A1 - Základné pojmy (imaginárna jednotka, komplexné číslo [kč], reálna a imaginárna časť kč, komplexná rovina, komplexne združené kč a ich vlastnosti, absolútna hodnota kč jej základné vlastnosti, goniometrický tvar kč, argument kč - hodnota a hlavná hodnota, Riemannova guľa, nekonečno a operácie s nekonečnom, okolia, ...)

Pod **komplexným číslom** rozumieme číslo v tvare z = x + iy, kde i je imaginárne číslo pre ktoré platí i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1. Ak z = x +iy, tak potom x nazývame reálnou časťou komplexného čísla a označujeme ho x = Re z a y nazývame imaginárnou časťou a označujeme ho y = Im z.

Komplexne združené číslo ku komplexnému číslu z označujeme ako $\bar{z}$ definuje sa vztahom $\bar{z}$ = x – iy.

Absolútna hodnota komplexného čísla |z| sa označuje aj **modul** a platí $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

Argumentom komplexného čísla z !=0 rozumieme každé číslo ß ktoré spĺňa rovnosti:

cos ß = x/|z| = (Re z)/|z|

sin ß = y/|z| = (Im z)/|z|

Označujeme ho arg(z).

Hlavná hodnota argumentu ß leží iba v intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$, označuje sa Arg(z) , pre argument arg(z) potom všeobecne platí $\beta \in \langle -\pi, pi \rangle + 2.\mathrm{k}.\pi, k \in \mathbb{N}$

Ak z patri C – {0} tak

z = |z|*(cos ß + i sin ß). Toto vyjadrenie nazývame **goniometrický tvar**

A2 - Komplexné funkcie komplexnej premennej [kf] (definícia, D(f), H(f), funkčná hodnota, rozdiely oproti reálnej funkcii reálnej premennej, jednoznačnosť a mnohoznačnosť kf, jednoznačná vetva, príklady jednoznačných a mnohoznačných kf, jednotlivé zložky kf, ...)

Komplexná funkcia je funkcia, v ktorých sú aj nezávislá aj závislá premenná komplexné čísla. Presnejšie komplexná funkcia je funkcia, ktorej definičný obor omega je podmnožinou roviny komplexných čísel a taktiež aj obor hodnôt je podmnožinou rovny komplexných čísel.

Nezávislá ako aj závislá premenná ľubovolnej komplexnej funkcie môže byť rozdelená na reálnu a imaginárnu zložku nasledovne:

f(z) = u(x,y) + iv(x,y), kde u(x,y) a v(x,y) sú reálne funkcie a x,y patrí R.

u=u(x,y) a v=v(x,y) sú komponenty funkcie f(z)

a03. Limita komplexnej funkcie komplexnej premennej (definícia, hromadný bod, základné vlastnosti, vety na výpočet limity, limita zloženej funkcie, ...)

Nech ϵ>0

Množinu $O_\epsilon(z_0)=\{z \in \mathbb{C}; |z-z_0|<\epsilon\}$ nazývame ϵ okolie bodu z0.

Množinu $O_{\epsilon}^{0}(z_0)=\{z\in\mathbb{C}; 0<|z-z_0|<\epsilon\}$ nazývame prestencové ϵ okolie bodu z0.
Potom nech $A\subset\mathbb{C}, z_0\in\mathbb{C}$, bod z0 nazývame **hromadný bod** množiny A ak existuje také prstencové ϵ okolie bodu z0 , že $0_{\epsilon}^{0}(z_0)\cap A\neq\emptyset$.
Nech $f:A\to C$ je komplexná funkcia, $z_0\in\mathbb{C}$ je hromadný bod množiny A, potom číslo $w\in\mathbb{C}*¿$ je **limita funkcie** f v bode z0, ak pre každé ϵ>0 existuje ϑ>0 také, že ak $z\in O_{\vartheta}^{0}(z_0)\cap A$, tak $f(z)\in O_{\epsilon}(w)$. Označujeme $\lim_{z\to z_0} f(z)=w$.

a04. Spojitosť komplexnej funkcie komplexnej premennej (spojitosť v bode a na množine, základné vlastnosti, vety o spojitosti komplexnej funkcie, spojitosť zloženej funkcie, ...)

