\to\infty}|x_n| = \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

To znamená, že $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. $\blacksquare$

3.2.1 Základné vlastnosti

Z definície je zrejmé, že limita funkcie je lokálna záležitosť v nejakom okolí bodu $a\in R^*$ na jednej strane a v nejakom okolí bodu $b\in R^*$ na strane druhej. Ak $O(a)$, $O(b)$ sú ľubovoľné okolia, potom na základe poznámky 2.3.10 existujú indexy $n_a, n_b\in N$ také, že pre všetky $n\in N$, $n\geq n_a$ platí $x_n\in O(a) - \{a\}$ a pre všetky $n\in N$, $n\geq n_b$ platí $f(x_n)\in O(b)$.

Preto je prirodzené charakterizovať limitu funkcie v bode a pomocou prstencových okolí $P(a)$ bodu a a okolí $O(b)$ bodu b.[54] Tento vzťah vyjadruje nasledujúca veta.

Veta 3.2.1.
Funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu rovnú $b \in R^*$ práve vtedy, ak:

a) Bod a je hromadným bodom množiny $D(f)$.

b) Pre každé okolie $O(b)$ existuje prstencové okolie $P(a)$ také, že pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(b)$.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech $O(b)$ je ľubovoľné okolie bodu b.
Potom pre každé $P(a)$ existuje $x \in P(a) \cap D(f)$, pre ktoré platí $f(x) \notin O(b)$.
Nech $a \in R$. Pre každé $n \in N$ označme $P_n(a)$ prstencové okolie s polomerom $\frac{1}{n}$. V každom z týchto okolí existuje $x_n \in P_n(a) \cap D(f)$ tak, že $f(x_n) \notin O(b)$. Je zrejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ a z definície limity vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.
Lenže z konštrukcie postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva, že ak $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existuje, potom určite nepatrí do $O(b)$, t. j. sa nerovná bodu b. To je spor.
Pre $a = \pm\infty$ je dôkaz analogický.
$PP_{\Leftarrow}$: Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ a nech $O(b)$ je ľubovoľné okolie bodu b.
Potom existuje okolie $P(a)$ také, že pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(b)$.
Z definície limity postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva, že existuje index $n_0 \in N$ taký, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $x_n \in P(a) \cap D(f)$.
Z toho vyplýva, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí $f(x_n) \in O(b)$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. ■

Poznámka 3.2.3.
Ak označíme ε, δ polomery okolí $O(a)$, $O(b)$, môžeme tvrdenie b) symbolicky zapísať:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,\ a, b \in R \Leftrightarrow \underbrace{\forall O_\varepsilon(b)}_{\forall\varepsilon>0}\ \underbrace{\exists O_\delta(a)}_{\exists\delta>0}\ \forall x \in D(f):\ \underbrace{x \in O_\delta(a), x \neq a}_{0<|x-a|<\delta} \Rightarrow \underbrace{f(x) \in O_\varepsilon(b)}_{|f(x)-b|<\varepsilon},$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b,\ b \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in R\ \ \delta<x\ \ |f(x)-b|<\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b,\ b \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in R\ \ x<\delta\ \ |f(x)-b|<\varepsilon,$$

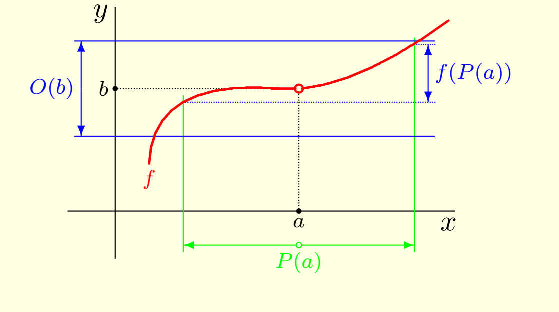
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,\ a \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon\in R\ \exists\delta>0\ \ 0<|x-a|<\delta\ \ \delta<f(x),$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,\ a \in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon\in R\ \exists\delta>0\ \ 0<|x-a|<\delta\ \ f(x)<\delta.$$

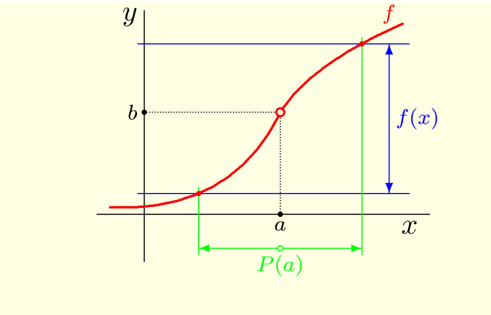
Veta 3.2.2.
Ak má funkcia f v bode $a \in R^*$ konečnú limitu, potom existuje prstencové okolie $P(a)$, v ktorom je ohraničená (obr. 3.2.105).

Dôkaz.
Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in R$ a nech $O(b)$ je ľubovoľné okolie. Potom (veta 3.2.1) existuje $P(a)$ také, že pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(b)$, t. j. v ktorom je f ohraničená. ■

[54] V literatúre sa limita funkcie v danom bode často definuje pomocou okolí a definícia pomocou postupností sa uvádza ako ekvivalentná definícia.



Obr. 3.2.104: Veta 3.2.1.



Obr. 3.2.105: Veta 3.2.2.

Veta 3.2.3.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod definičných oborov funkcií f, g. Nech $P(a)$ je prstencové okolie také, že $P(a) \cap D(f) = P(a) \cap D(g)$ a pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.
Potom $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje práve vtedy, ak existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a obe limity sa rovnajú.

Dôkaz.
Stačí dokázať, že ak existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, potom existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a rovnajú sa.[55]

Predpokladajme, že existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in R^*$.

Nech postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(a) \cap D(f)$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Je zrejmé, že existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:
$$x_n \in P(a) \cap D(f), \qquad \text{t. j.} \quad f(x_n) = g(x_n).$$
Z toho na základe dôsledku 2.3.6.a vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$, t. j. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. ■

Príklad 3.2.8.
Dokážte, že $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1} = 5$.

Riešenie.
Tvrdenie vyplýva z predchádzajúcej vety, pretože pre všetky $x \in R - \{1\}$ platí:
$$\frac{2x^2+x-3}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+3)}{x-1} = 2x+3, \qquad \lim_{x\to 1}(2x+3) = 5. \ ■$$

Poznámka 3.2.4.
Veta 3.2.3 je dôležitá a používa sa často. Väčšinou sa ale pri výpočte neuvádza, napr.
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^3+x^2+x+1) = 4.$$
A ako dokazuje nasledujúci príklad, podmienka $P(a) \cap D(f) = P(a) \cap D(g)$ v predpokladoch vety 3.2.3 je dôležitá a nemôžeme ju vynechať.

Príklad 3.2.9.
Uvažujme funkciu $y = f(x) = 1$, $x \in Q$ a Dirichletovu funkciu $y = \chi(x)$, $x \in R$.
Bod 0 je hromadným bodom množín $D(f) = Q$, $D(\chi) = R$.
Pre každé prstencové okolie $P(0)$ a pre všetky $x \in P(0) \cap D(f)$ platí $f(x) = \chi(x) = 1$.
Lenže limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ a limita $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x)$ neexistuje. ■

[55] Opačnú implikáciu dokážeme tak, že dosadíme funkciu f za funkciu g a naopak.

Veta 3.2.4.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod definičných oborov funkcií f, g. Nech $P(a)$ je prstencové okolie také, že $P(a) \cap D(f) = P(a) \cap D(g)$ a pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \leq g(x)$.
Ak existujú limity $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, potom platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

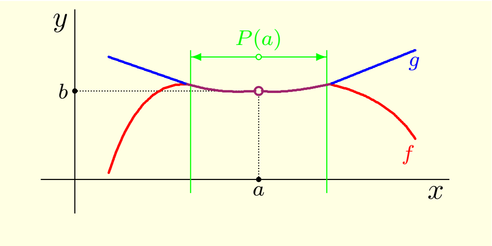
Dôkaz.
Dôkaz je analogický ako pri vete 3.2.3 a vyplýva z vety 2.3.17. ■

Dôsledok 3.2.4.a.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod definičných oborov funkcií f, g. Nech $P(a)$ je prstencové okolie také, že $P(a) \cap D(f) = P(a) \cap D(g)$ a pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \leq g(x)$.

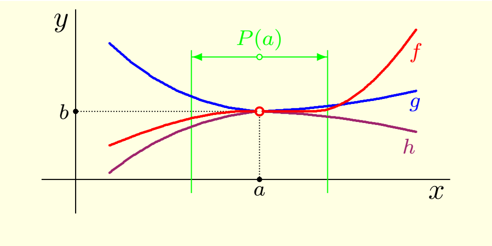
a) Ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, potom existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.
b) Ak $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, potom existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Dôsledok 3.2.4.b (Veta o zovretí).
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod definičných oborov funkcií f, g, h.
Nech $P(a)$ je prstencové okolie také, že $P(a) \cap D(f) = P(a) \cap D(g) = P(a) \cap D(h)$ a pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
Ak existujú $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, $b \in R^*$, potom existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Dôsledok 3.2.4.c.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod definičných oborov funkcií f, g a nech je funkcia f ohraničená v nejakom prstencovom okolí $P(a)$. Ak $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, potom $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.



Obr. 3.2.106: Veta 3.2.3.



Obr. 3.2.107: Dôsledok 3.2.4.b.

Príklad 3.2.10.
Dokážte, že $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Riešenie.
Bod ∞ je hromadný bod definičného oboru funkcie $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.
Keďže pre všetky $x \in R$ platí $-1 \leq \sin x \leq 1$, potom pre všetky $x > 0$ platí:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}, \quad \text{t. j.} \quad 0 = -\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Iné riešenie.
Funkcia $y = \frac{\sin x}{x}$ sa dá zapísať ako súčin funkcií $f\colon\ y = \sin x$, $g\colon\ y = \frac{1}{x}$.
Funkcia f je ohraničená a $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Z toho vyplýva $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. ■

Poznámka 3.2.5.
Ak vo vete 3.2.4 nahradíme predpoklad $f(x) \leq g(x)$ predpokladom $f(x) < g(x)$, záver vety $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ sa nezmení (príklad 3.2.11).

Príklad 3.2.11.
Uvažujme funkcie $f\colon\ y=0,\ x\in R$ a $g\colon\ y=\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\}$.
Bod ∞ je hromadným bodom množín $D(f)$, $D(g)$ a pre všetky $x>0$ platí:

$$0=f(x)<g(x)=\tfrac{1}{x},\quad \text{ale}\quad \lim_{x\to\infty} 0=\lim_{x\to\infty} f(x)=0=\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{x}.\ \blacksquare$$

Príklad 3.2.12.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, pričom $y=f(x)$, $x\in(0\,;\,\infty)$ je určená $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{pre } x\in Q,\\ 0, & \text{pre } x\notin Q.\end{cases}$

Riešenie.
Označme $h(x)=0$, $g(x)=\frac{1}{x}$, kde $D(h)=D(g)=(0\,;\,\infty)$.
Bod 0 je hromadný bod množín $D(f)=D(g)=D(h)$.
Keďže pre všetky $x\in(0\,;\,\infty)$ platí $0=h(x)\leq f(x)\leq g(x)=\frac{1}{x}$, potom

$$0=\lim_{x\to 0} h(x)\leq \lim_{x\to 0} f(x)\leq \lim_{x\to 0} g(x)=0,\quad \text{t. j.}\quad \lim_{x\to 0} f(x)=0.\ \blacksquare$$

Príklad 3.2.13.
Dokážte, že pre všetky $a\in R$ platí $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\mathrm{e}^a$.

Riešenie.
Pre $a=0$ je tvrdenie splnené triviálne.
Ak $a>0$, potom pre všetky $x>1$ platí $1\leq\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$, t. j.

$$0<\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor+1}<\tfrac{a}{x}\leq\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor},\quad \text{t. j.}\quad 1<1+\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor+1}<1+\tfrac{a}{x}\leq 1+\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor}.$$

To znamená, že pre všetky $x>1$ platí:

$$\left(1+\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor}\leq\left(1+\tfrac{a}{x}\right)^x\leq\left(1+\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1}.$$

Keďže $\lfloor x\rfloor\in N$, môžeme nasledujúce limity previesť na limity postupností.
Potom na základe príkladu 2.3.24 platí:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{n+1}\right)^n=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{n+1}\right)^{-1}=\mathrm{e}^a\cdot(1+0)^{-1}=\mathrm{e}^a,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{n}\right)=\mathrm{e}^a\cdot 1=\mathrm{e}^a.$$

Z toho na základe vety o zovretí vyplýva:

$$\mathrm{e}^a=\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor}\leq\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{x}\right)^x\leq\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1}=\mathrm{e}^a.$$

Ak $a<0$, potom analogicky pre všetky $x>1$ platí:

$$\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor}\leq\tfrac{a}{x}<\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor+1}<0,\qquad \left(1+\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1}\leq\left(1+\tfrac{a}{x}\right)^x\leq\left(1+\tfrac{a}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor}.$$

Z toho na základe vety o zovretí vyplýva dokazované tvrdenie. $\blacksquare$

Poznámka 3.2.6.
V príklade 3.2.13 sme počítali limitu funkcie f v bode ∞, pričom $f(x) = f(n)$ pre všetky $x \in \langle n\,;\, n+1)$, $n \in N$. Potom pre každú postupnosť bodov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá diverguje do ∞ existuje postupnosť prirodzených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá tiež diverguje do ∞ a pre všetky $n \in N$ platí $f(x_n) = f(k_n)$. To znamená, že môžeme považovať túto limitu za limitu číselnej postupnosti, t. j. platí $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$.

Veta 3.2.5.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. Potom platí:
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

Dôkaz.
Vyplýva z vety 2.3.15. ■

Dôsledok 3.2.5.a.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f a nech $b \in R$.
Potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ práve vtedy, ak $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - b| = 0$.

Príklad 3.2.14.
Dokážte, že pre všetky $a \in R$ platí $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$, $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$.

Riešenie.
Pre všetky $a, x \in R$ platia súčtové vzorce (veta 3.1.9)
$$\sin x - \sin a = 2\,\sin\tfrac{x-a}{2}\,\cos\tfrac{x+a}{2}, \qquad \cos x - \cos a = -2\,\sin\tfrac{x+a}{2}\,\sin\tfrac{x-a}{2}.$$
Keďže pre všetky $\alpha \in R$ platí $|\sin\alpha| \le |\alpha|$, $|\sin\alpha| \le 1$, $|\cos\alpha| \le 1$, potom
$$0 \le |\sin x - \sin a| = 2\cdot\left|\sin\tfrac{x-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\tfrac{x+a}{2}\right| \le 2\left|\tfrac{x-a}{2}\right|\cdot 1 = |x-a|,$$
$$0 \le |\cos x - \cos a| = 2\cdot\left|\sin\tfrac{x+a}{2}\right|\cdot\left|\sin\tfrac{x-a}{2}\right| \le 2\left|\tfrac{x-a}{2}\right|\cdot 1 = |x-a|\,.$$
Ak uvážime, že $\lim\limits_{x\to a} x = a$, t. j. $\lim\limits_{x\to a} |x-a| = 0$, potom platí:
$$\lim_{x\to a} |\sin x - \sin a| = 0, \qquad \lim_{x\to a} |\cos x - \cos a| = 0.$$
Z toho na základe dôsledku 3.2.5.a vyplýva $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$, $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$. ■

Príklad 3.2.15.
Dokážte, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Riešenie.
Bod 0 je hromadný bod definičného oboru funkcie $y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$.
Zo vzťahu (3.10) vyplýva, že pre všetky $x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ platí:
$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{t. j.} \quad 1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$
a pre všetky $x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right)$ platí:
$$\operatorname{tg} x < x < \sin x < 0, \quad \text{t. j.} \quad 1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$
Z toho vyplýva, že pre všetky $x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$, $x \ne 0$ platí:
$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$
Potom na základe vety o zovretí platí:
$$1 = \lim_{x\to 0} \cos x \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le 1, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \;■$$

Veta 3.2.6.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$ a nech existuje prstencové okolie $P(a)$ také, že pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) > 0$, [resp. $f(x) < 0$]. Potom platí:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} \tfrac{1}{f(x)} = \infty, \qquad \left[\text{resp. } \lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} \tfrac{1}{f(x)} = -\infty\right].$$

Dôkaz.
Vyplýva z vety 2.3.16. ■

Príklad 3.2.16.
Označme $f\colon\ y = x,\ x \in R$. Bod 0 je hromadný bod $D(f)$ a platí $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$.

Postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{-\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujú k bodu 0 a platí pre ne

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty.$$

Z toho vyplýva, že $\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ neexistuje. ■

Veta 3.2.7.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap D(g)$ a nech $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$.

Potom existuje prstencové okolie $P(a)$ také, že pre všetky $x \in P(a) \cap D(f) \cap D(g)$ platí $f(x) < g(x)$.

Dôkaz.
Sporom. Nech také $P(a)$ neexistuje. To znamená, že v každom okolí $P(a)$ existuje bod $x \in P(a)$ taký, že $f(x) \geq g(x)$.
Nech $a \in R$ a nech $P_n(a)$, $n \in N$ je okolie s polomerom $\frac{1}{n}$. Nech $x_n \in P_n(a)$ je také, že $f(x_n) \geq g(x_n)$. Je zrejmé, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu a. Pre limity postupností funkčných hodnôt $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ pokiaľ existujú, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq \lim_{n\to\infty} g(x_n)$.
To je spor s predpokladom $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$. Pre $a = \pm\infty$ je dôkaz analogický. ■

Dôsledok 3.2.7.a.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f a nech

$$\lim_{x\to a} f(x) > 0, \qquad \left[\text{resp. } \lim_{x\to a} f(x) < 0\right].$$

Potom existuje prstencové okolie $P(a)$ také, že pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ platí:

$$f(x) > 0, \qquad [\text{resp. } f(x) < 0].$$

Dôkaz.
Stačí položiť $g(x) = 0$ a dosadiť do vety 3.2.7. ■

Veta 3.2.8 (O limite zloženej funkcie).
Nech pre funkcie f, g platí $H(f) \subset D(g)$ a nech pre body $a, b, c \in R^*$ platí:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \qquad \lim_{u\to b} g(u) = c.$$

Nech platí aspoň jeden z predpokladov a), b):

a) Existuje $P(a)$ tak, že pre všetky $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \neq b$. b) $g(b) = c$.

Potom pre zloženú funkciu $F = g(f)$ platí:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{u\to b} g(u) = c.$$

Dôkaz.
Z predpokladov je zrejmé, že bod a je tiež hromadným bodom množiny $D(F)$.
Z existencie $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a existencie $\lim_{u\to b} g(u)$ vyplýva:

Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Pre všetky $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(g) - \{b\}$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = c$.

Z predpokladu a) vyplýva, že $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset D(g) - \{b\}$.
To znamená, že ak platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = c$.
Z toho vyplýva, že pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$, kde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, platí:

$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = c, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to a} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = c.$$

Nech platí predpoklad b), t. j. $g(b) = c$.
Potom pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) - \{a\}$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, platí:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(b) = c. \ \blacksquare$$

Poznámka 3.2.7.
Ak pri výpočte limity zloženej funkcie $F = g(f)$ v bode a položíme $u = f(x)$, potom hovoríme, že **vykonávame substitúciu** $u = f(x)$. Výpočet pôvodnej limity prevedieme na výpočet limity funkcie $g(u)$ v bode b.
Predchádzajúca veta zjednodušuje v mnohých prípadoch výpočet limít. Predpoklad a) je splnený napríklad, ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ a funkcia f je v nejakom okolí bodu a prostá.

Poznámka 3.2.8.
Ak sú splnené predpoklady vety 3.2.8 a funkcia g je definovaná v bode b, t. j. je splnený predpoklad b) $g(b) = c$, potom platí:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{u\to b} g(u) = c = g(b) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Poznámka 3.2.9.
Ak pri výpočte limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ položíme substitúciu $x = h + a$, potom $h \to 0$ a platí:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(h + a).$$

Príklad 3.2.17.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1}$.

Riešenie.
Na základe predchádzajúcej poznámky platí:

$$\lim_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \ln\left[\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 1} (x+1)\right] = \ln 2. \ \blacksquare$$

Príklad 3.2.18.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$.

Riešenie.
Ak použijeme substitúciu $z = x - 2$, potom pre $x \to 2$ platí $z \to 0$. Z toho vyplýva:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1. \ \blacksquare$$

Príklad 3.2.19.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Riešenie.
Zo vzorca $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}b + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ vyplýva:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3-1}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left[\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right]}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left[\sqrt[6]{x}+1\right]} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}+1} = \frac{3}{2}.$$

Ak použijeme substitúciu $z = \sqrt[6]{x}$, t. j. $x = z^6$, potom je riešenie prehľadnejšie

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{z\to 1} \frac{\sqrt{z^6}-1}{\sqrt[3]{z^6}-1} = \lim_{z\to 1} \frac{z^3-1}{z^2-1} = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)(z^2+z+1)}{(z-1)(z+1)} = \lim_{z\to 1} \frac{z^2+z+1}{z+1} = \frac{3}{2}. \blacksquare$$

Veta 3.2.9.
Nech $a \in R^*$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap D(g)$, nech $r \in R$ a nech existujú limity

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \in R^*, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c \in R^*.$$

Ak majú príslušné výrazy v R^* zmysel, potom existujú nasledujúce limity a platí:

a) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| = |b|$,

b) $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c$,

c) $\lim\limits_{x\to a} \left[r\, f(x)\right] = r \lim\limits_{x\to a} f(x) = rb$,

d) $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x)\; g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x) = bc$,

e) $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{c}$,

f) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}$.

Dôkaz.
Dokážeme iba časť b). Ostatné tvrdenia sa dokážu analogicky.
Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \left[D(f) \cap D(g)\right] - \{a\}$ je taká, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \qquad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = c.$$

Z toho na základe vety 2.3.13 vyplýva, že platí:

$$\lim_{n\to\infty} \left[f(x_n) \pm g(x_n)\right] = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim_{n\to\infty} g(x_n) = b \pm c.$$

To znamená, že platí $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \pm c$. $\blacksquare$

Poznámka 3.2.10.
Ak niektorý z výrazov $b \pm c$, rb, bc, $\frac{1}{c}$, $\frac{b}{c}$ nemá zmysel, nemusí to znamenať, že príslušná limita neexistuje. V tomto prípade nemôžeme použiť vetu 3.2.9 a limitu musíme vypočítať iným spôsobom. Niekedy pomôže vhodná úprava výrazu, ktorým je funkcia definovaná.

Príklad 3.2.20.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^2+1} - x\right]$.

Riešenie.
Vetu 3.2.9 nemôžeme použiť priamo, pretože

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

a výraz $\infty - \infty$ nemá zmysel. Výraz v argumente limity musíme najprv upraviť. Platí

$$\lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^2+1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^2+1} - x\right] \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0. \blacksquare$$

Príklad 3.2.21.
Nech $a \in R$, $a \geq 0$. Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} a^x$.

Riešenie.
Ak $a = 0$, potom $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0$. Ak $a = 1$, potom $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$.

Ak $a > 1$, potom pre všetky $x \geq 1$ platí $1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$. Z toho vyplýva:
$$1 < a^{\lfloor x \rfloor} \leq a^x, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to\infty} a^{\lfloor x \rfloor} \leq \lim_{x\to\infty} a^x.$$
Potom analogicky ako v príklade 3.2.13 pre $n \in N$ na základe dôsledku 3.2.4.a platí:
$$\lim_{x\to\infty} a^{\lfloor x \rfloor} = \lim_{n\to\infty} a^n = \infty, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty.$$
Ak $0 < a < 1$, potom platí $\frac{1}{a} > 1$. Z toho vyplýva:
$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{a})^x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$
Ak to zhrnieme, potom $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{pre } a \in \langle 0\,;\,1), \\ 1, & \text{pre } a = 1, \\ \infty, & \text{pre } a \in (1\,;\,\infty). \end{cases}$ ■

Poznámka 3.2.11.
Podobným spôsobom ako v príklade 2.3.14, môžeme odvodiť limitu
$$\lim_{x\to\infty} x^q = \begin{cases} 0, & \text{pre } q < 0, \\ 1, & \text{pre } q = 0, \\ \infty, & \text{pre } q > 0. \end{cases}$$

3.2.2 Limita vzhľadom na množinu a jednostranné limity

Limitu funkcie f v bode $a \in R^*$ (v hromadnom bode definičného oboru funkcie f) sme definovali v nejakom prstencovom okolí $P(a)$, resp. na množine $P(a) \cap D(f)$. Ako ukazuje nasledujúce príklady, môže sa stať, že limita funkcie f v danom bode a neexistuje, ale existuje v bode a limita zúženia funkcie f na nejakú konkrétnu podmnožinu $A \subset D(f)$. Preto má zmysel definovať limitu vzhľadom na množinu.

Príklad 3.2.22.
Uvažujme Dirichletovu funkciu χ a funkciu $f\colon\, y = 1$, $x \in Q$, ktorá je jej zúžením na množinu Q. Je zrejmé, že $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, aj keď $\lim\limits_{x\to 0} \chi(x)$ neexistuje (príklad 3.2.4). ■

Príklad 3.2.23.
Limita $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, kde $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x \in (-\infty\,;\,0), \\ 2, & \text{pre } x \in \langle 0\,;\,\infty), \end{cases}$ neexistuje (obr. 3.2.108).

Ale ak označíme $g = f|_{(-\infty\,;\,0)}$, $h = f|_{\langle 0\,;\,\infty)}$, potom $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 2$. ■

Hovoríme, že **funkcia f má v bode $a \in R^*$ limitu rovnú $b \in R^*$ vzhľadom na množinu $A \subset D(f)$**, ak má v bode a limitu rovnú b jej zúženie $f|_A$, t. j. ak:
a) Bod a je hromadným bodom množiny A.
b) Pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A - \{a\}$ také, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$, platí $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \to b$.

Označujeme ju $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$, resp. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $x \in A$, t. j. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f|_A(x) = b$.

Poznámka 3.2.12.
To znamená, že pre limitu funkcie vzhľadom na množinu platia všetky vety, ktoré platia pre limitu funkcie v danom bode. Je zrejmé, že ak $a \in R^*$ je hromadným bodom množiny $A \subset D(f)$ a existuje limita funkcie f v bode a, potom tiež existuje limita funkcie f v bode a vzhľadom na množinu A.

Priamo z predchádzajúcej definície limity funkcie vzhľadom na množinu a z definície limity funkcie v bode vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Veta 3.2.10.
Limita $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ práve vtedy, ak pre každú množinu $A \subset D(f)$ platí $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$.

Príklad 3.2.24.
Aj keď $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje, existujú napríklad limity

$$\lim_{x\to\infty} \sin x = 0,\ x\in\{k\pi\,;\, k\in Z\}\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \sin x = 1,\ x\in\left\{\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\, k\in Z\right\}. \ \blacksquare$$

Nech množina $A \subset R$ a nech bod $a\in R$. Označme množiny

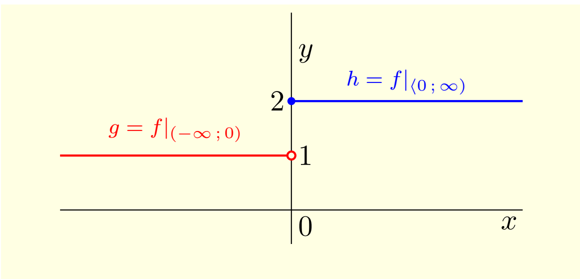
$$A_a^- = A \cap (-\infty\,;\, a) = \{x\in A\,;\, x < a\}\,, \qquad A_a^+ = A \cap (a\,;\, \infty) = \{x\in A\,;\, x > a\}\,.$$

Limitu funkcie f v bode $a \in R^*$ vzhľadom na množinu $D(f)_a^- = D(f) \cap (-\infty\,;\, a)$ [resp. na množinu $D(f)_a^+ = D(f)\cap(a\,;\,\infty)$] nazývame **limita zľava** [resp. **sprava**] **funkcie** f **v bode** a a označujeme $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ [resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$].

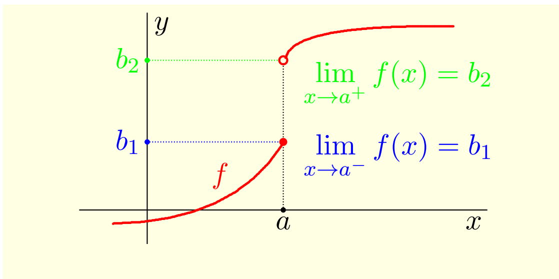
To znamená, že limita zľava [resp. sprava] funkcie f v bode a sa rovná

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D(f)_a^-}} f(x), \qquad \left[\text{resp. } \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D(f)_a^+}} f(x)\right].$$

Limitu zľava a limitu sprava funkcie f v bode a súhrnne nazývame **jednostranné limity funkcie** f **v bode** a. V tomto zmysle limitu funkcie f v bode a nazývame **obojstranná limita funkcie** f **v bode** a.



Obr. 3.2.108: Funkcia z príkladu 3.2.23.



Obr. 3.2.109: Jednostranné limity.

Poznámka 3.2.13.
Na obrázku 3.2.109 je znázornený graf funkcie f, ktorá nemá limitu v bode a, ale má jednostranné limity $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b_2$, pričom $b_1 \neq b_2$.

Priamo z definície obojstrannej a jednostranných limít vyplýva nasledujúca veta.

Veta 3.2.11.
Nech $a \in R$ je hromadným bodom $D(f)$. Potom limita funkcie f v bode a existuje práve vtedy, ak existujú jednostranné limity funkcie f v bode a a rovnajú sa. T. j. platí:
$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

Poznámka 3.2.14.
Nech $a \in R$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f a nech existuje okolie $O(a)$ také, že $O(a) \subset D(f)$. Je zrejmé, že ak $x \to a^-$, t. j. $x < a$, potom $-x > -a$, t.j $-x \to a^+$.

Poznámka 3.2.15.
Uvažujme funkcie f, g, h z príkladu 3.2.23, obr. 3.2.108. Potom platí:
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2. \blacksquare$$

Príklad 3.2.25.
Limita funkcie $f\colon\ y = \frac{1}{x}$ v bode 0 neexistuje, ale existujú jednostranné limity
$$\lim_{x\to 0^-} \tfrac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{x} = \infty. \blacksquare$$

Príklad 3.2.26.
Pre funkcie $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$ (viď obrázky 3.1.28, 3.1.31) platí:
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\tfrac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to \infty} \operatorname{arctg} x = \tfrac{\pi}{2}. \blacksquare$$

Príklad 3.2.27.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}}$, kde $a \in R$.

Riešenie.
Pri výpočte použijeme príklad 3.2.13.
Pre limitu sprava ($x > 0$, $x \to 0^+$, substitúcia $z = \frac{1}{x}$, t. j. $z \to \infty$) platí:
$$\lim_{x\to 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to\infty} \left(1+\tfrac{a}{z}\right)^z = \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a .$$
Pre limitu zľava ($x < 0$, $x \to 0^-$, substitúcia $z = -\frac{1}{x}$, t. j. $z \to \infty$) platí:
$$\lim_{x\to 0^-} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to\infty} \left(1+\tfrac{a}{-z}\right)^{-z} = \lim_{z\to\infty} \left[\left(1-\tfrac{a}{z}\right)^z\ \right]^{-1} = (\mathrm{e}^{-a})^{-1} = \mathrm{e}^a .$$
Potom na základe vety 3.2.11 platí $\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^a$. $\blacksquare$

Príklad 3.2.28.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Riešenie.
Ak použijeme vetu 3.2.8 a výsledok príkladu 3.2.27, potom platí:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim_{x\to 0} (x+1)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln \mathrm{e}^1 = 1. \blacksquare$$

Príklad 3.2.29.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x}$, kde $a > 0$, $q \in R$.

Riešenie.
Nech $a > 1$.
Pre všetky $1 \le x$ platí $1 \le \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$, t. j. $a^{\lfloor x \rfloor} \le a^x < a^{\lfloor x \rfloor + 1}$.
Ak $q \ge 0$, potom $\lfloor x \rfloor^q \le x^q < (\lfloor x \rfloor + 1)^q$. Z toho vyplýva:
$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\lfloor x \rfloor^q}{a^{\lfloor x \rfloor}} = \frac{\lfloor x \rfloor^q}{a^{\lfloor x \rfloor + 1}} \le \frac{x^q}{a^x} \le \frac{(\lfloor x \rfloor + 1)^q}{a^{\lfloor x \rfloor}} = a \cdot \frac{(\lfloor x \rfloor + 1)^q}{a^{\lfloor x \rfloor + 1}}.$$
Ak uvážime poznámku 3.2.6, potom na základe príkladu 2.3.34 platí:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor^q}{a^{\lfloor x \rfloor}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{(\lfloor x \rfloor + 1)^q}{a^{\lfloor x \rfloor + 1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^q}{a^{n+1}} = 0.$$
Z toho vyplýva:
$$0 = \frac{1}{a} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor^q}{a^{\lfloor x \rfloor}} \le \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} \le a \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{(\lfloor x \rfloor + 1)^q}{a^{\lfloor x \rfloor + 1}} = 0, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0.$$
Ak $q \le 0$, potom $(\lfloor x \rfloor + 1)^q \le x^q < \lfloor x \rfloor^q$ a analogicky platí:
$$\frac{(\lfloor x \rfloor + 1)^q}{a^{\lfloor x \rfloor + 1}} \le \frac{x^q}{a^x} \le \frac{\lfloor x \rfloor^q}{a^{\lfloor x \rfloor}}, \qquad 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{(\lfloor x \rfloor + 1)^q}{a^{\lfloor x \rfloor + 1}} \le \lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} \le \lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor^q}{a^{\lfloor x \rfloor}} = 0.$$
Ak $a < 1$, t. j. $\frac{1}{a} > 1$, potom $\frac{x^{-q}}{a^{-x}} > 0$ a na základe predošlého a vety 3.2.6 platí:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^{-x}}{x^{-q}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{1}{a})^x}{x^{-q}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{-q}}{(\frac{1}{a})^x}} = \frac{1}{0} = \infty.$$
Ak to zhrnieme, potom platí: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \begin{cases} \infty, & \text{pre } a \in (0\,;\,1\rangle\,, \\ 0, & \text{pre } a \in (1\,;\,\infty)\,. \end{cases}$ ∎

Poznámka 3.2.16.
Podobne, ako v príkladoch 2.3.21, 2.3.28, platí pre všetky $a \in R$, $a > 0$
$$\lim_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Veta 3.2.12 (O limite monotónnej funkcie).
Ak je funkcia f v nejakom ľavom prstencovom okolí $P^-(a)$ [resp. pravom prstencovom okolí $P^+(a)$] monotónna, potom má f v bode a limitu zľava [resp. sprava].
Ak je funkcia f nerastúca, potom platí:
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup\left\{f(x)\,;\, x \in P^-(a)\right\} \qquad \left[\text{resp.} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\left\{f(x)\,;\, x \in P^+(a)\right\}\right].$$
Ak je funkcia f neklesajúca, potom platí:
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \inf\left\{f(x)\,;\, x \in P^-(a)\right\} \qquad \left[\text{resp.} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \sup\left\{f(x)\,;\, x \in P^+(a)\right\}\right].$$

Dôkaz.
Vyplýva z vety 2.3.11 o limite monotónnej postupnosti. ∎

Poznámka 3.2.17.
Jednostranné limity v tvrdení vety 3.2.12 môžu byť aj nevlastné.
Aj predpoklady vety môžeme zovšeobecniť. Dôležité je, aby bol a hromadným bodom množiny, na ktorej je funkcia f monotónna. Vyjadruje to nasledujúca veta.

Veta 3.2.13.
Nech je a ľavým [resp. pravým] hromadným bodom množiny $D(f)$ a nech je funkcia f monotónna na množine $D(f) \cap P^-(a)$ [resp. $D(f) \cap P^+(a)$].
Potom v bode a existuje limita zľava [resp. sprava] funkcie f.

Príklad 3.2.30.
Funkcia $f\colon\ y = \frac{1}{x},\ x \in Q$ je monotónna na celom svojom $D(f) = Q$.
Je klesajúca na množinách $(-\infty\,;\,0) \cap Q$, $(0\,;\,\infty) \cap Q$. Použijeme vetu 3.2.13.
Bod 0 je ľavým hromadným bodom množiny $(-\infty\,;\,0) \cap Q$ a pravým hromadným bodom množiny $(0\,;\,\infty) \cap Q$. Pre jednostranné limity v bode 0 platí:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,\ x \in Q, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,\ x \in Q. \ \blacksquare$$

3.2.3 Asymptotické vlastnosti

V matematike, hlavne v jej aplikáciach, sa často používajú symboly o, O (malé o, veľké O), ktoré zaviedol nemecký matematik *Edmund Landau* [1877–1938].

Hovoríme, že **funkcia f je nekonečne malá** [resp. **nekonečne veľká**] **v bode a**, ak sa limita funkcie f v bode $a \in R^*$ rovná hodnote 0 [resp. $\pm\infty$], t. j. ak platí:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \left[\ \text{resp.}\ \lim_{x\to a} |f(x)| = \infty \right].$$

Nech $a \in R^*$ a nech f, g sú funkcie definované v nejakom prstencovom okolí $P(a)$. Ak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

potom hovoríme, že **funkcia f je rádu $o(g(x))$ v bode a** a označujeme

$$f(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

Nech sú funkcie f, g nekonečne malé v bode a a nech existuje (aj nevlastná)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*.$$

Ak $b = 0$, potom hovoríme, že **funkcia f konverguje v bode a k nule rýchlejšie ako funkcia g**, resp. že **f je v bode a nekonečne malá vyššieho rádu ako g**.

Ak $b = \pm\infty$, potom hovoríme, že **funkcia f konverguje v bode a k nule pomalšie ako funkcia g**, resp. že **f je v bode a nekonečne malá nižšieho rádu ako g**.

Ak $b \in R$, hovoríme, že **funkcia f konverguje v bode a k nule rovnako rýchlo ako funkcia g**, resp. že **f je v bode a nekonečne malá rovnakého rádu ako g**.

Poznámka 3.2.18.
Je zrejmé, funkcia f konverguje v okolí bodu a k nule rýchlejšie ako funkcia g práve vtedy, ak ak funkcia g konverguje v okolí bodu a k nule pomalšie ako funkcia f.

Poznámka 3.2.19.
Veľmi často sa volí funkcia $g(x) = (x - a)^n$, kde $n \in N$. Ak platí:

$$f(x) = o\left((x-a)^n\right),\ x \to a, \qquad \text{t. j.}\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

potom hovoríme, že **funkcia f je v bode a nekonečne malá rádu väčšieho ako n**.

Príklad 3.2.31.
Zo vzťahov $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$, $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1} = 0$ vyplýva:

$$x^2 = o(x),\ x \to 0, \qquad \sin x = o(1),\ x \to 0, \qquad \sin x = o(x),\ x \to \pi. \ \blacksquare$$

Nech $a \in R^*$ a nech $f(x)$, $g(x)$ sú definované v nejakom prstencovom okolí $P(a)$. Potom hovoríme, že **funkcia f je rádu $O(g(x))$ v bode a** (**v okolí $P(a)$**) a označujeme

$$f(x) = O(g(x)),\ x \to a, \qquad \text{resp.}\ \ f(x) = O(g(x)),\ x \in P(a),$$

práve vtedy, ak existuje $c \in R$, $c > 0$ také, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$.

Príklad 3.2.32.
a) Keďže nerovnosti $|\cos x| \leq 1$, $|\sin x| \leq 1$, $|\sin x| \leq |x|$ sú splnené pre všetky reálne čísla x, potom pre každé $a \in R^*$ platí:

$$\cos x = O(1),\ x \to a, \qquad \sin x = O(1),\ x \to a, \qquad \sin x = O(x),\ x \to a.$$

b) Pretože pre všetky $x \leq 1$ platí $|x^2| \leq |x|$ a pre všetky $x \geq 1$ platí $|x| \leq |x^2|$, potom

$$x^2 = O(x),\ x \to a,\ \text{pre}\ a \in \langle -1\,;\,1\rangle\,, \qquad x = O(x^2),\ x \to a,\ \text{pre}\ a \in R - (-1\,;\,1)\,. \blacksquare$$

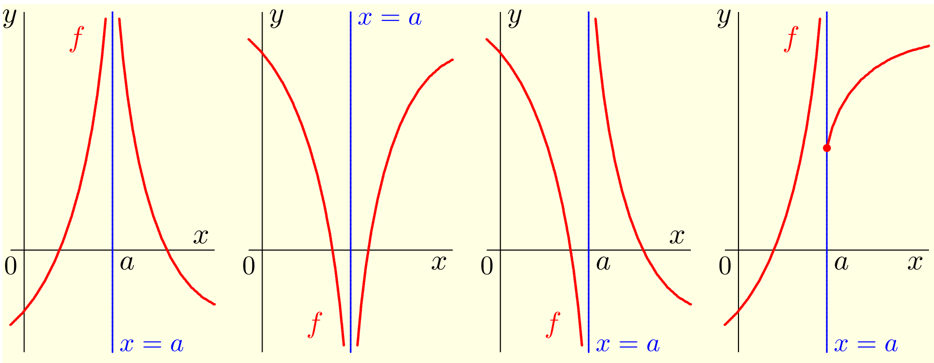
Nech $a \in R^*$ a nech $f(x)$, $g(x)$ sú definované v nejakom prstencovom okolí $P(a)$. Potom hovoríme, že **funkcia f sa asymptoticky rovná funkcii g v bode a** (**funkcie f a g sa asymptoticky rovnajú**) a označujeme

$$f \sim g,\ x \to a,$$

práve vtedy, ak existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Príklad 3.2.33.
Asymptoticky sa rovnajú napríklad funkcie

$$x^2 \sim x,\ x \to 1, \quad \sin x \sim x,\ x \to 0, \quad \sin x \sim 1,\ x \to \tfrac{\pi}{2}, \quad \ln(x+1) \sim x,\ x \to 0. \blacksquare$$



Obr. 3.2.110: Príklady asymptoty bez smernice.

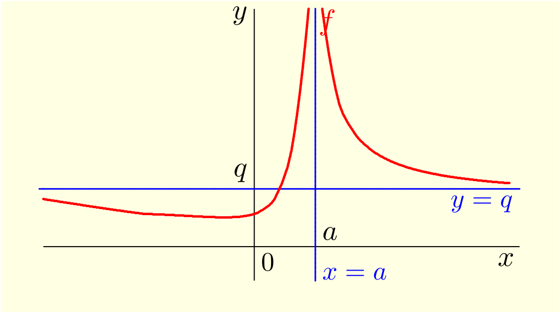
Pri vyšetrovaní funkcie f je dôležité preskúmať jej vlastnosti v nevlastných bodoch, t. j. pre $x \to \pm\infty$. Ak je $D(f)$ neohraničená množina, potom je potrebné preskúmať taktiež jej chovanie v okolí bodov $a \in R$, v ktorých je aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ nevlastná.

Nech $y = f(x)$ je funkcia definovaná v nejakom prstencovom okolí $P(a)$ bodu a. Ak má funkcia f v bode a aspoň jednu z jednostranných limít nevlastnú, potom priamku $x = a$ nazývame **asymptota bez smernice** (**vertikálna**, resp. **zvislá asymptota**) **grafu funkcie f** (obr. 3.2.110).

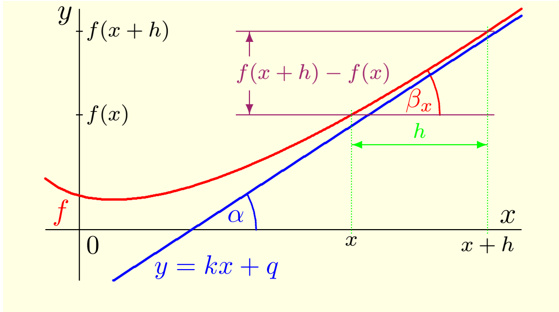
Nech $y = f(x)$ je funkcia definovaná na zdola, resp. zhora neohraničenej množine. Priamka určená rovnicou $y = kx + q$ sa nazýva **asymptota so smernicou k grafu funkcie f**, ak platí podmienka

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0, \qquad \text{resp.} \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0.$$

Asymptota s nulovou smernicou (t. j. $y = q$), sa nazýva **horizontálna** (**vodorovná**) **asymptota** (obr. 3.2.111).



Obr. 3.2.111: Asymptoty $y = q$, $x = a$.



Obr. 3.2.112: Asymptota so smernicou.

Veta 3.2.14.
Priamka určená rovnicou $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie $y = f(x)$ práve vtedy, ak existujú reálne limity

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx] = q, \qquad \text{resp.} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Dôkaz.
Vetu dokážeme pre prípad $x \to \infty$. Pre $x \to -\infty$ je dôkaz analogický.

$NP_{\Rightarrow}$: Nech $y = kx + q$ je asymptota grafu funkcie f, potom platí:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = 0.$$

Pretože existuje $\lim_{x\to\infty} \frac{kx+q}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(k + \frac{q}{x}\right) = k + 0 = k$, platí:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{kx+q}{x} = k \quad \text{a tiež} \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = q.$$

$PP_{\Leftarrow}$: Keďže $k, q \in R$, potom platí:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+q)] = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] - \lim_{x\to\infty} q = q - q = 0. \ \blacksquare$$

Príklad 3.2.34.
Nájdite asymptoty funkcie $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{8x}$.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in R$, $x \neq 0$. V bode $x_0 = 0$ pre jednostranné limity platí:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+x+1}{8x} = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = 0 + \frac{1}{8} - \infty = -\infty,$$

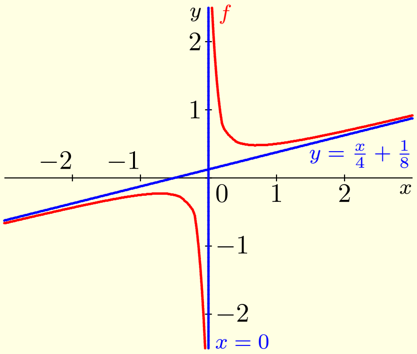
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2+x+1}{8x} = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{x}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = 0 + \frac{1}{8} + \infty = \infty.$$

Z toho vyplýva, že asymptotou bez smernice je priamka $x = 0$.
Pre koeficienty asymptoty $y = kx + q$ so smernicou na základe vety 3.2.14 platí:

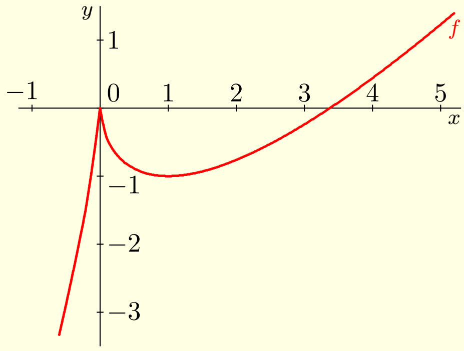
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{8x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x^2}\right] = \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{1}{4},$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^2+x+1}{8x} - \frac{x}{4}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1-2x^2}{8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8x}\right] = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}.$$

Z toho vyplýva, že rovnica asymptoty so smernicou je $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{8}$ (obr. 3.2.113). ■



Obr. 3.2.113: Graf funkcie s dvoma asymptotami (príklad 3.2.34).



Obr. 3.2.114: Graf funkcie bez asymptôt (príklad 3.2.35).

Príklad 3.2.35.
Nájdite asymptoty funkcie $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná a spojitá pre všetky $x \in R$, takže asymptoty bez smernice nemá.
Pre $x < 0$ platí $\sqrt[3]{x^2} = (-x)^{\frac{2}{3}}$ a pre $x > 0$ platí $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Funkcia f môže mať dve asymptoty $y = kx + q$ so smernicou. Pre ich smernice k_1, resp. k_2 potom platí:

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3(-x)^{\frac{2}{3}}}{-(-x)} = \lim_{x\to-\infty} \left[2 + \frac{3}{(-x)^{\frac{1}{3}}}\right] = 2 + 0 = 2,$$

$$k_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[2 - \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}\right] = 2 - 0 = 2.$$

Asymptota so smernicou neexistuje, pretože v oboch prípadoch platí:

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - k_{1,2}\, x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[-3\sqrt[3]{x^2}\right] = -\infty.$$

Z uvedeného vyplýva, že funkcia f nemá žiadne asymptoty (obr. 3.2.114). ■

Príklad 3.2.36.
Uvažujme hyperboly $k_x = k_x^+ \cup k_x^-$, $k_y = k_y^+ \cup k_y^-$ so stredom $[0; 0]$, pre ktoré platí:[56]

$$k_x^+ :\ y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},\ k_x^- :\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad k_y^+ :\ y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + a^2},\ k_y^- :\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 + a^2}.$$

Funkcie k_x^+, k_x^- sú spojité na množine $(-\infty; -a\rangle \cup \langle a; \infty)$ a funkcie k_y^+, k_y^- sú spojité na množine $(-\infty; \infty)$. Asymptoty bez smernice tieto funkcie nemajú.
Určíme asymptoty $y = kx + q$ so smernicou funkcií $k_x^\pm$, $k_y^\pm$. Pre ich koeficienty k platí:

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2\pm a^2}}{x} = \pm\frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2\pm a^2}{x^2}} = \pm\frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 \pm \frac{a^2}{x^2}} = \pm\frac{b}{a},$$

$$k_{3,4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2\pm a^2}}{x} = -\lim_{z\to\infty} \frac{\pm\frac{b}{a}\sqrt{z^2\pm a^2}}{z} = -\left(\pm\frac{b}{a}\right) = \mp\frac{b}{a}.$$

[56] Vzťahy (3.26), (3.21) na strane 213.

Z toho vyplýva, že funkcie k_x^+, k_y^+ majú asymptoty so smernicami $k_1 = \frac{b}{a}$, $k_3 = -\frac{b}{a}$ a funkcie k_x^-, k_y^- majú asymptoty so smernicami $k_2 = -\frac{b}{a}$, $k_4 = \frac{b}{a}$.
Predtým ako určíme koeficienty q vypočítame nasledujúce limity

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2 \pm a^2} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2 \pm a^2} - x\right]\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\sqrt{x^2\pm a^2}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\pm a^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}+x} = \frac{\pm a^2}{\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right] = \lim_{z\to\infty}\left[\sqrt{z^2 \pm a^2} - z\right] = 0.$$

Pre funkcie k_x^+, k_y^+ z predchádzajúcich vzťahov vyplýva:

$$q_1 = \lim_{x\to\infty}\left[\tfrac{b}{a}\sqrt{x^2 \pm a^2} - \tfrac{bx}{a}\right] = 0, \qquad q_3 = \lim_{x\to-\infty}\left[\tfrac{b}{a}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \tfrac{bx}{a}\right] = 0.$$

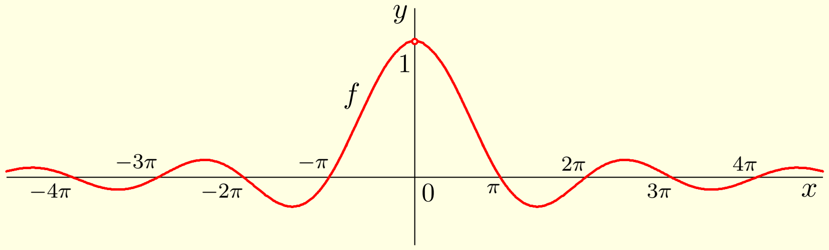
To znamená, že funkcie k_x^+, k_y^+ majú asymptoty $y = \pm\frac{b}{a}$. Pre k_x^-, k_y^+ analogicky platí:

$$q_2 = \lim_{x\to\infty}\left[-\tfrac{b}{a}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \tfrac{bx}{a}\right] = 0, \qquad q_4 = \lim_{x\to-\infty}\left[-\tfrac{b}{a}\sqrt{x^2 \pm a^2} - \tfrac{bx}{a}\right] = 0.$$

Z toho vyplýva, že všetky štyri funkcie k_x^-, k_y^-, k_x^+, k_y^+ a tým pádom aj hyperboly k_x, k_y majú po dve asymptoty so smernicou, ktoré sú určené rovnicami $y = \pm\frac{bx}{a}$. ■

Poznámka 3.2.20.
V zhode s definíciou, je priamka $y = kx + q$ asymptotou so smernicou grafu funkcie f aj v prípade, keď graf funkcie f okolo priamky osciluje.
Príkladom je funkcia $f\colon\ y = \frac{\sin x}{x}$, $x \in R - \{0\}$. Jej graf osciluje aj pre $x \to -\infty$, aj pre $x \to \infty$ okolo priamky $y = 0$ (obr. 3.2.115), platí totiž:[57]

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx - q] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\tfrac{\sin x}{x} - 0\right] = 0.$$



Obr. 3.2.115: Funkcia $f\colon\ y = \frac{\sin x}{x}$ a jej asymptota so smernicou $y = 0$.

Na obrázku 3.2.112 je načrtnutý graf funkcie f s asymptotou $y = kx + q$. Smernica priamky predstavuje tangens uhla α, ktorý zviera s osou x, t. j. $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Nech $h \in R$ je pevne dané číslo. Pre jednoduchosť predpokladajme, že $h > 0$. Hodnota β_x predstavuje uhol, ktorý zviera priamka určená bodmi $[x; f(x)]$ a $[x+h; f(x+h)]$ s osou x. Potom pre uhol β_x platí:

$$\operatorname{tg}\beta_x = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Je zrejmé, že pre $x \to \infty$ platí $\beta_x \to \alpha$, t. j. $\operatorname{tg}\beta_x \to \operatorname{tg}\alpha$. Ak uvážime vetu 3.2.14, potom

$$\alpha = \lim_{x\to\infty}\beta_x, \quad \text{t. j.}\ \ k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Tieto výsledky sú sformulované a dokázané v nasledujúcej vete, ktorá je analógiou vety 2.3.20 pre číselné postupnosti (strana 113).

[57] Symbol $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ vyjadruje obidve limity $\lim\limits_{x\to\infty}$ a $\lim\limits_{x\to-\infty}$ súčasne.

Veta 3.2.15.
Nech funkcia f je definovaná na zhora neohraničenej množine a nech $h\in R$, $h\neq 0$.
Ak existuje $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, potom existuje $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ a rovnajú sa.

Dôkaz.
Ak označíme $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a$, potom $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+h)-f(x)]=ha$.
Predpokladajme najprv, že $h>0$.
Nech $a\in R$, potom pre všetky $\varepsilon>0$ existuje $r\in R$ také, že pre všetky $x\in R$, $x>r$ platí:
$$ha-\varepsilon<f(x+h)-f(x)<ha+\varepsilon,\quad \text{t. j.}\;\; ha-\varepsilon+f(x)<f(x+h)<ha+\varepsilon+f(x).$$
Nech $x_0\in R$, $x_0>r$, $n\in N$ sú ľubovoľné, potom pre všetky $x=x_0+nh>x_0$ platí:
$$f(x)=f(x_0+nh)<ha+\varepsilon+f(x_0+(n-1)h)<$$
$$<ha+\varepsilon+ha+\varepsilon+f(x_0+(n-2)h)=2(ha+\varepsilon)+f(x_0+(n-2)h)<$$
$$<3(ha+\varepsilon)+f(x_0+(n-3)h)<\cdots<n(ha+\varepsilon)+f(x_0).$$
Na druhej strane platí:
$$f(x)=f(x_0+nh)>ha-\varepsilon+f(x_0+(n-1)h)>\cdots>n(ha-\varepsilon)+f(x_0).$$
Je zrejmé, že môžeme predpokladať $x>0$. Potom platí:
$$\frac{n(ha-\varepsilon)+f(x_0)}{x}<\frac{f(x)}{x}<\frac{n(ha+\varepsilon)+f(x_0)}{x}.$$
Ak dosadíme za n výraz $n=(x-x_0)\frac{1}{h}$, potom platí:
$$\frac{x-x_0}{x}(a-\varepsilon\tfrac{1}{h})+\frac{f(x_0)}{x}<\frac{f(x)}{x}<\frac{x-x_0}{x}(a+\varepsilon\tfrac{1}{h})+\frac{f(x_0)}{x}.$$
Ak uvážime, že x_0 je ľubovoľné, ale vzhľadom na x konštantné, potom pre $x\to\infty$ platí:
$$a-\varepsilon\tfrac{1}{h}=1\cdot(a-\varepsilon\tfrac{1}{h})+0=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-x_0}{x}(a-\varepsilon\tfrac{1}{h})+\frac{f(x_0)}{x}\right]\leq\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\leq$$
$$\leq\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-x_0}{x}(a+\varepsilon\tfrac{1}{h})+\frac{f(x_0)}{x}\right]=1\cdot(a+\varepsilon\tfrac{1}{h})+0=a+\varepsilon\tfrac{1}{h}.$$
Pretože je ε, t. j. aj $\varepsilon\frac{1}{h}$ ľubovoľné, potom na základe vety 2.1.13 platí $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$.

Nech $a=\infty$, potom $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+h)-f(x)]=\infty$.
Potom pre každé $K>0$ existuje $r\in R$ také, že pre všetky $x\in R$, $x>r$ platí:
$$f(x+h)-f(x)>K,\qquad \text{t. j.}\;\; f(x+h)>K+f(x).$$
Nech $x_0\in R$, $x_0>r$, $n\in N$ sú ľubovoľné, potom pre všetky $x=x_0+nh>x_0$ platí:
$$f(x)=f(x_0+nh)>K+f(x_0+(n-1)h)>\cdots>nK+f(x_0).$$
Potom pre $x>0$ platí:
$$\frac{f(x)}{x}>\frac{nK+f(x_0)}{x}=\frac{x-x_0}{x}\frac{K}{h}+\frac{f(x_0)}{x},\qquad \text{t. j.}\;\;\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\geq\frac{K}{h}+0=\frac{K}{h}.$$
Keďže je $K>0$ ľubovoľné a $h>0$, potom $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$.

Nech $a=-\infty$, potom pre funkciu $g(x)=-f(x)$, $x\in D(f)$ platí:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=-\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-(-\infty)=\infty.$$
Z toho na základe už dokázaného vyplýva:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\infty,\qquad \text{t. j.}\;\;\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-g(x)}{x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=-\infty.$$
Nech $h<0$. Ak položíme $x+h=z$, t. j. $x=z-h$, $z\to\infty$, potom platí:
$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(x+h)}{-h}=\lim_{z\to\infty}\frac{f(z+(-h))-f(z)}{-h}.$$
Keďže $-h>0$, potom $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$. Tým je veta dokázaná. ■

Poznámka 3.2.21.
Opačná implikácia vo vete 3.2.15 neplatí. Je zrejmé, že ak obe dané limity existujú, potom sa rovnajú. Lenže, ako dokazuje nasledujúci príklad, niekedy môže nastať prípad, že $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ existuje a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ neexistuje.

Príklad 3.2.37.
Funkcia $f\colon\ y = \sin x$ nemá asymptotu so smernicou, aj keď $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Neexistuje totiž limita $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\infty} [\sin x - 0] = \lim\limits_{x\to\infty} \sin x$.

Nech $h \in R$. V tomto prípade neexistuje ani limita

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{x\to\infty} \left[\tfrac{2}{h} \sin \tfrac{x+h-x}{2} \cos \tfrac{x+h+x}{2}\right] = \tfrac{2}{h} \sin \tfrac{h}{2} \lim_{x\to\infty} \cos \tfrac{2x+h}{2}. \blacksquare$$

Poznámka 3.2.22.
Ak zvolíme $h = 1$, potom môžeme tvrdenie vety 3.2.6 vyjadriť v tvare

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} [f(x+1) - f(x)].$$

Predpokladajme, že $N \subset D(f)$. Ak urobíme reštrikciu funkcie f na množinu prirodzených čísel a pre všetky $n \in N$ položíme $a_n = f(n)$, potom dostaneme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a daný vzťah môžeme vyjadriť v tvare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{n\to\infty} [a_{n+1} - a_n].$$

Na záver uvádzame bez dôkazu vetu 3.2.16, ktorá je analógiou vety 2.3.21 pre číselné postupnosti. Dôkaz tejto vety je podobný ako dôkaz vety 3.2.15 a doporučujeme ho vykonať hĺbavému čitateľovi ako domáce cvičenie.

Veta 3.2.16.
Nech f je kladná funkcia definovaná na zhora neohraničenej množine.
Ak existuje $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$, potom existuje $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{f(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}}$ a rovnajú sa.

3.2.4 Riešené príklady

V tejto časti sú uvedené riešené príklady. A ako ukazujú niektoré z nich, v mnohých prípadoch sa riešenie zjednoduší, ak použijeme vhodnú substitúciu.

Príklad 3.2.38.
a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+\frac{2}{x}}{x+\frac{4}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{3x+\frac{2}{x}}{x+\frac{4}{x}} \cdot \frac{x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+2}{x^2+4} = \frac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{1-x}{x^2} + \frac{1-2x}{2-3x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right] + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1-2x)\frac{1}{x}}{(2-3x)\frac{1}{x}} = 0 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{2}{x}-3} = \frac{2}{3}.$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2}. \blacksquare$

Poznámka 3.2.23.
Ak použijeme v príklade 3.2.38 a) substitúciu $x = z + 2$, t. j. $z = x - 2$, potom platí:

$$\lim_{x\to 2} \tfrac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{z\to 0} \tfrac{(z+2)-2}{(z+2)^2-3(z+2)+2} = \lim_{z\to 0} \tfrac{z}{z^2+z} = \lim_{z\to 0} \tfrac{1}{z+1} = 1.$$

Príklad 3.2.39.
Určte pre aké $a \in R^*$ existuje $\lim\limits_{x\to a} \ln(x-6)$ a potom túto limitu vypočítajte.

Riešenie.
Aby daná limita existovala, musí byť argument funkcie logaritmus nezáporný, t. j. musí platiť nerovnosť $a - 6 \geq 0$. Potom z vlastností funkcie logaritmus vyplýva:

$$\lim_{x\to a} \ln(x-6) = \begin{cases} -\infty, & \text{pre } a = 6, \\ \ln(a-6), & \text{pre } a > 6, \\ \infty, & \text{pre } a = \infty. \ \blacksquare \end{cases}$$

Príklad 3.2.40.
a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-(1-x)}{x+\sqrt{x^2-x^3}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x+\sqrt{x^2-x^3}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\frac{1}{x}\sqrt{x^2-x^3}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x} = 1.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right] = 2.$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x - \sqrt{x^2-1}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0.$ $\blacksquare$

Príklad 3.2.41.
Nech $a \in R$, $n \in N$. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^n-\sin^n x}{x-\sin x}$, b) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$, c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

Riešenie.
a) Ak $n = 1$, potom pre danú limitu platí:

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{x^n-\sin^n x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} \tfrac{x-\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Ak $n \neq 1$, potom zo vzorca $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ vyplýva:

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{x^n-\sin^n x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} \tfrac{(x-\sin x)(x^{n-1}+x^{n-2}\sin x+\cdots+x\sin^{n-2}x+\sin^{n-1}x)}{x-\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} (x^{n-1} + x^{n-2}\sin x + \cdots + x\sin^{n-2} x + \sin^{n-1} x) = 0.$$

b) Z vety 3.1.9 vyplýva, že pre všetky $x, a \in R$ platí:

$$\sin x - \sin a = 2\sin\tfrac{x-a}{2}\cos\tfrac{x+a}{2}, \qquad \cos x - \cos a = -2\sin\tfrac{x-a}{2}\sin\tfrac{x+a}{2}.$$

Ak položíme $\frac{x-a}{2} = z$, potom $\frac{x+a}{2} = \frac{x-a+2a}{2} = z + a$, $z \to 0$ a platí:

$$\lim_{x\to a} \tfrac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \tfrac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{2\,\frac{x-a}{2}} = \lim_{z\to 0} \tfrac{\sin z\cdot\cos(z+a)}{z} = 1\cdot\cos a = \cos a.$$

c) Ak položíme $\frac{x-a}{2} = z$, $z \to 0$, potom analogicky ako v časti b) platí:

$$\lim_{x\to a} \tfrac{\cos x-\cos a}{x-a} = \lim_{z\to 0} \tfrac{-\sin z\cdot\sin(z+a)}{z} = -1\cdot\sin a = -\sin a. \ \blacksquare$$

Príklad 3.2.42.

a) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})(\sqrt{a}+\sqrt{x})}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to a}(\sqrt{a}+\sqrt{x})=2\sqrt{a}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{5x^2}{x^2-1}+2^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-\frac{1}{x^2}}+\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{1}+2^0=6.$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$ ■

Príklad 3.2.43.

Vypočítajte $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}-a}$, kde $a>0$.

Riešenie.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a\sqrt{ax})(\sqrt{ax}+a)}{(\sqrt{ax}-a)(\sqrt{ax}+a)}=\lim_{x\to a}\frac{x^2\sqrt{ax}-a^2x+ax^2-a^2\sqrt{ax}}{ax-a^2}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}(x^2-a^2)+ax(x-a)}{a(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{ax}(x+a)+ax}{a}=3a.$$

Iné riešenie.

Ak použijeme substitúciu $\sqrt{ax}=z$, t. j. $ax=z^2$, $x^2=z^4a^{-2}$, potom $z\to a$ a platí:
$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}-a}=\lim_{z\to a}\frac{z^4a^{-2}-az}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{z^4-a^3z}{a^2(z-a)}=\lim_{z\to a}\frac{z(z^3-a^3)}{a^2(z-a)}=\lim_{z\to a}\frac{z(z-a)(z^2+za+a^2)}{a^2(z-a)}=\lim_{z\to a}\frac{z(z^2+za+a^2)}{a^2}=3a.$$ ■

Príklad 3.2.44.

Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$, $m\in R$, c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

Riešenie.

a) Ak požijeme substitúciu $\sqrt{x}=z$, t. j. $x=z^2$, potom $z\to\infty$ a platí:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}=\lim_{z\to\infty}\frac{z-6z^2}{3z^2+1}=\lim_{z\to\infty}\frac{(z-6z^2)z^{-2}}{(3z^2+1)z^{-2}}=\lim_{z\to\infty}\frac{z^{-1}-6}{(3+z^{-2}}=\frac{-6}{3}=-2.$$

b) Ak $m=0$, potom platí $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}0=0.$

Ak $m\neq 0$, potom zo substitúcie $1+mx=z^3$, t. j. $x=\frac{z^3-1}{m}$, $z\to 1$ vyplýva:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{(z^3-1)m^{-1}}=\lim_{z\to 1}\frac{m(z-1)}{(z-1)(z^2+z+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{m}{z^2+z+1}=\frac{m}{3}.$$

c) Ak požijeme substitúciu $x=z^{12}$, potom $z\to 1$ a platí:
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt[3]{z^{12}}-1}{\sqrt[4]{z^{12}}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z^4-1}{z^3-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^3+z^2+z+1)}{(z-1)(z^2+z+1)}=\frac{4}{3}.$$ ■

Príklad 3.2.45.

Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin(x-2)}{x^2-2x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Riešenie.

a) Pri riešení napravo je použitá substitúcia $5x=z$, t. j. $x=\frac{z}{5}$, $z\to 0$.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5,\qquad\text{resp.}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{5\sin z}{z}=5.$$

b) Ak požijeme substitúciu $\arcsin(x-2)=z$, t. j. $x-2=\sin z$, potom $z\to 0$ a platí:
$$\lim_{x\to 2}\frac{\arcsin(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{\arcsin(x-2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

c) Ak požijeme substitúciu $\operatorname{arctg} x=z$, t. j. $x=\operatorname{tg} z$, potom $z\to 0$ a platí:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{tg} z}=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z}{\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\cdot\lim_{z\to 0}\cos z=1\cdot 1=1.$$ ■

Príklad 3.2.46.
a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$

b) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x\cos^{-1}x}{2\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2(-1)^2}=\frac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2.$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}+1)\sin 4x}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}+1)\sin 4x}{x+1-1}=4\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 2\cdot 1=8.$ ■

Príklad 3.2.47.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Riešenie.
Zo vzťahov $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $-1\leq\cos x\leq 1$, ktoré platia pre všetky $x\in R$, vyplýva:
$$\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}=\pm\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}.$$
Pre $x\to 0^-$ je funkcia $\sin x$ nekladná (v dostatočne malom okolí bodu 0) a pre $x\to 0^+$ je nezáporná. Potom pre jednostranné limity platí:
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}}=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt{1+\cos x}=-\sqrt{2},$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}.$$
Z toho vyplýva, že $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ neexistuje. ■

Príklad 3.2.48.
Nech $a>0$. Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{-x}-1}{x}$.

Riešenie.
a) Ak použijeme substitúciu $a^x-1=z$, potom $z\to 0$ a platí:
$$\ln a^x=x\ln a=\ln(z+1),\qquad \text{t. j.}\quad x=\frac{\ln(z+1)}{\ln a}.$$
Z toho na základe príkladu 3.2.28 vyplýva:
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z\ln a}{\ln(z+1)}=\ln a\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(z+1)}=\ln a\cdot 1=\ln a.$$
b) Ak použijeme substitúciu $x=-z$, $z\to 0$, potom platí:
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{-x}-1}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{a^z-1}{-z}=-\lim_{z\to 0}\frac{a^z-1}{z}=-\ln a.$$ ■

Poznámka 3.2.24.
Ak v príklade 3.2.48 položíme $a=\mathrm{e}$, potom platí:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\ln\mathrm{e}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}=-\ln\mathrm{e}=-1.$$

Príklad 3.2.49.
Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-3^x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3^x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3^x}{x}$.

Riešenie.
a) Ak použijeme substitúciu $x\cdot\ln 3 = z$, $z\to 0$, potom platí:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-3^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{\ln 3^x}}{x} = \ln 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{x\ln 3}}{x\cdot\ln 3} = \ln 3\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^z}{z} = -\ln 3.$$

b) Na základe príkladu 3.2.29 platí:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-3^x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}-\frac{3^x}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{x} = 0-\infty = -\infty.$$

c) Podobne, ako v časti b) platí:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-3^x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}-\frac{3^x}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} - \lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{x} = 0-\frac{0}{-\infty} = 0.\ \blacksquare$$

Príklad 3.2.50.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$.

Riešenie.
Ak použijeme substitúciu $x=-z$, $z\to\infty$, potom platí:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{z}\right)^z\right]^{-1} = (\mathrm{e}^{-1})^{-1} = \mathrm{e}\,.$$

Ak použijeme substitúciu $x=z^{-1}$, $z\to 0$, potom platí:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}\,.\ \blacksquare$$

Príklad 3.2.51.
Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\mathrm{cotg}^2 x}$, b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\mathrm{tg}^2 2x}$.

Riešenie.
a) Použijeme substitúciu $\sin^2 x = z$, potom $z\to 0$. Pre $x\to 0$ je (v dostatočne malom okolí) funkcia $\cos x$ kladná, takže platí:

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = (1-z)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mathrm{cotg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-z}{z}.$$

Potom pre danú limitu platí:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\mathrm{cotg}^2 x} = \lim_{z\to 0}\left[(1-z)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-z}{z}} = \lim_{z\to 0}\left[(1-z)^{\frac{1}{z}}\right]^{\frac{1-z}{2}} = (\mathrm{e}^{-1})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

b) Použijeme substitúciu $\cos^2 2x = z$, potom $z\to 0$. Pre $x\to\frac{\pi}{4}$ je (v dostatočne malom okolí) funkcia $\sin 2x$ kladná, takže platí:

$$\sin 2x = \sqrt{1-\cos^2 2x} = (1-z)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mathrm{tg}^2 2x = \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{1-z}{z}.$$

Potom platí $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\mathrm{tg}^2 2x} = \lim\limits_{z\to 0}\left[(1-z)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1-z}{z}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.\ \blacksquare$

Príklad 3.2.52.
Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\,\mathrm{tg}^2 x)^{\mathrm{cotg}^2 x}$, b) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$, kde $a\in R$.

Riešenie.
a) Ak položíme $\mathrm{tg}^2 x = z$, potom $z\to 0$ a platí:[58]

$$\lim_{x\to 0}(1+3\,\mathrm{tg}^2 x)^{\mathrm{cotg}^2 x} \underset{z\,\to\,0}{\overset{\mathrm{tg}^2 x\,=\,z}{=\!=\!=}} \lim_{z\to 0}(1+3z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}^3\,.$$

[58] Pre zjednodušenie zápisu budeme substitúciu vyjadrovať pri symbole rovnosti.

b) Budeme predpokladať, že $\sin a \neq 0$, t. j. $a \neq k\pi$, kde $k \in Z$. Potom platí:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\cdot\frac{1}{\sin a}} = \mathrm{e}^{\cos a\frac{1}{\sin a}} = \mathrm{e}^{\operatorname{cotg} a}.$$

Pri výpočte sme použili limitu z príkladu 3.2.41 b) a limitu

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}} \overset{\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}=z}{\underset{z\to 0}{=\!=\!=\!=}} \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}\,. \blacksquare \qquad (3.45)$$

Poznámka 3.2.25.
Limita (3.45) má tvar $\lim_{x\to a}[1\pm f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}$, pričom $f(x)\to 0$ pre $x\to a$.
Ak položíme $f(x)=z$, potom $z\to 0$ a na základe vety o zloženej funkcie platí:

$$\lim_{x\to a}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}, \qquad \lim_{x\to a}[1-f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{z\to 0}(1-z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Príklad 3.2.53.
Nech $a\in R$. Vypočítajte a) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}}$, b) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{a}{\ln x}}$.

Riešenie.
a) Z inverznosti funkcií e^x, $\ln x$ a zo vzťahu $x\to 0^+$, t. j. $x>0$ vyplýva:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln\left[x^{\frac{a}{\ln x}}\right]} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{a}.$$

b) Analogicky ako v časti a) platí $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{a}{\ln x}} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{a}{\ln x}\ln x} = \mathrm{e}^a$. $\blacksquare$

Príklad 3.2.54.
Vypočítajte $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$.

Riešenie.
Keďže $\lim_{x\to 0^+}\ln^2 x = (-\infty)^2 = \infty$, potom podobne ako v príklade 3.2.53 dostávame

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x^{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x\cdot\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln^2 x} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty. \blacksquare$$

V príklade 3.2.53 sme počítali limity výrazov, ktoré mali tvar 0^0. Vo všeobecnosti nevieme určiť, čomu sa rovná výraz 0^0 a nazývame ho neurčitý výraz. S neurčitými výrazmi sa stretávame pomerne bežne a na ich určenie sa často používajú limity. Medzi **neurčité výrazy** patria výrazy typu

$$\infty-\infty,\quad \pm\infty\cdot 0,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{1}{0},\quad \frac{\pm\infty}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0^0,\quad 0^{\pm\infty},\quad 1^{\pm\infty},\quad (\pm\infty)^0.$$

Poznámka 3.2.26.
Názov neurčitý výraz je z vecného hľadiska nevhodný, aj keď sa stále v praxi používa. Ide totiž o výpočet limity nejakej funkcie v danom bode, a na tom nie je nič neurčitého. Limita buď existuje a má konkrétnu hodnotu (vlastnú alebo nevlastnú), alebo neexistuje. Názov pochádza z toho, že väčšinou nevieme na prvý pohľad určiť, či sú takéto limity vlastné alebo nevlastné, prípadne či vôbec existujú.

Príklad 3.2.55.
a) $\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+2)-\ln x] = \lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+2}{x} = \lim_{x\to\infty}\ln\left[1+\frac{2}{x}\right]^x = \ln \mathrm{e}^2 = 2.$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1-3}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1-1}{3}} \overset{3x+1=z}{\underset{z\to\infty}{=\!=\!=\!=}} \lim_{z\to\infty}\left(\frac{z-3}{z}\right)^{\frac{z-1}{3}} = \lim_{z\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{z}\right)^z\right]^{\frac{z-1}{3z}} = [\mathrm{e}^{-3}]^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+tx)} \overset{tx=z}{\underset{z\to 0}{=\!=\!=\!=}} \lim_{z\to 0}\frac{z}{t\ln(1+z)} = \frac{1}{t}\lim_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln \mathrm{e}} = \frac{1}{t}.$ $\blacksquare$

Príklad 3.2.56.
Vypočítajte:[59] a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie.
Pre všetky $x>0$ platí $x^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}$.
a) Ak označíme $z=\ln x$, $z\to\infty$, potom pre $a=\mathrm{e}>1$ na základe príkladu 3.2.29 platí:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{\mathrm{e}^z} = 0, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$
b) Pre všetky $x\in(0\,;\,1)$ platí $\ln x<0$, t. j. $\frac{\ln x}{x}<0$. Keďže $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, potom platí:
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0. \blacksquare$$

Príklad 3.2.57.
Nech $x\in R$. Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin x}_{n-\text{krt}}$.

Riešenie.
Ak označíme $a_0=x$, $a_n=\sin a_{n-1}$ pre $n\in N$, potom máme vypočítať $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Z vlastností funkcie sínus vyplýva, že platí:
$$0<\sin x<x, \quad \text{pre} \quad x\in\left(0\,;\,\tfrac{\pi}{2}\right), \qquad x<\sin x<0, \quad \text{pre} \quad x\in\left(-\tfrac{\pi}{2}\,;\,0\right).$$
Je zrejmé, že pre všetky $n\in N$ platí $a_n=\sin a_{n-1}\in\langle -1\,;\,1\rangle$.
Ak $x=k\pi$, $k\in Z$, potom $a_1=0$ a pre všetky $n\in N$ platí $a_n=0$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.
Ak $x\neq k\pi$, $k\in Z$ a $0<a_1\leq 1$, potom pre všetky $n\in N$ platí:
$$0<a_n\leq 1<\tfrac{\pi}{2}, \qquad 0<a_n=\sin a_{n-1}<a_{n-1}<1.$$
Takže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca, ohraničená zdola a podľa dôsledku 2.3.11.a konverguje.
Ak $x\neq k\pi$, $k\in Z$ a $-1\leq a_1<0$, potom pre všetky $n\in N$ platí:
$$-\tfrac{\pi}{2}<-1\leq a_n<0, \qquad -1<a_{n-1}<a_n=\sin a_{n-1}<0.$$
To znamená, že je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca, ohraničená zhora a konverguje.
Ak označíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, potom
$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sin a_n=\sin\Big[\lim_{n\to\infty}a_n\Big]=\sin a.$$
Keďže má rovnica $a=\sin a$ práve jedno riešenie $a=0$, platí $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n=0$. $\blacksquare$

Príklad 3.2.58.
Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie.
a) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\Big[(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\Big]^{\frac{\sin x}{x}} = [\mathrm{e}^{-1}]^1 = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
b) Predchádzajúca limita predstavuje neurčitý výraz typu $1^{\pm\infty}$ a táto limita typ $0^{\pm\infty}$.
Pre všetky $x\neq k\pi$, $k\in Z$ platí $1-\cos x>0$. Z toho vyplýva $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1-\cos x)=-\infty$.
Pre naše potreby postačí ľubovoľné prstencové okolie $P(0)$, ktoré neobsahuje body $\pm\pi$. Zvoľme napríklad $P(0)=(-1\,;\,1)-\{0\}$. Pre všetky $x\in P(0)$ platí:
$$(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\ln(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1-\cos x)}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1-\cos x)}{x}}.$$

[59] Príklady 4.3.17 a 4.3.18.

Keďže $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-\cos x)}{x} = \frac{-\infty}{0} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$, potom platí:

$$\lim_{x\to 0^-} (1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0.$$

To znamená, že $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$ neexistuje. ■

Príklad 3.2.59.
Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x(2+\cos x)$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x-1}\right]$.

Riešenie.
a) Keďže pre všetky $x\in R$ platí $-1 \leq \cos x \leq 1$, potom z vety o zovretí vyplýva:

$$\infty = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x(2-1) \leq \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x(2+\cos x) \leq \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x(2+1) = 3\cdot \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty.$$

b) Najprv vypočítame limitu

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2} = \lim_{x\to\infty} \sin\frac{x+1-x+1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} = \sin\frac{2}{\infty} = \sin 0 = 0.$$

Keďže je funkcia kosínus ohraničená na R, potom na základe dôsledku 3.2.4.c platí:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x-1}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right] = 0. ■$$

Príklad 3.2.60.
Nech $m,n\in N$. Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$, a) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$.

Riešenie.
a) Z príkladu 3.2.15 vyplýva:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin mx}{mx}\cdot\frac{nx}{\sin nx}\cdot\frac{mx}{nx}\right] = 1\cdot 1\cdot\frac{m}{n} = \frac{m}{n}.$$

b) Keďže pre všetky $n\in N$ platí $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$, potom zo súčtového vzorca pre funkciu sínus, substitúcie $x = \pi + z$, $z\to 0$ a časti a) vyplýva:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(m\pi+mz)}{\sin(n\pi+nz)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin m\pi\cos mz + \cos m\pi \sin mz}{\sin n\pi\cos nz + \cos n\pi\sin nz} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{0+(-1)^m\sin mz}{0+(-1)^n\sin nz} = (-1)^{m-n}\lim_{z\to 0}\frac{\sin mz}{\sin nz} = (-1)^{m-n}\frac{m}{n}. ■$$

Príklad 3.2.61.
Nech $n\in N$. Vypočítajte limitu $L = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

Riešenie.
Zo vzorca $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, ktorý platí pre všetky $n\in N$, vyplýva:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x^n}{\left[1+\frac{1}{n^n x^n}\right]^{\frac{n+1}{2}}(n^n x^n)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left[1+\frac{1}{n^n x^n}\right]^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1+2+\cdots+n}}{x^{\frac{n(n+1)}{2}}} =$$

$$= \frac{(1+0)(1+0)\cdots(1+0)}{(1+0)^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{x^{\frac{n(n+1)}{2}}} = 1\cdot\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}\cdot 1 = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}. ■$$

Príklad 3.2.62.
Vypočítajte: a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$, $n\in N$.

Riešenie.
a) Musíme si uvedomiť, že funkcia $y = x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ je definovaná, iba pre $\cos\frac{1}{x}$ nezáporné, t. j. pre

$\frac{1}{x} \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, kde $k \in Z$. Potom platí:

$$0 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1, \quad \text{t. j.} \;\; 0 \leq \sqrt{\cos\frac{1}{x}} \leq 1.$$

Takže je funkcia $\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$ ohraničená a podľa dôsledku 3.2.4.c platí $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}} = 0$.

b) Ak použijeme substitúciu $x = u^{-1}$ pre $x \to 0^-$ a $x = v^{-1}$ pre $x \to 0^+$, potom platí:

$$\lim_{x\to 0^-} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lim_{u\to -\infty} \frac{\lfloor u \rfloor}{u}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lim_{v\to \infty} \frac{\lfloor v \rfloor}{v}.$$

Nech u, v sú také, že $u < 0$, $v > 1$. Potom pre jednostranné limity platí:

$$u - 1 \leq \lfloor u \rfloor \leq u < 0, \qquad\qquad 0 < v - 1 \leq \lfloor v \rfloor \leq v$$

$$1 = \frac{u}{u} \leq \frac{\lfloor u \rfloor}{u} \leq \frac{u-1}{u} = 1 - \frac{1}{u}, \qquad 0 < 1 - \frac{1}{v} = \frac{v-1}{v} \leq \frac{\lfloor v \rfloor}{v} \leq \frac{v}{v} = 1,$$

$$1 \leq \lim_{u\to -\infty} \frac{\lfloor u \rfloor}{u} \leq \lim_{u\to -\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right) = 1, \qquad 1 = \lim_{v\to \infty} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \leq \lim_{v\to \infty} \frac{\lfloor v \rfloor}{v} \leq 1.$$

To znamená, že $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lim\limits_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

c) Z príkladu 3.2.20 vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} \pi\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = 0$, t. j.

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right) = 1.$$

Pre všetky $n \in N$ platí $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^{n+1}$. Potom zo súčtového vzorca vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n + \pi n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right)\cos \pi n + \cos\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right)\sin \pi n\right] = 0 \cdot (-1)^{n+1} + 1 \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

Na záver zhrnieme niektoré dôležité limity do nasledujúcej vety.

Veta 3.2.17.
Nech $a, b \in R$, $a > 0$, $q \in R$, potom platí:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$, e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 1$, f) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \ln a$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = \mathrm{e}^b$,

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0$ pre $a \in (1\,;\,\infty)$, k) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^q}{a^x} = \infty$ pre $a \in (0\,;\,1\rangle$,

l) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = 0$ pre $a \in (0\,;\,1\rangle$, m) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^q} = \infty$ pre $a \in (1\,;\,\infty)$,

Cvičenia

3.2.1. Nech $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$. Vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 4)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$, d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$, f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{1-x}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}$,

i) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, j) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{3}{5}}-1}$, k) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$, l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, o) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$, p) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}$,

q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{b^x-1}$, r) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$, s) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x}{x}$, t) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{x}$,

u) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-3^x}{\sin 3x}$, v) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-3^x}{\sin 3x}$, w) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-3^x}{\sin 3x}$, x) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-3^x}{\sin 3x}$.

3.2.2. Nech $a, b \in R$, $m, n \in N$. Vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^n}{1-x^m}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-\sqrt[m]{x}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x}-e^x}{4x}$, f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x-e^{-x}}$, g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^{3x}-1}$, h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-1}{6^x-1}$,

i) $\lim\limits_{x\to a} \frac{e^x-e^a}{x-a}$, j) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$, k) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin \frac{1}{x}$, l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$,

m) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{\pi}{n}$, n) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin \frac{\pi}{x}$, o) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos \frac{a}{x}\right)^x$, p) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{3x+6}{x^3+8}$,

q) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+1}{x-1}$, r) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1}$, s) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1}$, t) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1}$.

3.2.3. Vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x}$, g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x}$, j) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|\sin x|}{x}$, k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|}{x}$, l) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{5}{x}}$, n) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{5}{\sin x}}$, o) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{tgh} x$, p) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tgh} x$,

q) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$, r) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$, s) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x-2}$, t) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\arcsin 5x}$,

u) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x}$, v) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x}$, w) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$, x) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x}$.

3.2.4. Nech $a \in R$, $n \in N$. Vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{a^2+x}-a}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$,

g) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$,

j) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, k) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, l) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$,

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$, n) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, o) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$,

p) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^3+a}-x\right)$, q) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin 2\pi n$, r) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x \sin 2\pi x$,

s) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x \sin 2\pi x$, t) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x} \sin 2\pi x$, u) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x} \sin 2\pi x$.

3.2.5. Nech $n \in N$. Vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$, e) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$, f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-5x+4}{x^3-1}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}$, i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$, k) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$, l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$,

m) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$, n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$, o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$,

p) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$, q) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{2+x}}$, r) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

s) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, t) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, u) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

v) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$, w) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$, x) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}$.

