Obsah

Kapitola 1

Integrál reálnej funkcie

1.1 Neurčitý integrál

Zavedenie pojmu derivácie sme motivovali úlohou určiť okamžitú rýchlosť hmotného bodu, ktorý sa pohybuje po priamke. Úlohu môžeme obrátiť a hľadať dráhu hmotného bodu za predpokladu, že poznáme jeho okamžitú rýchlosť v danom čase.

Príklad 1.1.1.
Uvažujme hmotný bod pohybujúci sa po súradnicovej osi x v kladnom smere rýchlosťou $v(t) = 2t + 2$, $t \in \langle 0\,;\,\infty)$, pričom v čase $t_0 = 0$ má polohu x_0.
Hľadáme funkciu, ktorá vyjadruje dráhu tohto bodu, t. j. hľadáme funkciu $x(t)$, $t \in \langle 0\,;\,\infty)$ tak, aby platilo $x'(t) = v(t) = 2t + 2$, $t \in \langle 0\,;\,\infty)$ a $x(t_0) = x(0) = x_0$.
Prvej podmienke vyhovuje každá funkcia $x(t) = t^2 + 2t + c$, $t \in \langle 0\,;\,\infty)$, kde $c \in R$ je ľubovoľné. Ešte musíme určiť $c \in R$ tak, aby $x(0) = x_0$. Platí $x_0 = x(0) = 0^2 + 2\cdot 0 + c = c$, t. j. $c = x_0$. Z toho vyplýva, že hľadanou funkciou je $x(t) = t^2 + 2t + x_0$, $t \in \langle 0\,;\,\infty)$. ■

Nech $I \subset R$ je otvorený interval. Hovoríme, že funkcia $F(x)$, $x \in I$ sa nazýva **primitívna fukcia k funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I**, ak pre všetky $x \in I$ existuje derivácia $F'(x)$ a pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 1.1.1.
Aj naďalej budeme uvažovať otvorený interval $I \subset R$.
Ak by bol interval I uzavretý, resp. otvorený iba na jednej strane, potom by sme v týchto krajných bodoch uvažovali jednostranné derivácie funkcie F.

Veta 1.1.1.
$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I, $c \in R$ (konštanta) $\Longrightarrow$
$G(x) = F(x) + c$ je primitívna k $f(x)$ na I.

Dôkaz.
$x \in I \;\Rightarrow\; G'(x) = \Big(F(x) + c\Big)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$. ■

Veta 1.1.2.
F, G sú primitívne k f na intervale $I \implies F-G$ je konštantná na I.

Dôkaz.
$x \in I \;\Rightarrow\; \big(F-G\big)'(x) = \Big(F(x)-G(x)\Big)' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$

$\xRightarrow{\text{ma1: veta 4.3.8 a)}}$ $F-G$ je konštantná na I. ∎

Ak I nie je interval, potom veta 1.1.2 neplatí. Dokazuje to nasledujúci príklad 1.1.2. Množinu I musíme rozdeliť na intervaly a na každom z nich už uvedená veta platí.

Príklad 1.1.2.
Označme $I_1=(-1\,;\,0)$, $I_2=(1\,;\,2)$, $I = I_1 \cup I_2$, $F(x)=x^3$, $x \in I$, $G(x)=\begin{cases} x^3, & x\in I_1, \\ x^3-1, & x \in I_2. \end{cases}$
Funkcie $F(x)$, $G(x)$ sú primitívne k funkcii $f(x) = 3x^2$, $x \in I$ na množine I.
Ich rozdiel nie je na I konštantná funkcia, pretože $\big(F-G\big)(x) = \begin{cases} 0, & x \in I_1, \\ 1, & x \in I_2. \end{cases}$
Reštrikcie $\big(F-G\big)(x) = 0$, $x \in I_1$, $\big(F-G\big)(x) = 1$, $x \in I_2$ sú konštantné funkcie. ∎

Poznámka 1.1.2.
*Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale I. Z definície primitívnej funkcie vyplýva, že **funkcia F je na intervale I spojitá** (ma1: veta 4.1.4).*

Z predchádzajúceho vyplýva, že všetky primitívne funkcie k danej funkcii $f(x)$, $x \in I$ na intervale I sa navzájom líšia o konštantu a tvoria množinu $\{F(x)+c\,;\, c \in R\}$, pričom $F(x)$, $x \in I$ je ľubovoľná z primitívnych fukcií k f. Táto množina sa nazýva **neurčitý integrál funkcie f na intervale I** a označuje sa:[1]

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \quad x \in I, \quad c \in R.$$

Na určenie neurčitého integrálu funkcie nám postačí jedna (ľubovoľná) primitívna funkcia. Proces hľadania primitívnej funkcie sa nazýva **integrovanie**. Zápis neurčitého integrálu funkcie f na intervale I je určený na začiatku **integračným znakom** $\int$ a na konci symbolom diferenciálu $\mathrm{d}x$.[2] Funkcia f sa nazýva **integračná funkcia** alebo **integrand**, x sa nazýva **integračná premenná** a c sa nazýva **integračná konštanta**. Interval I sa nazýva **definičný obor** (**obor definície**) **integrálu**. Ak nie je obor definície integrálu explicitne zadaný, potom pod oborom definície integrálu myslíme maximálny možný interval (resp. zjednotenie intervalov[3]), na ktorom integrál existuje.

Je zrejmé, že nie ku každej funkcii $f(x)$, $x \in I$ existuje na intervale I primitívna funkcia (príklad 1.1.3). Ako dokazuje veta 1.1.3, ak je funkcia f spojitá na intervale I, potom k nej primitívna funkcia existuje. Samozrejme existujú aj nespojité funkcie, ktoré majú primitívne funkcie (príklad 1.1.3).

Veta 1.1.3.
$f(x)$, $x \in I$ je spojitá na intervale $I \implies$ na I ku f existuje primitívna funkcia.

Dôkaz tejto vety je s doterajšími vedomosťami zložitý a vykonáme ho až neskôr, keď budeme poznať súvislosti medzi neurčitým a určitým integrálom (veta 1.2.27, str. 62).

[1] Symboly pre množinu sa vynechávajú a namiesto $\{F(x)+c\,;\,c \in R\}$ sa stručne píše $F(x)+c$, $c \in R$.
[2] Z uvedeného dôvodu nemusíme zložitejšie vyjadrenia funkcie $f(x)$ pri integrovaní dávať do zátvoriek, ale kvôli prehľadnosti sa to doporučuje.

Vzorec $[a\in R]$	Platnosť	Vzorec $[a\in R]$	Platnosť
$\int \mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + c,$	$x\in R$	$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,$	$a\neq -1,\ x\in R-\{0\}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + c,$	$x\in R-\{0\}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + c,$	$f(x)\neq 0,\ x\in D(f)$
$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c,$	$a>0,\ a\neq 1,\ x\in R$
$\int \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$	$\int \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotg} ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R,$ $x\neq \frac{k\pi}{a},\ k\in Z$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R,$ $x\neq \frac{(2k+1)\pi}{2a},\ k\in Z$
$\int \sinh ax\,\mathrm{d}x = \frac{\cosh ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$	$\int \cosh ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 ax} = -\frac{\operatorname{cotgh} ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R-\{0\}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{tgh} ax}{a} + c,$	$a\neq 0,\ x\in R$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c_1 = -\frac{1}{a}\operatorname{arccotg}\frac{x}{a} + c_2,$	$a\neq 0,\ x\in R$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c,$	$a\neq 0,\ x\in R-\{\pm a\}$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_1 = -\arccos\frac{x}{\lvert a\rvert} + c_2,$	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}},$	$a\neq 0,\ x\in(-\lvert a\rvert\,;\,\lvert a\rvert)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c,$	$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}},$	$a\neq 0,\ x\in(-\infty\,;\,-\lvert a\rvert)\cup(\lvert a\rvert\,;\,\infty)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c,$	$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}},$	$a\neq 0,\ x\in R$

Tabuľka 1.1.1: Neurčité integrály základných elementárnych funkcií

Príklad 1.1.3.

a) Funkcia $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x\in(-1\,;\,1)$ nemá na $(-1\,;\,1)$ primitívnu funkciu.
Pre $x\in(0\,;\,1)$ platí $f(x)=1$ a na intervale $(0\,;\,1)$ má f primitívnu funkciu $F(x) = x + c$, $c\in R$. Analogicky na $(-1\,;\,0)$ má f primitívnu funkciu $F(x) = -x + c$, $c\in R$.
Na intervale $(-1\,;\,1)$ je problém v bode $x=0$, pretože pokiaľ $F'(0)$ existuje, musí platiť $F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} F'(x) = -1$, $F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1$, t. j. $F'_-(0)\neq F'_+(0)$. To je spor.

b) Funkcia $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\},\ f(0) = 0$ je nespojitá v bode $x = 0$.
Ukážeme, že $F(x) = x^2\sin\frac{1}{x},\ x\in R-\{0\},\ F(0)=0$ je primitívnou funkciou k f na R.

$$x\neq 0 \ \Rightarrow\ F'(x) = \left[x^2\sin\tfrac{1}{x}\right]' = 2x\sin\tfrac{1}{x} - x^2\tfrac{1}{x^2}\cos\tfrac{1}{x} = 2x\sin\tfrac{1}{x} - \cos\tfrac{1}{x} = f(x).$$

$$x=0 \ \Rightarrow\ F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\tfrac{1}{x} = 0 = f(0).\ \blacksquare$$

V tabuľke 1.1.1 sú uvedené základné vzorce pre integrovanie. Tieto vzorce úzko súvisia so vzorcami pre derivácie elementárnych funkcií (ma1: tab. 4.1.1) a pre praktické potreby **je nevyhnutné si ich zapamätať**. Vzorce je potrebné chápať aj s oborom definície, ktorý musíme rozložiť na jednotlivé intervaly.[3] Platnosť týchto vzorcov dokážeme priamym derivovaním pravých strán.

Derivovanie a integrovanie sú inverzné operácie na intervale I. Pre všetky $x \in I$ platí:

$$\Big(\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big)' = \big(F(x)+c\big)' = f(x), \qquad \int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+c.$$

Príklad 1.1.4.

a) $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{[\sin x]'}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c,\ x \in R - \{k\pi\,;\ k \in Z\},\ c \in R.$

b) $\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c,\ x \geq 0,\ c \in R.$

c) $\int |x|\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c, & x \geq 0 \\ \int (-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + c, & x < 0 \end{array} \right\} \implies \int |x|\,\mathrm{d}x = \frac{x\,|x|}{2} + c,\ x \in R,\ c \in R.$ ■

1.1.1 Metódy integrovania

Integrovanie je vo všeobecnosti zložitý proces a niektoré (aj elementárne funkcie) nevieme integrovať bez použitia nekonečných funkcionálnych radov. Z vety 1.1.3 vyplýva, že **ku každej spojitej funkcii definovanej na intervale existuje na tomto intervale primitívna funkcia**. Problém je v tom, že nie všetky z týchto primitívnych funkcií vieme vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Na ich vyjadrenie potrebujeme spomínané nekonečné funkcionálne rady. Sú to napríklad integrály ($m \in N \cup \{0\}$, $n \in N$, $m+n \geq 2$):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}, \quad \int \frac{\mathrm{e}^{(\pm x^n)}}{x^m}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x^n)}{x^m}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\cos(x^n)}{x^m}\,\mathrm{d}x.$$

Základom integovania je rozklad integrandov na jednoduchšie funkcie (metóda rozkladu) a transformácia integrandov na iné, ľahšie integrovateľné funkcie (metóda per partes, substitučné metódy). Niekedy môžeme integrál dopredu odhadnúť a bez integrovania dopočítať neznáme parametre (metóda neurčitých koeficientov). Jednotlivé metódy môžeme navzájom kombinovať. Existujú aj tabuľky integrálov [28] a softvérové aplikácie na symbolické výpočty (`Maxima`, `Maple`, `Wolfram Mathematica`, ...), ktoré môžeme pri výpočte integrálov použiť. Ale aby sme tieto pomôcky mohli účinne využiť, musíme vedieť integrovať.

Veta 1.1.4 (Metóda rozkladu).
F, G sú primitívne funkcie k f, g na intervale I, $a, b \in I$, $|a| + |b| > 0 \implies$

[3] Napr. $\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$, $a \neq -1$, $x \in R - \{0\}$ predstavuje dva vzorce: jeden pre $x \in (-\infty\,;\,0)$ a druhý pre $x \in (0\,;\,\infty)$. Tieto vzorce sú rovnaké, líšiť sa môžu iba o konštantu.

$aF+bG$ je primitívna funkcia k funkcii $af+bg$ na intervale I a platí:

$$\int\Big(af(x)+bg(x)\Big)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x)+bG(x)+c,\quad x\in I,\ c\in R.$$

Dôkaz.
$x\in I \ \Rightarrow\ \Big(aF(x)+bG(x)\Big)' = aF'(x)+bG'(x) = af(x)+bg(x).$ ■

Poznámka 1.1.3.
Výraz $a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x$ *znamená množinu všetkých primitívnych funkcií, takže by sme mali správne písať* $a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = \{aF(x)+bG(x)+c\,;\,x\in I, c\in R\}$.
V tomto zmysle predstavuje $a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int\big[af(x)+bg(x)\big]\,\mathrm{d}x$ *rovnosť množín*

$$a\,\{F(x)+c_1\,;\,x\in I, c_1\in R\} + b\,\{G(x)+c_2\,;\,x\in I, c_2\in R\} = \\ = \{aF(x)+bG(x)+c\,;\,x\in I, c\in R\}\,.$$

V praxi chápeme $a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x = aF(x)+b\int g(x)\,\mathrm{d}x$ *ako súčet množín a zátvorky* $\{\}$ *nepíšeme. Na pravej strane integračnú konštantu priradenú k primitívnej funkcii* $F(x)$ *písať nemusíme, pretože je zahrnutá v symbole* $b\int g(x)\,\mathrm{d}x$*. Na konci výpočtu integrálu sa všetky integračné konštanty sčítajú do jednej výslednej (viď príklad 1.1.5).*

Príklad 1.1.5.
a) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\Big(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\Big)\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c,$[4]
$x\in R,\ x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z,\ c\in R.$

b) $\displaystyle\int\operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\Big(\frac{1}{\cos^2 x}-1\Big)\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + c,$
$x\in R,\ x\neq\frac{(2k+1)\pi}{2},\ k\in Z,\ c\in R.$

c) $\displaystyle\int\frac{(x-1)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{x^2-2x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int\Big(x-2+\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|+c,\ x\in R-\{0\},\ c\in R.$

d) $\displaystyle\int\Big(2\cos x + x^3 + \frac{3}{x^2+1}\Big)\,\mathrm{d}x = 2\sin x + \frac{x^4}{4} + 3\operatorname{arctg} x + c,\ x\in R,\ c\in R.$ ■

Veta 1.1.5 (Metóda per partes).
u, v majú spojité derivácie u', v' na intervale I $\Longrightarrow$

$$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x,\quad x\in I. \tag{1.1}$$

Dôkaz.
Zo spojitosti u', v' na I a z vety 1.1.3 vyplýva existencia $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ na I. Zvyšok vyplýva zo vzťahu $[uv]' = u'v+uv'$, t. j. $uv' = [uv]' - u'v$, $x\in I$. Platí:

$$x\in I \implies u(x)v'(x) = \big[u(x)v(x)\big]' - u'(x)v(x) \implies \\ \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int\big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$ ■

---
[4]Namiesto zápisu $\int\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ sa tiež používa $\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$.

Príklad 1.1.6.

a) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u\ = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v\ = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x =$

$= x\sin x + \cos x + c,\ x\in R,\ c\in R.$

b) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u\ = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v\ = x \end{array}\right] = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c,\ x\in(0\,;\,\infty),\ c\in R.$

c) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u' = 1 & u\ = x \\ v\ = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{0+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle = x\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + c,\ x\in R,\ c\in R.$ ■

Poznámka 1.1.4.

Vzorec (1.1) môžeme písať tiež v tvare

$$\int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x,\quad x\in I.$$

Nie každá voľba funkcií u, v musí viesť k cieľu, napr. v príklade 1.1.6 b):

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u' = x & u\ = \frac{x^2}{2} \\ v\ = \cos x & v' = -\sin x \end{array}\right] = \frac{x^2\cos x}{2} + \int \frac{x^2\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = \cdots .$$

Metódu per partes môžeme použiť viackrát za sebou, ale musíme si dať pozor, aby sme sa pri jej opätovnom použití nevrátili k pôvodnemu integrálu (príklad 1.1.7).

Príklad 1.1.7.

Vypočítajte neurčitý integrál $J = \displaystyle\int \cos 5x \sin 4x\,\mathrm{d}x.$

Riešenie.

$\displaystyle J = \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 5x & u\ = \frac{\sin 5x}{5} \\ v\ = \sin 4x & v' = 4\cos 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x \sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \sin 5x\cos 4x\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle = \left[\begin{array}{l|l} u' = \sin 5x & u\ = -\frac{\cos 5x}{5} \\ v\ = \cos 4x & v' = -4\sin 4x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x\sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\left[-\frac{\cos 5x\cos 4x}{5} - \frac{4}{5}\int \cos 5x\sin 4x\,\mathrm{d}x\right].$

Dostali sme rovnicu, v ktorej J považujeme za neznámy parameter:

$$J = \frac{\sin 5x\sin 4x}{5} + \frac{4\cos 5x\cos 4x}{25} + \frac{16}{25}J \implies J = \frac{5\sin 5x\sin 4x}{9} + \frac{4\cos 5x\cos 4x}{9} + c,\ \ x, c\in R.$$

Pri opačnej (t. j. nesprávnej) druhej voľbe funkcií u, v by sme dostali:

$\displaystyle = \left[\begin{array}{l|l} u' = \cos 4x & u\ = \frac{\sin 4x}{4} \\ v\ = \sin 5x & v' = 5\cos 5x \end{array}\right] = \frac{\sin 5x\sin 4x}{5} - \frac{4}{5}\left[\frac{\sin 5x\sin 4x}{4} - \frac{5}{4}\int \cos 5x\sin 4x\,\mathrm{d}x\right] = J.$

Iné riešenie.

Použijeme vzorec $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ (ma1: veta 3.1.9). Ak položíme $4 = \frac{\alpha-\beta}{2}$, $5 = \frac{\alpha+\beta}{2}$, potom $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = 5+4 = 9$, $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = 5-4 = 1$ a platí:

$$J = \int\left[\frac{\sin 9x}{2} - \frac{\sin x}{2}\right]\mathrm{d}x = \frac{-\cos 9x}{9\cdot 2} - \frac{-\cos x}{2} + c = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 9x}{18} + c,\ \ x\in R, c\in R.$$ ■

Príklad 1.1.8.

$$J_n = \int x^n \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u\ = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^x & v\ = \mathrm{e}^x \end{array} \right] = x^n \,\mathrm{e}^x - n\int x^{n-1} \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^n \,\mathrm{e}^x - nJ_{n-1},\ n\in N.$$

$$\Longrightarrow\ J_0 = \int x^0 \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x + c,\ x\in R,\ c\in R,$$

$$J_1 = x\,\mathrm{e}^x - J_0 = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c,\ x\in R,\ c\in R,$$

$$J_2 = x^2 \,\mathrm{e}^x - 2J_1 = x^2 \,\mathrm{e}^x - 2\big[x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\big] + c = x^2 \,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x + c,\ x\in R,\ c\in R,$$

$$J_3 = x^3 \,\mathrm{e}^x - 3J_2 = x^3 \,\mathrm{e}^x - 3x^2 \,\mathrm{e}^x + 6x\,\mathrm{e}^x - 6\,\mathrm{e}^x + c,\ x\in R,\ c\in R,\ \ldots . \ \blacksquare$$

V predchádzajúcom príklade sme vyjadrili integrál J_n **rekurentným vzťahom** pomocou J_{n-1}. Pre konkrétne $n\in N$ musíme tento vzťah použiť niekoľkokrát za sebou. Iné riešenie tohto integrálu pre $n = 3$ nájdeme v príklade 1.1.9 b).

Metóda per partes sa používa pomerne často a môžeme ju použiť pre mnohé druhy integrálov. Vhodná je napríklad pre integrovanie funkcií typov:

$$P(x)\,\mathrm{e}^{ax},\quad P(x)\cos ax,\quad P(x)\sin ax,\quad P(x)\ln Q(x),\quad P(x)\,\mathrm{arctg}\,Q(x),$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ sú reálne polynómy, $a\in R$, $a\neq 0$.