Nech $f:A\to C$ je komplexná funkcia, $z_0\in\mathbb{C}$ je hromadný bod množiny A,
potom funkcia je **spojitá** v bode z0 ak platí $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

a05. Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej (definícia, diferenciál, derivácia zloženej a inverznej funkcie, Cauchy-Riemannove podmienky, diferencovateľnosť, holomorfná (analytická) funkcia v bode a na otvorenej množine, ...)

Komplexná **derivácia** funkcie f sa nazýva nasledujúca limita:

$$f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

pričom funkcia musí byť holomorfná na otvorenej množine omega, podmnožine C a pre každý bod z0 z tejto množiny musí limita existovať.

Holomorfnosť funkcie f značí, že takáto funkcia je na otvorenej podmnožine C komplexne diferencovateľná – existuje jej rozvoj do Taylorovho radu a je nekonečne diferencovateľná.

Diferencovateľnosť pre funkcie viac premenných, teda aj pre komplexné funkcie (kedže každú vieme rozdeliť na komponenty u(x,y) a v(x,y)) nie je zaručená existenciou parciálnych derivácii u a v, preto tu jednoznačne neplatí pravidlo u funkcí jednej reálne premennej (funkcia je diferencovateľná v bode ak v tomto bode má deriváciu, resp na množine ak pre každý bod tejto množiny existujú derivácie).

Cauchy-Riemannove vztahy:

Nech u(x,y), v(x,y) sú funkcie diferencovateľné na $G \subset \mathbb{C}$, f funkcia definovaná na G, taká že Re f = u(x,y) a Im f = v(x,y). f je holomorfná práve vtedy, ak u(x,y), v(x,y) spĺňajú Cauchy-Riemannove vztahy

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y) \quad \text{a} \quad u'_y(x,y) = -v'_x(x,y).$$

Na základe Cauchy-Riemannových vzťahov pre deriváciu komplexnej funkcie f(z) = u(x,y) + iv(x,y) platí:

$$f'(z) = u'_x(x,y) + \mathrm{i}v'_x(x,y) \quad \text{resp.} \quad f'(z) = v'_y(x,y) - \mathrm{i}u'_y(x,y).$$

Analytickosť u komplexných funkcí značí že je funkcia v danom bode, resp na každom bode danej otvorenej množiny komplexne diferencovateľná (a teda holomorfná).
Meromorfná funkcia je taká, ktorá je komplexne diferencovateľná pre celú otvorenú množinu okrem niekoľkých izolovaných bodov (teda nie je holomorfná), kým analytická pre každý bod tejto množiny a teda je to holomorfná.

a06. Číselné rady (definícia číselného radu, n-tý čiastočný súčet radu, n-tý zvyšok radu, súčet radu, konvergencia a divergencia radu, oscilácia radu, nutná podmienka konvergencie radu, harmonický a geometrický rad, ...)

Nech $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ značí nejakú postupnosť reálnych čísel. Nekonečný rad rozumieme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots .$$

Jednotlivé čísla a_k sa nazývajú členmi tohoto radu.

Nech je daná nekonečná rada $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ súčtu tvaru $s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2, \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ldots$ sa nazýva postupnosť čiastočných súčtov radu. Súčet s_n sa nazýva n-tý čiastočný súčet radu. Ak vynecháme v rade prvých n členov dostávame rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots,$$

Ktorý nazývame n-tým zbytom radu a označujeme R_n.

Nech $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ značí postupnosť čiastočných súčtov radu.

1, Ak existuje konečná limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s,$ potom nazývame rad konvergentný a zapisujeme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$

2, ak $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \text{ nebo } -\infty,$ potom hovoríme že rad diverguje.

3, ak $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje potom hovorime že rad osciluje.