3.2.6. Nech $a\in R$, $m, n\in R$. Vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^3-3x^2+2x}$, b) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$, e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6}$, f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right)$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$, h) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2+2x+1}{5x}$, i) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$, k) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$, l) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^4+2}}$,

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$, o) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$,

p) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{\cos x}{1-2\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, q) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$, r) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^4-1}\right)$,

s) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$, t) $\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$, u) $\lim\limits_{x\to 1^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$.

3.2.7. Nech $a\in R$, $m, n\in R$. Vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$, b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(4x-1)^{100}(3x+1)^{200}}{(6x+5)^{300}}$,

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right)$, d) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$,

e) $\lim\limits_{x\to \infty} x\,[\ln x - \ln(x+2)]$, f) $\lim\limits_{x\to \infty} x\,[\ln(x+3) - \ln x]$,

g) $\lim\limits_{x\to \infty} x\,[\ln(x+a) - \ln(x-a)]$, h) $\lim\limits_{x\to \infty} x\,[\ln(x+a) - \ln x]$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, j) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$,

k) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-9}\right)$, l) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$,

m) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$,

o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$, p) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

3.2.8. Dokážte, že funkcie $y = 1-x$, $y = 1-\sqrt{x}$ a $y = 1-\sqrt[3]{x}$ konvergujú v bode 1 k nule rovnako rýchlo. Sú niektoré z nich ekvivalentné v bode 1? ♣

3.2.9. Dokážte, že neexistujú limity $\lim\limits_{x\to \infty} \mathrm{e}^x \sin x$, $\lim\limits_{x\to \infty} \mathrm{e}^x(1+\sin x)$, $\lim\limits_{x\to \infty} \mathrm{e}^x(1-\sin x)$.

3.3 Spojitosť funkcie

S pojmom limity funkcie f v danom bode a úzko súvisí pojem spojitosti, resp. nespojitosti tejto funkcie f v bode a.

3.3.1 Spojitosť funkcie v bode

Prírodné deje často prebiehajú spojite a popisujú sa „spojitými funkciami". Niekedy môžu samozrejme prebiehať diskrétne alebo v kvantách, ale kvantá sú väčšinou také malé, že nám (ako nedokonalým pozorovateľom) sa celý proces javí ako spojitý. Najznámejším príkladom je premietanie filmu, kde postačí frekvencia väčšia ako 10 obrázkov za sekundu a pohyb sa nám javí ako spojitý. To znamená, že malej zmene nezávislej premennej veličiny zodpovedá malá zmena veličiny, ktorá je od nej závislá.

Uvažujme, napríklad, hmotný bod, ktorý sa pohybuje po nejakej dráhe. Veľkosť dráhy tohto bodu závisí od veľkosti času, počas ktorého sa pohybuje. Malému prírastku času zodpovedá malý prírastok dráhy. Predpokladajme, že dráhu tohto pohybu popisuje funkcia $y = f(t)$, kde t reprezentuje čas. V čase T bude veľkosť dráhy rovná hodnote $f(T)$. Ak sa čas T zmení o malú hodnotu, potom sa dráha $f(T)$ tiež zmení o malú hodnotu. Ak pre čas bude platiť $t \to T$, potom pre veľkosť dráhy bude platiť $f(t) \to f(T)$. To znamená, že ak $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \to T$, potom $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty} \to f(T)$. Symbolicky to pomocou limity postupnosti môžeme vyjadriť

$$\lim_{n\to\infty} t_n = T \implies \lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(T).$$

Keďže je funkcia f v bode T definovaná, nemusíme pre postupnosť $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ požadovať, aby platilo $t_n \neq T$, $n \in N$. Teraz pristúpime k presnej formulácii spojitosti funkcie. Analogicky ako limitu, budeme spojitosť funkcie v bode definovať **v zmysle Heineho**.

Hovoríme, že **funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$**, ak pre všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ také, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Ak funkcia f nie je spojitá v bode a, potom sa nazýva **nespojitá v bode a**.

Poznámka 3.3.1.
Bod $a \in D(f)$ môže byť iba hromadným alebo izolovaným bodom množiny $D(f)$.

a) Nech je a izolovaný bod (obr. 3.3.116) množiny $D(f)$. Potom existuje iba jedna postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k bodu a a to postupnosť $\{a\}_{n=1}^{\infty}$. Je zrejmé, že potom $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(a) = f(a)$, t. j. **funkcia f je vždy spojitá v izolovanom bode a**.

b) Nech je a hromadný bod (obr. 3.3.117) množiny $D(f)$. Potom z definície spojitosti a limity funkcie v bode a vyplýva $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

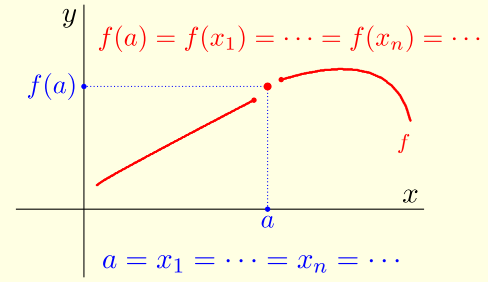
Z definície vyplýva, že funkcia f môže byť nespojitá iba v hromadnom bode $a \in D(f)$. Funkcia f je nespojitá v bode a práve vtedy, ak existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$, pre ktorú platí $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, ale neplatí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, t. j. $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ neexistuje alebo existuje a platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$.

Veta 3.3.1.
Nech $a \in D(f)$ je hromadným bodom definičného oboru $D(f)$ funkcie f.
Potom je funkcia f spojitá v bode a práve vtedy, ak platí $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

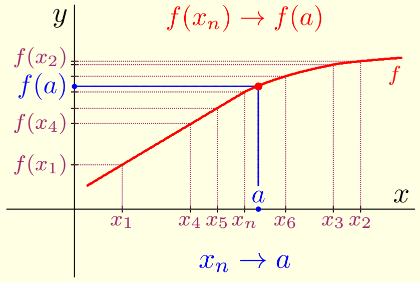
Dôkaz.
Vyplýva z definície limity a spojitosti funkcie v bode a. ■

Príklad 3.3.1.
Funkcia $f\colon\ y = x$, $x \in R$ je spojitá v každom bode $a \in R$. Aj funkcia $g\colon\ y = x$, $x \in Q$, t. j. $g = f|_Q$, je spojitá v každom bode $a \in Q$. Pre všetky $a \in R$, resp. $a \in Q$ totiž platí:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a = f(a), \qquad \text{resp.} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} x = a = g(a). \ ■$$



Obr. 3.3.116: Spojitosť funkcie f v izolovanom bode $a \in D(f)$.



Obr. 3.3.117: Spojitosť funkcie f v hromadnom bode $a \in D(f)$.

Spojitosť funkcie f v izolovanom aj hromadnom bode $a \in D(f)$ môžeme (podobne ako limitu funkcie f v bode a, str. 245) charakterizovať pomocou okolí bodov a, $f(a)$. Tento vzťah vyjadruje nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu, pretože je takmer identický s dôkazom vety 3.2.1.

Veta 3.3.2.
Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, ak pre každé okolie $O(f(a))$ bodu $f(a)$ existuje okolie $O(a)$ bodu a také, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in O(f(a))$.

Poznámka 3.3.2.
Tvrdenie z predchádzajúcej vety môžeme symbolicky zapísať niektorým zo vzťahov

$$\forall O(f(a))\ \exists O(a)\ \forall x\colon\ x \in O(a) \cap D(f) \implies f(x) \in O(f(a)),$$
$$\forall O(b)\ \exists P(a)\ :\ f(P(a) \cap D(f)) \in O(b),$$
$$\text{resp.}\qquad \forall O_\varepsilon(f(a))\ \exists O_\delta(a)\ \forall x \in D(f)\colon\ x \in O_\delta(a) \implies f(x) \in O_\varepsilon(f(a)),$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)\colon\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Podobne ako limita, je spojitosť funkcie f v bode a lokálna záležitosť v nejakom okolí bodu a. Pri spojitosti je ale potrebné, aby $a \in D(f)$ a aby bola funkcia f v bode a definovaná. Pri limite musí byť bod a hromadným bodom množiny $D(f)$. Pre funkcie spojité v bode a platia podobné vety ako pre limity.

Veta 3.3.3.
Ak sú funkcie f, g spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$ a ak $r \in R$, potom sú spojité v bode a funkcie $|f|$, $f \pm g$, rf a fg.
Ak navyše platí $g(a) \neq 0$, potom sú v bode a spojité tiež funkcie $\frac{1}{g}$ a $\frac{f}{g}$.

Dôkaz.
Ak je a izolovaným bodom množiny $D(f) \cap D(g)$, potom je tvrdenie zrejmé.
Ak je a hromadným bodom, potom dôkaz vyplýva z vety 3.2.9 a z vety 3.3.1. Dokážeme iba spojitosť funkcie $f \pm g$ v bode a, ostatné tvrdenia sa dokážu analogicky.
Keďže sú funkcie f, g spojité v bode a, existujú vlastné $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a), \qquad \text{t. j.}\quad \lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = f(a) \pm g(a).$$

Z toho vyplýva na základe vety 3.3.1 spojitosť funkcie $f \pm g$ v bode a. ■

Príklad 3.3.2.
Keďže je $f\colon\ y = x$ spojitá v bode 1, sú spojité v bode 1 tiež funkcie

$$f + f = 2f\colon\ y = 2x, \quad f \cdot f = f^2\colon\ y = x^2, \quad f \cdots f = f^n\colon\ y = x^n,\ n \in N. \blacksquare$$

Veta 3.3.4 (O spojitosti zloženej funkcie).
Nech je funkcia f spojitá v bode $a \in D(f)$, nech je funkcia g spojitá v bode $b = f(a) \in D(g)$ a nech $H(f) \subset D(g)$. Potom je zložená funkcia $F = g(f)$ spojitá v bode a.

Dôkaz.
Vyplýva z vety o limite zloženej funkcie (veta 3.2.9) a z vety 3.3.1. $\blacksquare$

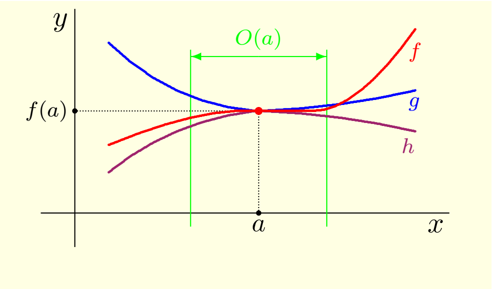
Príklad 3.3.3.
Funkcia $f\colon\ u = x^2 + 1$ je spojitá v bode $a = 1$ a funkcia $g\colon\ y = \sqrt{u}$ je spojitá v bode $b = f(1) = 2$. Potom aj zložená funkcia $g(f)\colon\ y = \sqrt{x^2 + 1}$ je spojitá v bode $a = 1$. $\blacksquare$

Veta 3.3.5.
Nech je funkcia f spojitá v bode a a nech množina $A \subset D(f)$ je taká, že $a \in A$.
Potom je reštrikcia funkcie f na množinu A, t. j. funkcia $g = f|_A$, spojitá v bode a.

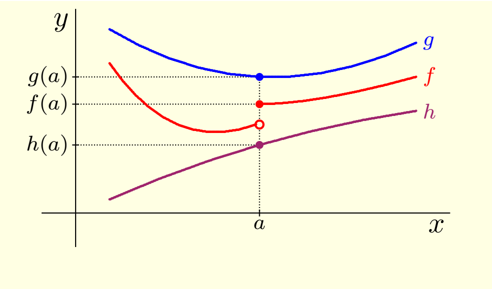
Dôkaz.
Ak je a izolovaným bodom množiny $D(f)$, potom je tiež izolovaným bodom jej podmnožiny $A \subset D(g)$ a funkcia g je spojitá v bode a.
Ak je bod a hromadným bodom množiny $D(f)$, potom platí $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $f(a) = g(a)$.
Bod a môže byť izolovaným alebo hromadným bodom množiny $A = D(g)$.
Ak je a izolovaným bodom, potom je funkcia g v bode a spojitá.
Ak je a hromadným bodom, potom z vety 3.2.10 vyplýva:

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f|_A(x) = f(a), \quad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

a funkcia g je v bode a spojitá. $\blacksquare$



Obr. 3.3.118: Veta 3.3.4 o zovretí.



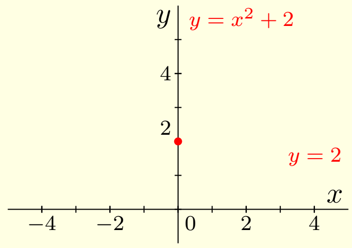
Obr. 3.3.119: Poznámka 3.3.3.

Veta 3.3.6 (O zovretí).
Nech sú funkcie g, h spojité v bode $a \in D(f) \cap D(g) \cap D(h)$. Nech $h(a) = f(a) = g(a)$.
Nech existuje okolie $O(a)$ také, že pre všetky $x \in O(a)$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
Potom je funkcia f spojitá v bode a.

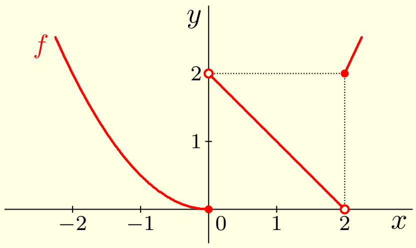
Dôkaz.
Zo spojitosti funkcií f, g v bode a a z predpokladu $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ vyplýva:
$$h(a) = \lim_{x\to a} h(x) \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x) = g(a), \quad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
To znamená, že je funkcia f spojitá v bode a. ■

Poznámka 3.3.3.
Predpoklad $h(a) = f(a) = g(a)$ v predchádzajúcej vete je dôležitý (obr. 3.3.118). Ak nie je splnený, potom funkcia f v bode a nemusí byť spojitá (obr. 3.3.119).

Príklad 3.3.4.
Uvažujme funkciu $f\colon\ y = \begin{cases} x^2+2, & \text{pre } x\in Q, \\ 1, & \text{pre } x\in R-Q \end{cases}$ (obr. 3.3.120).
Je zrejmé, že pre všetky $a\neq 0$ neexistuje $\lim_{x\to a} f(x)$, t. j. funkcia f nie je spojitá.
Ukážeme, že je f spojitá v bode $a=0$. Ak označíme $g(x) = x^2+2$, $x\in R$ a $h(x) = 2$, $x\in R$, potom pre všetky $x\in R$ platí $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, $f(0) = h(0) = g(0) = 1$.
Keďže sú g, h spojité v bode 0, je na základe vety o zovretí spojitá v 0 aj funkcia f. ■



Obr. 3.3.120: Príklad 3.3.4.



Obr. 3.3.121: Poznámka 3.3.4.

Analogicky ako limitu vzhľadom na množinu, resp. limitu zľava a sprava, definujeme aj spojitosť vzhľadom na množinu a spojitosť zľava a sprava.

Hovoríme, že **funkcia $y = f(x)$ je spojitá v bode** $a\in D(f)$ **vzhľadom na množinu** $A\subset D(f)$, ak je spojité v bode a jej zúženie $f|_A$, t. j. ak pre všetky $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ také, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Ak je funkcia f spojitá vzhľadom na množinu $D(f)\cap(-\infty\,;\,a\rangle$ [resp. na množinu $D(f)\cap\langle a\,;\,\infty)$], potom sa nazýva **spojitá zľava** [resp. **spojitá sprava**] **v bode** a. V týchto prípadoch hovoríme o **jednostrannej spojitosti funkcie** f **v bode** a.

Poznámka 3.3.4.
Funkcia f na obrázku 3.3.121 je spojitá v každom bode množiny $R - \{0;\,2\}$. V bode 0 je spojitá zľava a v bode 2 je spojitá sprava.

Poznámka 3.3.5.
Symbolicky môžeme spojitosť zľava funkcie f v bode a zapísať
$$\forall O(f(a))\ \exists O^-(a)\ \forall x\colon\ x\in O^-(a)\cap D(f) \implies f(x)\in O(f(a)),$$
$$\text{resp.} \qquad \forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D(f)\colon\ a-x<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

a spojitosť sprava funkcie f v bode a zapísať

$$\forall O(f(a))\ \exists O^{+}(a)\ \forall x\colon\ x\in O^{+}(a)\cap D(f) \implies f(x)\in O(f(a)),$$

$$\text{resp.}\qquad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D(f)\colon\ x-a<\delta \implies |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Pre jednostrannú spojitosť platí analogické tvrdenie ako pre jednostranné limity.

Veta 3.3.7.
Funkcia f je spojitá v bode $a\in D(f)$ práve vtedy, ak je v bode a spojitá zľava a sprava.

Príklad 3.3.5.
V elektrotechnike sa často používa tzv. **Heavisideova**[60] **jednotková funkcia** η, ktorá je definovaná $\eta(x)=1$ pre $x\in\langle 0\,;\,\infty)$ a $\eta(x)=0$ pre $x\in(-\infty\,;\,0)$.
Funkcia η je spojitá pre všetky $x\in R-\{0\}$. V bode 0 je spojitá sprava. ■

3.3.2 Spojitosť funkcie na množine a body nespojitosti

Spojitosť funkcie v bode rozšírime na pojem spojitosti na množine. Hovoríme, že **funkcia f je spojitá na množine $A\subset D(f)$**, ak je spojitá v každom bode $a\in A$.

Ak je funkcia f spojitá na svojom definičnom obore $D(f)$, t. j. na množine $D(f)$, potom ju nazývame **spojitá funkcia** (slová na definičnom obore $D(f)$ vynechávame).

Ak je funkcia f v bode $a\in D(f)$ spojitá [resp. nespojitá], potom bod a nazývame **bodom spojitosti** [resp. **nespojitosti**] **funkcie f**.

Poznámka 3.3.6.
Z definície je zrejmé, že ak je funkcia f spojitá na množine A, potom je funkcia f spojitá na každej podmnožine množiny A.

Príklad 3.3.6.
a) Funkcia f definovaná v príklade 3.3.4 (obr. 3.3.120) je spojitá iba v bode 0, t. j. je spojitá na množine $\{0\}$. V ostatných bodoch, t. j. na množine $R-\{0\}$ je nespojitá.

b) Na obrázku 3.3.121 je graf funkcie $f\colon\ y=x^2$ pre $x\in R-(0\,;\,2)$ a $y=2-x$ pre $x\in(0\,;\,2)$. Funkcia f je nespojitá v bodoch $0, 2$ a spojitá na množine $R-\{0,2\}$.

c) Funkcia $f\colon\ y=\lfloor x\rfloor$ (obr. 2.1.2) je spojitá na každom intervale $\langle k\,;\,k+1)$, $k\in Z$, pričom v bodoch k je spojitá sprava. ■

Je zrejmé, že o bodoch nespojitosti funkcie f má zmysel uvažovať iba v prípade, že sú hromadnými bodmi množiny $D(f)$. V opačnom prípade sú izolované, t. j. je v nich funkcia f spojitá. Preto rozšírime pojem bodu nespojitosti na všetky hromadné body množiny $D(f)$. Tieto body rozdeľujeme na body odstrániteľnej a neodstrániteľnej nespojitosti.

Hovoríme, že **funkcia f má v bode a bod odstrániteľnej nespojitosti**, ak existuje konečná limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, ale $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$ (obr. 3.3.122).[61]

[60] *Oliver Heaviside* [1850–1925] — anglický fyzik.
[61] Je zrejmé, že stačí predefinovať $f(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a funkcia f bude v bode a spojitá.

Funkcia f má v bode a bod neodstrániteľnej nespojitosti 1. druhu, ak existujú konečné jednostranné limity $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (obr. 3.3.123). Číslo

$$c = \left| \lim_{x\to a^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x) \right|$$

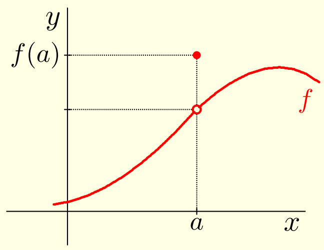
nazývame **skok funkcie f v bode a**.

Funkcia f má v bode a bod neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu, ak aspoň jedna z jednostranných limít $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ neexistuje alebo je nevlastná.

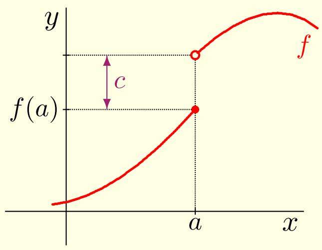
Ak je niektorá z týchto limít nevlastná (obr. 3.3.124), potom hovoríme o **asymtotickej nespojitosti funkcie f v bode a**.

Poznámka 3.3.7.
Z definície asymptoty bez smernice vyplýva, že funkcia f má v bode a asymptotu bez smernice práve vtedy, ak je v bode a asymptoticky nespojitá (viď obr. 3.2.110).

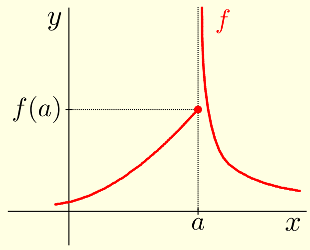
Poznámka 3.3.8.
Každá číselná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je spojitá funkcia, pretože jej definičným oborom je množina prirodzených čísel N, t. j. množina izolovaných bodov. To znamená, že predstava o spojitej funkcii na množine, ako o funkcii, ktorej graf sa dá nakresliť tak, že „nezdvihneme pero z papiera“ postačí na ilustráciu na základných školách. A to iba v prípade, ak je táto množina intervalom $I \subset R$. Je zrejmé, že už v prípade podmnožiny racionálnych čísel, sá dá táto predstava veľmi ťažko zrealizovať.



Obr. 3.3.122: Nespojitosť odstrániteľná.



Obr. 3.3.123: Nespojitosť neodstrániteľná 1. druhu.



Obr. 3.3.124: Nespojitosť neodstrániteľná 2. druhu.

Príklad 3.3.7.
Uvažujme nasledujúce funkcie

$$f_1(x) = \tfrac{x^2-1}{x-1}, \quad f_2(x) = \tfrac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \lfloor x \rfloor, \quad h_1(x) = \tfrac{1}{x}, \quad h_2(x) = \sin\tfrac{1}{x}.$$

Funkcia f_1 má v bode 1 a funkcia f_2 má v bode 0 odstrániteľný bod nespojitosti, pretože

$$\lim_{x\to 1} f_1(x) = \lim_{x\to 1} \tfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2, \qquad \lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{x} = 1.$$

Ak položíme $f_1(1) = 2$, $f_2(0) = 1$, potom budú tieto funkcie v uvedených bodoch spojité.
Funkcia g (obr. 2.1.2) má vo všetkých bodoch $k \in Z$ skok $c = 1$, pretože platí:

$$\lim_{x\to k^-} g(x) = \lim_{x\to k^-} \lfloor x \rfloor = k-1, \qquad \lim_{x\to k^+} g(x) = \lim_{x\to k^+} \lfloor x \rfloor = k.$$

Funkcie h_1, h_2 majú v bode 0 neodstrániteľný bod nespojitosti 2. druhu, pretože

$$\lim_{x\to 0^-} h_1(x) = \lim_{x\to 0^-} \tfrac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} h_1(x) = \lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{x} = \infty$$

a jednostranné limity funkcie h_2 v bode 0 neexistujú (príklad 3.2.6). ■

Funkcia f sa nazýva **po častiach spojitá na intervale** $\langle a\,;\,b\rangle \subset D(f)$, ak má na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti a všetky tieto body sú buď odstrániteľné alebo neodstrániteľné 1. druhu.

Túto definíciu môžeme rozšíriť na ľubovoľný interval $I \subset D(f)$, napr. $(-\infty\,;\,\infty)$, $\langle 0\,;\,\infty)$. Funkcia f sa nazýva **po častiach spojitá na intervale** $I \subset D(f)$, ak je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a\,;\,b\rangle \subset I$.

Poznámka 3.3.9.
Z predchádzajúcej definície je zrejmé, že každá funkcia spojitá na intervale $I \subset D(f)$, je na tomto intervale I tiež po častiach spojitá.

Príklad 3.3.8.
a) Funkcia $f\colon\ y = x^2$, $x \in R$ je spojitá na R, takže je aj po častiach spojitá na R.

b) Funkcia $f\colon\ y = \lfloor x \rfloor$, $x \in R$ je po častiach spojitá na množine R, pretože je po častiach spojitá na každom uzavretom intervale $\langle a\,;\,b\rangle$, $a, b \in R$.

c) Funkcia $f\colon\ y = \frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$, $f(0) = 0$ je spojitá, t. j. aj po častiach spojitá na každom intervale, ktorý neobsahuje bod 0.
V bode 0 má funkcia f neodstrániteľný bod nespojitosti 2. druhu. To znamená, že na ľubovoľnom intervale, ktorý obsahuje bod 0, nie je funkcia f po častiach spojitá. ■

3.3.3 Vlastnosti spojitých funkcií na intervale

Spojitosť funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle \subset D(f)$ znamená spojitosť funkcie f na intervale $(a\,;\,b)$, spojitosť sprava v bode a a spojitosť zľava v bode b. Spojité funkcie na intervale majú mnohé významné vlastnosti, ktoré sformulujeme v nasledujúcich vetách.

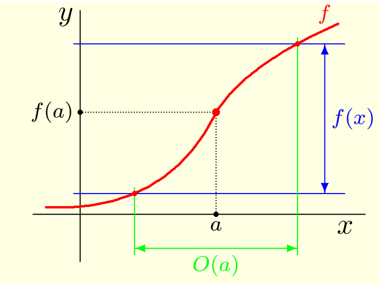
Veta 3.3.8 (O lokálnej ohraničenosti spojitej funkcie).
Ak je funkcia f spojitá v bode $a \in D(f)$, potom je lokálne ohraničená (obr. 3.3.125).
T. j. existuje okolie $O(a)$ také, že je funkcia f ohraničená na množine $O(a) \cap D(f)$.

Dôkaz.
Ak je a izolovaný bod $D(f)$, potom je tvrdenie zrejmé. Ak je a hromadný bod, potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ a tvrdenie vyplýva z vety 3.2.2 o lokálnej ohraničenosti limity. ■

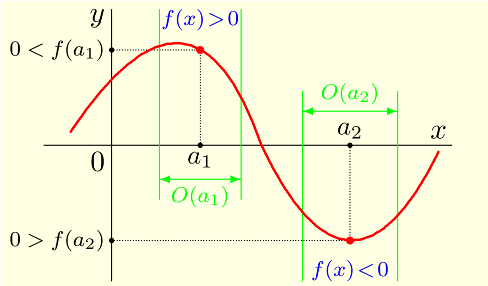
Poznámka 3.3.10.
V predpokladoch predchádzajúcej vety je spojitosť funkcie f v bode $a \in D(f)$. Zo spojitosti funkcie f na množine $A \subset D(f)$ ešte nevyplýva jej ohraničenosť na tejto množine.
Napríklad funkcia $f\colon\ y = \frac{1}{x}$ je síce spojitá na intervale $(0\,;\,1)$, ale nie ohraničená.

Veta 3.3.9.
Nech je funkcia f spojitá v bode $a \in D(f)$ a nech $f(a) > 0$ [resp. $f(a) < 0$].
Potom existuje okolie $O(a)$, že pre všetky $x \in O(a) \cap D(f)$ platí $f(x) > 0$ [resp. $f(x) < 0$].

Dôkaz.
Ak je a izolovaný, potom existuje $O(a)$ také, že $O(a) \cap D(a) = \{a\}$ a tvrdenie je zrejmé.
Ak je a hromadný, potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ a tvrdenie vyplýva z dôsledku 3.2.7.a. ■



Obr. 3.3.125: Veta 3.3.8.



Obr. 3.3.126: Veta 3.3.9.

Veta 3.3.10 (Weierstrass).
Ak je funkcia f spojitá na uzavretom intervale $\langle a\,;\,b\rangle$, potom platí:

a) Funkcia f je na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ ohraničená.

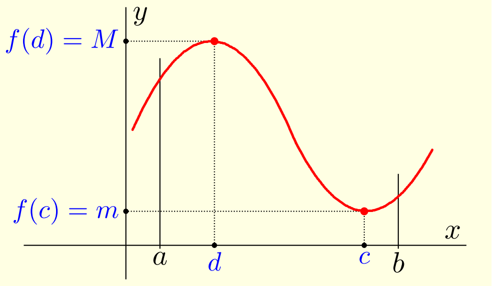
b) Funkcia f nadobúda na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ svoje extrémy, t. j. existujú body $c, d \in \langle a\,;\,b\rangle$ také, že $f(c) = \min\{f(x)\,;\, x\in\langle a\,;\,b\rangle\}$, $f(d) = \max\{f(x)\,;\, x\in\langle a\,;\,b\rangle\}$.

Dôkaz.
a) Sporom. Nech je funkcia f spojitá a neohraničená na $\langle a\,;\,b\rangle$. Potom pre každé $n\in N$ existuje $x_n\in\langle a\,;\,b\rangle$ také, že $|f(x_n)| > n$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = \infty$.
Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a môžeme (veta 2.3.9) z nej vybrať $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k nejakému $e\in\langle a\,;\,b\rangle$. Je zrejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{k_n})| = \infty$, $f(e)\in R$.
Keďže je f spojitá v bode e, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(e)$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{k_n})| \neq \infty$. To je spor.

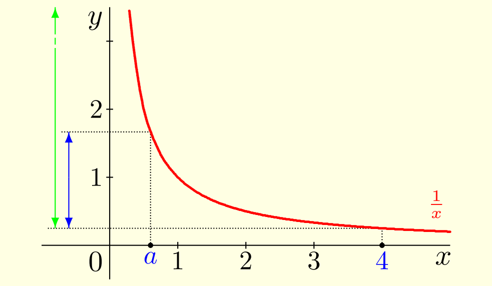
b) Funkcia f je ohraničená na $\langle a\,;\,b\rangle$, t. j. existujú konečné $m, M\in R$ také, že.
$$m = \inf\{f(x)\,;\, x\in\langle a\,;\,b\rangle\}, \qquad M = \sup\{f(x)\,;\, x\in\langle a\,;\,b\rangle\}.$$
Nepriamo ukážeme, že f nadobúda M. Nech f nenadobúda M, t. j. neexistuje $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ také, že $f(x) = M$. Potom pre všetky $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ platí $f(x) < M$. Z toho vyplýva:
$$0 < M - f(x), \qquad \text{t. j.} \quad 0 < \tfrac{1}{M-f(x)}.$$
Funkcia $g\colon\ y = \frac{1}{M-f(x)}$ je na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ spojitá a teda aj ohraničená. To znamená, že existuje číslo $k > 0$ také, že pre všetky $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ platí:
$$0 < g(x) = \tfrac{1}{M-f(x)} < k, \quad \text{t. j.} \quad \tfrac{1}{k} < M - f(x), \quad \text{t. j.} \quad f(x) < M - \tfrac{1}{k}.$$
To je spor s tým, že $M = \sup A$ a dokazuje, že funkcia f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ svoje súpremum nadobúda. Pre m je dôkaz analogický. ■

Poznámka 3.3.11.
Veta 3.3.10 platí iba pre uzavretý interval $\langle a\,;\,b\rangle$. Pre otvorené a polouzavreté intervaly neplatí. Napr. $f\colon\ y = \frac{1}{x}$ je na $(0\,;\,4\rangle$ spojitá, ale nie ohraničená (obr. 3.3.128). Na druhej strane je ohraničená na každom intervale $(a\,;\,4)$, kde $0 < a < 4$.

Poznámka 3.3.12.
Veta 3.3.10 platí aj v prípade, keď v jej predpokladoch nahradíme interval $\langle a\,;\,b\rangle$ ľubovoľnou ohraničenou uzavretou množinou $A \subset R$. Na dôkaze nie je potrebné nič meniť.



Obr. 3.3.127: Veta 3.3.10.



Obr. 3.3.128: Poznámka 3.3.11.

Spojité funkcie na uzavretých množinách $A \subset R$ majú ešte jednu dôležitú vlastnosť, sú rovnomerne spojité. Ak je funkcia f spojitá na množine $A \subset D(f)$, t. j. spojitá v každom bode $c \in A$, potom (poznámka 3.3.2) platí:

$$\forall c\in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\in A\colon\ |x-c| < \delta \implies |f(x)-f(c)| < \varepsilon.$$

Číslo δ vo všeobecnosti závisí nielen od čísla ε, ale aj od bodu c. Pre konkrétne ε sa so zmenou bodu c menia aj hodnoty δ. Ak číslo δ nezávisí od voľby bodu $c \in A$ (závisí iba od hodnoty ε), t. j. ak pre funkciu f a množinu $A \subset D(f)$ platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall c\in A\ \forall x\in A\colon\ |x-c| < \delta \implies |f(x)-f(c)| < \varepsilon, \qquad (3.46)$$

potom hovoríme, že **funkcia f je rovnomerne spojitá na množine A**.

Poznámka 3.3.13.
Je zrejmé, že ak je funkcia f rovnomerne spojitá na množine $A \subset D(f)$, potom je tiež rovnomerne spojitá na každej podmnožine množiny A.

Poznámka 3.3.14.
Z definície rovnomernej spojitosti priamo vyplýva, že ak je funkcia f rovnomerne spojitá na nejakej množine $A \subset D(f)$, potom je na tejto množine spojitá.
Opačné tvrdenie vo všeobecnosti neplatí (príklad 3.3.9). Ale ako ukazuje nasledujúca veta, na uzavretom a ohraničenom intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ sú tieto dva pojmy ekvivalentné.

Veta 3.3.11 (Cantor).
Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$, potom je na $\langle a\,;\,b\rangle$ spojitá rovnomerne.

Dôkaz.
Sporom. Predpokladajme, že je funkcia f spojitá na $\langle a\,;\,b\rangle$, ale nie je na $\langle a\,;\,b\rangle$ spojitá rovnomerene. Potom neplatí vzťah (3.46), ale platí jeho negácia

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists c\in \langle a\,;\,b\rangle\ \ \exists x\in \langle a\,;\,b\rangle:\ \ |x-c| < \delta,\ |f(x)-f(c)| \geq \varepsilon.$$

Potom tiež pre všetky $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n\in N$ existujú body $x_n, c_n \in \langle a\,;\,b\rangle$ také, že platí:

$$|x_n - c_n| < \delta_n = \tfrac{1}{n}, \qquad |f(x_n)-f(c_n)| \geq \varepsilon > 0. \qquad (3.47)$$

Postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú ohraničené (bodmi a, b), takže podľa vety 2.3.9 sa z nich dajú vybrať konvergentné podpostupnosti $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Je zrejmé, že platí:

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0 \in \langle a\,;\,b\rangle\,, \qquad \lim_{n\to\infty} c_{j_n} = c_0 \in \langle a\,;\,b\rangle\,.$$

Keďže je f spojitá na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$, pre podpostupnosti $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0), \qquad \lim_{n\to\infty} f(c_{k_n}) = f(c_0).$$

Potom na základe vety 2.3.13 zo vzťahu (3.47) pre príslušné limity podpostupností platí:
$$0 \le \lim_{n\to\infty} |x_{k_n} - c_{j_n}| = \left|\lim_{n\to\infty} (x_{k_n} - c_{j_n})\right| = |x_0 - c_0| \le \lim_{n\to\infty} \delta^{-1} = 0,$$
$$\varepsilon \le \lim_{n\to\infty} |f(x_{k_n}) - f(c_{j_n})| = \left|\lim_{n\to\infty} [f(x_{k_n}) - f(c_{j_n})]\right| = |f(x_0) - f(c_0)|\,.$$
Z prvého vzťahu vyplýva $x_0 = c_0$, t. j. $f(x_0) = f(c_0)$. To znamená, že musí zároveň platiť
$$0 = f(x_0) - f(c_0) = |f(x_0) - f(c_0)|, \qquad 0 < \varepsilon \le |f(x_0) - f(c_0)|\,.$$
To je spor, ktorý dokazuje rovnomernú spojitosť funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$. ■

Príklad 3.3.9.
Funkcia $f\colon\ y = \frac{1}{x}$ je spojitá na $D(f) = R - \{0\}$, t. j. aj na intervale $(0\,;\,1)$.
Ukážeme, že na tomto intervale nie je funkcia rovnomerne spojitá.
Je zrejmé, že ku každému $\delta > 0$ existuje $n\in N$ také, že platí:
$$\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \tfrac{1}{n(n+1)} < \delta, \qquad \text{pričom}\ \ \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n+1} \in (0\,;\,1)\,.$$
Ak položíme $x = (n+1)^{-1}$, $c = \frac{1}{n}$, potom platí $|f(x) - f(c)| = |n+1-n| = 1$.
To znamená, že ak položíme $\varepsilon = 1$, potom pre všetky $\delta > 0$ existujú $x, c\in(0\,;\,1)$ také, že
$$|x - c| < \delta, \qquad |f(x) - f(c)| \ge \varepsilon = 1.$$
Tým sme ukázali, že funkcia f nie je na intervale $(0\,;\,1)$ rovnomerne spojitá. ■

Poznámka 3.3.15.
Nech $a \in (0\,;\,1)$. Funkcia f z príkladu 3.3.9 je na intervale $\langle a\,;\,1\rangle$, spojitá a podľa vety 3.3.11 tiež rovnomerne spojitá. Potom je rovnomerne spojitá aj na intervale $(a\,;\,1)$.
To znamená, že funkcia f na intervale $(0\,;\,1)$ nie je rovnomerne spojitá, ale je rovnomerne spojitá na každom intervale $(a\,;\,1) \subset (0\,;\,1)$, kde $a\neq 0$.

Veta 3.3.12 (Cauchyho o nulovej hodnote).
Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ a platí $f(a)f(b) < 0$, potom existuje bod $c\in(a\,;\,b)$ taký, že $f(c) = 0$ (nulový bod).

Dôkaz.
Predpoklad $f(a)f(b) < 0$ znamená, že platí práve jeden zo vzťahov
$$f(a) < 0 < f(b), \qquad f(a) > 0 > f(b).$$
Nech platí $f(a) < 0 < f(b)$ (obr. 3.3.129). Pre $f(a) > 0 > f(b)$ je dôkaz analogický.
Označme $a = a_0$, $b = b_0$ a rozdeľme interval $\langle a_0\,;\,b_0\rangle$ na dva rovnako dlhé intervaly
$$\langle a_0\,;\,x_1\rangle\,,\ \langle x_1\,;\,b_0\rangle\,, \qquad \text{kde}\ \ x_1 = \tfrac{a_0+b_0}{2}.$$
Ak $f(x_1) = 0$, potom máme koreň. Ak $f(x_1)\neq 0$, potom označíme $\langle a_1\,;\,b_1\rangle = \langle a_0\,;\,x_1\rangle$ pre $f(x_1) > 0$ a označíme $\langle a_1\,;\,b_1\rangle = \langle x_1\,;\,b_0\rangle$ pre $f(x_1) < 0$. Potom platí:
$$f(a_1) < 0 < f(b_1), \qquad \langle a_1\,;\,b_1\rangle \subset \langle a_0\,;\,b_0\rangle\,, \qquad b_1 - a_1 = \tfrac{b_0-a_0}{2}.$$
Interval $\langle a_1\,;\,b_1\rangle$ opäť rozdelíme na dva rovnako dlhé intervaly
$$\langle a_1\,;\,x_2\rangle\,,\ \langle x_2\,;\,b_1\rangle\,, \qquad \text{kde}\ \ x_2 = \tfrac{a_1+b_1}{2}.$$
Ak $f(x_2) = 0$, potom máme koreň. V opačnom prípade označíme $\langle a_2\,;\,b_2\rangle = \langle a_1\,;\,x_2\rangle$ pre $f(x_2) > 0$ a $\langle a_2\,;\,b_2\rangle = \langle x_2\,;\,b_1\rangle$ pre $f(x_2) < 0$. Potom platí:
$$f(a_2) < 0 < f(b_2), \qquad \langle a_2\,;\,b_2\rangle \subset \langle a_1\,;\,b_1\rangle\,, \qquad b_2 - a_2 = \tfrac{b_1-a_1}{2} = \tfrac{b_0-a_0}{2^2}.$$
Ak budeme týmto spôsobom pokračovať ďalej, potom sú dve možnosti. Buď po konečnom počte krokov dostaneme bod x_k, pre ktorý platí $f(x_k) = 0$ alebo dostaneme nekonečnú postupnosť do seba vložených intervalov $\{\langle a_n\,;\,b_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$. Potom pre všetky $n\in N$ platí:
$$f(a_n) < 0 < f(b_n), \quad \langle a_n\,;\,b_n\rangle \subset \langle a_{n-1}\,;\,b_{n-1}\rangle\,, \quad b_n - a_n = \tfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} = \tfrac{b_0-a_0}{2^n}.$$

Z Cantorovho princípu do seba vložených intervalov (veta 2.1.31) potom vyplýva, že existuje práve jeden bod c taký, že pre všetky $n \in N$ platí $c \in \langle a_n\,;\, b_n\rangle$.
Ukážeme, že platí $f(c)=0$. Z vlastností postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

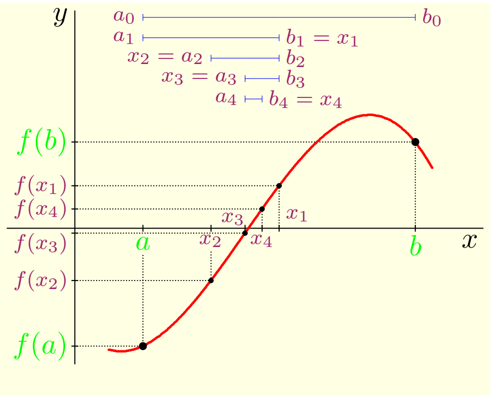
Ak uvážime, že je funkcia f spojitá v bode c, potom platí:

$$f(c)=\lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0 \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c), \qquad \text{t. j. } f(c)=0. \blacksquare$$

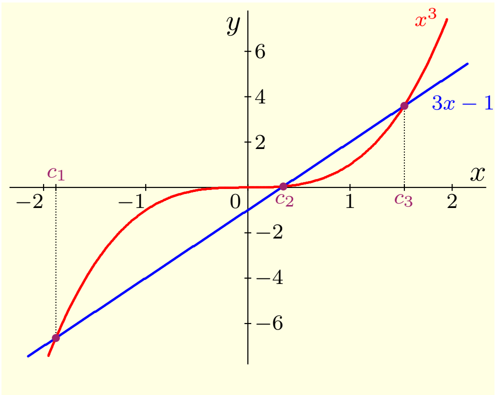
Poznámka 3.3.16.
Metóda, ktorú sme použili v dôkaze vety 3.3.12 sa nazýva **metóda postupného delenia intervalu** (**metóda polenia**, resp. **metóda bisekcie**) a často sa používa pri numerickom hľadaní koreňov danej funkcie, t. j. pri riešení rovnice $f(x)=0$.
Koreň rovnice $f(x)=0$ aproximujeme hodnotou $x_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ tak, aby platilo

$$b_n-a_n<\varepsilon, \qquad \text{resp.} \quad |f(x_{n+1})|<\varepsilon,$$

kde $\varepsilon>0$ je dopredu zvolená tolerancia (chyba výpočtu). Vo veľkej väčšine prípadov sa požaduje splnenie obidvoch predchádzajúcich podmienok.
Metóda bisekcie je pomerne jednoduchá, lenže je dosť pracná. Na spresnenie koreňa o jeden rád potrebuje približne 4 kroky, preto sa väčšinou používa iba ako štartovacia metóda na získanie počiatočných hodnôt pre iné metódy.



Obr. 3.3.129: Veta 3.3.12.



Obr. 3.3.130: Príklad 3.3.10.

Príklad 3.3.10.
Nájdite s presnosťou $\varepsilon=0,01$ korene funkcie $f\colon\ y=x^3-3x+1$.

Riešenie.
Z priesečníkov (obr. 3.3.130 — kvôli prehľadnosti je súradnicová os x zväčšená 4,5 krát vzhľadom na súradnicovú os y) grafov funkcií $y=x^3$, $y=3x-1$ odhadneme, že korene funkcie f sú tri a ležia v intervaloch $\langle -2\,;\,-1\rangle$, $\langle 0\,;\,1\rangle$, $\langle 1\,;\,2\rangle$.
Toto tvrdenie dokážeme pomocou vety 3.3.12. Funkcia f je spojitá a platí:

$$f(-2)=-1,\ \ f(-1)=3,\ \ f(0)=1,\ \ f(1)=-1,\ \ f(2)=3.$$

Z toho vyplýva $f(-2)f(-1)=-3<0$, $f(0)f(1)=-1<0$, $f(1)f(2)=-3<0$.
Takže náš odhad pre intervaly, v ktorých ležia korene funkcie f, bol správny.

Pomocou metódy bisekcie nájdeme s presnosťou $\varepsilon = 0,01$ koreň z intervalu $\langle 0\,;\,1\rangle$. Na jeho nájdenie budeme potrebovať minimálne k krokov, pričom pre $k\in N$ platí:

$$b_k - a_k = \tfrac{b_0-a_0}{2^k} = \tfrac{1-0}{2^k} = 2^{-k} < \varepsilon = 10^{-2}, \quad \text{t. j.} \quad 10^2 = 100 < 2^k.$$

Najmenšie $k\in N$ vyhovujúce predchádzajúcej nerovnosti je $k = 7$.

Postup riešenia je znázornený v tabuľke 3.3.4 a koreňom je číslo $x_8 = 0,347\,656\,25$, ktorého odchýlka od skutočného koreňa je menšia ako $0,003\,906\,25$, t. j. menšia ako $\varepsilon = 0,01$.

Keby sme požadovali iba presnosť $|f(c)| < \varepsilon$, postačil by nám koreň $x_5 = 0,343\,75$.

Keby sme požadovali iba presnosť $b_n - a_n < \varepsilon$, postačil by nám koreň $x_7 = 0,351\,562\,5$.

Na záver pre porovnanie s uvádzame všetky tri korene (vypočítané nenumericky s presnosťou na deväť desatinných miest)

$$c_1 = -1,879\,385\,242, \qquad c_2 = 0,347\,296\,355, \qquad c_3 = 1,532\,088\,886.$$

Rozdiel medzi $x_8 = 0,347\,656\,25$ a skutočným koreňom c_2 je $x_8 - c_2 = 0,000\,359\,895$. ■

k	a_k $[f(a_k)>0]$	b_k $[f(b_k)<0]$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$		$b_k - a_k$
0	0,0	1,0	0,5	−0,375	$\to b_1$	1,0
1	0,0	0,5	0,25	0,265 625	$\to a_2$	0,5
2	0,25	0,5	0,375	−0,072 265 625	$\to b_3$	0,25
3	0,25	0,375	0,312 5	0,093 017 578	$\to a_4$	0,125
4	0,312 5	0,375	0,343 75	0,009 368 896	$\to a_5$	0,062 5
5	0,343 75	0,375	0,359 375	−0,031 711 578	$\to b_6$	0,031 25
6	0,343 75	0,359 375	0,351 562 5	−0,011 235 714	$\to b_7$	0,015 625
7	0,343 75	0,351 562 5	0,347 656 25	−0,000 949 323	$\to b_8$	0,007 812 5
8	0,343 75	0,347 656 25				0,003 906 25

Tabuľka 3.3.4: Riešenie rovnice $x^3 - 3x + 1 = 0$ z príkladu 3.3.10 metódou bisekcie.

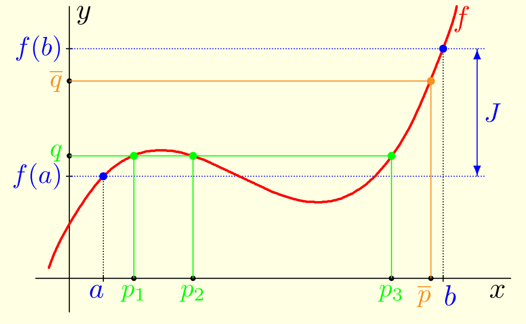
Z Cauchyho vety o nulovej hodnote vyplývajú mnohé dôsledky. Jedným z najvýznamnejších dôsledkov je nasledujúca veta o medzihodnote a za ňou nasledujúca veta 3.3.14.

Veta 3.3.13 (O medzihodnote).
Nech je funkcia f spojitá na intervale $I \subset R$ a nech $a, b\in I$. Potom f nadobúda všetky hodnoty medzi $f(a)$ a $f(b)$, t. j. pre všetky $q\in J$, kde J je otvorený interval s koncovými bodmi $f(a)$ a $f(b)$, existuje číslo $p\in(a\,;\,b)$ také, že platí $f(p) = q$.

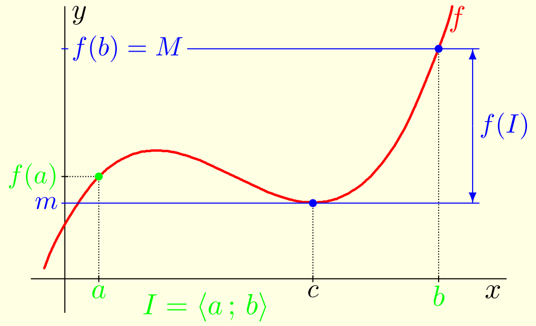
Dôkaz.
Ak $f(a) = f(b)$, potom je taká hodnota iba jedna a tvrdenie vety platí.
Nech $f(a) < q < f(b)$ (viď obr 3.3.131). Označme $g\colon\ y = f(x) - q$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$, potom platí $f(a) - q = g(a) < 0 < g(b) = f(b) - q$. Potom (veta 3.3.12) existuje $p\in(a\,;\,b)$ také, že $g(p) = f(p) - q = 0$, t. j. $f(p) = q$. Pre $f(a) > q > f(b)$ je dôkaz analogický. ■

Dôsledok 3.3.13.a.
Ak je funkcia f spojitá na intervale $I \subset R$, potom je množina $f(I)$ súvislá.

Dôkaz.
Sporom. Nech nie je $f(I)$ súvislá. Potom existujú $\alpha, \beta, \gamma\in R$, $\alpha < \gamma < \beta$, pre ktoré platí $\alpha, \beta\in f(I)$, $\gamma\notin f(I)$. To znamená, že neexistuje $p\in I$, pre ktoré platí $f(p) = \gamma$.
Z predchádzajúcej vety ale vyplýva, že také $p\in I$, $f(p) = \gamma$ existuje. To je spor. ■



Obr. 3.3.131: Veta 3.3.13.

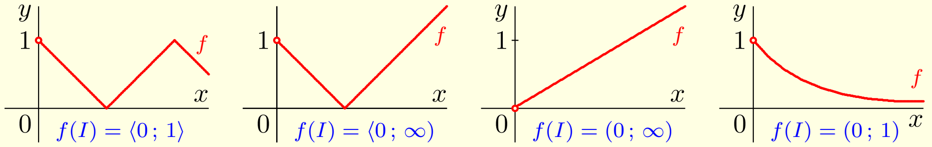


Obr. 3.3.132: Dôsledok 3.3.13.b.

Dôsledok 3.3.13.b.
Ak je f na intervale $I \subset R$ spojitá, potom $f(I)$ je jednobodová množina alebo interval.

Dôkaz.
Ak je f konštantná, t. j. $f(x) = c$, $x \in I$, potom $f(I) = \{c\} = \langle c\,;\, c\rangle$.
Ak nie je f konštantná, potom $f(I)$ je súvislá (obr. 3.3.132) a obsahuje aspoň dva rôzne body. Potom z princípu súvislosti (veta 2.1.24) vyplýva, že $f(I)$ je interval. ■

Poznámka 3.3.17.
Ak je interval I uzavretý a ohraničený, potom aj $f(I)$ je uzavretý a ohraničený a na základe vety 3.3.10 platí $f(I) = \langle m\,;\, M\rangle$, pričom $m = \min f(x)$, $M = \max f(x)$, $x \in I$.



Obr. 3.3.133: Zobrazenie intervalu $I = (0;\, \infty)$ spojitou funkciou f (poznámka 3.3.18).

Poznámka 3.3.18.
Ak je funkcia f na intervale I spojitá, ale I nie je uzavretý alebo ohraničený, potom vo všeobecnosti typ intervalu $f(I)$ určiť nevieme (obr. 3.3.133).
Ale ak je funkcia f rýdzo monotónna, potom interval $f(I)$ má rovnaký typ ako I.

Nech je funkcia f na intervale I (nemusí byť ohraničený) rastúca [resp. klesajúca]. Ak označíme $\alpha = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\beta = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, potom pre intervaly $(a\,;\, b)$, $\langle a\,;\, b)$, $(a\,;\, b\rangle$ platí:

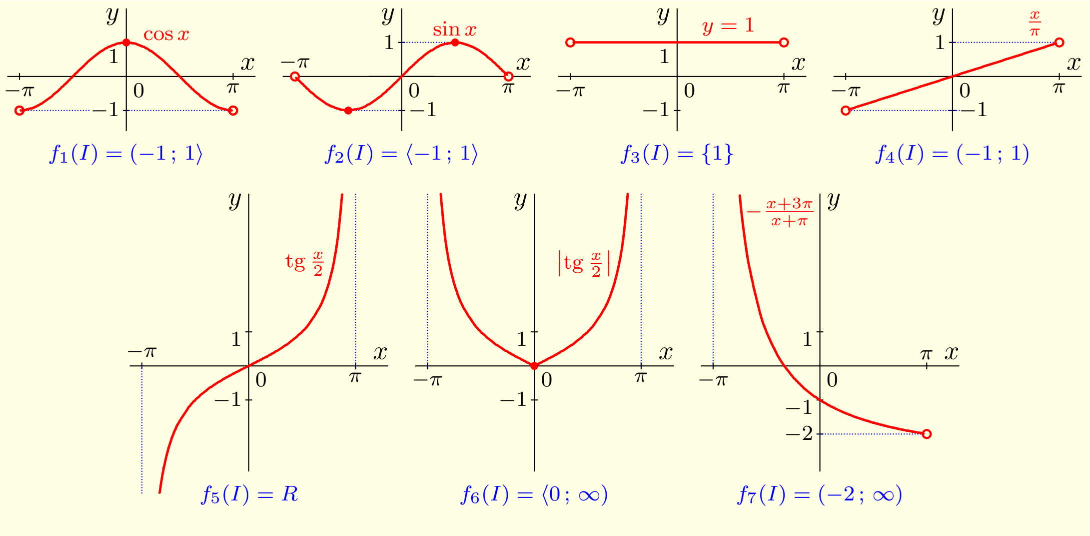
$$f((a\,;\, b)) = (\alpha\,;\, \beta) \quad [\text{resp. } (\beta\,;\, \alpha)\,], \qquad f(\langle a\,;\, b)) = \langle f(a)\,;\, \beta) \quad [\text{resp. } (\beta\,;\, f(a)\rangle\,],$$

$$f((a\,;\, b\rangle) = \langle \alpha\,;\, f(b)\rangle \quad [\text{resp. } \langle f(b)\,;\, \alpha)\,].$$

Príklad 3.3.11.
Spojitá funkcia môže zobraziť interval $I = (-\pi\,;\, \pi)$ na rôzne intervaly, napr. (obr. 3.3.134)

$$f_1(x) = \cos x\colon I \to \langle -1\,;\, 1\rangle\,, \quad f_2(x) = \sin x\colon I \to \langle -1\,;\, 1\rangle\,,$$

$$f_3(x) = 1 \colon I \to \{1\}\,, \quad f_4(x) = \tfrac{x}{\pi} \colon I \to (-1\,;\,1)\,, \quad f_5(x) = \operatorname{tg}\tfrac{x}{2} \colon I \to R,$$
$$f_6(x) = \left|\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right| \colon I \to \langle 0\,;\,\infty)\,, \quad f_7(x) = -\tfrac{2x}{x+\pi} - 1 = -\tfrac{3x+\pi}{x+\pi} \colon I \to (0\,;\,\infty)\,. \blacksquare$$



Obr. 3.3.134: Zobrazenie intervalu $I = (-\pi;\, \pi)$ z príkladu 3.3.11.

Veta 3.3.14.
Nech je funkcia f spojitá na intervale $I \subset R$.
Potom je f na intervale I prostá práve vtedy, ak je na intervale I rýdzo monotónna.

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Sporom. Nech je funkcia f prostá a nie je rýdzo monotónna.
Potom existujú body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ také, že platí:

$$f(x_1) < f(x_2), f(x_3) < f(x_2), \quad \text{resp.} \quad f(x_1) > f(x_2), f(x_3) > f(x_2).$$

Keďže je funkcia f prostá, platí $f(x_1) \neq f(x_3)$ a môžu nastať štyri prípady. Ich dôkaz je podobný a preto dokážeme iba prípad $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ (obr. 3.3.135).
Potom (veta o medzihodnote) existuje $p \in (x_1\,;\,x_2)$ také, že $f(p) = f(x_3)$. Keďže $p \neq x_3$, dostali sme spor s tým, že je f prostá.

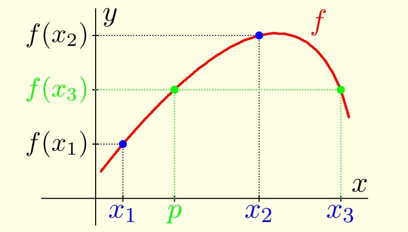
$PP_{\Leftarrow}$: Vyplýva z vety 3.1.5. ■

Veta 3.3.15.
Nech je funkcia f na intervale I monotónna a nech množina $f(I)$ je interval alebo jednoprvková množina.
Potom je funkcia f na intervale I spojitá.

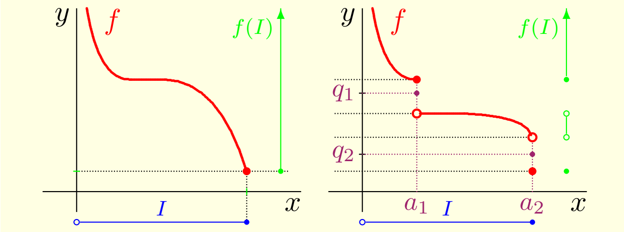
Dôkaz.
Ak $f(I) = \{a\}$, potom je f na intervale I konštantná, t. j. aj spojitá.
Ak $f(I)$ je interval, dokážeme sporom. Nech f nie je spojitá v bode $a \in I$.
Funkcia f je monotónna na intervale I a bod a je hromadným bodom I.
Potom z vety 3.2.13 vyplýva, že existujú jednostranné limity

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \quad \lim_{x\to a^+} f(x), \quad \text{pričom} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x).$$

To znamená, že funkcia f má v bode a skok (obr. 3.3.136) a že aspoň jedno $q \in f(I)$ nemá svoj vzor. T. j. neexistuje $p \in I$, aby platilo $f(p) = q$. Potom $f(I)$ nie je interval. Spor. ■



Obr. 3.3.135: Veta 3.3.14.



Obr. 3.3.136: Veta 3.3.15.

Veta 3.3.16 (O spojitosti inverznej funkcie).
Ak je f prostá a spojitá na intervale I, potom inverzná funkcia f^{-1} je spojitá na $f(I)$.

Dôkaz.
Z vety 3.3.14 vyplýva, že funkcia $f\colon\ I \to f(I)$ je rýdzo monotónna.
Z vety 3.1.6 vyplýva, že aj funkcia $f^{-1}\colon\ f(I) \to I$ je rýdzo monotónna.
Zo spojitosti a nekonštantnosti f vyplýva (dôsledok 3.3.13.b), že obraz $f(I)$ je interval.
Potom z vety 3.3.15 vyplýva, že funkcia f^{-1} je spojitá na $f(I)$. ■

Ak uvážime všetky doterajšie výsledky o spojitých funkciách, môžeme vysloviť tvrdenie, že **všetky základné elementárne funkcie**[62] **sú spojité**.

Pretože každú elementárnu funkciu dostaneme zo základných elementárnych funkcií

$$y = \text{konšt.}, \quad y = x, \quad y = \mathrm{e}^x, \quad y = \ln x, \quad y = \sin x, \quad y = \arcsin x, \quad y = \operatorname{arctg} x$$

pomocou algebraických operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia a pomocou skladania funkcií, môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

Veta 3.3.17.
Každá elementárna funkcia je spojitá na nejakom intervale.

Príklad 3.3.12.
a) Racionálna celistvá funkcia (polynóm) $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ je spojitá na R.
b) Racionálna lomená funkcia $y = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+a_1x+\cdots+b_mx^m}$ je spojitá na R, okrem nulových bodov menovateľa.
c) Exponenciálna funkcia $y = a^x$, $a > 0$ je spojitá na množine R.
d) Logaritmická funkcia $y = \log_a x$, $a > 0$ je spojitá na intervale $(0\,;\,\infty)$.
e) Mocninná funkcia $y = x^r = \mathrm{e}^{r\ln x}$, $r \in R$ (str. 192) je spojitá na $(0\,;\,\infty)$, resp. $\langle 0\,;\,\infty)$.
f) Goniometrické funkcie $y = \sin x$, $y = \cos x$ sú spojité na R, $y = \operatorname{tg} x$ je spojitá na množine $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in Z\right\}$ a $y = \operatorname{cotg} x$ je spojitá na množine $R - \{k\pi\,;\, k \in Z\}$.
g) Cyklometrické funkcie $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ sú spojité na intervale $\langle -1\,;\,1\rangle$ a funkcie $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$ sú spojité na R.

[62] Bližšie sme sa im venovali v časti 3.1.3.

h) Hyperbolické funkcie $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $y = \operatorname{tgh} x$ sú spojité na množine R a funkcia $y = \operatorname{cotgh} x$ je spojitá na $R - \{0\}$.

i) Hyperbolometrická funkcia $y = \operatorname{argsinh} x$ je spojitá na R, funkcia $y = \operatorname{argcosh} x$ na intervale $\langle 1\,;\,\infty)$, funkcia $y = \operatorname{argtgh} x$ na intervale $(-1\,;\,1)$ a funkcia $y = \operatorname{argcotgh} x$ na intervaloch $(-\infty\,;\,-1)$ a $(1\,;\,\infty)$. ■

Cvičenia

3.3.1. Vyšetrite spojitosť a charakter bodov nespojitosti funkcie: ♣

a) $y = x \sin \frac{1}{x}$, b) $y = \frac{1}{\sin x}$, c) $y = \frac{1}{\ln x}$, d) $y = \frac{x}{|x|}$,
e) $y = \lfloor \sin x \rfloor$, f) $y = \lfloor \cos x \rfloor$, g) $y = \ln |\sin x|$, h) $y = \ln |\cos x|$,
i) $y = \sin \frac{1}{x}$, j) $y = \cos \frac{1}{x}$, k) $y = \frac{1}{1+x^2}$, l) $y = \frac{x^2}{|x^2|}$,
m) $y = \operatorname{sgn} \sin x$, n) $y = \operatorname{sgn} \cos x$, o) $y = \sqrt{3 - x^2}$, p) $y = \sqrt{3 - |x|}$,
q) $y = \frac{\sin x}{x}$, r) $y = \frac{\sin x}{|x|}$, s) $y = \frac{x}{\sin x}$, t) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

3.3.2. Určte $a \in R$ tak, aby bola funkcia f spojitá na svojom $D(f)$, ak: ♣

a) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x < 0, \\ x + 2, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x < 0, \\ a - x, & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{pre } x < 1, \\ 2 - \frac{x}{a}, & \text{pre } x \geq 1, \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{pre } x < 0, \\ a - x, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$

3.3.3. Určte $a, b \in R$ tak, aby bola funkcia f spojitá na svojom $D(f)$, ak: ♣

a) $f(x) = \begin{cases} a - x^2, & \text{pre } x \in (-\infty\,;\,0\rangle\,, \\ x + 2, & \text{pre } x \in (0\,;\,2)\,, \\ 3x + b, & \text{pre } x \in \langle 2\,;\,\infty)\,, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a, & \text{pre } x \in (-\infty\,;\,b\rangle\,, \\ x + 2, & \text{pre } x \in (b\,;\,a)\,, \\ 3x + b, & \text{pre } x \in \langle a\,;\,\infty)\,. \end{cases}$

3.3.4. Určte $f(0)$ tak, aby bola funkcia f spojitá v bode 0, ak pre $x \neq 0$ platí: ♣

a) $f(x) = \frac{\sin x}{2x}$, b) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}$, c) $f(x) = \frac{(x+2)^2-4}{x}$,
d) $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$, e) $f(x) = x^2 + e^{-\frac{1}{x^2}} - 1$, f) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

3.3.5. Nech je funkcia f nespojitá v bode $a \in D(f)$. Aká je funkcia $|f|$ v bode a? ♣

3.3.6. Zostrojte funkciu, ktorá je definovaná na množine R, je všade spojitá a má práve 0, 1, 2, …, n, $(n \in N)$, resp. nespočítateľne veľa bodov nespojitosti. ♣

3.3.7. Zostrojte funkciu, ktorá je definovaná na množine R, je všade nespojitá a má práve 0, 1, 2, …, n, $(n \in N)$, resp. spočítateľne veľa bodov spojitosti. ♣

3.3.8. Nech sú funkcie f, g nespojité v bode $a \in D(f) \cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode a. Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi. ♣

a) $f + g$, b) $\frac{g}{f}$, c) fg, d) $f(f)$, e) $f(g)$, f) $|f(g)|$.

3.3.9. Nech je funkcia f spojitá a funkcia g nespojitá v bode $a \in D(f) \cap D(g)$. Zistite, aké sú nasledujúce funkcie v bode a. Svoje tvrdenie ilustrujte konkrétnymi príkladmi. ♣

a) $f + g$, b) $\frac{g}{f}$, c) fg, d) $g(f)$, e) $f(g)$, f) $|f(g)|$.

3.3.10. Určte množiny, na ktorých sú spojité funkcie $f(g)$, $g(f)$, ak $f(x) = \operatorname{sgn} x$ a platí: ♣

a) $g(x) = x(1-x^2)$, b) $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$, c) $g(x) = \operatorname{sgn}(1-x)$,
d) $g(x) = 1 + x - \lfloor x \rfloor$, e) $g(x) = 1 + x\lfloor x \rfloor$, f) $g(x) = 1 - \chi(x)$.

3.3.11. Dokážte, že ak sú na množine A spojité funkcie f, g, potom sú na množine A spojité aj funkcie $y = \min\{f(x), g(x)\}$, $y = \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in A$.

3.3.12. Metódou bisekcie s presnosťou $\varepsilon = 0,01$ nájdite všetky korene funkcie f: ♣

a) $f(x) = x^3 + 2x - 11$, c) $f(x) = \mathrm{e}^x + x$, b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{1}{x} + 5$,
d) $f(x) = \ln x - 3 + x$, e) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-1} - x - 1$, f) $f(x) = \cos x^2 + x - 1$.

3.3.13. Dokážte, že daná rovnica má riešenie na intervale I a nájdite toto riešenie. ♣

a) $x^4 - 4x^3 + 5x - 1 = 0$, $I = \langle 0\,;\,1\rangle$, b) $x^4 - 4x^3 + 5x - 1 = 0$, $I = \langle 1\,;\,2\rangle$,
c) $x^3 - x - 1 = 0$, $I = \langle 1\,;\,2\rangle$, d) $\cos x - x = 0$, $I = \langle 0\,;\,1\rangle$,
e) $x + \arcsin x^2 = 0$, $I = \langle -1\,;\,0)$, f) $x + \sin(x-1) = 0$, $I = \langle 0\,;\,1\rangle$.

3.3.14. Nájdite množinu $f(I)$, ak: ♣

a) $I = \left\langle \pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right\rangle$, $f(x) = \sin 2x$, b) $I = \langle -2\,;\,4\rangle$, $f(x) = x^2 + 2$,
c) $I = \langle 0\,;\,\infty)$, $f(x) = x\lfloor x \rfloor$, d) $I = \langle 0\,;\,4\pi\rangle$, $f(x) = x\lfloor \sin x \rfloor$,
e) $I = \langle 0\,;\,\infty)$, $f(x) = \chi(x^2+1)$, f) $I = (0\,;\,1)$, $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$.

3.3.15. Nech je funkcia f spojitá na intervale $(a\,;\,b)$ a nech $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a\,;\,b)$, $n \in N$. Dokážte, že existuje $c \in (a\,;\,b)$ také, že platí $f(c) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

3.3.16. Rozhodnite, či je funkcia f rovnomerne spojitá na množine A, ak: ♣

a) $f(x) = 2x - 1$, $A = R$, b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $A = \langle -1\,;\,1\rangle$,
c) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $A = (0\,;\,\pi\rangle$, d) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$, $A = \langle -1\,;\,1\rangle$,
e) $f(x) = \sin x^2$, $A = \langle 0\,;\,\infty)$, f) $f(x) = x\sin x$, $A = \langle 0\,;\,\infty)$,
g) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $A = (0,1\,;\,1)$, h) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $A = (0\,;\,1)$,
i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $A = \langle 0\,;\,\infty)$, j) $f(x) = \ln x$, $A = \langle 1\,;\,\infty)$.

3.3.17. Dokážte, že ak je f na R spojitá a periodická, potom je rovnomerne spojitá.

Niektoré charaktery sú nezlomné, pretože sú pružné.
STANISŁAV JERZY LEC

Niet divu, že je na univerzitách toľko učenosti.
Každý jej niečo prinesie a nijakú neodnesie.
AMY LOWELL

Chlastat umí každej vůl, když má žízeň.
Ale ten kluk pije pro radost. Tak to má být!
J. MATĚJKA

Je stále lepšie byť ženatý, ako byť mŕtvy.
JEAN BAPTISTE MOLIÉRE

Súdruh, spi rýchlejšie!
MICHAIL ZOŠČENKO

Kapitola 4

Diferenciálny počet reálnej funkcie reálnej premennej

4.1 Derivácia reálnej funkcie

4.1.1 Definícia derivácie funkcie a jej základné vlastnosti

Základným pojmom diferenciálneho počtu je pojem derivácie. K zavedeniu pojmu derivácie funkcie viedli predovšetkým dva problémy, ktoré sú uvedené v nasledujúcich príkladoch. Prvým je problém určiť okamžitú rýchlosť priamočiareho pohybu hmotného bodu a druhým je problém určiť rovnicu dotyčnice grafu reálnej funkcie v danom bode.

Príklad 4.1.1.
Uvažujme hmotný bod H, ktorý sa pohybuje po priamke (obr. 4.1.1) a jeho pohyb je opísaný funkciou $s(t)$, závislou od času t. Čas začneme merať od okamihu t_0 a bod na priamke, v ktorom sa práve hmotný bod H nachádza, nazveme počiatok P_0.
Ak sa v čase $t > t_0$ nachádza hmotný bod H v bode P, potom $s(t)$ predstavuje dĺžku úsečky P_0P. Označme Q polohu hmotného bodu H v čase $t + \Delta t$, kde $\Delta t \neq 0$.
Úsečka PQ prestavuje dráhu, ktorú prejde hmotný bod od okamihu t po $t+\Delta t$, t. j. v časovom intervale Δt. Ak označíme $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, potom priemernú rýchlosť $\overline{v}$ hmotného bodu H v časovom intervale Δt môžeme vyjadriť vzťahom

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

Ak sa bude časový interval Δt zmenšovať, t. j. ak $\Delta t \to 0$, potom sa bude priemerná rýchlosť $\overline{v}$ približovať k okamžitej rýchlosti $v(t)$ v čase t. To znamená, že platí:

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \overline{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}. \ \blacksquare$$

Príklad 4.1.2.
Uvažujme spojitú reálnu funkciu $y = f(x)$ a bod $P = [x_0; f(x_0)]$ ležiaci na grafe funkcie f. Rovnica dotyčnice d_P k funkcii f v bode P má tvar

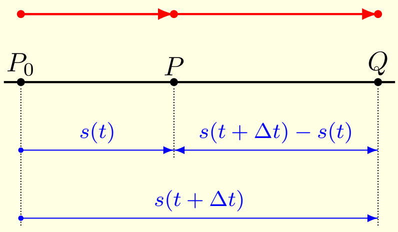
$$y - f(x_0) = k(x - x_0) = \operatorname{tg}\varphi(x - x_0) \quad \text{t. j.} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y-f(x_0)}{x-x_0},$$

kde $k = \operatorname{tg}\alpha$ je smernica dotyčnice d_P. Ak $Q = [x; f(x)]$ je ľubovoľný bod ležiaci na grafe funkcie f (obr. 4.1.2), potom pre smernicu priamky PQ platí:

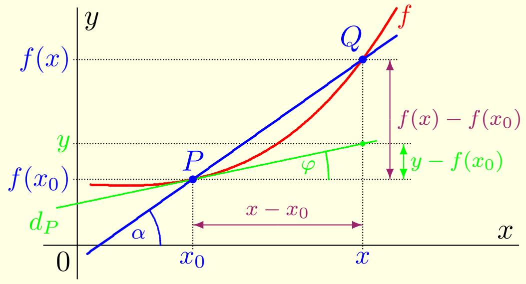
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ak sa bude bod Q približovať k bodu P, t. j. ak $x \to x_0$, potom sa bude priamka PQ približovať k dotyčnici d_P. To znamená, že bude platiť $\alpha \to \varphi$, $\operatorname{tg} \alpha \to \operatorname{tg} \varphi$.
Smernicu $\operatorname{tg} \varphi$ môžeme potom vyjadriť v tvare

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\alpha \to \varphi} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \blacksquare$$



Obr. 4.1.1: Úloha o rýchlosti.



Obr. 4.1.2: Úloha o dotyčnici.

Po matematickej stránke vedú obidva príklady na rovnakú limitu, ktorá sa v praxi používa veľmi často a nazýva sa **derivácia funkcie**.

Nech f je funkcia definovaná v nejakom okolí bodu $x_0 \in D(f)$. Hovoríme, že **funkcia f má v bode x_0 deriváciu**, ak existuje (aj nevlastná) limita[1]

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \tag{4.1}$$

ktorú označujeme $f'(x_0)$, resp. $f'(x)|_{x=x_0}$ a nazývame **derivácia funkcie f v bode x_0**.

Podľa toho, či je limita (4.1) vlastná alebo nevlastná, hovoríme o **vlastnej**[2] alebo **nevlastnej derivácii funkcie f v bode x_0**.

Poznámka 4.1.1.
Ak je reálna funkcia f definovaná vzorcom $y = f(x)$, označujeme deriváciu funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ tiež vzťahmi $y'(x_0)$, resp. $y'(x)|_{x=x_0}$.
Často sa používa označenie pomocou diferenciálov,[3] ktoré zaviedol G. W. Leibniz

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, f(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

Tieto vzťahy čítame **derivácia funkcie f podľa x v bode** x_0, resp. stručne $\mathrm{d}f(x_0)$ **podľa** $\mathrm{d}x$. V súvislom texte sa používa zápis $\mathrm{d}f(x_0)/\,\mathrm{d}x$, resp. $\mathrm{d}y(x_0)/\,\mathrm{d}x$.

Príklad 4.1.3.
Vypočítajte deriváciu funkcie $f\colon\ y = x^2 + x + 1$ v bode $x_0 = 1$.

Riešenie.
Keďže $f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$, $f(1+h) = (1+h)^2 + (1+h) + 1 = 3 + 3h + h^2$, potom platí:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3+3h+h^2-3}{h} = \lim_{h \to 0} (3+h) = 3. \blacksquare$$

[1] Použijeme substitúciu $h = x - x_0$.
[2] Pokiaľ nebude uvedené ináč, budeme pod pojmom derivácia rozumieť vlastnú deriváciu.
[3] Bližšie sa im budeme venovať neskôr.

Príklad 4.1.4.
Uvažujme konštantnú funkciu $f\colon\ y=c$, kde $c\in R$.
Nech $x_0\in R$ je ľubovoľné číslo, potom platí $f(x_0)=f(x_0+h)=c$. Z toho vyplýva:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0. \blacksquare$$

Príklad 4.1.5.
Nech $n\in N$ a nech $x_0\in R$. Vypočítajte deriváciu funkcie $f\colon\ y=x^n$ v bode x_0.

Riešenie.
Na základe vzťahu $x^n-x_0^n=(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1})$ platí:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1})=$$
$$=x_0^{n-1}+x_0^{n-2}x_0+\cdots+x_0x_0^{n-2}+x_0^{n-1}=nx_0^{n-1}. \blacksquare$$

Veta 4.1.1.
Ak má funkcia f v bode x_0 vlastnú deriváciu, potom je v bode x_0 spojitá.

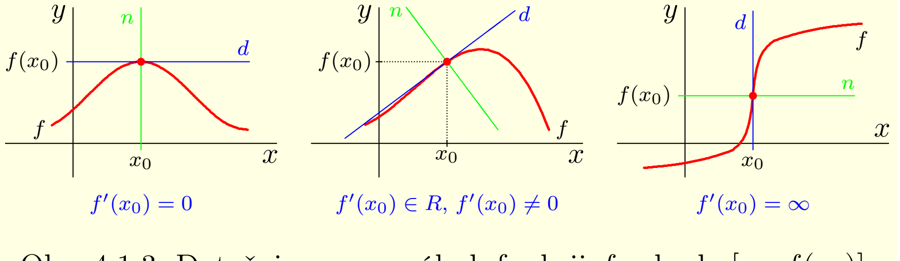
Dôkaz.
Na základe vety 3.3.1 stačí ukázať, že platí:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\qquad \text{t. j.}\quad \lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0.$$

Keďže $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ je konečné a $\lim_{x\to x_0}[x-x_0]=0$, potom platí:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}[x-x_0]=f'(x_0)\lim_{x\to x_0}[x-x_0]=f'(x_0)\cdot 0=0. \blacksquare$$

Poznámka 4.1.2.
Ako dokazuje príklad 4.1.6, opačná implikácia neplatí. To znamená, že spojitosť funkcie v danom bode nezaručuje existenciu derivácie v tomto bode.



Obr. 4.1.3: Dotyčnica a normála k funkcii f v bode $[x_0; f(x_0)]$.

Z geometrického hľadiska (príklad 4.1.2) predstavuje vlastná derivácia funkcie f v bode x_0 smernicu priamky, ktorú nazývame **dotyčnica** (**dotyčnica so smernicou**) **ku grafu funkcie f v bode** $[x_0; f(x_0)]$ a ktorá je určená rovnicou

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{4.2}$$

Ak je derivácia $f'(x_0)$ nevlastná a f je spojitá v bode x_0, potom **dotyčnicou bez smernice ku grafu funkcie f v bode $[x_0; f(x_0)]$** nazývame priamku, ktorá je rovnobežná s osou y, kolmá na os x a prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$, t. j. priamku $x = x_0$.

Normálou ku grafu funkcie f v bode $[x_0; f(x_0)]$ nazývame priamku, ktorá prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$ a je kolmá na dotyčnicu ku grafu funkcie f v tomto bode.

Ak $f'(x_0) = 0$, potom je dotyčnica (obrázok 4.1.3) rovnobežná s osou x a jej rovnica má tvar $y = f(x_0)$. V tomto prípade za normálu považujeme priamku $x = x_0$.

Ak má dotyčnica tvar $x = x_0$, t. j. $f'(x_0) = \pm\infty$, potom má normála tvar $y = f(x_0)$.

Ak existuje konečná derivácia $f'(x_0) \neq 0$, potom má normála tvar[4]

$$y - f(x_0) = -\tfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{t. j. } \; y = f(x_0) - \tfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{4.3}$$

4.1.2 Jednostranné derivácie a derivácia na množine

Nech f je funkcia definovaná v nejakom ľavom okolí bodu $x_0 \in D(f)$. Hovoríme, že **funkcia f má v bode x_0 deriváciu zľava**, ak existuje limita

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0^-} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

ktorú nazývame **derivácia funkcie f zľava v bode x_0**.

Nech f je funkcia definovaná v nejakom pravom okolí bodu $x_0 \in D(f)$. Hovoríme, že **funkcia f má v bode x_0 deriváciu sprava**, ak existuje limita

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0^+} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

ktorú nazývame **derivácia funkcie f sprava v bode x_0**.

Deriváciu zľava a sprava súhrnne nazývame **jednostranné derivácie funkcie f v bode x_0** a deriváciu nazývame **obojstrannou deriváciou funkcie f v bode x_0**.

Z vlastností jednostranných limít (veta 3.2.11) a z definície jednostranných derivácií priamo vyplýva nasledujúca veta.

Veta 4.1.2.
Funkcia f má v bode x_0 deriváciu $f'(x_0)$ práve vtedy, ak má v bode x_0 jednostranné derivácie $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ a platí $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Príklad 4.1.6.
Funkcia $f\colon\ y = |x|$ je spojitá v každom bode $D(f)$, t. j. aj v bode $x_0 = 0$.
Funkcia f nemá v bode $x_0 = 0$ deriváciu, pretože pre jednostranné derivácie platí:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \tfrac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \tfrac{-x}{x} = -1, \qquad f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \tfrac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \tfrac{x}{x} = 1. \ \blacksquare$$

Príklad 4.1.7.
Vypočítajte deriváciu funkcie $f\colon\ y = \operatorname{sgn} x$ v bode $x_0 \in R$.

Riešenie.
Funkcia f je spojitá v každom bode $x_0 \in R - \{0\}$ a v bode 0 je nespojitá (obr. 2.1.5).

Keďže $f(x_0) = -1$ pre $x_0 \in (-\infty\,; 0)$, potom na základe príkladu 4.1.4 platí $f'(x_0) = 0$. Analogicky zo vzťahu $f(x_0) = 1$ pre $x_0 \in (0\,; \infty)$ vyplýva $f'(x_0) = 0$.

[4]Priamky $y = kx + a$, $y = qx + b$ (t. j. $kx - y + a = 0$, $qx - y + b = 0$) sú na seba kolmé, ak sú na seba kolmé ich normálové vektory $(k; -1)$, $(q; -1)$. To znamená, ak platí $kq + (-1)(-1) = kq + 1 = 0$, t. j. $q = -\frac{1}{k}$.

Ak $x_0 = 0$, potom $f'(0) = \infty$. Vyplýva to z nasledujúcich vzťahov

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1-0}{x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -(-\infty) = \infty,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty. \blacksquare$$

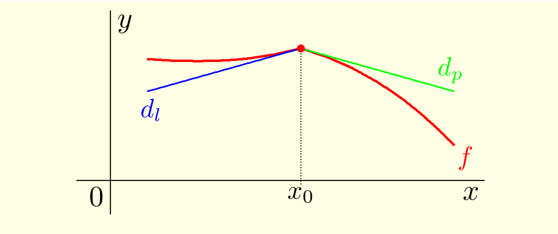
Už sme spomínali, že ak má funkcia f v bode x_0 vlastnú deriváciu, potom je v tomto bode spojitá (veta 4.1.1). Analogické tvrdenie platí aj pre jednostranné derivácie.

Veta 4.1.3.
Ak má funkcia f v bode x_0 vlastnú deriváciu zľava [resp. vlastnú deriváciu sprava], potom je v bode x_0 spojitá zľava [resp. spojitá sprava].

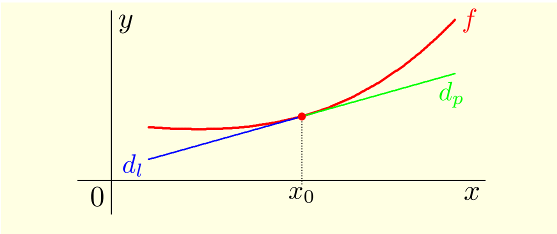
Dôsledok 4.1.3.a.
Ak má funkcia f v bode x_0 obidve jednostranné derivácie vlastné, potom je v x_0 spojitá.

Poznámka 4.1.3.
Z geometrického hľadiska predstavujú jednostranné derivácie funkcie f v bode x_0 smernice tzv. **ľavej** [resp. **pravej**] **poldotyčnice ku grafu funkcie** f **v bode** $[x_0; f(x_0)]$. To znamená polpriamky vychádzajúce z bodu x_0 a dotýkajúce sa grafu funkcie f v bode $[x_0; f(x_0)]$ v ľavom [resp. pravom] okolí bodu x_0.
Graf funkcie, ktorá má v bode $[x_0; f(x_0)]$ dve rôznobežné jednostranné poldotyčnice d_l, d_p je na obrázku 4.1.4. Ak má funkcia f v bode x_0 obe jednostranné derivácie a platí $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, potom sa poldotyčnice spoja do jednej dotyčnice (obr. 4.1.5).

Poznámka 4.1.4.
Funkcia $f\colon\ y = |x|$ z príkladu 4.1.6 je spojitá v bode 0. V bode 0 má rôzne jednostranné derivácie $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. To znamená, že v tomto bode nemá deriváciu.



Obr. 4.1.4: Rôznobežné poldotyčnice.



Obr. 4.1.5: Jednostranné poldotyčnice.

Uvažujme reálnu funkciu $y = f(x)$. Označme $M \subset D(f)$ množinu všetkých bodov, v ktorých má funkcia f (konečnú) deriváciu. Ak $M \neq \emptyset$, potom môžeme definovať pre všetky $x_0 \in M$ funkciu g vzťahom $g(x_0) = f'(x_0)$. Funkciu g nazývame **derivácia funkcie** f **na množine** M a označujeme f', y', resp. $y = f'(x)$, $x \in M$, resp. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Poznámka 4.1.5.
Derivácia funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ je číslo $f'(x_0)$, prípadne $\pm\infty$ a derivácia funkcie f na množine $A \subset D(f)$ je funkcia $y = f'(x)$, $x \in A$.

Množina M, na ktorej je definovaná funkcia f' je obyčajne interval alebo zjednotenie intervalov. Derivácia funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$, podobne ako spojitosť, znamená obojstrannú deriváciu $f'(x)$ pre všetky $x\in(a\,;\,b)$ a jednostranné derivácie $f'_+(a)$, $f'_-(b)$.

Z definície derivácie funkcie f na množine M a z viet 4.1.1 a 4.1.3 vyplýva priamo nasledujúce tvrdenie.

Veta 4.1.4.
Ak má funkcia f na množine M deriváciu f', potom je na množine M spojitá.

Významný je tiež prípad, keď je funkcia f' spojitá na množine, špeciálne na intervale. V tomto prípade zavádzame pojem hladká funkcia. Hovoríme, že **funkcia f je hladká na intervale** $I\subset R$, ak je funkcia f' na intervale I spojitá.

Poznámka 4.1.6.
Predpokladajme, že je funkcia f hladká na intervale $(a\,;\,b)$. Z geometrického hľadiska to znamená, že ak bod x prebieha cez celý interval $(a\,;\,b)$, potom sa hodnota smernice dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[x; f(x)]$ mení „spojite“.

Príklad 4.1.8.
Vypočítajte derivácie funkcií $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{e}^x$ na množine R.