Vyššie uvedené funkcie môžeme samozrejme integrovať aj inými metódami. Uvedieme jednu z nich. V niektorých prípadoch môžeme neurčitý integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ odhadnúť[5] neurčitým výrazom $F(x, a_1, a_2, \ldots)$ s konečným počtom neznámych koeficientov $a_1, a_2, \ldots$. Mnohokrát nám typ hľadanej primitívnej funkcie naznačí už jedno alebo dve použitia metódy per partes. Pri určovaní koeficientov $a_1, a_2, \ldots$ nahradíme proces integrovania derivovaním výrazu $F(x, a_1, a_2, \ldots)$. Pre neznáme koeficienty $a_1, a_2, \ldots$ dostaneme systém algebraických rovníc. To znamená, že namiesto integrovania riešime sústavu rovníc (príklad 1.1.9). Táto metóda sa nazýva **metóda neurčitých koeficientov**.[6] Symbolicky to môžeme znázorniť nasledovne ($c\in R$ je integračná konštanta):

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x, a_1, a_2, \ldots) + c \ \Longrightarrow\ f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x, a_1, a_2, \ldots)}{\mathrm{d}x} = F'(x, a_1, a_2, \ldots).$$

Príklad 1.1.9.

a) $\displaystyle\int x^3 \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x + c,\ x\in R,\ c\in R,\ \ \alpha, \beta, \gamma\in R.$

Na pravej strane je odhad integrálu s neznámymi koeficientami $\alpha, \beta, \gamma\in R$. Po zderivovaní a delení nenulovou funkciou e^x dostaneme rovnosť dvoch polynómov:

$$\begin{aligned} x^3 \,\mathrm{e}^x &= (3x^2 + 2\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^x + (x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,\mathrm{e}^x \\ x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0 &= x^3 + (3+\alpha)x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma). \end{aligned}$$

Z poslednej rovnosti vyplývajú tri lineárne rovnice s tromi neznámymi α, β, γ:

$$x^2\colon\ 0 = 3 + \alpha,\quad x\colon\ 0 = 2\alpha + \beta,\quad x^0\colon\ 0 = \beta + \gamma \ \Rightarrow\ \alpha = -3,\quad \beta = 6,\quad \gamma = -6.$$

$$\Longrightarrow\ \int x^3 \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\,\mathrm{e}^x + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

[5] V príklade 1.1.8 to môže byť odhad $J_n = \mathrm{e}^x(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + c$, kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sú neznáme koeficienty, ktoré musíme vypočítať.

[6] V literatúre sa niekedy nazýva **Ostrogradského metóda**.

b) $\displaystyle\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\cos x + (\varepsilon x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu)\sin x + c.$
Postup je analogický ako v časti a). V odhade musí byť $\sin x$ a musí tam byť aj $\cos x$. Po zderivovaní dostaneme osem lineárnych rovníc s ôsmymi neznámymi $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \mu, \nu \in R$:[7]

$$\begin{aligned}
(1\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0)\sin x + (0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0)\cos x = x^3 \sin x = \\
= (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\cos x - (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\sin x + \\
+ (3\varepsilon x^2 + 2\varphi x + \mu)\sin x + (\varepsilon x^3 + \varphi x^2 + \mu x + \nu)\cos x = \\
= \big(-\alpha x^3 + (3\varepsilon - \beta)x^2 + (2\varphi - \gamma)x + (\mu - \delta)\big)\sin x + \\
+ \big(\varepsilon x^3 + (3\alpha + \varphi)x^2 + (2\beta + \mu)x + (\gamma + \nu)\big)\cos x.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rlrl}
x^3 \sin x\colon & 1 = -\alpha, & x^3 \cos x\colon & 0 = \varepsilon \\
x^2 \sin x\colon & 0 = 3\varepsilon - \beta, & x^2 \cos x\colon & 0 = 3\alpha + \varphi \\
x \sin x\colon & 0 = 2\varphi - \gamma, & x \cos x\colon & 0 = 2\beta + \mu \\
\sin x\colon & 0 = \mu - \delta, & \cos x\colon & 0 = \gamma + \nu
\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rr}
\alpha = -1, & \varepsilon = 0, \\
\beta = 0, & \varphi = 3, \\
\gamma = 6, & \mu = 0, \\
\delta = 0, & \nu = -6.
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x = (-x^3 + 6x)\cos x + (3x^2 - 6)\sin x + c,\ x \in R,\ c \in R. \blacksquare$$

Veta 1.1.6 (1. metóda substitúcie).
$F(x)$ je primitívna k $f(x)$ na intervale I, $x = \varphi(t)$ má na intervale J deriváciu, $\varphi(J) \subset I$
$\Longrightarrow$ $F\big(\varphi(t)\big)$ je primitívna funkcia k funkcii $f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$ na J a platí:

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c,\ \ t \in J, c \in R.$$

Dôkaz.
Pre všetky $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí (ma1: veta 4.1.7 o derivácii zloženej funkcie):

$$F'(x) = \Big[F\big(\varphi(t)\big)\Big]' = F'\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t).$$

To znamená, že $F\big(\varphi(t)\big)$ je primitívna k $f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$ na J a veta je dokázaná. $\blacksquare$

Veta 1.1.6 (ozn. **1. ms**) sa používa na výpočet integrálov $\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, pričom formálne nahradíme (použijeme **substitúciu**) $x = \varphi(t)$ a diferenciál $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi(t) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Vznikne $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, ktorý vypočítame, t. j. nájdeme primitívnu funkciu $F(x)$. Následne rovnakou substitúciou $x = \varphi(t)$ dostaneme hľadaný integrál, t. j. primitívnu funkciu $F\big(\varphi(t)\big)$. V praxi overujeme splnenie predpokladov vety väčšinou až na konci, po úspešnom integrovaní. Na rozdiel od 2. ms (veta 1.1.8) nepoužívame inverznú substitúciu.

Existenciu primitívnej funkcie, t. j. existenciu neurčitého integrálu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, nám zaručí napríklad spojitosť funkcie f (veta 1.1.3).

[7] Pri hlbšom preskúmaní metódy per partes v tomto integráli by sme mohli odhad zjednodušiť na tri neznáme koeficienty: $(-x^3 + \gamma x)\cos x + (\varphi x^2 + \nu)\sin x + c$, $\gamma, \varphi, \nu \in R$.

Príklad 1.1.10.

a) $\displaystyle\int \sin^3 t \cos t \, \mathrm{d}t = \left[\begin{matrix} x = \sin t, \ \mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t \\ t \in R, \ x \in \langle -1\,;\, 1\rangle \end{matrix} \right] = \int x^3 \, \mathrm{d}x = \tfrac{x^{3+1}}{3+1} + c = \tfrac{\sin^4 t}{4} + c,\ x \in R,\ c \in R.$
Podmienky vety 1.1.6 sú splnené: $f(x) = x^3$ je spojitá na R, $x = \varphi(t) = \sin t\colon\ R \to \langle -1\,;\, 1\rangle$ má spojitú deriváciu $\varphi'(t) = \cos t$ na R, $\varphi(R) = \langle -1\,;\, 1\rangle \subset R$.

b) $\displaystyle\int \tfrac{x^3 \, \mathrm{d}x}{x^8+1} = \left[\begin{matrix} t = x^4, \quad x \in R \\ 4x^3 \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t, \ t \in R \end{matrix} \right] = \tfrac{1}{4} \int \tfrac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \tfrac{1}{4} \operatorname{arctg} t + c = \tfrac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + c,\ x \in R,\ c \in R.$

c) $\displaystyle\int \tfrac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \left[\begin{matrix} t = f(x) \\ \mathrm{d}t = f'(x) \, \mathrm{d}x \end{matrix} \right] = \int \tfrac{\mathrm{d}t}{t} = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c,\ x \in D(f),\ c \in R.$[8] ■

Príklad 1.1.11.
Ak k funkcii f existuje na intervale I primitívna funkcia F, potom pre $a, b \in R$, $a \neq 0$ platí:

$$\int f(ax+b) \, \mathrm{d}x = \left[\begin{matrix} t = ax+b \\ \mathrm{d}t = a \, \mathrm{d}x \end{matrix} \right] = \int \tfrac{f(t) \, \mathrm{d}t}{a} = \tfrac{F(t)}{a} + c = \tfrac{F(ax+b)}{a} + c, \ \ x \in I, \ \ c \in R.$$

Ak α, β sú hranice intervalu I, potom $a\alpha + b$, $a\beta + b$ sú hranice intervalu J $(t \in J)$. ■

Pri dôkaze vety 1.1.8 budeme potrebovať nasledujúce tvrdenie.

Lema 1.1.7.
$x = \varphi(t)\colon\ J \to I$, I, J sú intervaly, $\varphi'(t) \neq 0$, $t \in J$
$\Longrightarrow$ $\forall t \in J\colon\ \varphi'(t) > 0$ (φ je rastúca na I), resp. $\varphi'(t) < 0$ (φ je klesajúca na I).

Dôkaz.
φ má na I deriváciu, t. j. (ma1: veta 4.1.4) φ je spojitá na I .
Tvrdenie lemy dokážeme sporom. Nech $t_1, t_2 \in J$, $t_1 \neq t_2$, $\varphi'(t_1) > 0$, $\varphi'(t_2) < 0$.
$\xRightarrow{\text{ma1: veta 4.3.9}}$ φ rastie v bode t_1 a klesá v bode t_2. To znamená, že existuje bod $t_0 \in J$ ležiaci medzi t_1, t_2, v ktorom má φ extrém, t. j. $\varphi'(t_0) = 0$. To je spor. ■

Veta 1.1.8 (2. metóda substitúcie).
$x = \varphi(t)\colon\ J \to I$, $\varphi'(t) \neq 0$ pre všetky $t \in J$, $G(t)$ je primitívna k $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ na intervale J
$\Longrightarrow$ $G\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitívna funkcia k $f(x)$ na intervale I a platí:

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t = G(t) + c = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + c, \ \ x \in I, c \in R.$$

Dôkaz.
Funkcia $\varphi\colon\ J \to I$ je rýdzo monotónna (rastúca alebo klesajúca — lema 1.1.7). To znamená, že je prostá (ma1: veta 3.3.13) a existuje $t = \varphi^{-1}(x)\colon\ I \to J$.
Pre $x \in I$, $x = \varphi(t)$, $t \in J$ platí (ma1: vety 4.1.6 a 4.1.7):

$$\Big[G\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big]' = G'\big(\varphi^{-1}(x)\big)\big[\varphi^{-1}(x)\big]' = G'(t)\big[\varphi^{-1}(x)\big]' =$$
$$= f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\tfrac{1}{\varphi'(t)} = f\big(\varphi(t)\big) = f(x).$$

To znamená, že $G\big(\varphi^{-1}(x)\big)$ je primitívna k $f(x)$ na I a veta je dokázaná. ■

[8] V príklade 1.1.10 v častiach b), c) sú premenné x a t navzájom vymenené vzhľadom na vetu 1.1.6.

Použitie vety 1.1.8 (ozn. **2. ms**) je podobné ako použitie vety 1.1.6. Veta sa používa na výpočet integrálov $\int f(x)\,dx$. Pomocou substitúcie $x=\varphi(t)$ zostrojíme $\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$, ktorý vypočítame, t. j. nájdeme primitívnu funkciu $G(t)$. Potom použijeme **inverznú substitúciu** $t=\varphi^{-1}(x)$ a dostaneme primitívnu funkciu $G\big(\varphi^{-1}(x)\big)$. Aj v tomto prípade overujeme splnenie predpokladov vety väčšinou až po úspešnom integrovaní.

Príklad 1.1.12.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\begin{array}{c} x=\sin t,\ t=\arcsin x,\quad (\sin t)'=\cos t\neq 0,\quad x\in(-1\,;\,1),\quad t\in\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right) \\ dx=\cos t\,dt,\qquad \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t\end{array}\right]=$$
$$=\int\frac{\cos t\,dt}{\cos t}=\int dt=t+c=\arcsin x+c,\ x\in(-1\,;\,1),\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\begin{array}{c} x=\cos t,\quad t=\arccos x,\quad (\cos t)'=-\sin t\neq 0,\quad x\in(-1\,;\,1),\quad t\in(0\,;\,\pi) \\ dx=-\sin t\,dt,\qquad \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t\end{array}\right]=$$
$$=\int\frac{-\sin t\,dt}{\sin t}=-\int dt=-t+c=-\arccos x+c,\ x\in(-1\,;\,1),\ c\in R.\ \blacksquare$$

Poznámka 1.1.5.

Obe riešenia príkladu 1.1.12 sú správne, pretože (ma1: veta 3.1.11) pre všetky $x\in\langle -1\,;\,1\rangle$ platí $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, t. j. $\arcsin x=-\arccos x+\frac{\pi}{2}$. To znamená, že obidve primitívne funkcie sa na intervale $(-1\,;\,1)$ líšia iba o konštantu $\frac{\pi}{2}$.

Pri integrovaní sa často rôzne metódy kombinujú, pričom ich niekedy treba použiť aj viackrát za sebou. Ak použijeme pri integrovaní rôzne postupy, môžeme dospieť „k zdanlivo rôznym výsledkom“. Ale zdanie klame. Pokiaľ sme sa nepomýlili, **výsledky musia byť rovnaké**! Môžu byť vyjadrené v rôznych tvaroch a líšiť sa môžu iba o integračnú konštantu. O správnosti sa presvedčíme napríklad spätným derivovaním výsledku.

Príklad 1.1.13.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}=\left[\begin{array}{c} e^x=t,\quad x=\ln t,\quad dx=\frac{dt}{t},\quad e^{2x}=t^2 \\ (\ln t)'=\frac{1}{t}\neq 0,\quad x\in(-\infty\,;\,\infty),\quad t\in(0\,;\,\infty)\end{array}\right]=\int\frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}=$$
$$=\left[\begin{array}{c} t=\frac{1}{u},\quad u=\frac{1}{t},\quad dt=-\frac{du}{u^2},\quad \left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\neq 0,\quad t\in(0\,;\,\infty),\quad u\in(0\,;\,\infty) \\ \sqrt{t^2+t+1}=\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}=\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u},\quad \sqrt{1+u+u^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\end{array}\right]=$$
$$=\int\frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\frac{\sqrt{1+u+u^2}}{u}}=\int\frac{-du}{\sqrt{1+u+u^2}}=\int\frac{-du}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}}=\left[\begin{array}{c} u+\frac{1}{2}=v,\quad 1+u+u^2=v^2+\frac{3}{4} \\ du=dv,\quad u\in(0\,;\,\infty),\quad v\in\left(\frac{1}{2}\,;\,\infty\right)\end{array}\right]=$$
$$=-\int\frac{dv}{\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}}=-\ln\left(v+\sqrt{v^2+\frac{3}{4}}\right)+c_1=-\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{1+u+u^2}\right)+c_1=$$
$$=-\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}\right)+c_1=-\ln\frac{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}{2t}+c_1=\ln\frac{2t}{2+t+2\sqrt{t^2+t+1}}+c_1=$$
$$=\ln 2+\ln t-\ln\left(2+t+2\sqrt{t^2+t+1}\right)+c_1=\left[\,c_1\in R,\ c=c_1+\ln 2,\ c\in R\,\right]=$$
$$=x-\ln\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)+c,\ x\in R,\ c\in R.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.14.

a) $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\left[\begin{array}{c} t=\ln x,\quad x\in(0\,;\,\infty) \\ dt=\frac{dx}{x},\quad t\in(-\infty\,;\,\infty)\end{array}\right]=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{\ln^2 x}{2}+c,\ x\in(0\,;\,\infty),\ c\in R.$

b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u\ = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v\ = \sin x \end{array}\right] = \sin x \cos x + \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle = \tfrac{1}{2}\sin 2x + \int (1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\sin 2x + x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x \implies$

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{2}\sin 2x + x\big) + c = \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{x}{2} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

a) $\displaystyle\int \tfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u\ = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x} & v\ = \ln x \end{array}\right] = \ln^2 x - \int \tfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \ \Rightarrow\ \int \tfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{\ln^2 x}{2} + c,\ x>0,\ c\in R.$

b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{cc} 2x = t, & 2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x\in R, & t\in R \end{array}\right] =$

$$= \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{4}\int \cos t\,\mathrm{d}t = \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{4}\sin t + c = \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{4}\sin 2x + c,\ x\in R,\ c\in R.\ \blacksquare$$

Ak pripustíme neexistenciu funkcie f alebo jej derivácie f' v konečnom počte bodov daného intervalu I, potom môžeme pojem primitívnej funkcie na I zovšeobecniť.

Funkcia $F(x)$, $x\in I$ sa nazýva **zovšeobecnená primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, $x\in I$ na intervale I**, ak je spojitá na I a pre všetky $x\in I$ okrem konečného počtu existuje derivácia $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 1.1.6.
Interval I nemusí byť otvorený.
Primitívna funkcia je zároveň aj zovšeobecnenou primitívnou funkciou.
Ak $F(x)$, $x\in I$ je zovšeobecnená primitívna funkcia k $f(x)$ na I, $c\in R$ (konštanta), potom $G(x) = F(x) + c$, $x\in I$ je zovšeobecnená primitívna funkcia k $f(x)$ na I (veta 1.1.1).
Ak F, G sú zovšeobecnené primitívne funkcie k f na I, potom $F-G$ je konštantná funkcia na I (veta 1.1.2).
Dá sa tiež dokázať, že každá na intervale I po častiach spojitá funkcia f má na tomto intervale zovšeobecnenú primitívnu funkciu (viď veta 1.2.27 a jej dôsledky).

Príklad 1.1.15.
Heavisideova[9] jednotková funkcia $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 1, & x\geq 0 \end{cases}$ nemá na R primitívnu funkciu.

Dokážeme nepriamo. Predpokladajme, že funkcia F je primitívnou k f na R.

$$\left.\begin{array}{l} x<0 \ \Rightarrow\ F'(x) = f(x) = 0 \ \Rightarrow\ F'_-(0) = 0 \\ x\geq 0 \ \Rightarrow\ F'(x) = f(x) = 1 \ \Rightarrow\ F'_+(0) = 1 \end{array}\right\} \implies F'(0) \text{ neexistuje.}$$

To znamená, že funkcia f nemá primitívnu funkciu na R.
Funkcia f má na intervale $(-\infty\,;0)$ primitívnu funkciu $F(x) = c_1$, $c_1\in R$ a na $(0\,;\infty)$ má primitívnu funkciu $F(x) = x + c_2$, $c_2\in R$. Ak položíme $c = c_1 = c_2$, potom funkcia

$$F(x) = \begin{cases} c, & x<0, \\ x+c, & x\geq 0, \end{cases} \quad \text{t. j. } F(x) = \tfrac{x+|x|}{2} + c,\ x\in R$$

bude pre každé $c\in R$ zovšeobecnenou primitívnou funkciou k funkcii f na R. $\blacksquare$

---
[9] *Oliver Heaviside* [1850–1925] — anglický matematik, fyzik a elektrotechnik.

1.1.2 Integrovanie racionálnych funkcií

Integrovanie polynómu $f_n(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \cdots + a_nx^n$ stupňa n, $n \in N \cup \{0\}$, $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in R$, $a_n \neq 0$, je triviálne:

$$\int \big(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\big)\,\mathrm{d}x = a_0x + \tfrac{a_1x^2}{2} + \tfrac{a_2x^3}{3} + \cdots + \tfrac{a_nx^{n+1}}{n+1} + c,\ c \in R.$$

Integrovanie racionálnej lomenej funkcie $f(x) = \frac{f_k(x)}{f_n(x)}$, kde $f_k(x)$, $f_n(x)$ sú polynómy stupňov k, n, je pomerne jednoduchá, aj keď v mnohých prípadoch prácna záležitosť.

Vo väčšine prípadov musíme funkciu f najprv upraviť na jednoduchší, ľahšie integrovateľný tvar. Tieto úpravy sú algebraickej povahy a nesúvisia s vlastným integrovaním, preto nasledujúce úvahy a tvrdenia uvádzame bez dôkazov (viď napr. [4, 7, 20]).

Každú racionálnu nerýdzo lomenú funkciu $f(x) = \frac{f_k(x)}{f_n(x)}$, $k, n \in N \cup \{0\}$, $k \geq n$ môžeme rozložiť na súčet $f(x) = f_{k-n}(x) + \frac{f_m(x)}{f_n(x)}$, t. j. $f_k(x) = f_{k-n}(x)f_n(x) + f_m(x)$, pričom $f_{k-n}(x)$, $f_m(x)$ sú polynómy stupňov $k-n$ a $m < n$. Uvedený rozklad získame delením polynómu $f_k(x)$ polynómom $f_n(x)$. Polynóm $f_m(x)$ predstavuje zvyšok tohto delenia.