Najznámejším príkladom nekonečného radu je geometrický rad

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots \qquad (a \neq 0),$$

Kde číslo a je prvý člen radu a číslo q znamená kvocient radu. Pre súčet prvých n členov geometrickeho radu platí vztah

$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$$ pre q != 1

s_n = an pre q = 1

Potom podla definície súčtu radu platí:

a) je-li $q \geq 1$, pak $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$

b) je-li $-1 < q < 1$, pak $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$

c) je-li $q \leq -1$, pak $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

Harmonický rad je rad v tvare:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

a07. Základné pravidlá pre výpočet súčtov radov (súčet radu, ktorý vznikne zmenou konečného počtu členov, súčet radov {c.a_n}, {a_n+b_n}, {a_n-b_n}, vzťah medzi konvergentným radom a jeho postupnosťou čiastočných súčtov, 1.porovnávacie, D'Alembertove podielové, Cauchyho odmocninové, Raabeho kritérium a ich limitné tvary, ...)

Rad $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentý práve vtedy, keď postupnosť jeho čiastočných súčtov je zhora ohraničená.

Porovnávacie kritérium:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sú rady s kladnými členmi a nech pre všetky k >=1 platí $a_k \leq b_k$. Potom z konvergencie radu b_k plynie konvergencia radu a_k a z divergencie radu a_k plynie divergencia radu b_k.

D'Alembertove podielové kritérium:

Nech $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je rad s kladnými členmy a nech existuje konečná limita $L = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$.

Potom

a) je-li $L < 1$, daná řada konverguje,
b) je-li $L > 1$, daná řada diverguje,
c) je-li $L = 1$, nemůžeme o případné konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.

Cauchyho odmocninové kritérium:

Nech $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je rad s kladnými členmy a nech existuje konečná limita $L = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$.

Potom:

a) je-li $L < 1$, daná řada konverguje,
b) je-li $L > 1$, daná řada diverguje,
c) je-li $L = 1$, nemůžeme o případné konvergenci či divergenci podle tohoto kritéria rozhodnout.

Raabeho kritérium:

Nech $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je rad s kladnými členmy a nech existuje konečná limita

$$\lim_{n->\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

L=

Potom:
a, ak L<1 daný rad diverguje
b, ak L>1 daný rad konverguje
c, ak L=1 nemôžeme o prípadnej divergencii alebo konvergencii rozhodnúť pomocou tohoto pravidla.

a08. Rady so striedavými znamienkami a prerovnanie radov (absolútna a relatívna konvergencia radu, vzťah medzi absolútnou konvergenciou a konvergenciou radu, alternujúci rad, Leibnizovo kritérium pre alternujúci rad, prerovnaný rad, Riemannova veta o prerovnaní relatívne konvergentného radu, konštrukcia radu s konkrétnym súčtom, súčty radov SUM(1/n!), SUM((-1)^n/n!), SUM((-1)^n/n), SUM(1/n^2), ...)

Radom so striedavými znamienkami nazývame rad:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n,$$

Kde $a_n > 0$ pre n=1, 2,...,n.
Leibnizovo kritérium:
Nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vytvorená z členov radu so striedavými znamienkami je nerastúca. Potom rad konverguje vtedy a len vtedy ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Hovoríme že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, absolútne konverguje ak konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
Rad ktorý konverguje, ale nekonverguje absolútne nazývame relatívne konvergentným.

Nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, sa nazýva alternujúci práve vtedy keď platí:

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n \qquad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}.$$

Nech $\sum a_n$ je rad, $\{k_n\}$ permútacia množiny N (t.j. $\{k_n\}$ je prostá postupnosť prirodzených čísel, v ktorej sa každé prirodzené číslo vyskytuje). Potom hovoríme, že $\sum a_{k_n}$ vznikol prerovnaním radu $\sum a_n$

Riemannova veta:
Nech existuje $\sum a_n$ konverguje neabsolútne a nech $s \in \mathbb{R}$ je ľubovolné. Potom existuje také prerovnanie $\sum a_{k_n}$ radu $\sum a_n$, ž$\sum a_{k_n}$ = s a zároveň existujé také prerovnanie $\sum a_{p_n}$ radu $\sum a_n$, že $\sum a_{p_n}$ určite diverguje, a také prerovnanie $\sum a_{q_n}$ že $\sum a_{q_n}$ osciluje.

a09. Funkcionálne postupnosti (definícia a základné pojmy, bodová a rovnomerná konvergencia, veta o zámene limít, veta o spojitosti postupnosti spojitých funkcií, veta o limitnom prechode pri derivovaní, veta o limitnom prechode pri integrovaní, ...)

Funkcionálnou postupnosťou nazývame postupnosť, ktorej členy sú funkcie:

$$\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots\} = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

Nech členy funkcionálnej postupnosti sú definované na množine D. Hovoríme že funkcionálna postupnosť konverguje v čísle $x_0 \in D,$ ak číselná postupnosť $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Ak postupnosť konverguje v každom čísle $x \in I \subseteq D,$ potom hovoríme že postupnosť bodove konverguje na I. Limitnou funkciou, alebo limitou konvergentnej postupnosti nazývame funkciu f(x) definovanú na I vztahom $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$ Množinu I všetkých x, v ktorých postupnosť konverguje nazývame obor konvergencie postupnosti.

Hovoríme že postupnosť diverguje v čísle $x_0 \in D,$ ak číselná postupnosť $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje.

Hovoríme že postupnosť rovnomerne konverguje na množine I k funkcii f(x), ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje prirodzené číslo n_0 (závisí len od ε) také, že pre každé $n>n_0$ a každé $x \in I$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Postupnosť funkcií $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ktoré sú definované na množine S, je konvergentná v bode $a \in S$ vtedy a len vtedy, ak v tomto bode konverguje číselná postupnosť $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ t. j. ak platí $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = b$

Množinu všetkých bodov a, v ktorých funkcionálna postupnosť konverguje nazývame oborom konvergencie danej postupnosti.

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií a nech $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(\sum f_n(x) \rightrightarrows s(x))$ na intervale J, $x_0 \in J.$ Ak všetky $f_n(x)$ sú všetky spojité v bode x0 resp na intervale J, tak aj funkcia $f(x),\ (s(x))$ je spojitá v bode x0 resp. na intervale J.

Buď $\{f_n(x)\}$ postupnosť funkcií, ktoré majú na otvorenom intervale I deriváciu. Nech $\{f_n(x)\}$ konverguje na I a $\{f_n'(x)\}$ konverguje rovnomerne na I. potom funkcia $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ má na I deriváciu a platí $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ t.j.

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

a10. Funkcionálne rady (definícia a základné pojmy, čiastočný súčet, vzťah medzi funkcionálnymi postupnosťami a funkcionálnymi radmi, bodová a rovnomerná konvergencia, veta o spojitosti radu spojitých funkcií, ...)

Nech $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), ..\}$ je postupnosť funkcií, pričom každá z nich je definovaná v každom bode množiny S. Výraz $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ nazývame funkcionálnym radom.

$s_1(x) = f_1(x)$
$s_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$
$s_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$
....
$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x)$
....

Funkcie $s_1(x), s_2(x), \dots$ nazývame čiastocnými súčtami funcionálneho radu. Postupnosť funkcií $\{s_1(x), s_2(x), \dots, s_n(x), ..\}$ nazývame postupnosťou čiastočných súčtov funcionálneho radu. Konvergencia a divergencia funcionálneho radu súvisí s postupnosťou čiastočných súčtov.