Riešenie.
Z príkladu 3.2.41 vyplýva, že pre všetky $x_0\in R$ platí:

$$[\sin x_0]'=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\cos x_0,\qquad [\cos x_0]'=\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=-\sin x_0.$$

To znamená, že pre všetky $x\in R$ platí $[\sin x]'=\cos x$, $[\cos x]'=-\sin x$.
Pre všetky $x\in R$ na základe príkladu 3.2.48 platí:

$$[\mathrm{e}^x]'=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h}=\lim_{h\to 0}\mathrm{e}^x\,\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}=\mathrm{e}^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}=\mathrm{e}^x\cdot 1=\mathrm{e}^x\,.\ \blacksquare$$

Príklad 4.1.9.
Nájdite dotyčnicu a normálu ku funkcii $f\colon\ y=\sin x$ v bodoch 0, $\frac{\pi}{2}$, π.

Riešenie.
Pre hodnoty funkcie f v bodoch $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$, $x_3=\pi$ platí:

$$f(x_1)=\sin 0=0,\qquad f(x_2)=\sin\tfrac{\pi}{2}=1,\qquad f(x_3)=\sin\pi=0.$$

Z príkladu 4.1.8 vyplýva, že pre hodnoty funkcie f' v bodoch x_1, x_2, x_3 platí:

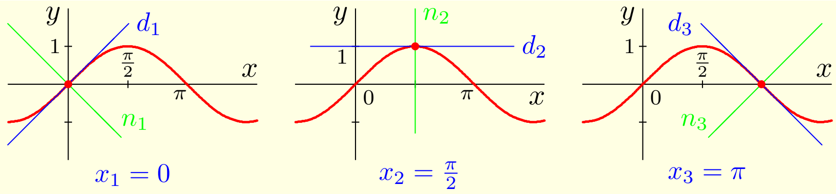
$$f'(x_1)=\cos 0=1,\qquad f'(x_2)=\cos\tfrac{\pi}{2}=0,\qquad f'(x_3)=\cos\pi=-1.$$

Pre rovnice príslušných dotyčníc d_1, d_2, d_3 na základe vzťahu (4.2) platí:

$$d_1\colon\ y=0+1(x-0),\qquad d_2\colon\ y=1+0\left(x-\tfrac{\pi}{2}\right),\qquad d_3\colon\ y=0-1(x-\pi).$$

Potom rovnice dotyčníc (obr. 4.1.6) sú $d_1\colon\ y=x$, $d_2\colon\ y=1$, $d_3\colon\ y=\pi-x$.
Pre rovnice príslušných normál n_1, n_2, n_3 analogicky zo vzťahu (4.3) vyplýva:

$$n_1\colon\ y=0-1(x-0)=-x,\qquad n_2\colon\ x=\tfrac{\pi}{2},\qquad n_3\colon\ y=0+1(x-\pi)=x-\pi.\ \blacksquare$$



Obr. 4.1.6: Dotyčnice a normály k funkcii $y = \sin x$ (príklad 4.1.9).

Príklad 4.1.10.
Nájdite rovnice dotyčníc k funkciám f a $|f|$ v bode x_0, ak $x_0 \in D(f)$ je ľubovoľné a f je daná vzťahom $y = \sqrt{1-x^2}$ pre $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$ a $y = -\sqrt{1-(x-2)^2}$ pre $x \in \langle 1\,;\,3\rangle$.

Riešenie.
Pre všetky $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$ platí $|f(x)| = f(x)$ a pre všetky $x \in \langle 1\,;\,3\rangle$ platí $|f(x)| = -f(x)$.
Grafy funkcií f a $|f|$ tvoria dve polkružnice (obr. 4.1.7) s polomerom 1 a so stredmi v bode $[0;0]$ a v bode $[2;0]$. Na intervale $\langle -1\,;\,1\rangle$ sú funkcie f a $|f|$ totožné. Z geometrickej predstavy je zrejmé, že grafy týchto funkcií majú dotyčnice vo všetkých bodoch.
Najprv vypočítame derivácie funkcií $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = \sqrt{1-(x-2)^2}$. Platí

$$\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pre } \ x \in (-1\,;\,1)\,,$$

$$\left[(1-(x-2)^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{[1-(x-2)^2]^{-\frac{1}{2}}}{2}[-2(x-2)] = \frac{2-x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} \quad \text{pre } \ x \in (1\,;\,3)\,.$$

Potom pre rovnicu dotyčnice ku grafu f a aj $|f|$ v bode $x_0 \in (-1\,;\,1)$ platí:

$$d\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = \sqrt{1-x_0^2} - \frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}(x-x_0) = \frac{1-xx_0}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

Pre rovnicu dotyčnice ku grafu f v bode $x_0 \in (1\,;\,3)$ platí:

$$d\colon\ y = -\sqrt{1-(x_0-2)^2} + \frac{x_0-2}{\sqrt{1-(x_0-2)^2}}(x-x_0) = \frac{-1+(x-2)(x_0-2)}{\sqrt{1-(x_0-2)^2}}$$

a pre rovnicu dotyčnice ku grafu $|f|$ v bode $x_0 \in (1\,;\,3)$ platí:

$$d\colon\ y = \sqrt{1-(x_0-2)^2} - \frac{x_0-2}{\sqrt{1-(x_0-2)^2}}(x-x_0) = \frac{1-(x-2)(x_0-2)}{\sqrt{1-(x_0-2)^2}}.$$

Keďže je výraz $\sqrt{1-x^2}$ nezáporný pre všetky $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$, potom platí:

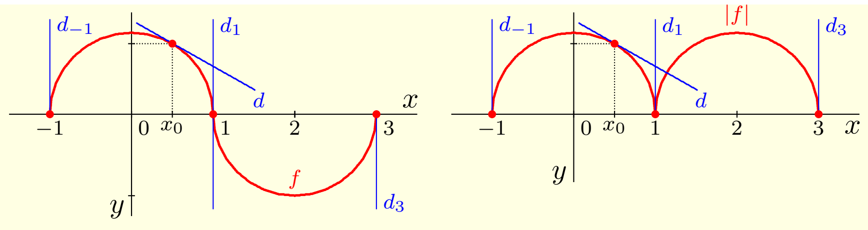
$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \infty, \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty.$$

Analogicky platí $f'_+(1) = -\infty$, $f'_-(3) = \infty$. Potom dotyčnica bez smernice ku grafom funkcií f a $|f|$ má v bode $[-1;0]$ tvar $d_{-1}\colon\ x = -1$, v bode $[1;0]$ tvar $d_1\colon\ x = 1$ a v bode $[3;0]$ tvar $d_3\colon\ x = 3$. Na obrázku 4.1.7 sú znázornené iba poldotyčnice. ■

4.1.3 Základné vety pre výpočet derivácií

Pri praktickom výpočte derivácií, t. j. pri **derivovaní** rôznych funkcií spravidla nepoužívame definíciu. Používame rôzne vzorce a pravidlá, z ktorých si niektoré odvodíme.

Veta 4.1.5.
Nech majú funkcie f, g derivácie na množine $M \neq \emptyset$ a nech $c \in R$.
Potom existujú derivácie funkcií cf, $f \pm g$, fg na množine M a derivácia funkcie $\frac{f}{g}$ na množine $M_1 = \{x \in M\,;\, g(x) \neq 0\}$. Navyše pre všetky $x \in M$, resp. $x \in M_1$ platí:



Obr. 4.1.7: Funkcie f a $|f|$ z príkladu 4.1.10 a ich dotyčnice.

a) $(cf)'(x) = cf'(x)$,

b) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,

b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

d) $\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Dôkaz.
a), b) Pre všetky $x \in M$ na základe vety 3.2.9 platí:

$$(cf)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(cf)(x+h)-(cf)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = cf'(x),$$

$$(f \pm g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\pm g)(x+h)-(f\pm g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]\pm[g(x+h)-g(x)]}{h} = f'(x) \pm g'(x).$$

c) Nech $x \in M$. Potom z definície derivácie vyplýva:

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h)\right] + \lim_{h\to 0} \left[f(x)\, \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

d) Nech $x \in M_1$, potom platí:

$$\left[\frac{1}{g}\right]'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{h\, g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Z toho na základe časti c) vyplýva:

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \left[f\frac{1}{g}\right]'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \blacksquare$$

Poznámka 4.1.7.
Vzorce z predchádzajúcej vety (vrátane dôkazu) zvykneme stručne zapisovať

$$(cf)' = cf', \quad (f\pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left[\frac{1}{g}\right]' = \frac{-g'}{g^2}, \quad \left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

Príklad 4.1.11.
Vypočítajte derivácie funkcií $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$.

Riešenie.
Pre všetky reálne $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z$, platí:

$$[\operatorname{tg} x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{[\sin x]'\cos x - \sin x[\cos x]'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x[-\sin x]}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Analogicky pre všetky reálne $x \neq k\pi$, kde $k \in Z$, platí:

$$[\operatorname{cotg} x]' = \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{[\cos x]'\sin x - \cos x[\sin x]'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}. \blacksquare$$

Poznámka 4.1.8.
Z vety 4.1.5 a), b) vyplýva vzťah $[c_1f_1 + c_2f_2]' = c_1f_1' + c_2f_2'$, ktorý môžeme zovšeobecniť pre konečný počet funkcií $f_1, \ldots, f_n$ a $c_1, \ldots, c_n \in R$, $n \in N$ nasledujúcim spôsobom

$$[c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n]' = c_1f_1' + c_2f_2' + \cdots + c_nf_n', \quad \text{t. j.} \quad \Big[\sum_{k=1}^{n} c_kf_k\Big]' = \sum_{k=1}^{n} c_kf_k'.$$

Poznámka 4.1.9.
Vzťah c) vo vete 4.1.5 môžeme rozšíriť pre tri funkcie f_1, f_2, f_3 na vzťah

$$[f_1f_2f_3]' = [(f_1f_2)f_3]' = (f_1'f_2 + f_1'f_2)f_3 + f_1f_2f_3' = f_1'f_2f_3 + f_1'f_2f_3 + f_1f_2f_3'$$

a zovšeobecniť pre konečný počet funkcií $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n \in N$

$$[f_1f_2 \cdots f_n]' = f_1'f_2 \cdots f_n + f_1f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1f_2 \cdots f_n'.$$

Príklad 4.1.12.
Vypočítajte deriváciu funkcie $f\colon\ y = \frac{x^3}{x^2-2}$.

Riešenie.
Keďže $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, potom pre všetky $x \in R - \{\pm\sqrt{2}\}$ platí:

$$f'(x) = \frac{(x^3)'(x^2-2) - x^3(x^2-2)'}{(x^2-2)^2} = \frac{3x^2(x^2-2) - x^3(2x-0)}{(x^2-2)^2} = \frac{x^4-6x^2}{(x^2-2)^2}. \ \blacksquare$$

Príklad 4.1.13.
Nech $n \in N$. Vypočítajte deriváciu funkcie $f\colon\ y = x^{-n}$.

Riešenie.
Z príkladu 4.1.5 a poznámky 4.1.7 vyplýva, že pre všetky $x \in R - \{0\}$ platí:

$$[x^{-n}]' = \Big[\frac{1}{x^n}\Big]' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1}x^{-2n} = -nx^{-n-1}. \ \blacksquare$$

Príklad 4.1.14.
Nájdite rovnicu priamky, ktorá je dotyčnicou grafu funkcie $f\colon\ y = \frac{x}{x-1}$ a je rovnobežná s priamkou $x + y - 2 = 0$.

Riešenie.
Pre všetky $x \in D(f) = R - \{1\}$ platí:

$$f'(x) = \Big[\frac{x}{x-1}\Big]' = \frac{1\cdot(x-1) - x(1-0)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

Smernica priamky $x + y - 2 = 0$, t. j. $y = -x + 2$ je $k = -1$
Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $[x_0; f(x_0)]$ má rovnicu $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ a smernicu $k = f'(x_0)$. Takže hľadáme $x_0 \in D(f)$ tak, aby

$$f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1, \quad \text{t. j.} \quad (x_0 - 1)^2 = 1.$$

Táto rovnica má dve riešenia $x_0 = 0$, resp. $x_0 = 2$. Z toho vyplývajú dva dotykové body $[0; 0]$, resp. $[2; 2]$ a teda aj dve dotyčnice, ktorých rovnice sú

$$y = 0 - 1(x - 0) = -x, \quad \text{resp.} \quad y = 2 - 1(x - 2) = 4 - x. \ \blacksquare$$

Veta 4.1.6 (O derivácii inverznej funkcie).
Nech $y = f(x)$ je spojitá a rýdzomonotónna funkcia na intervale $I \subset R$.
Nech x_0 je vnútorný bod intervalu I a nech existuje $f'(x_0) \neq 0$. Označme $y_0 = f(x_0)$.
Potom inverzná funkcia $x = f^{-1}(y)$ má deriváciu v bode y_0 a platí:
$$[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\Big|_{x_0=f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Dôkaz.
Z vety 3.3.14 vyplýva, že funkcia f je prostá a teda inverzná funkcia f^{-1} existuje.
Ak použijeme substitúciu $y = f(x)$, t. j. $x = f^{-1}(y)$, potom z definície derivácie vyplýva:
$$[f^{-1}]'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacksquare$$

Poznámka 4.1.10.
Ak je podmienka $f'(x_0) \neq 0$ splnená pre všetky $x_0 \in I$, potom môžeme zjednodušene písať
$$[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \qquad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}f^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}}.$$

Príklad 4.1.15.
a) Funkcia $f\colon\ y = \mathrm{e}^x$ je na R spojitá a rastúca. Pre všetky $x \in R$ platí $f'(x) = \mathrm{e}^x \neq 0$.
Pre deriváciu inverznej funkcie $f^{-1}\colon\ x = \ln y$, $y > 0$ potom platí:
$$[\ln y]' = [f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{[\mathrm{e}^x]'} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$
b) Funkcia $f\colon\ y = \sin x$ je na $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ spojitá, rastúca a platí $f'(x) = \cos x > 0$.
Potom $\cos x = \sqrt{1-[\sin x]^2}$ a pre deriváciu funkcie $f^{-1}\colon\ x = \arcsin y$, $y \in (-1\,;\,1)$ platí:
$$[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin\arcsin y]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$
c) Funkcia $f\colon\ y = \cos x$ je na $(0\,;\,\pi)$ spojitá, klesajúca a $f'(x) = -\sin x < 0$.
Keďže $\sin x = \sqrt{1-[\cos x]^2}$, $x \in (0\,;\,\pi)$, potom pre $f^{-1}\colon\ x = \arccos y$, $y \in (-1\,;\,1)$ platí:
$$[\arccos y]' = \frac{1}{[\cos x]'} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-[\cos\arccos y]^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$
d) Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{tg} x$ je na $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ spojitá, rastúca a $f'(x) = \cos^{-2} x \neq 0$.
Pre deriváciu inverznej funkcie $f^{-1}\colon\ x = \operatorname{arctg} y$, $y \in R$ platí:
$$[\operatorname{arctg} y]' = \frac{1}{[\operatorname{tg} x]'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{1}{[\operatorname{tg}\operatorname{arctg} y]^2+1} = \frac{1}{y^2+1}.$$
e) Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{cotg} x$ je na $(0\,;\,\pi)$ spojitá, klesajúca a $f'(x) = -\sin^{-2} x \neq 0$.
Pre deriváciu inverznej funkcie $f^{-1}\colon\ x = \operatorname{arccotg} y$, $y \in R$ platí:
$$[\operatorname{arccotg} y]' = \frac{1}{[\operatorname{cotg} x]'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \frac{-1}{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{-1}{1+[\operatorname{cotg}\operatorname{arccotg} y]^2} = \frac{-1}{y^2+1}.$$
f) Nech $n \in N$ je ľubovoľné. Funkcia $f\colon\ y = x^n$ je na $(0\,;\,\infty)$ spojitá a rastúca. Keďže $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$, potom pre inverznú funkciu $f^{-1}\colon\ x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$, $y \in (0\,;\,\infty)$ platí:
$$[y^{\frac{1}{n}}]' = \frac{1}{[x^n]'} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{ny^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n}. \blacksquare$$

Poznámka 4.1.11.
Funkcie $y = \arcsin x$ a $y = \arccos x$ majú derivácie tiež v bodoch ± 1. Lenže na ich výpočet nemôžeme použiť vetu 4.1.6. Musíme ju najprv upraviť.

Veta 4.1.7.
Nech $y = f(x)$ je spojitá a rýdzomonotónna (rastúca, resp. klesajúca) funkcia na intervale $I \subset R$. Nech $x_0 \in I$ je také, že platí $f'(x_0) = 0$. Označme $y_0 = f(x_0)$.
Potom platí $[f^{-1}]'(y_0) = \infty$ pre f rastúcu a $[f^{-1}]'(y_0) = -\infty$ pre f klesajúcu.

Dôkaz.
Ak použijeme substitúciu $y = f(x)$, t. j. $x = f^{-1}(y)$, potom z predpokladov vyplýva:
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{y\to y_0} \tfrac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = 0.$$
Predpokladajme, že je funkcia f rastúca (ak je klesajúca, dôkaz je analogický). Potom pre všetky $x \in I$ platí $f(x) - f(x_0) < 0$ pre $x < x_0$ a $f(x) - f(x_0) > 0$ pre $x > x_0$.
To znamená, že pre všetky $x \in I$, $x \neq x_0$ platí:
$$0 < \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \tfrac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}.$$
Táto nerovnosť platí pre všetky $y \neq y_0$. Takže sú splnené predpoklady vety 3.2.6 a platí:
$$[f^{-1}]'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \tfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \infty. \blacksquare$$

Príklad 4.1.16.
a) Funkcia $f\colon\ y = \sin x$ je na $\left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ spojitá, rastúca a platí:
$$f'(-\tfrac{\pi}{2}) = \cos(-\tfrac{\pi}{2}) = 0, \qquad f'(\tfrac{\pi}{2}) = \cos\tfrac{\pi}{2} = 0.$$
Potom pre deriváciu inverznej funkcie $f^{-1}\colon\ x = \arcsin y$ v bodoch $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$ platí:
$$[\arcsin(-1)]' = [\arcsin 1]' = \infty.$$
b) Funkcia $f\colon\ y = \cos x$ je na $\langle 0\,;\, \pi \rangle$ spojitá, klesajúca a platí:
$$f'(0) = -\sin 0 = 0, \qquad f'(\pi) = -\sin\pi = 0.$$
Pre deriváciu inverznej funkcie $f^{-1}\colon\ x = \arccos y$ v bodoch $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$ platí:
$$[\arccos(-1)]' = [\arccos 1]' = -\infty. \blacksquare$$

Veta 4.1.8 (O derivácii zloženej funkcie).
Nech $F(x) = g(f(x))$, $x \in M \subset R$ je zložená funkcia s vnútornou zložkou $u = f(x)$, $x \in M$ a vonkajšou zložkou $y = g(u)$, $u \in M_1$, kde $f(M) \subset M_1$. Nech $x_0 \in M$, $u_0 = f(x_0)$.
Ak existujú derivácie $f'(x_0)$, $g'(u_0)$, potom tiež existuje derivácia $F'(x_0)$ a platí:
$$F'(x_0) = [g(f(x_0))]' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(u_0) \cdot f'(x_0).$$

Dôkaz.
Z predpokladov vyplýva, že existujú vlastné limity
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad g'(u_0) = \lim_{u\to u_0} \tfrac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0}.$$
Ak použijeme substitúciu $u = f(x)$, potom z definície derivácie a z vety 3.2.9 vyplýva:
$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \tfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \tfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{u\to u_0} \tfrac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(u_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \blacksquare$$

Poznámka 4.1.12.
Ak existujú derivácie f' na M a g' na M_1, potom môžeme zjednodušene písať
$$F'(x) = [g(f)]'(x) = g'(u) \cdot f'(x), \qquad \text{resp. } \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Príklad 4.1.17.
Vypočítajte deriváciu funkcie $F\colon\ y = \sqrt{1-x^2},\ x\in\langle -1\,;\,1\rangle$.

Riešenie.
Ak označíme $f\colon\ u = 1-x^2,\ x\in\langle -1\,;\,1\rangle$ a $g\colon\ y=\sqrt{u},\ u\in(0\,;\,\infty)$, potom funkciu F môžeme zapísať v tvare $F(x) = g(f(x)) = g(1-x^2)$. Pre derivácie f', g' platí:
$$f'(x) = [1-x^2]' = -2x,\ x\in\langle -1\,;\,1\rangle, \quad g'(u) = \left[u^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{u}},\ u\in(0\,;\,\infty).$$
Z toho vyplýva, že pre $f(x)\neq 0$, t. j. $x\in(-1\,;\,1)$ platí:
$$F'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Ešte musíme vypočítať derivácie v krajných bodoch $x=\pm 1$, t. j. derivácie $F'_+(-1)$, $F'_-(1)$.
Keďže $F(\pm 1) = 0$, $1+x>0$ pre $x\to -1^+$ a $1-x>0$ pre $x\to 1^-$, potom platí:
$$F'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{1-x^2}-0}{x+1} = \lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}}{\sqrt{(1+x)^2}} = \lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{0} = \infty.$$
$$F'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}-0}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(1-x)(1+x)}}{\sqrt{(1-x)^2}} = -\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = -\frac{2}{0} = -\infty. \ \blacksquare$$

Poznámka 4.1.13.
Pri praktickom derivovaní zložených funkcií (aj viacnásobne zložených) výsledok zvyčajne píšeme priamo a jednotlivé zložky nevypisujeme.

Príklad 4.1.18.
a) Funkciu $f\colon\ y=a^x,\ x\in R$, kde $a>0$, $a\neq 1$ môžeme derivovať ako zloženú funkciu
$$[a^x]' = \left[\mathrm{e}^{\ln a^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x\ln a}\right]' = \mathrm{e}^{x\ln a}\cdot[x\ln a]' = \mathrm{e}^{x\ln a}\cdot \ln a = a^x\ln a.$$
b) Funkciu $f\colon\ y=x^a,\ x>0$, kde $a\in R$ môžeme tiež derivovať ako zloženú funkciu
$$[x^a]' = \left[\mathrm{e}^{\ln x^a}\right]' = \left[\mathrm{e}^{a\ln x}\right]' = \mathrm{e}^{a\ln x}\cdot[a\ln x]' = \mathrm{e}^{a\ln x}\cdot\frac{a}{x} = x^a\cdot\frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$
c) Pre deriváciu funkcie $f\colon\ y=x^x,\ x>0$ platí:
$$[x^x]' = \left[\mathrm{e}^{\ln x^x}\right]' = \left[\mathrm{e}^{x\ln x}\right]' = \mathrm{e}^{x\ln x}\cdot[x\ln x]' = x^x\left[1\cdot\ln x + x\cdot\tfrac{1}{x}\right] = x^x[1+\ln x]. \ \blacksquare$$

Príklad 4.1.19.
Vypočítajte deriváciu funkcie f definovanej $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$ pre $x\neq 0$ a $f(0)=0$.

Riešenie.
Pre všetky $x\neq 0$ platí:
$$f'(x) = \left[x^2\cos\tfrac{1}{x}\right]' = 2x\cos\tfrac{1}{x} + x^2\left[-\sin\tfrac{1}{x}\right]\cdot\left[-\tfrac{1}{x^2}\right] = 2x\cos\tfrac{1}{x} + \sin\tfrac{1}{x}.$$
Keďže je funkcia $\cos\frac{1}{x}$ ohraničená, potom (dôsledok 3.2.4.c) platí:
$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\cos\frac{1}{h}-0}{h-0} = \lim_{h\to 0} h\cos\tfrac{1}{h} = 0. \ \blacksquare$$

Na záver uvedieme jeden dôsledok vety o derivácii zloženej funkcie, ktorý môže v mnohých prípadoch zjednodušiť derivovanie zložitejších funkcií.

Dôsledok 4.1.8.a (O logaritmickej derivácii).
Nech $y = f(x)$, $x \in M$ je reálna funkcia. Nech $x_0 \in M$ je také, že existuje $f'(x_0)$.
Ak $f(x_0) > 0$, potom platí $f'(x_0) = f(x_0) \cdot [\ln f(x_0)]'$.

Dôkaz.
Ak označíme $g\colon u = \ln y$, potom funkcia $F\colon u = g(f(x)) = \ln f(x)$ spĺňa predpoklady vety 4.1.8. Potom existuje derivácia $F'(x_0) = [\ln f(x_0)]'$ a platí:

$$[\ln f(x_0)]' = \tfrac{1}{f(x_0)} \cdot f'(x_0) = \tfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}, \qquad \text{t. j.} \quad f'(x_0) = f(x_0) \cdot [\ln f(x_0)]'. \blacksquare$$

Výraz $[\ln f(x_0)]' = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ nazývame **logaritmická derivácia funkcie f v bode x_0**. Ak sú predpoklady dôsledku splnené pre všetky $x_0 \in M$, potom hovoríme o **logaritmickej derivácii funkcie f na množine M**.

Príklad 4.1.20.
Pre funkcie z príkladu 4.1.18 a), b), c) pomocou logaritmického derivovania platí:

a) Pre $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$ platí $[a^x]' = a^x\, [\ln a^x]' = a^x\, [x \ln a]' = a^x \ln a$.

b) Pre $x > 0$, $a \in R$ platí $[x^a]' = x^a [\ln x^a]' = x^a [a \ln x]' = \frac{x^a a}{x} = a x^{a-1}$.

c) Pre $x > 0$ platí $[x^x]' = x^x [\ln x^x]' = x^x [x \ln x]' = x^x [\ln x + \frac{x}{x}] = x^x [1 + \ln x]$. $\blacksquare$

Príklad 4.1.21.
Nech f, g sú reálne funkcie definované na množine $M \subset R$. Ak pre všetky $x \in M$ platí $f(x) > 0$, potom na množine M má zmysel funkcia $F = f^g$. Pre jej deriváciu platí:

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)} \left[g(x) \ln f(x)\right]' = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + \tfrac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right]. \blacksquare$$

4.1.4 Derivovanie elementárnych funkcií

Nájsť deriváciu danej funkcie v tvare analytického vzorca je pomerne častá a dôležitá úloha pri riešení mnohých problémov nielen v matematickej analýze, ale aj v praxi. Základom týchto vzorcov sú elementárne funkcie a ich derivácie.

Na záver tejto časti zhrnieme vzorce derivácií základných elementárnych funkcií do tabuľky 4.1.1. Pre praktické potreby derivovania je nevyhnutné si tieto vzorce zapamätať.

Príklad 4.1.22.
Vypočítajte deriváciu funkcie $f\colon\ y = \log_a x$, $x > 0$, kde $a > 0$, $a \neq 1$.

Riešenie.
Pretože $\ln a$ je vzhľadom na x konštanta, na základe vety 3.1.7 a príkladu 4.1.15 platí:

$$[\log_a x]' = \left[\tfrac{\ln x}{\ln a}\right]' = \tfrac{[\ln x]'}{\ln a} = \tfrac{1}{x \ln a}. \blacksquare$$

Vzorec	podmienky platnosti	Vzorec	podmienky platnosti
$[c]' = 0,$	$x \in R,\ c \in R$	$[x]' = 1,$	$x \in R$
$[x^n]' = nx^{n-1},$	$x \in R,\ n \in N$	$[x^a]' = ax^{a-1},$	$x > 0,\ a \in R$
$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x,$	$x \in R$	$[a^x]' = a^x \ln a,$	$x \in R,\ a > 0$
$[\ln x]' = \frac{1}{x},$	$x > 0$	$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\ln \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x},$	$x \neq 0$	$[\log_a \lvert x \rvert]' = \frac{1}{x \ln a},$	$x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\sin x]' = \cos x,$	$x \in R$	$[\cos x]' = -\sin x,$	$x \in R$
$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x},$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$	$[\operatorname{cotg} x]' = \frac{-1}{\sin^2 x},$	$x \neq k\pi,\ k \in Z$
$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1\,;\,1)$	$[\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1\,;\,1)$
$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2},$	$x \in R$	$[\operatorname{arccotg} x]' = \frac{-1}{1+x^2},$	$x \in R$
$[\sinh x]' = \cosh x,$	$x \in R$	$[\cosh x]' = \sinh x,$	$x \in R$
$[\operatorname{tgh} x]' = \frac{1}{\cosh^2 x},$	$x \in R$	$[\operatorname{cotgh} x]' = \frac{-1}{\sinh^2 x},$	$x \neq 0$
$[\operatorname{argsinh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$	$x \in R$	$[\operatorname{argcosh} x]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$	$x > 1$
$[\operatorname{argtgh} x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x \in (-1\,;\,1)$	$[\operatorname{argcotgh} x]' = \frac{1}{1-x^2},$	$x \in R - \langle -1\,;\,1 \rangle$

Tabuľka 4.1.1: Derivácie základných elementárnych funkcií.

Príklad 4.1.23.
Vypočítajte deriváciu funkcie $f\colon\ y = \log_a |x|,\ x \neq 0$, kde $a > 0,\ a \neq 1$.

Riešenie.
Ak $x > 0$, potom z príkladu 4.1.22 vyplýva $[\log_a |x|]' = [\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$.
Ak $x < 0$, t. j. $-x > 0$, potom na základe vety o derivácii zloženej funkcie platí:

$$[\log_a |x|]' = [\log_a (-x)]' = \frac{1}{-x \ln a} \cdot (-x)' = \frac{-1}{x \ln a} \cdot (-1) = \frac{1}{x \ln a}. \ \blacksquare$$

Poznámka 4.1.14.
Ak položíme v príklade 4.1.23 $a = \mathrm{e}$, dostaneme $[\ln |x|]' = \frac{1}{x}$ pre všetky $x \neq 0$.

Príklad 4.1.24.
a) Pre všetky $x \in R$ platí $[\sinh x]' = \cosh x$, $[\cosh x]' = \sinh x$, pretože

$$\left[\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right]' = \frac{\mathrm{e}^x - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \left[\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right]' = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

b) Zo vzťahu $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ vyplýva, že pre všetky $x \in R$ platí:

$$[\operatorname{tgh} x]' = \left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{[\cosh x]^2} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

c) Pre všetky $x \in R,\ x \neq 0$ platí:

$$[\operatorname{cotgh} x]' = \left[\frac{\cosh x}{\sinh x}\right]' = \frac{\sinh x \sinh x - \cosh x \cosh x}{[\sinh x]^2} = \frac{-1}{\sinh^2 x}. \ \blacksquare$$

Príklad 4.1.25.
a) Funkcia $f\colon\ y=\sinh x$ je na R spojitá, rastúca a platí $f'(x)=\cosh x>0$.
Potom $\cosh x=\sqrt{1+[\sinh x]^2}$ a pre $f^{-1}\colon\ x=\operatorname{argsinh} y,\ y\in R$ platí:

$$[\operatorname{argsinh} y]'=\frac{1}{[\sinh x]'}=\frac{1}{\cosh x}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+[\sinh \operatorname{argsinh} y]^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

b) Funkcia $f\colon\ y=\cosh x$ je na $(0\,;\,\infty)$ rastúca, spojitá a platí $f'(x)=\sinh x>0$.
Potom $\sinh x=\sqrt{[\cosh x]^2-1}$ a pre $f^{-1}\colon\ x=\operatorname{argcosh} y,\ y\in(1\,;\,\infty)$ platí:

$$[\operatorname{argcosh} y]'=\frac{1}{[\sinh x]'}=\frac{1}{\cosh x}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x-1}}=\frac{1}{\sqrt{[\cosh \operatorname{argcosh} y]^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

c) Funkcia $f\colon\ y=\operatorname{tgh} x$ je na R spojitá, rastúca a platí $f'(x)=\cosh^{-2} x\neq 0$.
Pre deriváciu inverznej funkcie $f^{-1}\colon\ x=\operatorname{argtgh} y,\ y\in(-1\,;\,1)$ platí:

$$[\operatorname{argtgh} y]'=\frac{1}{[\operatorname{tgh} x]'}=\frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 x}}=\frac{1}{\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}}=\frac{1}{1-[\operatorname{tgh}(\operatorname{argtgh} y)]^2}=\frac{1}{1-y^2}.$$

d) Funkcia $f\colon\ y=\operatorname{cotgh} x$ je na $R-\{0\}$ spojitá, je klesajúca na intervale $(-\infty\,;\,0)$ a na intervale $(0\,;\,\infty)$ a pre všetky $x\neq 0$ platí $f'(x)=\sinh^{-2} x\neq 0$.
Pre deriváciu inverznej funkcie $f^{-1}\colon\ x=\operatorname{argcotgh} y,\ y\in(-\infty\,;\,-1)\cup(1\,;\,\infty)$ platí:

$$[\operatorname{argcotgh} y]'=\frac{1}{[\operatorname{cotgh} x]'}=\frac{-1}{\frac{1}{\sinh^2 x}}=\frac{-1}{[\operatorname{cotgh}(\operatorname{argcotgh} y)]^2-1}=\frac{-1}{y^2-1}=\frac{1}{1-y^2}. \blacksquare$$

Cvičenia

4.1.1. Z definície vypočítajte deriváciu funkcie $y=f(x)$ v bode x_0: ♣

a) $y=x^2+3,\ x_0=0$, b) $y=\cos 2x,\ x_0=\frac{\pi}{4}$, c) $y=\frac{1}{x-1},\ x_0=2$,
d) $y=x(x+2)^2,\ x_0=1$, e) $y=\sin 2x,\ x_0=\frac{\pi}{4}$, f) $y=x^3\sin(x-\pi),\ x_0=\pi$.

4.1.2. Z definície vypočítajte deriváciu funkcie $y=f(x)$: ♣

a) $y=2x^2-5$, b) $y=\sqrt{x^2+1}$, c) $y=\sqrt{x-1}$, d) $y=x-x^2$,
e) $y=\operatorname{cotg} x$, f) $y=2-3x$, g) $y=\frac{1}{x-1}$, h) $y=\mathrm{e}^{-x}$.

4.1.3. Nech $f\colon\ y=2x^2+1$. Nájdite všetky body, pre ktoré platí $f(x)=f'(x)$. ♣

4.1.4. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y=f(x)$ platí: ♣

a) $y=2^{-x^2}$, b) $y=\mathrm{e}^{-\cos x}$, c) $y=\sqrt[x]{x}$, d) $y=\sqrt[3]{x}+1$, e) $y=2^{\operatorname{tg} x}$,
f) $y=x^{(\mathrm{e}^x)}$, g) $y=x^{\sin x}$, h) $y=x^{\ln x}$, i) $y=\mathrm{e}^{\operatorname{tgh} x}$, j) $y=[\ln x]^x$,
k) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, l) $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, m) $y=\mathrm{e}^{x^2-1}$, n) $y=x\sqrt{x}$, o) $y=\sqrt[3]{\cos x}$,
p) $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, q) $y=\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}$, r) $y=x^{x+1}$, s) $y=x^{(x^x)}$, t) $y=(x^x)^x$,
u) $y=\frac{\sqrt[5]{4x}}{5}$, v) $y=\frac{1}{\sin^2 x}$, w) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x^4}}$, x) $y=\frac{1}{\cos x}$, y) $y=\frac{\cos^2 x}{\cos x^2}$.

4.1.5. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y=f(x)$ platí: ♣

a) $y=\frac{x}{\operatorname{tg} x}$, b) $y=\frac{x}{\operatorname{tg}\mathrm{e}^x}$, c) $y=\frac{3^x}{2^x}$, d) $y=\frac{\mathrm{e}^x}{x^3}$, e) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$,
f) $y=x^5\,\mathrm{e}^x$, g) $y=\operatorname{tg}^5 x$, h) $y=\sin x^2$, i) $y=\sqrt{\mathrm{e}^{5x}}$, j) $y=\mathrm{e}^{\sin x}$,
k) $y=|x^3|$, l) $y=x\,|x|$, m) $y=\lfloor x\rfloor$, n) $y=3^{2x}$, o) $y=|\cos x|$,
p) $y=3^{\operatorname{cotg} x}$, q) $y=x^{\sqrt{x}}$, r) $y=x^{\cos x}$, s) $y=x^{x^2+1}$, t) $y=\ln x^3$,
u) $y=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, v) $y=\frac{x^2}{\ln x}$, w) $y=\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$, x) $y=\frac{1}{\ln^2 x}$, y) $y=\frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

4.1.6. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: $\clubsuit$

a) $y = \frac{1+x}{1-x}$, b) $y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, c) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$, d) $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}$,
e) $y = \mathrm{e}^{-\cos^2 x}$, f) $y = \ln\cos x$, g) $y = x^{-5} + x^{-7}$, h) $y = \sqrt{x^5} - \sqrt[3]{x^4}$,
i) $y = \ln\frac{2-x}{2+x}$, j) $y = \frac{x\ln x}{1+\ln x}$, k) $y = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, l) $y = \frac{2\sin x}{\sin x-\cos x}$,
m) $y = \ln\,[1+x^2]$, n) $y = [x^2-1]^3$, o) $y = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x^2}$, p) $y = x^5[\ln x - 1]$,
q) $y = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$, r) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, s) $y = \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, t) $y = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$,
u) $y = (1-2x)^4$, v) $y = \ln^2(x+1)$, w) $y = \ln\,(x^2+1)$, x) $y = \ln\,[1-\sqrt{x}]$.

4.1.7. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: $\clubsuit$

a) $y = \sin\frac{1}{x^2}$, b) $y = \frac{x^2+x+1}{x-1}$, c) $y = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$, d) $y = \frac{1-\sin x}{\sin x+\cos x}$,
e) $y = \mathrm{e}^{\sin x+\cos x}$, f) $y = \sqrt{1-x^4}$, g) $y = \operatorname{cotg}\sqrt{x}$, h) $y = (1-x^2)^{20}$,
i) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, j) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$, k) $y = \frac{1-x^2}{\sqrt{x}}$, l) $y = \frac{x^3}{1+x+x^2}$,
m) $y = x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, n) $y = x^2\,\mathrm{e}^x\sin x$, o) $y = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, p) $y = \operatorname{arccotg}\sqrt{x}$,
q) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, r) $y = \frac{2x\sin x}{x^2-1}$, s) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$, t) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$,
u) $y = x\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$, v) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, w) $y = x\ln x - 1$, x) $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\sqrt{x-1}$.

4.1.8. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: $\clubsuit$

a) $y = \operatorname{tg}\frac{1+x}{x}$, b) $y = \frac{\sin x}{1-\cos x}$, c) $y = \frac{\cos x}{1+\cos x}$, d) $y = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$,
e) $y = \ln^4[x^2+1]$, f) $y = \ln|\sin 2x|$, g) $y = x\sinh x$, h) $y = \ln\operatorname{arccotg} x^2$,
i) $y = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$, j) $y = \ln\frac{x^8-1}{x^8+1}$, k) $y = \arccos\ln\frac{1}{x}$, l) $y = \arccos\frac{3x-1}{4}$,
m) $y = [\sin x]^{\cos x}$, n) $y = [\cos x]^{\sin x}$, o) $y = [\cosh x]^{\ln x}$, p) $y = [x^2+1]^{\operatorname{arctg} x}$,
q) $y = \operatorname{argsinh}\frac{x^2}{4}$, r) $y = \frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, s) $y = \frac{3\operatorname{cotg} x}{\ln(x+1)}$, t) $y = \arcsin\frac{x^2-1}{x^2}$,
u) $y = [\operatorname{tg} x]^{\operatorname{cotg} x}$, v) $y = 3^{\ln[x^2+x+1]}$, w) $y = x^2\ln x - x^3$, x) $y = x + 5\cos^2 x$.

4.1.9. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: $\clubsuit$

a) $y = \arccos\ln x$, b) $y = \ln\sin\mathrm{e}^{2x}$, c) $y = |x^2-1|$, d) $y = \arcsin\ln x$,
e) $y = x\arcsin x$, f) $y = \mathrm{e}^x\cos x$, g) $y = (x-1)\,\mathrm{e}^x$, h) $y = \mathrm{e}^x\arcsin x$,
i) $y = \sqrt{|x-1|}$, j) $y = |x-2|$, k) $y = x\operatorname{cotg} x$, l) $y = \ln\ln\ln\ln x$,
m) $y = \ln|x^2-1|$, n) $y = \ln\,(x^2-1)$, o) $y = \operatorname{tgh} x - x$, p) $y = \ln\arcsin 5x$,
q) $y = \ln\sin x$, r) $y = \ln\arcsin x$, s) $y = \operatorname{argtgh}\operatorname{tg} x$, t) $y = \operatorname{arccotg}\ln x$,
u) $y = \frac{\operatorname{argsinh} x}{x}$, v) $y = \frac{x^2}{\cosh x}$, w) $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, x) $y = \operatorname{arccotg}\ln\frac{1}{x}$.

4.1.10. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: $\clubsuit$

a) $y = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x}$, b) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$, c) $y = 7x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x$,
d) $y = \frac{4x+5}{(x^3+4x-5)^2}$, e) $y = \operatorname{argcosh}\frac{1+x^2}{1-x^2}$, f) $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$,
g) $y = 5\sin^2 x - 2\cos x^3$, h) $y = \sqrt[3]{x^2+3x+2}$, i) $y = (x^3+7x^2-x+1)^4$,
j) $y = (x^3-2)\left[\frac{1}{x^2}+2\right]$, k) $y = 5x\sin 4x - \frac{\ln x}{2x^3}$, l) $y = \frac{1}{2-x} - \operatorname{arctg}(x-2)$,
m) $y = x^6\ln 2 - \sin x$, n) $y = x^6\ln 2 - \sin 10$, o) $y = (1-\sqrt{x})(1+x)$,

p) $y = \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin 2x}$, q) $y = \frac{x \operatorname{arctg} 2x}{x^2 - 4}$, r) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$,
s) $y = x \sin x + \cos x$, t) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, u) $y = e^x[x^3 + x^2 - 2x - 3]$,
v) $y = \frac{x^3}{1+x^6} - \operatorname{arctg} x^3$, w) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$, x) $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

4.1.11. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = x - \sin x \cos x$, b) $y = x^2\sqrt{x} - x\sqrt[3]{x^2}$, c) $y = e^{-x}[x^4 + x^2 + 1]$,
d) $y = \arcsin^2 \frac{1}{x-1}$, e) $y = \frac{\sin x - \sinh x}{\cos x - \cosh x}$, f) $y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{1+\sin x}$,
g) $y = \ln[x + \sqrt{x^2+1}]$, h) $y = \sin\sin\sin\sin x$, i) $y = x + \sqrt[2]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x}$,
j) $y = \operatorname{argtgh} \frac{2x}{x^2+1}$, k) $y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2+1}$, l) $y = \frac{1}{x^3+1} + \ln \frac{x^3}{x^3+1}$,
m) $y = \ln^2 x - \ln\ln x$, n) $y = \sin\cos\sin\cos x$, o) $y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$,
p) $y = \frac{\operatorname{argcotgh} x}{1-x^2}$, q) $y = \ln\cos\frac{x-1}{x}$, r) $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$,
s) $y = |x-1| + |x-2|$, t) $y = \ln|x^2 + 2x + 3|$, u) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x$,
v) $y = \operatorname{arccotg} \frac{3 \operatorname{tg} x + 2}{x}$, w) $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \operatorname{cotg} x$, x) $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x} + \frac{\arccos x}{\arcsin x}$.

4.1.12. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = \operatorname{arccotg} \operatorname{tg} x$, b) $y = \operatorname{arctg} \operatorname{cotg} x$, c) $y = \arcsin \sin x$,
d) $y = \ln \frac{(x-1)^2(x-2)}{x-3}$, e) $y = \ln \frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$, f) $y = \sqrt{\frac{3\sin x - 2\cos x}{5}}$,
g) $y = \operatorname{cotg} \operatorname{arctg} x$, h) $y = \operatorname{tg} \operatorname{arccotg} x$, i) $y = \ln\cos\sqrt{x^2+1}$,
j) $y = \frac{1}{3\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x}$, k) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, l) $y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}[3\ln x - 2]$,
m) $y = \arcsin\cos x$, n) $y = \sqrt{\operatorname{cotg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} x}$, o) $y = x\sin[\ln x - \pi]$,
p) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, q) $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$, r) $y = \sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$,
s) $y = \arccos\sqrt{x+1}$, t) $y = \sqrt{\cos x}\, e^{\sqrt{x+1}}$, u) $y = \sqrt{1 + \arcsin x}$,
v) $y = \operatorname{arccotg} \operatorname{cotg}^2 x$, w) $y = \operatorname{arccotg} \operatorname{tg}^2 x$, x) $y = \ln\left[x + 1 + \sqrt{1+x^2}\right]$,

4.1.13. Určte deriváciu $f'(x)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = \frac{x\sqrt{2+x^2}}{2} + \ln\left[x + \sqrt{2+x^2}\right]$, b) $y = \ln[x^2+x+1] + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$,
c) $y = \sqrt{1+2x-x^2} - \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}$, d) $y = \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$,
e) $y = (x+1)\sqrt{x^2+2\sqrt[3]{x^2+3}}$, f) $y = \operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x - 4\ln\cos x$,
g) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{\cos 2x}{8}$, h) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + \ln\sqrt{1-x^2}$,
i) $y = 2x - (1-x^2)\ln\frac{1+x}{1-x}$, j) $y = -\frac{x+1}{2} + \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x$,
k) $y = \sin^2 2x + [\cos^2 x - \sin^2 x]^2$, l) $y = x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right]$,
m) $y = \frac{2\cos 2x}{3} + \frac{\cos x \sin^2 x}{3}$, n) $y = x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin^3 2x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}$,
o) $y = \frac{1}{x+1} + \frac{\ln(x^2-1)}{2}$, p) $y = \frac{\sqrt{x-x^2}}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$,
q) $y = (x^2+x+1)(x^3+x+1)$, r) $y = (x^2+x+1)(x^3+x^2+x+1)$,
s) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \ln\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$, t) $y = \ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$,
u) $y = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$, v) $y = \ln\frac{1-\sqrt{\sin x}}{1+\sqrt{\sin x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$,

w) $y = \ln \arcsin x + \arcsin \ln x$,
x) $y = x \ln [x - \sqrt{x^2-1}] + \sqrt{x^2-1}$,
y) $y = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)(x+4)}$,
z) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$.

4.1.14. Určte jednostranné derivácie $f'_-(0)$, $f'_+(0)$, ak pre funkciu $y = f(x)$ platí: ♣

a) $y = |\sin x|$,
b) $y = |\sin x^2|$,
c) $y = \sqrt{\sin x^2}$,
d) $y = \lfloor x \rfloor \sin x$,
e) $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{pre } x \neq 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0, \end{cases}$
f) $y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{pre } x \neq 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0, \end{cases}$
g) $y = \begin{cases} x, & \text{pre } x < 0, \\ \ln (x+1), & \text{pre } x \geq 0, \end{cases}$
h) $y = \begin{cases} 1-x, & \text{pre } x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-x}, & \text{pre } x > 0. \end{cases}$

4.1.15. Pomocou inverznej funkcie vypočítajte deriváciu funkcie $y = f(x)$: ♣

a) $y = \sqrt[4]{x}$,
b) $y = \log_{10} x$,
c) $y = \sqrt[5]{x} + 1$,
d) $y = \log_2 x - 1$.

4.1.16. Nech f je reálna funkcia. Dokážte, že platí:

a) Ak f je nepárna, potom f' je párna.
b) Ak f je párna, potom f' je nepárna.
c) Ak f je periodická s periódou p, potom f' je periodická s periódou p.

4.1.17. Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode x_0, ak: ♣

a) $y = x^2$, $x_0 = 2$,
b) $y = \frac{12}{x}$, $x_0 = 3$,
c) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$,
d) $y = x^2 + 2x$, $x_0 = 1$,
e) $y = \ln (x+1)$, $x_0 = 0$,
f) $y = \cos 2x$, $x_0 = 0$,
g) $y = \sin 2x$, $x_0 = 0$,
h) $y = \mathrm{e}^x - 1$, $x_0 = 1$,
i) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 3$.

4.1.18. Určte $a \in R$ tak, aby sa graf funkcie $y = x$ dotýkal grafu funkcie $y = a^x$. Nájdite bod, v ktorom sa tieto grafy dotýkajú. ♣

4.1.19. Pre aké $a \in R$ má funkcia $y = |x^2 - a|$ deriváciu pre všetky $x \in R$? ♣

4.1.20. Určte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^2 + x + 1$ tak, aby prechádzala počiatkom súradnicového systému, t. j. bodom $[0; 0]$. ♣

4.1.21. Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = x^2 - 2x + 3$ tak, aby bola: ♣

a) rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$,
b) kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$,
c) prechádzala bodom $[0; 0]$,
d) prechádzala bodom $[a; b]$, $a, b \in R$.
e) zvierala s osou x uhol $\frac{\pi}{4}$,
f) zvierala s osou y uhol $\varphi \in \big(0\,;\, \frac{\pi}{2}\big\rangle$.

4.1.22. Nájdite rovnicu normály ku grafu funkcie $y = x^2 - 2x + 3$ tak, aby bola: ♣

a) rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$,
b) kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$,
c) prechádzala bodom $[1; 3]$,
d) zvierala s osou y uhol $\frac{\pi}{4}$.

4.1.23. Určte všetky dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$, ktoré sú rovnobežné s osou x. Určte body, v ktorých sa dotýkajú grafu funkcie f, ak: ♣

a) $y = \sin (x+1)$,
b) $y = \cos 2x$,
c) $y = \ln (x+1)$,
d) $y = x^3 - x$,
e) $y = \frac{\ln x}{x}$,
f) $y = \sqrt{1-x^2}$,
g) $y = x \ln x$,
h) $y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

4.2 Diferenciál funkcie a derivácie vyšších rádov

4.2.1 Diferenciál a diferencovateľnosť funkcie

Často potrebujeme v matematickej analýze aproximovať (t. j. približne vyjadriť) danú funkciu f nejakou inou, jednoduchšou funkciou g. Žiadame pritom, aby sa funkcia g od funkcie f „málo líšila“, t. j. aby bol rozdiel $|f(x) - g(x)|$ v istom zmysle malý. Ak chceme funkciu f aproximovať iba v nejakom okolí bodu $x_0 \in D(f)$, potom hovoríme o **lokálnej aproximácii**. Veľmi často požadujeme, aby funkcia g bola lineárna.

Predpokladajme, že je funkcia f definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$. Hľadáme nejakú jednoduchú funkciu g, ktorá je spojitá v bode x_0 tak, aby platilo

$$f(x_0) = g(x_0), \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)-g(x)|}{|x-x_0|} = 0. \tag{4.4}$$

To znamená, že rozdiel $|f(x) - g(x)|$ konverguje k nule rýchlejšie ako $|x - x_0|$. Geometricky si to môžeme predstaviť tak, že pre $x \in O(x_0)$ sú grafy funkcií f, g „blízko pri sebe“ a v bode $[x_0; f(x_0)]$ sa dotýkajú.

Ako funkcia g sa najčastejšie používa lineárna funkcia, ktorej grafom je priamka. Lineárna funkcia g, ktorej graf prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$ má rovnicu

$$g(x) = f(x_0) + a(x - x_0), \qquad \text{kde} \ \ a \in R.$$

Ak položíme $x - x_0 = h$, t. j. $x = x_0 + h$, potom môžeme výraz (4.4) vyjadriť v tvare

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)|}{|x-x_0|} = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} \right|. \tag{4.5}$$

Vzniká otázka, či existuje $a \in R$ také, že platí vzťah (4.5). To znamená, či existuje lineárna funkcia $\lambda(x) = a(x - x_0)$, $x \in R$, resp. $\lambda(h) = ah$, $h \in R$, ktorá spĺňa (4.5).

Nech $y = f(x)$, $x \in M$ je reálna funkcia a nech $x_0 \in M$ je vnútorný bod. Hovoríme, že **funkcia f má v bode x_0 diferenciál**, ak existuje lineárna funkcia $\lambda(h) = ah$, $h \in R$ taká, že platí vzťah (4.5). Lineárnu funkciu λ nazývame **diferenciál funkcie f v bode x_0** a označujeme symbolom $\mathrm{d}f(x_0)$.

Poznámka 4.2.1.
Symbol $\mathrm{d}f(x_0)$ vyjadruje lineárnu funkciu λ argumentu h, resp. x z definície diferenciálu.
Symbol $\mathrm{d}f(x_0)(h)$, t. j. hodnotu funkcie $\lambda(h)$ pre x_0 zapisujeme obyčajne v tvare $\mathrm{d}f(x_0, h)$.

Ak má funkcia f diferenciál v bode x_0, potom ju nazývame **diferencovateľná funkcia v bode x_0**. Ak je funkcia f diferencovateľná (má diferenciál) v každom bode $x_0 \in M$, potom ju nazývame **diferencovateľná funkcia na množine M**.

Poznámka 4.2.2.
Ak je f diferencovateľná na M, potom diferenciál $\mathrm{d}f(x)$ môžeme považovať za funkciu premennej $x \in M$. Lenže $\mathrm{d}f(x)$, t. j. $\mathrm{d}f(x, h)$ je tiež funkcia premennej $h \in R$.
To znamená, že diferenciál funkcie f na množine M predstavuje funkciu $\mathrm{d}f(x, h)$ s dvomi nezávislými premennými $x \in M$, $h \in R$. Stručne ho označujeme $\mathrm{d}f(x)$, $x \in M$, resp. $\mathrm{d}f$.

Veta 4.2.1 (O existencii a jednoznačnosti diferenciálu).
Funkcia f je diferencovateľná v bode x_0 práve vtedy, ak má v bode x_0 konečnú deriváciu.
Diferenciál funkcie f v bode x_0 je potom jednoznačne určený vzťahom

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h, \qquad h \in R. \tag{4.6}$$

Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: Ak existuje diferenciál $\mathrm{d}f(x_0,h) = ah$, potom zo vzťahu (4.5) vyplýva:
$$0 = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-ah}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0} \tfrac{ah}{h} = f'(x_0) - a.$$
To znamená, že existuje konečná derivácia $f'(x_0) = a$ a platí $\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h$.
Tým je zároveň dokázaná aj jednoznačnosť diferenciálu.
$PP_{\Leftarrow}$: Ak má funkcia f v bode x_0 konečnú deriváciu $f'(x_0)$, potom platí:
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad \text{t. j.} \ \ 0 = \lim_{h\to 0} \Big[\tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\Big].$$
Z toho vyplýva, že platí podmienka (4.5)
$$0 = \lim_{h\to 0} \Big|\tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\Big| = \lim_{h\to 0} \Big|\tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h}\Big|.$$
To znamená, že $f'(x_0) = a$ a existuje diferenciál $\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h$, $h\in R$. ■

Príklad 4.2.1.
Vypočítajte diferenciál funkcie $f\colon\ y = x^3$ v bode $x_0 = 2$.

Riešenie.
Ak použijeme vetu 4.2.1, potom platí:
$$\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h = 3x_0^2h, \quad \text{t. j.} \ \ \mathrm{d}f(2,h) = f'(2)h = 3\cdot 2^2h = 12h, \ \ h\in R.$$
K tomuto výsledku môžeme dospieť tiež priamo z definície diferenciálu. Je nutné ale poznamenať, že aj tu prakticky počítame hodnotu $f'(2)$. Zo vzťahu (4.5) vyplýva:
$$0 = \lim_{h\to 0} \tfrac{(2+h)^3-2^3-ah}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{8+12h+6h^2+h^3-8-ah}{h} = \lim_{h\to 0} [12+6h-h^2-a] = 12-a.$$
To znamená, že platí $a = 12$, t. j. $\mathrm{d}f(2,h) = 12h$, $h\in R$. ■

Príklad 4.2.2.
Vypočítajte diferenciál identickej funkcie $f(x) = x$, $x\in R$ v ľubovoľnom bode $x_0\in R$.

Riešenie.
Keďže pre všetky $x_0\in R$ platí $f'(x_0) = 1$, potom zo vzťahu (4.6) vyplýva:
$$\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h = 1\cdot h = h, \quad \text{t. j.} \ \ \mathrm{d}f(x_0,h) = (x_0+h)-x_0, \ \ h\in R.$$
To znamená, že $\mathrm{d}f(x_0,h)$ je rovný prírastku premennej x. Takže pre všetky $x_0\in R$ platí $\mathrm{d}f(x_0) = h$. V praxi sa zvykne diferenciál funkcie $f(x) = x$ označovať $\mathrm{d}x$. ■

Poznámka 4.2.3.
Uvažujme funkciu $y = f(x)$, ktorá je diferencovateľná v bode x_0.
Ak použijeme označenie $\mathrm{d}x = h$ (príklad 4.2.2), potom zo vzťahu (4.6) vyplýva:
$$\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h = f'(x_0)\,\mathrm{d}x, \quad \text{t. j.} \ \ f'(x_0) = \tfrac{\mathrm{d}f(x_0,h)}{h} = \tfrac{\mathrm{d}f(x_0,h)}{\mathrm{d}x}, \ \ h\in R.$$
To znamená, že deriváciu $f'(x_0)$ môžeme chápať ako podiel diferenciálu funkcie a diferenciálu premennej v tomto bode x_0 a má zmysel označenie z poznámky 4.1.1
$$f'(x_0) = \tfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \tfrac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x}, \quad \text{resp.} \ \ f' = \tfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Poznámka 4.2.4.
Z vety 4.2.1 vyplýva, že pojem diferencovateľnosti funkcie f v bode [resp. na množine] je ekvivalentný s pojmom existencie konečnej derivácie v tomto bode [resp. na množine]. Preto sa môže zdať, že pojem diferenciálu je zbytočný. Diferenciál má význam hlavne pri funkciách dvoch a viac premenných. V tomto prípade ale pojem diferenciálu nie je ekvivalentný s pojmom existencie derivácie danej funkcie.

4.2.2 Využitie diferenciálu na približné výpočty

Diferenciál reálnej funkcie jednej premennej je dôležitý predovšetkým pri lineárnej aproximácii danej funkcie a pri približnom určovaní funkčných hodnôt tejto funkcie.

Nech $y = f(x)$ je diferencovateľná funkcia v bode x_0. Ak označíme
$$\omega(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h = f(x_0+h) - f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0,h),$$
potom zo vzťahu (4.5) vyplýva:
$$\lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{\omega(h)}{h} = 0. \qquad (4.7)$$
Pre prírastok $\Delta f(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0)$ funkcie f od bodu x_0 po x_0+h potom platí:
$$\Delta f(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0,h) + \omega(h) = f'(x_0)h + \omega(h).$$

Výraz $\mathrm{d}f(x_0,h) = f'(x_0)h$ nazývame **hlavná časť prírastku funkcie** a výraz $\omega(h)$ nazývame **zvyšok prírastku**. Zvyšok prírastku má význam chyby, ktorej sa dopustíme, ak nahradíme prírastok funkcie $\Delta f(x_0,h)$ diferenciálom funkcie $\mathrm{d}f(x_0,h)$. Zo vzťahu (4.7) vyplýva, že funkcia $\omega(h)$ sa blíži k nule rýchlejšie ako premenná h.

Funkciu f môžeme potom pomocou jej diferenciálu v bode x_0 aproximovať v tvare
$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0,h) = f(x_0) + f'(x_0)h, \quad \text{kde } \lim_{h\to 0} \tfrac{\omega(h)}{h} = 0. \qquad (4.8)$$
Ak položíme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom
$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$
pričom pre chybu $\omega(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$ aproximácie platí:
$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{\omega(x)}{x-x_0} = 0. \qquad (4.9)$$

Z geometrického hľadiska predstavuje graf funkcie $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ dotyčnicu ku grafu funkcie f, ktorý prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$. Stačí si porovnať predchádzajúci vzťah zo vzťahom (4.2) na strane 293.

Veta 4.2.2 (O najlepšej lokálnej lineárnej aproximácii funkcie).
Nech f je diferencovateľná funkcia v bode x_0. Nech $c \in R$ je také, že $c \neq f'(x_0)$. Označme
$$\varphi\colon\ y = f(x_0) + c(x-x_0), \qquad g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$
Potom existuje prstencové okolie $P(x_0)$ také, že pre všetky $x \in P(x_0)$ platí:
$$|f(x) - g(x)| < |f(x) - \varphi(x)|\,.$$

Dôkaz.
Je zrejmé, že platí $\varphi(x_0) = g(x_0) = f(x_0)$.
Keďže $c \neq f'(x_0)$, potom pre funkciu $\varphi\colon\ y = f(x_0) + c(x-x_0)$ platí:
$$\lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-\varphi(x)}{x-x_0}\right| = \lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \tfrac{c(x-x_0)}{x-x_0}\right| = |f'(x_0) - c| > 0.$$
Zo vzťahu (4.9) vyplýva, že platí:
$$0 = \lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-g(x)}{x-x_0}\right| < \lim_{x\to x_0} \left|\tfrac{f(x)-\varphi(x)}{x-x_0}\right|.$$
Potom (veta 3.2.7) existuje prstencové okolie $P(x_0)$ také, že pre všetky $x \in P(x_0)$ platí:
$$\tfrac{|f(x)-g(x)|}{|x-x_0|} = \left|\tfrac{f(x)-g(x)}{x-x_0}\right| < \left|\tfrac{f(x)-\varphi(x)}{x-x_0}\right| = \tfrac{|f(x)-\varphi(x)|}{|x-x_0|}.$$
Pretože $x \neq x_0$, potom pre všetky $x \in P(x_0)$ platí $|f(x) - g(x)| < |f(x) - \varphi(x)|$. ■

Poznámka 4.2.5.
Z vety 4.2.2 vyplýva, že aproximácia funkcie f pomocou funkcie
$$g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, x-x_0), \quad x \in P(x_0)$$

je najlepšia zo všetkých lineárnych aproximácií. T. j. zo všetkých aproximácií lineárnymi funkciami, ktorých grafy prechádzajú bodom $[x_0; f(x_0)]$. Táto aproximácia má ale iba lokálny význam v nejakom okolí bodu x_0 (nie na celom definičnom obore).
Určiť presnejšie chybu tejto aproximácie $\omega(x)$ je vo väčšine prípadov problematické. Vieme len na základe vzťahu (4.9), že hodnota $|\omega(x)|$ je podstatne menšia[5] ako hodnota $|x - x_0|$.

Poznámka 4.2.6.
Ak použijeme označenie $h = x - x_0$, potom môžeme funkciu g zapísať v tvare

$$g\colon\ y = f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, h), \quad x_0 + h \in P(x_0), \quad \text{t. j.} \quad h \in P(0).$$

To znamená, že pre aproximáciu funkcie f v bode $x = x_0 + h$ platí:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, h), \quad h \in P(0).$$

Príklad 4.2.3.
Približne vypočítajte hodnotu $\sqrt[6]{1,06}$.

Riešenie.
Označme $f(x) = \sqrt[6]{x}$ pre $x > 0$ a $P(1)$ okolie bodu $x_0 = 1$ také, že $1,06 \in P(1)$.
Potom $f'(x) = [x^{\frac{1}{6}}]' = \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{6}$, $x > 0$ a pre aproximáciu v okolí $P(1)$ platí:

$$g(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + \tfrac{1}{6}(x-1) = \tfrac{x+5}{6}, \quad \text{t. j.} \quad \sqrt[6]{x} \approx \tfrac{x+5}{6}.$$

Z toho vyplýva $\sqrt[6]{1,06} \approx \frac{1,06+5}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$.
Presnejšia hodnota vypočítaná na kalkulačke je $\sqrt[6]{1,06} = 1,0097588$.
To znamená, že chyba výpočtu je menšia ako $1,01 - 1,0097588 < 0,00025$.

Iné riešenie.
Označme $f(x) = \sqrt[6]{x+1}$ pre $x > -1$, $x_0 = 0$, $h = 0,06$. Nech $P(0)$ je také, že $h \in P(0)$.
Pretože $f'(x) = [(x+1)^{\frac{1}{6}}]' = \frac{(x+1)^{-\frac{5}{6}}}{6}$, $x > -1$, potom v okolí $P(0)$ platí:

$$g(h) = f(0) + f'(0)h = 1 + \tfrac{h}{6} = \tfrac{6+h}{6}, \quad \text{t. j.} \quad \sqrt[6]{1+h} \approx \tfrac{6+h}{6}.$$

To vedie na rovnaký výsledok $\sqrt[6]{1,06} = \sqrt[6]{1 + 0,06} \approx \frac{6+0,06}{6} = \frac{6,06}{6} = 1,01$. ■

Poznámka 4.2.7.
Vzťah $\sqrt[6]{x} \approx \frac{x+5}{6}$ má zmysel iba pre hodnoty x nachádzajúce sa v blízkosti bodu 1. Ako dokazuje tabuľka 4.2.2, pri neuváženom použití tohto vzťahu môže chyba približného výpočtu narásť do neprijateľných rozmerov.

Príklad 4.2.4.
Približne vypočítajte hodnotu $\operatorname{arctg} 1,1$.

Riešenie.
Označme $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $h = 0,1$. Potom $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a platí:

$$\operatorname{arctg} 1,1 = f(1,1) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0,1 = \operatorname{arctg} 1 + \tfrac{0,1}{1+1^2} = \tfrac{\pi}{4} + 0,05 = 0,835\,398.$$

Presná hodnota je $\operatorname{arctg} 1,1 = 0,832\,981$. Takže chyba výpočtu je približne $0,002\,417$. ■

[5] Funkcia $\omega(x)$ je v bode x_0 nekonečne malá vyššieho rádu ako funkcia $y = x - x_0$.

x	$\sqrt[6]{x}$	$\frac{x+5}{6}$	chyba	x	$\sqrt[6]{x}$	$\frac{x+5}{6}$	chyba
$0,1$	$0,6812920$	$0,8500000$	$> 0,16870$	$1,3$	$1,0446975$	$1,0500000$	$< 0,00531$
$0,3$	$0,8181888$	$0,8833333$	$< 0,06515$	$1,5$	$1,0699132$	$1,0833333$	$< 0,01343$
$0,5$	$0,8908987$	$0,9166666$	$< 0,02577$	$2,0$	$1,1224620$	$1,1666667$	$< 0,04421$
$0,7$	$0,9422865$	$0,9500000$	$< 0,00772$	$3,0$	$1,2009369$	$1,3333333$	$> 0,13239$
$0,8$	$0,9634924$	$0,9666666$	$< 0,00312$	$5,0$	$1,3076605$	$1,6666667$	$> 0,35900$
$0,9$	$0,9825931$	$0,9833333$	$< 0,00075$	10	$1,4677993$	2.5000000	$> 1,03220$
$1,1$	$1,0160119$	$1,0166667$	$< 0,00066$	20	$1,6475490$	$4,1666667$	$> 2,51911$
$1,2$	$1,0308533$	$1,0333333$	$< 0,00249$	64	$2,0000000$	$11,500000$	$= 9,50000$

Tabuľka 4.2.2: Výpočet $\sqrt[6]{x}$ pomocou približného vzorca $\frac{x+5}{6}$.

Nech y je nejaká veličina závislá od veličiny x podľa vzorca $y = f(x)$, kde f je známa funkcia. Predpokladajme, že sme veličinu x namerali s chybou Δx, ktorá je v porovnaní s x malá. Chybu Δx nazývame **absolútna chyba** nameranej (nezávislej) **veličiny** x. Chybu Δy, ktorú nazývame **absolútna chyba** závislej **veličiny** y môžeme potom vyjadriť ako hodnotu diferenciálu funkcie f v bode x pre $h = \Delta x$.

Nech $P(x)$ je okolie bodu x také, že $x + \Delta x \in P(x)$. Z poznámky 4.2.6 vyplýva:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x = f(x) + \mathrm{d}f(x, \Delta x), \quad \Delta x \in P(0).$$

Pre absolútnu chybu Δy potom platí:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x = \mathrm{d}f(x, \Delta x). \tag{4.10}$$

Chyby sa spravidlá vyjadrujú v tvare podielov $\delta_x = \Delta\frac{x}{x}$, resp. $\delta_y = \Delta\frac{y}{y}$, ktoré nazývame **relatívne** (**pomerné**) **chyby veličín** x, resp. y.

Príklad 4.2.5.
Aká je chyba objemu gule, ak sme jej polomer r namerali s absolútnou chybou Δr?

Riešenie.
Keďže pre objem gule platí $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$, potom zo vzťahu (4.10) vyplýva:

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V(r, \Delta r) = V'(r)\Delta r = \left[\frac{4\pi r^3}{3}\right]' \Delta r = \frac{4\pi}{3} 3r^2 \Delta r = 4\pi r^2 \Delta r.$$

Ak označíme relatívnu chybu polomeru $\delta_r = \frac{\Delta r}{r}$, potom platí:

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3\Delta r}{r} = 3\delta_r.$$

To znamená, že relatívna chyba objemu je trojnásobok relatívnej chyby polomeru. ■

Príklad 4.2.6.
Určte relatívnu chybu povrchu gule, keď objem gule má relatívnu chybu $\delta_V = 0,2\%$.

Riešenie.
Pre relatívnu chybu platí $\delta_V = \frac{0,2\%}{100\%} = 0,002$ a pre absolútnu chybu ΔV platí:

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{V}, \quad \text{t. j.} \quad \Delta V = V \cdot \delta_V = 0,2V\% = \frac{0,2V\%}{100\%} = 0,002V.$$

Zo vzťahov $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, $S = 4\pi r^2$ pre povrch a objem gule s polomerom r vyplýva:

$$S(V) = 4\pi \left[\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right]^2 = \sqrt[3]{\frac{(4\pi)^3(3V)^2}{(4\pi)^2}} = \sqrt[3]{4\pi \cdot 9V^2} = \sqrt[3]{36\pi}\, V^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{36\pi}\, \sqrt[3]{V^2}.$$

Pre absolútnu chybu ΔS povrchu S potom platí:

$$\Delta S \approx \left[\sqrt[3]{36\pi}\, V^{\frac{2}{3}}\right]' \Delta V = \sqrt[3]{36\pi}\frac{2V^{-\frac{1}{3}}\Delta V}{3} = \frac{2\sqrt[3]{36\pi}\Delta V}{3\sqrt[3]{V}}.$$

Potom pre relatívnu chybu δ_S povrchu S platí:

$$\delta_S \approx \frac{\Delta S}{S} = \frac{2\sqrt[3]{36\pi}\Delta V}{3\sqrt[3]{V}\sqrt[3]{36\pi}\sqrt[3]{V^2}} = \frac{2\Delta V}{3V} = \frac{2}{3}\delta_V = \frac{2\cdot 0{,}002}{3} = 0{,}001\,333 = 0{,}1333\%. \blacksquare$$

4.2.3 Derivácie vyšších rádov

Nech má funkcia $y = f(x)$, $x \in M$ deriváciu na neprázdnej množine $M_1 \subset M$. Ak má funkcia $y = f'(x)$, $x\in M_1$ deriváciu $[f']'$ na nejakej neprázdnej množine $M_2 \subset M_1$, potom ju nazývame **derivácia druhého rádu** (**druhá derivácia**) **funkcie f na množine M_2** a označujeme f'', resp. $f^{(2)}$. To znamená, že $[f']' = f'' = f^{(2)}$.

Ak má funkcia $y = f''(x)$, $x\in M_2$ deriváciu na neprázdnej množine $M_3 \subset M_2$, potom ju nazývame **derivácia tretieho rádu** (**tretia derivácia**) **funkcie f na množine M_3** a označujeme $[f'']' = f''' = f^{(3)}$. Takto môžeme pokračovať pre $n\in N$, $n\geq 2$.

Predpokladajme, že sme takto definovali deriváciu funkcie f rádu $n-1$ na neprázdnej množine M_{n-1}, ktorú označíme $f^{(n-1)}$. Ak má táto funkcia deriváciu na neprázdnej množine $M_n \subset M_{n-1}$, potom ju nazývame **derivácia n-tého rádu** (**n-tá derivácia**) **funkcie f na množine M_n** a označujeme $[f^{(n-1)}]' = f^{(n)}$.

Hodnotu $f''(x_0)$ v bode $x_0\in M_2$ nazývame **derivácia druhého rádu** (**druhá derivácia**) **funkcie f v bode x_0** a hodnotu $f'''(x_0)$ v bode $x_0\in M_3$ nazývame **derivácia tretieho rádu** (**tretia derivácia**) **funkcie f v bode x_0**. Hodnotu $f^{(n)}(x_0)$ v bode $x_0 \in M_n$ nazývame **derivácia n-tého rádu** (**n-tá derivácia**) **funkcie f v bode x_0**.

Poznámka 4.2.8.
Derivácie $f^{(n)}$, $n \in N$, $n \geq 2$ nazývame súhrnne **deriváciami vyššieho rádu** a deriváciu $f' = f^{(1)}$ nazývame **prvou deriváciou** (**deriváciou prvého rádu**).
Niekedy je výhodné aj funkciu f považovať za deriváciu. Vtedy ju nazývame **nultá derivácia** (**derivácia nultého rádu**) **funkcie** f a označujeme $f = f^{(0)}$.

Poznámka 4.2.9.
Z definície vyplýva, že funkcia $y = f(x)$, $x\in M$ má v bode x_0 deriváciu rádu n, $n\in N$, ak existuje prvá derivácia funkcie $f^{(n-1)}$ v bode x_0, t. j. ak existuje limita

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{h}.$$

To znamená, že funkcia $f^{(n-1)}$ musí byť definovaná v nejakom okolí bodu x_0.

Výpočet derivácie vyššieho rádu funkcie môže byť vo všeobecnosti veľmi pracný, pretože musíme postupne vypočítať derivácie všetkých nižších rádov počnúc prvou deriváciou. Ako dokazujú nasledujúce príklady, v niektorých prípadoch sa dajú pomerne jednoducho odvodiť všeobecné vzorce pre vyššie derivácie danej funkcie.

Príklad 4.2.7.
Vypočítajte n-tú deriváciu $f^{(n)}$, $n\in N$ funkcie $f\colon\ y = x^k$, $x\in R$, $k\in N$.

Riešenie.
Postupným derivovaním dostaneme

$$f'(x) = kx^{k-1},\ f''(x) = k(k-1)x^{k-2},\ \ldots,\ f^{(k-1)}(x) = k(k-1)\cdots 2\cdot x^1,\ x\in R.$$

Potom $f^{(k)}(x) = k!x^0 = k!$ a pre $n > k$, $n \in N$ platí $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in R$.
Ak to zhrnieme, pre všetky $n \in N$ a pre všetky $x \in R$ platí:
$$f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n},\ n < k, \quad f^{(k)}(x) = k!, \quad f^{(n)}(x) = 0,\ n > k. \blacksquare$$

Príklad 4.2.8.
Vypočítajte n-té derivácie ($n \in N$) funkcií $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{e}^x$ na množine R.

Riešenie.
Z príkladu 4.1.8 vyplýva, že pre všetky $n \in N$ a pre všetky $x \in R$ platí $[\mathrm{e}^x]^{(n)} = \mathrm{e}^x$.
Pre funkcie $y = \sin x$, $y = \cos x$ pre všetky $x \in R$ platí:
$$[\sin x]' = \cos x, \quad [\sin x]'' = -\sin x, \quad [\sin x]''' = -\cos x, \quad [\sin x]'''' = \sin x,$$
$$[\cos x]' = -\sin x, \quad [\cos x]'' = -\cos x, \quad [\cos x]''' = \sin x, \quad [\cos x]'''' = \cos x.$$
Z toho vyplýva, že pre všetky $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k \in N$, $x \in R$ platí:
$$[\sin x]^{(n)} = [\sin x]^{(n+4)} = [\sin x]^{(n+4k)}, \qquad [\cos x]^{(n)} = [\cos x]^{(n+4)} = [\cos x]^{(n+4k)}. \blacksquare$$

Vzorce pre n-tú deriváciu funkcií z predchádzajúcich príkladov a tiež niektorých základných elementárnych funkcií sú uvedené v tabuľke 4.2.3. Ich dôkaz prenechávame čitateľovi ako domáce cvičenie.

Vzorec	podmienky platnosti	Vzorec	podmienky platnosti
$[x^k]^{(n)} = 0,$	$x \in R,\ k \in N,\ k > n$	$[x^k]^{(n)} = k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n},$	$x \in R,\ k \in N,\ k < n$
$[x^n]^{(n)} = n!,$	$x \in R$	$[x^a]^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n},$	$x > 0,\ a \in R$
$[\mathrm{e}^x]^{(n)} = \mathrm{e}^x,$	$x \in R$	$[a^x]^{(n)} = a^x \ln^n a,$	$x \in R,\ a > 0$
$[\ln x]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$	$x > 0$	$[\log_a x]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a},$	$x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\ln \lvert x\rvert]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$	$x \neq 0$	$[\log_a \lvert x\rvert]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a},$	$x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
$[\sin x]^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$	$x \in R$	$[\sinh x]^{(n)} = \begin{cases} \sinh x, & n = 2k, \\ \cosh x, & n = 2k+1, \end{cases}$	$x \in R,\ k \in N$
$[\cos x]^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$	$x \in R$	$[\cosh x]^{(n)} = \begin{cases} \cosh x, & n = 2k, \\ \sinh x, & n = 2k+1, \end{cases}$	$x \in R,\ k \in N$

Tabuľka 4.2.3: Derivácie rádu $n \in N$ základných elementárnych funkcií.

Veta 4.2.3 (Leibnizov vzorec).
Nech $n \in N$ a nech majú funkcie f, g na množine M derivácie do rádu n vrátane.
Potom pre n-tú deriváciu $[fg]^{(n)}$ na množine M platí:
$$[fg]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} g^{(i)} = \binom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)}.$$

Dôkaz.
Použijeme matematickú indukciu. Pre $n = 1$ tvrdenie platí triviálne, pretože
$$[fg]' = f'g + fg' = \binom{1}{0} f'g + \binom{1}{1} fg' = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} f^{(1-i)} g^{(i)}.$$

Predpokladajme, že pre $n=k$, $k\in N$ platí $[fg]^{(k)}=\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(k-i)}g^{(i)}$.

Potom pre $n=k+1$ na základe poznámky 4.1.8 platí:

$$[fg]^{(k+1)}=\left[[fg]^{(k)}\right]'=\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(k-i)}g^{(i)}\right]'=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[f^{(k-i)}g^{(i)}\right]'=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[f^{(k-i+1)}g^{(i)}+f^{(k-i)}g^{(i+1)}\right]=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(k-i+1)}g^{(i)}+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(k-i)}g^{(i+1)}=$$

$$=\binom{k}{0}f^{(k+1)}g^{(0)}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}f^{(k-i+1)}g^{(i)}+\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}f^{(k-i)}g^{(i+1)}+\binom{k}{k}f^{(0)}g^{(k+1)}=(*).$$

Ak použijeme známe vzorce pre binomické čísla[6]

$$\binom{k+1}{i+1}=\binom{k}{i+1}+\binom{k}{i},\qquad \binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\qquad \binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

a položíme v prvej sume $i=j+1$, t. j. $j=i-1$, potom dostaneme

$$(*)=\binom{k}{0}f^{(k+1)}g^{(0)}+\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j+1}f^{(k-j)}g^{(j+1)}+\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}f^{(k-i)}g^{(i+1)}+\binom{k}{k}f^{(0)}g^{(k+1)}=$$

$$=\binom{k+1}{0}f^{(k+1)}g^{(0)}+\sum_{i=0}^{k-1}\left[\binom{k}{i+1}+\binom{k}{i}\right]f^{(k-i)}g^{(i+1)}+\binom{k+1}{k+1}f^{(0)}g^{(k+1)}=$$

$$=\binom{k+1}{0}f^{(k+1)}g^{(0)}+\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i+1}f^{(k-i)}g^{(i+1)}+\binom{k+1}{k+1}f^{(0)}g^{(k+1)}=(**).$$

Ak položíme v sume $j=i+1$, t. j. $i=j-1$, dostaneme tvrdenie vety pre $n=k+1$, t. j.

$$(**)=[fg]^{(k+1)}=\binom{k+1}{0}f^{(k+1)}g^{(0)}+\sum_{j=1}^{k}\binom{k+1}{j}f^{(k-j+1)}g^{(j)}+\binom{k+1}{k+1}f^{(0)}g^{(k+1)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}f^{(k-j+1)}g^{(j)}=\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}f^{(k+1-i)}g^{(i)}.$$

To znamená, že tvrdenie vety platí pre všetky $n\in N$. ■

Príklad 4.2.9.

Vypočítajte n-tú deriváciu funkcie $y=\mathrm{e}^x x^2$, $x\in R$ pre všetky $n\in N$.

Riešenie.

Zo vzťahov $[x^2]'=2x$, $[x^2]''=2$ a z Leibnizovho vzorca vyplýva:

$$[\mathrm{e}^x x^2]'=\mathrm{e}^x 2x+\mathrm{e}^x x^2=\mathrm{e}^x(x^2+2x),\qquad [\mathrm{e}^x x^2]''=\mathrm{e}^x 2+2\,\mathrm{e}^x 2x+\mathrm{e}^x x^2=\mathrm{e}^x(x^2+4x+2).$$

Keďže $[x^2]^{(k)}=0$ pre všetky $k\in N$, $k\geq 3$, potom pre $n\in N$, $n\geq 3$ platí:

$$[\mathrm{e}^x x^2]^{(n)}=\binom{n}{0}\mathrm{e}^x x^2+\binom{n}{1}\mathrm{e}^x 2x+\binom{n}{2}\mathrm{e}^x 2=\mathrm{e}^x[x^2+2nx+2n(n-1)].$$ ■

Príklad 4.2.10.

Nech $n\in N$, $a_0,a_1,\dots,a_n\in R$. Vypočítajte derivácie všetkých rádov polynómu

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,\quad x\in R.$$

[6] Viď cvičenie 1.2.20.

Riešenie.
Pre všetky $x \in R$ platí:

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= n\,a_n x^{n-1} + \cdots + 3\,a_3 x^2 + 2\,a_2 x + 1\,a_1,\\
f''_n(x) &= n(n-1)\,a_n x^{n-2} + \cdots + 3{\cdot}2\,a_3 x + 2{\cdot}1\,a_2,\\
f'''_n(x) &= n(n-1)(n-2)\,a_n x^{n-3} + \cdots + 3{\cdot}2{\cdot}1\,a_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_n^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\cdots 2\,a_n x + (n-1)!\,a_{n-1},\\
f_n^{(n)}(x) &= n!\,a_n,
\end{aligned}$$

Pre ďalšie derivácie platí $f_n^{(n+1)}(x) = f_n^{(n+2)}(x) = f_n^{(n+3)}(x) = \cdots = 0$.
To znamená, že pre všetky $k \in N$, $k > n$ platí $f_n^{(k)}(x) = 0$ a pre $k \leq n$ platí:

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)\cdots(i-k+1)\,a_i\,x^{i-k}. \blacksquare$$

Príklad 4.2.11.
Nech na množine existujú $M \neq \emptyset$ derivácie f', f'', g' a g'' a nech pre všetky $x \in M$ platí $g(x) \neq 0$. Určte druhú deriváciu h'' funkcie $h = \frac{f}{g}$.

Riešenie.
Pre druhú deriváciu h'' na množine M na základe vety 4.1.5 platí:

$$h'' = \left[\frac{f}{g}\right]'' = \left[\frac{f'g - fg'}{g^2}\right]' = \frac{(f'g - fg')'g^2 - (f'g - fg')(g^2)'}{g^4} =$$

$$= \frac{(f''g + f'g' - f'g' - fg'')g^2 - (f'g - fg')2gg'}{g^4} = \frac{(f''g - fg'')g - 2(f'g - fg')g'}{g^3} = \frac{f''g^2 - fgg'' - 2f'gg' + 2f(g')^2}{g^3}. \blacksquare$$

4.2.4 Pojem diferenciálu vyššieho rádu

Nech má funkcia $y = f(x)$, $x \in M$ vo vnútornom bode $x_0 \in M$ konečnú n-tú deriváciu $f^{(n)}(x_0)$. Potom polynóm n-tého stupňa $\varphi(h) = f^{(n)}(x_0)h^n$, $h \in R$ nazývame **diferenciálom n-tého rádu** (n-**tým diferenciálom**) **funkcie f v bode x_0** a označujeme symbolom $\mathrm{d}^n f(x_0, h)$, resp. $\mathrm{d}^n f(x_0)$.

Ak má funkcia f v bode x_0 diferenciál n-tého rádu, potom ju nazývame **diferencovateľná rádu n v bode x_0**. Ak je f diferencovateľná rádu n v každom bode $x_0 \in M$, potom ju nazývame **diferencovateľná rádu n na množine M**.

Poznámka 4.2.10.
Pre $n = 1$ je definícia zhodná s definíciou diferenciálu, resp. diferencovateľnej funkcie. To znamená, že pre $n = 1$ platí $\mathrm{d}^1 f(x_0, h) = \mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h$, $h \in R$.
Z definície vyplýva, že ak má funkcia f v bode x_0 diferenciál n-tého rádu, potom má v bode x_0 taktiež diferenciály rádov $1, 2, \ldots, n-1$. To znamená, že ak je funkcia f v bode x_0 diferencovateľná rádu n, potom je v bode x_0 diferencovateľná rádov $1, 2, \ldots, n-1$.

Poznámka 4.2.11.
Podobne ako diferenciál prvého rádu, predstavuje diferenciál n-tého rádu $\mathrm{d}^n f(x, h)$ na množine M tiež funkciu s dvomi nezávislými premennými $x \in M$, $h \in R$. Stručne ho označujeme symbolmi $\mathrm{d}^n f(x)$, $x \in M$, resp. $\mathrm{d}^n f$.

Poznámka 4.2.12.
Ak označíme $h = x - x_0$, potom môžeme n-tý diferenciál funkcie f v bode x_0 zapísať
$$\mathrm{d}^n f(x, x - x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,\ x \in R.$$
Ak označíme $h = \mathrm{d}x$, potom z definície diferenciálu n-tého rádu funkcie f vyplýva:[7]
$$\mathrm{d} f(x) = f^{(n)}(x_0)[\mathrm{d}x]^n = f^{(n)}(x_0)\,\mathrm{d}x^n, \qquad \text{t. j.}\ \ f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n},\ n \in N.$$
Ak uvážime definíciu derivácie vyšších rádov funkcie f, potom pre $n \in N$ platí:
$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d} f(x)}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{(n-1)} f(x)}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right] = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}.$$

Príklad 4.2.12.
Vypočítajte diferenciál piateho rádu funkcie $f(x) = \ln x$, $x \geq 0$ v bode $x_0 = 1$.