V ďalších úvahách sa obmedzíme na vyšetrovanie racionálnej rýdzo lomenej funkcie a jej rozklad na parciálne zlomky, ktoré vieme integrovať (príklad 1.1.16). **Parciálnym** (**čiastočným**) **zlomkom** nazývame každú funkciu v tvare:

$$\tfrac{a}{(x-b)^n}, \quad \text{resp.} \quad \tfrac{px+q}{(x^2+rx+s)^n},\ \ a, b, p, q, r, s \in R,\ a \neq 0,\ |p| + |q| \neq 0, r^2 - 4s < 0,\ n \in N.$$

Kvadratický člen $x^2 + rx + s$ nemá reálne korene, ale dva komplexne združené korene.

Zo základnej vety algebry a jej dôsledkov pre reálne polynómy vyplýva, že každý polynóm $f_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ stupňa $n \in N$ s reálnymi koeficientami $a_0, a_2, \ldots, a_n \in R$ sa dá nad poľom komplexných čísel rozložiť na súčin:

$$f_n(x) = a_n\big[(x - b_1)(x - \overline{b_1})\big]^{n_1} \cdots \big[(x - b_k)(x - \overline{b_k})\big]^{n_k} \cdot (x - b_{k+1})^{n_{k+1}} \cdots (x - b_t)^{n_t},$$

pričom $b_1, b_2, \ldots, b_k \in C$ (nie reálne), $b_{k+1}, \ldots, b_t \in R$ sú jeho $n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}, \ldots, n_k$-násobné korene a platí $2(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) + n_{k+1} + \cdots + n_t = n$. Ak má $f_n(x)$ komplexný koreň $b = u + \mathrm{i}\,v$, $u, v \in R$, potom má aj komplexne združený koreň $\overline{b} = u - \mathrm{i}\,v$ a platí:

$$(x - b)(x - \overline{b}) = (x - u - \mathrm{i}\,v)(x - u + \mathrm{i}\,v) = (x - u)^2 + v^2 = x^2 - 2ux + u^2 + v^2.$$

To znamená, že nad poľom reálnych čísel majú koreňové činitele tvar $x - b$ pre $b \in R$, resp. $x^2 + rx + s$, $r = 2u$, $s = u^2 + v^2$, t. j. $r^2 - 4s < 0$, pre $b = u + \mathrm{i}\,v \in C$, $v \neq 0$.

Pri hľadaní rozkladu funkcie $\frac{f_m(x)}{f_n(x)}$, $m < n$ na parciálne zlomky môžeme predpokladať, že polynómy $f_n(x)$, $f_m(x)$ nemajú spoločné korene.[10] Platí nasledujúca veta.

Veta 1.1.9.
$f_n(x)$, $f_m(x)$ sú reálne polynómy stupňov $m < n$, $b_1, b_2, \ldots, b_k \in C$ ($b_i = u_i + \mathrm{i}\,v_i$, $v_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$), $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_t \in R$ sú $n_1, \ldots, n_k$, $n_{k+1}, \ldots, n_l$-násobné korene $f_n(x)$

[10] Predpokladajme, že $b \in C$ je koreňom $f_n(x)$ a aj $f_m(x)$. Ak označíme $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{x-b}$, $g_m(x) = \frac{f_m(x)}{x-b}$, potom $\frac{f_m(x)}{f_n(x)} = \frac{g_m(x)}{g_n(x)}$. Tento postup opakujeme, dokiaľ majú čitateľ a menovateľ spoločné korene.

$\Longrightarrow\ \exists!\ \alpha_{1,1},\beta_{1,1},\ \alpha_{1,2},\beta_{1,2},\ \ldots,\ \alpha_{1,n_1},\beta_{1,n_1},\ \alpha_{2,1},\beta_{2,1},\ \alpha_{2,2},\beta_{2,2},\ \ldots,\ \alpha_{2,n_1},\beta_{2,n_2},\ \ldots,$ $\alpha_{k,1},\beta_{k,1},\ \alpha_{k,2},\beta_{k,2},\ \ldots,\ \alpha_{k,n_1},\beta_{k,n_k},\ \gamma_{k+1,1},\ \gamma_{k+1,2},\ \ldots,\ \gamma_{k+1,n_{k+1}},\ \gamma_{k+2,1},\ \gamma_{k+2,2},\ \ldots,$ $\gamma_{k+2,n_{k+2}},\ \ldots,\ \gamma_{l,1},\ \gamma_{l,2},\ \ldots,\ \gamma_{l,n_l}\in R$:

$$\begin{aligned}
\frac{f_n(x)}{f_m(x)} = {} & \frac{\alpha_{1,1}x+\beta_{1,1}}{(x-u_1)^2+v_1^2}+\frac{\alpha_{1,2}x+\beta_{1,2}}{[(x-u_1)^2+v_1^2]^2}+\cdots+\frac{\alpha_{1,n_1}x+\beta_{1,n_1}}{[(x-u_1)^2+v_1]^{n_1}}+\\
& +\frac{\alpha_{2,1}x+\beta_{2,1}}{(x-u_2)^2+v_2^2}+\frac{\alpha_{2,2}x+\beta_{2,2}}{[(x-u_2)^2+v_2^2]^2}+\cdots+\frac{\alpha_{2,n_2}x+\beta_{2,n_2}}{[(x-u_2)^2+v_2]^{n_2}}+\\
& +\cdots\cdots+\\
& +\frac{\alpha_{k,1}x+\beta_{k,1}}{(x-u_k)^2+v_k^2}+\frac{\alpha_{k,2}x+\beta_{k,2}}{[(x-u_k)^2+v_k^2]^2}+\cdots+\frac{\alpha_{k,n_k}x+\beta_{k,n_k}}{[(x-u_k)^2+v_k]^{n_k}}+\\
& +\frac{\gamma_{k+1,1}}{x-b_{k+1}}+\frac{\gamma_{k+1,2}}{(x-b_{k+1})^2}+\cdots+\frac{\gamma_{k+1,n_{k+1}}}{(x-b_{k+1})^{n_{k+1}}}+\\
& +\frac{\gamma_{k+2,1}}{x-b_{k+2}}+\frac{\gamma_{k+2,2}}{(x-b_{k+2})^2}+\cdots+\frac{\gamma_{k+2,n_{k+2}}}{(x-b_{k+2})^{n_{k+2}}}+\\
& +\cdots\cdots+\\
& +\frac{\gamma_{l,1}}{x-b_l}+\frac{\gamma_{l,2}}{(x-b_l)^2}+\cdots+\frac{\gamma_{l,n_l}}{(x-b_l)^{n_l}}.
\end{aligned}$$

Čísla $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, resp. $\gamma_{i,j}$ z predchádzajúcej vety určíme napríklad metódou neurčitých koeficientov[11] (príklad 1.1.19).

Príklad 1.1.16.
Nech $b,q,r,s\in R$, $r^2-4s<0$, $n\in N$. Vypočítajte $\int\frac{dx}{(x-b)^n}$, $\int\frac{(x+\frac{r}{2})\,dx}{(x^2+rx+s)^n}$, $\int\frac{dx}{(x^2+rx+s)^n}$.

Riešenie.

$$I_n=\int\frac{dx}{(x-b)^n}=\left[\begin{array}{c|c} x-b=t & x\in(-\infty\,;\,b)\Leftrightarrow t\in(-\infty\,;\,0)\\ dx=dt & x\in(b\,;\,\infty)\Leftrightarrow t\in(0\,;\,\infty)\end{array}\right]=\int\frac{dt}{t^n}\ \Longrightarrow$$

$$I_1=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|x-b|+c,$$

$$I_n=\int t^{-n}\,dt=\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+c=\frac{1}{(1-n)(x-b)^{n-1}}+c,\ n=2,3,4,\ldots,\ x\in R-\{b\},\ c\in R.$$

Označme $\varphi^2=s-\frac{r^2}{4}=\frac{4s-r^2}{4}>0$, potom $x^2+rx+s=(x+\frac{r}{2})^2+s-\frac{r^2}{4}=(x+\frac{r}{2})^2+\varphi^2$.

$$\begin{aligned}
J_n &= \int\frac{(x+\frac{r}{2})\,dx}{(x^2+rx+s)^n}=\int\frac{(x+\frac{r}{2})\,dx}{[(x+\frac{r}{2})^2+\varphi^2]^n}=\\
&= \left[\begin{array}{c|c} t=(x+\frac{r}{2})^2+\varphi^2=x^2+rx+s & x\in(-\infty\,;\,-\frac{r}{2}\rangle\Rightarrow t\in\langle\varphi^2\,;\,\infty)\\ dt=2(x+\frac{r}{2})\,dx & x\in\langle-\frac{r}{2}\,;\,\infty)\Rightarrow t\in\langle\varphi^2\,;\,\infty)\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^n}\ \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$J_1=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+c=\frac{1}{2}\ln t+c=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+rx+s\right)+c,$$

$$J_n=\frac{1}{2}\int t^{-n}\,dt=\frac{t^{-n+1}}{2(-n+1)}+c=\frac{1}{2(1-n)(x^2+rx+s)^{n-1}}+c,\ n=2,3,4,\ldots,\ x\in R,\ c\in R.$$

$$\begin{aligned}
K_n &= \int\frac{dx}{(x^2+rx+s)^n}=\int\frac{dx}{[(x+\frac{r}{2})^2+\varphi^2]^n}=\left[\begin{array}{cc} t=x+\frac{r}{2}, & x\in R\\ dt=dx, & t\in R\end{array}\right]=\int\frac{dt}{(t^2+\varphi^2)^n}=\frac{1}{\varphi^2}\int\frac{\varphi^2\,dt}{(t^2+\varphi^2)^n}=\\
&= \frac{1}{\varphi^2}\int\frac{t^2+\varphi^2-t^2}{(t^2+\varphi^2)^n}\,dt=\frac{1}{\varphi^2}\left(\int\frac{dt}{(t^2+\varphi^2)^{n-1}}-\int\frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+\varphi^2)^n}\right)=
\end{aligned}$$

[11] Túto metódu sme už použili pri integrovaní na strane 9.

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = t & u' = 1 \\ v' = \frac{t}{(t^2+\varphi^2)^n} = t(t^2+\varphi^2)^{-n} & v = \frac{(t^2+\varphi^2)^{1-n}}{2(1-n)} = \frac{1}{2(1-n)(t^2+\varphi^2)^{n-1}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\varphi^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+\varphi^2)^{n-1}} - \frac{t}{2(1-n)(t^2+\varphi^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{(t^2+\varphi^2)^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi^2}\left(\frac{3-2n}{2(1-n)}\int \frac{dt}{(t^2+\varphi^2)^{n-1}} - \frac{t}{2(1-n)(t^2+\varphi^2)^{n-1}}\right) = \frac{(3-2n)K_{n-1}}{2\varphi^2(1-n)} - \frac{t}{2\varphi^2(1-n)(t^2+\varphi^2)^{n-1}} \implies$$

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2+\varphi^2} = \frac{1}{\varphi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\varphi} + c = \frac{1}{\sqrt{s-\frac{r^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{r}{2}}{\sqrt{s-\frac{r^2}{4}}} + c,$$

$$K_n = \frac{3-2n}{2(s-\frac{r^2}{4})(1-n)} K_{n-1} - \frac{x+\frac{r}{2}}{2(s-\frac{r^2}{4})(1-n)(x^2+rx+s)^{n-1}}, \ n = 2,3,4,\dots, \ x\in R, \ c\in R. \ \blacksquare$$

Pomocou príkladu 1.1.16 môžeme vypočítať integrál každého parciálneho zlomku. Platí:

$$\int \frac{a\,dx}{(x-b)^n} = a\int \frac{dx}{(x-b)^n}, \qquad \int \frac{(px+q)\,dx}{(x^2+rx+s)^n} = p\int \frac{(x+\frac{r}{2})\,dx}{(x^2+rx+s)^n} + \left(q - \frac{pr}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+rx+s)^n}.$$

Príklad 1.1.17.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^2} & v = -\frac{1}{x^2+a^2} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{x^2+a^2} + \int \frac{dx}{x^2+a^2}\right) =$

$$= -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)} + c, \ x\in R, \ c\in R \text{ pre všetky } a > 0.$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2-x^2)\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} =$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{x}{2(x^2+a^2)}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + c, \ x\in R, \ c\in R \text{ pre všetky } a > 0. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.18.

Vypočítajte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$.

Riešenie.

Pomocou príkladu 1.1.16. Dosadíme hodnoty $n = 2$, $p = 2$, $q = 3$, $r = 2$, $s = 3$:

$$\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = 2\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = 2J_2 + K_2 =$$

$$= \frac{2}{2(1-2)(x^2+2x+3)^{2-1}} + \frac{3-2\cdot 2}{2(3-\frac{2^2}{4})(1-2)} K_1 - \frac{x+\frac{2}{2}}{2(3-\frac{2^2}{4})(1-2)(x^2+2x+3)^{2-1}} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4}K_1 + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} = \frac{1}{4}K_1 + \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{3-\frac{2^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{2}{2}}{\sqrt{3-\frac{2^2}{4}}} + \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} + c = \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} + c, \ x\in R, \ c\in R.$$

Iné riešenie.

Priamy výpočet. Použijeme 1. ms a výsledky príkladu 1.1.17 b). Pre $x\in R$ platí:

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \left[\begin{array}{c} t = x^2+2x+3 \\ dt = (2x+2)\,dx \\ x\in R, \ t\in(0;\infty) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} z = x+1, \quad dz = dx \\ x^2+2x+3 = z^2+2 \\ x\in R, \quad z\in R \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^2} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{z}{2(\sqrt{2})^2(z^2+2)} + c =$$

$$= \frac{-1}{x^2+2x+3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + c = \frac{x-3}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c, \ c\in R. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.19.
Vypočítajte: a) $\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$, b) $\int \frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.
a) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x-1)^2(x^2+1)$ a platí:

$$\begin{array}{l}
(x^6-\ x^5+\ x^4-\ x^3 \qquad +\ x+1):(x^4-2x^3+2x^2-2x+1)=x^2+x+1,\\
\underline{-(x^6-2x^5+2x^4-2x^3+\ x^2\ )} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{zvyšok } x^3-x^2+2x.\\
\qquad x^5-\ x^4+\ x^3-\ x^2+\ x+1\\
\qquad \underline{-\ (x^5-2x^4+2x^3-2x^2+\ x\ )}\\
\qquad\qquad x^4-\ x^3+\ x^2 \qquad +1\\
\qquad\qquad \underline{-\ (x^4-2x^3+2x^2-2x+1)}\\
\qquad\qquad\qquad x^3-\ x^2+2x
\end{array}$$

Pre rozklad zvyšku na parciálne zlomky platí: $\frac{x^3-x^2+2x}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}$, kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ sú neznáme. Po vynásobení výrazom $(x-1)^2(x^2+1)$ dostaneme:

$$\begin{aligned}
x^3-x^2+2x+0&=\alpha(x-1)(x^2+1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x-1)^2=\\
&=\alpha(x^3-x^2+x-1)+\beta(x^2+1)+(\gamma x+\delta)(x^2-2x+1)=\\
&=(\alpha+\gamma)x^3+(-\alpha+\beta+\delta-2\gamma)x^2+(\alpha-2\delta+\gamma)x+(-\alpha+\beta+\delta).
\end{aligned}$$

Z toho vyplývajú 4 lineárne rovnice pre neznáme $\alpha,\beta,\gamma,\delta$:

$$x^3\colon 1=\alpha+\gamma,\quad x^2\colon -1=-\alpha+\beta+\delta-2\gamma,\quad x\colon 2=\alpha+\gamma-2\delta,\quad x^0\colon 0=-\alpha+\beta+\delta.$$

Ich riešením je štvorica $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$, $\gamma=\frac{1}{2}$, $\delta=-\frac{1}{2}$.
Pre ľahšie integrovanie najprv upravíme $\frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}=\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}=\frac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$. Potom platí:

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x&=\int\Big(x^2+x+1+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\Big)\,\mathrm{d}x=\\
&=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\big(x^2+1\big)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c,\ x\neq 1,\ c\in R.
\end{aligned}$$

b) $\frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}=\frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+2x+1)}=\frac{-2x^3+1}{x^2(x+1)^2}=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{x+1}+\frac{\delta}{(x+1)^2}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R \implies$

$$\begin{aligned}
-2x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+1&=\alpha x(x+1)^2+\beta(x+1)^2+\gamma x^2(x+1)+\delta x^2=\\
&=(\alpha+\gamma)x^3+(2\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^2+(\alpha+2\beta)x+\beta.
\end{aligned}$$

Dostaneme 4 lineárne rovnice: $-2=\alpha+\gamma$, $0=2\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $0=\alpha+2\beta$, $1=\beta$, ktorých riešením je štvorica $\beta=1$, $\alpha=-2$, $\gamma=0$, $\delta=3$. Potom pre $x\in R-\{0,-1\}$ platí:

$$\int\frac{-2x^3+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\Big(-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{(x+1)^2}\Big)\,\mathrm{d}x=-2\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{3}{x+1}+c,\quad c\in R.\ \blacksquare$$

1.1.3 Integrovanie iracionálnych funkcií

S integrovaním iracionálnych funkcií sú väčšinou problémy a často sa nezaobídeme bez nekonečných radov. Existujú ale skupiny iracionálnych funkcií, ktoré dokážeme integrovať relatívne bez problémov. Väčšinou ich vhodným spôsobom (najčastejšie substitúciou) prevedieme na integrály racionálnych funkcií. Hovoríme, že **integrál zracionalizujeme**.

- **Integrály typu** $\int f\Big(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}\Big)\,\mathrm{d}x,\quad n\in N,\ a,b,d,e\in R,\ ae-bd\neq 0$

Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú x, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$ a konštanty, prípadne ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou algebraických operácií sčítania, násobenia, delenia. Predpoklad $ae-bd\neq 0$ zaručuje, že podiel polynómov $ax+b$, $dx+e$ nie je konštantný.[12]

Uvedené integrály zracionalizujeme pomocou substitúcie $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{dx+e}}$, t. j.

$$t^n=\frac{ax+b}{dx+e}\ \Rightarrow\ x=\frac{et^n-b}{-dt^n+a},\quad \mathrm{d}x=\frac{net^{n-1}(-dt^n+a)-(et^n-b)(ndt^{n-1})}{(-dt^n+a)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{nt^{n-1}(ae-bd)\,\mathrm{d}t}{(a-dt^n)^2}.$$

Príklad 1.1.20.

a) $$\int\frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l} x-x^2=x(1-x)>0\\ x\in(0\,;1),\quad \sqrt{x^2}=x\end{array}\right]=\int\frac{1-x}{x\sqrt{x^2\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1-x}{x}}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}-1},\quad x\in(0\,;1),\quad t\in(1\,;\infty)\\ t^2=\frac{1-x}{x}\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\end{array}\right]=\int\frac{t^2}{\frac{1}{1+t^2}\,t}\,\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=-2\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=$$
$$=-2\int\frac{(1+t^2-1)\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=-2\int\Big(1-\frac{1}{1+t^2}\Big)\,\mathrm{d}t=-2(t-\operatorname{arctg}t)+c=$$
$$=2\operatorname{arctg}t-2t+c=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}-2\sqrt{\frac{1-x}{x}}+c,\ x\in(0\,;1),\ c\in R.$$

b) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt[6]{x+1},\quad t^6=x+1,\quad 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x,\quad x>-1,\quad t>0\\ \sqrt{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^3=t^3,\quad \sqrt[3]{x+1}=(\sqrt[6]{x+1})^2=t^2\end{array}\right]=\int\frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2}=$$
$$=6\int\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{t+1}=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t=6\int\Big(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\Big)\,\mathrm{d}t=$$
$$=6\Big(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\Big)+c=2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+c=$$
$$=2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln\big(\sqrt[6]{x+1}+1\big)+c,\ x>-1,\ c\in R.$$

c) $$\int\frac{x-1}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt[6]{x},\quad t^6=x,\quad 6t^5\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x,\quad x>0,\quad t>0\\ \sqrt{x}=(\sqrt[6]{x})^3=t^3,\quad \sqrt[3]{x^2}=(\sqrt[3]{x})^2=(\sqrt[6]{x})^4=t^4\end{array}\right]=\int\frac{(t^6-1)6t^5\,\mathrm{d}t}{(t^3+t^4)t^6}=$$
$$=6\int\frac{(t^6-1)\,\mathrm{d}t}{t^4+t^5}=\left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right]=6\int\Big(t-1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^4}\Big)\,\mathrm{d}t=$$
$$=6\Big(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|-\frac{-1}{t}+\frac{-2}{t^2}-\frac{-3}{t^3}\Big)+c=3t^2-6t+\ln t^6+\frac{6}{t}-\frac{12}{t^2}+\frac{18}{t^3}+c=$$
$$=3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+\ln x+\frac{6}{\sqrt[6]{x}}-\frac{12}{\sqrt[3]{x}}+\frac{18}{\sqrt{x}}+c,\ x>0,\ c\in R.$$

d) $$\int\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l}1-\sqrt{x}\geq 0\\ x\in\langle 0\,;1)\end{array}\right]=\int\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}-\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\left[\begin{array}{l} x=1-z,\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}z\\ z=1-x,\ z\in(0\,;1\rangle\end{array}\right]\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}\Rightarrow t^2(1-x)=x,\quad x=\frac{t^2}{t^2+1}\\ \mathrm{d}x=\frac{2t(t^2+1)-t^2\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2},\quad t\in\langle 0\,;\infty)\end{array}\right]=$$
$$=-\int z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z-\int\frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}\ \underline{\underline{\text{pr. 1.1.17}}}\ -\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-2\Big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t-\frac{t}{2(t^2+1)}\Big)=$$
$$=-2\sqrt{z}+\frac{t}{t^2+1}-\operatorname{arctg}t+c=\left[\ t\neq 0\ \Rightarrow\ \frac{t}{t^2+1}=\frac{t^2}{t^2+1}\,\frac{1}{t}=x\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}=\sqrt{x(1-x)},\ x\neq 0\ \right]=$$
$$=-2\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+c,\ x\in(0\,;1),\ c\in R.\ \blacksquare$$

---

[12] Dokážeme nepriamo. Nech $k\in R$, $k\neq 0$ je také, že $ax+b=k(dx+e)\ \Rightarrow\ (a-kd)x+(b-ke)=0\ \Rightarrow$ $a=kd,\ b=ke\ \Rightarrow\ ake=kdb\ \Rightarrow\ ae=bd$. To znamená, že pre $ae-bd\neq 0$ podiel nie je konštantný.