Nech $a \in S$. Hovoríme, že funkcionálny rad konverguje(diverguje) v bode a, ak v tomto bode konverguje (diverguje) postupnosť čiastocných súčtov $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

Funkcionálny rad konverguje(diverguje) na množine $M \subset S$, ak konverguje (diverguje) v každom bode tejto množiny. T.j. ak v každom bode $x \in M$ existuje limita $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = s(x)$, potom túto limitnú funkciu nazývame súčtom funcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na množine M. Množinu M nazývame oborom konvergencie funkcionálneho radu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

a11. Funkcionálne rady (kritéria o rovnomernej konvergencii funkcionálnych radov, o majorantnom rade, veta o derivovaní funkcionálneho radu po členoch, veta o integrovaní funkcionálneho radu po členoch, ...)

Drichletovo kritérium

Nech $f_n(x)$ a $g_n(x)$ sú postupnosti funkcií, $M \subseteq \bigcap D(f_n) \cap \bigcap D(g_n)$. Nech postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum f_n(x)$ je rovnomerne ohraničená na M a postupnosť $g_n(x)$ je monotónna a $g_n \rightrightarrows 0$ na M potom rad $\sum g_n(x) f_n(x)$ konverguje rovnomerne na M.

Weistrassovo kritérium

Nech $f_n(x)$ je postupnosť funkcií $M \subseteq \bigcap D(f_n)$. Nech pre každé $M \subseteq \bigcap D(f_n)$. Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq a_n$. Ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak funkčný rad $\sum f_n(x)$ konverguje absolútne a rovnomerne na M.

Nech rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sú také, že $|a_n| \le b_n$ pre každé $n \in N^+$, (Je zrejmé, že $0 \le b_n$) Potom hovoríme že rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je majorantným radom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n << \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Takže vyplíva $\begin{array}{c} \sum_{n=1}^{\infty} a_n << \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ \hline konv. \Leftarrow konv. \\ diverg. \Rightarrow diverg. \end{array}$

a12. Mocninné rady (definícia a základné pojmy, polomer, stred a interval konvergencie, veta o konvergencii mocninného radu, Cauchy-Hadamardovo kritérium, podielové kritérium pre polomer konvergencie, ...)

Nech {an} je postupnosť, $x_0 \in \mathbb{R}$. Mocnitovým radom so stredom x_0 a koeficientami a_n nazývame funkčný rad v tvare

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Nech $\sum a_n x^n$ je mocninový rad a nech $a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$

Ak je a=0, rad konverguje pre každé $x \in \mathbb{R}$(hovoríme, že rad vždy konverguje)

Ak je $a = \infty,$ rad diverguje pre každe $x \in \mathbb{R}$, x != 0 (hovoríme že rad vždy diverguje).

Ak je $0 < a < \infty,$ rad absolútne konverguje pre $|x| < \frac{1}{a}$ a diverguje pre $|x| > \frac{1}{a}.$

Číslo $r = \frac{1}{a}$ nazývame polomer konvergencie a interval (-r,r) konvergenčný interval.

Cauchy-Hadamard:

Majme rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$ označme $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$ Potom:

1, ak $0 < \lambda < \infty,$ tak r = $\frac{1}{\lambda}$

2, ak $\lambda = 0,$ tak r = $\infty,$

3, ak $\lambda = \infty,$ tak r = 0.

a13. Mocninné rady (derivovanie a integrovanie mocninných radov po členoch a ich použitie pri výpočtoch, Taylorov rad, MacLaurinov rad, ...)

Ak platí že pre ľubovolné $x_0 \in (-R;R)$ konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ potom taktiež konverguje rad $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$. hovoríme že mocninový rad sa dá derivovať člen po člene. Taktiež platí že: $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n = \int_a^b a_0 \, \mathrm{d}x + \int_a^b a_1 x \, \mathrm{d}x + \ldots$ na ľubovolnom intervale $\langle a;b \rangle \subset (-R;R)$ a hovoríme že mocninový rad možno integrovať člen po člene.