Riešenie.
Pre derivácie funkcie f do piateho rádu platí:
$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = 2x^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}, \quad f^{(5)}(x) = 24x^{-5}.$$
Z toho vyplýva $\mathrm{d}^5 f(1, h) = f^{(5)}(1)h^5 = 24h^5$, resp. $\mathrm{d}^5 f(1) = 24\,\mathrm{d}x^5$. ■

Cvičenia

4.2.1. Vypočítajte diferenciál $\mathrm{d}f(x, h)$, ak je funkcia f definovaná predpisom: ♣

a) $y = x\,\mathrm{e}^x$, b) $y = x^3 2^x$, c) $y = \frac{1}{x}$, d) $y = \arcsin x$,
e) $y = 2^{-\frac{\ln x}{x}}$, f) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, g) $y = \frac{x}{1-x}$, h) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$,
i) $y = \mathrm{e}^{-x^2}$, j) $y = x \ln x$, k) $y = \mathrm{tg}\, x$, l) $y = \mathrm{arctg}\, x$.

4.2.2. Kruhový výsek má polomer $r = 30$ cm a stredový uhol $\varphi = 60°$. Určte približne, ako sa zmení obsah kruhového výseku, ak: ♣

a) r sa zväčší o 1 cm, b) r sa zmenší o 1 cm, c) φ zmenší o 1°.

4.2.3. Dokážte, že ak je h podstatne menšie ako x^2, potom platia približné vzorce:

a) $\sqrt{x^2 + h} \approx x + \frac{h}{2x}$, $x > 0$, b) $\sqrt[n]{x^n + h} \approx x + \frac{h}{nx^{n-1}}$, $x > 0$.

4.2.4. Určte absolútnu a relatívnu chybu obsahu kruhu s polomerom r, ak je polomer daný s absolútnou chybou Δr. ♣

4.2.5. Pomocou diferenciálu vypočítajte približne hodnoty: ♣

a) $\cos 61°$, b) $\mathrm{tg}\, 44°$, c) $\ln 0,9$, d) $\sqrt[11]{2000}$, e) $\arcsin 0,54$,
f) $\sqrt[4]{17}$, g) $\sqrt[4]{267}$, h) $\sqrt{82}$, i) $\sqrt[3]{214}$, j) $\mathrm{arctg}\, 0,97$,
k) $1,04^5$, l) $2^{1,002}$, m) $\ln 20$, n) $\log 1001$, o) $\mathrm{arctg}\, 1,05$.

4.2.6. Tiažové zrýchlenie g_h v nadmorskej výške h je určené vzťahom $g_h = \frac{gr^2}{(r+h)^2}$, kde $g = 9,8065\ \mathrm{ms}^{-1}$ je tiažové zrýchlenie pri povrchu zeme a r je polomer zeme (stredný polomer zeme je $r = 6371$ km). Dokážte, že platí $g_h \approx g(1 - \frac{2h}{r})$.

[7] Pre zjednodušenie sa používa zápis $[\mathrm{d}x]^n = \mathrm{d}x^n$.

4.2.7. Vypočítajte deriváciu tretieho a piateho rádu funkcie $y = f(x)$, ak: ♣

a) $y = x^3 \sin x$, b) $y = x^3 \cos x$, c) $y = x^3 \sin 2x$, d) $y = x^3 \cos 2x$,
e) $y = \mathrm{e}^x \sin x$, f) $y = \mathrm{e}^x \cos x$, g) $y = x^5 \ln x$, h) $y = x\,\mathrm{e}^x \sin x$.

4.2.8. Vypočítajte deriváciu n-tého rádu, $n \in N$, funkcie $y = f(x)$, ak: ♣

a) $y = \sin^2 x$, b) $y = \cos^3 x$, c) $y = x \sin x$, d) $y = x^{n-1} \ln x$,
e) $y = \frac{x+1}{x-1}$, f) $y = \frac{x-1}{x+1}$, g) $y = \frac{x+\ln x}{x}$, h) $y = \frac{x}{x^2-1}$,
i) $y = x\,\mathrm{e}^x$, j) $y = x \ln x$, k) $y = x + \ln x$, l) $y = x(\ln x - 1)$.

4.2.9. Dokážte, že funkcia $y = c_1\,\mathrm{e}^x \cos x + c_2\,\mathrm{e}^x \sin x + c_3\,\mathrm{e}^{-x} \cos x + c_4\,\mathrm{e}^{-x} \sin x$, $x \in R$, kde c_1, c_2, c_3, c_4 sú ľubovoľné reálne čísla spĺňa rovnicu $y^{(4)} + 4y = 0$.

4.2.10. Nech $a > 0$. Dokážte, že funkcia $y = c_1\,\mathrm{e}^{ax} + c_2\,\mathrm{e}^{-ax} + c_3 \cos ax + c_4 \sin ax$, $x \in R$, kde c_1, c_2, c_3, c_4 sú ľubovoľné reálne čísla spĺňa rovnicu $y^{(4)} - a^4 y = 0$.

4.3 Aplikácie diferenciálneho počtu

4.3.1 Vety o strednej hodnote funkcie

Vety o strednej hodnote funkcie patria spolu s **l'Hospitalovým pravidlom** medzi najdôležitejšie a najčastejšie používané aplikácie diferenciálneho počtu. Vety o strednej hodnote funkcie sú tri a nazývajú sa Rolleho, Lagrangeova a Cauchyho.

Veta 4.3.1.
Nech funkcia f nadobúda vo vnútornom bode $c \in M$ na množine[8] $M \subset D(f)$ minimum, resp. maximum. Ak existuje derivácia $f'(c)$, potom platí $f'(c) = 0$.

Dôkaz.
Funkcia f má v bode c deriváciu, t. j. existuje $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$.
Ak $f(c) = \min f(x)$, $x \in M$, potom pre všetky $x \in M$ platí $f(x) \geq f(c)$, t. j. $f(x) - f(c) \geq 0$.
Keďže pre všetky $x < c$ platí $x - c < 0$, potom

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0, \quad \text{t. j.} \quad f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$$

Podobne pre všetky $x > c$ platí $x - c > 0$. Z toho vyplýva:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0, \quad \text{t. j.} \quad f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0.$$

Potom platí $f'_-(c) \leq 0 \leq f'_+(c)$, t. j. $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c) = 0$.
V prípade $f(c) = \max f(x)$, $x \in M$ je dôkaz analogický a prenechávame ho čitateľovi. ■

Veta 4.3.2 (Rolleho).
Nech[9] pre funkciu f definovanú na uzavretom intervale $\langle a\,;\, b \rangle$ platí:

i) je spojitá na $\langle a\,;\, b \rangle$, ii) má deriváciu (aj nevlastnú) na $(a\,;\, b)$, iii) $f(a) = f(b)$.

Potom existuje aspoň jeden bod $c \in (a\,;\, b)$ taký, že $f'(c) = 0$.

[8] T. j. platí $f(c) = \min\{f(x)\,;\, x \in M\}$, resp. $f(c) = \max\{f(x)\,;\, x \in M\}$.
[9] *Michel Rolle* [1652–1719] — francúzsky matematik.

Dôkaz.
Zo spojitosti funkcie f na uzavretom intervale $\langle a\,;\, b\rangle$ a z Weierstrasseho vety 3.3.10 vyplýva, že funkcia f nadobúda na intervale $\langle a\,;\, b\rangle$ svoje minimum m a maximum M.
Potom existujú $c_1, c_2 \in \langle a\,;\, b\rangle$ také, že $f(c_1) = m$, $f(c_2) = M$ a pre všetky $x \in \langle a\,;\, b\rangle$ platí:

$$f(c_1) = m \leq f(x) \leq M = f(c_2).$$

Pre body $c_1, c_2 \in \langle a\,;\, b\rangle$ môžu nastať práve dva prípady:

a) Aspoň jeden z bodov c_1, c_2 je vnútorným bodom $\langle a\,;\, b\rangle$, označme ho c.
Potom z vety 4.3.1 vyplýva, že platí $f'(c) = 0$.

b) Obidva body c_1, c_2 sú hraničné body intervalu $\langle a\,;\, b\rangle$. Potom z iii) vyplýva:

$$f(a) = f(b) = f(c_1) = f(c_2) = m = M.$$

To znamená, že funkcia f je konštantná a pre všetky $c \in \langle a\,;\, b\rangle$ platí $f'(c) = 0$. ■

Poznámka 4.3.1.
Bod $c \in (a\,;\, b)$ leží na úsečke medzi bodmi a, b. Preto sa zvykne vyjadrovať v tvare

$$c = a + \theta(b-a), \qquad \text{kde} \ \ \theta \in (0\,;\, 1)\,.$$

Veta 4.3.3 (Lagrangeova).
Nech pre funkciu f definovanú na uzavretom intervale $\langle a\,;\, b\rangle$ platí:

i) je spojitá na $\langle a\,;\, b\rangle$,
ii) má deriváciu (aj nevlastnú) na $(a\,;\, b)$,

Potom existuje aspoň jeden bod $c \in (a\,;\, b)$ taký, že platí:

$$f'(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}, \qquad \text{t. j.} \ \ f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a). \tag{4.11}$$

Dôkaz.
Pre všetky $x \in \langle a\,;\, b\rangle$ definujme funkciu F vzťahom

$$F(x) = [f(x) - f(a)]\cdot(b-a) - [f(b) - f(a)]\cdot(x-a).$$

Z predpokladov i), ii) vyplýva, že F je na $\langle a\,;\, b\rangle$ spojitá a má na $\langle a\,;\, b\rangle$ deriváciu

$$F'(x) = [f'(x) - 0]\cdot(b-a) - [f(b) - f(a)]\cdot(1-0) = f'(x)(b-a) - [f(b) - f(a)].$$

Navyše platí $F(a) = 0$, $F(b) = 0$, t. j. $F(a) = F(b)$.
Takže sú splnené predpoklady Rolleho vety 4.3.2 a existuje $c \in (a\,;\, b)$ také, že platí:

$$F'(c) = f'(c)\cdot(b-a) - [f(b) - f(a)] = 0, \qquad \text{t. j.} \ \ f'(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}. \ ■$$

Poznámka 4.3.2.
Lagrangeova veta sa často nazýva **veta o prírastku funkcie**, pretože vzťah (4.11) vyjadruje prírastok funkcie f na intervale $\langle a\,;\, b\rangle$. Ak totiž označíme $c = a + \theta(b-a)$, $h = b - a$, t. j. $c = a + \theta h$, $b = a + h$, potom môžeme vzťah (4.11) vyjadriť v tvare

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h = \mathrm{d}f(a+\theta h, h), \qquad \text{kde} \ \ \theta \in (0\,;\, 1)\,.$$

Pre dostatočne malé h môžeme predpokladať $f'(a+\theta h) \approx f'(a)$. Potom môžeme $f(a+h)$ aproximovať hodnotou lineárnej funkcie $\varphi(x) = f(a) + f'(a)x$ v bode h, t. j.

$$f(a+h) \approx \varphi(h) = f(a) + f'(a)h = f(a) + \mathrm{d}f(a,h).$$

Tento vzťah je zhodný zo vzťahom (4.8) na strane 311, ktorý sme dostali pri lokálnej aproximácii funkcie pomocou jej diferenciálu.

Príklad 4.3.1.
Približne odhadnite hodnotu výrazu: a) $\operatorname{tg} 2,1$, b) $\ln 27$.

Riešenie.
a) Označme $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle \frac{2\pi}{3} ; 2,1 \right\rangle$.
Funkcia f je spojitá a pre všetky $x \in \left\langle \frac{2\pi}{3} ; 2,1 \right\rangle$ platí $f'(x) = \cos^{-2} x$. To znamená, že funkcia f spĺňa na intervale $\left\langle \frac{2\pi}{3} ; 2,1 \right\rangle$ predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote. Potom existuje $c \in \left(\frac{2\pi}{3} ; 2,1 \right)$ také, že platí:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg} 2,1 = \frac{1}{\cos^2 c} \left(\frac{2\pi}{3} - 2,1 \right), \quad \text{t. j.} \quad \operatorname{tg} 2,1 = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{\cos^2 c} \left(\frac{2\pi}{3} - 2,1 \right).$$

Keďže $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} = -0,5$, potom ak položíme $c \approx \frac{2\pi}{3}$, dostaneme

$$\operatorname{tg} 2,1 \approx -\sqrt{3} - \frac{1}{0,25} \left(\frac{2\pi}{3} - 2,1 \right) = -1,732\,051 - 4(2,094\,395 - 2,1) = -1,709\,631.$$

Ak porovnáme túto hodnotu s presnou hodnotou $\operatorname{tg} 2,1 = -1,709\,847$, dostaneme chybu výpočtu $|1,709\,847 - 1,709\,631| = 0,000\,216 < 0,01$.

b) Označme $f(x) = \ln x$, $x \in \langle e^3 ; 27 \rangle$.
Funkcia f je spojitá a pre všetky $x \in \langle e^3 ; 27 \rangle$ platí $f'(x) = \frac{1}{x}$. Potom na základe Lagrangeovej vety o strednej hodnote existuje $c \in (e^3 ; 27)$ také, že platí:

$$\frac{27 - e^3}{c} = \ln 27 - \ln e^3 = \ln 27 - 3 \ln e = \ln 27 - 3.$$

Zo vzťahu $e^3 < c < 27$ vyplýva $\frac{27-e^3}{27} < \frac{27-e^3}{c} < \frac{27-e^3}{e^3}$. Potom platí:

$$1 - \frac{e^3}{27} = \frac{27-e^3}{27} < \ln 27 - 3 < \frac{27-e^3}{e^3} = \frac{27}{e^3} - 1, \quad \text{t. j.} \quad 4 - \frac{e^3}{27} < \ln 27 < \frac{27}{e^3} + 2.$$

Ak položíme $e = 2,718\,282$, potom dostaneme $3,256\,091 < \ln 27 < 3,344\,251$. ■

Poznámka 4.3.3.
Ak položíme v predpokladoch Lagrangeovej vety $f(a) = f(b)$, potom dostaneme tvrdenie $f'(c) = 0$. To znamená, že Rolleho veta je dôsledkom Lagrangeovej vety.
Geometrický význam týchto viet je ilustrovaný na obrázkoch 4.3.8 a 4.3.9. Dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $C = [c; f(c)]$ zviera s osou x uhol α, pre ktorý platí:

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(c) = 0, \quad \text{resp.} \quad \operatorname{tg} \alpha = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

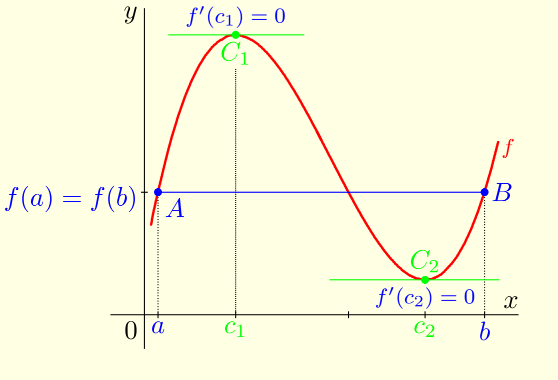
To znamená, že táto dotyčnica je rovnobežná s priamkou, ktorá je určená krajnými bodmi $A = [a; f(a)]$ a $B = [b; f(b)]$. V prípade Rolleho vety je teda rovnobežná s osou x.

Rolleho a Lagrangeova veta zaručujú existenciu aspoň jedného bodu $c \in (a ; b)$, pre ktorý platí $f'(c) = 0$, resp. pre ktorý platí vzťah (4.11). Pomocou nich však takéto body nevieme nájsť a ani nedokážeme určiť ich počet. Funkcia f ilustrovaná na obrázku 4.3.8 má na intervale $(a ; b)$ dva takéto body c_1 a c_2, ale na intervale $(a ; \overline{b})$ iba jeden bod c_1. Funkcia f ilustrovaná na obrázku 4.3.9 má na intervale $(a ; b)$ tiež dva body c_1, c_2.

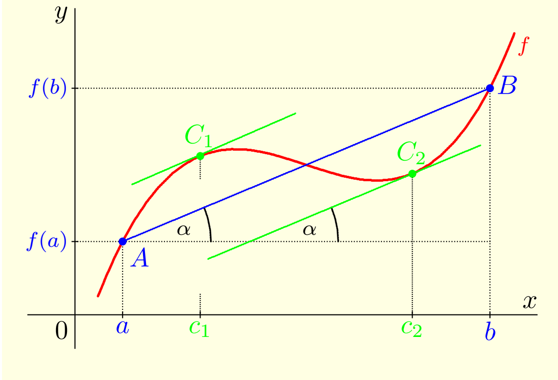
Predtým, ako sformulujeme poslednú z viet o strednej hodnote, uvedieme niektoré dôsledky predchádzajúcej vety. Priamo z Lagrangeovej vety vyplýva nasledujúci dôsledok.

Dôsledok 4.3.3.a.
Nech sú splnené predpoklady Lagrangeovej vety 4.3.3 na intervale $\langle a ; b \rangle$ a nech x_1, x_2, $x_1 < x_2$ sú dva ľubovoľné body ležiace v intervale $\langle a ; b \rangle$.
Potom existuje aspoň jeden bod $c \in (x_1 ; x_2)$ taký, že platí:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_2}, \quad \text{t. j.} \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$



Obr. 4.3.8: Rolleho veta.



Obr. 4.3.9: Lagrangeova veta.

Dôsledok 4.3.3.b.
Ak má funkcia f na intervale $(a\,;\,b)$ nulovú deriváciu, t. j. pre všetky $x \in (a\,;\,b)$ platí $f'(x) = 0$, potom je funkcia f na intervale $(a\,;\,b)$ konštantná.

Dôkaz.
Z vety 4.1.1 vyplýva, že je funkcia f na intervale $(a\,;\,b)$ spojitá. Nech $x_1, x_2 \in (a\,;\,b)$, $x_1 < x_2$ sú dva ľubovoľné body. Potom sú na intervale $\langle x_1\,;\,x_2\rangle$ splnené predpoklady Lagrangeovej vety.
To znamená, že existuje[10] $c \in (x_1\,;\,x_2)$, pre ktoré platí $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0$, t. j. $f(x_1) = f(x_2)$. ■

Dôsledok 4.3.3.c.
Ak majú funkcie f, g na intervale $(a\,;\,b)$ derivácie f', g' také, že pre všetky $x \in (a\,;\,b)$ platí $f'(x) = g'(x)$, potom je funkcia $f - g$ na $(a\,;\,b)$ konštantná.

Dôkaz.
Označme $F = f - g$. Pre všetky $x \in (a\,;\,b)$ platí $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Z toho vyplýva na základe dôsledku 4.3.3.b, že je funkcia $F = f - g$ konštantná. ■

Dôsledok 4.3.3.d.
Ak je funkcia f spojitá na intervale $(a\,;\,b)$ a pre všetky $x \in (a\,;\,b)$ platí $f'(x) \neq 0$, potom je funkcia f na intervale $(a\,;\,b)$ prostá.

Dôkaz.
Dôkaz je podobný ako pri predchádzajúcich dôsledkoch.
Ak $x_1, x_2 \in (a\,;\,b)$, $x_1 < x_2$ sú dva ľubovoľné body, potom existuje bod $c \in (x_1\,;\,x_2)$, pre ktorý platí $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \neq 0$, t. j. $f(x_1) \neq f(x_2)$. ■

Lagrangeova veta o strednej hodnote sa môže s úspechom využiť tiež pri vyšetrovaní limity derivácie danej funkcie, ako to naznačujú nasledujúce vety.

Veta 4.3.4.
Nech je funkcia f definovaná a spojitá na uzavretom intervale $\langle x_0\,;\,x_0 + h\rangle$, kde $h > 0$ a nech má deriváciu f' na otvorenom intervale $(x_0\,;\,x_0 + h)$. Ak existuje (môže byť aj nevlastná) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = b$, potom existuje $f'_+(x_0)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = b = f'_+(x_0)$.

[10] Je zrejmé, že $f'(c) = 0$.

Dôkaz.
Nech $h_1 \in R$ je ľubovoľné také, že $0 < h_1 < h$. Je zrejmé, že na intervale $\langle x_0\,;\, x_0+h_1\rangle$ sú splnené predpoklady Lagrangeovej vety. Potom existuje $c \in (0\,;\, h_1)$ také, že platí:

$$f'(x_0+c) = \frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{x_0+h_1-x_0} = \frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1}.$$

Najprv predpokladajme, že $b \in R$.
Z definície limity sprava vyplýva, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje[11] $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in (x_0\,;\, x_0+h)$, $0 < x - x_0 < \delta$, t. j. pre všetky $x \in (x_0\,;\, x_0+\delta)$ platí $|f'(x) - b| < \varepsilon$.
Potom pre všetky $h_1 < \delta$ platí $x_0 < x_0 + c < x_0 + h_1 < x_0 + \delta$. Z toho vyplýva:

$$|f'(x_0+c) - b| = \left| \frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1} - b \right| < \varepsilon.$$

Ak to zhrnieme, potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $0 < h_1 < \delta$ platí:

$$\left| \frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1} - b \right| < \varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h_1 \to 0+} \frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1} = b.$$

Pre $b = \infty$ je pokračovanie dôkazu podobné ako pre $b \in R$.
Z definície nevlastnej limity vyplýva, že pre každé $0 < r$ existuje $0 < \delta < h$ také, že pre všetky $x \in (x_0\,;\, x_0+\delta)$ platí $r < f'(x)$. Potom pre všetky $h_1 < \delta$ platí:

$$r < f'(x_0+c) = \frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1}, \quad \text{t. j.} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h_1 \to 0+} \frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1} = \infty.$$

Analogicky môžeme pokračovať aj pre $b = -\infty$, čo prenechávame čitateľovi. ■

Veta 4.3.5.
Nech je funkcia f definovaná a spojitá na uzavretom intervale $\langle x_0 - h\,;\, x_0\rangle$, kde $h > 0$ a nech má deriváciu f' na otvorenom intervale $(x_0 - h\,;\, x_0)$.
Ak existuje (aj nevlastná) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$, potom existuje $f'_-(x_0)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0)$.

Dôkaz.
Dôkaz je analogický ako dôkaz vety 4.3.4. ■

Príklad 4.3.2.
Funkcia $f(x) = \arcsin x$, $x \in \langle -1\,;\, 1\rangle$ je spojitá a má deriváciu $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervale $(-1\,;\, 1)$, t. j. na intervale $(-1\,;\, -1+2) = (1-2\,;\, 1)$. Pretože existujú limity

$$\lim_{x \to -1^+} [\arcsin x]' = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} [\arcsin x]' = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty,$$

sú splnené predpoklady predchádzajúcich viet 4.3.4, resp. 4.3.5 a platí (obr. 4.3.10):

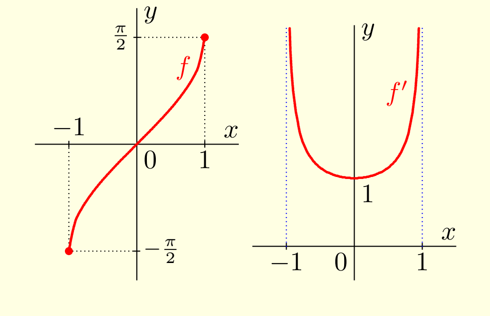
$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} [\arcsin x]' = \infty, \qquad f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} [\arcsin x]' = \infty. \ ■$$

Poznámka 4.3.4.
Z viet 4.3.4 a 4.3.5 vyplýva, že ak má funkcia f deriváciu f' na uzavretom intervale $\langle a\,;\, b\rangle$, potom je táto derivácia f' v každom bode $x \in \langle a\,;\, b\rangle$ spojitá alebo má v bode x neodstrániteľnú nespojitosť 2. druhu (viď nasledujúci príklad).

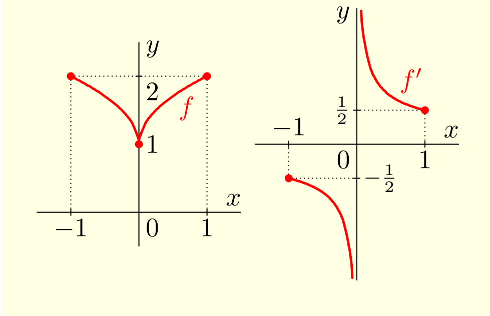
Príklad 4.3.3.
Funkcia $f(x) = 1 + \sqrt[4]{x^2}$, $x \in \langle -1\,;\, 1\rangle$ je spojitá a pre všetky $x \neq 0$ platí $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt[4]{x^6}}$. Navyše pre jednostranné limity funkcie f' v bode 0 platí:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{2\sqrt[4]{x^6}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-|x|}{2\sqrt[4]{x^2}\,|x|} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2\sqrt[4]{x^6}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{2\sqrt[4]{x^2}\,|x|} = \infty.$$

To znamená, že funkcia f spĺňa predpoklady vety 4.3.4 na intervale $\langle -1\,;\, 0\rangle$ a predpoklady vety 4.3.5 na intervale $\langle 0\,;\, 1\rangle$. Potom platí $f'_-(0) = -\infty$, $f'_+(0) = \infty$ (obr. 4.3.11). ■



Obr. 4.3.10: Príklad 4.3.2.



Obr. 4.3.11: Príklad 4.3.3.

Veta 4.3.6 (Cauchyho).
Nech pre funkcie f, g definované na uzavretom intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ platí:

i) f, g sú spojité na $\langle a\,;\,b\rangle$,
ii) f má deriváciu (aj nevlastnú) na $(a\,;\,b)$,
iii) g má vlastnú deriváciu na $(a\,;\,b)$, pričom pre všetky $x\in(a\,;\,b)$ platí $g'(x)\neq 0$.

Potom existuje aspoň jeden bod $c\in(a\,;\,b)$ taký, že platí:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},\qquad \text{t. j.}\quad g'(c)\cdot[f(b)-f(a)]=f'(c)\cdot[g(b)-g(a)].$$

Dôkaz.
Z predpokladu $g'(x)\neq 0$ na $(a\,;\,b)$ a zo spojitosti g na $\langle a\,;\,b\rangle$ vyplýva:

$$g(a)\neq g(b),\qquad \text{t. j.}\quad g(b)-g(a)\neq 0.$$

Keby platilo $g(a)=g(b)$, potom by na základe Rolleho vety existoval bod $d\in(a\,;\,b)$ taký, že $g'(d)=0$. To je spor s predpokladom iii).

Zvyšok dôkazu je analogický ako pri Lagrangeovej vete. Funkcia F, definovaná vzťahom

$$F(x)=[f(x)-f(a)]\cdot[g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)]\cdot[g(x)-g(a)]\,,\quad x\in\langle a\,;\,b\rangle$$

spĺňa predpoklady Rolleho vety, pretože je na $\langle a\,;\,b\rangle$ spojitá, má na $\langle a\,;\,b\rangle$ deriváciu

$$F'(x)=f'(x)[g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)]g'(x)$$

a platí $F(a)=F(b)=0$. Potom existuje $c\in(a\,;\,b)$ také, že platí:

$$F'(c)=f'(c)\cdot[g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)]g'(c)=0,\qquad \text{t. j.}\quad \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.\ \blacksquare$$

Poznámka 4.3.5.
Lagrangeovu vetu môžeme považovať za dôsledok Cauchyho vety. Stačí v predpokladoch Cauchyho vety uvažovať funkciu g definovanú vzťahom $g(x)=x$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$.

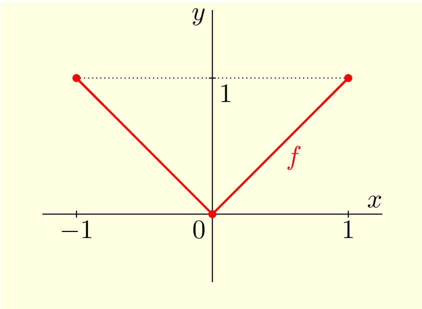
Ak vynecháme niektorý z predpokladov vo vetách o strednej hodnote, potom ich tvrdenia vo všeobecnosti prestávajú platiť (viď nasledujúce príklady).

Príklad 4.3.4.
Funkcia $f\colon\ y=|x|$, $x\in\langle -1\,;\,1\rangle$ je na intervale $\langle -1\,;\,1\rangle$ spojitá.
Pre všetky $x\in\langle -1\,;\,0)$ platí $f'(x)=[-x]'=-1$, pre všetky $x\in(0\,;\,1\rangle$ platí $f'(x)=x'=1$, ale $f'(0)$ neexistuje (príklad 4.1.6). Navyše platí $f(-1)=f(1)=1$. To znamená, že sú splnené všetky predpoklady Rolleho vety, okrem predpokladu existencie f' na $(-1\,;\,1)$.
Je zrejmé, že bod $c\in(-1\,;\,1)$ pre ktorý platí $f'(c)=0$ neexistuje (obrázok 4.3.12). $\blacksquare$

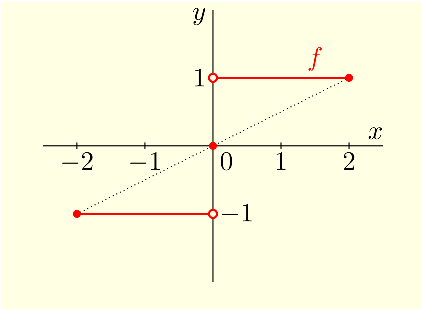
[11]Bez straty na všeobecnosti môžeme predpokladať, že platí $\delta<h$.

Príklad 4.3.5.
Funkcia $f\colon\ y = \operatorname{sgn} x$, $x \in \langle -2\,;\,2\rangle$ má deriváciu v každom bode svojho definičného oboru (príklad 4.1.7). Pre všetky $x \neq 0$ platí $f'(x) = 0$ a pre $x = 0$ platí $f'(0) = \infty$.
To znamená, že funkcia f má deriváciu v každom bode intervalu $\langle -2\,;\,2\rangle$. Ale nie je spojitá v bode $x = 0$, takže nie sú splnené predpoklady Lagrangeovej vety. Je zrejmé (viď obrázok 4.3.13), že neexistuje bod $c \in (-2\,;\,2)$, pre ktorý platí:

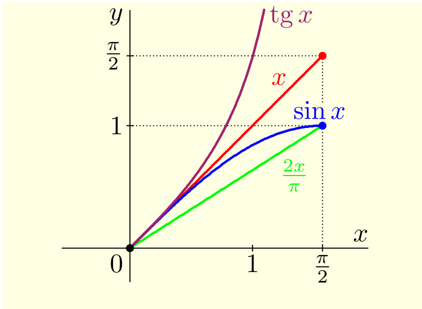
$$f'(c) = \tfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \tfrac{1-(-1)}{2[1-(-1)]} = \tfrac{1}{2}. \ \blacksquare$$



Obr. 4.3.12: Príklad 4.3.4.



Obr. 4.3.13: Príklad 4.3.5.



Obr. 4.3.14: Príklad 4.3.7.

Vety o strednej hodnote funkcie patria medzi najdôležitejšie výsledky diferenciálneho počtu a ako dokazujú nasledujúce príklady, využívajú sa pri riešení mnohých problémov.

Príklad 4.3.6.
Dokážte, že funkcia $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$, $x \in R$ má práve jeden nulový bod a nájdite interval, v ktorom leží tento nulový bod.

Riešenie.
Funkcia f je spojitá na R a pre všetky $x \in R$ platí:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2) = 3(x^2 - 2x + 1) + 3 = 3(x-1)^2 + 3 \geq 3 > 0.$$

Keďže $f(-1) = -9 < 0$ a $f(0) = 1 > 0$, potom na základe Cauchyho vety o nulovej hodnote (veta 3.3.12) existuje aspoň jeden nulový bod v intervale $(-1\,;\,0)$.
Teraz dokážeme sporom, že funkcia f nemá viac ako dva korene.
Predpokladajme, že existujú dva body $x_1 < x_2$ také, že $f(x_1) = f(x_2) = 0$. To znamená, že sú na intervale $\langle x_1\,;\,x_2\rangle$ splnené predpoklady Rolleho vety o strednej hodnote a existuje $c \in (x_1\,;\,x_2)$ také, že $f'(c) = 0$. Lenže pre všetky $c \in R$ platí $f'(c) \neq 0$. To je spor.
Takže funkcia f má práve jeden koreň, ktorý leží v intervale $(-1\,;\,0)$. $\blacksquare$

Príklad 4.3.7.
Dokážte, že pre všetky $x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ platí vzťah $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Riešenie.
Situácia je znázornená na obrázku 4.3.14. Nech $b \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ je ľubovoľné.
a) Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$ je na intervale $\langle 0\,;\,b\rangle$ spojitá a na $(0\,;\,b)$ má vlastnú deriváciu

$$1 < f'(x) = \tfrac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{pretože} \quad 0 < \cos x < 1 \quad \text{pre} \quad x \in \left(0\,;\,\tfrac{\pi}{2}\right).$$

Potom na základe Lagrangeovej vety existuje $c\in(0\,;\,b)$ také, že

$$\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} 0 = \tfrac{b-0}{\cos^2 c}, \quad \text{t. j.} \quad \operatorname{tg} b = \tfrac{b}{\cos^2 c} > \tfrac{b}{1} = b.$$

b) Funkcia $g(x) = \sin x$ je na intervale $\langle 0\,;\,b\rangle$ spojitá a pre všetky $x\in(0\,;\,b)$ platí $0 < g'(x) = \cos x < 1$.
Potom na základe Lagrangeovej vety existuje $c\in(0\,;\,b)$ také, že

$$\sin b - \sin 0 = \cos c \cdot (b-0), \quad \text{t. j.} \quad \sin b = \cos c \cdot b < b.$$

c) Funkcia $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ je na intervale $\big\langle b\,;\,\frac{\pi}{2}\big\rangle$ spojitá a pre všetky $x\in\big(b\,;\,\frac{\pi}{2}\big)$ platí:

$$h'(x) = \Big[\tfrac{\sin x}{x}\Big]' = \tfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \tfrac{\cos x\ (x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0, \tag{4.12}$$

pretože pre všetky $x\in\big(0\,;\,\frac{\pi}{2}\big)$ platí $0 < \cos x < 1$, $0 < x^2$, $x < \operatorname{tg} x$.
Potom na základe Lagrangeovej vety existuje $c\in\big(b\,;\,\frac{\pi}{2}\big)$ také, že platí:

$$\tfrac{\cos c\ (c - \operatorname{tg} c)}{c^2}\Big(\tfrac{\pi}{2} - b\Big) = \tfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} - \tfrac{\sin b}{b} = \tfrac{2}{\pi} - \tfrac{\sin b}{b}.$$

Zo vzťahu (4.12) a z nerovnosti $0 < b < \frac{\pi}{2}$ potom vyplýva:

$$\tfrac{2}{\pi} - \tfrac{\sin b}{b} < 0, \quad \text{t. j.} \quad \tfrac{2}{\pi} < \tfrac{\sin b}{b}, \quad \text{resp.} \quad \tfrac{2b}{\pi} < \sin b.$$

Tým je vzťah $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ dokázaný pre všetky $x\in\big(0\,;\,\frac{\pi}{2}\big)$. ■

Príklad 4.3.8.
Dokážte, že Riemannov rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje pre všetky $p > 1$.

Riešenie.
Nech $p > 1$. Označme $f(x) = x^{1-p}$, $x\in\langle 1\,;\,\infty)$.
Funkcia f je spojitá na $\langle 1\,;\,\infty)$ a pre všetky $x\in\langle 1\,;\,\infty)$ platí $f'(x) = (1-p)x^{-p}$.
Funkcia f spĺňa na každom intervale $\langle m\,;\,m+1\rangle$, kde $m\in N$, predpoklady Lagrangeovej vety. Potom existuje $c_m\in(m\,;\,m+1)$ také, že platí:

$$\tfrac{1}{(m+1)^{p-1}} - \tfrac{1}{m^{p-1}} = \tfrac{1-p}{c_m^p}(m+1-m) = \tfrac{1-p}{c_m^p}.$$

Z platnosti vzťahov $1 \le m < c_m < m+1$ a $1 < p$ ďalej vyplýva:

$$\tfrac{1}{1-p}\Big[\tfrac{1}{(m+1)^{p-1}} - \tfrac{1}{m^{p-1}}\Big] = \tfrac{1}{p-1}\Big[\tfrac{1}{m^{p-1}} - \tfrac{1}{(m+1)^{p-1}}\Big] = \tfrac{1}{c_m^p} > \tfrac{1}{(m+1)^p}.$$

Konvergenciu radu dokážeme pomocou Cauchy–Bolzanovho princípu (veta 2.4.4).
Nech $n, k\in N$ sú ľubovoľné prirodzené čísla, potom platí:

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| &= \tfrac{1}{(n+1)^p} + \tfrac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \tfrac{1}{(n+k)^p} \le \\ &\le \tfrac{1}{p-1}\Big[\tfrac{1}{n^{p-1}} - \tfrac{1}{(n+1)^{p-1}} + \tfrac{1}{(n+1)^{p-1}} - \tfrac{1}{(n+2)^{p-1}} + \cdots + \tfrac{1}{(n+k-1)^{p-1}} - \tfrac{1}{(n+k)^{p-1}}\Big] = \\ &= \tfrac{1}{p-1}\Big[\tfrac{1}{n^{p-1}} - \tfrac{1}{(n+k)^{p-1}}\Big] < \tfrac{1}{p-1}\cdot\tfrac{1}{n^{p-1}}. \end{aligned}$$

To znamená, že $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}|$ môžeme ohraničiť výrazom, ktorý nezávisí od k.
Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, potom platí:

$$\tfrac{1}{p-1}\cdot\tfrac{1}{n^{p-1}} < \varepsilon \iff \tfrac{1}{\varepsilon(p-1)} < n^{p-1} \iff n_\varepsilon = \sqrt[p-1]{\tfrac{1}{\varepsilon(p-1)}} < n.$$

Ak zvolíme[12] $n_0 = \lfloor n_\varepsilon + 1\rfloor$, potom pre všetky $n, k\in N$, $n \ge n_0$ platí:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \tfrac{1}{p-1}\cdot\tfrac{1}{n^{p-1}} < \varepsilon.$$

To znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0\in N$ také, že pre všetky $n, k\in N$, $n \ge n_0$ platí nerovnosť $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$. T. j. Riemannov rad pre $p > 1$ konverguje. ■

[12] n_0 je najmenšie prirodzené číslo, ktoré je väčšie alebo rovné ako n_ε.

Príklad 4.3.9.
Dokážte, že pre všetky $x>0$ platí $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

Riešenie.
Nech $b>0$ je ľubovoľné.
Funkcia $f(x)=\ln(x+1)$ je na $\langle 0\,;\,b\rangle$ spojitá a $f'(x)=\frac{1}{1+x}>0$ pre všetky $x\in(0\,;\,b)$.
Potom na základe Lagrangeovej vety existuje $c\in(0\,;\,b)$ také, že platí:
$$\ln(1+b)=\ln(1+b)-\ln(1+0)=\tfrac{1}{1+c}\cdot(b-0)=\tfrac{b}{1+c}.$$
Zo vzťahu $0<c<b$ vyplýva $1<1+c<1+b$ a z toho ďalej vyplýva:
$$\tfrac{1}{1+b}<\tfrac{1}{1+c}<1,\qquad \text{t. j.}\ \ \tfrac{b}{1+b}<\ln(1+b)=\tfrac{b}{1+c}<b.$$
Tým je vzťah $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ dokázaný pre všetky $x>0$. ■

Príklad 4.3.10.
Dokážte: a) $1+\frac{1}{1+\mathrm{e}}<\ln(1+\mathrm{e})<1+\frac{1}{\mathrm{e}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]=\ln 2$.

Riešenie.
Nech $r>0$. Ak dosadíme do $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ hodnotu $x=\frac{1}{r}$, potom platí:
$$\tfrac{1}{r+1}=\tfrac{\frac{1}{r}}{1+\frac{1}{r}}\cdot\tfrac{r}{r}=\tfrac{\frac{1}{r}}{1+\frac{1}{r}}<\ln\left[1+\tfrac{1}{r}\right]=\ln\tfrac{r+1}{r}=\ln(r+1)-\ln r<\tfrac{1}{r}. \tag{4.13}$$
a) Ak dosadíme do vzťahu (4.13) za r hodnotu $r=\mathrm{e}$, potom dostaneme
$$\tfrac{1}{\mathrm{e}+1}<\ln(\mathrm{e}+1)-\ln\mathrm{e}=\ln(1+\mathrm{e})-1<\tfrac{1}{\mathrm{e}},\qquad \text{t. j.}\ \ 1+\tfrac{1}{1+\mathrm{e}}<\ln(1+\mathrm{e})<1+\tfrac{1}{\mathrm{e}}.$$
b) Nech $n\in N$, $n\geq 2$.
Ak dosadíme do (4.13) za r postupne hodnoty $n-1$, n, $n+1$, …, $2n$, potom platí:
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}+\cdots+\tfrac{1}{2n}&<[\ln n-\ln(n-1)]+[\ln(n+1)-\ln n]+\cdots\\&\quad\cdots+[\ln(2n)-\ln(2n-1)]=\ln(2n)-\ln(n-1),\\ \tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}+\cdots+\tfrac{1}{2n}&>[\ln(n+1)-\ln n]+[\ln(n+2)-\ln(n+1)]+\cdots\\&\quad\cdots+[\ln(2n+1)-\ln(2n)]=\ln(2n+1)-\ln n.\end{aligned}$$
Z toho vyplýva, že pre všetky $n\in N$, $n\geq 2$ platí:
$$\ln\tfrac{2n+1}{n}=\ln(2n+1)-\ln n<\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}+\cdots+\tfrac{1}{2n}<\ln(2n)-\ln(n-1)=\ln\tfrac{2n}{n-1}.$$
Potom na základe vety o zovretí limít postupností (dôsledok 2.3.17.c) platí:
$$\begin{aligned}\ln 2=\ln\lim_{n\to\infty}\left[2+\tfrac{1}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\ln\tfrac{2n+1}{n}\leq\lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}+\cdots+\tfrac{1}{2n}\right]\leq\\ \leq\lim_{n\to\infty}\ln\tfrac{2n}{n-1}=\ln\lim_{n\to\infty}\left[2+\tfrac{2}{n-1}\right]=\ln 2.\ ■\end{aligned}$$

4.3.2 L'Hospitalovo pravidlo

Pri praktickom výpočte limity funkcie, ktorá má v danom bode tvar neurčitého výrazu typu $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\pm\infty}{\infty}$ sa často používa **l'Hospitalovo pravidlo**,[13] ktoré je uvedené vo vetách 4.3.7 a 4.3.8.

Veta 4.3.7 (I. l'Hospitalovo pravidlo).
Nech pre funkcie f, g definované v nejakom prstencovom okolí $P(a)$ bodu $a\in R^*$ platí:

i) pre všetky $x\in P(a)$ existujú konečné derivácie $f'(x)$, $g'(x)$, pričom $g'(x)\neq 0$,

[13]Pravidlo je pomenované po francúzskom matematikovi *G. F. A. de l'Hospitalovi*, ktorý ho publikoval v roku 1696. Jeho skutočným autorom je švajčiarsky matematik *Johann Bernoulli*.

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, iii) existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$.

Potom existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí rovnosť $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.

Dôkaz.

Z i) vyplýva na základe vety 4.1.4, že sú funkcie f, g spojité v okolí $P(a)$.

Najprv predpokladajme, že platí $a \in R$, $b \in R^*$, $P(a) = (a-\delta\,;\, a+\delta) - \{a\}$, kde $\delta > 0$.
Ak položíme[14] $f(a) = g(a) = 0$, potom budú funkcie f, g spojité v bode a.

Zvoľme postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby $a < x_n < a+\delta$ pre všetky $n \in N$ a aby $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Na každom z intervalov $\langle a\,;\, x_n\rangle$, $n \in N$ spĺňajú funkcie f, g predpoklady Cauchyho vety. Potom pre všetky $n \in N$ existuje bod $c_n \in (a\,;\, x_n)$ taký, že platí:

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \frac{f(x_n)-0}{g(x_n)-0} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Keďže $a < c_n < x_n$ pre všetky $n \in N$, potom na základe vety o zovretí platí:

$$\lim_{n\to\infty} a = a \le \lim_{n\to\infty} c_n \le \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Ak to zhrnieme, potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

Zvoľme $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby pre všetky $n \in N$ platilo $a-\delta < x_n < a$ a aby $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Potom na základe Cauchyho vety pre všetky $n \in N$ existuje $c_n \in (x_n\,;\, a)$ také, že

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(a)-f(x_n)}{g(a)-g(x_n)} = \frac{0-f(x_n)}{0-g(x_n)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

Analogicky ako pri limite sprava platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ a tiež

$$b = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Teraz predpokladajme, že platí $a = \infty$, $b \in R^*$, $P(a) = P(\infty) = (\delta\,;\, \infty)$, kde $\delta > 0$.

Ak označíme $x = t^{-1}$, potom $\lim\limits_{x\to\infty} x = \lim\limits_{t\to 0^+} t^{-1}$ a pre funkcie f, g platí:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f(t^{-1}), \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{t\to 0^+} g(t^{-1}).$$

Označme $F(t) = f(t^{-1})$, $G(t) = g(t^{-1})$. Tieto funkcie sú definované na intervale $(0\,;\, \delta^{-1})$, sú zložené s vnútornou zložkou $x = x(t) = t^{-1}$ a pre ich derivácie na $(0\,;\, \delta^{-1})$ platí:

$$F'(t) = \big[f(t^{-1})\big]' = f'(t^{-1}) \cdot [t^{-1}]' = -f'(t^{-1})\, t^{-2}, \quad G'(t) = \big[g(t^{-1})\big]' = -g'(t^{-1})\, t^{-2}.$$

Z toho na základe už dokázaného (pre $t \to 0^+$) platí:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t^{-1})}{g(t^{-1})} = \lim_{t\to 0^+} \frac{[f(t^{-1})]'}{[g(t^{-1})]'} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-f'(t^{-1})\, t^{-2}}{-g'(t^{-1})\, t^{-2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(t^{-1})}{g'(t^{-1})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pre $a = -\infty$, $b \in R^*$, $P(a) = (-\infty\,;\, \delta)$, $\delta < 0$ je dôkaz analogický. V tomto prípade platí:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(t^{-1})}{g(t^{-1})} = \lim_{t\to 0^-} \frac{[f(t^{-1})]'}{[g(t^{-1})]'} = \lim_{t\to 0^-} \frac{f'(t^{-1})}{g'(t^{-1})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \ \blacksquare$$

Veta 4.3.8 (II. l'Hospitalovo pravidlo).

Nech pre funkcie f, g definované v nejakom prstencovom okolí $P(a)$ bodu $a \in R^*$ platí:

i) pre všetky $x \in P(a)$ existujú konečné derivácie $f'(x)$, $g'(x)$, pričom $g'(x) \neq 0$,

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, iii) existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in R^*$.

Potom existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí rovnosť $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$.

[14]Pri vyšetrovaní limity funkcie v danom bode je dôležité chovanie tejto funkcie v prstencovom okolí tohto bodu.

Dôkaz.
Z i) vyplýva na základe vety 4.1.4, že sú funkcie f, g spojité v okolí $P(a)$.
Predpokladajme, že $a \in R$, $b \in R^*$, $P(a) = (a-\delta\,;\, a+\delta) - \{a\}$, kde $\delta > 0$.
Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká, že pre všetky $n \in N$ platí $a_n \in (a\,;\, a+\delta)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Nech a_n, $n \in N$ je ľubovoľný, ale pevne zvolený člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Zostrojme (ľubovoľnú) postupnosť $\{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \subset (a\,;\, a_n)$ tak, aby $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^n = a$.
Na každom z intervalov $\langle x_k^n\,;\, a_n\rangle$, $k \in N$ spĺňajú funkcie f, g predpoklady Cauchyho vety. Potom pre všetky $k \in N$ existuje $c_k^n \in (x_k^n\,;\, a_n)$ také, že platí:

$$\frac{f'(c_k^n)}{g'(c_k^n)} = \frac{f(a_n)-f(x_k^n)}{g(a_n)-g(x_k^n)} = \frac{\frac{f(x_k^n)-f(a_n)}{g(x_k^n)}}{\frac{g(x_k^n)-g(a_n)}{g(x_k^n)}} = \frac{\frac{f(x_k^n)}{g(x_k^n)} - \frac{f(a_n)}{g(x_k^n)}}{1-\frac{g(a_n)}{g(x_k^n)}}.$$

Keďže a_n, $f(a_n)$, $g(a_n)$ sú vzhľadom na $\{x_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ konštanty, potom na základe ii) platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{g(x_k^n)} = \frac{f(a_n)}{\infty} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{g(a_n)}{g(x_k^n)} = \frac{g(a_n)}{\infty} = 0.$$

Potom pre limity platí:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f'(c_k^n)}{g'(c_k^n)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{f(x_k^n)}{g(x_k^n)} - \frac{f(a_n)}{g(x_k^n)}}{1-\frac{g(a_n)}{g(x_k^n)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k^n)}{g(x_k^n)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{4.14}$$

Pre všetky $n \in N$, $k \in N$ platí $a < x_k^n < c_k^n < a_n$. Keďže $a_n \to a$ pre $n \to \infty$, potom tiež $c_k^n \to a$ pre $n \to \infty$, $k \to \infty$. Vzťah (4.14) platí pre všetky $n \in N$. To znamená, že platí:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f'(c_k^n)}{g'(c_k^n)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Rovnosť limít zľava sa dokáže analogicky. Zostrojme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a-\delta\,;\, a)$ tak, aby $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Pre všetky $n \in N$ zostrojme $\{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \subset (a_n\,;\, a)$ tak, aby $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^n = a$.
Potom na základe Cauchyho vety pre všetky $k \in N$ existuje $c_k^n \in (a_n\,;\, x_k^n)$ také, že

$$\frac{f'(c_k^n)}{g'(c_k^n)} = \frac{f(a_n)-f(x_k^n)}{g(a_n)-g(x_k^n)} = \frac{\frac{f(x_k^n)}{g(x_k^n)} - \frac{f(a_n)}{g(x_k^n)}}{1-\frac{g(a_n)}{g(x_k^n)}}, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{f'(c_k^n)}{g'(c_k^n)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k^n)}{g(x_k^n)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Potom zo vzťahu $c_k^n \to a$ pre $n \to \infty$, $k \to \infty$ vyplýva:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f'(c_k^n)}{g'(c_k^n)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Pre $a = \infty$, $b \in R^*$, $P(a) = P(\infty) = (\delta\,;\, \infty)$, $\delta > 0$ je dôkaz prakticky totožný ako pri limite zľava a pre $a = -\infty$, $b \in R^*$, $P(a) = P(-\infty) = (-\infty\,;\, \delta)$, $\delta < 0$ je totožný ako pri limite sprava. Preto ich prenechávame čitateľovi ako domáce cvičenie. ■

Poznámka 4.3.6.
Predchádzajúca veta platí aj v prípade, keď $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
Potom pre $F(x) = -f(x)$ platí $F'(x) = [-f(x)]' = -f'(x)$, $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$. Z toho vyplýva:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\lim_{x\to a} \frac{-f(x)}{g(x)} = -\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{g(x)} = -\lim_{x\to a} \frac{F'(x)}{g'(x)} = -\lim_{x\to a} \frac{-f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka 4.3.7.
Obidve vety 4.3.7 a 4.3.8 zostávajú v platnosti aj pre jednostranné limity.

Poznámka 4.3.8.
V praxi sa nepoužíva označenie I. alebo II. l'Hospitalovo pravidlo, ale iba l'Hospitalovo pravidlo. V budúcnosti sa obmedzíme už iba na toto označenie.

Príklad 4.3.11.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$.

Riešenie.
Označme $a = 2$, $f(x) = x^3 - 8$, $g(x) = x - 2$, $x \in R - \{2\}$. Za okolie $P(2)$ môžeme zvoliť ľubovoľné prstencové okolie bodu 2, v tomto prípade aj $P(2) = R - \{2\}$.
Pre všetky $x \in P(2)$ existujú derivácie $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 1 \neq 0$. Ďalej platí:

$$\lim_{x\to 2}(x^3-8) = \lim_{x\to 2}(x-2) = 0, \qquad \lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1} = \lim_{x\to 2} 3x^2 = 3\cdot 2^2 = 12.$$

Tým sú overené predpoklady l'Hospitalovho pravidla a platí $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2}{1} = 12$.

Danú limitu môžeme vypočítať aj bez l'Hospitalovho pravidla:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12. \blacksquare$$

Príklad 4.3.12.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Riešenie.
Predpoklady l'Hospitalovho pravidla sú splnené, pretože pre všetky $x \in P(\infty) = (0\,;\,\infty)$ existujú konečné derivácie $f'(x) = [\ln x]' = \frac{1}{x}$, $g'(x) = [x]' = 1 \neq 0$ a existujú limity

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \lim_{x\to\infty} x = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Z toho vyplýva, že $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$. $\blacksquare$

Pri praktickom používaní l'Hospitalovho pravidla je veľmi dôležité, aby sme **overili všetky predpoklady**. V opačnom prípade (viď príklady 4.3.13, 4.3.15) môžeme dospieť k nesprávnym výsledkom alebo sa k výsledku daným postupom nedopátrame. Platnosť predpokladu iii) sa v praxi overuje priebežne počas výpočtu limity.

Obrátené tvrdenie l'Hospitalovho pravidla neplatí (príklad 4.3.13). To znamená, že z existencie $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ vo všeobecnosti nevyplýva existencia $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Príklad 4.3.13.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Riešenie.
Označme $P(0) = (-1\,;\,1) - \{0\}$, $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$. Pre všetky $x \in P(0)$ platí:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, \qquad g'(x) = \cos x \neq 0.$$

Keďže je funkcia $\sin\frac{1}{x}$ ohraničená a $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, potom (dôsledok 3.2.4.c) platí:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\Big[2x\sin\frac{1}{x}\Big] = 2\lim_{x\to 0}\Big[x\sin\frac{1}{x}\Big] = 0, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\sin x = 0.$$

Potom (l'Hospitalovo pravidlo) platí:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x} = \frac{2\lim\limits_{x\to 0}[x\sin\frac{1}{x}] - \lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = -\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}.$$

Keďže $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ neexistuje, neexistuje tiež $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.
L'Hospitalovo pravidlo v tomto prípade **použiť nemôžeme**. Neoverili sme totiž platnosť predpokladu iii). Tento predpoklad nie je splnený, pretože neexistuje limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Daná limita existuje, pretože zo vzťahov $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\sin\frac{1}{x}\right]=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ vyplýva:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left[x\sin\frac{1}{x}\,\frac{x}{\sin x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[x\sin\frac{1}{x}\right]\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0\cdot 1=0.\ \blacksquare$$

Poznámka 4.3.9.
L'Hospitalovo pravidlo môžeme pri praktickom výpočte limity použiť aj niekoľkokrát za sebou. Ak sú splnené predpoklady pre funkcie f', g', f'', g'', f''', g''', $\ldots$, $f^{(k)}, g^{(k)}$, $k\in N$ a existuje $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$, potom ho môžeme použiť k-krát za sebou podľa vzoru

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}.$$

Príklad 4.3.14.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Riešenie.
Použijeme l'Hospitalovo pravidlo niekoľkokrát za sebou.
Zvoľme $P(0)=(-1\,;\,1)-\{0\}$. Pre všetky $x\in P(0)$ platí $[x-\sin x]'=1-\cos x$, $[x^3]'=3x^2$. Ďalej platí $\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x)=\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$. Ak existuje limita na pravej strane, potom

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{[x-\sin x]'}{[x^3]'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}.$$

Keďže $[1-\cos x]'=\sin x$, $[3x^2]'=6x\neq 0$ pre $x\in P(0)$, $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=\lim\limits_{x\to 0}3x^2=0$, potom (ak existuje limita na pravej strane) platí:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos x]'}{[3x^2]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}.$$

Pre všetky $x\in P(0)$ platí $[\sin x]'=\cos x$, $[6x]'=6\neq 0$ a $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\lim\limits_{x\to 0}6x=0$. Ak existuje limita na pravej strane, potom platí:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x]'}{[6x]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Tým sme overili aj platnosť predpokladu iii) pre posledné použitie l'Hospitalovho pravidla a zároveň aj pre obe predchádzajúce použitia. Ak to zhrnieme, potom platí:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{[x-\sin x]'}{[x^3]'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\cos x]'}{[3x^2]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.\ \blacksquare$$

Poznámka 4.3.10.
Pri výpočte limity z predchádzajúceho príkladu by sme mohli písať

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{[x-\sin x]'}{[x^3]'}=\lim_{x\to 0}\frac{[x-\sin x]''}{[x^3]''}=\lim_{x\to 0}\frac{[x-\sin x]'''}{[x^3]'''}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Príklad 4.3.15.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

Riešenie.
Zvoľme $P(\infty)=(0\,;\,\infty)$.
Pre všetky $x\in P(\infty)$ platí $[e^x\pm e^{-x}]'=e^x\mp e^{-x}$. Ďalej platí $\lim\limits_{x\to\infty}[e^x\pm e^{-x}]=\infty\pm 0=\infty$.
L'Hospitalovo pravidlo nám pri výpočte tejto limity nepomôže, pretože nedokážeme overiť splnenie predpokladu iii). Platí totiž

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[e^x+e^{-x}]'}{[e^x-e^{-x}]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{[e^x-e^{-x}]'}{[e^x+e^{-x}]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Danú limitu môžeme vyriešiť napríklad nasledujúcim spôsobom
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1. \blacksquare$$

Príklad 4.3.16.
Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} [e^x\, x^{-n}]$, kde $n\in N$.

Riešenie.
L'Hospitalovo pravidlo použijeme n-krát.
Zvoľme $P(\infty) = (0\,;\,\infty)$. Pre všetky $x\in P(\infty)$ a pre všetky $k\in N$, $k\leq n$ existujú derivácie
$$[e^x]^{(k)} = e^x, \qquad [x^n]^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \qquad [x^n]^{(n)} = n!x^0 = n!.$$
Pre všetky $k\in N$, $k<n$ platí:
$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^n = \lim_{x\to\infty} nx^{n-1} = \lim_{x\to\infty} [n(n-1)x^{n-1}] = \cdots = \lim_{x\to\infty} [n\cdots 2x] = \infty.$$
Potom na základe l'Hospitalovho pravidla platí:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n\cdots 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \frac{\infty}{n!} = \infty.$$
Keďže existuje posledná limita na pravej strane, existujú aj predchádzajúce limity a platia rovnosti limít.[15] To znamená, že platí $\lim\limits_{x\to\infty} [e^x\, x^{-n}] = \infty$. $\blacksquare$

4.3.3 Neurčité výrazy

L'Hospitalovo pravidlo môžeme použiť aj na výpočet limít z neurčitých výrazov typu $\pm\infty\cdot 0$, $\infty-\infty$, ∞^0, 0^0 alebo $1^{\pm\infty}$. Tieto limity prevedieme vhodnými úpravami na limity neurčitých výrazov typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\pm\infty}{\infty}$ a použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Budeme pritom predpokladať, že $a\in R^* = R\cup\{\pm\infty\}$ a že sú funkcie f, g definované v nejakom (vhodnom) prstencovom okolí $P(a)$.

- **Typ $\pm\infty\cdot 0$, t. j. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)]$, kde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$**

V tomto prípade môžeme teoreticky použiť obidve l'Hospitalove pravidlá.

Z vety 3.2.9 vyplýva, že platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$. To znamená, že je funkcia $\frac{1}{f}$ definovaná v okolí[16] $P(a)$ a platí:
$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \qquad \text{pre všetky } x\in P(a).$$
Ak pre všetky $x\in P(a)$ sú $g'(x)$, $[\frac{1}{f(x)}]'\neq 0$ konečné a existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{g'(x)}{[\frac{1}{f(x)}]'}$, potom
$$\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{[\frac{1}{f(x)}]'}.$$
Ak existuje $\lim\limits_{x\to a} [\frac{1}{g(x)}]$, potom platí $\lim\limits_{x\to a} [\frac{1}{g(x)}] = \infty$ alebo $\lim\limits_{x\to a} [\frac{1}{g(x)}] = -\infty$.
To znamená, že je funkcia $\frac{1}{g}$ definovaná v okolí $P(a)$. Ak existujú v okolí $P(a)$ konečné derivácie $f'(x)$, $[\frac{1}{g(x)}]'\neq 0$ a existuje limita ich podielu pre $x\to a$, potom platí:
$$\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{[\frac{1}{g(x)}]'}.$$

[15] Opäť sme platnosť predpokladu iii) overovali až počas vlastného výpočtu limity.
[16] Funkcia $\frac{1}{f}$ je definovaná v nejakom prstencovom podokolí $P_1(a)\subset P(a)$. Ale pre praktický výpočet to nemá vplyv, preto to nebudeme komplikovať. Táto poznámka platí aj pre nasledujúce neurčité výrazy.

- **Typ $\infty - \infty$, t. j. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)]$, kde $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$**

  Z predpokladov vyplýva $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$. Potom pre všetky $x \in P(a)$ platí:
$$f(x) - g(x) = \frac{f(x)g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g(x)}{f(x)} = f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$
Ak pre všetky $x \in P(a)$ existujú konečné derivácie $[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}]'$, $[\frac{1}{f(x)g(x)}]' \neq 0$ a existuje limita ich podielu pre $x \to a$, potom platí:
$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]'}{\left[\frac{1}{f(x)g(x)}\right]'}.$$

- **Typ ∞^0, t. j. $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$**

  Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $f(x) > 0$, $[f(x)]^{g(x)} > 0$. Potom pre všetky $x \in P(a)$ existujú funkcie $\ln f(x)$, $\ln [f(x)]^{g(x)}$ a pre všetky $x \in P(a)$ platí:
$$[f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}, \qquad \lim_{x\to a} \ln f(x) = \infty.$$
To znamená, že máme vypočítať $\lim_{x\to a} [g(x)\ln f(x)]$, ktorá je typu $\infty \cdot 0$.

- **Typ 0^0, t. j. $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$**

  Predpokladajme, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $f(x) > 0$, $[f(x)]^{g(x)} > 0$. Potom analogicky ako v predchádzajúcej časti platí pre všetky $x \in P(a)$
$$[f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}, \qquad \lim_{x\to a} \ln f(x) = -\infty.$$
To znamená, že máme vypočítať $\lim_{x\to a} [g(x)\ln f(x)]$, ktorá je typu $-\infty \cdot 0$.

- **Typ $1^{\pm\infty}$, t. j. $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, kde $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$**

  Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $f(x) > 0$, $[f(x)]^{g(x)} > 0$. Z toho vyplýva, že pre pre všetky $x \in P(a)$ platí:
$$[f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}, \qquad \lim_{x\to a} \ln f(x) = 0.$$
To znamená, že máme vypočítať $\lim_{x\to a} [g(x)\ln f(x)]$, ktorá je typu $\pm\infty \cdot 0$.

Poznámka 4.3.11.
Limita $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$, ak $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ je neurčitý výraz typu $0^{\pm\infty}$.
Ak existuje prstencové okolie $P(a)$ také, že pre všetky $x \in P(a)$ platí $f(x) > 0$, potom
$$\lim_{x\to a} \ln f(x) = -\infty, \qquad [f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}.$$
Ak $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom platí:
$$\lim_{x\to a} [g(x)\ln f(x)] = -\infty \cdot (-\infty) = \infty, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty.$$
Ak $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, potom platí:
$$\lim_{x\to a} [g(x)\ln f(x)] = \infty \cdot (-\infty) = -\infty, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0.$$

Príklad 4.3.17.
Pomocou l'Hospitalovho pravidla vypočítajte:

a) $\lim_{x\to 0^+} [x\ln x]$, b) $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right]$, c) $\lim_{x\to 0} [\sin x]^x$, d) $\lim_{x\to 0^+} [\cos x]^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie.
a) Overme predpoklady vety 4.3.7 (l'Hospitalovho pravidla pre typ $\frac{0}{0}$).
Pre všetky $x > 0$ platí $x' = 1$, $[\frac{1}{\ln x}]' = [\ln^{-1} x]' = -\ln^{-2} x[\ln x]' = -\frac{1}{x}\ln^{-2} x \neq 0$.
Keďže $\lim_{x\to 0^+} x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} [\frac{1}{\ln x}] = 0$, potom

$$\lim_{x\to 0^+} [x\ln x] = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x'}{[\frac{1}{\ln x}]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x}\ln^{-2} x} = -\lim_{x\to 0^+} [x\ln^2 x].$$

To znamená, že toto pravidlo nám nepomôže. Overme predpoklady vety 4.3.8.
Platí $[\ln x]' = \frac{1}{x}$, $[\frac{1}{x}]' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ pre všetky $x > 0$, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} [\frac{1}{x}] = \infty$. Keďže existuje limita na pravej strane, potom

$$\lim_{x\to 0^+} [x\ln x] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln x]'}{[\frac{1}{x}]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} [-x] = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

b) Nech[17] $P(0) = (-1\,;\,1) - \{0\}$. Pre všetky $x \in P(0)$ platí:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x\sin x}, \quad \text{pričom} \quad \lim_{x\to 0} [\sin x - x] = \lim_{x\to 0} [x\sin x] = 0.$$

Pre všetky $x \in P(0)$ platí $[\sin x - x]' = \cos x - 1$, $[x\sin x]' = \sin x + x\cos x \neq 0$. Potom

$$\lim_{x\to 0} \Big[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\Big] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin x - x]'}{[x\sin x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}.$$

Pre všetky $x \in P(0)$ platí $[\cos x - 1]' = -\sin x$, $[\sin x + x\cos x]' = 2\cos x - x\sin x \neq 0$.
Keďže navyše platí $\lim_{x\to 0} [\cos x - 1] = \lim_{x\to 0} [\sin x + x\cos x] = 0$, potom

$$\lim_{x\to 0} \Big[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\Big] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{[\cos x - 1]'}{[\sin x + x\cos x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

c) Výraz $[\sin x]^x$ nie je definovaný pre $x \in (-1\,;\,0)$, t. j. $\lim_{x\to 0^-} [\sin x]^x$ neexistuje.
Pre všetky $x \in (0\,;\,1)$ platí:

$$[\sin x]^x = e^{\ln [\sin x]^x} = e^{x\ln\sin x} = e^{\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}}, \quad [\ln\sin x]' = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \Big[\frac{1}{x}\Big]' = \frac{-1}{x^2} \neq 0.$$

Keďže $\lim_{x\to 0^+} \ln\sin x = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, potom na základe l'Hospitalovho pravidla platí:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln\sin x]'}{\big[\frac{1}{x}\big]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \Big[x\cos x \frac{x}{\sin x}\Big] = -0\cdot 1\cdot 1 = 0.$$

Z toho vyplýva, že platí $\lim_{x\to 0^+} [\sin x]^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}} = e^0 = 1$.

d) Pre všetky $x \in (0\,;\,1)$ platí:

$$[\cos x]^{\frac{1}{x}} = e^{\ln [\cos x]^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln\cos x}{x}}, \quad [\ln\cos x]' = \frac{-\sin x}{\cos x}, \quad x' = 1 \neq 0.$$

Pretože $\lim_{x\to 0^+} \ln\cos x = \lim_{x\to 0^+} x = 0$, potom platí:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln\cos x]'}{x'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to 0^+} [\cos x]^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1. \ \blacksquare$$

Príklad 4.3.18.
Pomocou l'Hospitalovho pravidla vypočítajte:[18] a) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie.
Pre všetky $x > 0$ platí $x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$, $x' = 1$, $[\ln x]' = \frac{1}{x} \neq 0$.
a) Keďže $\lim_{x\to\infty} x = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$, potom na základe l'Hospitalovho pravidla platí:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{[\ln x]'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^0 = 1.$$

[17] Prstencové okolie $P(0)$ je zvolené tak, aby pre všetky $x \in P(0)$ platilo $\sin x \neq 0$.
[18] Viď príklad 3.2.56 na strane 269.

b) Pre všetky $x\in(0\,;\,1)$ platí $\ln x < 0$, t. j. $\frac{\ln x}{x} < 0$.
Keďže $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, nemá význam použiť l'Hospitalovo pravidlo a platí:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0} = -\infty, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0. \ \blacksquare$$

Príklad 4.3.19.
Vypočítajte:[19] a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}}$, kde $a\in R$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$, kde $a>0$.

Riešenie.
a) Nech $a\neq 0$.
Označme $P(0)$ prstencové okolie s krajnými bodmi $\pm\frac{1}{a}$. Pre všetky $x\in P(0)$ platí:

$$1+ax>0, \qquad \text{t. j.} \quad (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\ln\,[(1+ax)^{\frac{1}{x}}]} = \mathrm{e}^{\frac{\ln\,(1+ax)}{x}}.$$

Keďže $[\ln\,(1+ax)]' = \frac{a}{1+ax}$, $x' = 1\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} [\ln\,(1+ax)] = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, potom

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\,(1+ax)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{[\ln\,(1+ax)]'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{1+ax} = a, \qquad \text{t. j.} \quad \lim_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{a}.$$

Ak $a=0$, potom $\lim\limits_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} 1^{\frac{1}{x}} = 1 = \mathrm{e}^0$.
b) Pre všetky $x\in R$ platí $[a^x-1]' = a^x\ln a$, $x' = 1\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} (a^x-1) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Potom

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{[a^x-1]'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x\ln a}{1} = a^0\ln a = \ln a. \ \blacksquare$$

4.3.4 Taylorov polynóm

Ak chceme funkciu f, ktorá je diferencovateľná v bode $x_0\in R$, aproximovať v okolí bodu x_0 lineárnou funkciou (t. j. polynómom prvého stupňa), potom najlepšia aproximácia (veta 4.2.2) je pomocou lineárnej funkcie $g(x)$, pre ktorú platí:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0, x-x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_0} = 0.$$

V nasledujúcej časti sa budeme snažiť funkciu f aproximovať v okolí bodu x_0 pomocou polynómu n-tého stupňa ($n=1,2,3,\dots$) tak, aby chyba aproximácie bola minimálna.

Predpokladajme, že má funkcia f v bode $x_0\in R$ konečné derivácie do rádu $n\in N$ vrátane. To znamená, že funkcia f má v bode x_0 diferenciály rádov $1,2,\dots,n$. Funkciu f chceme v nejakom okolí $O(x_0)$ bodu x_0 aproximovať polynómom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n, \quad a_0, a_1, \dots, a_n\in R$$

tak, aby chyba aproximácie $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ bola minimálna, t. j. aby platilo[20]

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{4.15}$$

Polynóm $T_n(x)$ určíme pomocou funkcie $R_n(x)$. Vzťah (4.15) je vhodné nahradiť ekvivalentnou podmienkou (4.17), ktorá nám umožní vypočítať koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Veta 4.3.9.
Nech má funkcia g v bode $x_0\in R$ vlastné derivácie do rádu $n\in N$ vrátane. Potom

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \iff g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

[19] Viď príklad 3.2.27 na strane 255 a príklad 3.2.48 na strane 266.
[20] To znamená, aby chyba aproximácie $R_n(x)$ bola v bode x_0 nekonečne malá rádu väčšieho ako n.

Dôkaz.
Z vety 4.1.1 vyplýva, že sú funkcie g, g', …, $g^{(n-1)}$ spojité v bode x_0. To znamená, že existuje nejaké okolie $P(x_0)$, v ktorom sú derivácie $g(x)$, $g'(x)$, …, $g^{(n-1)}(x)$ konečné.
Z vety 3.3.1 ďalej vyplýva, že platí:
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} g'(x) = g'(x_0), \quad \ldots, \quad \lim_{x\to x_0} g^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x_0).$$
$PP_{\Leftarrow}$: Pre všetky $x \neq x_0$ existujú konečné derivácie $[(x-x_0)^n]' = n(x-x_0)^{n-1} \neq 0$, $[(x-x_0)^n]'' = n(n-1)(x-x_0)^{n-2} \neq 0$, …, $[(x-x_0)^n]^{(n)} = n! \neq 0$. Pre ich limity platí:
$$\lim_{x\to x_0} (x-x_0)^n = \lim_{x\to x_0} [(x-x_0)^n]' = \lim_{x\to x_0} [(x-x_0)^n]'' = \cdots = \lim_{x\to x_0} [(x-x_0)^n]^{n-1} = 0.$$
Keďže sú funkcie g, g', …, $g^{(n-1)}$ spojité v bode x_0, pre ich limity v bode x_0 platí:
$$\lim_{x\to x_0} g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} g''(x_0) = \cdots = \lim_{x\to x_0} g^{(n-1)}(x_0) = 0.$$
Potom po n-násobnom opakovanom použití l'Hospitalovho pravidla dostaneme
$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{g(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{g'(x)}{[(x-x_0)^n]'} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \tfrac{g^{(n)}(x)}{[(x-x_0)^n]^{(n)}} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{g^{(n)}(x)}{n!} = \tfrac{g^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$
$NP_{\Rightarrow}$: Pre všetky $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí:
$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{g(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \left[\tfrac{g(x)}{(x-x_0)^n} \cdot (x-x_0)^{n-k}\right] = 0 \cdot 0 = 0. \qquad (4.16)$$
Keďže je funkcia g spojitá v bode x_0, potom špeciálne pre $k = 0$ dostaneme
$$0 = \lim_{x\to x_0} \tfrac{g(x)}{(x-x_0)^0} = \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0), \quad \text{t. j.} \quad g(x_0) = 0.$$
Ďalej postupujeme matematickou indukciou pre $k = 1, 2, \ldots, n$.
Nech $k = 1$. Potom na základe l'Hospitalovho pravidla typu $\frac{0}{0}$ a vzťahu (4.16) platí:
$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{g(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{g'(x)}{[x-x_0]'} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{g'(x)}{1} = \lim_{x\to x_0} g'(x) = g'(x_0), \quad \text{t. j.} \quad g'(x_0) = 0.$$
Nech $k = 1, 2, \ldots, n-1$ a nech pre k-tu deriváciu funkcie g platí $g^{(k)}(x_0) = 0$.
Potom zrejme tiež pre všetky $i = 1, 2, \ldots, k$ platí $g^{(i)}(x_0) = 0$. To znamená, že platí:
$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(k-1)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0.$$
Pretože sú funkcie g, g', …, $g^{(k)}$ spojité v okolí $P(x_0)$, platí:
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} g'(x) = \lim_{x\to x_0} g''(x) = \cdots = \lim_{x\to x_0} g^{(k-1)}(x) = \lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = 0.$$
Pre všetky $x \neq x_0$, $i = 1, 2, \ldots, k < n$ platí:
$$\left[(x-x_0)^{k+1}\right]^{(i)} = (k+1)k\cdots(k+1-i+1)(x-x_0)^{k+1-i} \neq 0, \quad \lim_{x\to x_0} \left[(x-x_0)^{k+1}\right]^{(i)} = 0.$$
Potom po k-násobnom opakovanom použití l'Hospitalovho pravidla typu $\frac{0}{0}$ platí:
$$0 = \lim_{x\to x_0} \tfrac{g(x)}{(x-x_0)^{k+1}} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{g'(x)}{[(x-x_0)^{k+1}]'} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \tfrac{g^{(k)}(x)}{[(x-x_0)^{k+1}]^{(k)}} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \tfrac{g^{(k)}(x)}{(k+1)\cdots 2\ (x-x_0)} = \tfrac{1}{(k+1)!} \lim_{x\to x_0} \tfrac{g^{(k)}(x)-g^{(k)}(x_0)}{x-x_0} = \tfrac{g^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}.$$
Posledná limita znamená definíciu derivácie $g^{(k+1)}(x_0)$, ktorá je podľa predpokladov pre $k+1 \leq n$ vlastná. To znamená, že dané rovnosti platia a že $g^{(k+1)}(x_0) = 0$ pre $k+1 \leq n$.
Ak to zhrnieme, potom pre všetky $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí $g^{(k)}(x_0) = 0$. ■

Dôsledok 4.3.9.a.
Nech má funkcia g v bode $x_0 \in R$ vlastné derivácie do rádu $n \in N$ vrátane.
Ak $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, potom tiež pre všetky $k = 0, 1, \ldots, n$ platí $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^k} = 0$.

Dôkaz.
Tvrdenie je priamym dôsledkom vety 4.3.9. ■

Zvyšková funkcia $R_n = f - T_n$ spĺňa v okolí $O(x_0)$ predpoklady vety 4.3.9. To znamená, že vzťah (4.15) platí práve vtedy, ak pre všetky $k = 0, 1, 2, \dots, n$ platí:

$$R_n^{(k)}(x_0) = [f(x_0) - T_n(x_0)]^{(k)} = 0, \quad \text{t. j.} \quad T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0). \tag{4.17}$$

Pre polynóm $T_n(x) = a_n(x-x_0)^n + \dots + a_2(x-x_0)^2 + a_1(x-x_0) + a_0$ v okolí $P(x_0)$ platí:

$$\begin{aligned}
T'_n(x) &= n\,a_n(x-x_0)^{n-1} + \dots + 3\,a_3(x-x_0)^2 + 2\,a_2(x-x_0) + 1\,a_1,\\
T''_n(x) &= n(n-1)\,a_n(x-x_0)^{n-2} + \dots + 3{\cdot}2\,a_3(x-x_0) + 2{\cdot}1\,a_2,\\
T'''_n(x) &= n(n-1)(n-2)\,a_n(x-x_0)^{n-3} + \dots + 3{\cdot}2{\cdot}1\,a_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
T_n^{(n-1)}(x) &= n(n-1)\cdots 2\,a_n(x-x_0) + (n-1)!\,a_{n-1}, \qquad T_n^{(n)}(x) = n!\,a_n.
\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $k = 0, 1, 2, \dots, n$ platí $T_n^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$. Potom platí:

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) = k!\,a_k, \quad \text{t. j.} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{4.18}$$

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že vzťahmi (4.18) sú koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ určené jednoznačne pre polynóm $T_n(x)$, $x \in O(x_0)$, ktorý spĺňa vzťahy (4.15) a (4.17).

Nech je funkcia f definovaná v nejakom okolí $O(x_0)$ a nech v bode x_0 existujú konečné derivácie $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, …, $f^{(n)}(x_0)$. Funkciu $T_n(x)$, $x \in O(x_0)$ definovanú vzťahom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{4.19}$$

nazývame **Taylorov[21] polynóm stupňa (najviac) n funkcie f v bode x_0**. Bod x_0 nazývame **stred Taylorovho polynómu $T_n(x)$**. Vzorec

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \;\; x \in O(x_0) \tag{4.20}$$

nazývame **Taylorov vzorec stupňa (najviac) n funkcie f v bode x_0**. Funkcia $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, $x \in O(x_0)$ spĺňa vzťah (4.15) a nazýva sa **zvyšok Taylorovho vzorca (stupňa n funkcie f v bode x_0)**.

Pre $x_0 = 0$ (stred v bode 0) má Taylorov polynóm (4.19) funkcie f tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \;\; x \in O(0)$$

a nazýva sa **Maclaurinov[22] polynóm stupňa (najviac) n funkcie f**. Taylorov vzorec funkcie f sa v tomto prípade nazýva **Maclaurinov vzorec stupňa n funkcie f**.

Ak uvážime definíciu diferenciálov vyšších rádov (poznámka 4.2.12), potom môžeme vzťah (4.19) pre Taylorov polynóm rádu n funkcie f v bode x_0 písať v tvare

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}^k f(x_0, x-x_0)}{k!} = f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0, x-x_0)}{1!} + \dots + \frac{\mathrm{d}^n f(x_0, x-x_0)}{n!}, \;\; x \in O(x_0).$$

Poznámka 4.3.12.

Môže sa stať, že pre nejaké $k = 0, 1, \dots, n$ platí $f^{(k)}(x_0) = 0$. Potom bude mať polynóm $T_n(x)$ niektoré koeficienty nulové a jeho stupeň môže byť menší ako n. To je dôvod, prečo hovoríme o polynóme stupňa najviac n.

Poznámka 4.3.13.

Položme $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$ a označme zvyšok $R_n(x) = R_n(x_0 + h) = \omega_n(h)$.
Taylorov polynóm $T_n(x)$ funkcie f v bode x_0 môžeme potom vyjadriť v tvare

$$T_n(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n, \;\; h \in O(0),$$

[21] *Brook Taylor* [1685–1731] — anglický matematik.
[22] *Colin Maclaurin* [1698–1746] — škótsky matematik.

kde $O(0)$ je nejaké okolie bodu 0. Pre Taylorov vzorec funkcie f v bode x_0 potom platí:

$$f(x_0+h) = T_n(x_0+h) + \omega_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \omega_n(h), \quad \text{kde} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\omega_n(h)}{h^n} = 0.$$

Ak použijeme zápis pomocou diferenciálov, potom platí:

$$T_n(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}^k f(x_0,h)}{k!} = f(x_0) + \frac{\mathrm{d} f(x_0,h)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(x_0,h)}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^n f(x_0,h)}{n!}.$$

Hodnota zvyšku $R_n(x)$ vyjadruje chybu, s akou aproximuje Taylorov polynóm T_n funkciu f v bode $x \in O(x_0)$. Limitná vlastnosť (4.15) vyjadruje, že táto aproximácia je v lokálnom zmysle, t. j. v okolí $O(x_0)$ najlepšia možná. Z dôsledku 4.3.9.a vyplýva, že platí:

$$\lim_{x\to x_0} R_n(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^2} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Z uvedeného vyplýva, že uspokojujúce výsledky aproximácie pomocou Taylorovho polynómu môžeme očakávať iba pre body, ktoré sú blízko bodu x_0. Pre vzdialenejšie body dostaneme nepresné až celkom nevyhovujúce výsledky. Vo väčšine prípadoch nepomôže ani zvyšovanie stupňa n Taylorovho polynómu T_n. Mnohokrát je to práve naopak a zvyšovaním stupňa n sa chyba aproximácie zväčšuje.

Navyše pre praktické použitie Taylorovho polynómu danej funkcie je dôležité odhadnúť veľkosť zvyšku $R_n(x)$. Tento problém rieši Taylorova veta 4.3.11.

Veta 4.3.10 (O najlepšej lokálnej aproximácii funkcie polynómom stupňa n).
Nech f je funkcia, ktorá má v bode x_0 konečné derivácie až do rádu n vrátane. Nech

$$Q_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n$$

je polynóm najviac n-tého stupňa, rôzny od $T_n(x)$, pre ktorý platí $Q_n(x_0) = f(x_0)$.
Potom existuje prstencové okolie $P(x_0)$ také, že pre všetky $x \in P(x_0)$ platí:

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q_n(x)|.$$

Dôkaz.
Označme $g(x) = f(x) - Q_n(x)$.
Nech $k = 0, 1, \ldots, n$. Pre k-tu deriváciu $Q_n(x)$ v bode x_0 platí[23] $Q_n^{(k)}(x_0) = k!\, c_k$.
Funkcia g vyhovuje predpokladom vety 4.3.9, pretože pre všetky $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ sú derivácie $g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - k!\, c_k$ konečné. Potom platí:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - Q_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \iff f(x_0) - c_0 = f'(x_0) - 1!\, c_1 = \cdots = f^{(n)}(x_0) - n!\, c_n = 0,$$

t. j. pre všetky $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí $g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - k!\, c_k = 0$. Z toho vyplýva:

$$c_0 = f(x_0),\; c_1 = f'(x_0),\; c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\; \ldots,\; c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \text{t. j.} \;\; Q_n(x) = T_n(x).$$

To je spor, pretože $Q_n(x) \neq$ ‘$T_n(x)$. Potom pre aspoň jeden index[24] $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $c_k \neq \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, t. j. $g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - k!\, c_k \neq 0$. Nech k je najmenší taký index, t. j.

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - k!\, c_k \neq 0.$$

Pre všetky $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $x \neq x_0$ platí:

$$\left[(x-x_0)^k\right]^{(i)} = k(k-1)\cdots(k-i+1)(x-x_0)^{k-i} \neq 0, \quad \lim_{x\to x_0} \left[(x-x_0)^k\right]^{(i)} = 0.$$

Potom po k-násobnom použití l’Hospitalovho pravidla typu $\frac{0}{0}$ platí:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{[(x-x_0)^k]'} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{g^{(k)}(x)}{[(x-x_0)^k]^{(k)}} = \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} \neq 0.$$

[23]Derivácie polynómu $Q_n(x)$ sú analogické ako derivácie polynómu $T_n(x)$ na strane 337.
[24]Zo vzťahu $Q_n(x_0) = a_0 + 0 + \cdots + 0 = a_0$ vyplýva $a_0 = f(x_0)$.

Z toho na základe vzťahu (4.15) vyplýva, že platí:

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{g(x)}{(x-x_0)^k}\right| \neq 0, \quad \text{t. j.} \quad 0=\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^k}\right| < \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-Q_n(x)}{(x-x_0)^k}\right|.$$

Potom (veta 3.2.7) existuje prstencové okolie $P(x_0)$ také, že pre všetky $x\in P(x_0)$ platí:

$$\frac{|f(x)-T_n(x)|}{|x-x_0|^k} = \left|\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^k}\right| < \left|\frac{f(x)-Q_n(x)}{(x-x_0)^k}\right| = \frac{|f(x)-Q_n(x)|}{|x-x_0|^k}.$$

Pretože $x\neq x_0$, potom pre všetky $x\in P(x_0)$ platí $|f(x)-T_n(x)| < |f(x)-Q_n(x)|$. ■

Veta 4.3.11 (Taylorova).
Nech má funkcia f v nejakom okolí $O(x_0)$ bodu x_0 konečné derivácie až do rádu $n+1$ vrátane. Potom pre všetky $x\in O(x_0)$ platí Taylorov vzorec (4.20)

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

pričom $R_n(x)$, $x\in O(x_0)$ môžeme písať v **Lagrangeovom tvare** (**Lagrangeov zvyšok**)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \text{kde } \xi = x_0+\theta(x-x_0),\ \theta\in(0\,;1)$$

alebo v **Cauchyho tvare**[25] (**Cauchyho zvyšok**)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n, \quad \text{kde } \xi = x_0+\theta(x-x_0),\ \theta\in(0\,;1)\,.$$

Dôkaz.
Vetu dokážeme tak, že zároveň odvodíme obidva tvary zvyšku $R_n(x)$, $x\in O(x_0)$.
Nech $x\in O(x_0)$ je ľubovoľné, ale pevné. Označme I uzavretý interval s krajnými bodmi x_0, x, t. j. $I=\langle \min\{x,x_0\}\,;\max\{x,x_0\}\rangle$. Pre $t\in I$ definujme funkciu $F(t)$ nasledovne

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

V krajných bodoch intervalu I platí $F(x)=0$, $F(x_0)=R_n(x)$.
Z predpokladov vyplýva, že je funkcia F na intervale I diferencovateľná a platí:

$$F'(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \left[f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]' =$$

$$= 0 - f'(t) - \left[\frac{f''(t)}{1!}(x-t) - 1\,\frac{f'(t)}{1!}\right] - \left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - 2\,\frac{f''(t)}{2!}(x-t)\right] - \cdots$$

$$\cdots - \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - n\,\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1}\right] = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Druhý člen v zátvorke sa ruší s prvým členom v predchádzajúcej zátvorke. To znamená, že F má na I konečnú deriváciu a podľa vety 4.1.4 je na I spojitá.
Nech $\varphi(t)$ je spojitá funkcia definovaná na intervale I, ktorá má pre všetky vnútorné body $t\in I$ konečnú deriváciu $\varphi'(t)\neq 0$. Funkcie F, φ spĺňajú na intervale I predpoklady Cauchyho vety o strednej hodnote 4.3.6. Potom existuje $\xi\in I-\{x,x_0\}$ také, že platí:

$$\frac{F(x_0)-F(x)}{\varphi(x_0)-\varphi(x)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{R_n(x)-0}{\varphi(x_0)-\varphi(x)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\cdot\frac{1}{\varphi'(\xi)}.$$

Z toho vyplýva, že pre zvyšok $R_n(x)$, $x\in O(x_0)$ platí vzťah

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n, \quad \text{kde } \xi\in I-\{x,x_0\}\,. \tag{4.21}$$

Ak zvolíme $\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$ a dosadíme do (4.21) dostaneme Lagrangeov zvyšok

$$R_n(x) = \frac{(x-x)^{n+1}-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi\in I-\{x,x_0\}\,.$$

[25] Existuje samozrejme omnoho viac tvarov zvyšku $R_n(x)$, ale pre praktický význam sú Lagrangeov a Cauchyho tvar najvýznamnejšie.