- **Integrály typu** $\int f\big(x, \sqrt{ax^2+bx+e}\,\big)\,\mathrm{d}x$, $a, b, e \in R$, $a \neq 0$

Integrandy sú funkcie, ktoré obsahujú x, $\sqrt{ax^2+bx+e}$ konštanty a ich kombinácie, ktoré z nich vzniknú pomocou operácií sčítania, násobenia, delenia.

Tieto integrály môžeme zracionalizovať pomocou niektorej z troch **Eulerových substitúcií** (ozn. **1. ES**, **2. ES**, **3. ES**). Použitie ES je síce účinné, ale väčšinou veľmi pracné (príklad 1.1.26). Často nám pri riešení uvedených integrálov pomôže substitúcia pomocou goniometrickej alebo hyperbolickej funkcie (príklady 1.1.21, 1.1.22).

Prvá Eulerova substitúcia $\sqrt{ax^2+bx+e} = t \pm \sqrt{a}x$ sa používa pre $a > 0$:

$$ax^2+bx+e = t^2 \pm 2t\sqrt{a}x + ax^2 \;\Rightarrow\; bx \mp 2t\sqrt{a}x = t^2 - e \;\Rightarrow\; x = \tfrac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t},$$

$$\mathrm{d}x = \tfrac{2t(b\mp 2\sqrt{a}t)-(t^2-e)(\mp 2\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{2tb\mp 4\sqrt{a}t^2\pm 2\sqrt{a}t^2\mp 2e\sqrt{a}}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{2(\mp\sqrt{a}t^2+tb\mp e\sqrt{a})}{(b\mp 2\sqrt{a}t)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+e} = t \pm \sqrt{a}x = t \pm \sqrt{a}\tfrac{t^2-e}{b\mp 2\sqrt{a}t} = \tfrac{tb\mp 2\sqrt{a}t^2\pm\sqrt{a}t^2\mp e\sqrt{a}}{b\mp 2\sqrt{a}t} = \tfrac{\mp\sqrt{a}t^2+tb\mp e\sqrt{a}}{b\mp 2\sqrt{a}t}.$$

Druhá Eulerova substitúcia $\sqrt{ax^2+bx+e} = xt \pm \sqrt{e}$ sa používa pre $e > 0$:

$$ax^2+bx+e = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{e}+e \;\Rightarrow\; ax^2+bx = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{e} \;\Rightarrow\; (a-t^2)x^2 = (\pm 2\sqrt{e}t-b)x$$

$$\xRightarrow{x\neq 0} x = \tfrac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}, \quad \mathrm{d}x = \tfrac{\pm 2\sqrt{e}(a-t^2)-(\pm 2\sqrt{e}t-b)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{2(\pm\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e})}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+e} = xt \pm \sqrt{e} = \tfrac{\pm 2\sqrt{e}t-b}{a-t^2}t \pm \sqrt{e} = \tfrac{\pm 2\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e}\mp\sqrt{e}t^2}{a-t^2} = \tfrac{\pm\sqrt{e}t^2-bt\pm a\sqrt{e}}{a-t^2}.$$

Tretia Eulerova substitúcia $t = \sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$, $t \geq 0$ sa používa,[13] ak má polynóm ax^2+bx+e dva rôzne reálne korene α, β, t. j. ak platí $ax^2+bx+e = a(x-\alpha)(x-\beta)$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq \beta$:

$$t^2 = a\tfrac{x-\alpha}{x-\beta} \;\Rightarrow\; t^2x-\beta t^2 = ax - a\alpha \;\Rightarrow\; x = \tfrac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2},$$

$$\mathrm{d}x = \tfrac{-2\beta t(a-t^2)-(a\alpha-\beta t^2)(-2t)}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{-2a\beta t+2\beta t^3+2a\alpha t-2\beta t^3}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{2a(\alpha-\beta)t}{(a-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\sqrt{ax^2+bx+e} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{a\big(\tfrac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}-\alpha\big)\big(\tfrac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2}-\beta\big)} =$$

$$= \sqrt{a\tfrac{a\alpha-\beta t^2-a\alpha+\alpha t^2}{a-t^2}\,\tfrac{a\alpha-\beta t^2-a\beta+\beta t^2}{a-t^2}} = \sqrt{a\tfrac{(\alpha-\beta)t^2}{a-t^2}\,\tfrac{a(\alpha-\beta)}{a-t^2}} = \tfrac{|a(\alpha-\beta)|\,t}{|a-t^2|}.$$

V niektorých prípadoch môžeme použiť iba jednu ES a niekedy môžeme použiť aj všetky tri ES. Substitúcie $\sqrt{ax^2+bx+e} = t+\sqrt{a}x$ a $\sqrt{ax^2+bx+e} = t-\sqrt{a}x$, resp. $\sqrt{ax^2+bx+e} = xt+\sqrt{e}$ a $\sqrt{ax^2+bx+e} = xt-\sqrt{e}$ sú ekvivalentné a je jedno, ktorú z dvojice si vyberieme. Substitúcia použitá v príklade 1.1.20 a) je tretia ES.

Príklad 1.1.21.
Vypočítajte $J = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a > 0$ (pre $a=1$ dostaneme príklad 1.1.12.).

[13] V konkrétnych prípadoch musíme určiť definičný obor pre premennú t a znamienko výrazu $a-t^2$.

Riešenie.

$$J=\left[\begin{array}{c} 2.\ \text{ES: } \sqrt{a^2-x^2}=a-xt,\ t=\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x},\ x\in(-a\,;0)\Leftrightarrow t\in(-1\,;0),\ x\in(0\,;a)\Leftrightarrow t\in(0\,;1) \\ a^2-x^2=a^2-2axt+x^2t^2\ \Rightarrow\ 2axt=x^2t^2+x^2=x^2(t^2+1)\ \Rightarrow\ x=\frac{2at}{t^2+1},\ x\neq 0 \\ \mathrm{d}x=\frac{2a(t^2+1)-2at\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2},\quad \sqrt{a^2-x^2}=a-\frac{2at}{t^2+1}t=\frac{at^2+a-2at^2}{t^2+1}=\frac{a(1-t^2)}{t^2+1} \\ \hline \lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\ \overset{\text{l'H}}{=\!=}\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=0,\quad x\to\pm a\Leftrightarrow t\to\pm 1 \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{\frac{2a(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}}{\frac{a(1-t^2)}{t^2+1}}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}=2\operatorname{arctg}t+c=2\operatorname{arctg}\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}+c,\ x\in(-a\,;a),\ x\neq 0,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$J=\left[\begin{array}{c} x=a\sin t,\ t=\arcsin\frac{x}{a},\ x\in(-a\,;a),\ t\in\left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right),\ \mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t \\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=a\sqrt{\cos^2 t}=a\,|\cos t|=a\cos t \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{a\cos t}=\int\mathrm{d}t=t+c=\arcsin\frac{x}{a}+c,\ x\in(-a\,;a),\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$J=\left[\begin{array}{c} x=a\cos t,\ t=\arccos\frac{x}{a},\ x\in(-a\,;a),\ t\in(0\,;\pi),\ \mathrm{d}x=-a\sin t\,\mathrm{d}t \\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)}=a\sqrt{\sin^2 t}=a\,|\sin t|=a\sin t \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{-a\sin t\,\mathrm{d}t}{a\sin t}=-\int\mathrm{d}t=-t+c=-\arccos\frac{x}{a}+c,\ x\in(-a\,;a),\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$J=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{|x|},\ t^2=\frac{a^2-x^2}{x^2}\ \Rightarrow\ t^2x^2=a^2-x^2\ \Rightarrow\ x^2=\frac{a^2}{t^2+1}\ \Rightarrow\ |x|=\frac{a}{\sqrt{t^2+1}} \\ x=\frac{\pm a}{\sqrt{t^2+1}}\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\frac{\pm a2t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}=\frac{\mp at\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)^3}},\quad a^2-x^2=a^2-\frac{a^2}{t^2+1}=\frac{a^2t^2+a^2-a^2}{t^2+1}=\frac{a^2t^2}{t^2+1} \\ \hline x\in(0\,;a)\ \Rightarrow\ t\in(0\,;\infty),\ x=\frac{a}{\sqrt{t^2+1}},\ \mathrm{d}x=\frac{-at\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)^3}},\ t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x},\ \sqrt{a^2-x^2}=\frac{at}{\sqrt{t^2+1}} \\ x\in(-a\,;0)\ \Rightarrow\ t\in(0\,;\infty),\ x=\frac{-a}{\sqrt{t^2+1}},\ \mathrm{d}x=\frac{at\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)^3}},\ t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{-x},\ \sqrt{a^2-x^2}=\frac{at}{\sqrt{t^2+1}} \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{\frac{\mp at\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}}{\frac{at}{\sqrt{t^2+1}}}=\mp\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\mp\operatorname{arctg}t+c=\mp\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\pm x}+c=\left[\begin{array}{c}\text{nepárnosť}\\ \text{funkcie arctg}\end{array}\right]=$$

$$=\mp\left(\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)+c=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}+c,\ x\in(-a\,;a),\ x\neq 0,\ c\in R.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.22.
Vypočítajte $J=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a>0$.

Riešenie.

$$J=\left[\begin{array}{c} 1.\ \text{ES:}\qquad \sqrt{x^2-a^2}=t-x,\ |x|>a\ \Rightarrow\ x^2-a^2=t^2-2tx+x^2\ \Rightarrow\ x=\frac{t^2+a^2}{2t} \\ \mathrm{d}x=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2+a^2)}{4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2t^2-2a^2}{4t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t,\quad \sqrt{x^2-a^2}=t-\frac{t^2+a^2}{2t}=\frac{t^2-a^2}{2t} \\ t=x+\sqrt{x^2-a^2},\quad x\in(-\infty\,;-a)\Leftrightarrow t\in(-a\,;0),\quad x\in(a\,;\infty)\Leftrightarrow t\in(a\,;\infty) \\ \hline \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-a^2})=\infty+\infty=\infty,\quad x\to\pm a\Leftrightarrow t\to\pm a \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+\sqrt{x^2-a^2})\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{a^2}{-\infty-\infty}=0 \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{\frac{t^2-a^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2-a^2}{2t}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\ x\in R-\langle -a\,;a\rangle,\ c\in R.$$

Iné riešenie.
Substitúciu $x=a\cosh t\colon R\to\langle a\,;\infty)$ môžeme použiť iba pre $x>a$.

$$x>a \;\Rightarrow\; J=\left[\begin{array}{c} x=a\cosh t,\;\; t=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a},\;\; dx=a\sinh t\,dt,\;\; t\in(0\,;\,\infty)\\ \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)}=a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t\end{array}\right]=\int\frac{a\sinh t\,dt}{a\sinh t}=$$

$$=\int dt=t+c_1=\operatorname{argcosh}\frac{x}{a}+c_1\overset{\text{ma1}}{\underset{\text{str. 90}}{=\!=\!=}}\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{(\tfrac{x}{a})^2-1}\right)+c_1=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1=$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\ln a+c_1=\left[\begin{array}{c} c=c_1-\ln a\\ c_1\in R,\; c\in R\end{array}\right]=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\; c\in R.$$

$$x<-a \;\Rightarrow\; J=\left[\begin{array}{c} x=-a\cosh t,\;\; t=\operatorname{argcosh}\frac{-x}{a},\;\; dx=-a\sinh t\,dt,\;\; t\in(0\,;\,\infty)\\ \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)}=a\sqrt{\sinh^2 t}=a\,|\sinh t|=a\sinh t\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{-a\sinh t\,dt}{a\sinh t}=-\int dt=-t+c_1=-\operatorname{argcosh}\frac{-x}{a}+c_1=-\ln\left(\frac{-x}{a}+\sqrt{(\tfrac{-x}{a})^2-1}\right)+c_1=$$

$$=-\ln\frac{-x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c_1=\ln\left(\frac{a}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right)+c_1=\ln\frac{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}{-x^2+x^2-a^2}+c_1=$$

$$=\ln\frac{\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|}{a}+c_1=\left[\begin{array}{c} c=c_1-\ln a\\ c_1\in R,\; c\in R\end{array}\right]=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\; c\in R.$$

$$\Longrightarrow\; J=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\; x\in R-\langle -a\,;\,a\rangle,\; c\in R.\;\blacksquare$$

Príklad 1.1.23.
Vypočítajte $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $a>0$.

Riešenie.

$$J=\left[\begin{array}{l} \text{1. ES:}\qquad \sqrt{x^2+a^2}=t-x\;\Rightarrow\; x^2+a^2=t^2-2tx+x^2\;\Rightarrow\; x=\frac{t^2-a^2}{2t}\\ dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2-a^2)}{4t^2}\,dt=\frac{2t^2+2a^2}{4t^2}\,dt=\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt,\quad \sqrt{x^2+a^2}=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t}\\ \hline t=x+\sqrt{x^2+a^2},\;\; \sqrt{x^2+a^2}>\sqrt{x^2}=|x|,\;\; \lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+a^2})=\infty,\quad x\in(-\infty\,;\,\infty)\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+\sqrt{x^2+a^2})\,\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-a^2}{x-\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{-a^2}{-\infty-\infty}=0,\quad t\in(0\,;\,\infty)\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+a^2}{2t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c,\; x\in R,\; c\in R.$$

Iné riešenie.

$$J=\left[\begin{array}{c} x=a\sinh t,\;\; t=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a},\;\; dx=a\cosh t\,dt,\;\; x\in R,\;\; t\in R\\ \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)}=a\sqrt{\cosh^2 t}=a\,|\cosh t|=a\cosh t\end{array}\right]=\int\frac{a\cosh t\,dt}{a\cosh t}=\int dt=$$

$$=t+c_1=\operatorname{argsinh}\frac{x}{a}+c_1\overset{\text{ma1: str. 90}}{=\!=\!=\!=}\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{(\tfrac{x}{a})^2+1}\right)+c_1=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+c_1=$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\ln a+c_1=\left[\begin{array}{c} c=c_1-\ln a\\ c_1\in R,\; c\in R\end{array}\right]=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c,\; c\in R.$$

Iné riešenie.

$$J=\left[\begin{array}{c} x=a\,\mathrm{tg}\,t,\;\; t=\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a},\;\; dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t},\;\; x\in(-\infty\,;\,\infty),\;\; t\in\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)\\ \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+a^2}=a\sqrt{\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\sqrt{\cos^2 t}}=\frac{a}{|\cos t|}=\frac{a}{\cos t}\end{array}\right]=\int\frac{\frac{a\,dt}{\cos^2 t}}{\frac{a}{\cos t}}=$$

$$=\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t}=\int\frac{\cos t\,dt}{1-\sin^2 t}=\left[\begin{array}{c} u=\sin t,\;\; t\in\left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)\\ du=\cos t\,dt,\;\; u\in(-1\,;\,1)\end{array}\right]=\int\frac{du}{1-u^2}=-\int\frac{du}{u^2-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c_1=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}+c_1=\left[\begin{array}{c} x=\frac{a\sin t}{\cos t}=\sqrt{x^2+a^2}\,\sin t\\ \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sin t=u\end{array}\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}+c_1=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}+c_1=\left[\begin{array}{c} \text{úpravy:}\qquad c_1\in R\\ c=c_1-\ln a,\;\; c\in R\end{array}\right]=\ln\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)+c,\; x\in R,\; c\in R.\;\blacksquare$$

Príklad 1.1.24.
Vypočítajte neurčité integrály $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$, $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$, $a>0$.

Riešenie.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x=a\sin t,\ t=\arcsin\frac{x}{a},\ x\in\langle -a\,;\,a\rangle,\ t\in\langle -\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\rangle,\ dx=a\cos t\,dt \\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=a\sqrt{\cos^2 t}=a\,|\cos t|=a\cos t \end{bmatrix} =$$

$$= \int a^2\cos^2 t\,dt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{2\cdot 2}\right)+c = \frac{a^2 t}{2}+\frac{2a^2\sin t\cos t}{4}+c =$$

$$= \frac{a^2 t}{2}+\frac{a\sin t\cdot a\cos t}{4}+c = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+c,\ x\in\langle -a\,;\,a\rangle,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\frac{-x\cdot x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u\ =x & u'=1 \\ v'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} & v\ =\sqrt{a^2-x^2} \end{array}\right] = \int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

$$\xRightarrow{\text{rovnica}} 2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\xRightarrow{\text{pr. 1.1.21}} \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ x\in(-a\,;\,a).$$

Zostávajúce integrály vypočítame analogicky a ich výpočet prenechávame čitateľovi ako cvičenie. Platí pre ne:

$$\xRightarrow{\text{pr. 1.1.22}} \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},\ x\in(-\infty\,;\,a)\cup(a\,;\,\infty).$$

$$\xRightarrow{\text{pr. 1.1.23}} \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}},\ x\in R.\ \blacksquare$$

Integrály v príklade 1.1.24 môžeme tiež riešiť priamo pomocou rovnakých substitúcií ako príslušné integrály v príkladoch 1.1.21, 1.1.22 a 1.1.23 alebo pomocou binomických substitúcií (poznámka 1.1.7 na strane 41).