Taylorov rad

Nech f(x) je funkcia, ktorá má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ derivácie všetkých rádov. Pod Taylorovým radom tejto funkcie v bode x_0 rozumieme mocninový rad

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

t. j. rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Ak je x_0=0 hovoríme o Maclaurinovom rade ktorý má tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Taylorovým zvyškom nazývame funkciu $R_n(x)$, pre ktorú platí:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1}(\xi) \quad \text{kde} \quad \xi \in J, \xi \neq x, x_0.$$

Nech funkcia f má v bode $x_0 \in \mathbb{R}$ derivácie všetkých rádov. Taylorov rad funkcie f v bode x_0 konverguje na nejakom intervale J obsahujúcom bod x_0 k funkcii f:
a, Práve vtedy ak pre postupnosť Taylorových zvyškov platí lim R_n=0 na J
b, Postupnosť derivácií $f^{(n)}$ je rovnomerne ohraničená na J.

a14. Trigonometrické rady (Fourierové koeficienty a Fourierov rad, vlastnosti Fourierovho radu, periodické predĺženie funkcie, ...)

Nech $\{\varphi_n\}$ je ortogonálna postupnosť funkcií na intervale <a, b>, $\{c_n\}$ postupnosť reálnych čísiel. Nech rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

Na intervale <a, b> rovnomerne konverguje k funkcii f. Potom pre hodnoty c_n platí

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

Nech $\{\varphi_n\}$ je ortogonálna postupnosť funkcií na intervale <a, b>. Čísla c_n dané vztahom :

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}.$$

nazývame Fourierove koeficienty funkcie f vzhľadom na ortogonálny systém $\{\varphi_n\}$ a rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

Kde c_n sú Fourierove koeficienty nazývame Fourierov rad funkcie f vzhľadom na ortogonálny systém $\{\varphi_n\}$

Fourierov rad ľubovoľnej funkcie integrovateľnej na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

Kde a_n, b_n, sú Fourierove koeficienty, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Nech f je funkcia definovaná na intervale $\langle a; a + L \rangle$. Periodickým predĺžením funkcie f pre interval $\langle a; a + L \rangle$ budeme nazývať funkciu f, pre ktorú platí:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to a+} f(t) + \lim\limits_{t\to (a+L)-} f(t)\right), & \text{pre } x = a, \\ \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to x+} f(t) + \lim\limits_{t\to x-} f(t)\right), & \text{pre } x \in (a; a+L), \\ \bar{f}(x+L), \quad \text{pre všetky } x. \end{cases}$$

a15. Trigonometrické rady (Párne a nepárne periodické predĺženie funkcie, sínusový a kosínusový trigonometrický rad, derivovanie a integrovanie Fourierových radov po členoch, ...)

Nech f je funkcia integrovateľná na $\langle 0, \pi\rangle$ $[(0, \pi\rangle]$. Ak pre $x \in \langle -\pi, 0)$ kladieme $f(x) = f(-x)[f(x) = -f(-x), f(0) = 0]$, tak povieme, že sme zostrojili párne (nepárne) rozšírenie funkcie f na interval $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Fourierov rad párneho(nepárneho) rozšírenia funkcie f nazývame kosínusovým (sínusovým) radom funkcie f na intervale $\langle 0, \pi\rangle$.
Trigonometrický rad v ktorom $b_n = 0$ pre všetky n=1,2,... nazývame kosínusový trigonometrický rad. Trigonometrický rad v ktorom $a_n = 0$ pre všetky n=0,1,2,.... nazývame sínusový trigonometrický rad.

Nech f je párna funkcia na intervale $\langle -\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\rangle$ potom pre koeficienty jej fourierovho radu pre interval $\langle -\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\rangle$ platí:

$$a_n = \frac{4}{L}\int\limits_0^{\frac{L}{2}} f(x)\cos\frac{2\pi n}{L}x\,\mathrm{d}x, \quad b_n = 0.$$

Nech F je nepárna funkcia na intervale $\langle -\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\rangle$ potom pre koeficienty jej Fourierovho radu pre interval $\langle -\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\rangle$ platí:

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{L}\int\limits_0^{\frac{L}{2}} f(x)\sin\frac{2\pi n}{L}x\,\mathrm{d}x.$$