Ak zvolíme $\varphi(t) = t$ a dosadíme do (4.21) dostaneme Cauchyho zvyšok

$$R_n(x) = \frac{x-x_0}{1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n, \quad \xi \in I - \{x, x_0\}.$$

Bod ξ leží medzi x_0 a x a môžeme ho vyjadriť v tvare $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0\,;\,1)$. ■

Poznámka 4.3.14.
Ak použijeme (viď poznámka 4.3.13) označenie $h = x - x_0$, t. j. $x = x_0 + h$, potom pre ξ ležiace medzi bodmi x_0 a x platí $\xi = x_0 + \theta h$, $x - \xi = x - x_0 - \theta h = h - \theta h = (1-\theta)h$.
Pre zvyšok $R_n(x_0 + h) = \omega_n(h)$, $h \in O(0)$ Taylorovho vzorca

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(x_0 + h), \; h \in O(0)$$

v Lagrangeovom tvare potom platí:

$$R_n(x_0 + h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad \xi = x_0 + \theta h, \; \theta \in (0\,;\,1).$$

Zopakujme, že $h = x - x_0$. Pre Cauchyho tvar zvyšku platí:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{n!}h^{n+1}(1-\theta)^n, \quad \xi = x_0 + \theta h, \; \theta \in (0\,;\,1).$$

Poznámka 4.3.15.
V prípade Maclaurinovho vzorca

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad x \in O(0)$$

platí $h = x - 0 = x$, $\xi = 0 + \theta(x - 0) = \theta x = \theta h$, kde $\theta \in (0\,;\,1)$. Potom

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

je Lagrangeov tvar zvyšku. Cauchyho zvyšok má tvar

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\, x(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}\, x(x-\theta x)^n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}\, x^{n+1}(1-\theta)^n.$$

Príklad 4.3.20.
Nájdite Taylorov vzorec stupňa 2 funkcie $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ so stredom v bode 0.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in \langle -1\,;\,\infty)$. Pre všetky $x \in (-1\,;\,\infty)$ platí:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}, \qquad f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(1+x)^5}}, \qquad f'''(x) = \frac{10}{27\sqrt[3]{(1+x)^8}}.$$

Keďže $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{2}{9}$, potom pre Taylorov, t. j. Maclaurinov vzorec platí:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + R_2(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + R_2(x), \; x \in O(0).$$

Pre zvyšok $R_2(x)$, $x \in O(0)$ v Lagrangeovom tvare platí:

$$R_2(x) = \frac{f'''(\theta x)}{3!}\, x^3 = \frac{5x^3}{81\sqrt[3]{1+\theta x}}, \qquad \text{kde } \theta \in (0\,;\,1).$$

Cauchyho zvyšok má tvar $R_2(x) = \frac{f'''(\theta x)}{2!}\, x^3(1-\theta)^2 = \frac{5x^3(1-\theta)^2}{27\sqrt[3]{1+\theta x}}$, kde $\theta \in (0\,;\,1)$. ■

Poznámka 4.3.16.
Z predchádzajúceho príkladu vyplýva, že funkciu $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x \in O(0)$ môžeme aproximovať kvadratickou funkciou $1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$ s chybou $|R_2(x)|$, t. j.

$$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}, \; x \in O(0).$$

Pre $x \in O^+(0)$ platí $1 + \theta x \geq 1$, t. j. $\sqrt[3]{1+\theta x} \geq 1$. Z toho vyplýva pre chybu aproximácie:

$$|R_2(x)| = R_2(x) = \frac{5x^3}{81\sqrt[3]{1+\theta x}} \leq \frac{5x^3}{81} < 0,062x^3.$$

Napríklad pre $\sqrt[3]{1,2} = \sqrt[3]{1+0,2}$ pre chybu platí $|R_2(0,2)| < 0,062 \cdot 0,2^3 = 0,000\,496$. Ale pre $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1+7}$ je chyba ohraničená číslom $0,062 \cdot 7^3 = 21,266$, čo je nepriateľné.
Naozaj, stačí porovnať hodnoty $\sqrt[3]{1,2} = 1,062\,659$, $\sqrt[3]{8} = 2$ s hodnotami

$$\sqrt[3]{1+0,2} \approx 1 + \tfrac{0,2}{3} - \tfrac{0,2^2}{9} = 1,062\,222, \quad \sqrt[3]{1+7} \approx 1 + \tfrac{7}{3} - \tfrac{7^2}{9} = -2,111\,111.$$

Príklad 4.3.21.
Nájdite Taylorov vzorec stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln x$ so stredom v bode $x_0 = 1$.

Riešenie.
Pre všetky $x > -1$, $k \in N$ pre k-tu deriváciu funkcie f platí:

$$f'(x) = \tfrac{1}{x},\ f''(x) = \tfrac{-1}{x^2},\ f'''(x) = \tfrac{2}{x^3},\ f''''(x) = \tfrac{-3\cdot 2}{x^4},\ \cdots,\ f^{(k)}(x) = \tfrac{(-1)^{k-1}(n-1)!}{x^k}.$$

Potom pre všetky $k \in N$ platí $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.
Potom Taylorov polynóm stupňa n funkcie $f(x) = \ln x$ má pre $x \in O(1)$ tvar

$$T_n(x) = 0 + \tfrac{1}{1!}(x-1) + \tfrac{-1!}{2!}(x-1)^2 + \tfrac{2!}{3!}(x-1)^3 + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}n!}{(n-1)!}(x-1)^n =$$

$$= \tfrac{(x-1)}{1} - \tfrac{(x-1)^2}{2} + \tfrac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}.$$

Pre zvyšok $R_n(x)$ v Lagrangeovom, resp. Cauchyho tvare platí:

$$R_n(x) = \tfrac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n+1}}, \quad \text{resp.} \quad R_n(x) = \tfrac{(-1)^n(x-1)^{n+1}(1-\theta)^n}{[1+\theta(x-1)]^{n+1}},\ \theta \in (0\,;\,1)\,.\ \blacksquare$$

Poznámka 4.3.17.
Niekedy je výhodnejšie funkciu $f(x) = \ln x$ vyjadriť v tvare Maclaurinovho polynómu. Ak položíme $x = t+1$, potom Maclaurinov polynóm funkcie $f(t) = \ln(t+1)$ má tvar

$$T_n(t) = t - \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^3}{3} - \tfrac{t^4}{4} + \tfrac{t^5}{5} + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}t^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{(-1)^{k-1}t^k}{k}, \quad t \in O(0).$$

Tento výsledok súhlasí s výsledkom získaným v nasledujúcom príklade.

Príklad 4.3.22.
Nájdite Maclaurinov vzorec stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = \ln(x+1)$.

Riešenie.
Z príkladu 4.3.21 vyplýva, že pre všetky $x > 0$, $k \in N$ platí:

$$f^{(k)}(x) = \tfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+1)^k}, \quad \text{t. j.} \quad f^{(k)}(0) = \tfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(0+1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

Pre Maclaurinov polynóm stupňa n funkcie $f(x) = \ln(x+1)$ pre $x \in O(0)$ potom platí:

$$T_n(x) = 0 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{-1!}{2!}x^2 + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}n!}{(n-1)!}x^n = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Pre zvyšok $R_n(x)$ v Lagrangeovom, resp. Cauchyho tvare platí:

$$R_n(x) = \tfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)[1+\theta x]^{n+1}}, \quad \text{resp.} \quad R_n(x) = \tfrac{(-1)^n x^{n+1}(1-\theta)^n}{[1+\theta x]^{n+1}},\ \theta \in (0\,;\,1)\,.\ \blacksquare$$

Príklad 4.3.23.
Nájdite Maclaurinove vzorce stupňa $n \in N$ pre funkcie: a) $f(x) = \sin x$, b) $g(x) = \cos x$.

Riešenie.
a) Z príkladu 4.2.8 pre derivácie rádu $k \in N \cup \{0\}$ funkcie $f(x) = \sin x$ vyplýva:

$$f^{(4k)}(0) = f(0) = \sin 0 = 0, \qquad f^{(4k+1)}(0) = f'(0) = \cos 0 = 1,$$

$$f^{(4k+2)}(0) = f''(0) = -\sin 0 = 0, \qquad f^{(4k+3)}(0) = f'''(0) = -\cos 0 = -1.$$

To znamená, že pre $k \in N \cup \{0\}$ platí $f^{(2k)} = 0$, $f^{(2k+1)} = (-1)^{\frac{(2k+1)-1}{2}} = (-1)^k$.
Maclaurinov polynóm stupňa $n = 2k+1$, $k \in N \cup \{0\}$ má potom tvar

$$T_{2k+1}(x) = 0 + \tfrac{x}{1!} + 0 + \tfrac{-x^3}{3!} + 0 + \cdots + \tfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{i=0}^{k} \tfrac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}, \quad x \in R.$$

Pre zvyšok $R_{2k+1}(x)$ v Lagrangeovom tvare (poznámka 4.3.15) platí:

$$|R_{2k+1}(x)| = \left| \tfrac{f^{(2k+2)}(\theta x)}{(2k+2)!}\, x^{2k+2} \right| = \left| \tfrac{\sin \theta x}{(2k+2)!}\, x^{2k+2} \right| \leq \left| \tfrac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \right| = \tfrac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}, \quad x \in R.$$

b) Z príkladu 4.2.8 pre derivácie rádu $k \in N \cup \{0\}$ funkcie $g(x) = \cos x$ vyplýva:

$$g^{(4k)}(0) = f(0) = \cos 0 = 1, \qquad g^{(4k+1)}(0) = f'(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$g^{(4k+2)}(0) = f''(0) = -\cos 0 = -1, \qquad g^{(4k+3)}(0) = f'''(0) = \sin 0 = 0.$$

To znamená, že pre $k \in N \cup \{0\}$ platí $g^{(2k)} = (-1)^{\frac{2k}{2}} = (-1)^k = 0$, $g^{(2k+1)} = 0$.
Maclaurinov polynóm stupňa $n = 2k$, $k \in N$ má potom tvar

$$T_{2k}(x) = 1 + 0 + \tfrac{-x^2}{2!} + 0 + \tfrac{x^4}{4!} + 0 + \cdots + \tfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{i=0}^{k} \tfrac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}, \quad x \in R.$$

Pre zvyšok $R_{2k}(x)$ v Lagrangeovom tvare platí:

$$|R_{2k}(x)| = \left| \tfrac{f^{(2k+1)}(\theta x)}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \right| = \left| \tfrac{\cos \theta x}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \right| \leq \left| \tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = \tfrac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in R. \blacksquare$$

Poznámka 4.3.18.
Z príkladu 2.3.36 vyplýva, že pre všetky $x \in R$ platí:

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} |R_{2k+1}| \leq \lim_{k\to\infty} \tfrac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} = 0, \qquad 0 \leq \lim_{k\to\infty} |R_{2k}| \leq \lim_{k\to\infty} \tfrac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0.$$

To znamená, že obidve funkcie $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ môžeme aproximovať Maclaurinovým polynómom pre ľubovoľné $x \in R$. Požadovanú presnosť dosiahneme dostatočným zväčšením stupňa $n = 2k+1$, resp. $n = 2k$.

Príklad 4.3.24.
Nájdite Maclaurinov vzorec stupňa $n \in N$ funkcie $f(x) = e^x$.

Riešenie.
Pre všetky $k \in N$ platí $f^{(k)}(x) = [e^x]^{(k)} = e^x$, t. j. $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$.
Maclaurinov polynóm stupňa $n \in N$ má potom tvar

$$T_n(x) = 1 + \tfrac{x}{1!} + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \cdots + \tfrac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^k}{k!}, \quad x \in R.$$

Pre Lagrangeov zvyšok platí $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!}$, pričom $0 < \theta < 1$.

Pre $x \geq 0$ platí $0 < \theta x < x$, t. j. $e^{\theta x} < e^x$ a pre $x < 0$ platí $\theta x < 0$, t. j. $e^{\theta x} < 1$. Potom

$$|R_n(x)| = \tfrac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!} < \tfrac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ pre } x \geq 0, \quad |R_n(x)| = \tfrac{e^{\theta x} |x^{n+1}|}{(n+1)!} < \tfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ pre } x < 0. \blacksquare$$

Poznámka 4.3.19.
Rovnako ako funkcie $\sin x$, $\cos x$ môžeme aj funkciu $f(x) = e^x$ aproximovať Maclaurinovým polynómom na celej reálnej osi, t. j. pre všetky $x \in R$. Požadovanú presnosť opäť dostaneme dostatočným zväčšením stupňa n. Vyplýva to zo vzťahov (4.22) a (4.23).

Pre $x<0$ na základe príkladu 2.3.36 a vety o zovretí limít platí:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \tag{4.22}$$

Nech $x>0$. Pre $n\in N$ označme $a_n = \frac{\mathrm{e}^x x^{n+1}}{(n+1)!}$. Keďže $a_n>0$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x x^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!\,\mathrm{e}^x x^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+2} = 0, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

na základe vety 2.3.23. Z toho vyplýva, že pre $x>0$ platí:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x x^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad \text{t. j.} \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \tag{4.23}$$

Príklad 4.3.25.
Nájdite Maclaurinov polynóm stupňa $n\in N$ funkcie $f(x)=\mathrm{e}^{(x^2)}$, $x\in R$.

Riešenie.
Pre všetky $x\in R$ pre derivácie funkcie f do rádu 6 platí:

$$f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{(x^2)}, \qquad f^{(4)}(x) = 12\,\mathrm{e}^{(x^2)} + 48x^2\,\mathrm{e}^{(x^2)} + 16x^4\,\mathrm{e}^{(x^2)},$$

$$f''(x) = 2\,\mathrm{e}^{(x^2)} + 4x^2\,\mathrm{e}^{(x^2)}, \qquad f^{(5)}(x) = 120x\,\mathrm{e}^{(x^2)} + 160x^3\,\mathrm{e}^{(x^2)} + 32x^5\,\mathrm{e}^{(x^2)},$$

$$f'''(x) = 12x\,\mathrm{e}^{(x^2)} + 8x^3\,\mathrm{e}^{(x^2)}, \qquad f^{(6)}(x) = 120\,\mathrm{e}^{(x^2)} + 720x^2\,\mathrm{e}^{(x^2)} + 480x^4\,\mathrm{e}^{(x^2)} + 64x^6\,\mathrm{e}^{(x^2)}.$$

Ako vidíme, s výpočtom derivácií vyšších rádov funkcie f sú problémy, preto určíme Maclaurinov polynóm iba stupňa 6. Keďže platí:

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=2,\ f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=12,\ f^{(5)}(0)=0,\ f^{(6)}(0)=120,$$

potom Maclaurinov polynóm stupňa 6 má tvar

$$T_6(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{12}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{120}{6!}x^6 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}.$$

Iné riešenie.
Z príkladu 4.3.24 pre Maclaurinov polynóm stupňa n funkcie $g(t)=\mathrm{e}^t$ vyplýva:

$$T_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}.$$

Ak položíme $t=x^2$, potom pre Maclaurinov polynóm funkcie $f(x)=g(x^2)=\mathrm{e}^{(x^2)}$ platí:

$$P_n(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x^2)^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Pre $n=3$ dostaneme $T_6(x) = P_3(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$. ■

4.3.5 Vyšetrovanie priebehu funkcie

Pomocou diferenciálneho počtu môžeme úspešne vyšetrovať rôzne vlastnosti funkcií, ktoré nám pomôžu pri určovaní ich priebehu. Pomocou derivácií môžeme vyšetrovať monotónnosť, konvexnosť a konkávnosť funkcie, hľadať jej inflexné a stacionárne body, lokálne a globálne extrémy, prípadne určovať asymptoty grafu tejto funkcie.

Obyčajne sa vyšetrujú funkcie, ktoré majú konečný počet bodov nespojitosti, prípadne konečný počet bodov, v ktorých nemajú deriváciu. Preto sa môžeme obmedziť na vyšetrovanie funkcií, ktoré sú diferencovateľné na intervale.

- **Vyšetrovanie monotónnosti funkcie**

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia monotónna, t. j. rastúca (neklesajúca) alebo klesajúca (nerastúca).

Veta 4.3.12.
Ak je funkcia f spojitá na intervale $I \subset R$ a má na I deriváciu f', potom platí:

a) Funkcia f je na I rastúca práve vtedy, ak pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) \geq 0$ a neexistuje otvorený interval $J \subset I$, na ktorom je f' nulová (t. j. $f'(x) \neq 0$ pre $x \in J$).

b) Funkcia f je na I klesajúca práve vtedy, ak pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) \leq 0$ a neexistuje otvorený interval $J \subset I$, na ktorom je f' nulová (t. j. $f'(x) \neq 0$ pre $x \in J$).

c) Funkcia f je na I neklesajúca práve vtedy, ak pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) \geq 0$.

d) Funkcia f je na I nerastúca práve vtedy, ak pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) \leq 0$.

e) Funkcia f je na I konštantná práve vtedy, ak pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) = 0$.

Dôkaz.
a) $NP_{\Rightarrow}$: Funkcia f je na I rastúca, t. j. pre všetky $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $x \in I$ existujú[26] $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$.
Nech $x_0 \in I$ je ľubovoľný bod.
Pre všetky $x < x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$, t. j. $x - x_0 < 0$, $f(x) - f(x_0) < 0$. Z toho vyplýva:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, \quad \text{t. j.} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0.$$

Analogicky pre všetky $x > x_0$ platí $x - x_0 > 0$, $f(x) - f(x_0) > 0$. To znamená, že tiež

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, \quad \text{t. j.} \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0.$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) \geq 0$.
Predpokladajme, že existuje interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $f'(x) = 0$. Potom z dôsledku 4.3.3.b vyplýva, že je funkcia f na intervale J konštantná. To je spor s tým, že je funkcia f rastúca na I.

$PP_{\Leftarrow}$: Nech $x_1, x_2 \in I$ sú ľubovoľné body také, že platí $x_1 < x_2$. Potom na základe Lagrangeovej vety o strednej hodnote existuje $c \in (x_1\,;\,x_2)$ také, že platí:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), \qquad \text{pričom} \quad f'(c) \geq 0, \; x_2 - x_1 > 0.$$

Potom platí $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, t. j. $f(x_1) \leq f(x_2)$. To znamená, že f je neklesajúca na I.
Predpokladajme, že na nejakom otvorenom intervale $J \subset I$ je funkcia f konštantná. Potom (príklad 4.1.4) pre všetky $x \in J$ platí $f'(x) = 0$. To je spor s predpokladom.

b) Označme $g = -f$, potom je f klesajúca na I práve vtedy, ak je g rastúca na I.
Z časti a) vyplýva, že g je na I rastúca práve vtedy, ak pre všetky $x \in I$ platí:

$$g'(x) = -f'(x) \geq 0, \quad \text{t. j.} \quad f'(x) \leq 0$$

a neexistuje otvorený interval $J \subset I$ taký, že pre všetky $x \in J$ platí $g'(x) = -f'(x) = 0$, t. j. $f'(x) = 0$.
Tým je časť b) dokázaná.

c), d) Dôkaz je podobný ako dôkaz častí a), b).

e) $NP_{\Rightarrow}$: Vyplýva z príkladu 4.1.4.

$PP_{\Leftarrow}$: Funkcia f je nerastúca, pretože pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) \leq 0$. Funkcia f je taktiež neklesajúca, pretože pre všetky $x_0 \in I$ platí $f'(x_0) \geq 0$. To znamená, že funkcia f je nerastúca a neklesajúca zároveň, t. j. konštantná.[27] ■

Poznámka 4.3.20.
Ak je funkcia f spojitá a rastúca, resp. klesajúca na intervale I, potom môže pre nejaké body $x \in I$ platiť $f'(x) = 0$. To znamená, že derivácia f' môže byť nulová iba v jednotlivých bodoch, nie na otvorenom

[26] V krajných bodoch intervalu I existujú iba jednostranné derivácie.
[27] Toto tvrdenie vyplýva tiež z dôsledku 4.3.3.b.

podintervale intervalu I. V ostatných bodoch $x \in I$ musí platiť $f'(x) > 0$ v prípade rastúcej funkcie a $f'(x) < 0$ v prípade klesajúcej funkcie.

Príklad 4.3.26.
a) Funkcia $f(x) = 2$, $x \in R$ je konštantná. Pre všetky $x \in R$ platí $f'(x) = 0$.

b) Funkcia $f(x) = x^3$, $x \in R$ je rastúca. Platí $f'(0) = 0$ a $f'(x) = 3x^2 > 0$ pre $x \neq 0$.

c) Funkcia $f(x) = x^2$, $x \in R$ je klesajúca na intervale $(-\infty\,;\,0\rangle$ a rastúca na intervale $\langle 0\,;\,\infty)$. Platí $f'(x) = 2x < 0$ pre $x < 0$, $f'(x) = 2x > 0$ pre $x > 0$ a $f'(0) = 0$. ■

Príklad 4.3.27.
a) Funkcia $f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$, $x \in R - \{-1\}$ je spojitá. Pre všetky $x \neq -1$ platí:

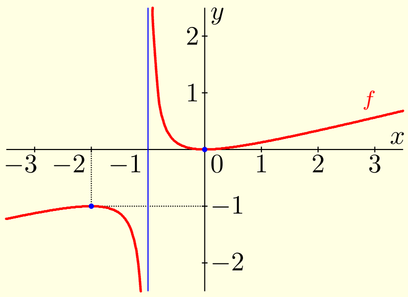
$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{4+4x}\right]' = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{x^2}{1+x}\right]' = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2x + x^2}{4(1+x)^2} = \frac{x(2+x)}{4(1+x)^2}.$$

Funkcia f' má nulové body $x = -2$ a $x = 0$, t. j. $f'(-2) = f'(0) = 0$. V bode $x = -1$ nie je funkcia f' definovaná. Pre všetky $x \neq -1$ platí $(1+x)^2 > 0$, t. j. monotónnosť funkcie f (viď obrázok 4.3.15) závisí od znamienka hodnoty $x(2+x)$.
Reálnu os R rozdelíme na intervaly $(-\infty\,;\,-2\rangle$, $\langle -2\,;\,-1)$, $(-1\,;\,0\rangle$, $\langle 0\,;\,\infty)$.
Ak $x \in (-\infty\,;\,-2)$, potom $x < 0$, $x + 2 < 0$, t. j. $f'(x) > 0$ a f je rastúca na $(-\infty\,;\,-2\rangle$.
Ak $x \in (-2\,;\,-1)$, potom $x < 0$, $x + 2 > 0$, t. j. $f'(x) < 0$ a f je klesajúca na $\langle -2\,;\,-1)$.
Ak $x \in (-1\,;\,0)$, potom $x < 0$, $x + 2 > 0$, t. j. $f'(x) < 0$ a f je klesajúca na $(-1\,;\,0\rangle$.
Ak $x \in (0\,;\,\infty)$, potom $x > 0$, $x + 2 > 0$, t. j. $f'(x) > 0$ a f je rastúca na $\langle 0\,;\,\infty)$.

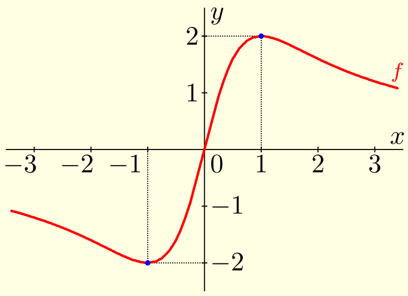
b) Funkcia $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $x \in R$ je spojitá. Pre všetky $x \in R$ platí:

$$f'(x) = \left[\frac{4x}{1+x^2}\right]' = \frac{4(1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4 - 4x^2}{(1+x)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Nulové body derivácie f' sú $x = \pm 1$, t. j. $f'(-1) = f'(1) = 0$.
Pre všetky $x \in R$ platí $(1 + x^2)^2 > 0$, pre všetky $x \in (-1\,;\,1)$ platí $1 - x^2 > 0$ a pre všetky $x \notin \langle -1\,;\,1\rangle$ platí $1 - x^2 < 0$. Z toho vyplýva (viď obrázok 4.3.16), že je funkcia f rastúca na intervale $\langle -1\,;\,1\rangle$ a klesajúca na intervaloch $(-\infty\,;\,-1\rangle$ a $\langle 1\,;\,\infty)$. ■



Obr. 4.3.15: Funkcia $f(x) = \frac{x^2}{4+4x}$.



Obr. 4.3.16: Funkcia $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

Veta 4.3.13.
Ak má funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu (aj nevlastnú), pre ktorú platí[28] $f'(x_0) > 0$ [resp. $f'(x_0) < 0$], potom je funkcia f rastúca [resp. klesajúca] v bode x_0.

[28] T. j. platí $0 < f'(x_0) \leq \infty$ [resp. $-\infty \leq f'(x_0) < 0$].

Dôkaz.
Predpokladajme, že platí predpoklad $0 < f'(x_0)$, t. j. existuje limita

$$0 < f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \infty.$$

Potom (dôsledok 3.2.7.a) existuje prstencové okolie $P(x_0)$, že pre všetky $x \in P(x_0)$ platí:

$$0 < \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Z toho vyplýva, že pre všetky $x \in P(x_0)$, $x < x_0$ platí $f(x) - f(x_0) < 0$, t. j. $f(x) < f(x_0)$. Podobne, pre všetky $x \in P(x_0)$, $x > x_0$ platí $f(x) - f(x_0) > 0$, t. j. $f(x) > f(x_0)$. To znamená, že je funkcia f rastúca v bode x_0.
Pre $f'(x_0) < 0$ je dôkaz analogický a prenechávame ho čitateľovi. ■

Príklad 4.3.28.
Dokážte, že pre všetky $x > 0$ platí nerovnosť[29] $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$.

Riešenie.
Najprv dokážeme druhú nerovnosť $\ln(x+1) < x$, t. j. $0 < x - \ln(x+1)$.
Označme $f(x) = x - \ln(x+1)$. Funkcia f je definovaná pre $x > -1$, t. j. $D(f) = (-1\,;\infty)$.
Funkcia f je spojitá a pre jej deriváciu pre všetky $x \in D(f)$ platí:

$$f'(x) = [x - \ln(x+1)]' = 1 - \tfrac{1}{x+1} = \tfrac{x}{x+1}.$$

Potom $f'(0) = 0$ a pre všetky $x > 0$ platí $f'(x) > 0$. To znamená (veta 4.3.12), že je funkcia f rastúca na intervale $\langle 0\,;\infty)$. Z toho vyplýva, že pre všetky $x > 0$ platí nerovnosť $f(x) > f(0) = 0$, t. j. $x - \ln(x+1) > 0$.

Prvá nerovnosť $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1)$ sa dokáže podobne. Pre všetky $x \geq 0$ platí $x+1 > 0$. To znamená, že pôvodná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$x < (x+1)\ln(x+1), \qquad \text{t. j.} \quad 0 < (x+1)\ln(x+1) - x.$$

Označme $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$, $x > 0$. Funkcia g je spojitá a pre všetky $x > 0$ platí:

$$g'(x) = [(x+1)\ln(x+1) - x]' = \ln(x+1) + \tfrac{x+1}{x+1} - 1 = \ln(x+1).$$

Z toho vyplýva, že $g'(0) = 0$ a $g'(x) > 0$ pre všetky $x > 0$. To znamená, že g na $\langle 0\,;\infty)$ rastúca, t. j. pre všetky $x > 0$ platí $(x+1)\ln(x+1) - x = g(x) > g(0) = \ln 1 = 0$. ■

- **Lokálne a globálne extrémy funkcie**

Body, v ktorých má spojitá funkcia f lokálne extrémy, úzko súvisia s intervalmi, na ktorých je táto funkcia monotónna (rýdzo monotónna). Z vety 4.3.1 priamo vyplýva nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie.

Veta 4.3.14 (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému funkcie).
Ak má funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ lokálny extrém (minimum, maximum, ostré minimum alebo ostré maximum) a ak existuje derivácia $f'(x_0)$, potom platí $f'(x_0) = 0$.

Poznámka 4.3.21.
Opačné tvrdenie vo vete 4.3.14 neplatí, t. j. podmienka $f'(x_0) = 0$ nie je postačujúca. To znamená, že zo vzťahu $f'(x_0) = 0$ nevyplýva, že má funkcia f v bode x_0 extrém.
Na druhej strane môže mať spojitá funkcia f lokálny extrém aj v takom bode $x_0 \in D(f)$, v ktorom neexistuje derivácia $f'(x_0)$.

[29] Túto nerovnosť sme už dokazovali v príklade 4.3.9.

Príklad 4.3.29.
a) Funkcia $f(x) = x^2$ má v bode $x_0 = 0$ lokálne minimum a pre jej deriváciu v tomto bode platí $f'(0) = 2 \cdot 0^1 = 0$. Funkcia $g(x) = x^3$ nemá v bode $x_0 = 0$ extrém napriek tomu, že pre jej deriváciu v tomto bode platí $g'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. (obrázok 4.3.17).

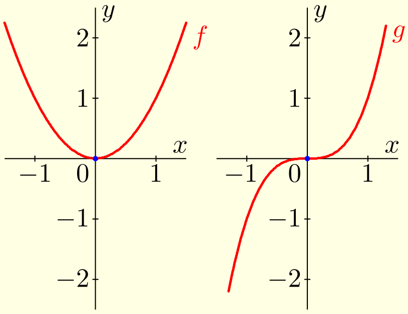
b) Funkcia $f(x) = |x| - |x-1| - |x+1|$ má v bode $x_0 = 0$ lokálne minimum, aj keď f nemá v bode $x_0 = 0$ deriváciu (obrázok 4.3.18). Funkciu f môžeme vyjadriť v tvare

$$f(x) = \begin{cases} -x-(1-x)-(x+1) = x, & \text{pre } x \in (-\infty\,;\,-1\rangle\,, \\ -x-(1-x)-(x+1) = -x-2, & \text{pre } x \in \langle -1\,;\,0\rangle\,, \\ x-(1-x)-(x+1) = x-2, & \text{pre } x \in \langle 0\,;\,1\rangle\,, \\ x-(x-1)-(x+1) = -x, & \text{pre } x \in \langle 1\,;\,\infty)\,. \end{cases}$$

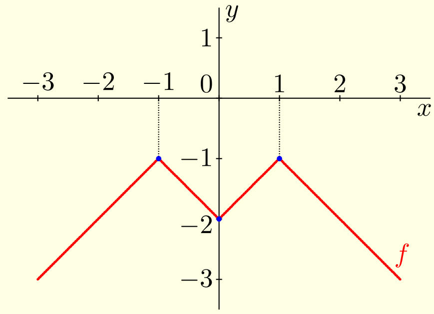
Platí $f'_-(0) = [-x-2]'_{x=0} = -1$, $f'_+(0) = [x-2]'_{x=0} = 1$, t. j. $f'(0)$ neexistuje. ■

Z vety 4.3.14 vyplýva, že ak chceme nájsť lokálne extrémy funkcie f, musíme určiť všetky body $x_0 \in D(f)$, pre ktoré platí $f'(x_0) = 0$. Je zrejmé, že nie vo všetkých týchto bodoch musí mať funkcia f extrém.

Ak má funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ deriváciu a platí $f'(x_0) = 0$, potom sa tento bod nazýva **stacionárnym bodom funkcie** f. Z vety 4.3.14 vyplýva, že všetky lokálne extrémy funkcie sa nachádzajú v stacionárnych bodoch funkcie.



Obr. 4.3.17: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.



Obr. 4.3.18: $f(x) = |x| - |x-1| - |x+1|$.

Veta 4.3.15 (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému funkcie).
Nech $x_0 \in D(f)$ je stacionárny bod funkcie f, t. j. nech platí $f'(x_0) = 0$.

a) Ak existujú ľavé a pravé prstencové okolia $P^-(x_0)$, $P^+(x_0)$ také, že pre všetky body $x \in P^-(x_0)$ platí $f'(x) > 0$ a pre všetky body $x \in P^+(x_0)$ platí $f'(x) < 0$, potom má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne maximum.

b) Ak existujú ľavé a pravé prstencové okolia $P^-(x_0)$, $P^+(x_0)$ také, že pre všetky body $x \in P^-(x_0)$ platí $f'(x) < 0$ a pre všetky body $x \in P^+(x_0)$ platí $f'(x) > 0$, potom má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne minimum.

c) Ak existuje prstencové okolie $P(x_0)$ také, že pre všetky $x \in P(x_0)$ platí $f'(x) < 0$, resp. $f'(x) > 0$, potom funkcia f v bode x_0 nemá lokálny extrém.

Dôkaz.
a) Z vety 4.3.12 vyplýva, že v okolí $P^-(x_0)$ je funkcia f rastúca, t. j. pre všetky $x \in P^-(x_0)$ platí $f(x) < f(x_0)$. V okolí $P^+(x_0)$ je funkcia f klesajúca, t. j. pre všetky $x \in P^+(x_0)$ tiež platí $f(x) < f(x_0)$. To znamená, funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

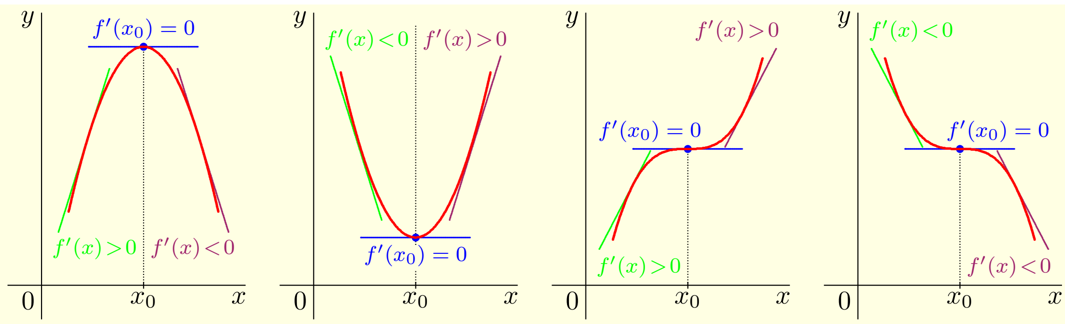
b) Ak označíme $g = -f$, potom pre všetky $x \in P^-(x_0)$ platí $g'(x) = -f'(x) > 0$ a pre všetky $x \in P^+(x_0)$ platí $g'(x) = -f'(x) < 0$. To znamená, že funkcia $g = -f$ má v bode x_0 ostré lokálne maximum a funkcia f ostré lokálne minimum.

c) Ak pre všetky $x \in P(x_0)$ platí $f'(x) > 0$, potom je funkcia f na $P(x_0)$ rastúca. Ak pre všetky $x \in P(x_0)$ platí $f'(x) < 0$, potom je funkcia f na $P(x_0)$ klesajúca. To znamená, že funkcia f v bode x_0 nemá lokálny extrém. ■

Poznámka 4.3.22.
Vetu 4.3.15 môžeme zjednodušene formulovať nasledovne.

a) Ak funkcia f' mení v stacionárnom bode x_0 znamienko z kladného $(+)$ v ľavom okolí na záporné $(-)$ v pravom okolí, potom má v bode x_0 ostré lokálne maximum.
b) Ak funkcia f' mení v stacionárnom bode x_0 znamienko zo záporného $(-)$ v ľavom okolí na kladné $(+)$ v pravom okolí, potom má v bode x_0 ostré lokálne minimum.
c) Ak funkcia f' v stacionárnom bode x_0 nemení znamienko pri prechode z ľavého okolia do pravého, potom v bode x_0 nemá lokálny extrém.

Na obrázku 4.3.19 sú znázornené grafy funkcií, ktoré majú v stacionárnom bode x_0 ostré lokálne maximum, ostré lokálne minimum a grafy funkcií, ktoré v stacionárnom bode x_0 nemajú lokálne extrémy.



Obr. 4.3.19: Stacionárny bod x_0 funkcie f.

Ak má funkcia f v stacionárnom bode x_0 druhú deriváciu, potom môžeme v niektorých prípadoch rozhodnúť o existencii lokálneho extrému pomocou tejto derivácie $f''(x_0)$.

Veta 4.3.16.
Nech $x_0 \in D(f)$ je stacionárny bod funkcie f, t. j. $f'(x_0) = 0$ a nech existuje konečná druhá derivácia $f''(x_0) \neq 0$. Potom má funkcia f v bode x_0 ostrý lokálny extrém a platí:

a) Ak $f''(x_0) < 0$, potom má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne maximum.
b) Ak $f''(x_0) > 0$, potom má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne minimum.

Dôkaz.
a) Keďže $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} < 0$, potom existuje okolie $P(x_0)$ také, že

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \frac{f'(x)}{x-x_0} < 0 \qquad \text{pre všetky} \quad x \in P(x_0).$$

Potom pre $x \in P(x_0)$, $x < x_0$ platí $f'(x) > 0$ a pre $x \in P(x_0)$, $x > x_0$ platí $f'(x) < 0$.
To znamená (veta 4.3.15), že funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

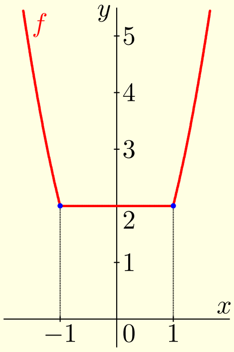
b) Dôkaz je analogický ako pre $f''(x_0) < 0$ v časti a). ■

Príklad 4.3.30.
Nájdite lokálne extrémy funkcie f na množine R, ak platí:
a) $f(x)=|x^2-1|+|x^2+1|$, b) $f(x)=-x^3-x^2+x$, c) $f(x)=x^3-x^2+x$.

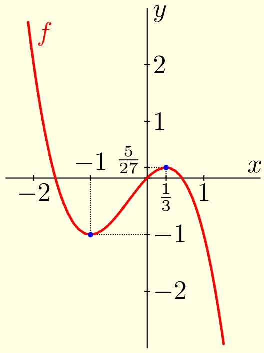
Riešenie.
Najprv nájdeme stacionárne body funkcie f, t. j. nájdeme reálne korene rovnice $f'(x)=0$.
a) Funkcia f je definovaná pre všetky $x\in R$ a môžeme ju vyjadriť v tvare
$$f(x)=\left|x^2-1\right|+x^2+1=\begin{cases}1-x^2+x^2+1=2, & \text{pre } x^2\leq 1, \text{ t. j. } x\in\langle -1\,;\,1\rangle\,,\\ x^2-1+x^2+1=2x^2, & \text{pre } x^2\geq 1, \text{ t. j. } x\notin(-1\,;\,1)\,.\end{cases}$$
Potom platí $f'(x)=0$ pre $x\in(-1\,;\,1)$ a $f'(x)=4x\neq 0$ pre $x\in(-\infty\,;\,-1)\cup(1\,;\,\infty)$.
V bodoch ± 1 derivácie funkcie f neexistujú, existujú tam iba jednostranné derivácie, pre ktoré platí $f'_-(-1)=-4$, $f'_+(-1)=0$ a $f'_-(1)=0$, $f'_+(1)=4$.
Funkcia f je na intervale $(-\infty\,;\,-1)$ klesajúca, pretože pre všetky $x\in(-\infty\,;\,-1)$ platí $f'(x)<0$. Na intervale $\langle -1\,;\,1\rangle$ je konštantná a na intervale $(1\,;\,\infty)$ je rastúca, pretože pre všetky $x\in(1\,;\,\infty)$ platí $f'(x)>0$. Z toho vyplýva, že funkcia f nadobúda pre všetky $x\in\langle -1\,;\,1\rangle$ neostré lokálne minimum, ktoré má hodnotu 2 (obrázok 4.3.20).
b) Funkcia f má stacionárne body $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$, pretože pre všetky $x\in R$ platí:
$$f'(x)=-3x^2-2x+1=-3\left(x^2+\tfrac{2x}{3}-\tfrac{1}{3}\right)=-3\,(x+1)\left(x-\tfrac{1}{3}\right).$$
Pre $x\in(-\infty\,;\,-1)$ platí $x+1<0$, $x-\frac{1}{3}<0$, t. j. $f'(x)<0$ a funkcia f je klesajúca.
Pre $x\in\left(-1\,;\,\frac{1}{3}\right)$ platí $x+1>0$, $x-\frac{1}{3}<0$, t. j. $f'(x)>0$ a funkcia f je rastúca.
Pre $x\in\left(\frac{1}{3}\,;\,\infty\right)$ platí $x+1>0$, $x-\frac{1}{3}>0$, t. j. $f'(x)<0$ a funkcia f je klesajúca.
Z toho vyplýva, že funkcia f má v bode $x_1=-1$ ostré lokálne minimum $f(x_1)=-1$ a v bode $x_2=\frac{1}{3}$ ostré lokálne maximum $f(x_2)=\frac{5}{27}$ (obrázok 4.3.21).
c) Rovnica $f'(x)=3x^2-2x+1=0$ nemá reálne korene, pretože pre všetky $x\in R$ platí:
$$f'(x)=3x^2-2x+1=3\left(x^2-\tfrac{2x}{3}+\tfrac{1}{9}\right)+1-\tfrac{3}{9}=3\left(x-\tfrac{1}{3}\right)^2+\tfrac{2}{3}\geq\tfrac{2}{3}>0.$$
To znamená, že funkcia f nemá stacionárne body a ani lokálne extrémy (obrázok 4.3.22).

Iné riešenie.
a) Keďže pre všetky $x\in(-1\,;\,1)$ platí $f''(x)=[2]''=0$, nemôžeme vetu 4.3.16 použiť.
b) Pre všetky $x\in R$ platí $f''(x)=[-3x^2-2x+1]'=-6x-2$. Potom pre stacionárne body $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$ platí $f''(-1)=4>0$, $f''(\frac{1}{3})=-4<0$.
Z toho vyplýva, že funkcia f má v bode $x_1=-1$ ostré lokálne minimum a v bode $x_2=\frac{1}{3}$ ostré lokálne maximum. ■

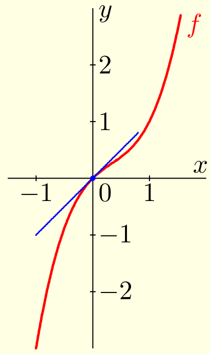
Poznámka 4.3.23.
Predpokladajme, že sa dá funkcia f vyjadriť ako podiel dvoch funkcií, t. j. v tvare $f=\frac{g}{h}$ a že $x_0\in D(f)$ je jej stacionárny bod. Potom platí:
$$f'(x_0)=\frac{g'(x_0)h(x_0)-g(x_0)h'(x_0)}{h^2(x_0)}=0,\quad \text{t. j. } g'(x_0)h(x_0)-g(x_0)h'(x_0)=0,\ h(x_0)\neq 0.$$
Na základe príkladu 4.2.11 potom pre druhú deriváciu $f''(x_0)$ platí:
$$f''(x_0)=\frac{[g''(x_0)h(x_0)-g(x_0)h''(x_0)]h(x_0)-2[g'(x_0)h(x_0)-g(x_0)h'(x_0)]h'(x_0)}{h^3(x_0)}=$$
$$=\frac{[g''(x_0)h(x_0)-g(x_0)h''(x_0)]h(x_0)}{h^3(x_0)}=\frac{g''(x_0)h(x_0)-g(x_0)h''(x_0)}{h^2(x_0)}.$$
To znamená, že ak $g''(x_0)h(x_0)-g(x_0)h''(x_0)>0$, potom $f''(x_0)>0$ a funkcia f má v bode x_0 ostré lokálne minimum (veta 4.1.5). Ak platí $g''(x_0)h(x_0)-g(x_0)h''(x_0)<0$, potom má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne maximum.



Obr. 4.3.20: Graf funkcie $f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 + 1|$.



Obr. 4.3.21: Graf funkcie $f(x) = -x^3 - x^2 + x$.



Obr. 4.3.22: Graf funkcie $f(x) = x^3 - x^2 + x$.

Príklad 4.3.31.
Nájdite lokálne extrémy funkcie $f\colon\ y = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

Riešenie.
Ak označíme $g(x) = 1 - x + x^2$, $h(x) = 1 + x + x^2$, potom platí $f = \frac{g}{h}$.
Zo vzťahu $h(x) = \frac{3}{4} + (\frac{1}{4} + x + x^2) = \frac{3}{4} + (\frac{1}{2} + x)^2 > 0$ vyplýva, že $D(f) = R$.
Pre prvé a druhé derivácie funkcií g, h platí:

$$g'(x) = -1 + 2x, \quad h'(x) = 1 + 2x, \quad g''(x) = 2, \quad h''(x) = 2.$$

Z poznámky 4.3.23 vyplýva, že $f'(x) = 0$ práve vtedy, ak $g'(x)h(x) - g(x)h'(x) = 0$, t. j. ak

$$(-1 + 2x)(1 + x + x^2) - (1 - x + x^2)(1 + 2x) = -2 + 2x^2 = 2(x^2 - 1) = 0.$$

To znamená, že funkcia f má dva singulárne body $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Pre hodnotu funkcie f'' v ľubovoľnom singulárnom bode x na základe poznámky 4.3.23 platí:

$$f''(x) = \frac{g''(x)h(x) - g(x)h''(x)}{h^2(x)} = \frac{2(1-x+x^2) - 2(1+x+x^2)}{h^2(x)} = \frac{-4x}{h^2(x)}.$$

Z toho vyplýva, že $f''(-1) > 0$, $f''(1) < 0$. To znamená, že v bode $x_1 = -1$ má funkcia f ostré lokálne maximum a v bode $x_2 = 1$ ostré lokálne minimum. ■

Okrem lokálnych extrémov nás pri vyšetrovaní priebehu funkcie zaujímajú **globálne** (**absolútne**) **extrémy funkcie**. Ak je funkcia f definovaná a spojitá na uzavretom intervale, potom podľa Weierstrasseho vety 3.3.10 nadobúda na tomto intervale svoje extrémy.

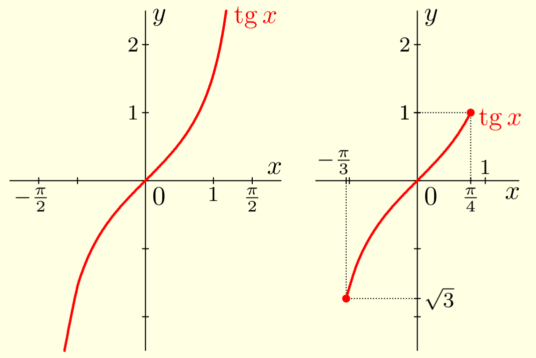
Ak má funkcia f globálny extrém vo vnútornom bode intervalu, potom je zhodný s lokálnym extrémom. Funkcia f môže nadobúdať globálne extrémy aj v krajných bodoch intervalu (pokiaľ je v nich definovaná) a tiež v bodoch, v ktorých neexistuje derivácia f'. To znamená, že musíme porovnať ich hodnoty s lokálnymi extrémami danej funkcie.

Príklad 4.3.32.
a) Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ nemá lokálne ani globálne extrémy.
Pre všetky $x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ platí $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$. To znamená, že funkcia f nemá stacionárne body a tým pádom ani lokálne ani globálne extrémy (obrázok 4.3.23 vľavo).
Funkcia $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{4}\right\rangle$ nemá lokálne, ale má globálne extrémy.

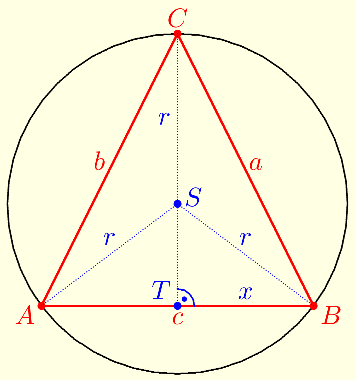
Pre všetky $x \in \langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$ platí $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. To znamená, že funkcia f je rastúca na celom svojom definičnom obore $\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \rangle$. V bode $-\frac{\pi}{3}$ má potom globálne minimum $\sqrt{3}$ a v bode $\frac{\pi}{4}$ má globálne maximum 1 (obrázok 4.3.23 vpravo).

b) Funkcia $f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $x \in R$ z príkladu 4.3.30 má v bode -1 lokálne minimum a v bode $\frac{1}{3}$ lokálne maximum (obrázok 4.3.21). Globálne extrémy nemá.
Na druhej strane má funkcia $f(x) = -x^3 - x^2 + x$, $x \in \langle -2; 1 \rangle$ v bode -1 lokálne a aj globálne minimum, v bode -1 globálne minimum, v bode $\frac{1}{3}$ lokálne maximum a v bode -2 globálne maximum. Vyplýva to z porovnania funkčných hodnôt $f(-2) = 2$, $f(-1) = -1$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$, $f(1) = -1$

c) Dirichletova funkcia χ definovaná $\chi(x) = 1$ pre $x \in Q$, $\chi(x) = 0$ pre $x \notin Q$ nemá deriváciu v žiadnom bode $x \in R$. Takže extrémy nezistíme pomocou jej derivácie.
Je zrejmé, že v každom bode $x \in R - Q$ má lokálne a globálne minimum a v každom bode $x \in Q$ má lokálne a globálne maximum. ■



Obr. 4.3.23: Príklad 4.3.32.



Obr. 4.3.24: Príklad 4.3.33.

Príklad 4.3.33.
Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom.

Riešenie.
Označme trojuholník ABC, stred jeho základne T a stred kružnice S (obrázok 4.3.24).
Označme $|TB| = x$, $x \in (0; r)$. Trojuholník STB je pravouhlý a (Pytagorova veta) platí:

$$|TS|^2 + |TB|^2 = |SB|^2 = r^2, \quad \text{t. j.} \quad |TS| = \sqrt{r^2 - |TB|^2} = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Pre obsah $P(x)$ trojuholníka ABC potom pre všetky $x \in (0; r)$ platí:

$$P(x) = \frac{|AB| \cdot |CT|}{2} = |TB| \cdot |CT| = x\,[|CS| + |TS|] = x\left[r + \sqrt{r^2 - x^2}\right],$$

$$P'(x) = \left[r + \sqrt{r^2 - x^2}\right] + x\left[0 + \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right] = \frac{r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Potom $P'(x) = 0$ práve vtedy, ak $r\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - 2x^2 = 0$. Z toho vyplýva:

$$r\sqrt{r^2 - x^2} = 2x^2 - r^2, \quad \text{t. j.} \quad r^2[r^2 - x^2] = (2x^2 - r^2)^2 = 4x^4 - 4x^2r^2 + r^4.$$

Posledná rovnica je ekvivalentná s rovnicou

$$-x^2r^2 = 4x^4 - 4x^2r^2, \quad \text{t. j.} \quad 0 = 4x^4 - 3x^2r^2 = x^2(4x^2 - 3r^2),$$

ktorá má tri riešenia $x_{1,2} = \pm\frac{r\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = 0$. Úlohe vyhovuje iba $x_1 = \frac{r\sqrt{3}}{2} > 0$.
Počítať $P''(x_1)$ nie je zložité, ale je pracné. Preto použijeme vetu 4.3.15.

Funkcia P' je spojitá na intervale $(0\,;\,r)$ a má iba jeden nulový bod $x_1=\frac{r\sqrt{3}}{2}\approx 0,866r$, v ktorom mení znamienko. Na určenie znamienka funkcie P' v ľavom, resp. pravom prstencovom okolí bodu x_1 nám potom postačí jeden bod. Platí napríklad

$$P'(0,8\,r)=\frac{r\sqrt{r^2-0{,}64r^2}+r^2-1{,}28r^2}{\sqrt{r^2-0{,}64r^2}}=\frac{\sqrt{0{,}36}-0{,}28}{\sqrt{0{,}36}}r=\frac{0{,}6-0{,}28}{0{,}6}r>0,$$

$$P'(0,9\,r)=\frac{r\sqrt{r^2-0{,}81r^2}+r^2-1{,}62r^2}{\sqrt{r^2-0{,}81r^2}}=\frac{\sqrt{0{,}19}-0{,}62}{\sqrt{0{,}19}}r<\frac{\sqrt{0{,}25}-0{,}62}{\sqrt{0{,}19}}r<0.$$

Z toho vyplýva, že funkcia P má pre $x_1=|TB|=\frac{r\sqrt{3}}{2}$ ostré lokálne maximum.
Pre výšku a základňu trojuholníka ABC potom platí:

$$|TS|=\sqrt{r^2-\tfrac{3r^2}{4}}=\sqrt{\tfrac{r^2}{4}}=\tfrac{r}{2},\quad |CT|=r+\tfrac{r}{2}=\tfrac{3r}{2},\quad |AB|=\sqrt{3}r.$$

Pre ramená $|AC|=|BC|$ trojuholníka ABC na základe Pytagorovej vety platí:

$$|BC|^2=|TB|^2+|CT|^2=\tfrac{3r^2}{4}+\tfrac{9r^2}{4}=\tfrac{12r^2}{4}=3r^2,\quad \text{t. j.}\quad |AC|=|BC|=\sqrt{3}r.$$

To znamená, že trojuholník ABC s maximálnym obsahom je rovnostranný. ■

- **Konvexnosť a konkávnosť funkcie**

Dôležitou súčasťou vyšetrovania priebehu funkcie je určenie intervalov, na ktorých je táto funkcia konvexná alebo konkávna, prípadne rýdzo konvexná alebo rýdzo konkávna. Najprv dokážeme dve nutné podmienky konvexnej, resp. konkávnej funkcie na intervale.

Veta 4.3.17.
Ak je funkcia f konvexná [resp. konkávna] na intervale I, potom je na intervale I spojitá a pre všetky vnútorné body $x\in I$ existujú jednostranné derivácie, pričom platí:

$$f'_-(x)\leq f'_+(x)\qquad [f'_-(x)\geq f'_+(x)].$$

Dôkaz.
Nech f je konvexná funkcia na intervale I a nech $x\in I$ je vnútorný bod.
Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset I$, $\{\overline{x_n}\}_{n=1}^{\infty}\subset I$ sú ľubovoľné postupnosti také, že

$$x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots<x<\cdots<\overline{x_n}<\cdots<\overline{x_2}<\overline{x_1},\qquad \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\overline{x_n}=x.$$

Potom z dôsledku 3.1.3.a vyplýva, že pre všetky $n\in N$ platí:

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\leq\cdots\leq\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\leq\cdots\leq$$
$$\leq\cdots\leq\frac{f(\overline{x_n})-f(x)}{\overline{x_n}-x}\leq\cdots\leq\frac{f(\overline{x_2})-f(x)}{\overline{x_2}-x}\leq\frac{f(\overline{x_1})-f(x)}{\overline{x_1}-x}.$$

To znamená, že sú postupnosti

$$\left\{\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right\}_{n=1}^{\infty},\qquad \left\{\frac{f(\overline{x_n})-f(x)}{\overline{x_n}-x}\right\}_{n=1}^{\infty}\tag{4.24}$$

monotónne a ohraničené a na základe vety 2.3.11 konvergujú. Z konštrukcie $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\overline{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ vyplýva, že postupnosti (4.24) konvergujú k jednostranným deriváciam

$$f'_-(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{f(\overline{x_n})-f(x)}{\overline{x_n}-x}=f'_+(x).$$

Z existencie konečných derivácií $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ vyplýva, že funkcia f je v bode x spojitá zľava a tiež sprava. To znamená (veta 4.1.3), že je f v bode x spojitá.
V prípade konkávnej funkcie je dôkaz analogický. ■

Z geometrického hľadiska predstavuje výraz $\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$ z dôkazu predchádzajúcej vety (viď poznámka 3.1.14) smernicu priamky, ktorá prechádza bodmi $[x;f(x)]$ a $[x_n;f(x_n)]$. Pre $x_n\to x^-$ dostaneme $f'_-(x)$ a pre $x_n\to x^+$ dostaneme $f'_+(x)$, t. j. smernice ľavej a pravej poldotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[x; f(x)]$. To znamená, že v prípade konvexnej [resp. konkávnej] funkcie nie je smernica ľavej poldotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[x; f(x)]$ väčšia [resp. menšia] ako smernica pravej poldotyčnice v tomto bode.

Príklad 4.3.34.
Funkcia $f\colon\ y = |x|,\ x \in R$ je na celom definičnom obore R konvexná, nie však rýdzo. Funkcia f je diferencovateľná pre všetky $x \neq 0$, pričom platí:

$$f'(x) = [-x]' = -1 \text{ pre } x < 0, \quad f'(x) = [x]' = 1 \text{ pre } x > 0.$$

Derivácia $f'(0)$ neexistuje, ale existujú (viď príklad 4.1.6) jednostranné derivácie

$$f'_-(0) = -1,\ f'_+(0) = 1, \quad \text{t. j. } f'_-(0) < f'_+(0).$$

To znamená, že pre všetky $x < 0$ má dotyčnica ku grafu funkcie f v bode $[x; f(x)]$ smernicu rovnú -1 a zviera s osou x uhol $-\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Pre všetky $x > 0$ má táto dotyčnica smernicu 1 a zviera uhol $\varphi = \frac{\pi}{4}$. V bode $x = 0$ má poldotyčnica zľava smernicu -1 a poldotyčnica sprava smernicu 1. ■

Obvykle pracujeme s funkciami f, ktoré majú na intervale I najviac konečný počet bodov x, pre ktoré platí $f'_-(x) \neq f'_+(x)$. Interval I môžeme potom rozdeliť na disjunktné podintervaly, na ktorých má funkcia f deriváciu f'. Preto sa obmedzíme na predpoklad, že funkcia f má na intervale I deriváciu f', t. j. je na intervale I diferencovateľná.

Veta 4.3.18.
Ak je funkcia f na intervale I diferencovateľná, potom platí:

a) Funkcia f je na I konvexná práve vtedy, ak je funkcia f' na I neklesajúca.
b) Funkcia f je na I rýdzo konvexná práve vtedy, ak je funkcia f' na I rastúca.
c) Funkcia f je na I konkávna práve vtedy, ak je funkcia f' na I nerastúca.
d) Funkcia f je na I rýdzo konkávna práve vtedy, ak je funkcia f' na I klesajúca.

Dôkaz.
a) $NP_{\Rightarrow}$: Nech f' nie je na I neklesajúca, t. j. nech pre nejaké $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ platí:

$$f'(x_1) = \lim_{x\to x_1} \tfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > \lim_{x\to x_2} \tfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} = f'(x_2).$$

Potom existujú prstencové okolia $P(x_1)$, $P(x_2)$, že pre všetky $t_1 \in P(x_1)$, $t_2 \in P(x_2)$ platí:

$$\tfrac{f(t_1)-f(x_1)}{t_1-x_1} > \tfrac{f(t_2)-f(x_2)}{t_2-x_2}, \quad \text{t. j. } \tfrac{f(x_1)-f(t_1)}{x_1-t_1} > \tfrac{f(x_2)-f(t_2)}{x_2-t_2}.$$

Zvoľme t_1, t_2 tak, aby $x_1 < t_1 < t_2 < x_2$. Potom na základe vety 3.1.3 platí:

$$\tfrac{f(x_1)-f(t_1)}{x_1-t_1} \leq \tfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} = \tfrac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2} \leq \tfrac{f(x_2)-f(t_2)}{x_2-t_2}.$$

Dostali sme spor, ktorý dokazuje, že funkcia f' je neklesajúca.

$PP_{\Leftarrow}$: Z existencie derivácie f' na I vyplýva, že je funkcia f spojitá na intervale I.
Nech $x, x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$ sú ľubovoľné. Definujme funkcie φ, ψ nasledovne

$$\varphi(t) = f(t) - f(x_1) - \tfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}\,(t - x_1), \quad t \in \langle x_1\,;\, x\rangle\,,$$

$$\psi(t) = f(t) - f(x) - \tfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}\,(t - x), \quad t \in \langle x\,;\, x_2\rangle\,.$$

Platí $\varphi(x_1) = \varphi(x) = 0$, funkcia φ je spojitá na intervale $\langle x_1\,;\, x\rangle$ a platí:

$$\varphi'(t) = f'(t) - \tfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}, \quad t \in (x_1\,;\, x)\,.$$

Platí $\psi(x) = \psi(x_2) = 0$, funkcia ψ je spojitá na intervale $\langle x\,;\, x_2\rangle$ a platí:

$$\psi'(t) = f'(t) - \tfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}, \quad t \in (x\,;\, x_2)\,.$$

To znamená, že obe funkcie φ, ψ spĺňajú predpoklady Rolleho vety o strednej hodnote 4.3.2. Potom existujú $c_1 \in (x_1\,;\,x)$, $c_2 \in (x\,;\,x_2)$, t. j. $c_1 < c_2$ také, že platí:

$$\varphi'(c_1) = f'(c_1) - \tfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = 0, \qquad \psi'(c_2) = f'(c_2) - \tfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} = 0.$$

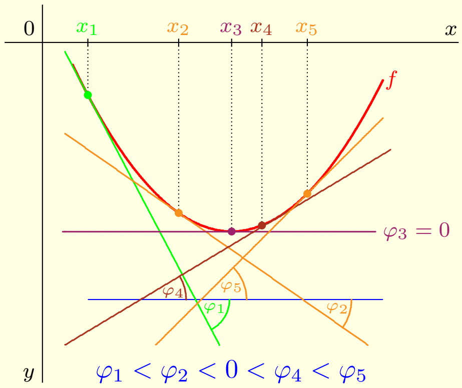
Keďže je funkcia f' neklesajúca, potom pre body $x_1 < x < x_2$ platí:

$$\tfrac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \tfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}.$$

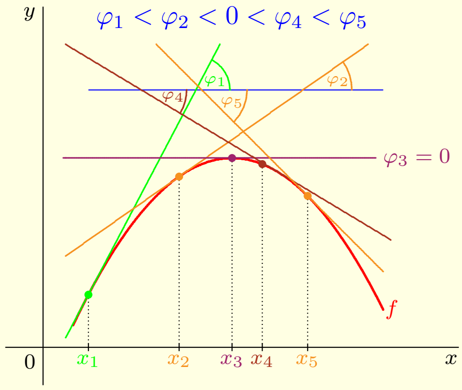
Z toho na základe vety 3.1.3 vyplýva, že je funkcia f konvexná.

b), c), d) Dôkaz týchto častí je analogický ako v prípade a). ■

Poznámka 4.3.24.
Predchádzajúca veta znamená, že v prípade konvexnej [resp. rýdzo konvexnej] funkcie f sa hodnota smernice dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[x; f(x)]$ (a tým pádom aj uhol φ, ktorý zviera táto dotyčnica s osou x) nezmenšuje [resp. zväčšuje] pre zväčšujúce sa x (obrázok 4.3.25). Ak je funkcia f konkávna [resp. rýdzo konkávna], potom sa naopak hodnota smernice dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[x; f(x)]$ nezväčšuje [resp. zmenšuje] pre zväčšujúce sa x (obrázok 4.3.26).



Obr. 4.3.25: Rýdzo konvexná funkcia f.



Obr. 4.3.26: Rýdzo konkávna funkcia.

Veta 4.3.19.
Nech je funkcia f na intervale I diferencovateľná. Potom platí:

a) Funkcia f je na I konvexná [resp. konkávna] práve vtedy, ak pre všetky $x_0, x \in I$ platí:
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad [\text{resp. } f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]. \tag{4.25}$$

b) Funkcia f je na intervale I rýdzo konvexná [resp. rýdzo konkávna] práve vtedy, ak pre všetky body $x_0, x \in I$, $x \neq x_0$ platí:
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad [\text{resp. } f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]. \tag{4.26}$$

Dôkaz.
a) $NP_{\Rightarrow}$: Predpokladajme, že je funkcia f konvexná na intervale I. Nech platí $x_0, x \in I$, $x_0 \neq x$. Potom z dôsledku 3.1.3.a vyplýva, že pre všetky $x_1 \in I$, $x_1 < x$ platí:

$$\tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ak prejdeme ku limite $x_1 \to x_0$, potom na základe vety 3.2.4 pre všetky $x, x_0 \in I$ platí:

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Po vynásobení výrazom $x - x_0 > 0$ a jednoduchej úprave dostaneme dokazované tvrdenie.

$PP_{\Leftarrow}$: Nech $x_1, x_2 \in I$ sú ľubovoľné. Potom zo vzťahu (4.25) vyplývajú nasledujúce dve nerovnosti

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2), \qquad f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Ak obidve nerovnice spočítame, dostaneme

$$0 \geq f'(x_2)(x_1 - x_2) + f'(x_1)(x_2 - x_1), \qquad \text{t. j.} \ \ 0 \geq [f'(x_1) - f'(x_2)](x_2 - x_1).$$

Ak platí $x_1 < x_2$, t. j. $x_2 - x_1 > 0$, potom z predchádzajúcej nerovnosti vyplýva, že platí $f'(x_1) - f'(x_2) \leq 0$, t. j. $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. To znamená, že je funkcia f' na intervale I neklesajúca. Z vety 4.3.18 potom vyplýva, že je funkcia f na intervale I konvexná.

b) $NP_{\Rightarrow}$: Ak je funkcia f rýdzo konvexná na I, potom pre všetky $x, x_0 \in I$, $x_1, x_2 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x$ na základe dôsledku 3.1.3.a platí:

$$\tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} < \tfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} < \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Ak prejdeme ku limite $x_1 \to x_0$, potom dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \lim_{x_1 \to x_0} \tfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} = \tfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} < \tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Posledný výraz stačí vynásobiť výrazom $x - x_0 > 0$ a upraviť.

$PP_{\Leftarrow}$: Dôkaz je rovnaký ako dôkaz $\mathrm{PP}_{\Leftarrow}$ v časti a).

Dôkaz pre konkávnu a rýdzo konkávnu funkciu f je analogický. ■

Ak má funkcia f na intervale I druhú deriváciu f'', potom môžeme jej konvexnosť a konkávnosť vyšetrovať pomocou monotónnosti funkcie f' na základe vety 4.3.12. V tomto prípade dostávame nasledujúcu vetu.

Veta 4.3.20.

Ak má funkcia f na intervale $I \subset R$ druhú deriváciu f'', potom platí:

a) Funkcia f je na I rýdzo konvexná práve vtedy, ak pre všetky $x \in I$ platí $f''(x) \geq 0$ a neexistuje otvorený interval $J \subset I$, na ktorom je f'' nulová (t. j. $f''(x) \neq 0$ pre $x \in J$).

b) Funkcia f je na I rýdzo konkávna práve vtedy, ak pre všetky $x \in I$ platí $f''(x) \leq 0$ a neexistuje otvorený interval $J \subset I$, na ktorom je f'' nulová (t. j. $f''(x) \neq 0$ pre $x \in J$).

c) Funkcia f je na I konvexná práve vtedy, ak pre všetky $x \in I$ platí $f''(x) \geq 0$.

d) Funkcia f je na I konkávna práve vtedy, ak pre všetky $x \in I$ platí $f''(x) \leq 0$.

Dôkaz.

Veta je priamym dôsledkom viet 4.3.12 a 4.3.18. ■

Dôsledok 4.3.20.a.

Ak má funkcia f na intervale $I \subset R$ druhú deriváciu a pre všetky $x \in I$ platí $f''(x) > 0$ [resp. $f''(x) < 0$], potom je funkcia f na I rýdzo konvexná [resp. rýdzo konkávna].

Z vety 4.3.20 a jej dôsledku vyplýva praktický návod ako postupovať pri určovaní intervalov konvexnosti a konkávnosti danej funkcie f v prípade, že existuje jej druhá derivácia f''. Vyriešime rovnicu $f''(x) = 0$ a nájdeme intervaly, na ktorých je funkcia f'' nezáporná a nekladná, resp. kladná a záporná.

Príklad 4.3.35.
Nájdite intervaly, na ktorých je konvexná a konkávna funkcia f, ak:
a) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, b) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, c) $f(x) = \max\{x, x^2\}$.

Riešenie.
a) Funkcia f je definovaná a spojitá na množine R a pre všetky $x \in R$ platí:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, \quad f''(x) = 6x - 2, \quad \text{t. j.} \quad f''(x) = 0 \iff x = \tfrac{1}{3}.$$

Funkcia f'' je spojitá na R, $x = \frac{1}{3}$ je jej jediný nulový bod. To znamená, že funkčné hodnoty $f''(x)$ menia svoje znamienko iba v bode $x = \frac{1}{3}$. Pre všetky $x \in \big(-\infty\,;\,\frac{1}{3}\big)$ platí $f''(x) < 0$ a pre všetky $x \in \big(\frac{1}{3}\,;\,\infty\big)$ platí $f''(x) > 0$.
Z toho vyplýva na základe vety 4.3.20 (obrázok 4.3.27 vľavo), že funkcia f je rýdzo konkávna na intervale $\big(-\infty\,;\,\frac{1}{3}\big\rangle$ a rýdzo konvexná na intervale $\big\langle\frac{1}{3}\,;\,\infty\big)$.
b) Funkcia f je definovaná a spojitá na množine R a pre jej derivácie f', f'' platí:

$$f'(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2},\ x \in R, \qquad f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3},\ x \in R.$$

Funkcia f'' má tri nulové body 0 a $\pm\sqrt{3}$ (obrázok 4.3.27 v strede).
Pre všetky $x \in \big(-\infty\,;\,-\sqrt{3}\big) \cup \big(0\,;\,\sqrt{3}\big)$ platí $f''(x) < 0$ a pre všetky $x \in \big(-\sqrt{3}\,;\,0\big) \cup \big(\sqrt{3}\,;\,\infty\big)$ platí $f''(x) > 0$. To znamená, že na intervaloch $\big(-\infty\,;\,-\sqrt{3}\big\rangle$ a $\big\langle 0\,;\,\sqrt{3}\big\rangle$ je funkcia f rýdzo konkávna a na intervaloch $\big\langle-\sqrt{3}\,;\,0\big\rangle$ a $\big\langle\sqrt{3}\,;\,\infty\big)$ je funkcia f rýdzo konvexná .
c) Funkciu f môžeme vyjadriť v tvare (obrázok 4.3.27 vpravo)

$$f(x) = x \ \text{ pre } x \in \langle 0\,;\,1\rangle\,, \qquad f(x) = x^2 \ \text{ pre } x \in (-\infty\,;\,0\rangle \cup \langle 1\,;\,\infty)\,.$$

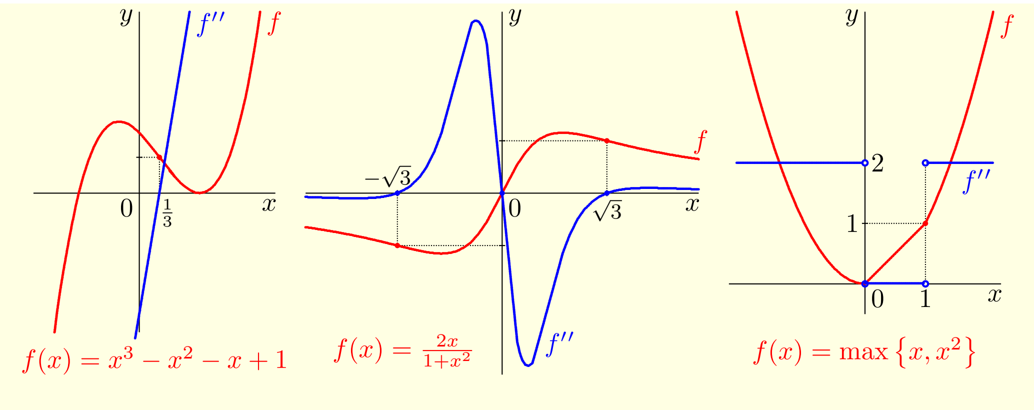
Funkcia f je spojitá na celej množine R a pre jej derivácie f', f'' platí

$$f'(x) = 1,\ f''(x) = 0 \ \text{ pre } x \in (0\,;\,1)\,, \qquad f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2 \ \text{ pre } x \in (-\infty\,;\,0) \cup (1\,;\,\infty)\,.$$

V bodoch 0 a 1 obojstranné derivácie neexistujú a pre jednostranné derivácie platí:

$$f'_-(0) = 0,\ f'_+(0) = 1,\ f'_-(1) = 1,\ f'_+(1) = 2, \quad f''_-(0) = 2,\ f''_+(0) = 0,\ f''_-(1) = 0,\ f''_+(1) = 2.$$

Aj keď neexistujú $f''(0)$, $f''(1)$, je funkcia f konvexná (nie rýdzo) na celej množine R. Rýdzo konvexná je na intervaloch $(-\infty\,;\,0\rangle$ a $\langle 1\,;\,\infty)$. ■



Obr. 4.3.27: Grafy funkcií z príkladu 4.3.35.

Z definície inflexného bodu a z predchádzajúcich viet 4.3.18, 4.3.14, resp. 4.3.20 priamo vyplývajú nasledujúce tvrdenia.

Veta 4.3.21.
Ak má funkcia f v nejakom okolí $O(x_0)$ bodu $x_0 \in D(f)$ deriváciu f', potom má funkcia f v bode x_0 inflexiu práve vtedy, ak pre všetky $x \in O(x_0)$, $x < x_0$ je funkcia f' rastúca [resp. klesajúca] a pre všetky $x \in O(x_0)$, $x > x_0$ je f' klesajúca [resp. rastúca].

Dôsledok 4.3.21.a.
Ak má funkcia f v bode x_0 inflexiu a v nejakom okolí $O(x_0)$ existuje derivácia f', potom funkcia f' nadobúda v bode x_0 ostrý lokálny extrém.

Dôsledok 4.3.21.b.
Ak má funkcia f v bode x_0 inflexiu a existuje $f''(x_0)$, potom platí $f''(x_0) = 0$.

Veta 4.3.22.
Nech je funkcia f v bode $x_0 \in D(f)$ diferencovateľná a nech v nejakom prstencovom okolí $P(x_0) = P^-(x_0) \cup P^+(x_0)$ existuje nenulová druhá derivácia f''. Potom platí:

a) Ak pre všetky $x \in P^-(x_0)$ platí $f''(x) > 0$ [resp. $f''(x) < 0$] a zároveň pre všetky $x \in P^+(x_0)$ platí $f''(x) < 0$ [resp. $f''(x) > 0$], potom má funkcia f v bode x_0 inflexiu.

b) Ak pre všetky $x \in P(x_0)$ platí $f''(x) > 0$ [resp. $f''(x) < 0$], potom funkcia f v bode x_0 inflexiu nemá.

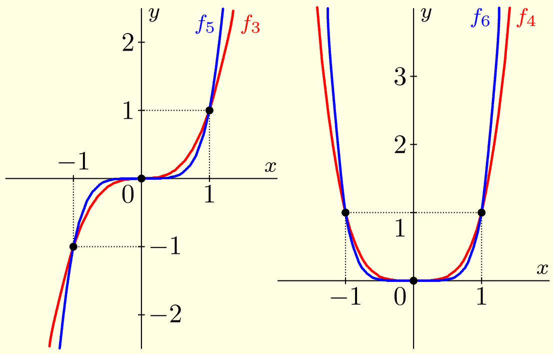
Poznámka 4.3.25.
Ak má funkcia f na intervale I druhú deriváciu f'', potom jej inflexné body budeme hľadať ako korene rovnice $f''(x) = 0$ na intervale I. Avšak nie každý bod vyhovujúci tejto rovnici, musí byť inflexný (príklad 4.3.36).
Na druhej strane môže mať funkcia f inflexiu aj v takom bode, v ktorom jej druhá derivácia f'' neexistuje (príklad 4.3.38). To znamená, že pri ďalšom vyšetrovaní inflexie danej funkcie musíme brať do úvahy aj tieto body, v ktorých druhá derivácia funkcie f neexistuje.

Príklad 4.3.36.
Nájdite inflexné body funkcie $f_n(x) = x^n$, $x \in R$, kde $n \in N$.

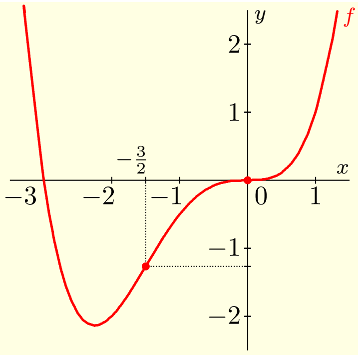
Riešenie.
Ak $n = 1$, potom pre všetky $x \in R$ platí $f_1(x) = x$, $f_1'(x) = 1$, $f''_1(x) = 0$. To znamená (veta 4.3.20), že neexistuje interval $I \subset R$, na ktorom je funkcia f_1 rýdzo konkávna alebo rýdzo konvexná. Takže funkcia f_1 nemá inflexné body.
Ak $n = 2$, potom pre všetky $x \in R$ platí $f_2(x) = x^2$, $f_2'(x) = 2x$, $f''_2(x) = 2 > 0$. To znamená (veta 4.3.20), že na celej množine R je funkcia f_2 rýdzo konvexná.
Ak $n \in N$, $n \geq 3$, potom pre prvé a druhé derivácie funkcie $f_n(x) = x^n$ platí:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}, \ x \in R, \qquad f''_n(x) = n(n-1)x^{n-2}, \ x \in R.$$

Funkcia $f''_n(x)$ je spojitá pre všetky $x \in R$ a má práve jeden nulový bod $x_0 = 0$. Z toho vyplýva, že funkcia f_n môže mať inflexiu iba v bode x_0.
Ak je n nepárne, potom je aj $n-2$ nepárne a $f''_n(x) < 0$ pre všetky $x < 0$, $f''_n(x) > 0$ pre všetky $x > 0$. To znamená (veta 4.3.22), že funkcia f_n v bode $x_0 = 0$ inflexiu má.
Ak je n párne, potom je aj $n-2$ párne a pre všetky $x \neq 0$ platí $f''_n(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$. To znamená (veta 4.3.22), že funkcia f_n v bode $x_0 = 0$ inflexiu nemá (obr. 4.3.28). ■



Obr. 4.3.28: Grafy funkcií f_3, f_5 a f_4, f_6 z príkladu 4.3.36.



Obr. 4.3.29: Graf funkcie f z príkladu 4.3.37.

Príklad 4.3.37.
Nájdite intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = \frac{3x^3}{4} + \frac{x^4}{4}$ konvexná a konkávna.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná a spojitá pre všetky $x \in R$. Pre jej derivácie f' a f'' platí:

$$f'(x) = \frac{9x^2}{4} + x^3, \quad x \in R, \qquad f''(x) = \frac{9x}{2} + 3x^2 = \frac{3x(3+2x)}{2}, \quad x \in R.$$

Rovnica $f''(x) = 0$ má dve riešenia $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{3}{2}$. Keďže pre všetky $x \in R$ je funkcia f'' spojitá, na zistenie konvexnosti, resp. konkávnosti funkcie f stačí určiť hodnotu jedného ľubovoľného bodu z príslušného intervalu.
Na intervale $\left(-\infty\,; -\frac{3}{2}\right)$ je funkcia konvexná, pretože $f''(-2) = 3 > 0$. Na intervale $\left(-\frac{3}{2}\,; 0\right)$ je funkcia konkávna, pretože $f''(-1) = -\frac{3}{2} < 0$. Na intervale $(0\,; \infty)$ je funkcia konvexná, pretože $f''(2) = 21 > 0$. Z toho vyplýva, že funkcia f má dva inflexné body $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{3}{2}$ (obr. 4.3.29). ∎

Príklad 4.3.38.
Nájdite intervaly, na ktorých je konvexná a konkávna funkcia $f(x) = \frac{2x^2}{3} - \frac{x^3}{18} - \frac{9x\sqrt[3]{x^2}}{10}$.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná a spojitá pre všetky $x \in R$. Pre jej derivácie f' a f'' platí:

$$f'(x) = \left[\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{18}x^3 - \frac{9}{10}x(x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{4}{3}x - \frac{3}{18}x^2 - \frac{9}{10}\left[(x^2)^{\frac{1}{3}} + x\frac{(x^2)^{-\frac{2}{3}}}{3}2x\right],$$

$$= \frac{4x}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{9}{10}\left[(x^2)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}(x^2)^{1-\frac{2}{3}}\right] = \frac{4x}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{9}{10}\,\frac{5(x^2)^{\frac{1}{3}}}{3}, \quad x \in R$$

$$f''(x) = \left[\frac{4x}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{3(x^2)^{\frac{1}{3}}}{2}\right]' = \frac{4}{3} - \frac{2x}{6} - \frac{3}{2}\,\frac{(x^2)^{-\frac{2}{3}}}{3}2x = \frac{4}{3} - \frac{x}{3} - \frac{x}{(x^4)^{\frac{1}{3}}}, \quad x \neq 0.$$

Je zrejmé, že $x_1 = 1$ je riešením rovnice $f''(x) = 0$. Ukážeme, že x_1 je jediné riešenie.
Označme $g(x) = f''(x)$, $x \in R - \{0\}$. Nájdeme lokálne extrémy funkcie g. Platí

$$g'(x) = \left[\frac{4}{3} - \frac{x}{3} - x(x^4)^{-\frac{1}{3}}\right]' = -\frac{1}{3} - (x^4)^{-\frac{1}{3}} - x\frac{-1}{3}(x^4)^{-\frac{4}{3}}4x^3 =$$

$$= -\frac{1}{3} - (x^4)^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}(x^4)^{1-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(x^4)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - 1\right], \quad x \neq 0.$$

Rovnica $g'(x) = 0$ má dve riešenia $x_{1,2} = \pm 1$.

Na intervaloch $(-\infty\,;\,-1)$, $(1\,;\,\infty)$ je funkcia g klesajúca, pretože na týchto intervaloch platí $\sqrt[3]{x^4} > 0$, t. j. $g'(x) < 0$. Naopak na $(-1\,;\,0)$, $(0\,;\,1)$ je funkcia g rastúca, pretože na týchto intervaloch platí $\sqrt[3]{x^4} < 0$, t. j. $g'(x) > 0$. Z toho vyplýva, že v bode $x_2 = -1$ má funkcia g lokálne minimum a v bode $x_1 = 1$ má lokálne maximum.
Funkciu g môžeme vyjadriť v tvare

$$g(x) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{x}{3} - \tfrac{x}{\sqrt[3]{x^4}} = \tfrac{4}{3} - \tfrac{x}{3} - \tfrac{x}{|x|\,\sqrt[3]{|x|}} = \begin{cases} \tfrac{4}{3} - \tfrac{x}{3} + \tfrac{1}{\sqrt[3]{|x|}}, & \text{pre } x < 0, \\ \tfrac{4}{3} - \tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \text{pre } x > 0. \end{cases}$$

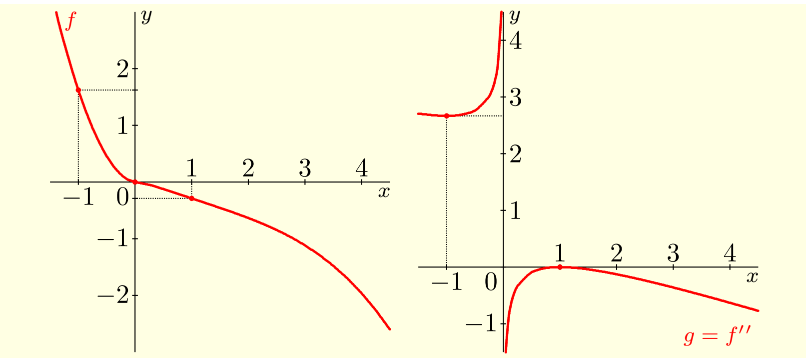
V bode $x_3 = 0$ je funkcia g nespojitá a pre jednostranné limity v tomto bode platí:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \tfrac{4}{3} - 0 + \tfrac{1}{\sqrt[3]{|0|}} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \tfrac{4}{3} - 0 - \tfrac{1}{\sqrt[3]{|0|}} = -\infty.$$

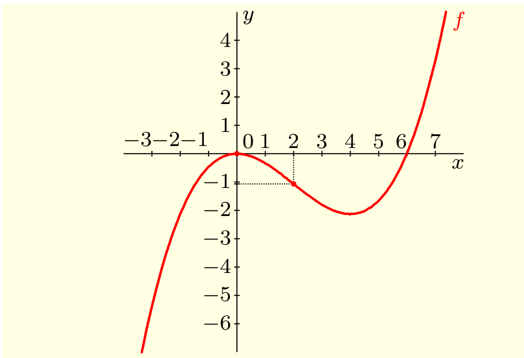
Navyše pre limity funkcie g v bodoch $\pm\infty$ platí:

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{-\infty}{3} + \tfrac{1}{\sqrt[3]{\infty}} = \infty, \qquad \lim_{x\to \infty} g(x) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{\infty}{3} - \tfrac{1}{\sqrt[3]{\infty}} = -\infty.$$

Z predchádzajúceho vyplýva, že pre všetky $x < 0$, $x \neq -1$ platí $g(x) > g(-1) = \frac{8}{3} > 0$ a pre všetky $x > 0$, $x \neq 1$ platí $g(x) < g(1) = 0$. To znamená, že funkcia $g(x) = f''(x)$ má práve jeden nulový bod $x_1 = 1$. Situácia je ilustrovaná na obrázku 4.3.30 vpravo.
Navyše z toho vyplýva, že funkcia f je konvexná na intervaloch $(-\infty\,;\,-1)$, $(-1\,;\,0)$ a konkávna na intervaloch $(0\,;\,1)$, $(1\,;\,\infty)$. To znamená, že bod $x_1 = 1$ nie je inflexný, ale bod $x_3 = 0$ inflexný je (obr. 4.3.30). ■



Obr. 4.3.30: Grafy funkcií $f(x)$ a $f''(x)$ z príkladu 4.3.38.