Príklad 1.1.25.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \begin{bmatrix} x=\frac{2}{t},\ t=\frac{2}{x},\quad \sqrt{x^2-4}=\sqrt{\frac{4}{t^2}-4}=\frac{2\sqrt{1-t^2}}{|t|},\quad x\in(2\,;\,\infty)\Rightarrow t\in(0\,;\,1),\ |t|=t \\ dx=-\frac{2\,dt}{t^2},\ \sqrt{1-t^2}=\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{|x|},\ x\in(-\infty\,;\,-2)\Rightarrow t\in(-1\,;\,0),\ |t|=-t \end{bmatrix} =$$

$$= \int\frac{-\frac{2\,dt}{t^2}}{\frac{4}{t^2}\,\frac{2\sqrt{1-t^2}}{|t|}} = \int\frac{-2(\pm t)\,dt}{8\sqrt{1-t^2}} = \pm\frac{1}{8}\int\frac{-2t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[\begin{array}{c|l} z=1-t^2 & t\in(0\,;\,1)\Rightarrow z\in(0\,;\,1) \\ dz=-2t\,dt & t\in(-1\,;\,0)\Rightarrow z\in(0\,;\,1) \end{array}\right] =$$

$$= \pm\frac{1}{8}\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \pm\frac{1}{8}\,\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c = \pm\frac{\sqrt{z}}{4}+c = \pm\frac{\sqrt{1-t^2}}{4}+c = \pm\frac{\sqrt{x^2-4}}{4\,|x|}+c =$$

$$= \pm\frac{\sqrt{x^2-4}}{4(\pm x)}+c = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+c,\ x\in(-\infty\,;\,-2)\cup(2\,;\,\infty),\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \left[\begin{array}{c} 1.\ \text{ES:}\quad \sqrt{x^2-4}=t-x,\ |x|>2\ \Rightarrow\ x^2-4=t^2-2tx+x^2\ \Rightarrow\ x=\frac{t^2+4}{2t} \\ dx=\frac{2t\cdot 2t-2(t^2+4)}{4t^2}\,dt=\frac{2t^2-8}{4t^2}\,dt=\frac{t^2-4}{2t^2}\,dt,\quad t=x+\sqrt{x^2-4} \\ \sqrt{x^2-4}=t-x=t-\frac{t^2+4}{2t}=\frac{t^2-4}{2t},\quad t^2+4=2xt=2x(x+\sqrt{x^2-4})>0 \\ \hline x\in(-\infty\,;\,-2)\Leftrightarrow t\in(-2\,;\,0),\quad x\in(2\,;\,\infty)\Leftrightarrow t\in(0\,;\,2) \end{array}\right] =$$

$$= \int\frac{\frac{t^2-4}{2t^2}\,dt}{\left(\frac{t^2+4}{2t}\right)^2\frac{t^2-4}{2t}} = \int\frac{4t\,dt}{(t^2+4)^2} = \left[\begin{array}{r|l} 1.\ \text{ms:}\ z=t^2+4 & t\in(0\,;\,2)\Rightarrow z\in(4\,;\,\infty) \\ dz=2t\,dt & t\in(-2\,;\,0)\Rightarrow z\in(4\,;\,\infty) \end{array}\right] = 2\int\frac{dz}{z^2} =$$

$$= -\frac{2}{z}+c_1 = -\frac{2}{t^2+4}+c_1 = -\frac{1}{x^2+x\sqrt{x^2-4}}+c_1 = -\frac{1}{x^2+x\sqrt{x^2-4}}\cdot\frac{x^2-x\sqrt{x^2-4}}{x^2-x\sqrt{x^2-4}}+c_1 =$$

$$= -\frac{x^2-x\sqrt{x^2-4}}{x^4-x^2(x^2-4)} + c_1 = \frac{x\sqrt{x^2-4}-x^2}{4x^2} + c_1 = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} - \frac{1}{4} + c_1 = \left[\begin{array}{c} c = c_1 - \frac{1}{4} \\ c_1\in R,\ c\in R \end{array}\right] = $$
$$= \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + c,\ x\in(-\infty\,;\,-2)\cup(2\,;\,\infty),\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \left[\begin{array}{l} 3.\ \text{ES:}\quad t=\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \Rightarrow t^2=\frac{x+2}{x-2} \Rightarrow xt^2-2t^2=x+2 \Rightarrow x=\frac{2+2t^2}{t^2-1},\ x^2=\frac{4(t^2+1)^2}{(t^2-1)^2} \\ \mathrm{d}x=\frac{4t(t^2-1)-(2+2t^2)2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{-8t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2},\ x^2-4=\frac{4(t^4+2t^2+1)-4(t^4-2t^2+1)}{(t^2-1)^2}=\frac{16t^2}{(t^2-1)^2} \\ \lim\limits_{x\to2^+}\frac{x+2}{x-2}=\frac{4}{0^+}=\infty,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{x-2}=1,\ \lim\limits_{x\to-2^-}\frac{x+2}{x-2}=0,\ t^2+1=\frac{x+2}{x-2}+1=\frac{2x}{x-2} \\ \hline x\in(2\,;\,\infty)\ \Rightarrow\ t\in(1\,;\,\infty),\quad \sqrt{x^2-4}=\left|\frac{4t}{t^2-1}\right|=\frac{4t}{t^2-1},\quad \sqrt{(x-2)^2}=x-2 \\ x\in(-\infty\,;\,-2)\ \Rightarrow\ t\in(0\,;\,1),\quad \sqrt{x^2-4}=-\frac{4t}{t^2-1},\quad \sqrt{(x-2)^2}=-(x-2) \end{array}\right] =$$

$$= \int\frac{\frac{-8t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}}{\frac{4(t^2+1)^2}{(t^2-1)^2}\left(\pm\frac{4t}{t^2-1}\right)} = \mp\frac{1}{2}\int\frac{(t^2-1)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \mp\frac{1}{2}\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} \pm \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = [\ \text{pr. } 1.1.17\ ] =$$
$$= \mp\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(t^2+1)}\right) \pm \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) + c = \pm\frac{t}{2(t^2+1)} + c =$$
$$= \pm\frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}}{2\frac{2x}{x-2}} + c = \frac{\pm(x-2)}{4x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{4x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{4x} + c =$$
$$= \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + c,\ x\in(-\infty\,;\,-2)\cup(2\,;\,\infty),\ c\in R. \ \blacksquare$$

Predchádzajúci príklad môžeme riešiť aj tak, že ho najprv vyriešime pre $x\in(2\,;\,\infty)$ a následne využijeme vypočítaný výsledok pomocou substitúcie $t=-x$ pre $x\in(-\infty\,;\,-2)$:

$$x\in(-\infty\,;\,-2) \implies \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \left[\begin{array}{ll} x=-t, & \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t \\ x^2=t^2, & t\in(2\,;\,\infty) \end{array}\right] =$$
$$= -\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{t^2-4}} = -\frac{\sqrt{t^2-4}}{4t} + c = \frac{\sqrt{(-t)^2-4}}{4(-t)} + c = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + c, c\in R.$$

Príklad 1.1.26.
Vypočítajte $J = \int\frac{(x^2-x+1)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^2+2x+1}}$.

Riešenie.

$$J = \left[\begin{array}{l} 2.\ \text{ES:}\quad \sqrt{-x^2+2x+1}=1-xt,\ -x^2+2x+1=1-2xt+x^2t^2 \Rightarrow x=\frac{2(t+1)}{t^2+1} \\ \mathrm{d}x=\frac{2(t^2+1)-(2t+2)2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{-2(t^2+2t-1)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t,\quad \sqrt{-x^2+2x+1}=1-\frac{2(t+1)t}{t^2+1} \\ x\in(1-\sqrt{2}\,;\,0)\Leftrightarrow t\in(-1-\sqrt{2}\,;\,-1),\quad x\in(0\,;\,1+\sqrt{2})\Leftrightarrow t\in(-1\,;\,-1+\sqrt{2}) \\ \hline t=\frac{1-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x},\quad \lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(-x^2+2x+1)^{-\frac{1}{2}}(-2x+2)}{1}=-1 \\ 0=-x^2+2x+1\ \Leftrightarrow\ x=1\pm\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ t=\frac{1-\sqrt{0}}{1\pm\sqrt{2}}\cdot\frac{1\mp\sqrt{2}}{1\mp\sqrt{2}}=\frac{1\mp\sqrt{2}}{1-2}=-1\pm\sqrt{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int\frac{\left(\frac{4(t+1)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{2(t+1)}{t^2+1}+1\right)\frac{-2(t^2+2t-1)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{2(t+1)}{t^2+1}\left(1-\frac{2t(t+1)}{t^2+1}\right)} = \left[\ \text{úpravy}\ \right] = \int\frac{(t^4-2t^3+4t^2+6t+3)\,\mathrm{d}t}{(t+1)(t^2+1)^2} =$$
$$= \left[\begin{array}{c}\text{rozklad na} \\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right] = \int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{2}{t^2+1}+\frac{4t+4}{(t^2+1)^2}\right)\mathrm{d}t = \int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{2}{t^2+1}+\frac{2\cdot2t}{(t^2+1)^2}+\frac{4}{(t^2+1)^2}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= [\ \text{pr. } 1.1.17\ ] = \ln|t+1| - 2\operatorname{arctg} t - \frac{2}{t^2+1} + 2\operatorname{arctg} t + \frac{2t}{t^2+1} + c = \frac{2t-2}{t^2+1} + \ln|t+1| + c =$$
$$= \frac{2\frac{1-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x}-2}{\left(\frac{1-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x}\right)^2+1} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x}+1\right| + c = \left[\ \text{úpravy}\ \right] =$$
$$= -\sqrt{-x^2+2x+1} + \ln\left|\frac{1+x-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x}\right| + c,\ x\in\left(1-\sqrt{2}\,;\,1+\sqrt{2}\right)-\{0\},\ c\in R.$$

Iné riešenie.
Integrand najprv upravíme a až potom použijeme 2. ES.

$$J=\int\frac{(x^2-x)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^2+2x+1}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^2+2x+1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{(-2x+2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+1}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^2+2x+1}}=$$
$$=\left[\begin{array}{l}\text{1. ms:}\quad z=-x^2+2x+1,\ \mathrm{d}z=(-2x+2)\,\mathrm{d}x\\ \qquad x\in\left(1-\sqrt{2}\,;\,1+\sqrt{2}\right),\ t\in(0\,;\,1)\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}\text{2. ES:}\quad\sqrt{-x^2+2x+1}=1-xt\\ \text{z predchádzajúceho riešenia}\end{array}\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}+\int\frac{\frac{-2(t^2+2t-1)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}}{\frac{2(t+1)}{t^2+1}\left(1-\frac{2t(t+1)}{t^2+1}\right)}=\left[\text{úpravy}\right]=-\sqrt{z}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}=-\sqrt{z}+\ln|t+1|+c=$$
$$=-\sqrt{-x^2+2x+1}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x}+1\right|+c=$$
$$=-\sqrt{-x^2+2x+1}+\ln\left|\frac{1+x-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x}\right|+c,\ x\in(1-\sqrt{2}\,;\,1+\sqrt{2})-\{0\},\ c\in R.$$

Iné riešenie.
Rovnaký postup ako pri predchádzajúcom riešení, ale namiesto 2. ES použijeme $t=\frac{1}{x}$.

$$J=-\frac{1}{2}\int\frac{(-2x+2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+1}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^2+2x+1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{(-2x+2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+1}}+I\implies$$
$$x\in(0\,;\,1+\sqrt{2})\ \Rightarrow\ I=\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{x},\quad x\to1+\sqrt{2}\Leftrightarrow t\to\frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2},\quad t\in(-1+\sqrt{2}\,;\,\infty)\\ x=\frac{1}{t},\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2},\ \sqrt{-x^2+2x+1}=\sqrt{-\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}+1}=\frac{\sqrt{-1+2t+t^2}}{t}\end{array}\right]=$$
$$=\int\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{t^2+2t-1}}{t}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+1)^2-2}}=-\ln\left|t+1+\sqrt{t^2+2t-1}\right|+c_1=$$
$$=-\ln\left|\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-1}\right|+c_1=-\ln\left|\frac{1+x+\sqrt{1+2x-x^2}}{x}\right|+c_1=$$
$$=-\ln\left|\frac{(1+x)^2-(1+2x-x^2)}{x(1+x-\sqrt{1+2x-x^2})}\right|+c_1=\left[\begin{array}{ll}\text{úpravy:} & c_1\in R\\ c=c_1-\ln 2, & c\in R\end{array}\right]=\ln\left|\frac{1+x-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x}\right|+c,\ c\in R.$$

$$x\in(1-\sqrt{2}\,;\,0)\ \Rightarrow\ I=\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{x},\quad x\to1-\sqrt{2}\Leftrightarrow t\to\frac{1}{1-\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{1-2},\quad t\in(-\infty\,;\,-1-\sqrt{2})\\ x=\frac{1}{t},\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2},\ |t|=-t,\ |x|=-x,\ \sqrt{-x^2+2x+1}=\frac{\sqrt{-1+2t+t^2}}{-t}\end{array}\right]=$$
$$=\int\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{t^2+2t-1}}{-t}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+1)^2-2}}=\ln\left|t+1+\sqrt{t^2+2t-1}\right|+c=\ln\left|\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1+2x-x^2}{x^2}}\right|+c=$$
$$=\ln\left|\frac{1}{x}+1+\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{-x}\right|+c=\ln\left|\frac{1+x-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x}\right|+c,\ c\in R.$$

$$\implies J=-\sqrt{-x^2+2x+1}+\ln\left|\frac{1+x-\sqrt{-x^2+2x+1}}{x}\right|+c,\ x\in\left(1-\sqrt{2}\,;\,1+\sqrt{2}\right)-\{0\},\ c\in R.\ \blacksquare$$

1.1.4 Integrovanie goniometrických a hyperbolických funkcií

Ak integrand obsahuje iba goniometrické, resp. iba hyperbolické funkcie, potom integrovanie nebýva problematické. Môže byť ale veľmi pracné.

- **Integrály typu** $\int f(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$

Integrandy obsahujú konštanty, funkcie $\sin x$, $\cos x$ (môžu byť aj implicitne zadané, napr. $\sin 2x=2\sin x\cos x$) a ich kombinácie, ktoré vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia. Na zracionalizovanie týchto integrálov na intervaloch neobsahujúcich body[14] $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in Z$ sa používa tzv. **univerzálna goniometrická substitúcia** (ozn. **UGS**)

[14] V bodoch $x\neq\pi+2k\pi$, $k\in Z$ nie je funkcia $t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ definovaná (funkcia $\cos\frac{x}{2}$ je nulová).

$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Táto substitúcia, podobne ako ES, je účinná, ale väčšinou pracná,[15] pretože jej použitie vedie na racionálne lomené funkcie s polynómami vyšších stupňov. Platí:

$$t=\operatorname{tg}\tfrac{x}{2},\ \ x=2\operatorname{arctg}t,\ \ \mathrm{d}x=\tfrac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1},\ \ \sin x=\tfrac{2t}{t^2+1},\ \ \cos x=\tfrac{1-t^2}{t^2+1},\ \ x\neq\pi+2k\pi,k\in Z.$$

Odvodíme substitučné vzťahy pre funkcie sínus a kosínus:

$$\sin x = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\,\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2t}{t^2+1},$$

$$\cos x = \cos^2\tfrac{x}{2}-\sin^2\tfrac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\,\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}=\frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

Príklad 1.1.27.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\left[\begin{array}{c|c}\text{UGS:}\quad t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \sin x=\frac{2t}{t^2+1},\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi\,;\,0+2k\pi)\Rightarrow t\in(-\infty\,;\,0)\\ x\neq\pi+2k\pi,\ \sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi,\ k\in Z & x\in(0+2k\pi\,;\,\pi+2k\pi)\Rightarrow t\in(0\,;\,\infty)\end{array}\right]=$$
$$=\int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right|+c,\ x\in R,\ x\neq k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\left[\begin{array}{l}t=\frac{x}{2},\ x\neq k\pi,\ k\in Z\\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{2},\quad t\neq\frac{k\pi}{2}\end{array}\right]=\int\frac{(\cos^2t+\sin^2t)\,\mathrm{d}t}{\sin t\cos t}=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t}-\int\frac{-\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t}=$$
$$=\ln|\sin t|-\ln|\cos t|+c=\ln|\operatorname{tg}t|+c=\ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right|+c,\ x\in R,\ x\neq k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2x}=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2x}=\left[\begin{array}{l}t=\cos x,\ x\in(0+k\pi\,;\,\pi+k\pi),\ k\in Z\\ \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x,\quad t\in(-1\,;\,1)\end{array}\right]=\int\frac{-\mathrm{d}t}{1-t^2}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{t-1}{t+1}\right|+c=\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1-t}{1+t}+c=\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+c,\ x\in R,\ x\neq k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.28.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\left[\begin{array}{c|l}\text{UGS:}\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & x\in\left(-\pi+2k\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\Rightarrow t\in(-\infty\,;\,-1)\\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1},\ x\neq\pi+2k\pi & x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\Rightarrow t\in(-1\,;\,1)\\ \cos x\neq0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z & x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\,\pi+2k\pi\right)\Rightarrow t\in(1\,;\,\infty)\end{array}\right]=\int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}}=$$
$$=-\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}=-\tfrac{2}{2}\ln\left|\tfrac{t-1}{t+1}\right|+c=c-\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|,\ x\in R-\left\{\tfrac{\pi}{2}+2k\pi,\pi+2k\pi,k\in Z\right\},\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2x}=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2x}=\left[\begin{array}{l}t=\sin x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x,\ t\in(-1\,;\,1),\ k\in Z\end{array}\right]=\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=$$
$$=-\tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{t-1}{t+1}\right|+c=\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1+t}{1-t}+c=\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1+\sin x}{1-\sin x}+c,\ x\in R,\ x\neq\tfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.29.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}=\left[\begin{array}{c|c}\text{UGS:}\quad t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x\neq\pi+2k\pi & \cos x\neq-1\Leftrightarrow x\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z\\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1},\ \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1} & x\in(-\pi+2k\pi\,;\,\pi+2k\pi)\Rightarrow t\in R\end{array}\right]=\int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}}=$$
$$=\int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2}{t^2+1}}=\int\mathrm{d}t=t+c=\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}+c,\ x\in R,\ x\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

---

[15] V dnešnej počítačovej dobe, keď existujú programy na symbolické výpočty (Maxima, Maple, Wolfram Mathematica, …), to už nie je taký problém.

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\left[\begin{array}{l} t=\frac{x}{2},\ x\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z\\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{2},\quad t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right]=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\operatorname{tg} t+c=$$
$$=\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}+c,\ x\in R,\ x\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}=\int\frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\int\frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x}=\int\frac{(1-\cos x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}-\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=$$
$$=\left[\begin{array}{l|l} \text{1. ms:}\quad t=\sin x & x\in(-\pi+2k\pi\,;\,0+2k\pi),\ k\in Z\Rightarrow t\in\langle-1\,;\,0)\\ \quad\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x & x\in(0+2k\pi\,;\,\pi+2k\pi),\ k\in Z\Rightarrow t\in(0\,;\,1\rangle\end{array}\right]=-\operatorname{cotg} x-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=$$
$$=-\operatorname{cotg} x-\frac{1}{-t}+c=-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\sin x}+c=\frac{1-\cos x}{\sin x}+c,\ x\in R,\ x\neq k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.30.

$$\int\frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\left[\begin{array}{l}\text{UGS:}\qquad t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \sin x=\frac{2t}{t^2+1},\ \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1}\\ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1},\ x\in(-\pi+2k\pi\,;\,\pi+2k\pi)\,,k\in Z\Rightarrow t\in R\end{array}\right]=$$
$$=\int\frac{\left(\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}-\frac{(2t)^2}{(t^2+1)^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{(2t)^4}{(t^2+1)^4}+\frac{(1-t^2)^4}{(t^2+1)^4}}=\Big[\text{úpravy}\Big]=\int\frac{(2t^6-10t^4-10t^2+2)\,\mathrm{d}t}{t^8-4t^6+22t^4-4t^2+1}=\cdots$$ ☹.

Ako vidíme, týmto smerom pre normálneho smrteľníka cesta riešenia nevedie. Integrand musíme pred použitím UGS najprv upraviť.