Obr. 4.3.31: Funkcia $f(x) = \frac{x^3-6x^2}{15}$.

Ak existuje tretia derivácia $f'''(x_0)$, potom môžeme pomocou nej rozhodnúť, či x_0 je alebo nie inflexným bodom danej funkcie f. Hovorí o tom nasledujúca veta.

Veta 4.3.23.
Ak pre funkciu f platí $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, potom má funkcia f v bode x_0 inflexiu.

Dôkaz.
Predpokladajme najprv, že $f'''(x_0) > 0$. Potom podľa definície derivácie platí:

$$f'''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \tfrac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0.$$

Z toho na základe dôsledku 3.2.7.a vyplýva, že existuje prstencové okolie $P(x_0)$ také, že pre všetky $x \in P(x_0)$ platí $\frac{f''(x)}{x-x_0} > 0$.
Potom pre všetky $x \in P^-(x_0)$, t. j. $x - x_0 < 0$, platí $f''(x) < 0$ a pre všetky $x \in P^+(x_0)$, t. j. $x - x_0 > 0$, platí $f''(x) > 0$. To znamená (veta 4.3.22), že x_0 je inflexný bod.
V prípade $f'''(x_0) < 0$ je dôkaz analogický. ■

Príklad 4.3.39.
Nájdite intervaly, na ktorých sú konvexné a konkávne funkcie:
a) $f(x) = \frac{x^3-6x^2}{15}$, b) $f(x) = \sin x$, c) $f(x) = \cos x$.

Riešenie.
a) Funkcia f je definovaná a spojitá pre všetky $x \in R$. Pre jej derivácie f', f'' a f''' platí:

$$f'(x) = \frac{3x^2-12x}{15} = \frac{x^2-4x}{5}, \qquad f''(x) = \frac{2x-4}{5}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{5}.$$

Rovnica $f''(x) = 0$ má jediné riešenie $x_0 = 2$. Bod x_0 je inflexným bodom funkcie f, pretože platí $f'''(x_0) = f'''(2) = \frac{2}{5} > 0$ (obr. 4.3.31).

b) Funkcia $f(x) = \sin x$ je definovaná a spojitá pre všetky $x \in R$. Pre jej derivácie platí:

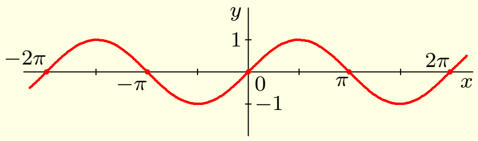
$$f'(x) = \cos x, \qquad f''(x) = -\sin x, \qquad f'''(x) = -\cos x.$$

Riešením rovnice $f''(x) = -\sin x = 0$ sú body $x = k\pi$, kde $k \in Z$. Tieto body sú zároveň aj inflexné body funkcie f, pretože pre k párne platí $f'''(x) = -\cos(k\pi) = -1 < 0$ a pre k nepárne platí $f'''(x) = -\cos(k\pi) = 1 > 0$ (obr. 4.3.32).

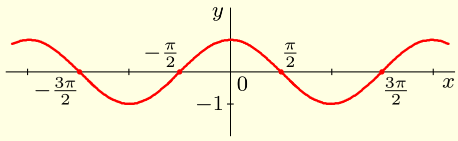
c) Funkcia $f(x) = \cos x$ je definovaná a spojitá pre všetky $x \in R$. Pre jej derivácie platí:

$$f'(x) = -\sin x, \qquad f''(x) = -\cos x, \qquad f'''(x) = \sin x.$$

Riešením rovnice $f''(x) = -\cos x = 0$ sú body $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$. Tieto body sú tiež inflexné body funkcie f, pretože $f'''(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1 > 0$ pre k párne a $f'''(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -1 < 0$ pre k nepárne (obr. 4.3.33). ■



Obr. 4.3.32: Funkcia $f(x) = \sin x$.



Obr. 4.3.33: Funkcia $f(x) = \cos x$.

Poznámka 4.3.26.
Z príkladu 4.3.36 vyplýva, že funkcia $f_5(x) = x^5$, $x \in R$ má v bode $x_0 = 0$ inflexiu, ale funkcia $f_4(x) = x^4$, $x \in R$ v bode $x_0 = 0$ inflexiu nemá (má tam ostré lokálne minimum).
Pre tieto funkcie platí $f_4'(0) = f''_4(0) = f'''_4(0) = 0$, $f_5'(0) = f''_5(0) = f'''_5(0) = f''''_5(0) = 0$. To znamená, že nemôžeme použiť vety 4.3.16 a 4.3.23. V tomto prípade môžeme inflexné, resp. extremálne body určiť pomocou derivácií $f''''_4(0) = 24 \neq 0$, $f'''''_5(0) = 120 \neq 0$. Hovoria o tom nasledujúce dve vety 4.3.24 a 4.3.25, ktoré využívajú derivácie vyšších rádov.

Veta 4.3.24.
Nech f je reálna funkcia a nech existuje $n \in N$ také, že pre derivácie funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ platí[30] $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potom platí:

a) Ak je n nepárne, potom funkcia f v bode x_0 nemá lokálny extrém.
 i) Ak $f^{(n)}(x_0) > 0$, potom je funkcia f v bode x_0 rastúca.
 ii) Ak $f^{(n)}(x_0) < 0$, potom je funkcia f v bode x_0 klesajúca.

[30] Napríklad pre $n = 1$ platí $f'(x_0) \neq 0$ a pre $n = 4$ platí $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, $f''''(x_0) \neq 0$.

b) Ak je n párne, potom má funkcia f v bode x_0 ostrý lokálny extrém.

i) Ak $f^{(n)}(x_0) > 0$, potom má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne minimum.

ii) Ak $f^{(n)}(x_0) < 0$, potom má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne maximum.

Dôkaz.
Z definície konečnej derivácie $f^{(n)}(x_0)$ vyplýva, že existuje nejaké okolie $O(x_0)$, na ktorom je funkcia $f^{(n-1)}$ definovaná. Následkom toho existujú funkcie $f^{(n-2)}, \ldots, f'', f', f$, $n \geq 2$ v celom okolí $O(x_0)$. Z viet 4.1.1 a 4.1.4 vyplýva, že je funkcia $f^{(n-1)}$ spojitá v bode x_0 a že funkcie $f^{(n-2)}, \ldots, f''$, f', f sú spojité v okolí $O(x_0)$.

Predpokladajme, že platí $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Z vety 4.3.15 vyplýva, že je funkcia $f^{(n-1)}$ rastúca v bode x_0. Potom existuje okolie $O_1(x_0) \subset O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O_1(x_0)$ platí:
$$f^{(n-1)}(x) < f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ pre } x < x_0, \qquad f^{(n-1)}(x) > f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ pre } x > x_0.$$
Z vety 4.3.12 vyplýva, že je funkcia $f^{(n-2)}$ klesajúca pre $x \in O_1(x_0)$, $x < x_0$ a rastúca pre $x \in O_1(x_0)$, $x > x_0$. To znamená (veta 4.3.15), že v bode x_0 má funkcia $f^{(n-2)}$ ostré lokálne minimum, t. j. pre všetky $x \in O_1(x_0)$, $x \neq x_0$ platí:
$$f^{(n-2)}(x) > f^{(n-2)}(x_0) = 0, \quad \text{t. j. } f^{(n-2)}(x) > 0.$$
Z vety 4.3.12 vyplýva, že je $f^{(n-3)}$ rastúca na $O_1(x_0)$. Potom pre všetky $x \in O_1(x_0)$ platí:
$$f^{(n-3)}(x) < f^{(n-3)}(x_0) = 0 \text{ pre } x < x_0, \qquad f^{(n-3)}(x) > f^{(n-3)}(x_0) = 0 \text{ pre } x > x_0.$$
Takže je funkcia $f^{(n-4)}$ klesajúca pre $x \in O_1(x_0)$, $x < x_0$ a rastúca pre $x \in O_1(x_0)$, $x > x_0$, t. j. má v bode x_0 ostré lokálne minimum. Potom pre všetky $x \in O_1(x_0)$, $x \neq x_0$ platí:
$$f^{(n-4)}(x) > f^{(n-4)}(x_0) = 0, \quad \text{t. j. } f^{(n-4)}(x) > 0.$$
Takto môžeme postupne pokračovať až po f'', f', f. Ak to zhrnieme, potom platí:

a) Ak je n nepárne, potom sú $n-1$, $n-3$, …párne. To znamená, že sú funkcie $f^{(n-1)}, f^{(n-3)}, \ldots$, f'', f rastúce v bode x_0.

b) Ak je n párne, potom majú $f^{(n-2)}, f^{(n-4)}, \ldots, f''$, f v bode x_0 ostré lokálne minimum.

Pre $f^{(n)}(x_0) < 0$ je dôkaz analogický a prenechávame ho čitateľovi. ■

Veta 4.3.25.
Nech f je reálna funkcia a nech existuje $n \in N$, $n \geq 2$ také, že pre derivácie funkcie f v bode $x_0 \in D(f)$ platí[31] $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potom platí:

a) Ak je n nepárne, potom má funkcia f v bode x_0 inflexiu.

b) Ak je n párne: i) Ak $f^{(n)}(x_0) > 0$, potom je funkcia f v bode x_0 rýdzo konvexná.
ii) Ak $f^{(n)}(x_0) < 0$, potom je funkcia f v bode x_0 rýdzo konkávna.

Dôkaz.
Nech $f^{(n)}(x_0) > 0$. Potom z dôkazu predchádzajúcej vety 4.3.24 vyplýva:

a) Ak je n nepárne, potom majú funkcie $f^{(n-2)}, f^{(n-4)}, \ldots, f'''$, f' ostré lokálne minimum v bode x_0. To znamená, že existuje okolie $O(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O(x_0)$, $x < x_0$ je funkcia f' klesajúca a pre všetky $x \in O(x_0)$, $x > x_0$ je funkcia f' rastúca. Potom z vety 4.3.21 vyplýva, že x_0 je inflexný bod funkcie f.

b) Ak je n párne, t. j. $n-1$ nepárne, potom sú funkcie $f^{(n-1)}, f^{(n-3)}, \ldots, f'''$, f' rastúce v bode x_0. Potom z vety 4.3.20 vyplýva, že je f v bode x_0 rýdzo konvexná.

[31] Na rozdiel od vety 4.3.24 nás nezaujíma hodnota $f'(x_0)$. Napríklad pre $n = 2$ platí $f'(x_0) \in R$, $f''(x_0) \neq 0$ a pre $n = 4$ platí $f'(x_0) \in R$, $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, $f''''(x_0) \neq 0$.

Pre $f^{(n)}(x_0) < 0$ je dôkaz analogický a prenechávame ho čitateľovi. ■

Príklad 4.3.40.
Uvažujme funkciu $f_n(x) = x^n$, $x \in R$, kde $n \in N$, $n > 1$.
Z príkladu 4.3.14 (obr. 4.3.28) vyplýva, že pre n nepárne má funkcia f_n v bode $x_0 = 0$ inflexiu a pre n párne v bode x_0 inflexiu nemá. Pre derivácie funkcie f_n do rádu n platí:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}, \; f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \; \ldots, \; f_n^{(n-1)}(x) = n(n-1)\cdots 2x, \; f_n^{(n)}(x) = n!.$$

To znamená, že $f_n'(0) = f_n''(0) = \cdots = f_n^{(n-1)}(0) = 0$, $f_n^{(n)}(0) = n! > 0$. Z viet 4.3.24 a 4.3.25 potom vyplýva, že pre n nepárne je funkcia f_n v bode $x_0 = 0$ rastúca a má v tomto bode inflexiu. Na druhej strane pre n párne je funkcia f_n v bode $x_0 = 0$ rýdzo konvexná a má v tomto bode ostré lokálne minimum. ■

Príklad 4.3.41.
Nájdite extrémy a inflexné body funkcie $f(x) = \frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^5}{5} + 3$, $x \in R$.

Riešenie.
Pre derivácie f' a f'' pre všetky $x \in R$ platí:

$$f'(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 = x^4(x-1)^2, \quad f''(x) = 6x^5 - 10x^4 + 4x^3 = 2x^3(x-1)(3x-2).$$

Rovnica $f'(x) = 0$ má dve riešenia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a rovnica $f''(x) = 0$ má tri riešenia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a $x_3 = \frac{2}{3}$. Pre derivácie $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$ pre všetky $x \in R$ platí:

$$f^{(3)}(x) = 2(15x^4 - 20x^3 + 6x^2), \; f^{(4)}(x) = 24(5x^3 - 5x^2 + x), \; f^{(5)}(x) = 24(15x^2 - 10x + 1).$$

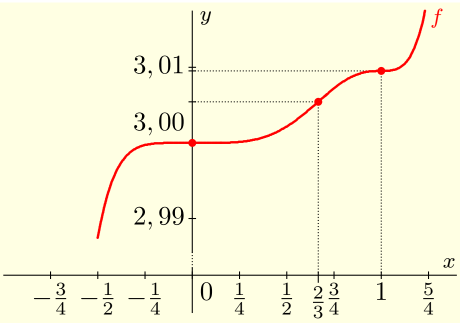
Pre hodnoty funkcií $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $\ldots$, $f^{(5)}$ v bodoch $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ platí:

$$f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0, \; f^{(5)}(0) = 24, \quad f^{(1)}(1) = f^{(2)}(1) = 0, \; f^{(3)}(1) = 2.$$

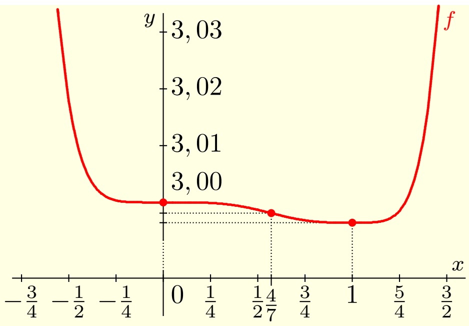
Z vety 4.3.24 vyplýva, že v bodoch $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ je funkcia f rastúca. Z vety 4.3.25 vyplýva, že sú tieto body $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ inflexné. Ďalej pre $x_3 = \frac{2}{3}$ platí:

$$f'(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{16}{729} > 0, \; f''(\tfrac{2}{3}) = 0, \; f'''(\tfrac{2}{3}) = -\tfrac{16}{27} < 0.$$

Vetu 4.3.24 použiť nemôžeme. Funkcia f v bode x_3 nie je klesajúca, ale je rastúca (veta 4.3.12). Z vety 4.3.25 vyplýva, že je bod x_3 inflexný. To znamená, že f nemá lokálne a ani globálne extrémy a že body x_1, x_2, x_3 sú inflexné (viď obr. 4.3.34). ■



Obr. 4.3.34: Funkcia z príkladu 4.3.41 (os y je zväčšená 40-krát vzhľadom na x).



Obr. 4.3.35: Funkcia z príkladu 4.3.42 (os y je zväčšená 30-krát vzhľadom na x).

Príklad 4.3.42.
Nájdite extrémy a inflexné body funkcie $f(x) = \frac{x^8}{8} - \frac{3x^7}{7} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^5}{5} + 3$, $x \in R$.

Riešenie.
Pre prvú a druhú deriváciu funkcie f na celej množine R platí:

$$f'(x) = x^7 - 3x^6 + 3x^5 - x^4 = x^4(x-1)^3, \; x \in R,$$
$$f''(x) = 7x^6 - 18x^5 + 15x^4 - 4x^3 = x^3(x-1)^2(7x-4), \; x \in R.$$

Rovnica $f'(x) = 0$ má dve riešenia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a rovnica $f''(x) = 0$ má tri riešenia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a $x_3 = \frac{4}{7}$. Ďalej pre derivácie funkcie f do rádu 5 platí:

$$f^{(3)}(x) = 6(7x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 2x^2), \; x \in R,$$
$$f^{(4)}(x) = 6(35x^4 - 60x^3 + 30x^2 - 4x), \; x \in R,$$
$$f^{(5)}(x) = 24(35x^3 - 45x^2 + 15x - 1), \; x \in R.$$

Pre hodnoty funkcií f', f'',..., $f^{(5)}$ v bodoch $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{4}{7}$ platí:

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = -24 < 0,$$
$$f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = 0, \quad f^{(4)}(1) = 6 > 0,$$
$$f'(\tfrac{4}{7}) \approx -0{,}0084 < 0, \quad f''(\tfrac{4}{7}) = 0, \quad f^{(3)}(\tfrac{4}{7}) \approx 0{,}2399 > 0.$$

Z toho vyplýva (vety 4.3.24, 4.3.25 a 4.3.12), že v bodoch $x_1 = 0$, $x_3 = \frac{4}{7}$ je funkcia f klesajúca, tieto body sú inflexné a v bode $x_2 = 1$ je funkcia f rýdzo konvexná, v bode $x_2 = 1$ má lokálne minimum (viď obr. 4.3.35). ■

- **Celkové vyšetrenie priebehu funkcie**

V tejto časti zhrnieme všetky naše doterajšie výsledky o funkciách a uvedieme postup na celkové vyšetrenie priebehu funkcie. Tento postup nemusíme považovať za záväzný predpis, ale skôr za návod k tomu, ako môžeme pri riešení tohto problému postupovať. Zhrnieme ho do nasledujúcich bodov:

1. Určíme definičný obor funkcie (pokiaľ nie je zadaný).
2. Určíme, či je funkcia párna, nepárna alebo periodická.
3. Určíme nulové body funkcie a intervaly, na ktorých je funkcia kladná a záporná.
4. Určíme všetky body spojitosti a nespojitosti funkcie. V bodoch nespojitosti a v hraničných bodoch definičného oboru (vrátane nevlastných bodov $\pm\infty$) určíme jednostranné limity danej funkcie.
5. Určíme stacionárne body funkcie, lokálne a globálne extrémy funkcie a intervaly, na ktorých je funkcia rastúca, klesajúca, resp. konštantná.
6. Určíme inflexné body funkcie a intervaly, na ktorých je funkcia konvexná a konkávna.
7. Určíme asymptoty grafu funkcie a načrtneme graf funkcie.

Najnázornejšiu predstavu o priebehu funkcie nám vo väčšine prípadov poskytne jej graf. Pri jeho konštrukcii využívame všetky zistené údaje. Mnohokrát sú tieto informácie nedostatočné, preto ich musíme vhodne doplniť. Sú to napríklad nulové body prvej a druhej derivácie funkcie, dotyčnice grafu funkcie v niektorých dôležitých bodoch (napríklad v inflexných bodoch) alebo iba vhodne zvolené funkčné hodnoty.

Príklad 4.3.43.
Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in R$, t. j. $D(f) = R$.

Funkcia f nie je periodická, ani párna, ale je nepárna, pretože pre všetky $x \in R$ platí:

$$f(-x) = \tfrac{-x}{1+(-x)^2} = \tfrac{-x}{1+x^2} = -\tfrac{x}{1+x^2} = -f(x).$$

Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in R$. Pre jej limity v nevlastných bodoch $\pm\infty$ platí:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\tfrac{x}{1+x^2}\cdot\tfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{1}{\frac{1}{x}+x} = \tfrac{1}{0\pm\infty} = 0. \tag{4.27}$$

Funkcia f má jeden nulový bod $x_1 = 0$, t. j. $f(0) = 0$. Na intervale $(-\infty\,;\,0)$ je funkcia f záporná a na intervale $(0\,;\,\infty)$ je funkcia f kladná. Pre prvú deriváciu funkcie f platí:

$$f'(x) = \left[\tfrac{x}{1+x^2}\right]' = \tfrac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \tfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \tfrac{1-x^2}{1+2x^2+x^4},\ x \in R.$$

Z toho vyplýva, že má funkcia f' dva nulové body $x_{2,3} = \pm 1$. Keďže je f' spojitá na R, je na intervaloch $(-\infty\,;\,-1)$, $(-1\,;\,1)$, $(1\,;\,\infty)$ buď kladná alebo záporná. Na toto určenie postačí jeden bod intervalu. Zvoľme napríklad

$$f'(-2) = f'(2) = \tfrac{1-4}{(1+4)^2} = \tfrac{-3}{25} < 0, \qquad f'(0) = \tfrac{1-0}{(1+0)^2} = 1 > 0.$$

To znamená, že platí $f'(x) < 0$ pre $x \in (-\infty\,;\,-1)$ a pre $x \in (1\,;\,\infty)$ a platí $f'(x) > 0$ pre $x \in (-1\,;\,1)$. Z toho vyplýva (veta 4.3.12), že funkcia f je klesajúca na intervale $(-\infty\,;\,-1\rangle$, rastúca na intervale $\langle -1\,;\,1\rangle$ a klesajúca na intervale $\langle 1\,;\,\infty)$. Takže funkcia f má v bode $x_2 = -1$ lokálne minumum $f(-1) = -\frac{1}{2}$ a v bode $x_3 = 1$ má lokálne maximum $f(1) = \frac{1}{2}$. Je zrejmé, že tieto extrémy sú zároveň aj globálne.

$(-\infty\,;\,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}\,;\,-1)$	$(-1\,;\,0)$	$(0\,;\,1)$	$(1\,;\,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3}\,;\,\infty)$
		0 ... nulový bod			
$-$ záporná $f(x) < 0$ $-$			$+$ kladná $f(x) > 0$ $+$		
	-1 ... lokálne minimum			1 ... lokálne maximum	
$\searrow$ klesá $f'(x) < 0$ $\searrow$		$\nearrow$ rastie $f'(x) > 0$ $\nearrow$		$\searrow$ klesá $f'(x) < 0$ $\searrow$	
$-\sqrt{3}$ ... inflexný bod			0 ... inflexný bod	$\sqrt{3}$ ... inflexný bod	
$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x) < 0$	$\cup$ konvexná $\cup$ $f''(x) > 0$		$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x) < 0$		$\cup$ konvexná $\cup$ $f''(x) > 0$

Tabuľka 4.3.4: Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ z príkladu 4.3.43.

Pre druhú deriváciu funkcie f na množine $D(f) = R$ platí:

$$f''(x) = \left[\tfrac{x}{1+x^2}\right]'' = \left[\tfrac{1-x^2}{1+2x^2+x^4}\right]' = \tfrac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)(4x+4x^3)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \tfrac{-2x(1+x^2)^2-4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \tfrac{(1+x^2)(-2x-2x^3-4x+4x^3)}{(1+x^2)^4} = \tfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}.$$

Funkcia f'' je spojitá pre všetky $x \in R$ a má tri nulové body $x_1 = 0$, $x_{4,5} = \pm\sqrt{3}$. To znamená, že na intervaloch $\left(-\infty\,;\,-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}\,;\,0\right)$, $\left(0\,;\,\sqrt{3}\right)$ a $\left(\sqrt{3}\,;\,\infty\right)$ je funkcia f'' kladná alebo záporná, t. j. funkcia f je konvexná alebo konkávna. Zvoľme napríklad

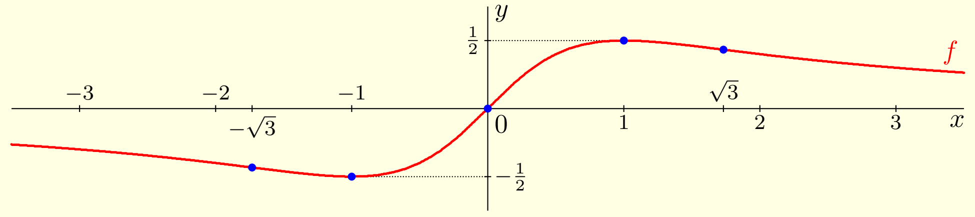
$$f''(-2) = \tfrac{-4}{125} < 0, \quad f''(-1) = \tfrac{1}{2} > 0, \quad f''(1) = -\tfrac{1}{2} < 0, \quad f''(2) = \tfrac{4}{125} > 0.$$

Z toho vyplýva, že funkcia f je konvexná na intervaloch $\left\langle -\sqrt{3}\,;\,0\right\rangle$, $\left\langle \sqrt{3}\,;\,\infty\right)$ a konkávna na intervaloch $\left(-\infty\,;\,-\sqrt{3}\right\rangle$, $\left\langle 0\,;\,\sqrt{3}\right\rangle$. To znamená, že body $x_1 = 0$, $x_{4,5} = \pm\sqrt{3}$ sú inflexné. Pre hodnoty funkcie f v bodoch $x_{4,5}$ platí $f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Funkcia f asymptotu bez smernice nemá a má jednu asymptotu $y = kx + q$ so smernicou. Pre jej koeficienty k, q na základe vety 3.2.14 a vzťahu (4.27) platí:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0, \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

To znamená, že asymptota so smernicou grafu funkcie f má rovnicu $y = 0$. Vypočítané výsledky sú zhrnuté v tabuľke 4.3.4 a graf funkcie f je znázornený na obrázku 4.3.36. ■



Obr. 4.3.36: Graf funkcie $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ z príkladu 4.3.43.

Príklad 4.3.44.
Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2}$.

Riešenie.
Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in R - \{0\}$, t. j. $D(f) = (-\infty\,;\,0) \cup (0\,;\,\infty)$.
Funkcia f nie je periodická, nie je párna, ani nepárna.
Funkcia f je spojitá pre všetky $x \in D(f)$, nie je spojitá v bode $x_1 = 0$. Funkcia f má jeden nulový bod $x_2 = 2$, t. j. $f(2) = 0$. Na intervale $(-\infty\,;\,0)$ je funkcia f záporná, na intervale $(0\,;\,2)$ je tiež záporná a na intervale $(2\,;\,\infty)$ je kladná.
Pre všetky $x \neq 0$ platí $x^2 > 0$. Z toho vyplýva na základe vety 3.2.6, že platí:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{8(x-2)}{x^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{8(x-2)}{x^2} = -\infty,$$

t. j. priamka $x = 0$ predstavuje asymptotu bez smernice.

<table>
<tr><td>$(-\infty\,;\,0)$</td><td>$(0\,;\,2)$</td><td>$(2\,;\,4)$</td><td>$(4\,;\,6)$</td><td>$(6\,;\,\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="5">0 . . . bod nespojitosti 2 . . . nulový bod</td></tr>
<tr><td>− záporná −
$f(x) < 0$</td><td>− záporná −
$f(x) < 0$</td><td colspan="3">+ kladná +
$f(x) > 0$</td></tr>
<tr><td colspan="5">4 . . . lokálne maximum</td></tr>
<tr><td>↘ klesá ↘
$f'(x) < 0$</td><td colspan="2">↗ rastie ↗
$f'(x) > 0$</td><td colspan="2">↘ klesá ↘
$f'(x) < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="5">6 . . . inflexný bod</td></tr>
<tr><td>∩ konkávna ∩
$f''(x) < 0$</td><td colspan="3">∩ konkávna ∩
$f''(x) < 0$</td><td>∪ konvexná ∪
$f''(x) > 0$</td></tr>
</table>

Tabuľka 4.3.5: Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2}$ z príkladu 4.3.44.

Pre jej limity v bodoch $\pm\infty$ platí:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{8}{x} - \frac{16}{x^2}\right] = \frac{8}{\pm\infty} - \frac{16}{\infty} = 0 - 0 = 0. \tag{4.28}$$

Pre prvú deriváciu funkcie f pre všetky $x\in R$, $x\neq 0$ platí:

$$f'(x) = \left[\frac{8x-16}{x^2}\right]' = \frac{8x^2-(8x-16)2x}{x^4} = \frac{32x-8x^2}{x^4} = \frac{32-8x}{x^3} = 8\frac{4-x}{x^3}.$$

To znamená, že funkcia f' má jeden nulový bod $x_3 = 4$. Funkcia f' je spojitá na množine $R - \{0\}$, na intervale $(-\infty\,;\,0)$ je záporná, na intervale $(0\,;\,4)$ je kladná a na intervale $(4\,;\,\infty)$ je záporná. Z toho vyplýva, že je funkcia f klesajúca na intervale $(-\infty\,;\,0)$, rastúca na intervale $(0\,;\,4\rangle$ a klesajúca na intervale $\langle 4\,;\,\infty)$. To znamená, že v bode $x_3 = 4$ má funkcia f lokálne maximum $f(4) = 1$.

Pre druhú deriváciu funkcie f na množine $R - \{0\}$ platí:

$$f''(x) = \left[8\frac{x-2}{x^2}\right]'' = \left[8\frac{4-x}{x^3}\right]' = 8\frac{-x x^3-(4-x)3x^2}{x^6} = 8\frac{2x^3-12x^2}{x^6} = 16\frac{x-6}{x^4}.$$

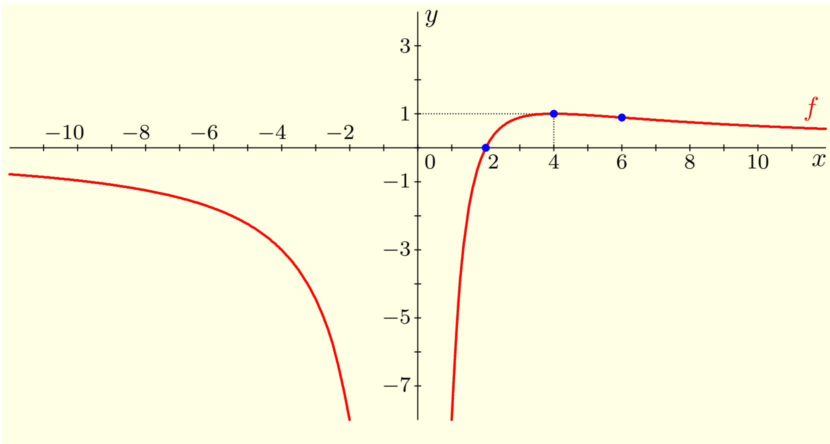
Funkcia f'' je spojitá pre všetky $x\neq 0$ a má jeden nulový bod $x_4 = 6$. Na intervaloch $(-\infty\,;\,0)$, $(0\,;\,6)$ je záporná a na intervale $(6\,;\,\infty)$ je kladná. To znamená, že funkcia f je konkávna na intervaloch $(-\infty\,;\,0)$, $(0\,;\,6\rangle$ a konvexná na intervale $\langle 6\,;\,\infty)$. Z toho vyplýva, že funkcia f má jeden inflexný bod $x_4 = 6$ (tabuľka 4.3.5).

Pre asymptotu so smernicou $y = kx + q$ na základe vety 3.2.14 a vzťahu (4.28) platí:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right] = 0 - 0 = 0,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 0\cdot x] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Takže asymptotou so smernicou je priamka $y = 0$, t. j. os x (obrázok 4.3.37). ■



Obr. 4.3.37: Graf funkcie $f(x) = \frac{8(x-2)}{x^2}$ z príkladu 4.3.44.

Príklad 4.3.45.

Vyšetrite priebeh funkcie: a) $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$, b) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-2}$.

Riešenie.

a) Funkcia f je definovaná pre všetky $x \in R - \{-2\}$, t. j. $D(f) = (-\infty\,;\,-2) \cup (-2\,;\,\infty)$. Môžeme ju vyjadriť v tvare

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x-1}{x+2} = -\frac{x+2-3}{x+2} = -1 + \frac{3}{x+2}, & \text{pre } x\in(-\infty\,;\,-2)\cup(-2\,;\,1)\,, \\ \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}, & \text{pre } x\in\langle 1\,;\,\infty)\,. \end{cases}$$

Funkcia f nie je periodická, nie je párna, ani nepárna.

Funkcia f je spojitá na $D(f)$. Pre jej jednostranné limity v bode $x_1 = -2$ platí:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{|x-1|}{x+2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{|x-1|}{x+2} = \infty.$$

To znamená, že sa funkcia f v bode $x_1 = -2$ nedá dodefinovať tak, aby bola spojitá. Ďalej z toho vyplýva, že asymptota bez smernice je určená rovnicou $x = -2$.
Funkcia f má jeden nulový bod $x_2 = 1$, t. j. $f(1) = 0$. Na intervale $(-\infty\,;\,-2)$ je funkcia f záporná, na intervale $(-2\,;\,1)$ je kladná a na intervale $(1\,;\,\infty)$ je tiež kladná.
Pre nevlastné limity v bodoch $\pm\infty$ platí:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \Big[-1 + \frac{3}{x+2}\Big] = -1, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \Big[1 - \frac{3}{x+2}\Big] = 1. \tag{4.29}$$

Pre prvú deriváciu funkcie $f(x)$, $x\in R - \{-2\}$ platí:

$$f'(x) = \begin{cases} [-1 + 3(x+2)^{-1}]' = -3(x+2)^{-2} = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0, & \text{pre } x\in(-\infty\,;\,-2)\cup(-2\,;\,1)\,, \\ [1 - 3(x+2)^{-1}]' = 3(x+2)^{-2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0, & \text{pre } x\in\langle 1\,;\,\infty)\,. \end{cases}$$

T. j. funkcia f' nemá nulové body. Funkcia f' je spojitá na množine $R - \{-2, 1\}$, na intervaloch $(-\infty\,;\,-2)$, $(-2\,;\,1)$ je záporná a na intervale $(1\,;\,\infty)$ je kladná. Z toho vyplýva, že je funkcia f klesajúca na intervaloch $(-\infty\,;\,-2)$ a $(-2\,;\,1\rangle$ a rastúca na intervale $\langle 1\,;\,\infty)$. To znamená, že v bode $x_2 = 1$ má funkcia f lokálne minimum $f(1) = 0$.

$(-\infty\,;\,-2)$	$(-2\,;\,1)$	$(1\,;\,\infty)$
-2 . . . bod nespojitosti		1 . . . nulový bod
$-$ záporná $-$ $f(x) < 0$	$+$ kladná $+$ $f(x) > 0$	$-$ záporná $-$ $f(x) < 0$
	1 . . . lokálne minimum	
$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x) < 0$	$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x) < 0$	$\nearrow$ rastie $\nearrow$ $f'(x) > 0$
	1 . . . inflexný bod	
$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x) < 0$	$\cup$ konvexná $\cup$ $f''(x) > 0$	$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x) < 0$

Tabuľka 4.3.6: Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ z príkladu 4.3.45 a).

Pre druhú deriváciu funkcie $f(x)$, $x\in R - \{-2, 1\}$ platí:

$$f''(x) = \begin{cases} [-3(x+2)^{-2}]' = 6(x+2)^{-3} = \frac{6}{(x+2)^3}, & \text{pre } x\in(-\infty\,;\,-2)\cup(-2\,;\,1)\,, \\ [3(x+2)^{-2}]' = -6(x+2)^{-3} = \frac{-6}{(x+2)^3}, & \text{pre } x\in\langle 1\,;\,\infty)\,. \end{cases}$$

Funkcia f'' je spojitá pre všetky $x\neq-2$, $x\neq1$ a nemá nulové body. Na intervale $(-\infty\,;\,-2)$ je záporná, na intervale $(-2\,;\,1)$ je kladná a na intervale $(1\,;\,\infty)$ je záporná. To znamená, že funkcia f je konkávna na intervaloch $(-\infty\,;\,-2)$, $\langle 1\,;\,\infty)$ a konvexná na intervale $(-2\,;\,1\rangle$. Z toho vyplýva, že funkcia f má jeden inflexný bod $x_3 = 1$ (tabuľka 4.3.6).
Pre asymptotu so smernicou $y = kx + q$ na základe vety 3.2.14 a vzťahov (4.29) platí:

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \pm1\cdot 0 = 0,$$

$$q_1 = \lim_{x\to\infty} [f(x) - k_1\,x] = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \quad q_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k_2\,x] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

Takže asymptoty so smernicou sú dve priamky $y = 1$ a $y = -1$ (obrázok 4.3.38).

b) Funkcia f je definovaná pre všetky $x\in R-\{2\}$, t. j. $D(f)=(-\infty\,;\,2)\cup(2\,;\,\infty)$. Môžeme ju vyjadriť v tvare

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{x-1}{x-2}=-\frac{x-2+1}{x-2}=-1-\frac{1}{x-2}, & \text{pre } x\in(-\infty\,;\,1)\,,\\ \frac{x-1}{x-2}=\frac{x-2+1}{x-2}=1+\frac{1}{x-2}, & \text{pre } x\in\langle 1\,;\,2)\cup(2\,;\,\infty)\,.\end{cases}$$

Funkcia f nie je periodická, nie je párna, ani nepárna.
Funkcia f je spojitá na $D(f)$. Pre jej jednostranné limity v bode $x_1=2$ platí:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\frac{|x-1|}{x-2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\frac{|x-1|}{x-2}=\infty.$$

To znamená, že sa funkcia f v bode $x_1=2$ nedá dodefinovať tak, aby bola spojitá. Ďalej z toho vyplýva, že asymptota bez smernice je určená rovnicou $x=2$.
Funkcia f má jeden nulový bod $x_2=1$, t. j. $f(1)=0$. Na intervaloch $(-\infty\,;\,1)$, $(1\,;\,2)$ je funkcia f záporná a na intervale $(2\,;\,\infty)$ je kladná.
Pre nevlastné limity v bodoch $\pm\infty$ platí:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\Big[-1-\frac{1}{x+2}\Big]=-1,\qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\Big[1+\frac{1}{x+2}\Big]=1. \tag{4.30}$$

Pre prvú deriváciu funkcie $f(x)$, $x\in R-\{2\}$ platí:

$$f'(x)=\begin{cases}[-1-(x-2)^{-1}]'=(x-2)^{-2}=\frac{1}{(x-2)^2}>0, & \text{pre } x\in(-\infty\,;\,1)\,,\\ [1+(x-2)^{-1}]'=-(x-2)^{-2}=\frac{-1}{(x-2)^2}<0, & \text{pre } x\in\langle 1\,;\,2)\cup(2\,;\,\infty)\,.\end{cases}$$

T. j. funkcia f' nemá nulové body. Funkcia f' je spojitá na množine $R-\{1,2\}$, na intervale $(-\infty\,;\,1)$ je kladná a na intervaloch $(1\,;\,2)$, $(2\,;\,\infty)$ je záporná. Z toho vyplýva, že funkcia f je rastúca na intervale $(-\infty\,;\,1\rangle$ a klesajúca na intervaloch $(1\,;\,-2)$ a $(-2\,;\,\infty)$. To znamená, že v bode $x_2=1$ má funkcia f lokálne maximum $f(1)=0$.

$(-\infty\,;\,1)$	$(1\,;\,2)$	$(2\,;\,\infty)$
1 ... nulový bod	2 ... bod nespojitosti	
$-$ záporná $-$ $f(x)<0$	$-$ záporná $-$ $f(x)<0$	$+$ kladná $+$ $f(x)>0$
	1 ... lokálne maximum	
$\nearrow$ rastie $\nearrow$ $f'(x)>0$	$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x)<0$	$\searrow$ klesá $\searrow$ $f'(x)<0$
1 ... inflexný bod		
$\cup$ konvexná $\cup$ $f''(x)>0$	$\cap$ konkávna $\cap$ $f''(x)<0$	$\cup$ konvexná $\cup$ $f''(x)>0$

Tabuľka 4.3.7: Niektoré dôležité hodnoty funkcie $f(x)=\frac{|x-1|}{x-2}$ z príkladu 4.3.45 b).

Pre druhú deriváciu funkcie $f(x)$, $x\in R-\{2\}$ platí:

$$f''(x)=\begin{cases}[(x-2)^{-2}]'=-2(x-2)^{-3}=\frac{-2}{(x-2)^3}, & \text{pre } x\in(-\infty\,;\,1)\,,\\ [-(x-2)^{-2}]'=2(x-2)^{-3}=\frac{2}{(x-2)^3}, & \text{pre } x\in\langle 1\,;\,2)\cup(2\,;\,\infty)\,.\end{cases}$$

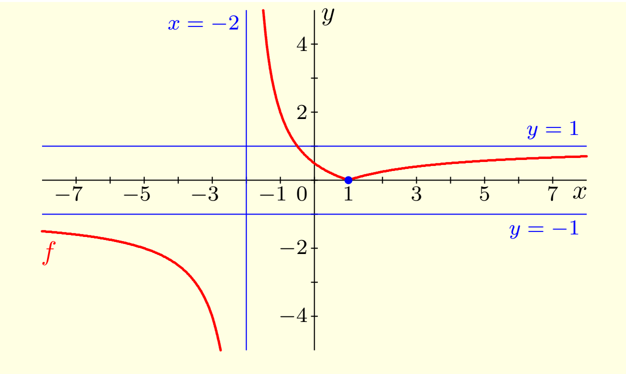
Funkcia f'' je spojitá pre všetky $x\neq 2$ a nemá nulové body. Na intervale $(-\infty\,;\,1)$ je kladná, na intervale $(1\,;\,2)$ je záporná a na intervale $(2\,;\,\infty)$ je kladná. To znamená, že funkcia f je konvexná na intervaloch $(-\infty\,;\,1\rangle$, $\langle 2\,;\,\infty\rangle$ a konkávna na intervale $\langle 1\,;\,2)$. Z toho vyplýva, že funkcia f má jeden inflexný bod $x_3=1$ (tabuľka 4.3.7).

Pre asymptotu so smernicou $y = kx + q$ na základe vety 3.2.14 a vzťahov (4.30) platí:

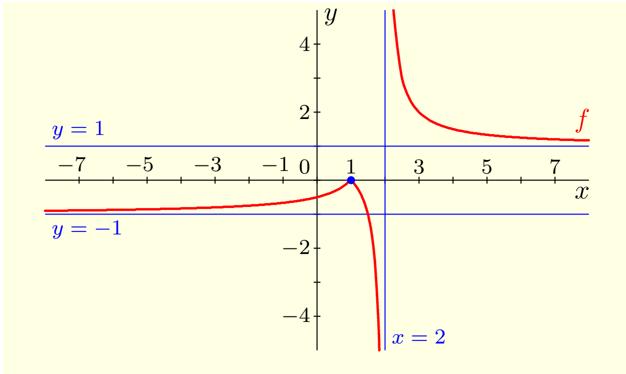
$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \pm 1 \cdot 0 = 0,$$

$$q_1 = \lim_{x\to\infty} [f(x) - k_1\, x] = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \quad q_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k_2\, x] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

Takže asymptoty so smernicou sú dve priamky $y = 1$ a $y = -1$ (obrázok 4.3.39). ■



Obr. 4.3.38: Príklad 4.3.45 a).



Obr. 4.3.39: Príklad 4.3.45 b).

4.3.6 Derivácia funkcie zadanej parametricky, implicitne a derivácia funkcie zadanej v polárnych súradniciach

- **Derivácia funkcie zadanej parametricky**

Najprv sa budeme zaoberať deriváciou funkcie f, ktorá je parametricky zadaná vzťahmi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, kde J je reálny interval s krajnými bodmi α, β. O funkciách φ a ψ budeme predpokladať, že majú na intervale J spojité derivácie (jednostranné derivácie v krajných bodoch α, β).

Veta 4.3.26.
Nech $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ sú funkcie definované na reálnom intervale J. Nech na J existujú derivácie φ', ψ', pričom φ' je na J spojitá. Nech pre všetky $t \in J$ platí $\varphi'(t) \neq 0$.
Potom systém rovníc $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$ určuje funkciu

$$f\colon\; y = f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right),\; x \in \varphi(J),$$

ktorá má na intervale $\varphi(J)$ deriváciu

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \text{pričom}\;\; t = \varphi^{-1}(x).$$

Ak je funkcia ψ' spojitá na J, potom je funkcia f' spojitá na intervale $\varphi(J)$.

Dôkaz.
Pretože je φ' spojitá a nenulová na intervale J, musí platiť pre všetky $t \in J$ buď $\varphi'(t) > 0$ alebo $\varphi'(t) < 0$. To znamená (veta 4.3.12), že je funkcia φ na J rastúca alebo klesajúca.
Z predchádzajúceho ďalej vyplýva, že φ je na intervale J spojitá (veta 4.1.4) a že $\varphi(J)$ je interval (dôsledok 3.3.13.b). To znamená, že existuje inverzná funkcia $\varphi^{-1}\colon \varphi(J) \to J$, $t = \varphi^{-1}(x)$, ktorá je spojitá (veta 3.3.16) a tiež rýdzo monotónna na intervale $\varphi(J)$.

Funkciu f môžeme potom vyjadriť v tvare zloženej funkcie $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$, $x \in \varphi(J)$. Pre jej deriváciu na základe viet o derivácii zloženej a inverznej funkcie potom platí:

$$f'(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\,[\varphi^{-1}(x)]' = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \; t = \varphi^{-1}(x).$$

Ak je funkcia ψ' spojitá na J, potom je zrejme aj funkcia $f' = \frac{\psi'}{\varphi'}$ spojitá na $\varphi(J)$. ■

Poznámka 4.3.27.
Ak použijeme zápis pomocou diferenciálov, môžeme deriváciu funkcie f vyjadriť v tvare

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi(t)} = \psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Poznámka 4.3.28.
Ak platí $\varphi'(t) \geq 0$, resp. $\varphi'(t) \leq 0$ pre $t \in J$ a množina $T = \{t \in J\,;\, \varphi'(t) = 0\}$ nulových bodov funkcie φ' je konečná, potom je funkcia φ tiež rýdzo monotónna (veta 4.3.12). Funkciu f môžeme opäť vyjadriť v tvare $f\colon\; y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$, $x \in \varphi(J)$.
Pre $t_0 \in T$ potom pokiaľ existuje limita na pravej strane (aj nevlastná), platí:

$$f'(x_0) = \lim_{t\to t_0}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad \text{kde } \; x_0 = \varphi(t_0).$$

Ak spĺňa funkcia $f\colon\; x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$ predpoklady vety 4.3.26, potom môžeme jej deriváciu f' parametricky vyjadriť vzťahmi

$$f'\colon\; x = \varphi(t), \;\; y = \chi(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \; t \in J.$$

Teoreticky vieme funkciu f' tiež vyjadiť v explicitnom tvare

$$f'(x) = \chi(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \chi(\varphi^{-1}(x)), \quad \text{ t. j. } f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$

Praktické vyjadrenie predchádzajúceho vzťahu je v mnohých prípadoch problematické, pretože závisí od explicitného vyjadrenia inverznej funkcie $t = \varphi^{-1}(x)$, $x \in \varphi(J)$.

Ak existujú na J druhé derivácie φ'', ψ'', potom môžeme vetu 4.3.26 aplikovať na funkciu $f'\colon\; x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, $t \in J$ a dostaneme vyjadrenie druhej derivácie f''

$$f''(x) = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

kde $t = \varphi^{-1}(x)$. To znamená, že parametrické vyjadrenie druhej derivácie f'' má tvar

$$f''\colon\; x = \varphi(t), \;\; y = \tau(t) = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, \; t \in J. \tag{4.31}$$

Ak sú funkcie φ', φ'', ψ', ψ'' spojité na intervale J, potom je aj funkcia f'' spojitá na intervale $\varphi(J)$. Pre tretiu deriváciu platí analogicky:

$$f'''(x) = \frac{\tau'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left[\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}\right]'}{\varphi'(t)}, \qquad \text{kde } \; t = \varphi^{-1}(x), \; x \in \varphi(J).$$

Príklad 4.3.46.
Nech f je určená parametricky rovnicami $x = \sqrt{t^3}$, $y = t^2$, $t \in (0\,;\,\infty)$. Určte f', f'', f'''.

Riešenie.
Pre derivácie funkcií $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ na intervale $(0\,;\,\infty)$ platí:

$$\varphi'(t) = \left[\sqrt{t^3}\right]' = \left[t^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3t^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{3\sqrt{t}}{2} > 0, \qquad \psi'(t) = [t^2]' = 2t > 0.$$

Funkcia φ' je na intervale $(0\,;\infty)$ spojitá a predpoklady vety 4.3.26 sú splnené. Derivácia funkcie f je potom určená vzťahmi

$$f'\colon\ x=\sqrt{t^3},\quad y=\chi(t)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{2t}{\frac{3\sqrt{t}}{2}}=\frac{4\sqrt{t}}{3},\ \ t\in(0\,;\infty)\,.$$

Keďže $\chi'(t)=\Big[\frac{4\sqrt{t}}{3}\Big]'=\frac{4\big[t^{\frac{1}{2}}\big]'}{3}=\frac{2t^{-\frac{1}{2}}}{3}=\frac{2}{3\sqrt{t}}$ pre $t\in(0\,;\infty)$, potom pre f'' platí:

$$f''\colon\ x=\sqrt{t^3},\quad y=\tau(t)=\frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\frac{2}{3\sqrt{t}}}{\frac{3\sqrt{t}}{2}}=\frac{4}{9t},\ \ t\in(0\,;\infty)\,.$$

Analogicky zo vzťahu $\tau'(t)=\big[\frac{4}{9t}\big]'=\frac{4\big[t^{-1}\big]'}{9}=\frac{-4t^{-2}}{9}=\frac{-4}{9t^2}$ pre $t\in(0\,;\infty)$ vyplýva:

$$f'''\colon\ x=\sqrt{t^3},\quad y=\frac{\tau'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{-\frac{4}{9t^2}}{\frac{3\sqrt{t}}{2}}=\frac{-8}{27t^2\sqrt{t}}=\frac{-8}{27\sqrt{t^5}},\ \ t\in(0\,;\infty)\,.\ \blacksquare$$

- **Extrémy funkcie zadanej parametricky**

Z vety 4.3.26 a z nutnej podmienky existencie lokálneho extrému funkcie (veta 4.3.14) vyplýva, že ak má funkcia $f\colon\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in J$ v bode $t_0\in J$ lokálny extrém, potom pre bod $x_0=\varphi(t_0)$ musí platiť

$$f'(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}=0,\qquad \text{t. j.}\ \ \psi'(t_0)=0,\ \ \varphi'(t_0)\neq 0. \tag{4.32}$$

Z vety 4.3.16 vyplýva, že funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém, ak $f'(x_0)=0$ a existuje konečná druhá derivácia $f''(x_0)\neq 0$, t. j. ak $\psi'(t_0)=0$, $\varphi'(t_0)\neq 0$ a platí:

$$f''(x_0)=\frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0)-\psi'(t_0)\varphi''(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^3}=\frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^3}=\frac{\psi''(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^2}\neq 0.$$

Z nerovnosti $[\varphi'(t_0)]^2>0$ potom vyplýva, že funkcia $f\colon\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in J$ má v bode $t_0\in J$ **lokálne maximum** [resp. **lokálne minimum**], ak platí:

$$\psi'(t_0)=0,\ \ \varphi'(t_0)\neq 0,\ \ \psi''(t_0)<0\quad [\text{resp.}\ \ \psi'(t_0)=0,\ \ \varphi'(t_0)\neq 0,\ \ \psi''(t_0)>0]\,. \tag{4.33}$$

Príklad 4.3.47.
Nájdite extrémy parametricky zadanej funkcie $f\colon\ x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in I$, pričom $a>0$, $b>0$ a I je definičný interval.

Riešenie.
Ak I je ľubovoľný interval, ktorého dĺžka je väčšia ako 2π, potom f predstavuje elipsu, t. j. uzavretú krivku (viď obr 4.3.41). Nech $f\colon\ x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in\langle 0\,;2\pi\rangle$.
Zo vzťahu (4.32) vyplýva, že extrémy môžu nastať iba v bodoch t, pre ktoré platí:

$$\psi'(t)=[b\sin t]'=b\cos t=0,\qquad \varphi'(t)=[a\cos t]'=-a\sin t\neq 0.$$

Rovnica $\psi'(t)=b\cos t=0$ má na intervale $\langle 0\,;2\pi\rangle$ dve riešenia $t_1=\frac{\pi}{2}$, $t_2=\frac{3\pi}{2}$. V obidvoch z týchto bodov t_1, t_2 nastávajú extrémy, pretože platí:

$$\varphi'(t_1)=-a\sin\tfrac{\pi}{2}=-a\neq 0,\qquad \varphi'(t_2)=-a\sin\tfrac{3\pi}{2}=a\neq 0.$$

Pre druhú deriváciu $\psi''(t)=[b\cos t]'=-b\sin t$ platí:

$$\psi''(t_1)=-b\sin\tfrac{\pi}{2}=-b<0,\qquad \psi''(t_2)=-b\sin\tfrac{3\pi}{2}=b>0.$$

To znamená, že v bode $t_1=\frac{\pi}{2}$ nastáva maximum, pre ktoré platí $x_1=\varphi(t_1)=0$, $y_1=\psi(t_1)=b$ a v bode $t_2=\frac{3\pi}{2}$ nastáva minimum, pre ktoré platí $x_2=0$, $y_2=-b$.
Krivku f môžeme rozdeliť na dve funkcie f_1, f_2, pričom $f_1\colon\ t\in\langle 0\,;\pi\rangle$, $f_2\colon\ t\in\langle\pi\,;2\pi\rangle$. Pre bod $t_0=0$ platí[32] $x_0=a$, $y_0=0$ a pre bod $t_3=\pi$ platí $x_3=-a$, $y_3=0$. Funkcia f_1 má jedno globálne maximum $f_1(0)=b$ a dve globálne minimá $f_1(\pm a)=0$. Funkcia f_2 má globálne mimimum $f_2(0)=-b$ a dve globálne maximá $f_2(\pm a)=0$. $\blacksquare$

[32]Krivka f je uzavretá a karteziánske súradnice zodpovedajúce bodom $t=0$ a $t=2\pi$ sú rovnaké.

Príklad 4.3.48.
Vyšetrite priebeh parametricky zadanej funkcie $f\colon\ x = t^3 + 3t + 1,\ y = t^3 - 3t + 1,\ t \in R$.

Riešenie.
Funkcie $x\colon \varphi(t) = t^3 + 3t + 1,\ t \in R$ a $y\colon \psi(t) = t^3 - 3t + 1,\ t \in R$ sú reálne polynómy tretieho stupňa definované na množine $R = (-\infty\,;\,\infty)$. Sú spojité a majú derivácie všetkých rádov podľa premennej t na svojom definičnom obore, pre ktoré platí:

$$\varphi'(t) = 3t^2 + 3, \quad \varphi''(t) = 6t, \quad \varphi'''(t) = 6, \quad \varphi^{(k)}(t) = 0, \quad \text{pre } k = 4, 5, 6, \ldots,$$
$$\psi'(t) = 3t^2 - 3, \quad \psi''(t) = 6t, \quad \psi'''(t) = 6, \quad \psi^{(k)}(t) = 0, \quad \text{pre } k = 4, 5, 6, \ldots.$$

Pre obory hodnôt funkcií φ, ψ platí $H(\varphi) = H(\psi) = R$, pretože

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \psi(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \big[t(t^2 \pm 3) + 1\big] = \infty \cdot (\pm\infty) + 1 = \pm\infty. \tag{4.34}$$

Pretože pre všetky $t \in R$ platí $\varphi'(t) = 3t^2 + 3 \geq 3 > 0$, je funkcia $\varphi(t)$ na celom svojom definičnom obore rastúca. To znamená, že je prostá a existuje k nej inverzná funkcia $\varphi^{-1}(x)$, ktorá je na základe vety 3.1.6 tiež rastúca. Navyše je spojitá a má derivácie všetkých rádov (veta 4.1.6). Z toho vyplýva existencia funkcie $f(x) = \psi[\varphi^{-1}(x)]$, ktorá je spojitá na celom svojom definičnom obore $D(f) = H(\varphi) = (-\infty\,;\,\infty)$. Pre jej obor hodnôt platí $H(f) = H(\psi) = (-\infty\,;\,\infty)$. Zo vzťahu (4.34) vyplýva:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{pre} \quad t \to -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{pre} \quad t \to \infty.$$

Aby sme mali na začiatok aspoň ilustračnú predstavu o funkcii f, sú v nasledujúcej tabuľke uvedené niektoré hodnoty premenných x, y v závislosti od parametra t.

t	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$x = \varphi(t)$	-13	$-6{,}875$	-3	$-0{,}625$	1	$2{,}625$	5	$8{,}875$	15
$y = \psi(t)$	-1	$2{,}125$	3	$2{,}375$	1	$-0{,}375$	-1	$-0{,}125$	3
			$f(-3) = 3$		$f(1) = 1$		$f(5) = -1$		

Rovnica $y\colon\ \psi(t) = t^3 - 3t + 1 = 0$ má tri reálne riešenia[33]

$$t_1 = 2\cos\tfrac{2\pi}{9} \approx 1{,}53208889, \quad t_{2,3} = -\cos\tfrac{2\pi}{9} \pm \sqrt{3}\sin\tfrac{2\pi}{9} \approx \begin{cases} -1{,}87938524, \\ \ \ 0{,}34729636. \end{cases}$$

To znamená, že funkcia f má tri nulové body[34]

$$x_2 = \varphi(t_2) = -11{,}27631145, \quad x_3 = \varphi(t_3) = 2{,}08377813, \quad x_1 = \varphi(t_1) = 9{,}19253332.$$

Z predchádzajúcej tabuľky vieme, že $f(-13) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$, $f(5) = -1 < 0$, $f(15) = 3 > 0$. To znamená, že funkcia f je na intervale $(-\infty\,;\,x_2)$ záporná. Na intervale $(x_2\,;\,x_3)$ je kladná, na intervale $(x_3\,;\,x_1)$ je záporná a na intervale $(x_1\,;\,\infty)$ je kladná.
Rovnica $x\colon\ \varphi(t) = t^3 + 3t + 1 = 0$ iba jedno reálne riešenie[35]

$$t_4 = -\sqrt[3]{\tfrac{2}{\sqrt{5}-1}} + \sqrt[3]{\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}} \approx -0{,}32218535, \qquad \text{t. j.} \quad f(0) = \psi(t_4) = 1{,}93311213.$$

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že funkcia f nie je párna, nepárna a ani periodická.

Prvá derivácia funkcie f je parametricky určená systémom

$$f'\colon\ x = \varphi(t) = t^3 + 3t + 1, \quad y = \chi(t) = \tfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \tfrac{3t^2-3}{3t^2+3} = \tfrac{t^2-1}{t^2+1}, \quad t \in R.$$

Druhá derivácia funkcie f je parametricky určená systémom

$$f''\colon x = \varphi(t) = t^3 + 3t + 1,\ y = \tau(t) = \tfrac{\chi'(t)}{\varphi'(t)} = \tfrac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2\cdot(3t^2+3)} = \tfrac{4t}{3(t^2+1)^3},\ t \in R.$$

[33]Na vyjadrenie jednotlivých koreňov môžeme použiť známe Cardanove vzorce [32] alebo niektorú z numerických metód.
[34]Hodnoty nulových bodov sú vypočítané s presnosťou na osem desatinných miest.
[35]Zostávajúce dve komplexne združené riešenia neuvádzame.

<table>
<tr><td>$(-\infty\,;\,x_2)$</td><td>$(x_2\,;\,x_5)$</td><td>$(x_5\,;\,x_7)$</td><td>$(x_7\,;\,x_3)$</td><td>$(x_3\,;\,x_6)$</td><td>$(x_6\,;\,x_1)$</td><td>$(x_1\,;\,\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x_2=-11,27631145$
nulový bod</td><td></td><td colspan="2">$x_3=2,08377813$
nulový bod</td><td colspan="2">$x_1=9,19253332$
nulový bod</td></tr>
<tr><td>− záporná −</td><td colspan="3">+ kladná +</td><td colspan="2">− záporná −</td><td>+ kladná +</td></tr>
<tr><td colspan="3">lokálne maximum … $x_5=-3$</td><td></td><td colspan="3">$x_6=5$ … lokálne minimum</td></tr>
<tr><td colspan="2">↗ rastie ↗</td><td colspan="3">↘ klesá ↘</td><td colspan="2">↗ rastie ↗</td></tr>
<tr><td colspan="7">$x_7=1$ … inflexný bod</td></tr>
<tr><td colspan="3">∩ konkávna ∩</td><td colspan="4">∪ konvexná ∪</td></tr>
</table>

Tabuľka 4.3.8: Niektoré dôležité hodnoty funkcie f z príkladu 4.3.48.

Rovnica $\chi(t)=0$ je ekvivalentná rovnici $t^2-1=0$ a má dve reálne riešenia $t_{5,6}=\pm 1$. To znamená, že funkcia f má dva stacionárne body $x_5=\varphi(-1)=-3$, $x_6=\varphi(1)=5$. Keďže je funkcia $\chi(t)$, t. j. $f'(x)$, kladná pre $t<t_5$ a pre $t>t_6$ a záporná pre $t_5<t<t_6$, je funkcia f rastúca na intervale $(-\infty\,;\,x_5\rangle$, klesajúca na intervale $\langle x_5\,;\,x_6\rangle$ a rastúca na intervale $\langle x_6\,;\,\infty)$. Z toho vyplýva, že funkcia f má v bode $x_5=-3$ lokálne maximum a v bode $x_6=5$ lokálne minimum.[36]

Rovnica $\tau(t)=0$ má jediné riešenie $t_7=0$, ktoré zodpovedá $x_7=1$. Pre $t<t_7$, t. j. $x<x_7$ platí $f''(x)=\tau(t)<0$ a pre $t>t_7$, t. j. $x>x_7$ platí $f''(x)=\tau(t)>0$. To znamená, že na intervale $(-\infty\,;\,x_7\rangle$ je funkcia f konkávna, na intervale $\langle x_7\,;\,\infty)$ je konvexná a v bode $x_7=1$ má inflexný bod.

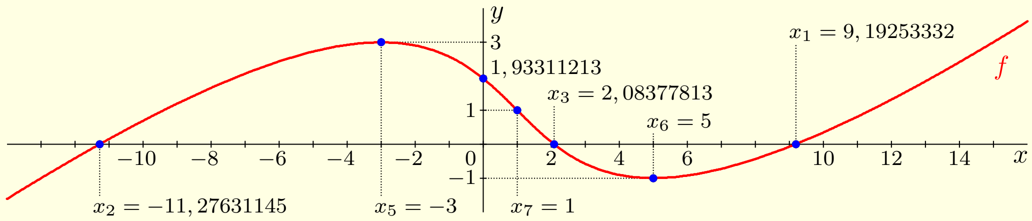
Asymptotu bez smernice funkcia f nemá. Asymptotu so smernicou $y=kx+q$ určíme na základe vety 3.2.14. Pre koeficient k, t. j. smernicu asymptoty, platí:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{t^3+3t+1}{t^3-3t+1}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1+\frac{3}{t^2}+\frac{1}{t^3}}{1-\frac{3}{t^2}+\frac{1}{t^3}}=1.$$

Pre koeficient q platí $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{t\to\pm\infty}[\psi(t)-k\,\varphi(t)]$, t. j.

$$q=\lim_{t\to\pm\infty}[\psi(t)-\varphi(t)]=\lim_{t\to\pm\infty}[(t^3-3t+1)-(t^3+3t+1)]=\lim_{t\to\pm\infty}[-6t]=\mp\infty.$$

To znamená, že funkcia f nemá taktiež asyptotu so smernicou. Prehľad najdôležitejších vlastností funkcie f je uvedený v tabuľke 4.3.8 a jej graf je na obrázku 4.3.40. ■



Obr. 4.3.40: Graf funkcie f z príkladu 4.3.48.

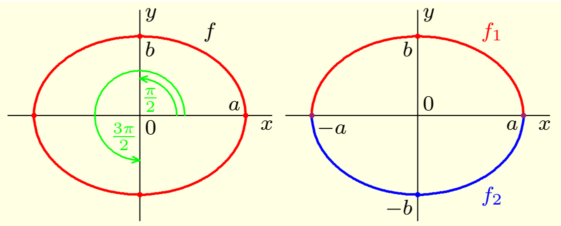
[36] Lokálne extrémy môžeme určiť taktiež na základe vzťahov (4.33) alebo na základe druhej derivácie. V prvom prípade platí $\varphi'(t_5)=\varphi'(t_6)=12\neq 0$, $\psi''(t_5)=6t_5=-6<0$, $\psi''(t_6)=6t_6=6>0$ a v druhom prípade platí $f''(x_5)=\tau(t_5)=-\frac{1}{6}<0$, $f''(x_6)=\tau(t_6)=\frac{1}{6}>0$.

- **Derivácia funkcie zadanej implicitne**

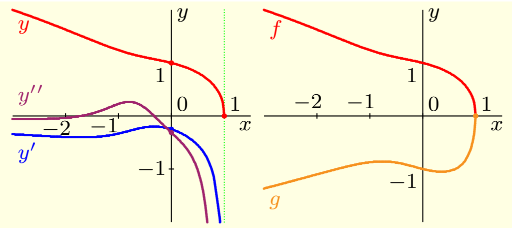
Nech je funkcia f definovaná implicitne rovnicou $F(x,y)=0$, kde $y=f(x)$. Uvedieme vzťah pre výpočet derivácie $f'(x)$. Tento vzťah vyplýva z vlastností derivácie funkcie s dvomi premennými a preto ho uvádzame bez dôkazu.

Ak budeme vo výraze $F(x,y)$ považovať premennú y za konštantu, potom sa F redukuje na funkciu jednej premennej x, ktorú označíme $F_x(x,y)$. Analogicky dostaneme funkciu $F_y(x,y)$ premennej y v prípade, že x považujeme za konštantu. Ak existujú derivácie $F'_x(x,y)=\frac{\mathrm{d}F_x(x,y)}{\mathrm{d}x}$, $F'_y(x,y)=\frac{\mathrm{d}F_y(x,y)}{\mathrm{d}y}\neq 0$, potom môžeme deriváciu $f'(x)$ vyjadriť vzťahom

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{\frac{\mathrm{d}F_x(x,y)}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}F_y(x,y)}{\mathrm{d}y}}=-\frac{\frac{\mathrm{d}F_x(x,y)}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}F_y(x,y)}{\mathrm{d}y}}. \tag{4.35}$$



Obr. 4.3.41: Parametricky definované funkcie z príkladu 4.3.47.



Obr. 4.3.42: Implicitne definované funkcie z príkladu 4.3.49.

Poznámka 4.3.29.
Výrazy $F'_x(x,y)$, resp. $F'_y(x,y)$ sa nazývajú **parciálne derivácie** funkcie F podľa premennej x, resp. y a označujú sa symbolmi $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, resp. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$.
Reálna funkcia $F(x,y)$ má dve nezávislé premenné x, y, pre ktoré platí vzťah $y=f(x)$. Na základe pravidiel pre derivovanie funkcií viac premenných[37] platí:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}y'(x)=0.$$

Poznámka 4.3.30.
Funkciu $F(x,y)=F(x,f(x))$ môžeme považovať za zloženú funkciu premennej x, pričom jej vnútornú zložku $y=f(x)$ derivujeme ako funkciu premennej x. Ak existuje derivácia $F'(x,f(x))=F'(x,y)$, potom deriváciu implicitnej funkcie $y'=f'(x)$ vyjadríme z rovnice $F'(x,y)=0$ (viď príklad 4.3.49) ako jej riešenie pomocou premenných x, $y=f(x)$.
Druhú deriváciu y'' vyjadríme analogicky pomocou y', y a x ako riešenie implicitnej rovnice $F''(x,y)=0$.
Takto môžeme pokračovať aj pre ostatné derivácie vyšších rádov.
Ak chceme vyjadriť deriváciu $f'(x_0)$ v konkrétnom bode $x_0\in D(f)$, musíme najprv určiť hodnotu $y_0=f(x_0)$ ako riešenie implicitnej rovnice $F(x_0,y_0)=0$.

Príklad 4.3.49.
Vypočítajte prvú a druhú deriváciu funkcie $y=f(x)$, ktorá je implicitne určená vzťahom $F(x,y)=x^3+x^2y^2+xy^3+y^4-1=0$, $y\geq 0$. Určte ich hodnoty v bodoch 0 a 1.

[37] S reálnymi funkciami viac premenných sa v tejto časti zaoberať nebudeme.

Riešenie.
Ak použijeme vzťah (4.35), potom pre prvú deriváciu f' platí:

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{3x^2+2xy^2+y^3}{2x^2y+3xy^2+4y^3}. \tag{4.36}$$

Ak derivujeme rovnicu $F(x,y)=0$ v zmysle poznámky 4.3.30, potom platí:

$$F'(x,y) = 3x^2 + (2xy^2 + 2x^2yy') + (y^3 + 3xy^2y') + 4y^3y' - 0 = \\ = 3x^2 + 2xy^2 + y^3 + (2x^2y + 3xy^2 + 4y^3)y' = 0. \tag{4.37}$$

Po vyjadrení y' dostávame vzťah (4.36). Pre druhú deriváciu platí:

$$F''(x,y) = [3x^2 + 2xy^2 + y^3 + 2x^2yy' + 3xy^2y' + 4y^3y']' = 6x + (2y^2 + 4xyy') + 3y^2y' + \\ + (4xyy' + 2x^2y'y' + 2x^2yy'') + (3y^2y' + 6xyy'y' + 3xy^2y'') + (12y^2y'y' + 4y^3y'') = \\ = 6x + 2y^2 + [8xy + 6y^2]y' + [2x^2 + 6xy + 12y^2](y')^2 + [2x^2y + 3xy^2 + 4y^3]y'' = 0.$$

Aby sme mohli vypočítať hodnoty prvej derivácie $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$ a druhej derivácie $f''(-1)$, $f''(0)$, $f''(1)$, musíme najprv určiť hodnoty $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.
Hodnotu $f(0)$ vypočítame z rovnice $F(0,y) = 0^3 + 0^2y^2 + 0y^3 + y^4 - 1 = y^4 - 1 = 0$, t. j. $y^4 = 1$. Z posledného vzťahu vyplýva $y^2 = 1$, t. j. $y = \pm 1$. To znamená, že $f(0) = 1$. Po dosadení do vzťahu (4.37), prípadne do vzťahu (4.36), dostaneme

$$F'(0,y) = 3\cdot 0^2 + 2\cdot 0\cdot 1^2 + 1^3[2\cdot 0^2\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 1^2 + 4\cdot 1^3]y' = 1 + 4y' = 0, \quad \text{t. j. } \ f'(0) = -\tfrac{1}{4}.$$

Pre druhú deriváciu $f''(0)$ potom platí:

$$F''(0,y) = 0 + 2 - [0+6]\tfrac{1}{4} + [0+0+12]\tfrac{1}{16} + [0+0+4]y'' = \tfrac{5}{4} + 4y'' = 0, \quad \text{t. j. } \ f''(0) = -\tfrac{5}{16}.$$

Hodnotu $f(1)$ vypočítame analogicky ako v predchádzajúcom prípade z rovnice

$$F(1,y) = 1 + y^2 + y^3 + y^4 - 1 = y^2 + y^3 + y^4 = y^2(1 + y + y^2) = 0.$$

Keďže nemá rovnica $1 + y + y^2 = 0$ reálne riešenie, musí platiť $y^2 = 0$, t. j. $f(1) = 0$.
Pre hodnotu $f'(1)$ potom zo vzťahu (4.37) vyplýva:

$$F'(1,y) = 3 + 0 + 0 + [0+0+0]y' = 0, \qquad \text{t. j. } \ 3 = 0.$$

Dostali sme spor. To znamená, že derivácie $f'(1)$, $f''(1)$ neexistujú. ■

Poznámka 4.3.31.
Vzťah $F(x,y) = x^3 + x^2y^2 + xy^3 + y^4 - 1 = 0$, $y \geq 0$ určuje funkciu $y = f(x)$. Grafy funkcií f, f' a f'' sú znázornené na obrázku 4.3.42 vľavo.
Ak vynecháme podmienku $y \geq 0$, potom rovnica $F(x,y) = 0$ nevyjadruje funkciu, ale krivku (obr. 4.3.42 vpravo) zloženú z dvoch funkcií $f\colon\ F(x,y) = 0,\ y \geq 0$, resp. $g\colon\ F(x,y) = 0,\ y \leq 0$.

- **Extrémy funkcie zadanej implicitne**

Ak má funkcia $y = f(x)$ v bode $x_0 \in D(f)$ lokálny extrém a existuje jej derivácia $f'(x_0)$, potom na základe nutnej podmienky existencie lokálneho extrému platí $f'(x_0) = 0$. Špeciálne pre funkciu $y = f(x)$ implicitne určenú rovnicou $F(x,y) = 0$ platí:

$$F(x_0,y_0) = 0, \quad f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} = 0, \qquad \text{kde } \ y_0 = f(x_0).$$

Z toho vyplýva, že v bode x_0, v ktorom má funkcia f lokálny extrém, musí platiť:

$$F(x_0,y_0) = 0, \quad F'_x(x_0,y_0) = 0, \quad F'_y(x_0,y_0) \neq 0. \tag{4.38}$$

Pomocou vlastností funkcií viac premenných sa dá odvodiť aj postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému implicitnej funkcie. Funkcia $y = f(x)$ má v bode x_0 **lokálne maximum** [resp. **lokálne minimum**], ak platí:

$$\frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} > 0 \quad \left[\text{resp. } \ \frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} < 0\right], \qquad \text{kde } \ F''_{xx}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}F_x(x,y)}{\mathrm{d}x}\right].$$

Príklad 4.3.50.
Nájdite extrémy funkcie $y = f(x)$ danej implicitne rovnicou $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Riešenie.
Krivka f sa nazýva Descartov list a z obrázku 4.3.43 je zrejmé, že nepredstavuje funkciu. Nájdeme jej lokálne extrémy. Zo vzťahu (4.38) vyplýva, že extrém môže nastať iba v bode $[x; y]$, ktorý spĺňa podmienky

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0, \quad F'_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0, \quad F'_y(x, y) = 3y^2 - 3x \neq 0.$$

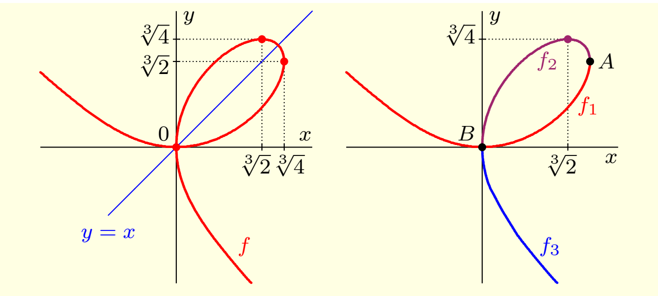
Z druhej rovnice vyjadríme $y = x^2$ a dosadíme do prvej rovnice. Potom platí:

$$x^3 + \left(x^2\right)^3 - 3x \cdot x^2 = x^6 - 2x^3 = x^3\left(x^3 - 2\right) = 0, \quad \text{t. j.} \quad x = 0, \quad \text{resp.} \quad x = \sqrt[3]{2}.$$

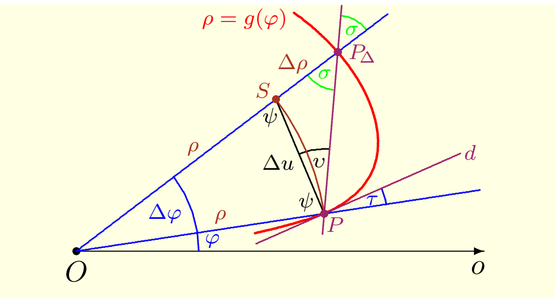
Ak $x = 0$, potom z rovnice $F(0, y) = y^3 = 0$ vyplýva $y = 0$. Túto hodnotu môžeme získať jednoduchšie zo vzťahu $y = x^2$. Lenže bod $[0; 0]$ nevyhovuje podmienke $F'_y(0, 0) \neq 0$.
Ak $x = \sqrt[3]{2}$, potom platí $y = x^2 = \sqrt[3]{4}$. V tomto bode $[x; y] = \left[\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\right]$ nastáva lokálne maximum, pretože platí:

$$\frac{F''_{xx}(x,y)}{F'_y(x,y)} = \frac{6x}{3y^2-3x} > 0, \qquad \text{t. j.} \quad \frac{F''_{xx}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})}{F'_y(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{2}} > 0.$$

Krivku f môžeme rozdeliť napríklad na tri funkcie f_1, f_2 a f_3, ktorých grafy sú oddelené bodmi $A = \left[\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right]$ a $B = [0; 0]$ (viď obr. 4.3.43 vpravo). Funkcia f_1 nadobúda globálne minimum $f_1(0) = 0$, lokálne maximum $f_1(\sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{2}$. Funkcia f_2 nadobúda globálne minimum $f_2(0) = 0$, globálne maximum $f_2(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$. Funkcia f_3 nadobúda globálne maximum $f_3(0) = 0$. ■



Obr. 4.3.43: Descartov list f a funkcie f_1, f_2, f_3 z príkladu 4.3.50.



Obr. 4.3.44: Derivácia funkcie v polárnych súradniciach.

• Derivácia funkcie v polárnych súradniciach

Predpokladajme, že je funkcia $f\colon y = f(x)$ definovaná v polárnom súradnicovom systéme vzťahom $f\colon \rho = g(\varphi)$, $\varphi \in J$. Pre jej deriváciu v polárnom systéme platí:

$$g'(\varphi) = \frac{\mathrm{d}g(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{g(\varphi+\Delta\varphi)-g(\varphi)}{\Delta\varphi}.$$

Ak použijeme vzťahy (3.12) pre prevod súradníc do karteziánskeho systému, potom môžeme funkciu f považovať za zadanú parametricky vzťahmi

$$f\colon\ x = \rho\cos\varphi = g(\varphi)\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi = g(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0\,;\, 2\pi).$$

Ak je funkcia $g(\varphi)$ spojitá, existuje spojitá derivácia $g'(\varphi)$ a platí $[g(\varphi)\cos(\varphi)]' \neq 0$, potom sú splnené predpoklady vety 4.3.26 a pre parametrické vyjadrenie funkcie f' platí:

$$f'\colon\ x = g(\varphi)\cos\varphi, \quad y = \frac{[g(\varphi)\sin\varphi]'}{[g(\varphi)\cos\varphi]'} = \frac{g'(\varphi)\sin\varphi + g(\varphi)\cos\varphi}{g'(\varphi)\cos\varphi - g(\varphi)\sin\varphi}, \quad \varphi \in \langle 0\,;\, 2\pi). \tag{4.39}$$

Poznámka 4.3.32.
Graficky zodpovedá derivácia polárne definovanej funkcie $f\colon\ \rho = g(\varphi)$ v bode φ dotyčnici ku grafu tejto funkcie v bode $P = [\varphi; g(\varphi)]$. Ak označíme τ uhol, ktorý zviera dotyčnica d s polpriamkou OP, potom platí (obr. 4.3.44)

$$g'(\varphi) = \tfrac{\mathrm{d}g(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = g(\varphi)\,\tfrac{1}{\operatorname{tg}\tau} = g(\varphi)\,\operatorname{cotg}\tau.$$

Označme $\rho = g(\varphi)$, $\Delta\rho = g(\varphi+\Delta\varphi) - g(\varphi)$, $P_\Delta = [\varphi+\Delta\varphi; g(\varphi+\Delta\varphi)]$, kde $\Delta\varphi$ je uhol medzi polpriamkami OP_Δ a OP. Označme σ uhol, ktorý zviera priamka PP_Δ s polpriamkou OP_Δ. Pre $\Delta\varphi \to 0$ zrejme platí $P_\Delta \to P$, t. j. $OP_\Delta \to OP$, $PP_\Delta \to d$, $\sigma \to \tau$.
Trojuholník OPS je rovnoramenný s ramenami OS, OP, jeho uhly priľahlé k základni sú $\psi = \frac{\pi-\Delta\varphi}{2}$.
Na základe súčtového vzorca pre funkciu sínus (veta 3.1.8) platí:

$$\sin\psi = \sin\tfrac{\pi-\Delta\varphi}{2} = \sin\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\Delta\varphi}{2} - \cos\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\Delta\varphi}{2} = 1\cdot\cos\tfrac{\Delta\varphi}{2} - 0\cdot\sin\tfrac{\Delta\varphi}{2} = \cos\tfrac{\Delta\varphi}{2}.$$

Zo sínusovej vety v trojuholníku OPS vyplýva:

$$\tfrac{\Delta u}{\rho} = \tfrac{\sin\Delta\varphi}{\sin\psi}, \quad \text{t. j.}\ \ \Delta u = \rho\,\tfrac{\sin\Delta\varphi}{\sin\psi} = \rho\,\tfrac{\sin\Delta\varphi}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}}. \tag{4.40}$$

Pre vnútorné uhly v trojuholníku OPP_Δ platí $\Delta\varphi + (\psi + \upsilon) + \sigma = \pi$, t. j.

$$\upsilon = \pi - \Delta\varphi - \sigma - \psi = \pi - \Delta\varphi - \sigma - \tfrac{\pi-\Delta\varphi}{2} = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\Delta\varphi}{2} - \sigma = \tfrac{\pi}{2} - \left(\tfrac{\Delta\varphi}{2} + \sigma\right).$$

Z toho vyplýva:

$$\sin\upsilon = \sin\tfrac{\pi}{2}\cos\left(\tfrac{\Delta\varphi}{2}+\sigma\right) - \cos\tfrac{\pi}{2}\sin\left(\tfrac{\Delta\varphi}{2}+\sigma\right) = \cos\left(\tfrac{\Delta\varphi}{2}+\sigma\right).$$

Zo sínusovej vety v trojuholníku SPP_Δ a zo vzťahu (4.40) vyplýva:

$$\tfrac{\Delta\rho}{\Delta u} = \tfrac{\sin\upsilon}{\sin\sigma}, \quad \text{t. j.}\ \ \Delta\rho = \Delta u\,\tfrac{\sin\upsilon}{\sin\sigma} = \rho\,\tfrac{\sin\Delta\varphi}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}}\,\tfrac{\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}+\sigma\right)}{\sin\sigma},$$

Pre deriváciu $g'(\varphi)$ v polárnom systéme potom platí:

$$g'(\varphi) = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\tfrac{\Delta\rho}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left[\tfrac{\rho}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}}\,\tfrac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi}\,\tfrac{\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}+\sigma\right)}{\sin\sigma}\right] = \tfrac{\rho}{1}\cdot 1\cdot\tfrac{\cos\tau}{\sin\tau} = \rho\operatorname{cotg}\tau.$$

Príklad 4.3.51.
Uvažujme funkciu f, ktorá je v karteziánskom súradnicovom systéme explicitne definovaná vzťahom $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r\,; r\rangle$. Jej grafom je polkružnica so stredom v počiatku systému a s polomerom $r > 0$ (obr. 4.3.45). Pre všetky $x \in (-r\,; r)$ platí:

$$f'(x) = \left[\sqrt{r^2-x^2}\right]' = \left[(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \tfrac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \tfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}. \tag{4.41}$$

Takže dotyčnica k funkcii f v bode $P = [x; f(x)]$ má smernicu $\operatorname{tg}\psi = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$.
V polárnych súradniciach predstavuje uvedená polkružnica konštantnú funkciu $f(\varphi) = r$, $\varphi \in \langle 0\,; \pi\rangle$. Pre jej deriváciu f' v ľubovoľnom bode $\varphi \in \langle 0\,; \pi\rangle$ potom platí:

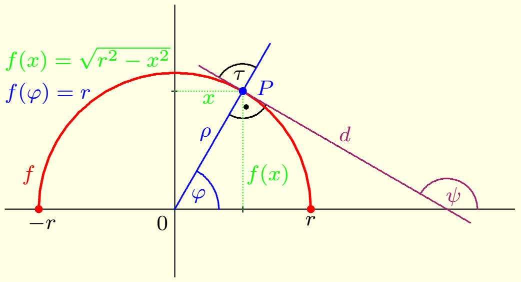
$$f'(\varphi) = [r]' = 0, \quad \text{t. j.}\ \ r\operatorname{cotg}\tau = 0.$$

To znamená, že dotyčnica d zviera v bode $P = [\varphi; f(\varphi)]$ s polpriamkou OP pravý uhol $\tau = \frac{\pi}{2}$. Na základe vzťahu (4.39) pre parametrické vyjadrenie $f'(\varphi)$, $\varphi \in (0\,; \pi)$ platí:

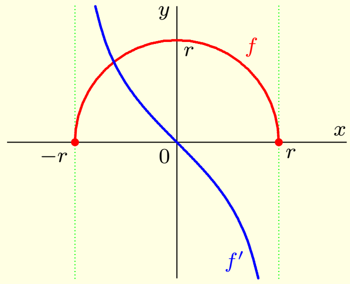
$$f'\colon\ x = f(\varphi)\cos\varphi = r\cos\varphi,\ \ y = \tfrac{f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi}{f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi} = \tfrac{0 + r\cos\varphi}{0 - r\sin\varphi} = -\operatorname{cotg}\varphi.$$

Posledný vzťah zodpovedá výrazu (4.41), pretože platí $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{x}{f(x)} = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$. ■

Poznámka 4.3.33.
Pre porovnanie sú grafy funkcií $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$, $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $x \in (-r\,; r)$ z príkladu 4.3.51 zostrojené na obrázku 4.3.46.



Obr. 4.3.45: Polkružnica $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, resp. $f(\varphi)=r$ z príkladu 4.3.51.



Obr. 4.3.46: Grafy funkcií $f(x)$, $f'(x)$ z poznámky 4.3.33.

Cvičenia

4.3.1. Dokážte, že pre $0<a<b$, $n\in N$ platí:

a) $\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a<b-a$,
b) $\sqrt{1+a^2}\leq 1+a\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)$,
c) $\frac{\operatorname{arctg} a}{1+a}<\ln(1+a)<a$,
d) $1+\frac{1}{1+\mathrm{e}}<\ln(1+\mathrm{e})<1+\frac{1}{\mathrm{e}}$,
e) $\ln(1+a^2)\leq 2a\operatorname{arctg} a$,
f) $na^{n-1}(b-a)\leq b^n-a^n\leq nb^{n-1}(b-a)$,
g) $2+a^2\leq \mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a}$,
h) $\sin a<a-\frac{a^3}{6}+\frac{a^5}{120}$,
i) $1+a<\mathrm{e}^a$.

4.3.2. Pomocou vety o strednej hodnote odhadnite nasledujúce výrazy:

a) $\operatorname{tg} 4,2$,
b) $\operatorname{arctg} 1,5$,
c) $\log_3 18$,
d) $\arcsin 0,5$,
e) $\arccos 0,5$.

4.3.3. Rozviňte do Taylorovho polynómu so stredom v bodoch 1, -1, 2, -2 polynómy: $\clubsuit$

a) $x^4+x^3+x^2+x+1$,
b) $x^4+x^3-x^2+x-1$,
c) $x^4-x^3+x^2-x+1$,
d) x^4-2x^3+2x+1,
e) x^4+2x^2+2x-1,
f) $x^4-2x^3+2x^2-1$,
g) $x^5-2x^4+2x^2+1$,
h) $x^5+2x^3+2x^2-1$,
i) $x^5-2x^4+2x^3-x$,
j) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$,
k) $x^6-x^5+x^4+x^3-x^2+x-1$,
l) $x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$,
m) $x^7-x^6-x^5+x^4+x^3-x^2+x-1$.

4.3.4. Určte Taylorov polynóm stupňa n so stredom v bode x_0 pre funkciu $y=f(x)$: $\clubsuit$

a) $y=x^{\frac{2}{3}}$, $n=3$, $x_0=1$,
b) $y=x^x$, $n=3$, $x_0=1$,
c) $y=\frac{1}{x}$, $n=4$, $x_0=2$,
d) $y=\ln x$, $n=4$, $x_0=2$,
e) $y=\ln x$, $n=4$, $x_0=3$,
f) $y=\frac{1}{x^3}$, $n=3$, $x_0=1$.

4.3.5. Určte Maclaurinov polynóm stupňa n pre funkciu $y=f(x)$: $\clubsuit$

a) $y=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $n=3$,
b) $y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$, $n=3$,
c) $y=\frac{1-x^2}{1+x+x^2}$, $n=3$,
d) $y=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$, $n=4$,
e) $y=\ln\cos x$, $n=6$,
f) $y=\ln\cos x^2$, $n=6$,
g) $y=\operatorname{tg} x$, $n=5$,
h) $y=\operatorname{tg}^2 x$, $n=5$,
i) $y=\sin^2 x$, $n=5$,
j) $y=\sin^3 x$, $n=5$,
k) $y=\cos^2 x$, $n=5$,
l) $y=\cos^3 x$, $n=5$.

4.3.6. Určte Maclaurinov polynóm stupňa n pre funkciu $y=f(x)$: $\clubsuit$

a) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
b) $y=\cosh x$,
c) $y=\sinh x$,
d) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

4.3.7. Pomocou Maclaurinovho vzorca vypočítajte s chybou menšou ako $0,0001$ hodnoty:

a) $\sqrt[10]{1010}$, b) $\operatorname{tg} 4,2$, c) $\sqrt{\pi}$, d) $(1,1)^{1,2}$, e) $\operatorname{arctg} 1,7$,
f) $\arcsin 0,5$, g) $\cos 1,6$, h) $\sin 0,9$, i) $\sqrt[4]{83}$, j) $\sqrt[3]{121}$.

4.3.8. Vypočítajte pre $m,n\in N$, $a>0$, $b>0$ nasledujúce limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x^n-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-x}{x^n-x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$, d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$,
f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$, g) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}$, h) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^n}{a^x}$, i) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, j) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln^x \frac{1}{x}$,
k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\operatorname{tg} ax)}{\ln(\operatorname{tg} bx)}$, m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$, n) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x}\right)$,
o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 5x}{2\operatorname{tg} 3x}$, p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg} x}$, q) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-2x-1}{\sin^2 3x}$, r) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x}\right)$,
s) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{\sin x}\right)$, t) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}\right)$, u) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$, v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$,
w) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^2\sin^2 x}$, x) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$, y) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$, z) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$.

4.3.9. Zistite, či možno použiť L'Hospitalovo pravidlo a vypočítajte limity: ♣

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$, b) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}$.

4.3.10. Nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je monotónna funkcia $y=f(x)$: ♣

a) $y=\frac{x}{1+x^2}$, b) $y=\frac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$, c) $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, d) $y=(1+\frac{1}{x})^x$,
e) $y=x\,|x|$, f) $y=\ln|x|+1$, g) $y=x^2\,\mathrm{e}^{-x}$, h) $y=\frac{\mathrm{e}^x}{x}+1$,
i) $y=x^2-x+12$, j) $y=x^5-15x^3+3$, k) $y=|x+1|+|x-1|$,
l) $y=\frac{x}{x^2-1}+x+2$, m) $y=\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x}-1$, n) $y=x^2-1+|x^2-1|$,
o) $y=\ln\sqrt{1+x^2}-1$, p) $y=2x^2-\ln x+1$, q) $y=\sin x+\operatorname{tg} x-2x$,
r) $y=\sin x+\cos x+1$, s) $y=\cos x+\frac{\cos 2x}{2}-1$, t) $y=x+\sin x-1$.

4.3.11. Nájdite všetky extrémy funkcie $y=f(x)$: ♣

a) $y=x^2(x-6)$, b) $y=x-\frac{1}{x}$, c) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^3}$, d) $y=\ln\frac{x^2+4x+2}{x+2}$,
e) $y=x-\lfloor x\rfloor$, f) $y=x^2\,\mathrm{e}^{-x}$, g) $y=x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1$, h) $y=1+\sqrt{|x|}$,
i) $y=\sqrt{6x-x^2}$, j) $y=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$, k) $y=3-2x^{\frac{3}{2}}$, l) $y=4x-\operatorname{tg} x$,
m) $y=x^2-2x-1$, n) $y=x^4+2x^2-1$, o) $y=x+\frac{2x}{1+x^2}$, p) $y=\frac{1}{4x^3-9x^2+6x}$,
q) $y=|x|\,\mathrm{e}^{|x-1|}$, r) $y=\frac{x}{\ln x}+2$, s) $y=x^3-2\,|x|$, t) $y=\operatorname{arctg}|x-1|$,
u) $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$, v) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$, w) $y=\mathrm{e}^{x}\sin x$, x) $y=\mathrm{e}^{x}\cos x$.

4.3.12. Nájdite všetky extrémy funkcie $y=f(x)$: ♣

a) $y=\sin x+\cos x+1$, b) $y=4x^3-3x^2-36x-5$, c) $y=4x^3-18x^2+27x$,
d) $y=x(x-1)^2(x-2)^3$, e) $y=x-\ln(1+x)-1$, f) $y=|x+4|-|x|+|x-1|$,
g) $y=-\ln(1+x-4x^2)$, h) $y=\ln^2 x-3\ln x+2$, i) $y=\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$.
j) $y=x^x$, $x\in(0\,;\,\infty)$, k) $y=x^2\ln x$, $x\in\langle 1\,;\,\mathrm{e}\rangle$, l) $y=x-2\ln x$, $x\in\langle 1\,;\,\mathrm{e}\rangle$,
m) $y=x+\frac{1}{x-1}$, $x\in\langle -4\,;\,1)$, n) $y=x+\frac{2x}{x^2-1}$, $x\in\left\langle\frac{3}{2}\,;\,3\right\rangle$, o) $y=\frac{2x}{x^2-1}$, $x\in\left\langle\frac{11}{10}\,;\,3\right\rangle$.

4.3.13. Nájdite všetky extrémy funkcie $y = f(x)$: ♣

a) $y = \sqrt[3]{x^4 - 2x^3 + x^2}$, $x \in \langle -3\,;\,2\rangle$,
b) $y = \cos 2x - 2x + 11$, $x \in \langle -\pi\,;\,\pi\rangle$,
c) $y = \sin x + \sin^2 x + 1$, $x \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$,
d) $y = \sin x - \sin^2 x + 1$, $x \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$,
e) $y = x^2 - 6x + 10$, $x \in \langle -1\,;\,5\rangle$,
f) $y = x^3 - 3x + 20$, $x \in \langle -3\,;\,4\rangle$,
g) $y = |x^2 - 6x + 5|$, $x \in \langle -2\,;\,2\rangle$,
h) $y = |x^2 - 6x + 5|$, $x \in \langle -6\,;\,6\rangle$,
i) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $x \in \langle -1\,;\,1\rangle$,
j) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $x \in R$.

4.3.14. Rozložte číslo $a > 0$ na súčet dvoch kladných čísel x_1, x_2 tak, aby: ♣

a) $x_1 x_2$ bolo maximálne,
b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ bolo minimálne,
c) $x_1^n + x_2^n$ bolo minimálne pre $n \in N$,
d) $x_1^n x_2^n$ bolo maximálne pre $n \in N$.

4.3.15. Nájdite $x > 0$ tak, aby jeho súčet s jeho obrátenou hodnotou bol minimálny. ♣

4.3.16. Do trojuholníka s najdlhšou stranou $a > 0$ a výškou $v > 0$ vpíšte obdĺžnik tak, aby jedna jeho strana ležala na strane a a aby mal maximálny obsah. ♣

4.3.17. Určte rozmery trojuholníka, ktorý má jednu stranu $a > 0$ a obvod $s > 2a$, tak aby mal maximálny obsah. ♣

4.3.18. Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obvodu $s > 0$, aby jeho uhlopriečka bola minimálna. ♣

4.3.19. Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obsahu $P > 0$, aby jeho obvod bol minimálny. ♣

4.3.20. Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obvod $s > 0$, aby jeho obsah bol maximálny. ♣

4.3.21. Do elipsy s poloosami $0 < a < b$ vpíšte pravouhlý rovnobežník so stranami rovnobežnými s osami elipsy tak, aby mal maximálny obsah. ♣

4.3.22. Do gule s polomerom $r > 0$ vpíšte válec tak, aby mal: ♣

a) maximálny objem,
b) maximálny povrch,
c) maximálny plášť.

4.3.23. Do gule s polomerom $r > 0$ vpíšte kolmý kužeľ tak, aby mal: ♣

a) maximálny objem,
b) maximálny povrch,
c) maximálny plášť.

4.3.24. Do kužeľa s výškou $h > 0$, polomerom $r > 0$ vpíšte válec s maximálnym objemom. ♣

4.3.25. Na priamke p nájdite bod tak, ktorý je najbližšie k bodu $A = [1; 2]$: ♣

a) $p\colon\ y = 3x - 1$,
b) $p\colon\ y = 3x + 2$,
c) $p\colon\ y = 3x + 1$,
d) $p\colon\ y = 3x - 2$.

4.3.26. Na parabole p nájdite bod tak, ktorý je najbližšie k bodu $A = [1; 2]$: ♣

a) $p\colon\ y = 4x - x^2$,
b) $p\colon\ y = x + x^2$,
b) $p\colon\ y = -4x + 2x^2$,
d) $p\colon\ y = -3x - x^2$.

4.3.27. Silážna jama má mať tvar pravouhlého rovnobežnostena (bez hornej steny) s objemom $V = 1000$ m^3. Dĺžka podstavy má byť 4–krát väčšia ako jej šírka. Náklady na vybudovanie 1 m^2 podstavy sú 2–krát menšie ako náklady na vybudovanie 1 m^2 steny. Určte rozmery silážnej jamy, aby náklady na jej vybudovanie boli minimálne. ♣

4.3.28. Drôt s dĺžkou 10 m máme rozdeliť na dve časti, z ktorých prvá sa zohne do štvorca a druhá do kruhu. Kde má byť rez, aby súčet obsahov štvorca a kruhu bol minimálny. ♣

4.3.29. Kartón má tvar obdĺžnika s rozmermi 30×14 cm. V rohoch vystrihneme rovnaké štvorce a zvyšok ohneme do otvorenej krabice. Aká veľká má byť strana vystrihnutých štvorcov, aby mala krabica maximálny objem. ♣

4.3.30. Okno, ktoré má tvar rovinného obrazca zloženého z obdĺžnika a polkruhu zostrojeného nad jednou jeho stranou, má obvod $s > 0$. Aké majú byť rozmery obdĺžnika a polkruhu, aby malo okno maximálny obsah. ♣

4.3.31. Dva splavné, na seba kolmé kanály, sú široké 4 m a 6 m. Vypočítajte dĺžku najdlhšieho trámu, ktorý môže preplávať z jedného kanálu do druhého. ♣

4.3.32. Nájdite intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých je funkcia $y = f(x)$ konvexná alebo konkávna a nájdite všetky jej inflexné body: ♣

a) $y = 5x^2 + 20x + 7$, b) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$, c) $y = 2 - |x^2 - 2|$, d) $y = x^2 + x^{\frac{2}{3}} - 1$,
e) $y = x(1-x)^2 + 1$, f) $y = x + x^{\frac{5}{3}} + 1$, g) $y = 3 - (x+2)^{\frac{7}{5}}$, h) $y = x - \cos x$,
i) $y = x \operatorname{arctg} x$, j) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + 1$, k) $y = x \ln x + 1$, l) $y = x + \sin x$,
m) $y = x + \frac{1}{x^2} + 1$, n) $y = x + \frac{2x}{1-x^2}$, o) $y = \frac{x}{1+x^2} + 1$, p) $y = \frac{x^3}{x^2+27} + 27$,
q) $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}$, r) $y = x^3 - 12x^2 - 5x + 2$, s) $y = (x-1)^{\frac{5}{2}} + 5(x+1)^{\frac{3}{2}}$,
t) $y = |x^2 - 1| + |x^2 + 1|$, u) $y = 12 - \ln(x^2 - 9)$, v) $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x$.

4.3.33. Dokážte, že všetky inflexné body funkcie $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ ležia na priamke $x - 4y = 0$.

4.3.34. Dokážte, že pre súradnice každého inflexného bodu funkcie $y = x \sin x$ platí $(x^2+4)y^2 = 4x^2$.

4.3.35. Dokážte, že každý polynóm nepárneho stupňa $n > 1$ má inflexný bod.

4.3.36. Pre aké $b \in R$ má funkcia $y = \mathrm{e}^x + bx^3$ inflexný bod? ♣

4.3.37. Určte asymptoty ku grafu funkcie $y = f(x)$: ♣

a) $y = \frac{x}{x-1} + 1$, b) $y = \frac{1}{1-x^2} + 1$, c) $y = \frac{x^2+2}{x^2-4} + 1$, d) $y = \frac{x \sin x}{1+x^2} + 1$,
e) $y = 3x + \frac{3}{x-2}$, f) $y = x + \frac{2x}{x^2-1}$, g) $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$, h) $y = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$,
i) $y = x + \frac{\ln x}{x}$, j) $y = x \operatorname{arctg} x$, k) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + 1$, l) $y = x \ln\left(\mathrm{e} + \frac{1}{x}\right)$,
m) $y = \frac{\sin x}{x} + 12$, n) $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 12$, o) $y = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 12$, p) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$.

4.3.38. Vyšetrite priebeh funkcie $y = f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y = 3x^5 - 5x^3$, b) $y = -x^4 + 6x^2 - 5$, c) $y = (\frac{x^2}{6} + x)^2$, d) $y = (\frac{x^3}{8} - 1)^3$,
e) $y = (1 - x^2)^2$, f) $y = (x^2 - 1)3x$, g) $y = x^6 - x^3 + 1$, h) $y = x^6 - x^4 - 1$,
i) $y = x^3 + \frac{1}{x^2}$, j) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$, k) $y = x^3 + \frac{1}{x^3}$, l) $y = x^2 + \frac{1}{x^3}$,
m) $y = \frac{2x}{x^2-1} + x$, n) $y = \frac{\ln x}{x} + 1$, o) $y = x - \ln x$, p) $y = x + 2\operatorname{arctg} x$,
q) $y = x + \operatorname{arccotg} x$, r) $y = (2 - x)\,\mathrm{e}^{x-1}$, s) $y = x^2\,\mathrm{e}^{-x} + 1$, t) $y = x^2\,\mathrm{e}^{x+2} - 1$,
u) $y = x\,\mathrm{e}^{-x^2} + 1$, v) $y = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1$, w) $y = x - \mathrm{e}^{-x} + 1$, x) $y = x^2 - \mathrm{e}^{-x} - 1$.

4.3.39. Vyšetrite priebeh funkcie $y = f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-1}$, b) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$, c) $y = (x-4)\sqrt[3]{x}$, d) $y = (x+4)\sqrt[3]{x^2}$,
e) $y = \arcsin \frac{1-x}{1+x}$, f) $y = \operatorname{cotgh} \frac{1-x}{1+x}$, g) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$, h) $y = x + \frac{\sin x}{x}$,
i) $y = x^3 + 3x$, j) $y = 16x(x-1)^3$, k) $y = |16 - x^2|$, l) $y = x^2 - 2\,|x|$,
m) $y = \sqrt{|x-1|}$, n) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$, o) $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$, p) $y = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}$,
q) $y = x\ln x + 1$, r) $y = x + \mathrm{e}^{-x}$, s) $y = \ln(4 - x^2)$, t) $y = \sin x + \cos x$,
u) $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$, v) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + 1$, w) $y = x \operatorname{arctg} x$, x) $y = \arcsin |x|$.

4.3.40. Vyšetrite priebeh funkcie $y = f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y = \frac{x-1}{x+1}$, b) $y = \frac{x^3+4}{x^6}$, c) $y = \frac{x^2+1}{x}$, d) $y = \frac{2x^3}{x^2+1}$, e) $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$,
f) $y = \frac{x-1}{x-2}$, g) $y = \frac{x^2}{x-1}$, h) $y = \frac{x+1}{x^2}$, i) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, j) $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$,
k) $y = \frac{x-3}{x-2}$, l) $y = \frac{2x^5-3}{x^2}$, m) $y = \frac{2-x}{(x-1)^2}$, n) $y = \frac{x^2+4}{x^2+3}$, o) $y = \frac{x^2+2}{x^2+3}$,
p) $y = \frac{x+1}{x-1}$, q) $y = \frac{x-2}{x^3}$, r) $y = \frac{x^2-3}{x^3}$, s) $y = \frac{1-x^4}{x^2}$, t) $y = \frac{1-x^3}{x^4}$,
u) $y = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, v) $y = \left|\frac{x^2}{x-1}\right|$, w) $y = \left|\frac{x-1}{x^2}\right|$, x) $y = \left|\frac{(x-1)^2}{1-x^2}\right|$, y) $y = \left|\frac{1+x^2}{1-x}\right|$.

4.3.41. Vyšetrite priebeh funkcie $y = f(x)$ a zostrojte jej graf:

a) $y = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{10}$, b) $y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$, c) $y = \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}}{3}$,
d) $y = \cos^3 x - 3\cos x + 1$, e) $y = (x+2)^2(x+5)$, f) $y = (1-x)^3(1+x)^4$,
g) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, h) $y = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$, i) $y = \sinh x + \sinh(1-x)$,
j) $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}$, k) $y = 2(x+1) - 3(x-1)^{\frac{2}{3}}$, l) $y = \cos x - \ln\cos x$,
m) $y = x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 12$, n) $y = \mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$, o) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$, p) $y = x - |\sin x|$.

4.3.42. Nájdite explicitný tvar funkcie $y = f(x)$ definovanej parametricky: ♣

a) $x = t + 1$, $y = 1 - 2t - t^2$, $t \in (1\,;\,4)$, b) $x = 3\cosh t$, $y = 2\sinh t$, $t \in \langle 0\,;\,\infty)$,
c) $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$, d) $x = 4\cos^2 t$, $y = 9\sin^2 t$, $t \in \left\langle 0\,;\,\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

4.3.43. Určte množiny hodnôt pre parameter t tak, aby dané parametrické rovnice určovali spojitú funkciu $y = f(x)$. Elimináciou parametra t určte jej explicitný tvar: ♣

a) $x = 2t^2 - 1$, $y = 4t^2 - 1$, b) $x = 2t - 1$, $y = 4t - 1$, c) $x = 4t^2 + 1$, $y = 3t + 2$,
d) $x = 2\sin\frac{\pi t}{3}$, $y = \cos\frac{\pi t}{3}$, e) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, f) $x = 3t + 2$, $y = 4t^2 + 1$.

4.3.44. Zistite, aké krivky sú dané parametrickými rovnicami pre $a \in R$, $a > 0$: ♣

a) $x = \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in \langle 0\,;\, 2\pi \rangle$,
b) $x = \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0\,;\, 2\pi \rangle$,
c) $x = \cos^2 t$, $y = a \sin^2 t$, $t \in \left\langle 0\,;\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$,
d) $x = \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$, $t \in \langle 0\,;\, 2\pi \rangle$.

4.3.45. Preveďte uvedený implicitný tvar krivky na parametrický tvar (položte $y = tx$): ♣

a) $x^3 + y^3 - axy = 0$, $a > 0$,
b) $x^2 + y^2 = x^3 + y^3$,
c) $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

4.3.46. Určte deriváciu funkcie $y = f(x)$ definovanej parametricky: ♣

a) $x = \frac{4t^3}{3}$, $y = \frac{t^2}{2}$, $t \in (-\infty\,;\, \infty)$,
b) $x = \frac{1-t}{1+t}$, $y = \frac{2t}{1+t}$, $t \in R - \{-1\}$,
c) $x = \frac{2 \sin t}{1+2\cos t}$, $y = \frac{4 \cos t}{1+2\cos t}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{3}\,;\, \frac{\pi}{3}\right)$,
d) $x = \arcsin \frac{1}{1+t^2}$, $y = \arccos \frac{1}{1+t^2}$, $t \in R$,
e) $x = t - \cos t$, $y = 1 + \sin t$, $t \in \langle 0\,;\, 2\pi \rangle$,
f) $x = 4 \cos^3 t$, $y = 4 \sin^3 t$, $t \in \langle 0\,;\, \pi \rangle$,
g) $x = \mathrm{e}^{2t} \cos^2 t$, $y = \mathrm{e}^{2t} \sin^2 t$, $t \in \left\langle 0\,;\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$,
h) $x = 2 \cosh t$, $y = 4 \sinh t$, $t \in (0\,;\, \infty)$.

4.3.47. Určte f', f'', f''' pre funkciu $y = f(x)$ určenú parametricky: ♣

a) $x = 4t + t^2$, $y = t^3 + t$, $t \in \langle 0\,;\, \infty)$,
b) $x = \ln t$, $y = \sin 2t$, $t \in (0\,;\, \infty)$,
c) $x = 4 \sin t$, $y = 4 \cos t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2}\right)$,
d) $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$, $t \in \langle 0\,;\, \pi \rangle$,
e) $x = \mathrm{e}^{-t} \cos t$, $y = \mathrm{e}^{-t} \sin t$, $t \in R$,
f) $x = \mathrm{e}^t$, $y = \arcsin t$, $t \in (-1\,;\, 1)$.

4.3.48. Nájdite rovnice dotyčnice a normály ku grafu $y = f(x)$ určenej parametricky: ♣

a) $x = 4t + t^2$, $y = t^3 + t$, $t \in \langle 0\,;\, \infty)$ v bodoch $[0;0]$, $[5;2]$, $[12;10]$, $[21;30]$, $[32;68]$,
b) $x = t^2 - 4t + 4$, $y = t^2 - 3t + 2$, $t \in \langle 2\,;\, \infty)$ v bodoch $[1;2]$, $[4;6]$, $[9;12]$, $[16;20]$, $[25;30]$,
c) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in R$ v bodoch $[-\pi;2]$, $\left[\frac{2-\pi}{2};1\right]$, $[0;0]$, $\left[\frac{\pi-2}{2};1\right]$, $[\pi;2]$,
d) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0\,;\, \pi \rangle$ v bodoch $[1;0]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $[0;1]$, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $[-1;0]$,
e) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in \langle 0\,;\, \pi \rangle$ v bodoch $[1;0]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$, $[0;1]$, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$, $[-1;0]$.

4.3.49. Nájdite inflexné body funkcie $y = f(x)$ zadanej parametricky: ♣

a) $x = 3t + t^3 + 1$, $y = t^2 + 1$, $t \in R$,
b) $x = \sin t$, $y = \mathrm{e}^t$, $t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

4.3.50. Zistite priebeh krivky určenej parametricky:

a) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$,
b) $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$,
c) $x = t\,\mathrm{e}^t$, $y = t\,\mathrm{e}^{-t}$,
d) $x = \frac{\ln t}{t}$, $y = t \ln t$,
e) $x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{1}{1+t^2}$,
f) $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$.

Čakal som to, ale nie tak skoro!
NÁHROBNÝ NÁPIS

Nemám nič proti gombíkom, v primeranom počte.
WILLIAM MAKEPEACE THACKERAY

Najhoršie je tváriť sa, že chápeme, keď nechápeme.
LEV NIKOLAJEVIČ TOLSTOJ

Aj tie najkrajšie nohy niekde končia.
JULIUS TUWIM

Sprostý je ako peň, ale strýka má múdreho.
DARGINSKÉ PRÍSLOVIE

Nie všetci somári majú veľké uši.
NEMECKÉ PRÍSLOVIE

Nikto učený z neba nespadol, ale hlupákov akoby zhadzovali.
JULIUS TUWIM

Chodí šťastie dokola, sem tam sadne na vola.
SLOVENSKÉ PRÍSLOVIE

Deti a bohovia sa zdržujú radi tam, kde ich chvália.
INDICKÉ PRÍSLOVIE

Čo sa do suda dostane prvé, tým je cítiť stále.
ISLANDSKÉ PRÍSLOVIE

Pri stole a v posteli nesmie byť človek hlúpy.
NEMECKÉ PRÍSLOVIE

Život je žart. To som si vždy myslel, teraz to viem.
JOHN GAY — náhrobný nápis

Aj keď nikdy neprekročil hranice svojej vlasti,
bol to hlupák svetového formátu.
HLAVÁČEK

Práve láska, nie však k feuerbachovskému človeku, …
nie k proletariátu, ale láska k milej, teda k Tebe, robí opäť z muža muža.
KARL MARX

Krása sa pominie, hlúposť večná.
JOHANN NESTROY

Tretí v hre je ten, čo nie je.
RAINER MARIA RILKE

Je to často len otázka nábytku. Pre ženu je ťažšie ostať vernou
v izbe s gaučom, než v miestnosti, kde sú len kreslá.
JUAN CARLOS REY

Každý je taký, ako ho boh stvoril, ba často aj horší.
RODA RODA

Dobre sa obesiť, to vylúči možnosť zle sa oženiť.
WILLIAM SHAKESPEARE

Keď zbadáš sukňu, zabudneš, že si ženatý. (manželka MARKA TWAINA)
Naopak, to si na to vždy spomeniem.
MARK TWAIN

Keby bolo u nás konverzačné umenie na vyššej úrovni,
bola by oveľa nižšia populácia.
STANISŁAV JERZY LEC

Rozum je pravdepodobne jediný dar, ktorý príroda rozdelila spravodlivo,
lebo sa nikto nesťažuje, že ho má málo.
MICHEL de MONTAIGNE

Výsledky cvičení

1 Základné pojmy

1.1.1. a) Existuje človek, ktorý nevie plávať. **b)** Rovnica $2^x = 4x$ nemá kladný koreň x. **c)** Najviac jedno číslo je kladné. **d)** Menej ako tretina krajín patrí do OSN. **e)** Nie je pravda, že práve dve čísla sú kladné. Žiadne, jedno alebo viac ako tri čísla sú kladné. **f)** Exisuje číslo tvaru n^2, $n \in N$, ktoré nie je párne. **1.1.2. a)** $\exists x \in R$: $\sin x \geq 1$, **b)** $\forall x \in R$: $\sin x \geq 1$, **c)** $\exists! x \in R$: $\sin x \geq 1$, **d)** $\exists x \in R$: $\sin x < 1$, **e)** $\exists x \in R$: $\sin x \leq 1$, **f)** $\forall x \in R$: $\sin x \leq 1$, **g)** $\exists! x \in R$: $\sin x \leq 1$, **h)** $\exists x \in R$: $\sin x > 1$, **i)** $\exists x \in R$: $\sin x \neq 1$, **j)** $\forall x \in R$: $\sin x \neq 1$, **k)** $\exists! x \in$: $\sin x \neq 1$, **l)** $\exists x \in R$: $\sin x = 1$. **1.1.3.** Ak pq sú postupne PP, PN, NP, NN, potom výsledné pravdivostné hodnoty sú: **a)** $NNPN$, **b)** $PNPP$, **c)** $NNNP$, **d)** $NPPN$, **e)** $PPPN$, **f)** $PNNP$, **g)** $PPPN$, **h)** $NNPN$, **i)** $PPPP$, **j)** $PNPP$, **k)** $NNPP$, **l)** $PPNN$. **1.1.4. a)** záleží od trojuholníka, v oboch prípadoch môže byť P alebo N, **b)** záleží od k, v oboch prípadoch môže byť P alebo N, **c)** záleží od nerovnice, v oboch prípadoch môže byť P alebo N, **d)** vždy N, v závislosti od nerovnice môže byť P alebo N. **1.1.5.** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p \wedge \overline{q}} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$, resp. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [\overline{p \wedge \overline{q}} \wedge \overline{\overline{p} \wedge q}] \Leftrightarrow [(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})] \Leftrightarrow \overline{\overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{p \vee \overline{q}}} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$. **1.1.7. a)** áno, **b)** áno, **c)** nie, **d)** áno, **e)** áno, **f)** áno, **g)** áno, **h)** áno, **i)** nie, **j)** áno. **1.1.10. a)** áno, **b)** nie, **c)** nie, **d)** nie, **e)** nie, **f)** nie, **g)** nie, **h)** áno, **i)** áno, **j)** nie, **k)** nie, **l)** áno. **1.1.12. a)** *„x je deliteľné dvomi alebo tromi práve vtedy, ak je deliteľné šiestimi.“*, neg. $(p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (r \wedge \overline{p \wedge q})$: *„$x$ je deliteľné dvomi, tromi a nie šiestimi alebo je deliteľný šiestimi a nie dvomi a tromi zároveň“*, **b)** *„Ak je x deliteľné dvomi alebo tromi, potom je deliteľné šiestimi.“*, neg. $(p \vee q) \wedge \overline{r}$: *„$x$ je deliteľné dvomi alebo tromi a nie šiestimi.“*, **c)** *„Ak neplatí, že x je deliteľné dvomi alebo tromi, potom x nie je deliteľné dvomi ani tromi.“*, neg. $\overline{p \vee q} \wedge (p \vee q)$: *„Neplatí, že x je deliteľné dvomi alebo tromi a zároveň platí, že x je deliteľné dvomi alebo tromi.“*, **d)** *„Platí, že ak je x deliteľné dvomi potom je deliteľné aj tromi alebo neplatí, že x je deliteľné dvomi a tromi.“*, neg. $p \wedge \overline{q} \wedge r$: *„$x$ je deliteľné dvomi a nie tromi a šiestimi.“*, **e)** *„Implikácia, ak x je deliteľné dvomi, potom je deliteľné aj tromi, platí práve vtedy, ak je x deliteľné dvomi alebo nie je deliteľné tromi.“*, neg. $(\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q})$: *„Buď je x deliteľné dvomi a nie tromi, alebo je x deliteľné tromi a nie dvomi.“*, **f)** *„Ak je x deliteľné dvomi alebo šiestimi potom je x deliteľné dvomi alebo tromi.“*, neg. $(p \vee r) \wedge \overline{p} \wedge \overline{q}$: *„$x$ je deliteľné dvomi alebo šiestimi a zároveň nie je deliteľné dvomi ani tromi.“*. **1.1.13. a)** áno, **b)** nie, **c)** áno, **d)** áno, **e)** nie, **f)** áno. **1.1.14. a)** nie, **b)** nie, **c)** áno, **d)** nie, **e)** nie, **f)** nie. **1.1.15.** Tautológie: **b)** , **d)** , **e)** , **f)** , **h)** , kontraindikácie: **a)** , **c)** , **g)** , **i)** , **j)** . **1.1.16.** $\overline{\overline{p \wedge \overline{q}} \wedge \overline{\overline{\overline{r \wedge \overline{s}} \wedge \overline{s \wedge \overline{r}}}}}$. **1.1.17. a)** $\overline{(p \wedge q) \vee r \vee s}$, **b)** $(p \wedge q) \wedge \overline{r \vee s}$, **c)** $(p \vee q) \vee \overline{r \wedge s}$. **1.1.20. a)** nie, **b)** nie, **c)** nie, **d)** áno, **e)** nie, **f)** áno. **1.1.21.** Pravdivosť pôvodných výrokov: **a)** áno, **b)** nie, **c)** áno, **d)** nie, **e)** áno, **f)** nie, **g)** áno, **h)** áno.

1.3.3. Do množiny 2^A patria $\emptyset$, {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, A. Do množiny 2^B patria $\emptyset$, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5}, {1, 4, 5}, {2, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}, {1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 4, 5}, {1, 3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}, B. **1.3.4.** $2^{(n^k)}$. **1.3.5. a)** nie, **b)** áno, **c)** áno, **d)** nie, **e)** nie, **f)** nie, **g)** áno, **h)** nie, **i)** nie, **j)** nie, **k)** nie, **l)** áno. **1.3.6.** $A \subset B \cap D$, $A' \cup C = X$, $B \cup (D - A)' = (D - B)'$, $D \triangle (A \cap C) = D - A$. **1.3.7.** $R \subset P$. **1.3.8.** $A \cup B = B$, $B \cap D' = B - A$, $B \cap D' \subset A \triangle C$, $B \cap D' \subset A \cup B$. **1.3.12.** Všetky podmnožiny množiny $\{1, 3, 5, 7\}$ okrem $\emptyset$. **1.3.13. a)** {2, 4, 8, 10, 14}, {2, 4, 6, 8, 12, 14}, {3, 6, 9, 12}, **b)** {3, 9, 15}, {5, 15}, {5, 10}, **c)** {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15}, {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15}, {3, 5, 6, 9, 10, 12, 15}, **d)** {6, 12}, {10}, {15}, **e)** $\emptyset$, {2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15}, **f)** {2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15}, {2, 4, 5, 6, 8, 12, 14, 15}, {3, 5, 6, 9, 10, 12}, **g)** {5, 6, 10, 12, 15}, {10, 15}, **h)** {3, 6, 9, 10, 12, 15}, {6, 12, 15}, **i)** {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15}, {6, 10, 12}, **j)** {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14}, {6, 12}, **k)** {10, 15}, **l)** {2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15}, **m)** {2, 3, 4, 8, 9, 10, 14, 15}, **n)** {3, 6, 9, 10, 12, 15}. **1.3.17.** Obidve. **1.3.18. a)** relácia medzi A a B, aj B a A, **b)** nie, **c)** relácia medzi A a B, **d)** relácia medzi A a B, zobrazenie z B do A. **1.3.19.** $[\pm 2; \pm 1]$. **1.3.20. a)** $f = \{[a;a], [a;b], [a;c], [a;d], [a;e], [b;a], [b;b], [b;c], [b;d], [b;e], [c;a], [c;b], [c;c], [c;d], [c;e], [d;a], [d;b], [d;c], [d;d], [d;e], [e;a], [e;b], [e;c], [e;d], [e;e]\}$, **b)** $f = \{[a;a], [a;b], [a;e], [b;a], [b;b], [b;c], [c;b], [c;c], [c;d], [d;c], [d;d], [d;e], [e;a], [e;d], [e;e]\}$, **c)** $f = \{[a;a], [a;c], [a;e], [b;b], [c;c], [c;e], [d;d], [e;e]\}$, **d)** $f = \{[a;a], [a;c], [a;e], [c;a], [c;c], [c;e], [e;a], [e;c], [e;e]\}$. **1.3.21. a)** áno, **b)** nie. **1.3.23. a)**

pre všetky $n \in N$ množiny $\{n\}$, **b)** pre všetky prvočísla p množiny $\{kp\colon k \in N\}$, pričom 1 priradíme do niektorej z nich. **1.3.24. a)** spočítateľná, **b)** nespočítateľná, **c)** nespočítateľná, **d)** nespočítateľná. **1.3.25.** Nespočítateľná.

2 Reálne čísla

2.1.9. a) 2 a 3, **b)** 0 a 3/2, **c)** 0 a 1, **d)** 0 a $\sin 1$, **e)** 0 a 1/2, **f)** 1 a ∞. **2.1.10. a)** $-1/3$ a $1/2$, **b)** $(\sqrt{5}-1)/2$ a ∞. **2.1.21. a)** $\emptyset$, **b)** $(4{,}83478;\infty)$, **c)** $(-\infty;-2)\cup(-\sqrt{5/2};-1)\cup(0;1)\cup(\sqrt{5/2};2)$, **d)** $(-2;-1)\cup(1;2)$, **e)** $\{1\}$, **f)** $(-2;-1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)$. **2.1.22. a)** $(1/2;3)$, **b)** $(-7;-4)$, **c)** $(16/11;2)$, **d)** $(-1;4)$, **e)** $(-\infty;1)\cup(3;\infty)$, **f)** $(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2};1)\cup(2;\infty)$. **2.1.23. a)** $\emptyset$, **b)** $(-\infty;(-1-\sqrt{3})/2)\cup((-1+\sqrt{3})/2;\infty)$, **c)** $(-1/2;2)$, **d)** $\emptyset$, **e)** $(-\infty;-3)\cup(8;\infty)$, **f)** $(-\infty;7-\sqrt{73})\cup(7+\sqrt{73};\infty)$, **g)** R, **h)** R, **i)** $(-2;0)\cup(1;\infty)$. **2.1.24. a)** $(-2-\sqrt{3};-3)\cup(-1;-2+\sqrt{3})$, **b)** $(-\infty;-1-\sqrt{5})\cup(-2;0)\cup(1+\sqrt{5};\infty)$, **c)** $(-1-\sqrt{7};-1)\cup(1;1+\sqrt{7})$, **d)** $(-9;\infty)$, **e)** $(-\infty;-3)\cup(24/7;4)$ **f)** $(-3;-2)\cup(-3/2;\infty)$, **g)** $(-4;-2)\cup(-1;1)\cup(2;\infty)$, **h)** $(-4;-2)\cup(-1;1)\cup(2;\infty)$, **i)** $(-\infty;-\sqrt{6})\cup(0;2)\cup(3;\infty)$. **2.1.25. a)** $(-\infty;-4)\cup(2;\infty)$, **b)** $((1-\sqrt{13})/2;-1)\cup(0;(1+\sqrt{13})/2)\cup(2;\infty)$, **c)** $(-\infty;-7)\cup(-3;\infty)$, **d)** $(-\infty;-1)\cup(0;1)$, **e)** $(-\infty;-4)$, **f)** $(-\infty;-1/2)\cup(0;1)\cup(2;\infty)$, **g)** $(-\infty;-1)\cup\langle 0;1)$, **h)** $(-\infty;-2/3\rangle\cup(1;2)$. **2.1.26. a)** $\langle 3;4\rangle$, **b)** $(3;4)$, **c)** $(3;4)\cup(4;\infty)$. **2.1.27. a)** $(-\infty;1)$, **b)** R, **c)** $(0;\infty)$, **d)** R, **e)** $\emptyset$, **f)** $(-\infty;0)$, **g)** $(0;\infty)$, **h)** $R-\{\pm\sqrt{3}\}$, **i)** $\langle(-1-\sqrt{5})/2;0\rangle\cup\langle(-1+\sqrt{5})/2;\infty)$, **j)** R, **k)** $\langle 0;1\rangle$, **l)** $\langle 0;\infty)$. **2.1.30. a)** $(-4;(-3-\sqrt{21})/2)\cup((-3+\sqrt{21})/2;1)$, **b)** $(-\infty;2-\sqrt{5}\rangle\cup\langle 2+\sqrt{5};\infty)$, **c)** $(-\infty;(-1-\sqrt{13})/2)\cup(-2;1)\cup((-1+\sqrt{13})/2;\infty)$. **2.1.31.** Dlhšia odvesna väčšia ako $(1+\sqrt{241})/2$. **2.1.32. a)** $(-\infty;-1/2\rangle\cup(1/2;\infty)$, **b)** komplexné pre $(-4\sqrt{3};4\sqrt{3})$, **c)** komplexné pre $(25/4;\infty)$.

2.2.3. a) $\{0\}\cup\{n^{-1};n\in N\}$, **b)** $\{0\}\cup\{n^{-1};n\in N\}\cup\{n^{-2};n\in N\}$, **c)** $\{0\}$, **d)** $N\cup\{\infty\}$, **e)** $\{n^2;n\in N\}\cup\{\infty\}$, **f)** $\{0\}$, **g)** R^*, **h)** R^*, **i)** R^*. **2.2.6.** V R^2 vrcholy rovnostranného trojuholníka so stranou 1, v R^3 vrcholy pravidelného štvorstena, atď. **2.2.7.** $\sqrt{n}$ pre všetky. **2.2.12.** Áno. **2.2.13. a)** $X=R$, $\rho(x,y)=1$, **b)** $X=R$, $\rho(x,x)=0$, $\rho(x,x)=||x|-y|$, **c)** $X=R$, $\rho(x,y)=|x-y|+1$. **2.2.17. a)** áno, **b)** áno, **c)** nie, **d)** nie. **2.2.18. a)** $\{\emptyset,\{1\},X\}$, **b)** $\nexists$, **c)** $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},X\}$, **d)** $\nexists$, **e)** $\nexists$, **f)** $\nexists$. **2.2.21. a)** áno, **b)** áno, **c)** áno, **d)** áno, **e)** áno, **f)** nie.

2.3.1. a) rastúca, ohraničená zhora číslom 1, **b)** klesajúca, ohraničená zdola číslom 1/2, **c)** klesajúca, ohraničená zdola číslom 1, **d)** rastúca, nie je ohraničená zhora, **e)** rastúca, nie je ohraničená zhora, **f)** rastúca, nie je ohraničená zhora, **g)** klesajúca, ohraničená zdola číslom 0, **h)** nie je monotónna, nie je ohraničená zdola ani zhora, **i)** nie je monotónna, ohraničená zdola číslom 0 a zhora číslom 3, **j)** rastúca, ohraničená zhora číslom 0, **k)** rastúca, ohraničená zhora číslom 1. **2.3.2. a)** $\{0\}$, **b)** $\{1\}$, **c)** $\{1\}$, **d)** $\{1/2,2\}$. **2.3.3.** $\{a_n\pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje, $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n=0$, $b_n=n$), resp. diverguje (napr. $a_n=1$, $b_n=n$), $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n=1$, $b_n=n$), diverguje (napr. $a_n=1$, $b_n=n$ pre n párne a $b_n=n^{-1}$ pre n nepárne), $\{b_n/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje, $\{1/(a_nb_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n=1$, $b_n=n$), diverguje (napr. $a_n=n^{-2}$, $b_n=n$). **2.3.4.** $\{a_n\pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n=n$, $b_n=\mp n$), diverguje (napr. $a_n=n$, $b_n=\pm n$), $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{0,1,0,1,\dots\}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1,0,1,0,\dots\}$), resp. diverguje (napr. $a_n=n$, $b_n=n$), $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n=n$, $b_n=n$), diverguje (napr. $a_n=n^2$, $b_n=n$), $\{1/(a_nb_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (napr. $a_n=n$, $b_n=n$), diverguje (napr. $a_n=(-1)^n$, $b_n=n$). **2.3.5. a)** napr. $\{0,1,0,1,\dots\}$, $\{1,0,1,0,\dots\}$, **b)** napr. $a_n=n^{-1}$, $b_n=n^{-2}$, **c)** napr. $a_n=n+4$, $b_n=n$, **d)** neexistujú. **2.3.6.** $a_n=-(n^2-3n+4)/2$. **2.3.7. a)** $a_{n+1}=2a_n-3$, **b)** $a_{n+1}=2-a_n$, **c)** $a_{n+1}=a_n-1$, **d)** $a_{n+1}=a_n/(a_n+1)$. **2.3.8. a)** $a_n=n$, **b)** $a_n=(-1)^{n+1}$, **c)** $a_n=2^{n-1}n!$. **2.3.9. a)** ±1, **b)** 0, **c)** ±1, **d)** 0, **e)** ∞, **f)** $\pm\infty$, **g)** 0. **2.3.10.** 200. **2.3.11. a)** $a_n=a(\sqrt{2}/2)^{n-1}$, **b)** $8a/(2-\sqrt{2})$, **c)** $2a^2$. **2.3.12.** -2. **2.3.13. a)** áno, **b)** áno, **c)** nie, **d)** áno, **e)** áno, **f)** áno. **2.3.14. a)** 2, **b)** 4, **c)** 5, **d)** 1, **e)** 1, **f)** 2, **g)** 0, **h)** $(1+\sqrt{5})/2$. **2.3.15. a)** 0, **b)** 0, **c)** 0, **d)** 0. **2.3.16. a)** 61/450, **b)** 8/15, **c)** 1, **d)** 50/99, **e)** 2/3, **f)** 4/33. **2.3.17. a)** $a\le 3$, **b)** $-1<a\le 1$, **c)** $-4<a\le 2$, **d)** $a>-1$. **2.3.18. a)** $a=0$, $b=-1$, **b)** $a=-1$,$b=2$, **c)** $a<2$, $b=0$, resp. $a=3$, $b=-1$, **d)** $a>2$, $b=0$. **2.3.20. a)** 1, **b)** 2, **c)** 1, **d)** $(1+\sqrt{1+4a})/2$. **2.3.21. a)** 1, **b)** 1, **c)** -5, **d)** 0, **e)** 1/6, **f)** 1/3, **g)** 4/3, **h)** 2. **2.3.22. a)** ∞, **b)** 1/2, **c)** 0, **d)** 1, **e)** -4, **f)** 5/3, **g)** 1, **h)** ∞, **i)** 4. **2.3.23. a)** -1, **b)** -1, **c)** 0, **d)** 1, **e)** ∞, **f)** 1, **g)** ∞, **h)** 0, **i)** 0, **j)** 1, **k)** 0, **l)** 0, **m)** 0, **n)** 1, **o)** e^{-2}, **p)** $e^{-3/2}$, **q)** e^{-1}, **r)** e^{-5}, **s)** $e^{-1/3}$, **t)** e. **2.3.24. a)** 1/3, **b)** ∞, **c)** $-\infty$, **d)** 1, **e)** 1, **f)** $1/\sqrt{2}$, **g)** 0, **h)** 2. **2.3.25. a)** $1/b$, **b)** $1/b$, **c)** $\sqrt{ab}$. **2.3.26. a)** a pre $-1<a<1$, 1/2 pre $a=1$, 0 pre $a>1$, resp. $a<-1$, $\nexists$ pre $a=-1$, **b)** 0 pre $-1<a<1$, 1/2 pre $a=1$, 1 pre $a>1$, resp. $a<-1$, $\nexists$ pre $a=-1$, **c)** 0 pre $a\ne 1$, 1/2 pre $a=1$, $\nexists$ pre $a=-1$, **d)** 0 pre $-5<a<1$, 1 pre $a=-1$, ∞ pre $a>-1$, $\nexists$ pre $a\le -5$, **e)** 0 pre $-1<a<1$, e pre $a=1$, ∞ pre $a>1$, $\nexists$ pre $a\le -1$, **f)** a^2, **g)** e^{-2a}, **h)** 0 pre $-3<a<3$, -1 pre $a=3$, $-\infty$ pre $a>3$, $\nexists$ pre $a\le -3$. **2.3.27. a)** 0, **b)** 0, **c)** $a/2$, **d)** 0, **e)** 1/2, **f)** $-\infty$, **g)** 0, **h)** 0, **i)** 1/2, **j)** ∞ pre $a>b$, $-2a$ pre $a=b$, $-\infty$ pre $a<b$, **k)** $a-b$, **l)** ∞ pre $a<1$, 3 pre $a=1$, $-\infty$ pre $a>1$. **2.3.28. a)** 1, **b)** 5/3, **c)** 0, **d)** 2/3, **e)** $(a+b)/2$, **f)** 1. **2.3.29. a)** ∞ pre $a>1/4$, 1 pre $a=1/4$, 0 pre $a<1/4$, **b)** 1 pre $a\le 1$, a pre $a>1$, **c)** a, **d)** 0 pre $a<1$, ∞ pre $a\ge 1$, **e)** $\ln a$ pre $a>0$, 0 pre $a=0$, **f)** a/b pre $b>0$, ∞ pre $b=0$, **g)** $\ln a-\ln b$ pre $a\ge b>0$, ∞ pre $a>b=0$, 0 pre $a=b=0$. **2.3.30.** ∞.

2.4.1. a) diverguje, **b)** konverguje, **c)** diverguje, **d)** diverguje, **e)** konverguje, **f)** diverguje, **g)** konverguje, **h)** konverguje, **i)** diverguje, **j)** diverguje, **k)** diverguje, **l)** diverguje, **m)** diverguje, **n)** diverguje, **o)** diverguje [ukážte, že

$a_{n+1}/a_n > 1$], **p)** konverguje, **q)** konverguje, **r)** diverguje, **s)** konverguje, **t)** konverguje, **u)** konverguje, **v)** diverguje, **w)** diverguje, **x)** diverguje, **y)** konverguje. **2.4.2.** **a)** diverguje, **b)** diverguje, **c)** diverguje, **d)** konverguje, **e)** konverguje, **f)** konverguje, **g)** konverguje, **h)** konverguje, **i)** diverguje, **j)** diverguje, **k)** diverguje, **l)** diverguje, **m)** konverguje **n)** diverguje **o)** konverguje **p)** diverguje, **q)** konverguje, **r)** konverguje, **s)** konverguje, **t)** diverguje, **u)** konverguje, **v)** diverguje, **w)** diverguje, **x)** konverguje [porovnajte s radom $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^a$]. **2.4.3.** **a)** konverguje, **b)** diverguje, **c)** konverguje, **d)** konverguje, **e)** diverguje, **f)** diverguje, **g)** diverguje, **h)** konverguje, **i)** konverguje, **j)** diverguje, **k)** konverguje, **l)** konverguje, **m)** diverguje, **n)** konverguje, **o)** diverguje, **p)** konverguje, **q)** konverguje, **r)** konverguje. **2.4.4.** **a)** konverguje, **b)** diverguje, **c)** diverguje, **d)** konverguje, **e)** konverguje, **f)** konverguje, **g)** konverguje, **h)** diverguje, **i)** diverguje, **j)** diverguje, **k)** konverguje, **l)** diverguje, **m)** konverguje, **n)** konverguje, **o)** konverguje, **p)** konverguje, **q)** konverguje, **r)** konverguje, **s)** konverguje, **t)** konverguje, **u)** konverguje, **v)** diverguje, **w)** konverguje, **x)** konverguje. **2.4.5.** **a)** diverguje, **b)** konverguje, **c)** konverguje, **d)** konverguje, **e)** konverguje, **f)** diverguje, **g)** diverguje, **h)** diverguje, **i)** konverguje, **j)** konverguje, **k)** konverguje, **l)** konverguje. **2.4.6.** **a)** $1/2$, **b)** $1/2$, **c)** ∞, **d)** $319/1680$, **e)** 1, **f)** $1/24$, **g)** $3/2$, **h)** 3, **i)** $1/4$, **j)** $2/5$, **k)** $-5/12$, **l)** $1/3$, **m)** $1-\sqrt{2}$, **n)** $8/4928$. **2.4.7.** **a)** relatívne konverguje, **b)** relatívne konverguje, **c)** relatívne konverguje, **d)** absolútne konverguje, **e)** relatívne konverguje, **f)** relatívne konverguje, **g)** diverguje, **h)** diverguje, **i)** absolútne konverguje, **j)** absolútne konverguje, **k)** absolútne konverguje, **l)** relatívne konverguje, **m)** relatívne konverguje, **n)** diverguje, **o)** relatívne konverguje. **2.4.8.** **a)** $a > 3/2$, **b)** $a > 2$, **c)** $a > 1$, **d)** $a > 1$, **e)** $a > \mathrm{e}$, **f)** $0 < a < \mathrm{e}^{-1}$, **g)** $a < 0$, **h)** $a > 1/2$. **2.4.9.** **a)** konvergujú (napr. $a_n = -b_n$), resp. divergujú (napr. $a_n = b_n = n$), **b)** konvergujú (napr. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \{0, 1, 0, 1, \ldots\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$), resp. divergujú (napr. $a_n = b_n = n$), **c)** konvergujú (napr. $a_n = n$, $b_n = a^2$), resp. divergujú (napr. $a_n = b_n$), **d)** konvergujú (napr. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \{0, -1, 0, -1, \ldots\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \{-1, 0, -1, 0, \ldots\}$), resp. divergujú (napr. $a_n = b_n = n$). **2.4.10.** **a)** diverguje, **b)** konverguje (napr. $a_n = 0$, $b_n = 1$), resp. diverguje (napr. $a_n = 1/n^2$, $b_n = n$), **c)** konverguje (napr. $a_n = 1/n^2$, $b_n = n$), resp. diverguje (napr. $a_n = 1/n^2$, $b_n = 1/n$), **d)** konverguje (napr. $a_n = 0$, $b_n = -1/n$), resp. diverguje (napr. $a_n = 0$, $b_n = 1/n$). **2.4.14.** $\sum_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n]/3^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} 1/9^n = 1/4$. **2.4.15.** $14 + 14/17$. **2.4.20.** **a)** $s = 1$, $a_n = 1/2^n$, **b)** $s = 1$, $a_1 = 3/2$, $a_n = -1/2^n$, **c)** $s = 0$, $a_1 = -1$, $a_n = (-1)^n(2n-1)/(n^2-n)$ pre $n \geq 2$, **d)** $s = 1/2$, $a_1 = -1/2$, $a_n = 1/(n^2-n)$ pre $n \geq 2$. **2.4.21.** **a)** $1{,}6 < s < 1{,}7$, **b)** $1{,}206 < s < 1{,}207$, **c)** $0{,}12 < s < 0{,}15$. **2.4.22.** konverguje, $a_n = a_1\sqrt{(1-a_1^2)^{(n-1)}}$, $a = a_1/[1-\sqrt{1-a_1^2}]$, $P = \sqrt{1-a_1^2}/(2a_1)$. **2.4.23.** $2\pi h^3R^2/(12R^2+9h^2)$. **2.4.24.** **a)** $\sqrt{2}d$ (nezávisí od n), **b)** $(\sqrt{2}+1)d$ (nezávisí od n), **c)** $\pi d/2$ (nezávisí od n), **d)** $2d$ (nezávisí od n). **2.4.25.** **a)** $\sqrt{2}o = 2\sqrt{2}\pi r$, **b)** $(\sqrt{2}+1)o = (\sqrt{2}+1)2\pi r$, **c)** $\pi o/2 = \pi^2 r$, **d)** $2o = 4\pi r$. **2.4.26.** **a)** $P + 0 = P$, **b)** $P + 0 = P$, **c)** $P + 0 = P$, **d)** $P + 0 = P$.

2.5.1. Porade z, $\overline{z}$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$, z^{-1}, z^{-2}, z^2, z^3: **a)** $1+\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$, $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $(1-\mathrm{i})/2$, $-\mathrm{i}/2$, $2\mathrm{i}$, $-2+2\mathrm{i}$, **b)** $2+3\mathrm{i}$, $2-3\mathrm{i}$, $\sqrt{13}$, $\operatorname{arctg}(3/2)$, $(2-3\mathrm{i})/13$, $(-5-12\mathrm{i})/169$, $-5+12\mathrm{i}$, $-46+9\mathrm{i}$, **c)** $-1+\mathrm{i}$, $-1-\mathrm{i}$, $\sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $(-1-\mathrm{i})/2$, $\mathrm{i}/2$, $-2\mathrm{i}$, $2+2\mathrm{i}$, **d)** $-16\mathrm{i}$, $16\mathrm{i}$, 16, $-\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{i}/16$, $-1/256$, -256, $4096\mathrm{i}$, **e)** $\sqrt{3}+\mathrm{i}$, $\sqrt{3}-\mathrm{i}$, 2, $\frac{\pi}{6}$, $(\sqrt{3}-\mathrm{i})/4$, $(1-\sqrt{3}\mathrm{i})/8$, $2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$, $8\mathrm{i}$, **f)** i, $-\mathrm{i}$, 1, $\frac{\pi}{2}$, $-\mathrm{i}$, -1, -1, $-\mathrm{i}$, **g)** $2+\mathrm{i}$, $2-\mathrm{i}$, $\sqrt{5}$, $\operatorname{arctg}(1/2)$, $(2-\mathrm{i})/5$, $(3-4\mathrm{i})/25$, $3+4\mathrm{i}$, $2+11\mathrm{i}$, **h)** $(1+\mathrm{i})/2$, $(1-\mathrm{i})/2$, $\sqrt{2}/2$, $\frac{\pi}{4}$, $1-\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$, $\mathrm{i}/2$, $(-1+\mathrm{i})/4$, **i)** $(7+6\mathrm{i})/17$, $(7-6\mathrm{i})/17$, $\sqrt{5/17}$, $\operatorname{arctg}(6/7)$, $(7-6\mathrm{i})/5$, $(13-84\mathrm{i})/25$, $(13+84\mathrm{i})/289$, $(-413+666\mathrm{i})/4913$, **j)** $(1-\mathrm{i})/2$, $(1+\mathrm{i})/2$, $\sqrt{2}/2$, $\frac{\pi}{4}$, $1-\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$, $\mathrm{i}/2$, $(-1+\mathrm{i})/4$. **2.5.2.** $(a^2-b^2)/(a^2+b^2)$, $2ab/(a^2+b^2)$, $\operatorname{arctg}(2ab/(a^2-b^2))$. **2.5.3.** 0 pre $n = 2k$ párne, $(-1)^{(k-1)(k+1)}2^k$ pre $n = 2k-1$ nepárne. **2.5.4.** **a)** $2^{10}(\cos(-\frac{5\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{5\pi}{3}))$, **b)** $2^{10}(\cos(-\frac{10\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{10\pi}{3}))$, **c)** $\sqrt{2^7}(\cos\frac{21\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{21\pi}{4})$, **d)** $\sqrt{2^7}(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin 7\frac{7\pi}{4})$, **e)** $2^{12}(\cos 4\pi + \mathrm{i}\sin 4\pi)$. **2.5.6.** $\arg z_1 = \arg z_2$. **2.5.7.** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi)$. **2.5.8.** **a)** $\arg z_1 = \arg(\pm\overline{z_2})$, resp. $\arg z_1 = \arg(\pm z_2)$, **b)** $\arg z_1 = \arg(\pm\mathrm{i}\,\overline{z_2})$, resp. $\arg z_1 = \arg(\pm\mathrm{i}\, z_2)$, **c)** v zostávajúcich prípadoch.

3 Reálne funkcie

3.1.1. **a)** nie, **b)** áno, **c)** áno, **d)** áno, **e)** nie, **f)** áno, **g)** áno, **h)** áno. **3.1.2.** **a)** $\langle \mathrm{e}^{-1}; \mathrm{e}\rangle$, **b)** $R - \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\, k \in Z\}$, **c)** $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$, **d)** $\langle\sqrt{0+2k\pi}; \sqrt{\pi+2k\pi}\rangle$, $k \in Z$, **e)** $Z \cup \langle 0; \infty)$, **f)** $\langle(2k\pi)^2; (2k+1)^2\pi^2\rangle$, $k = 0, 1, \ldots$ **g)** $\langle 0; \pi^2/4\rangle \cup \langle(-\pi^2+2k\pi)^2; (\pi^2+2k\pi)^2\rangle$, $k \in Z$, **h)** $\langle\sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}}; \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}\rangle \cup \langle-\sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}; -\sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}}\rangle$, $k = 0, 1, \ldots$, **i)** $R - \{\pm\sqrt{1/2}\}$, **j)** $(0; \infty\rangle - N$, **k)** $(1; \infty) \cup ((-2k+1)^{-1}; (-2k)^{-1}) \cup ((2k+1)^{-1}; (2k)^{-1})$, $k \in N$, **l)** $(-\infty; -1\rangle \cup (1; \infty)$, **m)** $(-\infty; 0)$, **n)** $(-1; 1)$, **o)** $R - \langle 2; 3)$, **p)** $\langle 2; \infty) - \{4\}$, **q)** R, **r)** $(\mathrm{e}; \infty)$, **s)** $\langle\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$, **t)** $(-\infty; 0\rangle$, **u)** $(-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty)$, **v)** $R - \{-1\}$, **w)** $(-\infty; -1) \cup (0; \infty)$, **x)** $(-\infty; -2) \cup (3; \infty)$. **3.1.3.** **a)** $(-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \pi/8 + k\frac{\pi}{2}\rangle$, $k \in Z$, **b)** $R - \langle -2; 2\rangle$, **c)** $(2; \infty)$, **d)** $\langle k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\rangle$, $k \in Z$, **e)** $\langle 0 + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$, $k \in Z$, **f)** $\emptyset$, **g)** $\langle -\frac{5\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi\rangle$, $k \in Z$, **h)** $\langle 0; 1) \cup (1; \infty)$, **i)** $R - \{1 \pm \sqrt{7}\}$, **j)** $(0; \infty)$, **k)** $(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi)$, $k \in Z$, **l)** $(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in Z$, **m)** R, **n)** R, **o)** $\langle -2; 4\rangle$, **p)** $\langle -1; 1\rangle$, **q)** $\langle -1; 1\rangle$, **r)** $\langle -1; 1\rangle$, **s)** $\langle 0; 4\rangle$, **t)** $(-\infty; \sqrt{3}\rangle \cup \langle 0; \sqrt{3}\rangle$, **u)** $\langle -4; 0\rangle$. **3.1.4.** **a)** $\langle -1; 3\rangle$, **b)** $\langle -1/3; 1\rangle$, **c)** $(-1; 1) \cup (2; \infty)$, **d)** $\langle 1; 100\rangle$, **e)** $R - \{(1+k\pi)/2\,;\, k \in Z\}$, **f)** $\emptyset$, **g)** $(-\infty; -8\rangle \cup \langle -2; 2\rangle \cup \langle 8; \infty)$, **h)** $\langle -\ln 2; \ln 2)$, **i)** $(-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty)$, **j)** $R - \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\,;\, k \in Z\}$, **k)** $(-\infty; \ln 3\rangle$, **l)** $\langle 1/\mathrm{e}; \infty) - \{1\}$, **m)** $(-1/3; \infty)$, **n)** $(3/2; \infty)$, **o)** $(-\infty; \infty) - \{-1\}$, **p)** $\langle 0; \infty)$, **q)** $\langle -2k+1; -2k+2)$, $k \in Z$, **r)** $\langle -1/3; 1\rangle$. **3.1.7.** **a)** áno, **b)** nie, **c)** nie. **3.1.8.** $f = h$. **3.1.11.** **a)** párna, **b)** párna, **c)** nepárna, **d)** ani párna ani nepárna, **e)** nepárna, **f)** nepárna, **g)** ani párna ani nepárna, **h)** párna a aj nepárna, **i)** nepárna, **j)** párna, **k)** nepárna, **l)** párna, **m)** nepárna, **n)** párna, **o)** párna, **p)** nepárna, **q)** nepárna, **r)** párna, **s)** ani párna ani nepárna, **t)** ani párna ani nepárna, **u)** nepárna, **v)** párna, **w)** párna, **x)** nepárna. **3.1.13.** Párna, nepárna: **a)** 1, x, **b)** $|x|$, x, **c)** $x^2+|x|$, 0, **d)** x^2, x, **e)** $\chi(x)$, 0, resp. 0, $\chi(x)$, resp. $\chi(x)/2$, $\chi(x)/2$, **f)** $\cosh x$, $\sinh x$, **g)** $1/(1-x^2)$, $-x/(1-x^2)$, **h)** x^2+1, $-2x$, **i)** $-(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)/2$, $(2x-\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)/2$, **j)** $(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)/2$, $(2x+\lfloor x\rfloor-\lfloor -x\rfloor)/2$, **k)** $((-1)^{\lfloor x-1\rfloor}+(-1)^{\lfloor -x-1\rfloor})/2$, $((-1)^{\lfloor x-1\rfloor}-(-1)^{\lfloor -x-1\rfloor})/2$, **l)** $(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor+2\,|x|)/2$, $(\lfloor x\rfloor-\lfloor -x\rfloor)/2$. **3.1.14.** Párna, resp. nepárna: **a)** $y=|x|-1$, $x\in R$, resp. $y=x-1$, $x>0$, $y=x+1$, $x<0$, **b)** $y=|x-1|$, $x>0$, $y=|x+1|$, $x<0$, resp. $y=|x-1|$, $x>0$, $y=-|x+1|$, $x<0$, **c)** $y=\sqrt{x+1}$, $x>0$, $y=\sqrt{-x+1}$, $x<0$, resp. $y=\sqrt{x+1}$, $x>0$, $y=-\sqrt{-x+1}$, $x<0$, **d)** $y=(x+1)^{-1}$, $x>0$, $y=(-x+1)^{-1}$, $x<0$, resp. $y=(x+1)^{-1}$, $x>0$, $y=(x-1)^{-1}$, $x<0$, **e)** $y=x+\lfloor x\rfloor$, $x>0$, $y=-x+\lfloor -x\rfloor$, $x<0$, resp. $y=x+\lfloor x\rfloor$, $x>0$, $y=x-\lfloor -x\rfloor$, $x<0$, **f)** $y=x^2-x$, $x>0$, $y=x^2+x$, $x<0$, resp. $y=x^2-x$, $x>0$, $y=-x^2-x$,$x<0$. **3.1.15.** **a)** áno, π, **b)** nie, **c)** áno, π, **d)** áno, 2, **e)** áno, 1, **f)** áno, nemá (všetky $p\in R$), **g)** áno, nemá (všetky $p\in R$), **h)** áno, 2. **3.1.16.** **a)** áno, 2π, **b)** áno, π, **c)** nie, **d)** áno, 2π, **e)** áno, 2π, **f)** áno, 2π, **g)** áno, π, **h)** áno, π, **i)** nie, **j)** áno, 2, **k)** áno, 2, **l)** nie. **3.1.17.** **a)** $y=(x-k)^2$, $x\in(k;\,k+1\rangle$, $k\in Z$, **b)** $y=(x+1-k)^2$, $x\in(k;\,k+1\rangle$, $k\in Z$, **c)** $y=\sqrt{x+3-k}$, $x\in(k;\,k+1\rangle$, $k\in Z$. **3.1.18.** Uvedieme iba definíciu funkcie na intrevale periodicity: **a)** napr. $y=1-x$ pre $x\in\langle 0;\,1\rangle$, $y=0$ pre $x\in\langle 1;\,3\rangle$ a $y=x-3$ pre $x\in\langle 3;\,4\rangle$, **b)** napr. $p=9$, $y=x-1$ pre $x\in\langle 1;\,3\rangle$, $y=2$ pre $x\in\langle 3;\,6\rangle$, $y=8-x$ pre $x\in\langle 6;\,8\rangle$ a $y=0$ pre $x\in\langle 8;\,10\rangle$, **c)** napr. $p=8$, $y=x+2$ pre $x\in\langle -4;\,-1\rangle$, $y=-x$ pre $x\in\langle -1;\,1\rangle$, $y=x-2$ pre $x\in\langle 1;\,4\rangle$, **d)** neexistuje, **e)** napr. $f(0)=0$, $f(x)=3-x$ pre $x\in\langle 1;\,5\rangle$, **f)** napr. $f(x)=3-x$ pre $x\in\langle 0;\,3\rangle$ a $f(x)=x-5$ pre $x\in\langle 5;\,8\rangle$. **3.1.20.** **a)** na $(-\infty;\,-1\rangle$, $(1;\,\infty)$, $(1/(k+1);\,1/k\rangle$, $k\in Z-\{0,-1\}$ je konštantná, **b)** na $(-\infty;\,1/2\rangle$ klesá, na $\langle 1/2;\,\infty)$ rastie, **c)** na $(-\infty;\,3/2\rangle$ klesá, na $\langle 3/2;\,\infty)$ rastie, **d)** na $(-\infty;\,-1\rangle$ klesá, na $\langle -1;\,2\rangle$ je konštantná a na $\langle 2;\,\infty)$ rastie, **e)** na $(-\infty;\,3/2\rangle$ klesá, na $\langle 3/2;\,\infty)$ rastie, **f)** na $(-\infty;\,-\sqrt{3/2}\rangle$ a $\langle 0;\,\sqrt{3/2}\rangle$ klesá a na $\langle -\sqrt{3/2};\,0\rangle$ a $\langle\sqrt{3/2};\,\infty)$ rastie, **g)** na $(-\infty;\,0\rangle$ rastie a na $\langle 0;\,\infty)$ je konštantná, **h)** na $(0;\,\sqrt{\mathrm{e}}\rangle$ klesá a na $\langle\sqrt{\mathrm{e}};\,\infty)$ rastie, **i)** klesá na R, **j)** na $(-\infty;\,-\sqrt{1/3}\rangle$ a $\langle\sqrt{1/3};\,\infty)$ rastie a na $\langle -\sqrt{1/3};\,\sqrt{1/3}\rangle$ klesá, **k)** klesá na $(-\infty;\,2/3\rangle$, **l)** na $(-\infty;\,-3\rangle$ a $\langle 0;\,\infty)$ je konštantná a na $\langle -3;\,0\rangle$ rastie, **m)** rastie na $\langle k;\,k+1)$, $k\in Z$, **n)** na $(-\infty;\,-1\rangle$ klesá a na $\langle -1;\,\infty)$ rastie, **o)** na $(-\infty;\,0\rangle$ je konštantná a na $\langle 0;\,\infty)$ rastie, **p)** rastie na $\langle 1;\,\infty)$, **q)** klesá na $(-\infty;\,3)$ a $\langle 3;\,\infty)$, **r)** klesá na $(-\infty;\,3)$ a $\langle 3;\,\infty)$, **s)** rastie na $\langle 0;\,\infty)$, **t)** rastie na $(0;\,\infty)$. **3.1.21.** **a)** ohraničená zdola, $\inf f(x)=0$, $\sup f(x)=\infty$, **b)** ohraničená zdola, $\inf f(x)=0$, $\sup f(x)=\infty$, **c)** ohraničená, $\inf f(x)=\min f(x)=1/2$, $\sup f(x)=\max f(x)=1$, **d)** ohraničená, $\inf f(x)=-14$, $\sup f(x)=\max f(x)=1$, **e)** ohraničená zdola, $\inf f(x)=\min f(x)=1$, $\sup f(x)=\infty$, **f)** ohraničená, $\inf f(x)=\min f(x)=2$, $\sup f(x)=17$. **3.1.22.** **a)** $\min f(x)=3/2$, $\sup f(x)=\infty$, **b)** $\inf f(x)=-\infty$, $\sup f(x)=\infty$, **c)** $\min f(x)=0$, $\sup f(x)=\infty$, **d)** $\min f(x)=-1/4$, $\sup f(x)=\infty$, **e)** $\min f(x)=0$, $\max f(x)=1$, **f)** $\min f(x)=-1$, $\max f(x)=1$, **g)** $\min f(x)=1$, $\max f(x)=3$, **h)** $\min f(x)=-1$, $\max f(x)=1$. **3.1.23.** $f(g)=g(f)$: $y=1-x^2$, $f(h)=h(f)$: $y=\sin x$, $h(g)=f[h(g)]=h[f(g)]=h[g(f)]$: $y=\sin(1-x^2)$, $g(h)=f[g(h)]=g[f(h)]=g[h(f)]$: $y=1-\sin^2 x$. **3.1.24.** Porade $f(g)$, $g(f)$, $f(f)$, $g(g)$: **a)** $8-2x$, $4-2x$, $4x$, x, **b)** $1-x^2+x^4$, $2x+3x^2+2x^3+x^4$, $3+3x+4x^2+2x^3+x^4$, $-2x^2+x^4$, **c)** $\ln\sqrt{1-|x|}$, $\sqrt{1-|\ln x|}$, $\ln\ln x$, $\sqrt{1-|\sqrt{1-|x|}|}$, **d)** $\ln\sinh x$, $(-1+x^2)/(2x)$, $\ln\ln x$, $\sinh\sinh x$, **e)** $\operatorname{argsinh}\cosh x$, $\sqrt{1+x^2}$, $\cosh\operatorname{argsinh} x$, $\cosh\cosh x$, **f)** x, x, x^4, $\sqrt[4]{x}$, **g)** $(\sqrt{x}+1)^2$, $x+1$, $4+8x+8x^2+4x^3+x^4$, $\sqrt[4]{x}$, **f)** $x^2\pm\lfloor x\rfloor$, $x^2\lfloor x\rfloor$, $x^2/\lfloor x\rfloor$, $\lfloor x\rfloor^2$, $\lfloor x^2\rfloor$, x^4, $\lfloor x\rfloor$, **i)** $-x+x^2+\lfloor x^2-x\rfloor$, $-x+x^2-\lfloor x\rfloor+2x\lfloor x\rfloor+\lfloor x\rfloor^2$, $x+\lfloor x\rfloor+\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor$, $x-2x^3+x^4$, **j)** $\sqrt{(5+2x)/(2+x)}$, $1/(2+\sqrt{x+2})$, $\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$, $(2+x)/(5+2x)$. **3.1.25.** **a)** $|g|=g$, $f+g$: $y=x+1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=2x^2+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, g^2: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x^2+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, fg: $y=x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4+x^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, f/g: $y=x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2/(x^2+1)$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(g)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x^2+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(f)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(f)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(g)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x^2+1)^2+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, **b)** $|g|=g$, $f+g$: $y=x+x^2$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2+x+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, g^2: $y=x^2$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, fg: $y=x^3$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^3+x$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, f/g: $y=1/x$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2/(x+1)$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(g)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=(x+1)^2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(f)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^2+1$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $f(f)$: $y=1$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x^4$, $x\in\langle 0;\,\infty)$, $g(g)$: $y=x^4$, $x\in(-\infty;\,0)$, $y=x+2$, $x\in\langle 0;\,\infty)$. **3.1.26.** Pre $n\in N\cup\{0\}$: **a)** $f_n(x)=x+n$, **b)** $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, **c)** $f_n(x)=(a_n+xa_{n+1})/(a_{n-1}+xa_n)$, kde a_n je n-tý člen Fibonacciho postupnosti, **d)** $f_n(x)=x/(1+nx)$, **e)** $f_{4n}(x)=x$, $f_{4n+1}(x)=f(x)$, $f_{4n+2}(x)=-1/x$, $f_{4n+3}(x)=-\frac{1}{f(x)}$, **f)** $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, **g)** $f_n(x)=x/(1-nx)$, **h)** $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, **i)** $f_{4n}(x)=x$, $f_{4n+1}(x)=f(x)$, $f_{4n+2}(x)=-1/x$, $f_{4n+3}(x)=-\frac{1}{f(x)}$, **j)** $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$, **k)** $f_n(x)=(a_n-xa_{n+1})/(-a_{n-1}+xa_n)$, kde a_n je n-tý člen Fibonacciho postupnosti, **l)** $f_{2n}(x)=x$, $f_{2n+1}(x)=f(x)$. **3.1.27.** **a)** $R-(0\,;\,1\rangle$, **b)** $R-\left(2-\sqrt{3}\,;\,2+\sqrt{3}\right)$, **c)** $(-\infty\,;\,2/3)$. **3.1.30.** **a)** $y=\sqrt{x+1}$, $x\in\langle 3;\,24\rangle$, **b)** $y=3x/(1-x)$, $x\in R-\{1\}$, **c)** $y=4+\sqrt{x}$, $x\in\langle 0;\,1)$, **d)** $y=(\arcsin x+1)/3$, $x\in(-1\,;\,1)$, **e)** $y=\mathrm{e}^{2x}+1$, $x\in R$, **f)** $y=1+2\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$, $x\in R$. **3.1.31.** **a)** $D(f)=(-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2})$, f^{-1}: $y=\operatorname{arctg}(x/2-1/2)$, **b)** $D(f)=(-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2})$, f^{-1}: $y=x$, **c)** $D(f)=(-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2})$, f^{-1}: $y=\arcsin(1-x^2)$, **d)** $D(f)=(-\infty;\,0\rangle$, f^{-1}: $y=\ln\cos x$, **e)** $D(f)=\langle 0;\,\frac{\pi}{2})$, f^{-1}: $y=\arccos\mathrm{e}^x$, **f)** $D(f)=\langle 0;\,\infty)$, f^{-1}: $y=\sqrt{1-\ln(1+x)}$, **g)** $D(f)=R$, f^{-1}: $y=\ln(\mathrm{e}^x-1)$, **h)** $D(f)=R$, f^{-1}: $y=1+\ln(x+1)$, **i)** $D(f)=\langle -1;\,1\rangle$, f^{-1}: $y=x$, **j)** $D(f)=\langle 1;\,\infty)$, f^{-1}: $y=1+\sqrt{2+x}$, **k)** $D(f)=\langle 0;\,\infty)$, f^{-1}: $y=\sqrt[4]{x+1}$,

l) $D(f)=\langle -1;\infty)$, f^{-1}: $y=-1+x^2$, **m)** $D(f)=(2/3;\infty)$, f^{-1}: $y=(1+2x)/(1+3x)$, **n)** $D(f)=\langle 0;\pi)$, f^{-1}: $y=\arccos((1-x)/(1+x))$, **o)** $D(f)=\langle 0;3\rangle$, f^{-1}: $y=3\sin x^2$, **p)** $D(f)=R$, f^{-1}: $y=\ln(1/2)\ln((1-x)/(1+x))$. **3.1.32.** **a)** $D(f)=(3;\infty)$, $H(f)=R$, f^{-1}: $y=(5+\sqrt{1+4\,\mathrm{e}^x})/2$, **b)** $D(f)=R$, $H(f)=\langle 0;\infty)$, f^{-1}: $y=\ln\sqrt{x^2-2x}$, **c)** $D(f)=\langle 0;1\rangle$, $H(f)=\langle 0;\pi+1\rangle$, f^{-1}: $y=\cos((1-x^2)/2)$, **d)** $D(f)=R$, $H(f)=R$, f^{-1}: $y=x$, $x\in(-\infty;0)$, $y=x/2$, $x\in\langle 0;\infty)$, **e)** $D(f)=R$, $H(f)=R$, f^{-1}: $y=x$, $x\in(-\infty;0)$, $y=x^2$, $x\in\langle 0;\infty)$, **f)** $D(f)=\langle 0;\infty)$, $H(f)=\langle 0;\infty)$, f^{-1}: $y=\sqrt{x}$, resp. f^{-1}: $y=x$.

3.2.1. **a)** 0, **b)** 1, **c)** 1, **d)** e^{-1}, **e)** 9, **f)** -1, **g)** $\nexists$, **h)** $1/2$, **i)** 4, **j)** $10/9$, **k)** 1, **l)** -1, **m)** $\nexists$, **n)** $-\sqrt{2}/2$, **o)** $\sqrt{2}/2$, **p)** $\sqrt{2}/2$, **q)** $\ln a/\ln b$, **r)** 0, **s)** 0, **t)** 2, **u)** $-\ln 3/3$, **v)** $\nexists$, **w)** $\nexists$, **x)** $-2/\sin 3$. **3.2.2.** **a)** n/m, **b)** $\frac{m}{n}$, **c)** a, **d)** $a-b$, **e)** $1/2$, **f)** $1/2$, **g)** $1/3$, **h)** $\ln 3/\ln 6$, **i)** e^a, **j)** 0, **k)** 1, **l)** 3, **m)** π, **n)** π, **o)** 1, **p)** $1/4$, **q)** 3, **r)** $\nexists$, **s)** $-\infty$, **t)** ∞. **3.2.3.** **a)** 1, **b)** $1/\sqrt{\mathrm{e}}$, **c)** 1, **d)** $1/\mathrm{e}$, **e)** e^3, **f)** 0, **g)** 1, **h)** 1, **i)** $\nexists$, **j)** 1, **k)** -1, **l)** -12, **m)** e^5, **n)** e^5, **o)** -1, **p)** 1, **q)** $1/12$, **r)** $1/3$, **s)** π, **t)** $3/5$, **u)** $1/3$, **v)** $5/6$, **w)** $3/5$, **x)** $4/3$. **3.2.4.** **a)** 1, **b)** 0, **c)** $(2a)^{-1}$, **d)** $\sqrt{2}/4$, **e)** $\sqrt{2}/4$, **f)** 0, **g)** $-2/5$, **h)** -1, **i)** $1/8$, **j)** $\nexists$, **k)** 4, **l)** $5/2$, **m)** 0, **n)** $1/2$, **o)** $-\infty$, **p)** ∞, **q)** 0, **r)** $\nexists$, **s)** 0, **t)** 0, **u)** $\nexists$. **3.2.5.** **a)** $1/8$, **b)** 4, **c)** -1, **d)** $15/2$, **e)** $1/4$, **f)** $-2/3$, **g)** $1/n$, **h)** $11/3$, **i)** $\sqrt[3]{2}/3$, **j)** 1, **k)** $-\sqrt{2}/2$, **l)** 2, **m)** -1, **n)** 2, **o)** $1/2$, **p)** 1, **q)** $\sqrt{2/3}$, **r)** 1, **s)** $1/\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$, **t)** $\sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$, **u)** 1, **v)** $2/\pi$, **w)** 1, **x)** $2/\sqrt{3}$. **3.2.6.** **a)** $3/2$, **b)** $3/2$, **c)** 0, **d)** 6, **e)** 1, **f)** $1/2$, **g)** $6\sqrt{2}$, **h)** ∞, **i)** $-1/2$, **j)** $3/2$, **k)** $(a-1)/(3a^2)$, **l)** 1, **m)** $-1/4$, **n)** $(n^2-m^2)/2$, **o)** $\cos x$, **p)** $\sqrt{\mathrm{e}^3}$, **q)** -1, **r)** $1/2$, **s)** $\nexists$, **t)** $-\frac{\pi}{2}$, **u)** $\frac{\pi}{2}$. **3.2.7.** **a)** 0, **b)** $1/6^{100}$, **c)** $1/4$, **d)** $-1/2$, **e)** -2, **f)** 3, **g)** $2a$, **h)** a, **i)** 6, **j)** 0, **k)** 0, **l)** 0, **m)** 2, **n)** 1, **o)** $2\cos a$, **p)** $2\cos x$. **3.2.8.** Nie.

3.3.1. Body nespojitosti: **a)** 0 odstrániteľný, **b)** $k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, **c)** 1 neodstrániteľný 2. druhu, **d)** 0 neodstrániteľný 1. druhu, **e)** $k\pi$, $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, **f)** $2k\pi$, $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, **g)** $k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, **h)** $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 2. druhu, **i)** 0 neodstrániteľný 2. druhu, **j)** 0 neodstrániteľný 2. druhu, **k)** nie sú, **l)** 0 odstrániteľný, **m)** $k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, **n)** $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ neodstrániteľný 1. druhu, **o)** nie sú, **p)** nie sú, **q)** 0 odstrániteľný, **r)** 0 neodstrániteľný 1. druhu, **s)** 0 odstrániteľný, resp. $k\pi$, $k\in Z-\{0\}$ neodstrániteľný 2. druhu, **t)** 0 neodstrániteľný 2. druhu. **3.3.2.** **a)** 2, **b)** $a\in R$, **c)** 1, **d)** 1. **3.3.3.** **a)** $a=2$, $b=-2$, **b)** $a=7/4$, $b=-3/2$. **3.3.4.** **a)** $1/2$, **b)** $1/4$, **c)** 4, **d)** e^2, **e)** -1, **f)** $3/2$. **3.3.5.** Spojitá (napr. $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$), resp. nespojitá (napr. $f(x)=2$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$). **3.3.6.** Napr. $1/[x(x-1)\cdots(x-n)]$, resp. $\lfloor x\rfloor$. **3.3.7.** Napr. $f(x)=0$ pre $x\in Q$, $f(x)=x(x-1)\cdots(x-n)$ pre $x\notin Q$, resp. $f(x)=0$ pre $x\in Q$, $f(x)=\sin x$ pre $x\notin Q$. **3.3.8.** **a)** spojitá (napr. $f=-g$), resp. nespojitá (napr. $g=f$), **b)** spojitá (napr. $f=g$), resp. nespojitá (napr. $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$, $g(x)=2$ pre $x\geq a$, $f(x)=-1$ pre $x<a$), **c)** spojitá (napr. $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=0$ pre $x<a$, $g(x)=0$ pre $x\geq a$, $f(x)=1$ pre $x<a$), resp. nespojitá (napr. $f=g$, $f(x)=1$ pre $x\geq a$, $f(x)=0$ pre $x<a$), **d)** spojitá (napr. pre $a=0$, $f(x)=1$ pre $x\geq 0$, $f(x)=0$ pre $x<0$), resp. nespojitá (napr. pre $a=0$, $f(x)=1$ pre $x>0$, $f(x)=2$ pre $x\leq 0$), **e)** spojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x\geq 0$, $f(x)=0$ pre $x<0$), resp. nespojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x>0$, $f(x)=2$ pre $x\leq 0$), **f)** spojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x\geq 0$, $f(x)=0$ pre $x<0$), resp. nespojitá (napr. pre $a=0$, $f=g$, $f(x)=1$ pre $x>0$, $f(x)=2$ pre $x\leq 0$). **3.3.9.** **a)** nespojitá, **b)** nespojitá, **c)** spojitá (napr. $f(x)=0$), resp. nespojitá (napr. $f(x)=1$), **d)** spojitá (napr. $f(x)=$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x)=x$), **e)** spojitá (napr. $f(x)=$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x)=x$), **f)** spojitá (napr. $f(x)=$konšt.), resp. nespojitá (napr. $f(x)=x$, $g(x)=0$ pre $x\geq 0$, $g(x)=1$ pre $x<0$). **3.3.10.** Funkcia $f(g)$: **a)** $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;\infty)$, **b)** $(k;k+1)$, $k\in Z$ **c)** $(-\infty;1)$, $(1;\infty)$, **d)** R, **e)** R, **f)** všade nespojitá. Funkcia $g(f)$: **a)** R, **b)** R, **c)** $(-\infty;0)$, $(0;\infty)$, **d)** R, **e)** $(-\infty;0)$, $(0;\infty)$, **f)** R. **3.3.12.** **a)** $1,92627032$, **c)** $-0,56714329$, **b)** $-0,73512111$, resp. $-0,21180469$, resp. $1,09808432$, resp. $5,84884147$, **d)** $2,20794003$, **e)** $-0,51859913$, resp. $1,36393887$, **f)** $1,41298437$, resp. $1,89713947$. **3.3.13.** **a)** $0,20669990$, resp. $-1,08004724$, resp. $1,22919369$, resp. $3,64415368$, **b)** $1,22919369$, resp. $-1,08004724$, resp. $0,20669990$, resp. $3,64415368$, **c)** $1,32471796$, **d)** $0,73908513$, **e)** $-0,87672622$, resp. 0, **f)** $0,48902657$. **3.3.14.** **a)** $\langle 0;1\rangle$, **b)** $\langle 0;18\rangle$, **c)** $\bigcup_{n=1}^{\infty}\langle n^2;n^2+n)\cup\{0\}$, **d)** $(-\pi;-2\pi)\cup(-3\pi;-4\pi)\cup\left\{0;\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$, **e)** $\{0,1\}$, **f)** $(-\infty;-4\rangle$. **3.3.16.** **a)** áno, **b)** áno, **c)** áno, **d)** áno, **e)** nie, **f)** nie, **g)** áno, **h)** nie, **i)** nie, **j)** nie.