Iné riešenie.

$$\int\frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\left[\begin{array}{l}(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\\ \qquad=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2}\end{array}\right]=\int\frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x}=$$
$$=\left[\begin{array}{l}\ u=2x,\ x\in R\\ \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x,\ u\in R\end{array}\right]=\int\frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u}=\left[\begin{array}{l}\text{UGS:}\quad t=\operatorname{tg}\frac{u}{2},\ \cos u=\frac{1-t^2}{t^2+1},\ \mathrm{d}u=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}\\ \qquad u\in(-\pi+2k\pi\,;\,\pi+2k\pi)\,,k\in Z\Rightarrow t\in R\end{array}\right]=$$
$$=\int\frac{\frac{1-t^2}{t^2+1}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1+\frac{(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2}}=\Big[\text{úpravy}\Big]=\int\frac{(1-t^2)\,\mathrm{d}t}{t^4+1}=\left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right]=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt2}\int\left(\frac{2t+\sqrt2}{t^2+\sqrt2 t+1}-\frac{2t-\sqrt2}{t^2-\sqrt2 t+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt2}\left(\ln\left|t^2+\sqrt2 t+1\right|-\ln\left|t^2-\sqrt2 t+1\right|\right)+c=$$
$$=\left[\begin{array}{l}t^2\pm\sqrt2 t+1=\\ \qquad=(t\pm\frac{\sqrt2}{2})^2+\frac12>0\end{array}\right]=\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{t^2+\sqrt2 t+1}{t^2-\sqrt2 t+1}+c=\left[\begin{array}{l}x=\frac{u}{2},\quad t=\operatorname{tg}\frac{u}{2}=\operatorname{tg} x\\ x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi)\,,k\in Z\end{array}\right]=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{\operatorname{tg}^2 x+\sqrt2\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}^2 x-\sqrt2\operatorname{tg} x+1}+c,\ x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

Postup je analogický, ale namiesto UGS použijeme inú substitúciu.

$$\int\frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 2x}=\left[\begin{array}{c}u=2x\\ x\in R,\ u\in R\end{array}\right]=\int\frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+\cos^2 u}=\int\frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+1-\sin^2 u}=-\int\frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{\sin^2 u-2}=$$
$$=\left[\begin{array}{l}\text{1. ms:}\qquad t=\sin u,\ u\in R\\ \mathrm{d}t=\cos u\,\mathrm{d}u,\ t\in\langle-1\,;\,1\rangle\end{array}\right]=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-2}=-\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{|t-\sqrt2|}{|t+\sqrt2|}+c=\left[\begin{array}{c}t=\sin u=\sin 2x\\ \sqrt2\pm\sin 2x>0\end{array}\right]=$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{\sqrt2-\sin 2x}{\sqrt2+\sin 2x}+c,\ x\in R,\ c\in R.\ \blacksquare$$

- **Integrály typu** $\displaystyle\int f(\sinh x,\cosh x)\,\mathrm{d}x$

Integrandy obsahujú $\sinh x$, $\cosh x$ (aj implicitne), konštanty a ich kombinácie, ktoré vzniknú pomocou sčítania, násobenia, delenia. Na zracionalizovanie takýchto integrálov, analogicky ako pri predchádzajúcom type, môžeme použiť tzv. **univerzálnu hyperbolickú substitúciu** (ozn. **UHS**) $t = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$, $x\in R$, $t\in(-1\,;\,1)$. Platí:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cosh^2\tfrac{x}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\cosh^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}t}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-\frac{\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2},$$

$$\sinh x = 2\sinh\tfrac{x}{2}\cosh\tfrac{x}{2} = \frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}}\,\frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tgh}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\cosh x = \cosh^2\tfrac{x}{2}+\sinh^2\tfrac{x}{2} = \frac{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}}\,\frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{1+\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tgh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Príklad 1.1.31.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \left[\begin{array}{l}\text{UHS:}\quad t=\operatorname{tgh}\frac{x}{2},\ \cosh x=\frac{1+t^2}{1-t^2}\\ \quad\mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2},\ x\in R,\ t\in(-1\,;\,1)\end{array}\right] = \int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int\mathrm{d}t =$$
$$= t+c = \operatorname{tgh}\tfrac{x}{2}+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \left[\frac{1}{\cosh x+1}\,\frac{\cosh x-1}{\cosh x-1} = \frac{\cosh x-1}{\cosh^2 x-1} = \frac{\cosh x-1}{\sinh^2 x}\right] = \int\frac{\cosh x\,\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} - \int\frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} =$$
$$= \left[\begin{array}{c|l} t=\sinh x & x\in(-\infty\,;\,0)\Rightarrow t\in(-\infty\,;\,0)\\ \mathrm{d}t=\cosh x\,\mathrm{d}x & x\in(0\,;\,\infty)\Rightarrow t\in(0\,;\,\infty)\end{array}\right] = \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \operatorname{cotgh} x = \frac{1}{-t} - \operatorname{cotgh} x + c =$$
$$= -\frac{1}{t} - \operatorname{cotgh} x + c = -\frac{1}{\sinh x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} + c = -\frac{1+\cosh x}{\sinh x} + c,\ x\in R,\ x\neq 0,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \int\frac{\mathrm{d}x}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{ll} t=\frac{x}{2}, & x\in R\\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{2}, & t\in R\end{array}\right] = \int\frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t} = \operatorname{tgh} t + c = \operatorname{tgh}\tfrac{x}{2}+c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh x} = \int\frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} = \int\frac{2\,\mathrm{d}x}{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \left[\begin{array}{l} t=\mathrm{e}^x,\quad x=\ln t,\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ \mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{t},\ x\in R,\ t\in(0\,;\,\infty)\end{array}\right] = \int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t(2+t+\frac{1}{t})} =$$
$$= \int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+1} = \int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = \int 2(t+1)^{-2}\,\mathrm{d}t = 2\frac{(t+1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{2}{\mathrm{e}^x+1} + c,\ x\in R,\ c\in R.\ \blacksquare$$

1.1.5 Riešené príklady

Príklad 1.1.32.
Vypočítajte $J = \displaystyle\int \min_{x\in(0\,;\,\infty)}\{1, \tfrac{1}{x}\}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.
Označme $f(x) = \min\limits_{x\in(0\,;\,\infty)}\{1,\frac{1}{x}\}$. Keďže $f(1)=\min\{1,\frac{1}{1}\}=1$, potom platí:

$$x\in(0\,;\,1\rangle \Rightarrow J = \int\mathrm{d}x = x+c_1,\ c_1\in R,\quad x\in\langle 1\,;\,\infty) \Rightarrow J = \int\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + c_2,\ c_2\in R.$$

Ak chceme určiť primitívnu funkciu na intervale $(0\,;\,\infty)$, musíme zabezpečiť jej spojitosť v bode $x=1$. To znamená, že musí platiť $1+c_1 = \ln 1 + c_2$, t. j. $c_1 = c_2 - 1$. Potom

$$J = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int\min_{x\in(0\,;\,\infty)}\{1,\tfrac{1}{x}\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x+c-1, & x\in(0\,;\,1\rangle,\\ \ln x + c, & x\in\langle 1\,;\,\infty),\quad c\in R.\end{cases}\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.33.

a) $\int(x+1)^2\ln(x-1)^5\,dx = 5\int(x+1)^2\ln(x-1)\,dx = \left[\begin{array}{c} t=x-1,\ x=t+1,\ x\in(1;\infty) \\ x+1=t+2,\ dx=dt,\ t\in(0;\infty)\end{array}\right] =$

$= 5\int(t+2)^2\ln t\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=(t+2)^2 & v=\frac{(t+2)^3}{3}\end{array}\right] = \frac{5(t+2)^3}{3}\ln t - \frac{5}{3}\int\frac{(t+2)^3\,dt}{t} =$

$= \frac{5(t+2)^3}{3}\ln t - \frac{5}{3}\int\frac{t^3+6t^2+12t+8}{t}\,dt = \frac{5(t+2)^3}{3}\ln t - \frac{5}{3}\int\left[t^2+6t+12+8t^{-1}\right]dt =$

$= \frac{5(t+2)^3}{3}\ln t - \frac{5}{3}\left[\frac{t^3}{3}+\frac{6t^2}{2}+12t+8\ln t\right]+c = \frac{5(t+2)^3}{3}\ln t - \frac{5t^3}{9} - 5t^2 - 20t - \frac{40}{3}\ln t + c =$

$= \frac{5(x+1)^3}{3}\ln(x-1) - \frac{5(x-1)^3}{9} - 5(x-1)^2 - 20(x-1) - \frac{40}{3}\ln(x-1) + c,\ x>0,\ c\in R.$

b) $\int\ln(x-1)^5\,dx = \left[\begin{array}{l} t=x-1,\ x\in(1;\infty) \\ dx=dt,\quad t\in(0;\infty)\end{array}\right] = \int\ln t^5\,dt = 5\int\ln t\,dt = \left[\begin{array}{l|l} u=\ln t & u'=\frac{1}{t} \\ v'=1 & v=t\end{array}\right] =$

$= 5t\ln t - 5\int dt = 5t\ln t - 5t + c_1 = 5(x-1)\ln(x-1) - 5(x-1) + c_1 =$

$= \left[\begin{array}{c} c=5+c_1 \\ c_1\in R,\ c\in R\end{array}\right] = 5(x-1)\ln(x-1) - 5x + c,\ x\in(1;\infty),\ c\in R.$

c) $\int\frac{(x-2)^4\,dx}{(x-1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} t=x-1,\quad x=t+1 & x\in(-\infty;1)\Rightarrow t\in(-\infty;0) \\ dx=dt,\ x-2=t-1 & x\in(1;\infty)\Rightarrow t\in(0;\infty)\end{array}\right] = \int\frac{(t-1)^4\,dt}{t^2} =$

$= \int\frac{(t^4-4t^3+6t^2-4t+1)\,dt}{t^2} = \int(t^2-4t+6-4t^{-1}+t^{-2})dt = \frac{t^3}{3}-\frac{4t^2}{2}+6t-4\ln|t|-\frac{1}{t}+c =$

$= \frac{(x-1)^3}{3} - 2(x-1)^2 + 6(x-1) - 4\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c,\ x\in R,\ x\neq 1,\ c\in R.$

d) $\int\frac{dx}{2^x+1} = \left[\begin{array}{c} 2^x+1=t,\ 2^x=t-1,\ x\in R,\ t\in(1;\infty) \\ x=\log_2(t-1)=\frac{\ln(t-1)}{\ln 2},\ dx=\frac{1}{\ln 2}\frac{dt}{t-1}\end{array}\right] = \frac{1}{\ln 2}\int\frac{dt}{t(t-1)} = \frac{1}{\ln 2}\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right]dt =$

$= \frac{1}{\ln 2}\Big[\ln(t-1)-\ln t\Big]+c = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{t-1}{t}+c = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{2^x}{2^x+1}+c,\ x\in R,\ c\in R.$

e) $\int\frac{dx}{\sqrt{2^x+1}} = \left[\begin{array}{c} \sqrt{2^x+1}=t,\ 2^x+1=t^2,\ 2^x=t^2-1,\ x\in(-\infty;\infty) \\ x=\log_2(t^2-1)=\frac{\ln(t^2-1)}{\ln 2},\ dx=\frac{1}{\ln 2}\frac{2t\,dt}{t^2-1},\ t\in(1;\infty)\end{array}\right] = \frac{1}{\ln 2}\int\frac{2t\,dt}{t(t^2-1)} =$

$= \frac{2}{\ln 2}\int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{2}{2\ln 2}\ln\frac{t-1}{t+1}+c = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{\sqrt{2^x+1}-1}{\sqrt{2^x+1}+1}+c,\ x\in R,\ c\in R.$

f) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x-2}} = \left[\begin{array}{c} t=\sqrt{x-2},\ t^2=x-2,\ x=t^2+2,\ dx=2\,dt \\ x-1=t^2+2-1=t^2+1,\ x\in(2;\infty),\ t\in(0;\infty)\end{array}\right] = \int\frac{2t\,dt}{(t^2+1)t} =$

$= \int\frac{2\,dt}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,t+c = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-2}+c,\ x\in(2;\infty),\ c\in R.$

g) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}} = \left[\begin{array}{c|c} t=\sqrt{1-x},\ t^2=1-x,\ x=1-t^2 & x\in(-\infty;-1)\Rightarrow t\in(\sqrt{2};\infty) \\ dx=-2t\,dt,\quad x+1=2-t^2 & x\in(-1;1)\Rightarrow t\in(0;\sqrt{2})\end{array}\right] =$

$= \int\frac{-2t\,dt}{(2-t^2)t} = 2\int\frac{dt}{t^2-2} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+c = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right|+c,\ x<1,\ x\neq -1,\ c\in R.$

h) $\int\frac{\sqrt{1-x}}{x+1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=\sqrt{1-x} \\ \text{viď g)}\end{array}\right] = \int\frac{t(-2t)\,dt}{2-t^2} = 2\int\frac{t^2\,dt}{t^2-2} = 2\int\frac{t^2-2+2\,dt}{t^2-2} = 2\int dt + 2\int\frac{2\,dt}{t^2-2} =$

$\overset{g)}{=} 2t + \frac{2}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c = 2\sqrt{1-x} + \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right| + c,\ x<1,\ x\neq -1.$ ∎

Príklad 1.1.34.

a) $\int\frac{\cos x}{4+3\sin x}\,dx=\left[\begin{array}{c}4+3\sin x=t,\ x\in R\\ 3\cos x\,dx=dt,\ t\in\langle 1\,;\,7\rangle\end{array}\right]=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln t+c=$
$=\frac{1}{3}\ln(4+3\sin x)+c,\ x\in R,\ c\in R.$

b) $\int\frac{1+3\sin x+2\cos x}{\sin 2x}\,dx=\int\frac{dx}{\sin 2x}+\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x\cos x}\,dx=\left[\begin{array}{c}2x=u,\ x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z\\ 2\,dx=du,\ u\neq k\pi\end{array}\right]=$
$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sin u}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\cos x}+\frac{dx}{\sin x}=\left[\begin{array}{c}\text{pr. 1.1.27}\\ \text{pr. 1.1.28}\end{array}\right]=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c=$
$=\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c,\ x\in R,\ x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in Z,\ c\in R.$

c) $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[4]{\sin x+\cos x}}\,dx=\left[\begin{array}{c}t=\sin x+\cos x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\,;\,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\\ dt=(\cos x-\sin x)\,dx,\ t\in(0\,;\,\sqrt{2}\rangle,\ k\in Z\end{array}\right]=-\int\frac{dt}{\sqrt[4]{t}}=-\int t^{-\frac{1}{4}}\,dt=$
$=-\frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+c=c-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(\sin x+\cos x)^3},\ x\in\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\,;\,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in Z,\ c\in R.$

d) $\int\frac{dx}{4\cos^2x+\sin^2x}=\int\frac{dx}{4\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 2x}{2}}=\int\frac{2\,dx}{5+3\cos 2x}=\left[\begin{array}{c}2x=t,\ x\in R\\ 2\,dx=dt,\ t\in R\end{array}\right]=\int\frac{dt}{5+3\cos t}=$
$=\left[\begin{array}{c}\text{UGS:}\quad u=\operatorname{tg}\frac{t}{2},\ \cos t=\frac{1-u^2}{u^2+1},\ dt=\frac{2\,du}{u^2+1}\\ t\in(-\pi+2k\pi\,;\,\pi+2k\pi),\ k\in Z\Rightarrow u\in R\end{array}\right]=\int\frac{\frac{2\,du}{u^2+1}}{5+3\frac{1-u^2}{u^2+1}}=\int\frac{2\,du}{2u^2+8}=\int\frac{du}{u^2+4}=$
$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2}+c=\left[\,u=\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\operatorname{tg}x\,\right]=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{2}+c,\ x\in R,\ x\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$

e) $\int\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\,dx=\int\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}\,dx=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx=\int\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}\,dx=$
$=\ln|\sin x+\cos x|+c,\ x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$

f) $\int x\operatorname{tg}^2x\,dx=\int\frac{x\sin^2x}{\cos^2x}\,dx=\int\frac{x(1-\cos^2x)}{\cos^2x}\,dx=\int\frac{x\,dx}{\cos^2x}-\int x\,dx=\int\frac{x\,dx}{\cos^2x}-\frac{x^2}{2}=$
$=\left[\begin{array}{l|l}u=x & u'=1\\ v'=\frac{1}{\cos^2x} & v=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\end{array}\right]=x\operatorname{tg}x-\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx-\frac{x^2}{2}=$
$=x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+c,\ x\in R,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z,\ c\in R.$

g) $\int\sqrt{1+\frac{1}{\sin x}}\,dx=\left[\begin{array}{l}t=1+\frac{1}{\sin x},\quad \sin x=\frac{1}{t-1},\quad 1+\frac{1}{\sin x}\geq 0\Leftrightarrow\sin x\in(0\,;\,1\rangle\vee\sin x=-1\\ \cos^2x=1-\sin^2x=1-\frac{1}{(t-1)^2}=\frac{t^2-2t}{(t-1)^2},\qquad \sin x\in(0\,;\,1\rangle\Rightarrow t\in\langle 2\,;\,\infty)\\ \hline x\in\left(0+2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle,k\in Z\Rightarrow 0\leq\cos x=\frac{\sqrt{t^2-2t}}{t-1},\\ \quad dt=-\frac{\cos x\,dx}{\sin^2x}\Rightarrow dx=\frac{-\sin^2x\,dt}{\cos x}=\frac{-(t-1)\,dt}{(t-1)^2\sqrt{t^2-2t}}=\frac{-\,dt}{(t-1)\sqrt{t(t-2)}}\\ \hline x\in\left\langle\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\,\pi+2k\pi\right),k\in Z\Rightarrow 0\geq\cos x=-\frac{\sqrt{t^2-2t}}{t-1},\ dx=\frac{dt}{(t-1)\sqrt{t(t-2)}}\end{array}\right]=$
$=\int\frac{\mp\sqrt{t}\,dt}{(t-1)\sqrt{t-2}\,\sqrt{t}}=\mp\int\frac{dt}{(t-1)\sqrt{t-2}}\overset{\text{pr. 1.1.33 f)}}{=\!=\!=\!=}\mp 2\operatorname{arctg}\sqrt{t-2}+c=$
$=\begin{cases}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{\sin x}-1}+c,\ x\in\left(0+2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\rangle,\ k\in Z,\ c\in R,\\ 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{\sin x}-1}+c,\ x\in\left\langle\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\,\pi+2k\pi\right),\ k\in Z,\ c\in R.\end{cases}$

h) $\int\operatorname{tg}^3x\,dx=\left[\begin{array}{l}\text{1. ms:}\qquad t=\operatorname{tg}x,\ dx=\frac{dt}{t^2+1},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in Z\\ dt=\frac{dx}{\cos^2x}=\frac{\sin^x+\cos^2x}{\cos^2x}\,dx=(\operatorname{tg}^2x+1)\,dx=(t^2+1)\,dx,\ t\in R\end{array}\right]=\int\frac{t^3\,dt}{t^2+1}=$

$$= \int \frac{t^3+t-t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int t\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1)'\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \ln\left(t^2+1\right) + c =$$
$$= \frac{\mathrm{tg}^2\,x}{2} - \ln\left(\mathrm{tg}^2\,x+1\right) + c,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in Z,\ c\in R. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.35.
Vypočítajte neurčitý integrál $I_n = \int \sinh^n x\,\mathrm{d}x$, kde $n\in N$.

Riešenie.

$$I_n = \int \sinh x\cdot\sinh^{n-1} x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u=\sinh^{n-1} x & u'=(n-1)\sinh^{n-2} x\cdot\cosh x \\ v'=\sinh x & v=\cosh x \end{array}\right] =$$
$$= \sinh^{n-1} x\cdot\cosh x - (n-1)\int \sinh^{n-2} x\cdot\cosh^2 x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sinh^{n-1} x\cdot\cosh x - (n-1)\int \sinh^{n-2} x\cdot(1+\sinh^2 x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sinh^{n-1} x\cdot\cosh x - (n-1)\int \sinh^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int \sinh^{n} x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sinh^{n-1} x\cdot\cosh x - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,\quad n=2,3,4,\ldots .$$
$$\xRightarrow{\text{rovnica}} nI_n = I_n + (n-1)I_n = \sinh^{n-1} x\cdot\cosh x - (n-1)I_{n-2},\quad n=2,3,4,\ldots \implies$$
$$I_0 = \int \mathrm{d}x = x+c,\quad I_1 = \int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + c,\quad I_n = \frac{\sinh^{n-1} x\cdot\cosh x}{n} - \frac{n-1}{n}I_{n-2},$$
$$n=2,3,4,\ldots,\ x\in R,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

$$\int \sinh^n x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}\int \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\mathrm{e}^x\right)^{n-k}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)^k\right]\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2^n}\int \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{nx-kx}(-1)^k\,\mathrm{e}^{-kx}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}\int \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,\mathrm{e}^{nx-2kx}\right]\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k\binom{n}{k}\int \mathrm{e}^{(n-2k)x}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k\binom{n}{k}J_{n-2k}\right] + c,\ x\in R,\ c\in R,$$

pričom $J_0 = \int \mathrm{d}x = x$, $J_m = \int \mathrm{e}^{mx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{mx}}{m}$ pre $m=-n,-n+2,\ldots,n-2,n,\ m\neq 0$.