4 Diferenciálny počet reálnej funkcie

4.1.1. **a)** 0, **b)** -2, **c)** -1, **d)** 15, **e)** 0, **f)** π^3. **4.1.2.** **a)** $4x$, **b)** $x/\sqrt{x^2+1}$, **c)** $1/(2\sqrt{x-1})$, **d)** $1-2x$, **e)** $-1/\sin^2 x$, **f)** -3, **g)** $-1/(x-1)^2$, **h)** $-\mathrm{e}^{-x}$. **4.1.3.** $1\pm 1/\sqrt{2}$. **4.1.4.** **a)** $-2x\ln 2\,2^{-x^2}$, **b)** $\sin x\,\mathrm{e}^{-\cos x}$, **c)** $\sqrt[x]{x}(1-\ln x)/x^2$, **d)** $x^{-2/3}/3$, **e)** $2^{\operatorname{tg} x}\ln 2/\cos^2 x$, **f)** $\mathrm{e}^x x^{\mathrm{e}^x-1}(1+x\ln x)$, **g)** $x^{\sin x-1}(x\cos x\ln x+\sin x)$, **h)** $2x^{\ln x-1}\ln x$, **i)** $\mathrm{e}^{\operatorname{tgh} x}/\cosh^2 x$, **j)** $[\ln x]^{x-1}+[\ln x]^x\ln\ln x$, **k)** $-\mathrm{e}^{1/x}/x^2$, **l)** $\mathrm{e}^{-1/x}/x^2$, **m)** $2\,\mathrm{e}^{x^2-1}x$, **n)** $3\sqrt{x}/2$, **o)** $-\sin x/(3\sqrt[3]{\cos^2 x})$, **p)** $\mathrm{e}^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$, **q)** $\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}/(1+x^2)$, **r)** $x^x(1+x+x\ln x)$, **s)** $x^{-1+x+x^x}(1+x\ln x+x\ln^2 x)$, **t)** $(x^x)^x(x+x\ln x+\ln x^x)$, **u)** $2^(2/5)/(25x^(4/5))$, **v)** $-2\operatorname{cotg} x/\sin^2 x$, **w)** $-2\sqrt[3]{4}/(3x^{7/3})$, **x)** $\operatorname{tg} x/\cos x$, **y)** $-\sin 2x/\cos x+2x\cos^2 x\operatorname{tg} x^2/\cos x^2$. **4.1.5.** **a)** $\operatorname{cotg} x-x/\sin^2 x$, **b)** $\operatorname{cotg}\mathrm{e}^x-x\,\mathrm{e}^x/\sin^2\mathrm{e}^x$, **c)** $3^x(\ln x-\ln 2)/2^x$, **d)** $(\mathrm{e}^x(-3+x))/x^4$, **e)** $-1/(1+x^2)$, **f)** $\mathrm{e}^x x^4\,\mathrm{e}^x(5+x)$, **g)** $5\operatorname{tg}^4 x/\cos^2 x$, **h)** $2x\cos x^2$, **i)** $5\,\mathrm{e}^{5x}/(2\sqrt{\mathrm{e}^{5x}})$, **j)** $\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$, **k)** $3x^2\operatorname{sgn} x$, **l)** $2\,|x|$, **m)** 0, **n)** $2\,3^{2x}\ln 3$, **o)** $-\sin x$

pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $\sin x$ pre $x \in \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, **p)** $-3^{\mathrm{cotg}\,x}\ln 3/\sin^2 x$, **q)** $x^{\sqrt{x}-1/2}(2+\ln x)/2$, **r)** $\cos x/x^{2\sin^2(x/2)} - x^{\cos x}\ln x\sin x$, **s)** $x^{(x^2)}(1+x^2+2x^2\ln x)$, **t)** $3/x$, **u)** $-1/\sin^2 x$, **v)** $x(2\ln x-1)/\ln^2 x$, **w)** $-2/\mathrm{e}^{2x}$, **x)** $-2/(x\ln^3 x)$, **y)** $-1/((1+x^2)\,\mathrm{arctg}^2\,x)$. **4.1.6.** **a)** $2/(x-1)^2$, **b)** $\mathrm{tg}\,(x/2)/\cos^2(x/2)$, **c)** $2x^2[(1-x^3)/(1+x^3)]^{2/3}/(x^3-1)^2$, **d)** $2[(1-x)/(1+x)]^{2x/(1-x)}/(x^2-1)+2[(1-x)/(1+x)]^{(1+x)/(1-x)}\ln[(1-x)/(1+x)]/(x-1)^2$, **e)** $\sin 2x/\mathrm{e}^{\cos^2 x}$, **f)** $-\mathrm{tg}\,x$, **g)** $-7/x^8-5/x^6$, **h)** $-4x^{1/3}/3+5x^4/(2\sqrt{x^5})$, **i)** $4/(x^2-4)$, **j)** $(1+\ln x+\ln^2 x)/(1+\ln x)^2$, **k)** $1/\sin x$, **l)** $-2/(1-\sin 2x)$, **m)** $2x/(1+x^2)$, **n)** $6x(x^2-1)^2$, **o)** $-\mathrm{e}^{-x}-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, **p)** $x^4(-4+5\ln x)$, **q)** $-(1+2x)^{-3/2}$, **r)** $-1/(1+x^2)$, **s)** $-2\,\mathrm{e}^x/(\mathrm{e}^x-1)^2$, **t)** $1/(1+x^2)$, **u)** $-8(1-2x)^3$, **v)** $2\ln(1+x)/(1+x)$, **w)** $2x/(1+x^2)$, **x)** $1/[2(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}]$. **4.1.7.** **a)** $-2\cos x^{-2}/x^3$, **b)** $(-2-2x+x^2)/(-1+x)^2$, **c)** $4\,\mathrm{e}^{2x}/(1+\mathrm{e}^{2x})^2$, **d)** $(-1-\cos x+\sin x)/(1+\sin 2x)$, **e)** $\mathrm{e}^{\cos x+\sin x}(\cos x-\sin x)$, **f)** $-2x^3/\sqrt{1-x^4}$, **g)** $-1/(2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x})$, **h)** $40x(-1+x^2)^{19}$, **i)** $4x/(1+x^2)^2$, **j)** $1/(2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2)$, **k)** $-(1+3x^2)/(2x^{3/2})$, **l)** $(x^2(3+2x+x^2))/(1+x+x^2)^2$, **m)** $(1+2x)/\mathrm{e}^{1/x}$, **n)** $x\,\mathrm{e}^x(x\cos x+2\sin x+x\sin x)$, **o)** $(1-2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$, **p)** $-1/(2\sqrt{x}(1+x))$, **q)** $(3-x)/(2\sqrt{(1-x)^3})$, **r)** $2(-x\cos x+x^3\cos x-\sin x-x^2\sin x)/(-1+x^2)^2$, **s)** $(1-\sqrt{2})/[2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2]$, **t)** $1/[\sqrt{(-1+x)/(1+x)}(1+x)^2]$, **u)** $\mathrm{e}^{1-x^2}(1-2x^2)$, **v)** $7x^{-1/8}/8$, **w)** $1+\ln x$, **x)** $\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(-1+\sqrt{x}+x)/(2\sqrt{x(x-1)})$. **4.1.8.** **a)** $-1/(x^2\cos^2(1+1/x))$, **b)** $-1/(2\sin^2(x/2))$, **c)** $-\mathrm{tg}\,(x/2)/(2\cos^2(x/2))$, **d)** $-1/[2\sqrt{x(1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})^2]$, **e)** $8x\ln^3(1+x^2)/(1+x^2)$, **f)** $2\,\mathrm{cotg}\,2x$, **g)** $x\cosh x+\sinh x$, **h)** $-2x/[(1+x^4)\,\mathrm{arccotg}\,x^2]$, **i)** $-2\,\mathrm{cotg}\,x/\sin^2 x$, **j)** $16x^7/(-1+x^16)$, **k)** $1/(x\sqrt{1-\ln^2 x})$, **l)** $-\sqrt{3}/\sqrt{5+2x-3x^2}$, **m)** $-\ln\sin x[\sin x]^{2\cos^2(x/2)}+\cos^2 x/[\sin x]^{2\sin^2(x/2)}$, **n)** $[\cos x]^{1+\sin x}\ln\cos x-[\cos x]^{-1+\sin x}\sin^2 x$, **o)** $[\cosh x]^{-1+\ln x}(\cosh x\ln\cosh x+x\ln x\sinh x)/x$, **p)** $(1+x^2)^{-1+\mathrm{arctg}\,x}(2x\,\mathrm{arctg}\,x+\ln(1+x^2))$, **q)** $2x/\sqrt{16+x^4}$, **r)** $\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x+x)/(1+\mathrm{e}^x)^2$, **s)** $-3\,\mathrm{cotgh}\,x/[(1+x)\ln^2(1+x)]-3/(\ln(1+x)\sinh^2 x)$, **t)** $2/(x^3\sqrt{-x^{-4}+2x^{-2}})$, **u)** $2[\mathrm{tg}\,x]^{-1+\mathrm{cotg}\,x}/\sin 2x-\ln\mathrm{tg}\,x\sin^2 x\ [\mathrm{tg}\,x]^{\mathrm{cotg}\,x}$, **v)** $3^{\ln[1+x+x^2]}(1+2x)\ln[3])/(1+x+x^2)$, **w)** $x(1-3x+2\ln x)$, **x)** $1-5\sin 2x$. **4.1.9.** **a)** $-1/(x\sqrt{1-\ln^2 x})$, **b)** $2\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{cotg}\,\mathrm{e}^{2x}$, **c)** $-2x$ pre $x\in(-1\,;1)$, $2x$ pre $x\in R-\langle -1\,;1\rangle$, **d)** $1/[x\sqrt{1-\ln^2 x}]$, **e)** $x/\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, **f)** $\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$, **g)** $x\,\mathrm{e}^x$, **h)** $\mathrm{e}^x/\sqrt{1-x^2}+\mathrm{e}^x\arcsin x$, **i)** $1/(2\sqrt{x-1})$ pre $x>1$, $-1/(2\sqrt{1-x})$ pre $x<1$, **j)** 1 pre $x>2$, -1 pre $x<2$, **k)** $\mathrm{cotg}\,x-x/\sin^2 x$, **l)** $1/[x\ln x\ln\ln x\ln\ln\ln x]$, **m)** $2x/(-1+x^2)$, **n)** $2x/(-1+x^2)$, **o)** $-\mathrm{tgh}^2\,x$, **p)** $5/[\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x]$, **q)** $\mathrm{cotg}\,x$, **r)** $1/[\sqrt{1-x^2}\arcsin x]$, **s)** $1/\cos 2x$, **t)** $-1/(x+x\ln^2 x)$, **u)** $1/(x\sqrt{1+x^2})-\mathrm{argsinh}\,x/x^2$, **v)** $2x/\cosh x-x^2\,\mathrm{tgh}\,x/\cosh x$, **w)** $1/(-1+x^2)+x\arccos x/\sqrt{(1-x^2)^3}$, **x)** $1/(x-x\ln^2 x)$. **4.1.10.** **a)** $3/(4x^{3/4})+2/(3^{2/3})+1/(2x^{1/2})$, **b)** $x/\sqrt{x^2(1-x^2)}$, **c)** $1+6x+15x^2+28x^3$, **d)** $2(30+8x+15x^2+10x^3)/(5-4x-x^3)^3$, **e)** $2\,\mathrm{sgn}\,x/(1-x^2)$, **f)** $2/\sqrt{1+x^2}$, **g)** $5\sin 2x+6x^2\sin x^3$, **h)** $(3+2x)/(3(2+3x+x^2)^{2/3})$, **i)** $4(-1+14x+3x^2)(1-x+7x^2+x^3)^3$, **j)** $1+4/x^3+6x^2$, **k)** $-1/(2x^4)+20x\cos 4x+3\ln x/(2x^4)+5\sin 4x$, **l)** $1/[(-2+x)^2(5-4x+x^2)]$, **m)** $-\cos x+6x^5\ln 2$, **n)** $6x^5\ln 2$, **o)** $1-1/(2\sqrt{x})-3\sqrt{x}/2$, **p)** $-(3\cos x+\cos 3x-3\sin x+\sin 3x)/(4\sin^2 2x)$, **q)** $2x/(-4-15x^2+4x^4)-2x^2\,\mathrm{arctg}\,2x/(-4+x^2)^2+\mathrm{arctg}\,2x/(-4+x^2)$, **r)** $(-1+x^2)/[(1+x^2)^2\sqrt{(1+x^4)/(1+x^2)^2}]$, **s)** $x\cos x$, **t)** $-3\cos^2 x\sin x+3\cos x\sin^2 x$, **u)** $\mathrm{e}^x(-5+4x^2+x^3)$, **v)** $-6x^8/(1+x^6)^2$, **w)** $-2/(1-\sin 2x)$, **x)** $-1/[2\sqrt{1+x}(2+x)\,\mathrm{arctg}\,(1+x)^{-1/2}]$. **4.1.11.** **a)** $2\sin^2 x$, **b)** $(-5x(2/3))/3+(5x(3/2))/2$, **c)** $\mathrm{e}^{-x}[-1+2x-x^2+4x^3-x^4]$, **d)** $-2\arcsin[1/(-1+x)]/(\sqrt{1-(-1+x)^{-2}}(-1+x)^2)$, **e)** $2(1-\cos x\cosh x)/(\cos x-\cosh x)^2$, **f)** $-1/2$, **g)** $1/\sqrt{1+x^2}$, **h)** $\cos x\cos\sin x\cos\sin\sin x\cos\sin\sin\sin x$, **i)** $1+1/(6x^{5/6})+1/(4x^{3/4})+1/(2x^{1/2})$, **j)** $2/(1-x^2)$, **k)** $2x/(2+2x^2+x^4)$, **l)** $3/[x(1+x^3)^2]$, **m)** $(-1+2\ln^2 x)/(x\ln x)$, **n)** $\cos\cos x\cos\cos\sin\cos x\sin x\sin\sin\cos x$, **o)** $2\sqrt{1-x^2}$, **p)** $(1+2x\,\mathrm{argcotgh}\,x)/(-1+x^2)^2$, **q)** $-\mathrm{tg}\,[1-1/x]/x^2$, **r)** $2\cos x/(3[\sin x]^{1/3})+2\,\mathrm{tg}\,x/\cos^2 x$, **s)** -2 pre $x<1$, 0 pre $x\in(1\,;2)$, 2 pre $x>2$, **t)** $(2+2x)/(3+2x+x^2)$, **u)** 0, **v)** $-[-2/x^2+3/(x\cos^2 x)-3\,\mathrm{tg}\,x)/x^2]/[1+(2+3\,\mathrm{tg}\,x)^2/x^2]$, **w)** $-\mathrm{cotg}^2\,x/\sin x-1/\sin^2 x-1/\sin^3 x$, **x)** $(\arcsin x-\arccos x)(\arcsin x+\arccos x)^2/\,(\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x\arcsin^2 x)$. **4.1.12.** **a)** -1, **b)** -1, **c)** $|\cos x|/\cos x$, **d)** $(13-11x+2x^2)/(-6+11x-6x^2+x^3)$, **e)** $3(-1+x^2)/(1-x-x^3+x^4)$, **f)** $(3\cos x+2\sin x)/(2\sqrt{5(-2\cos x+3\sin x)})$, **g)** $-x^{-2}$, **h)** $-x^{-2}$, **i)** $-x\,\mathrm{tg}\,\sqrt{1+x^2}/\sqrt{1+x^2}$, **j)** $(4\sin x-3\sin 2x)/(6\cos^3 x)$, **k)** $1/(1+x^2)$, **l)** $3\sqrt{x^3}\ln x/x$, **m)** $-|\sin x|/\sin x$, **n)** $-1/(2\sqrt{\mathrm{cotg}\,x}\sin^2 x)-1/(2\sqrt{\mathrm{tg}\,x}\cos^2 x)$, **o)** $-\cos\ln x-\sin\ln x$, **p)** $[1+(1+1/(2\sqrt{x}))/(2\sqrt{\sqrt{x}+x})]/[2(x+\sqrt{\sqrt{x}+x})^{1/2}]$, **q)** $(\sin(x/2)-\cos(x/2))/\,[(\cos(x/2)+\sin(x/2))^3\sqrt{(1-\sin x)/(1+\sin x)}]$, **r)** $1/[24\sqrt{x}(1+(1+\sqrt{x})^{1/3})^{3/4}(1+\sqrt{x})^{2/3}]$, **s)** $-1/(2\sqrt{-x}\sqrt{1+x})$, **t)** $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}(\cos x-\sqrt{1+x}\sin x)/[2\sqrt{1+x}\sqrt{\cos x}]$, **u)** $1/(2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x})$, **v)** $4\sin 2x/(3+\cos 4x)$, **w)** $-4\sin 2x/(3+\cos 4x)$, **x)** $(1+x/\sqrt{1+x^2})/(1+x+\sqrt{1+x^2})$. **4.1.13.** **a)** $\sqrt{2+x^2}$, **b)** $2(1+x)/(1+x+x^2)$, **c)** $-x/\sqrt{1+2x-x^2}$, **d)** $\sqrt{2}(3-x^2)/(1+x^4)$, **e)** $2x(1+x)\sqrt{2+x^2}/(3(3+x^2)^{2/3})+x(1+x)(3+x^2)^{1/3}/\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2+x^2}(3+x^2)^{1/3}$, **f)** $4\,\mathrm{tg}^5\,x$, **g)** $x\sin^2 x$, **h)** $\arcsin x/(1-x^2)^{3/2}$, **i)** $2x\ln[(1+x)/(1-x)]$, **j)** $x\,\mathrm{arctg}\,x$, **k)** 0, **l)** $2(1-x^2+x\sqrt{-1+x^2})/\sqrt{-1+x^2}$, **m)** $-\sin x/12-4\sin 2x/3+\sin 3x/4$, **n)** $1-\cos 4x-\cos x\sin^4 x+2\cos 2x\sin^2 2x$, **o)** $-1/(1+x)^2+x/(-1+x^2)$, **p)** $(-1/2+x)/(2\sqrt{1-x}\sqrt{x})+(1-2x)/(4\sqrt{x-x^2})+\arcsin\sqrt{x}$, **q)** $2+4x+6x^2+4x^3+5x^4$, **r)** $2+6x+9x^2+8x^3+5x^4$, **s)** $4x^2/(-16+x^4)$, **t)** $(5-3x^2)/[2(1+x^2+x^4)]$, **u)** $\arcsin x/(1-x^2)^{3/2}$, **v)** $-2\sqrt{\sin x}/\cos x$, **w)** $1/[\sqrt{1-x^2}\arcsin x]+1/[x\sqrt{1-\ln^2 x}]$,$\ln[x-\sqrt{-1+x^2}]$, **x)** $-2(1+9x+6x^2+x^3)/[(2+x)^2(3+x)^2(4+x)^2]$, **y)** $-\sqrt{1+x}[1/(2\sqrt{1+x})+1/(2\sqrt{2+x})+1/(2\sqrt{3+x})]/\,[\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{3+x}]^2+1/[2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{3+x})]$. **4.1.14.** Porade $f'_-(0)$, $f'_+(0)$: **a)** -1, 1, **b)** 0, 0, **c)** -1, 1, **d)** -1, 0, **e)** 0, 0 **f)** neexistujú, **g)** 1, 1, **h)** -1, -1. **4.1.15.** **a)** $x^{-3/4}/4$, **b)** $1/(x\ln 10)$, **c)** $x^{-4/5}/5$, **d)** $1/(x\ln 2)$. **4.1.17.** **a)** $y=4x-4$, **b)** $y=-4x/3$, **c)** $y=x/4+1$, **d)** $y=3x$, **e)** $y=x$, **f)** $y=1$, **g)** $y=2x$, **h)** $y=\mathrm{e}\,x-1$, **i)** $50y=14-3x$. **4.1.18.**

$a = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, $[\mathrm{e}; \mathrm{e}]$. **4.1.19.** $a \le 0$. **4.1.20.** $y = 3x$, resp. $y = -x$. **4.1.21.** **a)** $y = (3x-13)/4$, **b)** $y = x + 3/4$, **c)** $y = 2x(\sqrt{3}-1)$, resp. $y = -2x(\sqrt{3}+1)$, **d)** $y = 2a - 2a^2 - 2a\sqrt{a^2-2a-b+3} + b + 2x(-1+a+\sqrt{a^2-2a-b+3})$, resp. $y = 2a - 2a^2 + 2a\sqrt{a^2-2a-b+3} + b + 2x(-1+a-\sqrt{a^2-2a-b+3})$ kde $b \le a^2 - 2a + 3$, **e)** $y = x + 3/4$, resp. $y = -x + 11/4$, **f)** $y = 2 + \operatorname{tg}\varphi - (\operatorname{tg}^2\varphi)/4 - x\operatorname{tg}\varphi$, resp. $y = 2 - \operatorname{tg}\varphi - (\operatorname{tg}^2\varphi)/4 + x\operatorname{tg}\varphi$. **4.1.22.** **a)** $y = 3x - 77/36$, **b)** $y = x + 7/4$, **c)** $y = 3 + (1-x)/\sqrt{2}$, resp. $y = 3 - (1-x)/\sqrt{2}$, **d)** $y = x + 7/4$. **4.1.23.** **a)** $y = 1$ v bodoch $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 1\right]$, $k \in Z$, resp. $y = -1$ v bodoch $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 1\right]$, $k \in Z$, **b)** $y = 1$ v bodoch $[k\pi; 1]$, $k \in Z$, resp. $y = -1$ v bodoch $\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 1\right]$, $k \in Z$, **c)** neexistuje, **d)** $y = 2\sqrt{3}/9$ v bode $\left[-1/\sqrt{3}; 2\sqrt{3}/9\right]$, resp. $y = -2\sqrt{3}/9$ v bode $\left[1/\sqrt{3}; -2\sqrt{3}/9\right]$, **e)** $y = 1/\mathrm{e}$ v bode $[\mathrm{e}; 1/\mathrm{e}]$, **f)** $y = 1$ v bode $[0; 1]$, **g)** $y = -1/\mathrm{e}$ v bode $[1/\mathrm{e}; -1/\mathrm{e}]$ **h)** $y = \mathrm{e}$ v bode $[1; \mathrm{e}]$.

4.2.1. **a)** $\mathrm{e}^x(1+x)h$, **b)** $x^2 2^x(3 + x\ln 2)h$, **c)** $-h/x^2$, **d)** $h/\sqrt{1-x^2}$, **e)** $2^{-\ln x/x}\ln 2(\ln x - 1)h - x^2$, $x > 0$, **f)** $(2-\ln x)h/(2\sqrt{x^3})$, $x > 0$, **g)** $h/(x-1)^2$, **h)** $2h/(x^2-1)$, **i)** $-2xh\,\mathrm{e}^{-x^2}$, **j)** $h(1+\ln x)$. **k)** $h/\cos^2 x$, **l)** $h/(1+x^2)$. **4.2.2.** **a)** $\Delta S \approx r\alpha\delta r = 10\pi\ \mathrm{cm}^2$, **b)** $\Delta S \approx r\alpha\delta r = 10\pi\ \mathrm{cm}^2$, **c)** $\Delta S \approx r^2\Delta\alpha/2 = 2{,}5\pi\ \mathrm{cm}^2$. **4.2.4.** $\Delta S = 2\pi r\Delta r$, $\delta S = 2\delta r$. **4.2.5.** Presné hodnoty: **a)** $0{,}4848096$, **b)** $0{,}9656887$, **c)** $-0{,}1053605$, **d)** $1{,}9956925$, **e)** $0{,}5704371$, **f)** $2{,}0305432$, **g)** $4{,}0422932$, **h)** $9{,}0553851$, **i)** $5{,}981424$, **j)** $0{,}7701709$, **k)** $1{,}2166529$, **l)** $2{,}0027745$, **m)** $2{,}9957323$, **n)** $3{,}0004341$, **o)** $0{,}8097835$. **4.2.7.** **a)** $y^{(3)} = 18x\cos x - x^3\cos x + 6\sin x - 9x^2\sin x$, $y^{(5)} = -60x\cos x + x^3\cos x - 60\sin x + 15x^2\sin x$, **b)** $y^{(3)} = 6\cos x - 9x^2\cos x - 18x\sin x + x^3\sin x$, $y^{(5)} = -60\cos x + 15x^2\cos x + 60x\sin x - x^3\sin x$, **c)** $y^{(3)} = 36x\cos 2x - 8x^3\cos 2x + 6\sin 2x - 36x^2\sin 2x$, $y^{(5)} = -480x\cos 2x + 32x^3\cos 2x - 240\sin 2x + 240x^2\sin 2x$, **d)** $y^{(3)} = 6\cos 2x - 36x^2\cos 2x - 36x\sin 2x + 8x^3\sin 2x$, $y^{(5)} = -240\cos 2x + 240x^2\cos 2x + 480x\sin 2x - 32x^3\sin 2x$, **e)** $y^{(3)} = 2\,\mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$, $y^{(5)} = -4\,\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)$, **f)** $y^{(3)} = -2\,\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)$, $y^{(5)} = -4\,\mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$, **g)** $y^{(3)} = x^2(47 + 60\ln x)$, $y^{(5)} = 274 + 120\ln x$, **h)** $y^{(3)} = 2\,\mathrm{e}^x(3\cos x + x\cos x - x\sin x)$, $y^{(5)} = -4\,\mathrm{e}^x(x\cos x + 5\sin x + x\sin x)$. **4.2.8.** **a)** $-2^{n-1}\cos(2x + n\frac{\pi}{2})$, **b)** $[3\cos(x + n\frac{\pi}{2}) + 3^n\cos(3x + n\frac{\pi}{2})]/4$, **c)** $x\sin(x + n\frac{\pi}{2}) - n\cos(x + n\frac{\pi}{2})$, **d)** $(n-1)!/x$, **e)** $2(-1)^n n!/(x-1)^{n+1}$, **f)** $2(-1)^{n+1}n!/(x+1)^{n+1}$, **g)** $(-1)^n n![\ln x - (1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n)]/x^{n+1}$, **h)** $(-1)^n n![(x+1)^{-n-1} + (x-1)^{-n-1}]/2$, **i)** $\mathrm{e}^x(x+n)$, **j)** $(-1)^{n-1}(n-2)!/x^{n-1}$ pre $n \ge 2$, **k)** $(-1)^{n+1}(n-1)!/x^n$ pre $n \ge 2$, **l)** $(-1)^{n-1}(n-2)!/x^{n-1}$ pre $n \ge 2$.

4.3.3. Koeficienty pre $1, -1, 2, -2$: **a)** $[1,5,10,10,5]$, $[1,-3,4,-2,1]$, $[1,9,31,49,31]$, $[1,-7,19,-23,11]$, **b)** $[1,5,8,6,1]$, $[1,-3,2,2,-3]$, $[1,9,29,41,21]$, $[1,-7,17,-15,1]$, **c)** $[1,3,4,2,1]$, $[1,-5,10,-10,5]$, $[1,7,19,23,11]$, $[1,-9,31,-49,31]$, **d)** $[1,2,0,0,2]$, $[1,-6,12,-8,2]$, $[1,6,12,10,5]$, $[1,-10,36,-54,29]$, **e)** $[1,4,8,10,4]$, $[1,-4,8,-6,0]$, $[1,8,26,42,27]$, $[1,-8,26,-38,19]$, **f)** $[1,2,2,2,0]$, $[1,-6,14,-14,4]$, $[1,6,14,16,7]$, $[1,-10,38,-64,39]$, **g)** $[1,3,2,0,1,2]$, $[1,-7,18,-20,9,0]$, $[1,8,24,34,24,9]$, $[1,-12,56,-126,136,-55]$, **h)** $[1,5,12,18,15,4]$, $[1,-5,12,-14,7,-2]$, $[1,10,42,94,112,55]$, $[1,-10,42,-90,96,-41]$, **i)** $[1,3,4,4,2,0]$, $[1,-7,20,-28,18,-4]$, $[1,8,26,44,39,14]$, $[1,-12,58,-140,167,-78]$, **j)** $[1,7,21,35,35,21,7]$, $[1,-5,22,-23,9,-3,1]$, $[1,13,71,209,351,321,127]$, $[1,-11,51,-127,179,-135,43]$, **k)** $[1,5,11,15,13,7,1]$, $[1,-7,21,-33,27,-9,-1]$, $[1,11,51,129,189,153,53]$, $[1,-13,71,-207,337,-287,97]$, **l)** $[1,8,28,56,70,56,28,8]$, $[1,-6,16,-24,22,-12,4,0]$, $[1,15,97,351,769,1023,769,255]$, $[1,-13,73,-229,433,-493,313,-85]$, **m)** $[1,6,14,16,10,4,2,0]$, $[1,-8,26,-44,42,-24,10,-4]$, $[1,13,71,211,369,381,217,53]$, $[1,-15,95,-329,673,-815,545,-159]$. **4.3.4.** **a)** $1 + 2(x-1)/3 - (x-1)^2/9 + 4(x-1)^3/81$, **b)** $1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3/2$, **c)** $1/2 - (x-2)/4 + (x-2)^2/8 - (x-2)^3/16 + (x-2)^4/32$, **d)** $\ln 2 + (x-2)/2 - (x-2)^2/8 + (x-2)^3/24 - (x-2)^4/64$, **e)** $\ln 3 + (x-3)/3 - (x-3)^2/18 + (x-3)^3/81 - (x-3)^4/324$, **f)** $1 - 3(x-1) + 6(x-1)^2 - 10(x-1)^3$. **4.3.5.** **a)** $1 + 2x + 2x^2$, **b)** $1 - 2x + 2x^2$, **c)** $1 - x - x^2 + 2x^3$, **d)** $1/2 + x/4 - x^3/48$, **e)** $-x^2/2 - x^4/12 - x^6/45$, **f)** $-x^4/4$, **g)** $x + x^3/3 + 2x^5/15$, **h)** $x^2 + 2x^4/3$, **i)** $x^2 - x^4/3$, **j)** $x^3 - x^5/2$, **k)** $1 - x^2 + x^4/3$, **l)** $1 - 3x^2/2 + 7x^4/8$. **4.3.6.** **a)** $a_{2n} = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2n}/2^n/n!$, $n \in N \cup \{0\}$, **b)** $a_{2n} = x^{2n}/(2n)!$, $n \in N \cup \{0\}$, **c)** $a_{2n+1} = x^{2n+1}/(2n+1)!$, $n \in N \cup \{0\}$, **d)** $a_{2n+1} = 2x^{2n+1}/(2n+1)$, $n \in N \cup \{0\}$. **4.3.8.** **a)** $(n-1)/n$, **b)** $(m-1)/(n-1)$, **c)** $1/6$, **d)** 1, **e)** $\ln a - \ln b$, **f)** 0, **g)** ∞, **h)** 0 pre $a > 1$, ∞ pre $a \le 1$, **i)** $1/\mathrm{e}$, **j)** 1, **k)** a^2/b^2, **l)** 1, **m)** $1/3$, **n)** $-\infty$, **o)** $3/10$, **p)** 0, **q)** $2/9$, **r)** ∞, **s)** $-\infty$, **t)** 0, **u)** $1/2$, **v)** 1, **w)** $1/12$, **x)** $\sqrt{3/8}$, **y)** $(n^2 - m^2)/2$, **z)** 2. **4.3.9.** **a)** nie, 1, **b)** nie, $\nexists$, **c)** áno, $-1/2$, **d)** áno, 1, **e)** áno, 1. **4.3.10.** **a)** rastúca na $\langle -1; 1\rangle$, klesajúca na $(-\infty; -1\rangle$, $\langle 1; \infty)$, **b)** rastúca na $\langle -1/3; \infty)$, klesajúca na $(-\infty; -1/3\rangle$, **c)** rastúca na $(-\infty; -5\rangle$, $(-1; \infty)$, klesajúca na $\langle -5; -1)$, **d)** rastúca na $(-\infty; -1)$, $(0; \infty)$, **e)** rastúca na R, **f)** rastúca na $(0; \infty)$, klesajúca na $(-\infty; 0)$, **g)** rastúca na $\langle 0; 2\rangle$, klesajúca na $(-\infty; 0\rangle$, $\langle 2; \infty)$, **h)** rastúca na $\langle 1; \infty)$, klesajúca na $(-\infty; 0)$, $(0; 1\rangle$, **i)** rastúca na $\langle 1/2; \infty)$, klesajúca na $(-\infty; 1/2\rangle$, **j)** rastúca na $(-\infty; -3\rangle$, $\langle 3; \infty)$, klesajúca na $\langle -3; 3\rangle$, **k)** rastúca na $\langle 1; \infty)$, klesajúca na $(-\infty; -1\rangle$, konštantná na $\langle -1; 1\rangle$, **l)** rastúca na $(-\infty; -\sqrt{3}\rangle$, $\langle\sqrt{3}; \infty)$, klesajúca na $\langle -\sqrt{3}; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; \sqrt{3}\rangle$, **m)** rastúca na $(2/3; 1)$, $(1; 2\rangle$, klesajúca na $(-\infty; 0)$, $(0; 2/3)$, $\langle 2; \infty)$, **n)** rastúca na $\langle 1; \infty)$, klesajúca na $(-\infty; -1\rangle$, konštantná na $\langle -1; 1\rangle$, **o)** rastúca na $\langle 0; \infty)$, klesajúca na $(-\infty; 0\rangle$, **p)** rastúca na $\langle 1/2; \infty)$, klesajúca na $(0; 1/2\rangle$, **q)** rastúca na $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in Z$, **r)** rastúca na $\left\langle -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\rangle$, klesajúca na $\left\langle \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right\rangle$, $k \in Z$, **s)** rastúca na $\left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right\rangle$, $\left\langle \frac{4\pi}{3} + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\right\rangle$, klesajúca na $\left\langle 0 + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\rangle$, $\left\langle \pi + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right\rangle$, $k \in Z$, **t)** rastúca na R. **4.3.11.** **a)** l min $f(4) = -32$, l max $f(0) = 0$, **b)** $\nexists$, **c)** l min $f(\sqrt[5]{24}) = 5\sqrt[5]{2/27}$, **d)** $\nexists$, **e)** lg min $f(k) = 0$, $k \in Z$, **f)** l min $f(0) = 0$, l max $f(2) = 4/\mathrm{e}^2$, **g)** l min $f(1) = 1 + \mathrm{e}$, **h)** lg min $f(0) = 1$, **i)** g min $f(0) = f(6) = 0$, lg max $f(3) = 3$, **j)** g min $f(-1) = f(1) = 0$, **k)** g max $f(0) = 3$, **l)** l min $f(-\frac{\pi}{3} + k\pi) = \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} + 4k\pi$, l max

$f(\frac{\pi}{3}+k\pi)=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}+4k\pi$, $k\in Z$, **m)** lg min $f(1)=-2$, **n)** lg min $f(0)=-1$, **o)** $\nexists$, **p)** l min $f(1/2)=4/5$, l max $f(1)=1$, **q)** lg min $f(0)=0$, **r)** l min $f(\mathrm{e})=2+\mathrm{e}$, **s)** l min $f(\sqrt{2/3})=-\sqrt{32/27}$, l max $f(0)=0$, **t)** lg min $f(1)=0$, **u)** l min $f(\frac{5\pi}{4}+k\pi)=-\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{-k\pi}/\sqrt{2}$, l max $f(\frac{\pi}{4}+2k\pi)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{-k\pi}/\sqrt{2}$, $k\in Z$, **v)** l min $f(\frac{3\pi}{4}+k\pi)=-\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{-k\pi}/\sqrt{2}$, l max $f(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{-k\pi}/\sqrt{2}$, $k\in Z$, **w)** l min $f(\frac{5\pi}{4}+k\pi)=-\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{k\pi}/\sqrt{2}$, l max $f(\frac{\pi}{4}+2k\pi)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{k\pi}/\sqrt{2}$, $k\in Z$, **x)** l min $f(\frac{3\pi}{4}+k\pi)=-\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{k\pi}/\sqrt{2}$, l max $f(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{k\pi}/\sqrt{2}$, $k\in Z$ (l=lokálny, g=globálny). **4.3.12. a)** lg min $f(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi)=1-\sqrt{2}$, lg max $f(\frac{\pi}{4}+2k\pi)=1+\sqrt{2}$, **b)** l min $f(2)=-57$, l max $f(-3/2)=115/4$, **c)** $\nexists$, **d)** l min $f((5-\sqrt{13})/6)=-(587+143\sqrt{13})/1458$, $f((5+\sqrt{13})/6)=(143\sqrt{13}-587)/1458$, l max $f(1)=0$, **e)** lg min $f(0)=-1$, **f)** lg min $f(-4)=1$, l min $f(1)=4$, l max $f(0)=5$, **g)** lg min $f(1/8)=\ln 16-\ln 17$, **h)** lg min $f(\mathrm{e}^{3/2})=-1/4$, **i)** lg max $f(1)=\frac{\pi}{4}-\ln 2/2$, **j)** lg min $f(1/\mathrm{e})=1/\sqrt[\mathrm{e}]{\mathrm{e}}$ **k)** g min $f(1)=0$, g max $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2$, **l)** lg min $f(2)=2-\ln 4$, g max $f(1)=1$, **m)** lg max $f(0)=-1$, **n)** lg min $f(\sqrt{2+\sqrt{3}})=\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, g max $f(3/2)=39/10$, **o)** g min $f(3)=3/4$, g max $f(11/10)=220/21$ (l=lokálny, g=globálny). **4.3.13. a)** lg min $f(0)=f(1)=0$, l max $f(1/2)=1/\sqrt[3]{16}$, g max $f(-3)=\sqrt[3]{144}$, **b)** g min $f(\pi)=12-2\pi$, g max $f(-\pi)=12+2\pi$, **c)** g min $f(0)=f(\pi)=0$, lg max $f(\frac{\pi}{2})=3$, **d)** lg min $f(\frac{\pi}{2})=1$, g min $f(0)=f(\pi)=1$, lg max $f(\frac{\pi}{4})=f(\frac{3\pi}{4})=(1+\sqrt{2})/2$, **e)** lg min $f(3)=1$, g max $f(-1)=17$, **f)** l min $f(1)=18$, g min $f(-3)=2$, l max $f(-1)=22$, g max $f(4)=72$, **g)** lg min $f(1)=0$, g max $f(-2)=21$, **h)** lg min $f(1)=f(5)=0$, l max $f(3)=4$, g max $f(-6)=77$, **i)** g min $f(-1)=-10$, g max $f(1)=2$, **j)** l min $f(3)=-26$, l max $f(1)=2$ (l=lokálny, g=globálny). **4.3.14. a)** $x_1=x_2=a/2$, **b)** $x_1=x_2=a/2$, **c)** $x_1=x_2=a/2$, **d)** $x_1=x_2=a/2$. **4.3.15.** $x=1$. **4.3.16.** Strany $a/2$, $h/2$. **4.3.17.** Rovnoramenný s ramenami $(s-a)/2$. **4.3.18.** Štvorec so stranou $s/4$. **4.3.19.** Štvorec so stranou $\sqrt{P}$. **4.3.20.** Štvorec so stranou $s/4$. **4.3.21.** Strany $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **4.3.22. a)** polomer podstavy $x=\sqrt{2}r/\sqrt{3}$, výška $v=2r/\sqrt{3}$, **b)** polomer podstavy $x=r\sqrt{(5+\sqrt{5})/10}\approx 0,850651r$, výška $v=r\sqrt{2(5-Sqrt5)/5}\approx 1,051462$, **c)** polomer podstavy $x=2r/\sqrt{2}$, výška $v=\sqrt{2}r$. **4.3.23. a)** polomer podstavy $x=4\sqrt{2}r/3$, výška $v=4r/3$, **b)** polomer podstavy $x=4\sqrt{2}r/3$, výška $v=4r/3$, **c)** polomer podstavy $x=\sqrt{95+7\sqrt{17}}r/\sqrt{128}\approx 0,983702r$, výška $v=(23-\sqrt{17})r/16\approx 1,179806$. **4.3.24.** Polomer podstavy $x=r/2$, výška $v=h/2$. **4.3.25. a)** $[1;2]$, **b)** $[1/10;23/10]$, **c)** $[2/5;11/5]$, **d)** $[13/10;19/10]$. **4.3.26. a)** $\big[(3-\sqrt{3})/2;(6-\sqrt{3})/2\big]$, **b)** $[1;2]$, **b)** $\big[1-\sqrt{30}/4;7/4\big]$, **d)** $[-1/2;5/4]$. **4.3.27.** Dĺžka $20\sqrt[3]{5}$ m, šírka $5\sqrt[3]{5}$ m, výška $2\sqrt[3]{5}$ m. **4.3.28.** Na kruh treba $10\pi/(4+\pi)\approx 4,399010$ m. **4.3.29.** 6 cm. **4.3.30.** Strany obdĺžnika $4s/(8+3\pi)$, $(4+\pi)s/(8+3\pi)$, polomer kruhu $2s/(8+3\pi)$. **4.3.31.** $\sqrt{52+36\sqrt[3]{12}+24\sqrt[3]{18}}$ m. **4.3.32. a)** nemá inflexné body, konvexná na R, **b)** inflexný bod 1, konvexná na $\langle 1;\infty)$, konkávna na $(-\infty;1\rangle$, **c)** inflexné body $\pm\sqrt{2}$, konvexná na $\big\langle -\sqrt{2};\sqrt{2}\big\rangle$, konkávna na $\big(-\infty;-\sqrt{2}\big\rangle$, $\big\langle\sqrt{2};\infty\big)$, **d)** inflexný bod $\sqrt{3}/9$, konvexná na $\big\langle\sqrt{3}/9;\infty\big)$, konkávna na $\big\langle 0;\sqrt{3}/9\big\rangle$, **e)** inflexný bod 0, konvexná na $(-\infty;0\rangle$, konkávna na $\langle 0;\infty)$, **f)** nemá inflexné body, konvexná na $\langle 0;\infty)$, **g)** nemá inflexné body, konkávna na $\langle -2;\infty)$, **h)** inflexné body $\frac{\pi}{2}+k\pi$, konvexná na $\big\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\big\rangle$, konkávna na $\big\langle\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\big\rangle$, $k\in Z$, **i)** nemá inflexné body, konvexná na R, **j)** nemá inflexné body, konvexná na $(0;\infty)$, konkávna na $(-\infty;0)$, **k)** nemá inflexné body, konvexná na $(0;\infty)$, **l)** inflexné body $k\pi$, konvexná na $\langle 2k\pi;\pi+2k\pi\rangle$, konkávna na $\langle\pi+2k\pi;2\pi+2k\pi\rangle$, $k\in Z$, **m)** nemá inflexné body, konvexná na $(-\infty;0)$, $(0;\infty)$, **n)** inflexný bod 0, konvexná na $(-\infty;-1)$, $\langle 0;1)$, konkávna na $(-1;0\rangle$, $(1;\infty)$, **o)** inflexné body $0,\pm\sqrt{3}$, konvexná na $\big(-\infty;-\sqrt{3}\big\rangle$, $\big\langle 0;\sqrt{3}\big\rangle$, konkávna na $\big\langle -\sqrt{3};0\big\rangle$, $\big\langle\sqrt{3};\infty\big)$, **p)** inflexné body $0,\pm 9$, konvexná na $(-\infty;-9\rangle$, $\langle 0;9\rangle$, konkávna na $\langle -9;0\rangle$, $\langle 9;\infty)$, **q)** nemá inflexné body, konkávna na $\langle 1;\infty)$, **r)** inflexný bod 4, konvexná na $\langle 4;\infty)$, konkávna na $(-\infty;4\rangle$, **s)** nemá inflexné body, konvexná na $\langle 1;\infty)$, **t)** nemá inflexné body, konvexná na $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1;\infty)$, **u)** nemá inflexné body, konvexná na $(-\infty;-9)$, $(9;\infty)$, **v)** inflexné body -2, 1, konvexná na $(-\infty;-2\rangle$, $\langle 1;\infty)$, konkávna na $\langle -2;1\rangle$. **4.3.36.** Pre všetky okrem $b\in\langle -\mathrm{e}/6;0\rangle$. **4.3.37. a)** $x=1$, $y=2$, **b)** $x=\pm 1$, $y=1$, **c)** $x=\pm 2$, $y=2$, **d)** $y=1$, **e)** $y=3x$, **f)** $x=\pm 1$, $y=x$, **g)** $x=0$, $y=2x$, **h)** $y=\pm 1/2$, **i)** $y=x$, **j)** $y=\pm\pi x/2-1$, **k)** $x=0$, $y=1$, **l)** $y=x+1/\mathrm{e}$, **m)** $y=12$, **n)** $x=0$, $y=13$, **o)** $x=0$, $yx+=13$, **p)** $x=\pm 1$, $y=0$. **4.3.42. a)** $y=2-x^2$, $x\in(2;5)$, **b)** $y=\sqrt{4x^2/9-4}$, $x\in\langle 3;\infty)$, **c)** $y=\sqrt{9-9x^2/16}$, $x\in\langle -4;4\rangle$, **d)** $y=9-9x/4$, $x\in\langle 0;4\rangle$. **4.3.43. a)** $t\in\langle 0;\infty)$, $y=2x+1$, $x\in\langle -1;\infty)$, **b)** $t\in R$, $y=2x+1$, $x\in R$, **c)** $t\in\langle 0;\infty)$, $y=2+3\sqrt{x-1}/2$, $x\in\langle 0;\infty)$, resp. $t\in(-\infty;0\rangle$, $y=2-3\sqrt{x-1/2}$, $x\in\langle 0;\infty)$, **d)** $t\in\langle -3/2+6k;3/2+6k\rangle$, $y=\sqrt{1-x^2/4}$, $x\in\langle -2;2\rangle$, resp. $t\in\langle 3/2+6k;9/2+6k\rangle$, $y=-\sqrt{1-x^2/4}$, $x\in\langle -2;2\rangle$, $k\in Z$, **e)** $t\in\langle 0+2k\pi;\pi+2k\pi\rangle$, $y=(1-\sqrt[3]{x^2})^(3/2)$, $x\in\langle -1;1\rangle$, resp. $t\in\langle\pi+2k\pi;2\pi+2k\pi\rangle$, $y=-(1-\sqrt[3]{x^2})^(3/2)$, $x\in\langle -1;1\rangle$, $k\in Z$, **f)** $t\in R$, $y=4(x-2)^2/9+1$, $x\in R$. **4.3.44. a)** elipsa $x^2+y^2/a^2=1$, $x\in\langle -1;1\rangle$, t. j. $y=\pm a\sqrt{1-x^2}$, $x\in\langle -1;1\rangle$, **b)** hviezdica $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2/a^2}=1$, $x\in\langle -1;1\rangle$, t. j. $y=\pm a(1-\sqrt[3]{x^2})^{3/2}$, $x\in\langle -1;1\rangle$, **c)** úsečka $y=a-ax$, $x\in\langle 0;1\rangle$, **d)** hviezdica $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2/a^2}=1$, $x\in\langle -1;1\rangle$, t. j. $y=\pm a(1-\sqrt[3]{x^2})^{3/2}$, $x\in\langle -1;1\rangle$. **4.3.45. a)** $x=at/(1+t^3)$, $y=at^2/(1+t^3)$, $t\in R$, **b)** $x=(1+t^2)/(1+t^3)$, $y=(t+t^3)/(1+t^3)$, $t\in R$, **c)** $x=(1+t^3)/(1+t^4)$, $y=(t+t^4)/(1+t^4)$, $t\in R$. **4.3.46. a)** $x=4t^3/3$, $y'=1/(4t)$, $t\in R-\{0\}$, **b)** $x=(1-t)/(1+t)$, $y'=-1$, $t\in R-\{-1\}$, **c)** $x=2\sin t/(1+2\cos t)$, $y'=-2\sin t/(2+\cos t)$, $t\in\big(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\big)$, **d)** $x=\arcsin(1+t^2)^{-1}$, $y'=-1$, $t\in R$, **e)** $x=t-\cos t$, $y'=\cos t/(1+\sin t)$, $t\in\langle 0;2\pi\rangle-\big\{\frac{3\pi}{2}\big\}$, **f)** $x=4\cos^3 t$, $y'=-\operatorname{tg} t$, $t\in\langle 0;\pi\rangle-\big\{\frac{\pi}{2}\big\}$, **g)** $x=\mathrm{e}^{2t}\cos^2 t$, $y'=(1-\cos 2t+\sin 2t)/(1+\cos 2t-\sin 2t)$, $t\in\big\langle 0;\frac{\pi}{2}\big)-\big\{\frac{\pi}{4}\big\}$, **h)** $x=2\cosh t$, $y'=2\operatorname{cotgh} t$, $t\in(0;\infty)$.

4.3.47. a) $x = 4t + t^2$, $y' = (1+3t^2)/2/(2+t)$, $y'' = (-1+12t+3t^2)/4/(2+t)^3$, $y''' = 3(9-4t-t^2)/8/(2+t)^5$, $t \in \langle 0\,;\infty)$, **b)** $x = \ln t$, $y' = 2t\cos 2t$, $y'' = t(2\cos 2t - 4t\sin 2t)$, $y''' = 2t(\cos 2t - 4t^2\cos 2t - 6t\sin 2t)$, $t \in (0\,;\infty)$, **c)** $x = 4\sin t$, $y' = -\operatorname{tg} t$, $y'' = -1/(4\cos^3 t)$, $y''' = -3\sin t/(16\cos^5 t)$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$, **d)** $x = 2\cos^3 t$, $y' = -\operatorname{tg} t$, $y'' = 1/(6\sin t\cos^4 t)$, $y''' = (5\cos 2t - 3)/(72\sin^3 t\cos^7 t)$, $t \in (0\,;\pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, **e)** $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y' = (\sin t - \cos t)/(\sin t + \cos t)$, $y'' = -2\,\mathrm{e}^t/(\sin t + \cos t)^3$, $y''' = -4\,\mathrm{e}^{2t}(\cos t - 2\sin t)/(\sin t + \cos t)^5$, $t \in R - \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in Z\right\}$, **f)** $x = \mathrm{e}^t$, $y' = \mathrm{e}^{-t}/\sqrt{1-t^2}$, $y'' = \mathrm{e}^{-2t}(-1+t+t^2)/\sqrt{(1-t^2)^3}$, $y''' = \mathrm{e}^{-3t}(3-3t-2t^2+3t^3+2t^4)/\sqrt{(1-t^2)^5}$, $t \in (-1\,;1)$. **4.3.48. a)** $d\colon y = x/4$, $n\colon y = -4x$ v bode $[0;0]$, $d\colon y = (2x-4)/3$, $n\colon y = (19-3x)/2$ v bode $[5;2]$, $d\colon y = (13x-76)/8$, $n\colon y = (226-8x)/13$ v bode $[12;10]$, $d\colon y = (14x-144)/5$, $n\colon y = (210-5x)/14$ v bode $[21;30]$, $d\colon y = (49x-752)/12$, $n\colon y = (3716-12x)/49$ v bode $[32;68]$, **b)** $d\colon y = (1+3x)/2$, $n\colon y = (8-2x)/3$ v bode $[1;2]$, $d\colon y = (5x+4)/4$, $n\colon y = (46-4x)/5$ v bode $[4;6]$, $d\colon y = (7x+9)/6$, $n\colon y = (138-6x)/7$ v bode $[9;12]$, $d\colon y = (9x+16)/8$, $n\colon y = (308-8x)/9$ v bode $[16;20]$, $d\colon y = (11x+25)/10$, $n\colon y = (580-10x)/11$ v bode $[25;30]$, **c)** $d\colon y = 2$, $n\colon x = -\pi$ v bode $[-\pi;2]$, $d\colon y = (4-\pi-2x)/2$, $n\colon y = (\pi+2x)/2$ v bode $[(2-\pi)/2;1]$, $d\colon x = 0$, $n\colon y = 0$ v bode $[0;0]$, $d\colon y = (4-\pi+2x)/2$, $n\colon y = (\pi-2x)/2$ v bode $[(\pi-2)/2;1]$, $d\colon y = 2$, $n\colon x = \pi$ v bode $[\pi;2]$, **d)** $d\colon x = 1$, $n\colon y = 0$ v bode $[1;0]$, $d\colon y = \sqrt{2} - x$, $n\colon y = x$ v bode $\left[\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\right]$, $d\colon y = 1$, $n\colon x = 0$ v bode $[0;1]$, $d\colon y = \sqrt{2} + x$, $n\colon y = -x$ v bode $\left[-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\right]$, $d\colon x = -1$, $n\colon y = 0$ v bode $[-1;0]$, **e)** $d\colon y = 0$, $n\colon x = 1$ v bode $[1;0]$, $d\colon y = 1/\sqrt{2} - x$, $n\colon y = x$ v bode $\left[\sqrt{2}/4;\sqrt{2}/4\right]$, $d\colon x = 0$, $n\colon y = 1$ v bode $[0;1]$, $d\colon y = 1/\sqrt{2} + x$, $n\colon y = -x$ v bode $\left[-\sqrt{2}/4;\sqrt{2}/4\right]$, $d\colon y = 0$, $n\colon x = -1$ v bode $[-1;0]$. **4.3.49. a)** $t = -1$, $x = -3$, $y = 2$, resp. $t = 1$, $x = 5$, $y = 2$, **b)** $\nexists$.

Register

$\exists$, 11
$\forall$, 10
$\nexists$, 13

a, 3
abeceda
grécka, 1
Abel, N. H., 146
alebo, 4
d'Alembert, J. B., 137
alternatíva, 4
vylučovacia, 15
amplitúda, 205
anuloid, 237
aproximácia funkcie
lokálna, 309
pomocou diferenciálu, 311
Archimedes, 124, 227
argument
komplexného čísla, 167
kosínusu hyperbolického, 203
kotangensu hyperbolického, 203
sínusu hyperbolického, 202
tangensu hyperbolického, 203
arkuskosínus, 199
arkuskotangens, 199
arkussínus, 199
arkustangens, 199
asteroida, 224
asymptota
grafu funkcie
bez smernice, 258
horizontálna, 259
so smernicou, 259
vertikálna, 258
hyperboly, 219
axióma, 6, 15
súvislosti, 56
axiómy
Hausdorffove, 73
okolí, 73
axiómy reálnych čísel, 44
o hornej hranici, 46
o najmenšom hornom ohraničení, 46
sčítania a násobenia, 44
usporiadania, 45

báza
topológie, 88
Bernoulli, Ja., 12
Bernoulli, Jo., 12
bijekcia, 33, 175
bod
asymptotický
logaritmickej špirály, 228
hraničný množiny, 75
hromadný množiny, 76, 77, 87
jednostranný, 76
ľavý, 76
obojstranný, 76
pravý, 76
inflexný funkcie, 183, 356
izolovaný množiny, 77
jednotkový, 56
koncový
krivky, 208
trajektórie pohybu, 208
nespojitosti funkcie, 278
asymptotickej, 279
neodstrániteľnej 1. druhu, 279
neodstrániteľnej 2. druhu, 279
odstrániteľnej, 278
nulový, 56
funkcie, 186

počiatočný
krivky, 208
trajektórie pohybu, 208
spojitosti funkcie, 278
stacionárny funkcie, 347
vnútorný množiny, 75, 87
vonkajší množiny, 75
Bolzano, B., 13
de Brahe, T., 12

Cantor, G., 13, 26
Cassini, G. D., 227
Cassiniova krivka, 227
Cauchy, A. L., 12
Cavalieri, B., 12
celá časť čísla, 58
charakteristika
okolia, 74, 169
chyba veličiny
absolútna, 313
pomerná, 313
relatívna, 313
cykloida, 222
obyčajná, 223
predĺžená, 223
skrátená, 223
číslo, 44
celé, 49
Eulerovo, 109
inverzné, 45
iracionálne, 49
jednotka, 45
kladné, 45
kombinačné, 25
komplexné, 165
goniometrický tvar, 167
imaginárna časť, 165
reálna časť, 165
rýdzo imaginárne, 165
komplexne združené, 166
Ludolfovo, 195
nekladné, 45
nezáporné, 45
nula, 44, 45
obrátené, 45
opačné, 44
prirodzené, 48
racionálne, 49
reálne, 44
záporné, 45
člen
postupnosti, 36, 90
explicitný tvar, 90
všeobecný tvar, 90
radu, 125

definícia, 5, 15
matematickou indukciou, 29
delenie
čísel, 48
deltoida, 235
derivácia funkcie
druhého rádu, 314
logaritmická, 303
na množine, 295
n-tého rádu, 314
nultého rádu, 314
prvého rádu, 314
v bode, 292
jednostranná, 294
nevlastná, 292
obojstranná, 294
sprava, 294
vlastná, 292
zľava, 294
vyššieho rádu, 314
Descartes, R., 12
Descartov list, 232
diagram
Vennov, 29
diameter množiny, 82, 87
diferenciál funkcie, 309
na množine, 309
n-tého rádu, 317
v bode, 309
Dirichlet, P. G. L., 12
disjunkcia výrokov, 4
dĺžka
intervalu, 55
vektora, 81
doplnok množiny, 28
dotyčnica ku grafu funkcie, 293
bez smernice, 294
so smernicou, 293

dôkaz, 16
  existenčný, 19
  konštruktívny, 20
  matematická indukcia, 17
  nepriamy, 16
    obrátená implikácia, 16
    sporom, 17
  priamy, 16
  sporom, 9
Dürer, A., 233
dvojlístok, 232

ekvivalencia
  množín, 37
  výrokov, 5
eliminácia parametra, 175
elipsa, 215
epicykloida, 224
  obyčajná, 225
  predĺžená, 225
  skrátená, 225
Euler, L., 12
excentricita
  elipsy
    číselná, 215
    lineárna, 215
  hyperboly
    číselná, 218
    lineárna, 218
exponenciála, 193
extrémy
  funkcie
    absolútne, 179, 350
    absolútne ostré, 179
    globálne, 179, 350
    globálne ostré, 179
    lokálne, 179, 346
    lokálne ostré, 179
  funkcie na množine, 179
    ostré, 179

faktoriál čísla, 23
de Fermat, P., 228
Fibonacci, L., 108
forma, 2
  menná, 2
  výroková, 2, 5

Fourier, J. B. J., 12
fraktál, 209
Freeth, T. J., 230
Freethova nefroida, 230
funkcia, 32, 173
  argument
    kosínusu hyperbolického, 203
    kotangensu hyperbolického, 203
    sínusu hyperbolického, 202
    tangensu hyperbolického, 203
  arkuskosínus, 199
  arkuskotangens, 199
  arkussínus, 199
  arkustangens, 199
  bijektívna, 175
  cyklometrická, 199
  definovaná
    explicitne, 175
    graficky, 177
    implicitne, 175
    parametricky, 175
    tabuľkou, 177
  diferencovateľná, 309
    na množine, 309
    rádu n, 317
    v bode, 309
  Dirichletova, 173
  elementárna, 191
  exponenciálna, 192
  goniometrická, 194
  hladká, 296
  hyperbolická, 200
  hyperbolometrická, 202
  injektívna, 174
  inverzná, 188, 190
  jednojednoznačná, 175
  klesajúca, 179
    na množine, 179, 343
    v bode, 179
  konštantná, 179, 191
    na množine, 179
  konkávna
    na intervale, 182, 352
  konkávna rýdzo
    na intervale, 182
    v bode, 182

konvexná
na intervale, 182, 352
konvexná rýdzo
na intervale, 182, 352
v bode, 182
kosínus, 195
kosínus hyperbolický, 200
kotangens, 195
kotangens hyperbolický, 200
kvadratická, 191
lineárna, 177, 191
logaritmická, 193
mocninná, 192
monotónna, 179
na množine, 343
ostro, 179
rýdzo, 179
na množinu, 174
neklesajúca, 179
na množine, 179, 343
v bode, 179
nekonečne malá, 257
nekonečne veľká, 257
neohraničená, 178
na množine, 178
zdola, 178
zhora, 178
nepárna, 181
nerastúca, 179
na množine, 179, 343
v bode, 179
nespojitá v bode, 274
asymptoticky, 279
nulová, 179, 191
ohraničená, 178
na množine, 178
zdola, 178
zhora, 178
párna, 181
periodická, 181
prostá, 174
prostá na množinu, 175
racionálna
celistvá, 191
lomená, 192
rádu o, 257
rádu O, 258
rastúca, 179
na množine, 179, 343
v bode, 179
reálnej premennej, 173
sínus, 195
sínus hyperbolický, 200
spojitá, 278
spojitá na množine, 278
po častiach, 280
rovnomerne, 282
spojitá v bode, 274
ekvivalentná definícia, 275
sprava, 277
v zmysle Heineho, 274
vzhľadom na množinu, 277
zľava, 277
surjektívna, 174
tangens, 195
tangens hyperbolický, 200
trigonometrická, 194
vnútorná, 187
vonkajšia, 187
zložená, 187

Gauss, K. F., 12
geometria
fraktálna, 208
goniometrický tvar
komplexného čísla, 167
graf funkcie, 174

Hamilton, W. R., 13
Hausdorff, F., 73
Heaviside, O., 278
Hilbert, D., 13
hodnota
absolútna, 60
funkcie, 187
absolútna komplexného čísla, 166
argumentu komplexného čísla, 167
hlavná, 167
funkčná, 32, 173
hromadná postupnosti, 92
nevlastná, 92
vlastná, 92
maximálna funkcie, 178

minimálna funkcie, 178
najmenšia funkcie, 178
najväčšia funkcie, 178
zobrazenia, 32
hodnota výroku
logická, 3
pravdivostná, 3
de l'Hospital, G. F. A., 12
hranica
množiny
dolná, 46
horná, 46
množiny, 75
hviezdica, 224
hyperbola, 192, 218
rovnoosá, 218
hypocykloida, 223
obyčajná, 223
predĺžená, 223
skrátená, 223

identita, 36
imaginárna jednotka, 165
implikácia výrokov, 4
index
násobiaci súčinu, 23
sčítací sumačný, 21
infimum
funkcie, 178
na množine, 178
množiny, 46
inflexia funkcie v bode, 183
injekcia, 33, 174
inklúzia množín, 26
interval, 55
degenerovaný, 55
nedegenerovaný, 55
neohraničený, 55
ohraničený, 55
otvorený, 55
periodicity, 182
polootvorený, 55
polouzavretý, 55
uzavretý, 55

jednolist, 232
jednoznačná riešiteľnosť rovníc, 47

kardioida, 226
Kepler, J., 12
von Koch, N. F. H., 209
koeficienty
polynómu, 191
kolmá strofoida, 231
komplement množiny, 28
kompozícia
zobrazení, 34
konchleoida, 230
konchoida, 229
konjunkcia výrokov, 3
konštanta, 1
kontraindikácia, 5
kontrapríklad, 20
Koperník, M., 12
koreň
funkcie, 186
kosínus, 195
kosínus hyperbolický, 200
kosínusoida, 195
kotangens, 195
kotangens hyperbolický, 200
kotangenta, 195
kritérium
konvergencie radov
Abelovo, 146
d'Alembertovo limitné, 137
d'Alembertovo podielové, 137
Cauchyho limitné, 138
Cauchyho odmocninové, 138
Dirichletovo, 148
Leibnizovo, 144
1. porovnávacie, 134
2. porovnávacie, 136
Raabeho, 140
Raabeho limitné, 141
krivka, 204
botanická, 233
Cassiniova, 227
čertova, 235
diablova, 235
dvojrohová, 234
elektromotorická, 235
exponenciálna, 193
kappa, 231

Lamého, 229
Lissajova, 236
logaritmická, 193
osmička, 229
otvorená, 208
Plateauova, 230
priestorová, 205
rovinná, 204
ruža, 233
spirická, 236
srdce, 233
Talbotova, 236
torpédová, 233
uzavretá, 208
v rovine R^2, 204
Wattova, 237
Kronecker, L., 13
kružnica, 210
kubika
Tschirnhausova, 231
kužeľosečka, 210
degenerovaná, 210
nedegenerovaná, 210
nevlastná, 210
vlastná, 210
kvantifikátor, 10
existenčný, 11
všeobecný, 10
kvartika
hrušková, 230
srdcová, 230

Lagrange, J. L., 12
Lamé, G., 229
Laplace, P. S., 12
Leibniz, G. W., 12
lema, 16
lemniskáta, 227
Bernouliiho, 207
Bernoulliho, 227
limes inferior
postupnosti, 93
limes superior
postupnosti, 93
limita
funkcie, 243
ekvivalentná definícia, 245
jednostranná, 254
nevlastná, 243
obojstranná, 254
sprava, 254
v nevlastnom bode, 243
v zmysle Heineho, 243
vlastná, 243
vo vlastnom bode, 243
vzhľadom na množinu, 253
zľava, 254
postupnosti, 94
dolná, 93
horná, 93
komplexných čísel, 170
nevlastná, 94
v metrickom priestore, 119
vlastná, 94
Lissajous, J. A., 236
list, 232
Descartov, 232
Dürerov, 233
dvojlístok, 232
dvojlist, 232
jednolist, 232
lístok, 232
trojlístok, 232
trojlist, 232
lístok, 232
logaritmus, 193
dekadický, 193
prirodzený, 193
logika, 1
matematická, 1
lomená časť čísla, 58

Maclaurin, C., 231, 337
Maclaurinov polynóm, 337
Maclaurinov trisektrix, 231
Maclaurinov vzorec, 337
Mandelbrot, B., 209
matematická indukcia, 17, 48
maximum
funkcie
absolútne, 179
globálne, 179
lokálne, 179, 371, 375
lokálne ostré, 179

na množine, 178
funkcie na množine
ostré, 179
množiny, 46
metóda
bisekcie, 60, 284
Cantorova diagonalizačná, 38
deduktívna, 6
polenia intervalu, 284
postupného delenia, 284
tabuľková, 6
metrika, 84
euklidovská, 82
triviálna, 84
minimum
funkcie
absolútne, 179
globálne, 179
lokálne, 179, 371, 375
lokálne ostré, 179
na množine, 178
funkcie na množine
ostré, 179
množiny, 46
množina, 26
celých čísel, 49
doplnková, 28
hodnôt postupnosti, 36
hromadných hodnôt postupnosti, 93
husto usporiadaná, 56
iracionálnych čísel, 49
izolovaná, 77
kompaktná, 99
v metrickom priestore, 120
komplementárna, 28
komplexných čísel, 44, 165
rozšírená, 168
konečná, 26
nekonečná, 26
nekonečne spočítateľná, 37
neohraničená, 46, 82, 87
nespočítateľná, 37
obojaká, 87
ohraničená, 46, 82, 87
zdola, 46
zhora, 45
otvorená, 77
v metrickom priestore, 87
v topologickom priestore, 87
potenčná, 27
prázdna, 27
prirodzených čísel, 26, 48
racionálnych čísel, 49
reálnych čísel, 44
rozšírená, 54
riešení, 68
súvislá, 56
spočítateľná, 37
usporiadaná, 45
uzavretá, 76
v metrickom priestore, 87
v topologickom priestore, 87
množiny
disjunktné, 27
doplnkové, 28
ekvivalentné, 37
komplementárne, 28
totožné, 27
mocnina
čísla
n-tá, $n \in N$, 62
r-tá, $r \in R$, 66
s-tá, $s \in Q$, 64
množiny, 70
mohutnosť
kontinua, 37
množín, 37
de Moivre, A., 169
monotónnosť
funkcie, 179
na množine, 179
násobenia a relácie $<$, 45
sčítania a relácie $<$, 45

nadmnožina, 26
násobenie
čísel, 44
násobok
radu číslom, 131
nefroida, 234
Freethova, 230
negácia
implikácie, 9

negácia výroku, 3
nekonečno, 54, 168
nepravda, 3
nerovnosť
  Bernoulliho, 25
  Cauchyho, 81, 86
  čísel, 45
  štvoruholníková, 82
  trojuholníková, 60, 82
Newton, I., 12
normála ku grafu funkcie, 294
norma
  euklidovská, 81
  priestoru, 85

obor
  definičný funkcie, 173
    maximálny, 174
    prirodzený, 174
  definičný zobrazenia, 32
  hodnôt funkcie, 173
  hodnôt zobrazenia, 32
  kvantifikácie, 11
  úvahy, 2
obraz
  množiny v zobrazení, 32
  zobrazenia, 32
odčítanie
  čísel, 48
odmocnina
  čísla
    n-tá, 63
ohnisko
  elipsy, 215
  hyperboly, 218
  paraboly, 211
ohraničenie
  množiny
    dolné, 46
    horné, 45
    najmenšie horné, 46
    najväčšie dolné, 46
okolie
  bodu, 72, 83, 87
    ľavé, 75
    ľavé prstencové, 75
    pravé, 75
    pravé prstencové, 75
    prstencové, 83
    relatívne, 75
    vzhľadom na množinu, 75
  bodu $-\infty$, 74
  bodu ∞, 74
  bodu nekonečno, 169
  čísla, 73
    prstencové, 74
    rýdze, 74
  komplexného čísla, 169
    prstencové, 169
operácia
  binárna, 43
  n-nárna, 43
  unárna, 43
operácia
  logická, 3
os, 174
  číselná, 56
  elipsy, 215
    hlavná, 215
    vedľajšia, 215
  hyperboly, 218
    imaginárna, 218
    reálna, 218
  imaginárna, 166
  paraboly, 211
  polárna, 205
  reálna, 56, 166
  súradnicová, 174
    polárna, 205
    x-ová, 174
    y-ová, 174
  x-ová, 174
  y-ová, 174
osmička, 229

parabola, 191, 211
  Newtonova divergentná, 231
parameter, 175
  elipsy, 216
  hyperboly, 218
  paraboly, 211
parametrizácia
  funkcie, 175
Pascal, B., 229

Pascalova závitnica, 229
Peano, G., 208
perióda funkcie, 181
    primitívna, 181
    základná, 181
perlovka
    Sluzeho, 231
Plateau, J. A. F., 230
počiatok
    špirály, 227
    súradnicového systému, 174, 205
    súradnicovej sústavy, 174, 205
podiel
    čísel, 48
    funkcií, 187
    postupností, 92
podmienka
    Cauchy–Bolzanova
        konvergencie radu, 130
        kovergencie postupnosti, 96
    existencie lokálneho extrému funkcie
        nutná, 346
        postačujúca, 347
    konvergencie radu
        nutná, 129
    nutná, 4, 5
    postačujúca, 4, 5
podmnožina, 26
podpostupnosť, 91
pól súradnicového systému (súradnicovej sústavy), 205
poldotyčnica ku grafu funkcie
    ľavá, 295
    pravá, 295
polomer
    kružnice, 210
    okolia, 74, 169
poloparameter
    paraboly, 211
polos
    elipsy, 215
        hlavná, 215
        vedľajšia, 215
    hyperboly, 218
        imaginárna, 218
        reálna, 218
        vedľajšia, 218
polynóm, 191
    Maclaurinov, 337
    Taylorov, 337
postupnosť, 36, 90
    bodov metrického priestoru, 119
    cauchyovská, 97, 120
    čiastočných súčtov radu, 125
    divergentná, 94
        do $\pm\infty$, 94
        komplexných čísel, 170
    divergentná do ∞
        komplexných čísel, 170
    Fibonacciho, 108
    fundamentálna, 97, 120
    geometrická, 107
    klesajúca, 91
    komplexných čísel, 170
    konštantná, 91
    konvergentná, 94
        komplexných čísel, 170
    monotónna, 91
        rýdzo, 91
    neklesajúca, 91
    neohraničená, 91
        zdola, 91
        zhora, 91
    nerastúca, 91
    nulová, 94
    ohraničená, 91
        zdola, 91
        zhora, 91
    oscilujúca, 94
    rastúca, 91
    reálna, 90
    reálnych čísel, 90
    stacionárna, 91
    vybraná, 91
    zadaná explicitne, 90
    zadaná rekurentne, 90
    zadaná všeobecným vzorcom, 90
postupnosti
    ekvivalentné, 97
poučka, 16
pravda, 3
pravidlo, 16

l'Hospitalovo, 327
I. l'Hospitalovo, 327
II. l'Hospitalovo, 328
odlúčenia, 6
modus ponens, 6
modus tollens, 6
substitúcie, 6
premenná, 1
nezávislá, 32, 173
závislá, 32, 173
prerovnanie
radu, 149
priamka
direkčná paraboly, 211
riadiaca paraboly, 211
priemer
množiny, 82, 87
prienik množín, 27
priestor
euklidovský, 80
lineárny, 84, 85
normovaný, 85
so skalárnym súčinom, 85
metrický, 84
úplný, 120
topologický, 87
indukovaný metrickým priestorom, 87
konečných doplnkov, 90
vektorový, 85
princíp
Archimedov, 57
Cantorov, 59
Cauchy–Bolzanov
konvergencie radu, 130
kovergencie postupnosti, 96
Dedekindov, 59
súvislosti, 56
prírastok funkcie, 311
produkt, 23
prvok
jednotkový, 45
maximálny, 46
minimálny, 46
množiny, 26
najmenší, 46
najväčší, 46
nulový, 44

Raabe, W., 140
rad
alternujúci, 144
anharmonický, 145
číselný, 125
divergentný, 126
do $\pm\infty$, 126
geometrický, 129
harmonický, 128
konvergentný, 126
absolútne, 142
neabsolútne, 142
relatívne, 142
nekonečný číselný, 125
oscilujúci, 126
prerovnaný, 149
Riemannov, 135
s nezápornými členmi, 133
so striedavými znamienkami, 144
zadaný explicitne, 125
zadaný rekurentne, 125
zadaný všeobecným vzorcom, 125
radián, 195
rádiusvektor, 205
relácia
binárna, 31
ekvivalencie, 31
na množine, 31
n-nárna, 31
usporiadanie, 45
reštrikcia
funkcie, 187
reťazovka, 236
rez v množine, 59
rhodonea, 233
Riemann, B., 13
Rolle, M., 319
rovina
Gaussova, 166
uzavretá, 168
komplexných čísel, 166
rovnosť
čísel, 44
funkcií, 34, 186
asymptotická, 258

na množine, 34
množín, 27
postupností, 90
usporiadaných dvojíc, 29
zobrazení, 34
na množine, 34
rozdiel
čísel, 48
funkcií, 187
množín, 28
postupností, 92
radov, 131
symetrický množín, 28
ruža, 233
ružica, 233

sčítanie
čísel, 44
serpentína, 231
signum čísla, 61
sínus, 195
sínus hyperbolický, 200
sínusoida, 195
skladanie funkcií, 187
skok funkcie, 279
de Sluze, R. F. W., 231
Sluzeho perlovka, 231
smernica
priamky, 177, 293
spojitosť
funkcie
jednostranná, 277
spojka
logická, 5
spor, 5
sprievodič bodu, 205, 211, 215, 218
ohniskový, 211
priamkový, 211
srdce, 233
srdcovka, 226
stereografická projekcia komplexných čísel, 168
stred
elipsy, 215
hyperboly, 218
kružnice, 210
Taylorovho polynómu, 337
strofoida, 231
kolmá, 231
stupeň
deväťdesiatinový, 195
polynómu, 191
substitúcia, 187, 251
súčet
čísel, 44
funkcií, 187
množín, 28, 70
postupností, 92
radov, 131
radu, 126
čiastočný, 125
určený indexovou množinou, 151
súčin
čísel, 44
funkcií, 187
karteziánsky množín, 29
množín, 70
postupností, 92
radov, 154
Cauchyho, 155
skalárny, 80, 85
suma, 21
dvojitá, 22
dvojnásobná, 22
suprémum
funkcie, 178
na množine, 178
množiny, 46
súradnica, 174
polárna, 205
x-ová, 174
y-ová, 174
súradnicová sústava
karteziánska pravouhlá, 174
polárna, 205
surjekcia, 33, 174
systém
karteziánskych súradníc, 174
množín, 27
okolí
bodov množiny, 72
bodu, 72
polárnych súradníc, 205
súradnicový, 174

karteziánsky, 174
polárny, 177, 205
pravouhlý, 174
špirála, 227, 229
Archimedova, 228
Fermatova, 228
hyperbolická, 229
logaritmická, 228
sínusová, 234
štruktúra
algebraická, 43
topologická, 72

tabuľka
pravdivostných hodnôt, 6
zadania funkcie, 177
Talbot, W. H. F., 236
tangens, 195
tangens hyperbolický, 200
tangenta, 195
tautológia, 5
Taylor, B., 337
Taylorov polynóm, 337
Taylorov vzorec, 337
topológia, 87
antidiskrétna, 88
diskrétna, 88
euklidovská, 88
indiskrétna, 88
trajektória
otvorená, 208
pohybu hmotného bodu, 208
uzavretá, 208
tranzítivnosť
relácie $<$, 45
trichotómia relácie $<$, 45
trisektrix
Maclaurinov, 231
trojlístok, 232
trojuholník
Pascalov, 25
von Tschirnhaus, E. W., 231
Tschirnhausova kubika, 231
tvrdenie, 16

uhol
orientovaný, 194
polárny bodu, 205
usporiadaná
dvojica, 29
n-tica, 29
trojica, 29
usporiadanie
čísel menší, 45
čísel väčší, 45
funkcií, 186
uzáver množiny, 76

vektor, 80, 85
jednotkový, 81
normovaný, 81
n-rozmerný, 80
veta, 16
Abelova, 159
binomická, 25
Bolzano–Weierstrasseho, 99
Cantorova, 282
Cauchyho, 324
Cauchyho o nulovej hodnote, 283
Lagrangeova, 320
matematická, 2
o derivácii inverznej funkcie, 300
o derivácii zloženej funkcie, 301
o existencii a jednoznačnosti diferenciálu, 309
o limite zloženej funkcie, 250
o logaritmickej derivácii, 303
o lokálnej ohraničenosti spojitej funkcie, 280
o medzihodnote, 285
o najlepšej lokálnej aproximácii funkcie polynómom stupňa n, 338
o najlepšej lokálnej lineárnej aproximácii funkcie, 311
o prírastku funkcie, 320
o spojitosti inverznej funkcie, 288
o spojitosti zloženej funkcie, 276
o strednej hodnote, 319
Cauchyho, 324
Lagrangeova, 320
Rolleho, 319
o zovretí, 106, 247, 276
Riemannova o prerovnaní radu, 149, 150
Rolleho, 319
Weierstrasseho, 281

vnútro
  množiny, 75
vonkajšok
  množiny, 75
vrchol
  elipsy, 215
    hlavný, 215
    vedľajší, 215
  hyperboly, 218
    hlavný, 218
    imaginárny, 218
    vedľajší, 218
  paraboly, 211
výraz, 1
  jednoduchý, 1
  neurčitý, 268
  zložený, 1
výrok, 2
  kvantifikovaný, 10
  nepravdivý, 2, 3
  pravdivý, 2, 3
  zložený, 3
vzdialenosť
  bodov, 84
  vektorov, 82
vzor
  zobrazenia, 32
vzorec
  Leibnizov, 315
  Maclaurinov, 337
  Moivreov, 168, 202
  pre argument
    dvojnásobný, 201
    polovičný, 201
  pre uhol
    dvojnásobný, 197
    polovičný, 197
  súčtový
    pre sin a cos, 169, 196
    pre sinh a cosh, 201
    pre tg a cotg, 198
    pre tgh a cotgh, 201
  Taylorov, 337

Watt, J., 237
Weierstrass, K., 13

začiatok
  špirály, 227
zákon, 5
  asociatívny, 8, 44
  distributívny, 9, 45
  dvojitej negácie, 7
  hypotetického sylogizmu, 7
  komutatívny, 8, 44
  sporu, 7
  transpozície, 7
  vylúčenia tretieho, 7
zákony
  de Morganove, 7, 14, 30, 41
závitnica
  Pascalova, 229
zjednotenie množín, 28
zloženie
  zobrazení, 34
zložka
  vnútorná
    zloženého zobrazenia, 34
    zloženej funkcie, 187
  vonkajšia
    zloženého zobrazenia, 34
    zloženej funkcie, 187
zlomok, 48
zobrazenie
  bijektívne, 33
  do množiny, 32
  identické, 36
  injektívne, 33
  inverzné, 35
  jednojednoznačné, 33
  množín, 32
  na množinu, 33
  prosté, 33
    na množinu, 33
  surjektívne, 33
  zložené, 34
zúženie
  funkcie, 187
zvyšok
  Cauchyho, 339, 340
  Lagrangeov, 339, 340
  Maclaurinovho vzorca
    Cauchyho tvar, 340

Lagrangeov tvar, 340

radu, 125

Taylorovho vzorca, 337
Cauchyho tvar, 339
Lagrangeov tvar, 339

Literatúra

[1] Bartsch H. J., *Matematické vzorce,* Praha, SNTL ALFA 1963.

[2] Bartsch H. J., *Matematické vzorce,* 3. revidované vydání, Praha, Mladá fronta 2000.

[3] Berman G. N., *Zbierka úloh z matematickej anylýzy,* Bratislava, ŠNTL 1955.

[4] Берман Г. Н., *Сборник задач по курсу математического анализа,* Москва, Издательство НАУКА 1964.

[5] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., *Matematická analýza I,* Praha, SNTL ALFA 1985.

[6] Bukovský L., *Štruktúra reálnej osi,* Bratislava, VEDA 1979.

[7] Под редакцией Демидовича Б. П., *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов,* издание пятое, Москва, Издательство НАУКА 1966.

[8] Демидович Б. П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу,* издание девятое), Москва, Издательство НАУКА 1977.

[9] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1. časť,* 3. vydanie, Bratislava, ALFA 1971.

[10] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 2. časť,* 3. vydanie, Bratislava, ALFA 1972.

[11] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 3. časť,* 1. vydanie, Bratislava, SVTL 1967.

[12] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., Šulka R., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 4. časť,* 1. vydanie, Bratislava, ALFA 1970.

[13] Franek M., *Od algebry k počítačom,* Bratislava, SPN 1971.

[14] Göhler W., Ralle B., *Lexikón vyššej matematiky,* Vzorce, Bratislava, ALFA 1992.

[15] Hejný M., kol., *Teória vyučovania matematiky 2,* Bratislava, SPN 1990.

[16] Hlaváček A., *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, I. díl,* 2. změněné vydání, Praha, SPN 1971.

[17] Hlaváček A., *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, II. díl,* 2. změněné vydání, Praha, SPN 1971.

[18] Holenda J., *Řady,* Matematika pro VŠT, sešit XII, Praha, SNTL 1990.

[19] Horák Z., Krupka F., Šindelář V., *Základy technické fysiky,* Praha, Práce 1954.

[20] Horský Z., *Diferenciální počet,* Matematika pro VŠT, sešit V, Praha, SNTL 1981.

[21] Hruša K., Kraemer E., Sedláček J., Vyšín J., Zelinka R., *Přehled elementární matematiky,* Praha, SNTL 1957.

[22] Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z., *Sbírka řešených příkladů z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1982.

[23] Kluvánek I., *Prípravka na diferenciálny a integrálny počet, I. časť,* skriptá VŠDS, Žilina, 1991.

[24] Kluvánek I., Mišík L., Švec M., *Matematika pre štúdium technických vied, I. diel,* Bratislava, SVTL 1959.

[25] Kluvánek I., Mišík L., Švec M., *Matematika pre štúdium technických vied, II. diel,* 2. prepracované vydanie, Bratislava, SVTL 1965.

[26] Kolář J., Štěpánková O., Chytil M., *Logika, algebry a grafy,* Praha, SNTL 1989.

[27] Kolektív autorov, *Zbierka riešených úloh z algebry pre SVŠ a SOŠ,* Bratislava, SPN 1970.

[28] Kolektiv autorů za redakce Nečase J., *Aplikovaná matematika I, A až L,* odborové encyklopedie, Praha, SNTL 1977.

[29] Kolektiv autorů za redakce Nečase J., *Aplikovaná matematika II, M až Ž,* odborové encyklopedie, Praha, SNTL 1978.

[30] Kufner A., *Nerovnosti a odhady,* Škola mladých matematiků, Praha, Mladá fronta 1975.

[31] Míka S., *Numerické metódy algebry,* Matematika pro VŠT, sešit IV, Praha, SNTL 1985.

[32] Mikola M., *Algebra,* 2. vydanie, skriptá ŽU, Žilina, 1998.

[33] Nekvinda M., Šrubař J., Vild J., *Úvod do numerické matematiky,* Praha, SNTL 1976.

[34] Okrucký V., *Elementárny úvod do modernej matematiky,* Bratislava, SPN 1971.

[35] Prágerová A., *Cvičení z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1987.

[36] Přikryl P., *Numerické metódy matematické analýzy,* Matematika pro VŠT, sešit XXIV, Praha, SNTL 1985.

[37] Sedláček J., *Co víme o přirozených číslech,* Škola mladých matematiků, Praha, Mladá fronta 1961.

[38] Sedláček J., *Faktoriály a kombinační čísla,* Škola mladých matematiků, Praha, Mladá fronta 1964.

[39] Šalát T., *Metrické priestory,* Bratislava, ALFA 1981.

[40] Šilov G. J., *Matematická analýza,* Bratislava, ALFA 1974.

[41] Škrášek J., Tichý Z., *Základy aplikované matematiky I,* Praha, SNTL 1989.

[42] Šulista M., *Základy analýzy v komplexním oboru,* Matematika pro VŠT, sešit XIII, Praha, SNTL 1981.

[43] Švec M., Šalát T., Neubrunn T., *Matematická analýza funkcií reálnej premennej,* Bratislava, ALFA SNTL 1987.

[44] Vitásek E., *Numerické metódy,* Praha, SNTL 1987.

[45] Výborný R., *Matematická indukce,* Škola mladých matematiků, Praha, Mladá fronta 1963.

[46] Запорочец Г. И., *Руководство к рещению задач по математическому анализу,* издание третье, Москва, Издательство ВЫСШАЯ ШКОЛА 1964.

[47] Drexel University, Math Forum, http://mathforum.org/.

[48] Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics, http://members.aol.com/jeff570/mathword.html.

[49] Elsevier Mathematics, http://www.elseviermathematics.com/mathematicsweb/show/Index.htt.

[50] EMIS, The European Mathematical Information Service, http://www.emis.de/.

[51] Encyklopédie des Formes Mathématiques Remarquables, http://www.mathcurve.com/.

[52] Excellent Matematika, http://matematika.host.sk/index2.htm.

[53] Geometry the online learning center, http://www.geometry.net/.

[54] Hinner M., *Jemný úvod do fraktálů,* http://www.penguin.cz/~mhi/math/Fraktaly/, 1999.

[55] On-line Mathematics Dictionary, http://pax.st.usm.edu/cmi/inform_html/glossary.html.

[56] The Math Forum, Internet Mathematics Library, http://mathforum.org/library/.

[57] Turnbull WWW Server, http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/.

[58] Turnbull, The MacTutor History of Mathematics archive, http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/.

[59] Wikipedia The free Encyclopedia, http://www.wikipedia.org/.

[60] World of mathematics, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/.