Iné riešenie.
Pre nepárne $n=2m+1$, $m\in N\cup\{0\}$, môžeme použiť substitúciu $t=\cosh x$.

$$\int \sinh^{2m+1} x\,\mathrm{d}x = \int \left(\sinh^2 x\right)^m \sinh x\,\mathrm{d}x = \int \left(\cosh^2 x-1\right)^m \sinh x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\begin{array}{l} 1.\ \text{ms:}\quad t=\cosh x,\ x\in R \\ \mathrm{d}t=\sinh x\,\mathrm{d}x,\ t\in\langle 1\,;\infty) \end{array}\right] = \int (t^2-1)^m\,\mathrm{d}t = \int \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(t^2)^k(-1)^{m-k}\right]\mathrm{d}t =$$
$$= \int \left[\sum_{m=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}t^{2k}\right]\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{m}\left[\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\int t^{2k}\,\mathrm{d}t\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{m}\left[\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right] + c = \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\cosh^{2k+1}}{2k+1} + c,\ x\in R,\ c\in R. \ \blacksquare$$

Pre neurčité integrály funkcií $\sin^n x$, $\cos^n x$, $\cosh^n x$, $n\in N$ platia analogické vzorce:

$$I_n = \int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin^{n-1} x\cdot\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2},\ n=2,3,\ldots,\quad I_0 = x+c,\quad I_1 = -\cos x + c,$$
$$\text{resp.}\quad \int \sin^{2m+1} x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{k+1}\binom{m}{k}\cos^{2k+1} x}{2k+1} + c,\ m\in N\cup\{0\},\ x\in R,\ c\in R,$$

$$I_n=\int \cos^n x\, \mathrm{d}x = \tfrac{\cos^{n-1} x\cdot\sin x}{n} + \tfrac{n-1}{n} I_{n-2},\ n=2,3,\ldots,\ \ I_0 = x+c,\ \ I_1 = \sin x + c,$$

$$\text{resp.}\ \int \cos^{2m+1} x\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k \binom{m}{k} \sin^{2k+1} x}{2k+1} + c,\ m\in N\cup\{0\},\ x\in R,\ c\in R,$$

$$I_n=\int \cosh^n x\, \mathrm{d}x = \tfrac{\cosh^{n-1} x\cdot\sinh x}{n} + \tfrac{n-1}{n} I_{n-2},\ n=2,3,\ldots,\ \ I_0 = x+c,\ \ I_1 = \sinh x + c,$$

$$\text{resp.}\ \int \cosh^{2m+1} x\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k} \sinh^{2k+1} x}{2k+1} + c,\ m\in N\cup\{0\},\ x\in R,\ c\in R.$$

Nech $\alpha, \beta\in R$. Ak označíme $u=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $v=\frac{\alpha-\beta}{2}$, potom platí $u+v=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}=\alpha$, $u-v=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=\beta$. Zo súčtových vzorcov (ma1: veta 3.1.9) vyplýva:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \implies \sin u\,\cos v = \tfrac{\sin(u+v)+\sin(u-v)}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \implies \cos u\,\cos v = \tfrac{\cos(u+v)+\cos(u-v)}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2} \implies \sin u\,\sin v = \tfrac{\cos(u+v)-\cos(u-v)}{-2}.$$

Pre hyperbolické funkcie (ma1: veta 3.1.14) platia analogické vzorce:

$$\sinh u\,\cosh v = \tfrac{\sinh(u+v)+\sinh(u-v)}{2},\qquad \cosh u\,\cosh v = \tfrac{\cosh(u+v)+\cosh(u-v)}{2},$$

$$\sinh u\,\sinh v = \tfrac{\cosh(u+v)-\cosh(u-v)}{2}.$$

Príklad 1.1.36.

a) $$\int \cos^n(ax)\sin(ax)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} \text{1. ms:} & t=\cos(ax),\ x\in R \\ \mathrm{d}t = -a\sin(ax)\,\mathrm{d}x, & t\in\langle -1\,;\,1\rangle \end{array}\right] = -\int \tfrac{t^n\,\mathrm{d}t}{a} = -\tfrac{t^{n+1}}{a(n+1)} + c =$$
$$= -\tfrac{\cos^{n+1}(ax)}{a(n+1)} + c,\ x\in R,\ c\in R,\ a\in R-\{0\}.$$

b) $$\int \sin^2(ax)\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1-\cos(2ax)}{2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{x}{2} - \tfrac{\sin(2ax)}{2\cdot 2a} + c = \tfrac{x}{2} - \tfrac{\sin(2ax)}{4a} + c,$$
$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{\cos(ax+bx)-\cos(ax-bx)}{-2}\,\mathrm{d}x = \int\Big(\tfrac{\cos(a-b)x}{2} - \tfrac{\cos(a+b)x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \tfrac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \tfrac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + c,\ x\in R,\ c\in R,\ a,b\in R-\{0\},\ a\neq b.$$

c) $$\int \cos^2(ax)\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1+\cos(2ax)}{2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{x}{2} + \tfrac{\sin(2ax)}{2\cdot 2a} + c = \tfrac{x}{2} + \tfrac{\sin(2ax)}{4a} + c,$$
$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{\cos(ax+bx)+\cos(ax-bx)}{2}\,\mathrm{d}x = \int\Big(\tfrac{\cos(a-b)x}{2} + \tfrac{\cos(a+b)x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \tfrac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \tfrac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + c,\ x\in R,\ c\in R,\ a,b\in R-\{0\},\ a\neq b.$$

d) $$\int \sin(ax)\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{\sin(2ax)}{2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{-\cos(2ax)}{2\cdot 2a} + c = -\tfrac{\cos(2ax)}{4a} + c,$$
$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{\sin(ax+bx)+\sin(ax-bx)}{2}\,\mathrm{d}x = \int\Big(\tfrac{\sin(a-b)x}{2} + \tfrac{\sin(a+b)x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\tfrac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \tfrac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + c,\ x\in R,\ c\in R,\ a,b\in R-\{0\},\ a\neq b.\ \blacksquare$$

Príklad 1.1.37.
Vypočítajte neurčité integrály $\int x^n \sin(ax)\,\mathrm{d}x$, $\int x^n \cos(ax)\,\mathrm{d}x$, $n\in N$, $a\in R-\{0\}$.

Riešenie.
Pre všetky $n\in N$, $x\in R$, $a\in R-\{0\}$ platí:

$$\int x^n \sin(ax)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \sin(ax) & v = -\frac{\cos(ax)}{a} \end{array}\right] = -\frac{x^n\cos(ax)}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos(ax)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int x^n \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \cos(ax) & v = \frac{\sin(ax)}{a} \end{array}\right] = \frac{x^n\sin(ax)}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin(ax)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int x\sin(ax)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin(ax) & v = -\frac{\cos(ax)}{a} \end{array}\right] = -\frac{x\cos(ax)}{a} + \frac{1}{a}\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{x\cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2} + c,$$

$$\int x\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos(ax) & v = \frac{\sin(ax)}{a} \end{array}\right] = \frac{x\sin(ax)}{a} - \frac{1}{a}\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x\sin(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2} + c,$$

$$\int x^2\sin(ax)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin(ax) & v = -\frac{\cos(ax)}{a} \end{array}\right] = -\frac{x^2\cos(ax)}{a} + \frac{2}{a}\int x\cos(ax)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{x^2\cos(ax)}{a} + \frac{2}{a}\left(\frac{x\sin(ax)}{a} + \frac{\cos(ax)}{a^2}\right) + c = -\frac{x^2\cos(ax)}{a} + \frac{2x\sin(ax)}{a^2} + \frac{2\cos(ax)}{a^3} + c,$$

$$\int x^2\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos(ax) & v = \frac{\sin(ax)}{a} \end{array}\right] = \frac{x^2\sin(ax)}{a} - \frac{2}{a}\int x\sin(ax)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2\sin(ax)}{a} - \frac{2}{a}\left(-\frac{x\cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2}\right) + c = \frac{x^2\sin(ax)}{a} + \frac{2x\cos(ax)}{a^2} - \frac{2\sin(ax)}{a^3} + c,$$

$$\int x^3\sin(ax)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^3 & u' = 3x^2 \\ v' = \sin(ax) & v = -\frac{\cos(ax)}{a} \end{array}\right] = -\frac{x^3\cos(ax)}{a} + \frac{3}{a}\int x^2\cos(ax)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{x^3\cos(ax)}{a} + \frac{3}{a}\left(\frac{x^2\sin(ax)}{a} + \frac{2x\cos(ax)}{a^2} - \frac{2\sin(ax)}{a^3}\right) + c =$$
$$= -\frac{x^3\cos(ax)}{a} + \frac{3x^2\sin(ax)}{a^2} + \frac{6x\cos(ax)}{a^3} - \frac{6\sin(ax)}{a^4} + c,$$

$$\int x^3\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = x^3 & u' = 3x^2 \\ v' = \cos(ax) & v = \frac{\sin(ax)}{a} \end{array}\right] = \frac{x^3\sin(ax)}{a} - \frac{3}{a}\int x^2\sin(ax)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^3\sin(ax)}{a} - \frac{3}{a}\left(-\frac{x^2\cos(ax)}{a} + \frac{2x\sin(ax)}{a^2} + \frac{2\cos(ax)}{a^3}\right) + c =$$
$$= \frac{x^3\sin(ax)}{a} + \frac{3x^2\cos(ax)}{a^2} - \frac{6x\sin(ax)}{a^3} - \frac{6\cos(ax)}{a^4} + c. \blacksquare$$

Príklad 1.1.38.

a) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-7x-6} = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)(x-1)(x+3)} = \left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right] = \int\left(\frac{1}{5(x-2)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{20(x+3)}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{20}\ln|x+3| + c,\ x\in R-\{1,2,-3\},\ c\in R.$$

b) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-2x^2-x+2} = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right] = \int\left(\frac{1}{6(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{3(x-2)}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{6}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + c,\ x\in R-\{\pm1,2\},\ c\in R.$$

c) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-3x-2} = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)(x+1)^2} = \left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right] = \int\left(\frac{1}{9(x-2)} - \frac{1}{9(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{9}\ln|x-2| - \frac{1}{9}\ln|x+1| + \frac{1}{3(x+1)} + c,\ x\in R-\{-1,2\},\ c\in R.$$

d) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+x^2-x-1}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}=\left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right]=\int\Big(\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x+1)^2}\Big)dx=$
$\displaystyle=\tfrac{1}{4}\ln|x-1|-\tfrac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2(x+1)}+c,\ x\in R-\{\pm1\},\ c\in R.$

e) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-2x-4}=\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)(x-2)}=\left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right]=\int\Big(\frac{1}{10(x-2)}-\frac{x+4}{10(x^2+2x+2)}\Big)dx=$
$\displaystyle=\Big[\,x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0\,\Big]=\int\Big(\frac{1}{10(x-2)}-\frac{2x+2}{20(x^2+2x+2)}-\frac{6}{20[(x+1)^2+1]}\Big)dx=$
$\displaystyle=\tfrac{1}{20}\ln|x-2|-\tfrac{1}{20}\ln\big(x^2+2x+2\big)-\tfrac{6}{20}\,\mathrm{arctg}\,(x+1)+c,\ x\in R-\{2\},\ c\in R.$

f) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-3x^2+4x-2}=\int\frac{dx}{(x^2-2x+2)(x-1)}=\left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right]=\int\Big(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2-2x+2}\Big)dx=$
$\displaystyle=\int\Big(\frac{1}{x-1}-\frac{2x-2}{2[(x-1)^2+1]}\Big)dx=\ln|x-1|-\tfrac{1}{2}\ln\big(x^2-2x+2\big)+c,\ x\in R-\{1\},\ c\in R.$ ∎

Príklad 1.1.39.

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}}=\left[\begin{array}{r}(x+1)^2-2^2=(x-1)(x+3)<0\\ \Rightarrow x\in(-\infty\,;\,-3)\cup(1\,;\,\infty)\end{array}\right]=$
$\displaystyle=\left[\begin{array}{c|l}t=x+1 & x\in(-\infty\,;\,-3)\Rightarrow t\in(-\infty\,;\,-2)\\ dt=dx & x\in(1\,;\,\infty)\Rightarrow t\in(2\,;\,\infty)\end{array}\right]=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-4}}=\ln\big|t+\sqrt{t^2-4}\,\big|+c$
$\displaystyle=\ln\big|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\,\big|+c,\ x\in(-\infty\,;\,-3)\cup(1\,;\,\infty),\ c\in R.$

b) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+2x-3}\,dx=\int\sqrt{(x+1)^2-4}\,dx=\left[\begin{array}{c}t=x+1,\quad dt=dx\\ x\in(-\infty\,;\,-3)\cup(1\,;\,\infty)\end{array}\right]=\int\sqrt{t^2-4}\,dt=$
$\displaystyle=\frac{t\sqrt{t^2-4}}{2}-\frac{5}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-5}}=\frac{t\sqrt{t^2-4}}{2}-\frac{5}{2}\ln\big|t+\sqrt{t^2-4}\,\big|+c=$
$\displaystyle=\frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}{2}-\frac{5}{2}\ln\big|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\,\big|+c,\ x\in R-\langle-3\,;\,1\rangle,\ c\in R.$

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+3}}=\ln\big(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\,\big)+c,\ x\in R,\ c\in R.$

d) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+2x+4}\,dx=\int\sqrt{(x+1)^2+3}\,dx=\frac{(x+1)\sqrt{(x+1)^2+3}}{2}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+3}}=$
$\displaystyle=\frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x+4}}{2}+\frac{3}{2}\ln\big(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\,\big)+c,\ x\in R,\ c\in R.$

e) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}=\left[\begin{array}{r}2^2-(x-1)^2=(3-x)(1+x)<0\\ \Rightarrow x\in(-1\,;\,3)\end{array}\right]=$
$\displaystyle=\arcsin\frac{x-1}{2}+c_1=-\arccos\frac{x-1}{2}+c_2,\ x\in(-1\,;\,3),\ c_{1,2}\in R,$ resp.
$\displaystyle=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1-\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1}+c_3=-\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1}+c_4,\ x\in(-1\,;\,3),\ x\neq1,\ c_{3,4}\in R.$

f) $\displaystyle\int\sqrt{-x^2+2x+3}\,dx=\int\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx=\int\frac{4-(x-1)^2}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\,dx=$
$\displaystyle=\int\frac{4\,dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}+\int\frac{-(x-1)^2\,dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}=\left[\begin{array}{l|l}u\ =x-1 & u'=1\\ v'=\frac{-(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} & v\ =\sqrt{4-(x-1)^2}\end{array}\right]=$
$\displaystyle=4\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}+(x-1)\sqrt{4-(x-1)^2}-\int\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx.$

$\displaystyle\xRightarrow{\text{rovnica}}\int\sqrt{-x^2+2x+3}\,dx=\frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}{2}+2\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}},\ x\in(-1\,;\,3).$ ∎

Príklad 1.1.40.

a) $\displaystyle\int\sqrt{\tfrac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left[\, 0 \leq \tfrac{x+1}{x-1} = \tfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} \Leftrightarrow 0 \leq x^2-1 \;\middle|\; x\neq 1,\ x\in(-\infty\,;\,-1\rangle\cup(1\,;\,\infty)\,\right] =$

$$= \left[\begin{array}{c|l} t=\sqrt{\tfrac{x+1}{x-1}} \Rightarrow x+1=(x-1)t^2 \Rightarrow x=\tfrac{t^2+1}{t^2-1} & x\in(-\infty\,;\,-1\rangle \Rightarrow t\in\langle 0\,;\,1) \\ \mathrm{d}x=\tfrac{2t(t^2-1)-(t^2+1)2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t=\tfrac{-4t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} & x\in(1\,;\,\infty) \Rightarrow t\in(1\,;\,\infty) \end{array}\right] =$$

$$= \int\frac{-2t\cdot 2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} = \left[\begin{array}{l|l} u=2t & u'=2 \\ v'=\tfrac{-2t}{(t^2-1)^2} & v=\tfrac{1}{t^2-1} \end{array}\right] = \frac{2t}{t^2-1} - \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{2t}{t^2-1} - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c =$$

$$= \frac{2t}{t^2-1} + \ln(t+1) - \ln|t-1| + c = \left[\, \frac{t}{t^2-1} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\right] =$$

$$= (x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right) - \ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right| + c,\ x\in(-\infty\,;\,-1\rangle\cup(1\,;\,\infty),\ c\in R.$$

b) $\displaystyle\int\arcsin\sqrt{\tfrac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|l} 0\leq\tfrac{x+1}{x-1}<1 & x>1\colon 0\leq x+1<x-1 \Rightarrow -1\leq x, 1<-1 \Rightarrow \text{spor} \\ x\neq 1 & x<1\colon 0\geq x+1>x-1 \Rightarrow -1\geq x, 1>-1 \Rightarrow x\in(-\infty\,;\,-1\rangle \end{array}\right] =$

$$= \left[\begin{array}{l|l} v'=1 & v=x \\ u=\arcsin\sqrt{\tfrac{x+1}{x-1}} & u'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x+1}{x-1}}}\,\frac{\frac12}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\,\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{\frac12}{\sqrt{\frac{-2}{x-1}\,\frac{x+1}{x-1}}}\,\frac{-2}{\sqrt{(x-1)^4}} = \\ & = \frac{-1}{|x-1|\,\sqrt{-2(x+1)}} = \frac{-1}{\sqrt2(1-x)\sqrt{-(x+1)}} = \frac{\sqrt2}{2(x-1)\sqrt{-x-1)}} \end{array}\right] =$$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{\sqrt2}{2}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{-x-1}} = \left[\begin{array}{c} t=\sqrt{-x-1},\ \ t^2=-x-1,\ \ x=-(t^2+1) \\ x-1=-t^2-2,\ \ \mathrm{d}x=-2t\,\mathrm{d}t,\ \ t\in\langle 0\,;\,\infty) \end{array}\right] =$$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{\sqrt2}{2}\int\frac{(t^2+1)2t\,\mathrm{d}t}{(-t^2-2)t} = x\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt2\int\frac{(t^2+2-1)\,\mathrm{d}t}{t^2+2} =$$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt2\int\mathrm{d}t - \sqrt2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = x\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt2 t - \frac{\sqrt2}{\sqrt2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt2} + c =$$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt2\sqrt{-x-1} - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{-x-1}{2}} + c,\ x\in(-\infty\,;\,-1\rangle,\ c\in R.$$

Iné riešenie.

b) $\displaystyle\int\arcsin\sqrt{\tfrac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|l} t=x-1,\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t & x\in(-\infty\,;\,-1\rangle \\ x+1=t+2 & t\in(-\infty\,;\,-2\rangle \end{array}\right] = \int\arcsin\sqrt{\tfrac{t+2}{t}}\,\mathrm{d}t =$

$$= \left[\begin{array}{l|l} v'=1 & v=t \qquad\qquad |t|=-t,\quad \left(\tfrac{t+2}{t}\right)'=\left(1+\tfrac{2}{t}\right)'=-\tfrac{2}{t^2} \\ u=\arcsin\sqrt{\tfrac{t+2}{t}} & u'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t+2}{t}}}\,\frac{\frac12}{\sqrt{\frac{t+2}{t}}}\,\frac{-2}{t^2} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{-2}{t}\,\frac{t+2}{t}\,t^4}} = \frac{-1}{|t|\sqrt{-2(t+2)}} = \frac{\sqrt2}{2t\sqrt{-t-2}} \end{array}\right] =$$

$$= t\arcsin\sqrt{\frac{t+2}{t}} - \frac{\sqrt2}{2}\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{t\sqrt{-t-2}} = t\arcsin\sqrt{\frac{t+2}{t}} + \frac{\sqrt2}{2}\int\frac{-\,\mathrm{d}t}{\sqrt{-t-2}} = \left[\begin{array}{c} z=-t-2,\ \ t<-2 \\ \mathrm{d}z=-\,\mathrm{d}t,\ \ z>0 \end{array}\right] =$$

$$= t\arcsin\sqrt{\frac{t+2}{t}} + \frac{\sqrt2}{2}\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt z} = t\arcsin\sqrt{\frac{t+2}{t}} + \frac{\sqrt2}{2}\,\frac{\sqrt z}{\frac12} + c = \left[\begin{array}{c} z=-t-2=-x-1 \\ z>0 \Rightarrow t<-2 \Rightarrow x<-1 \end{array}\right] =$$

$$= (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt2\sqrt{-x-1} + c,\ x\in(-\infty\,;\,-1),\ c\in R. \ \blacksquare$$

Príklad 1.1.41.

a) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6+1} = \int\left(\frac{\frac13}{x^2+1} + \frac{-\frac{x\sqrt3}{6}+\frac26}{x^2-\sqrt3x+1} + \frac{\frac{x\sqrt3}{6}+\frac26}{x^2+\sqrt3x+1}\right)\mathrm{d}x =$

$$= \frac13\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{\sqrt3}{12}\left[\int\frac{(2x+\sqrt3)\,\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt3x+1} - \int\frac{(2x-\sqrt3)\,\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt3x+1}\right] + \frac{1}{12}\left[\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{\sqrt3}{2})^2+\frac{1}{2^2}} + \int\frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{\sqrt3}{2})^2+\frac{1}{2^2}}\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{arctg}\,x}{3} + \frac{\sqrt3\ln(x^2+\sqrt3x+1)}{12} - \frac{\sqrt3\ln(x^2-\sqrt3x+1)}{12} + \frac{\mathrm{arctg}\,(2x+\sqrt3)}{6} + \frac{\mathrm{arctg}\,(2x-\sqrt3)}{6} + c =$$

$$= \tfrac{\sqrt{3}}{12} \ln \tfrac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \tfrac{\operatorname{arctg} x}{3} + \tfrac{\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})}{6} + \tfrac{\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})}{6} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

b) $$\int \tfrac{x\,dx}{x^6+1} = \int \Big(\tfrac{\frac{x}{3}}{x^2+1} + \tfrac{-\frac{x}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \tfrac{-\frac{x}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}}{x^2+\sqrt{3}x+1} \Big)\,dx =$$
$$= \tfrac{1}{6}\int \tfrac{2x\,dx}{x^2+1} - \tfrac{1}{12}\Big[\int \tfrac{(2x+\sqrt{3})\,dx}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \int \tfrac{(2x-\sqrt{3})\,dx}{x^2-\sqrt{3}x+1}\Big] + \tfrac{\sqrt{3}}{12}\Big[\int \tfrac{dx}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2^2}} - \int \tfrac{dx}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2^2}}\Big] =$$
$$= \tfrac{\ln(x^2+1)}{6} - \tfrac{\ln(x^2+\sqrt{3}x+1)}{12} - \tfrac{\ln(x^2-\sqrt{3}x+1)}{12} + \tfrac{\sqrt{3}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})}{6} + \tfrac{\sqrt{3}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})}{6} + c =$$
$$= \tfrac{1}{12}\ln \tfrac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + \tfrac{\sqrt{3}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})}{6} + \tfrac{\sqrt{3}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})}{6} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

c) $$\int \tfrac{x^2\,dx}{x^6+1} = \int \Big(\tfrac{-\frac{1}{3}}{x^2+1} + \tfrac{\frac{1}{6}}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \tfrac{\frac{1}{6}}{x^2+\sqrt{3}x+1} \Big)\,dx =$$
$$= -\tfrac{\operatorname{arctg} x}{3} + \tfrac{\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})}{3} + \tfrac{\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})}{3} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

d) $$\int \tfrac{x^3\,dx}{x^6+1} = \int \Big(\tfrac{-\frac{x}{3}}{x^2+1} + \tfrac{\frac{x}{6}}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \tfrac{\frac{x}{6}}{x^2+\sqrt{3}x+1} \Big)\,dx =$$
$$= -\tfrac{1}{6}\int \tfrac{2x\,dx}{x^2+1} + \tfrac{1}{12}\Big[\int \tfrac{(2x+\sqrt{3})\,dx}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \int \tfrac{(2x-\sqrt{3})\,dx}{x^2-\sqrt{3}x+1}\Big] + \tfrac{\sqrt{3}}{12}\Big[\int \tfrac{dx}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2^2}} - \int \tfrac{dx}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2^2}}\Big] =$$
$$= -\tfrac{\ln(x^2+1)}{6} + \tfrac{\ln(x^2+\sqrt{3}x+1)}{12} + \tfrac{\ln(x^2-\sqrt{3}x+1)}{12} + \tfrac{\sqrt{3}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})}{6} + \tfrac{\sqrt{3}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})}{6} + c =$$
$$= \tfrac{1}{12}\ln \tfrac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} + \tfrac{\sqrt{3}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})}{6} + \tfrac{\sqrt{3}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})}{6} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

e) $$\int \tfrac{x^4\,dx}{x^6+1} = \int \Big(\tfrac{\frac{1}{3}}{x^2+1} + \tfrac{\frac{x\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{6}}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \tfrac{-\frac{x\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{6}}{x^2+\sqrt{3}x+1} \Big)\,dx =$$
$$= \tfrac{1}{3}\int \tfrac{dx}{x^2+1} + \tfrac{\sqrt{3}}{12}\Big[\int \tfrac{(2x-\sqrt{3})\,dx}{x^2-\sqrt{3}x+1} - \int \tfrac{(2x+\sqrt{3})\,dx}{x^2+\sqrt{3}x+1}\Big] + \tfrac{1}{12}\Big[\int \tfrac{dx}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2^2}} + \int \tfrac{dx}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2^2}}\Big] =$$
$$= \tfrac{\operatorname{arctg} x}{3} + \tfrac{\sqrt{3}\ln(x^2-\sqrt{3}x+1)}{12} - \tfrac{\sqrt{3}\ln(x^2+\sqrt{3}x+1)}{12} + \tfrac{\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})}{6} + \tfrac{\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})}{6} + c =$$
$$= \tfrac{\sqrt{3}}{12}\ln \tfrac{x^2-\sqrt{3}x+1}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \tfrac{\operatorname{arctg} x}{3} + \tfrac{\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3})}{6} + \tfrac{\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})}{6} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

f) $$\int \tfrac{x^5\,dx}{x^6+1} = \int \Big(\tfrac{\frac{2x}{6}}{x^2+1} + \tfrac{\frac{2x}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \tfrac{\frac{2x}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}}{x^2+\sqrt{3}x+1} \Big)\,dx =$$
$$= \tfrac{\ln(x^2+1)}{6} + \tfrac{\ln(x^2+\sqrt{3}x+1)}{6} + \tfrac{\ln(x^2-\sqrt{3}x+1)}{6} + c = \tfrac{\ln(x^6+1)}{6} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

Všetky integrály sú riešené rozkladom na parciálne zlomky a následnou úpravou na tabuľkové integrály. Platí $x^6+1 = (x^2+1)(x^4-x^2+1) = (x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$ a tiež $x^2\pm\sqrt{3}x+1 = (x\pm\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2^2} > 0$, $x^4-x^2+1>0$.

Iné riešenie.

Niekedy je rozumnejšie najprv použiť nejakú vhodnú substitúciu a až potom integrand rozkladať na parciálne zlomky.

b) $$\int \tfrac{x\,dx}{x^6+1} = \left[\begin{array}{l} 1.\text{ ms:}\quad t = x^2,\ x\in R \\ dt = 2x\,dx,\ t\in\langle 0;\infty) \end{array}\right] = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{dt}{t^3+1} = \tfrac{1}{2}\int \Big(\tfrac{\frac{1}{3}}{t+1} + \tfrac{-\frac{t}{3}+\frac{2}{3}}{t^2-t+1} \Big)\,dt =$$
$$= \tfrac{1}{6}\int \tfrac{dt}{t+1} - \tfrac{1}{12}\int \tfrac{(2t-1)\,dt}{t^2-t+1} + \tfrac{1}{4}\int \tfrac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \tfrac{\ln(t+1)}{6} - \tfrac{\ln(t^2-t+1)}{12} + \tfrac{1}{4}\tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\tfrac{2t-1}{\sqrt{3}} + c =$$
$$= \tfrac{1}{12}\ln\tfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \tfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\tfrac{2t-1}{\sqrt{3}} + c = \tfrac{1}{12}\ln\tfrac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + \tfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\tfrac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

c) $$\int \tfrac{x^2\,dx}{x^6+1} = \left[\begin{array}{c} t = x^3,\ x\in R \\ dt = 3x^2\,dx,\ t\in R \end{array}\right] = \tfrac{1}{3}\int \tfrac{dt}{t^2+1} = \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg} t + c = \tfrac{\operatorname{arctg} x^3}{3} + c,\ x\in R,\ c\in R.$$

d) $\displaystyle\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^6+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2\cdot 2x\,\mathrm{d}x}{x^6+1}=\left[\begin{array}{l}1.\text{ ms:}\quad t=x^2,\ x\in R\\ \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x,\ t\in\langle 0\,;\,\infty)\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3+1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{t+1}+\frac{\frac{t}{3}+\frac{1}{3}}{t^2-t+1}\right)\mathrm{d}t=$

$\displaystyle=-\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}+\frac{1}{12}\int\frac{(2t-1)\,\mathrm{d}t}{t^2-t+1}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=-\frac{\ln|t+1|}{6}+\frac{\ln(t^2-t+1)}{12}+\frac{2}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+c=$

$\displaystyle=\frac{1}{12}\ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+c=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+c,\ x\in R,\ c\in R.$

f) $\displaystyle\int\frac{x^5\,\mathrm{d}x}{x^6+1}=\left[\begin{array}{l}1.\text{ ms:}\quad t=x^6+1,\ x\in R\\ \mathrm{d}t=6x^5\,\mathrm{d}x,\quad t\in\langle 0\,;\,\infty)\end{array}\right]=\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{6}\ln t+c=\frac{\ln(x^6+1)}{6}+c,\ x\in R,\ c\in R.$ ■

Príklad 1.1.42.

a) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{[\ln x]'}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\ln|\ln x|+c,\ x\in(0\,;\,\infty),\ c\in R.$

b) $\displaystyle\int\frac{\ln\operatorname{arctg}x}{x^2+1}=\left[\begin{array}{ll}t=\operatorname{arctg}x, & x\in(0\,;\,\infty)\\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}, & t\in(0\,;\,\frac{\pi}{2})\end{array}\right]=\int\ln t\,\mathrm{d}t\overset{\text{pr. 1.1.6 b)}}{=\!=\!=}t\ln t-t+c=$

$\displaystyle=\operatorname{arctg}x\cdot\ln\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}x+c,\ x\in(0\,;\,\infty),\ c\in R.$

c) $\displaystyle\int x^x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l|l}u=x^x & u'=\left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)'=\mathrm{e}^{x\ln x}\left(\ln x+\frac{x}{x}\right)=\\ v'=1 & v=x\qquad\qquad\qquad\quad=x^x(1+\ln x)\end{array}\right]=x^x+c,\ x>0,\ c\in R.$

d) $\displaystyle\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l|l}u=\ln x & u'=\frac{1}{x}\\ v'=x^{-\frac{1}{2}} & v=2x^{\frac{1}{2}}\end{array}\right]=2x^{\frac{1}{2}}\ln x-2\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\ln x-\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=$

$\displaystyle=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+c,\ x\in(0\,;\,\infty),\ c\in R.$

e) $\displaystyle\int\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l|l}u'=1 & u=x\\ v=\ln(x^2+1) & v'=\frac{2x}{x^2+1}\end{array}\right]=x\ln(x^2+1)-\int\frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{x^2+1}=$

$\displaystyle=x\ln(x^2+1)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=x\ln(x^2+1)-2\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=$

$\displaystyle=x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+c,\ x\in R,\ c\in R.$

f) $\displaystyle\int x\ln^2x\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l|l}u=\ln^2x & u'=\frac{2\ln x}{x}\\ v'=x & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right]=\frac{x^2\ln^2x}{2}-\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l|l}u=\ln x & u'=\frac{1}{x}\\ v'=x & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right]=$

$\displaystyle=\frac{x^2\ln^2x}{2}-\left[\frac{x^2\ln x}{2}-\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{2}\right]=\frac{x^2\ln^2x}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}+c,\ x\in(0\,;\,\infty),\ c\in R.$

g) $\displaystyle\int\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l|l}u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) & u'=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\\ v'=1 & v=x\end{array}\right]=$

$\displaystyle=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}=\left[\begin{array}{l}1.\text{ ms:}\ \ t=x^2+1,\ x\in R\\ \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x,\quad t\in\langle 1\,;\,\infty)\end{array}\right]=$

$\displaystyle=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}}+c=$

$\displaystyle=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+c,\ x\in R,\ c\in R.$

h) $\displaystyle\int\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l|l}u=\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right) & u'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\cdots\\ v'=1 & v=x\qquad\cdots=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}\end{array}\right]=$

$\displaystyle=x\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)-\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x=$

$\displaystyle=x\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)-\frac{x}{2}+\frac{\arcsin x}{2}+c,\ x\in(-1\,;\,1),\ c\in R.$ ■

Príklad 1.1.43.

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\int\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2dx}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\int\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1}{(x^2-(x^2-1))^2}\,dx=$

$\displaystyle=\int\frac{2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}{1}\,dx=\left[\begin{array}{ll}\text{1. ms:}\quad x^2-1=t, & 2x\,dx=dt\\ x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty), & t\in(0;\infty)\end{array}\right]=\frac{2x^3}{3}-x+\int t^{\frac12}\,dt=$

$\displaystyle=\tfrac23x^3-x+\frac{t^{\frac32}}{\frac32}+c=\frac{2x^3}{3}-x+\tfrac23\sqrt{(x^2-1)^3}+c,\ x\in(-\infty;-1\rangle\cup\langle1;\infty),\ c\in R.$

b) $\displaystyle\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac12\int\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\begin{array}{ll}\text{1. ms:}\ t=1-x^2, & x\in(-1;1)\\ dt=-2x\,dx, & t\in(0;1\rangle\end{array}\right]=$

$\displaystyle=\arcsin x-\frac12\int\frac{dt}{\sqrt t}=\arcsin x-\frac12\frac{\sqrt t}{\frac12}+c=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+c,\ x\in(-1;1),\ c\in R.$

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}}=\int\frac{\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}\right)dx}{\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}\right)\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}\right)}=\int\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}}{x-3-(x-4)}\,dx=$

$\displaystyle=\int\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}}{1}\,dx=\int\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}\right)dx=\int\left((x-3)^{\frac12}-(x-4)^{\frac12}\right)dx=$

$\displaystyle=\frac{(x-3)^{\frac32}}{\frac32}-\frac{(x-4)^{\frac32}}{\frac32}+c=\frac{2\sqrt{(x-3)^3}}{3}-\frac{2\sqrt{(x-4)^3}}{3}+c,\ x\in\langle4;\infty),\ c\in R.$

d) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx=\left[\begin{array}{l|l}u=\sqrt{1-x^2} & u'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\\ v'=\frac{1}{x^2} & v=-\frac1x\end{array}\right]=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$\displaystyle=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+c,\ x\in\langle-1;0)\cup(0;1\rangle,\ c\in R.$

e) $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\int\frac{1+2\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{1-(1-x^2)}\,dx=\int\frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx=$

$\displaystyle=\int\left(\frac{2}{x^2}-1+\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^2}\right)dx\ \overset{d)}{=\!=}\ -\frac2x-x-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x}-2\arcsin x+c,\ x\in\langle-1;1\rangle,\ x\neq0,\ c\in R.$

f) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt x}}\,dx=\left[\begin{array}{ll}x\geq0,\ x\sqrt x=\sqrt{x^3}, & x\in\langle0;1)\\ 1-\sqrt{x^3}>0\Rightarrow1>\sqrt{x^3}\Rightarrow1>x & \end{array}\right]=\int\frac{\sqrt x\,dx}{1-x\sqrt x}=\left[\begin{array}{ll}t=\sqrt x, & x=t^2\\ dx=2t\,dt, & t\in\langle0;1)\end{array}\right]=$

$\displaystyle=\int\frac{2t^2\,dt}{\sqrt{1-t^3}}=\left[\begin{array}{l}u=1-t^3,\ u\in(0;1\rangle\\ du=-3t^2\,dt\end{array}\right]=-\frac23\int\frac{du}{\sqrt u}=-\frac23\frac{\sqrt u}{\frac12}+c=-\frac43\sqrt u+c=$

$\displaystyle=-\frac43\sqrt{1-t^3}+c=-\frac43\sqrt{1-x\sqrt x}+c,\ x\in\langle0;1),\ c\in R.$

g) $\displaystyle\int\frac{1-x}{x\sqrt{x-x^2}}\,dx=\left[\begin{array}{l}\text{3. ES:}\quad t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}\Rightarrow t^2=\frac1x-1\Rightarrow x=\frac{1}{t^2+1},\ dx=\frac{-2t\,dt}{(t^2+1)^2}\\ x(1-x)>0\Rightarrow x\in(0;1)\Rightarrow t\in(0;\infty),\ \ \frac{1-x}{\sqrt{x(1-x)}}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t\end{array}\right]=\int\frac{t\frac{-2t\,dt}{(t^2+1)^2}}{\frac{1}{t^2+1}}=$

$\displaystyle=\int\frac{-2t^2\,dt}{t^2+1}=\int\frac{(2-t^2-2)\,dt}{t^2+1}=\int\left(\frac{2}{t^2+1}-2\right)dt=2\,\mathrm{arctg}\,t-2t+c=$

$\displaystyle=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}-2\sqrt{\frac{1-x}{x}}+c,\ x\in(0;1),\ c\in R.$

h) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-x^2}}{x}\,dx=\left[\begin{array}{l}x\neq0,\ x(1-x)\geq0\\ x\in(0;1\rangle,\ \sqrt{x^2}=x\end{array}\right]=\int\sqrt{\frac{x-x^2}{x^2}}\,dx=\int\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx=$

$\displaystyle=\left[\begin{array}{ll}\text{g):}\quad t=\sqrt{\frac{1-x}{x}}, & t\in\langle0;\infty)\\ x=\frac{1}{t^2+1}, & dx=\frac{-2t\,dt}{(t^2+1)^2}\end{array}\right]=\int\frac{-2t^2\,dt}{(t^2+1)^2}\ \overset{\text{pr. 1.1.17 a)}}{=\!=\!=\!=}\ -\mathrm{arctg}\,t+\frac{t}{t^2+1}+c=$

$\displaystyle=-\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+x\sqrt{\frac{1-x}{x}}+c=-\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+\sqrt{x-x^2}+c,\ x\in(0;1\rangle,\ c\in R.$ ■

Príklad 1.1.44.

a) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}=\left[\begin{array}{l} 1.\ \text{ms} \qquad t=\frac{1}{x^2+1},\quad x=\sqrt{\frac{1-t}{t}},\quad x\in R-\{0\},\quad t\in(0\,;\,1) \\ x^2=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t},\ \ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\frac{-t-(1-t)}{t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\frac{-\,\mathrm{d}t}{2t^2} \end{array}\right]=\int\frac{\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\frac{-\,\mathrm{d}t}{2t^2}}{\frac{1-t}{t}\sqrt{\frac{1}{t}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{1-t}}=-\frac{1}{2}\int(1-t)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\,\frac{-(1-t)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+c=-\frac{1}{\sqrt{1-t}}+c=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}}+c=-\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}}+c=-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+c,\ x\in(-\infty\,;\,0)\cup(0\,;\,\infty),\ c\in R.$$

b) $$\int\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}=\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}},\ \ t^2=\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\Rightarrow t^2+t^2\,\mathrm{e}^x=1-\mathrm{e}^x\Rightarrow\mathrm{e}^x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x=\ln\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad\qquad \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\geq 0\Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^x\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty\,;\,0\rangle\Leftrightarrow t\in\langle 0\,;\,1) \\ \hline \mathrm{d}x=\big[\ln(1-t^2)-\ln(1+t^2)\big]'=\big(\frac{-2t}{1-t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\big)\,\mathrm{d}t=\big(\frac{2t}{t^2-1}-\frac{2t}{t^2+1}\big)\,\mathrm{d}t \end{array}\right]=$$

$$=\int\Big(\frac{2t^2}{t^2-1}-\frac{2t^2}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t=\int\Big(\frac{2t^2-2+2}{t^2-1}-\frac{2t^2+2-2}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t=\int\Big(2+\frac{2}{t^2-1}-2+\frac{2}{t^2+1}\Big)\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}+\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}=\ln\frac{t-1}{t+1}+2\,\mathrm{arctg}\,t+c=\left[\ \frac{t-1}{t+1}=\frac{\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}-1}{\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}+1}=\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}-\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}+\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\ \right]=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}-\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}+\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}+2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}+c,\ x\in(-\infty\,;\,0\rangle,\ c\in R.$$

c) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\left[\begin{array}{c|l} x=\frac{1}{t},\quad \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2} & x\in(1\,;\,\infty)\Rightarrow t\in(0\,;\,1),\ \ |t|=t \\ \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} & x\in(-\infty\,;\,1)\Rightarrow t\in(-1\,;\,0),\ \ |t|=-t \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pm t}}=\mp\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\mp\arcsin t+c=\mp\arcsin\frac{1}{x}+c=-\big(\pm\arcsin\frac{1}{x}\big)+c=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{nepárnosť}\\ \text{funkcie arcsin}\end{array}\right]=-\arcsin\frac{1}{\pm x}+c=-\arcsin\frac{1}{|x|}+c,\ x\in(-\infty\,;\,-1)\cup(1\,;\,\infty),\ c\in R.$$

d) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}=\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{t},\ \ \sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|},\ \ \sqrt{t^2+1}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2},\quad x\in(0\,;\,\infty)\Leftrightarrow t\in(0\,;\,\infty),\quad x\in(-\infty\,;\,0)\Leftrightarrow t\in(-\infty\,;\,0) \end{array}\right]=\int\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t}\,\frac{\sqrt{t^2+1}}{\pm t}}=$$

$$=\int\frac{\mp\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}=\mp\ln\big(t+\sqrt{t^2+1}\big)+c=\mp\ln\Big(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{\pm x}\Big)=\mp\ln\frac{1\pm\sqrt{1+x^2}}{x}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}{x(1+\sqrt{1+x^2})}=\frac{1-(1+x^2)}{x(1+\sqrt{1+x^2})}=\frac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}},\qquad x\leq 0\Rightarrow|x|=-x \\ x\geq 0\Rightarrow\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|},\quad x\leq 0\Rightarrow\ln\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}=\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}=-\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|} \end{array}\right]=$$

$$=-\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|}+c=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+c,\ x\in(-\infty\,;\,0)\cup(0\,;\,\infty),\ c\in R.$$

e) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}=\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{t},\ \ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2-1}}{|t|},\ \ \sqrt{t^2-1}=\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} \\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2},\quad x\in(0\,;\,1)\Leftrightarrow t\in(1\,;\,\infty),\quad x\in(-1\,;\,0)\Leftrightarrow t\in(-\infty\,;\,-1) \end{array}\right]=\int\frac{-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{\frac{1}{t}\,\frac{\sqrt{t^2-1}}{\pm t}}=$$

$$=\int\frac{\mp\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}=\mp\ln\big|t+\sqrt{t^2+1}\big|+c=\mp\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pm x}\right|=\mp\ln\left|\frac{1\pm\sqrt{1-x^2}}{x}\right|=$$

$$=\left[\ x<0\Rightarrow\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|=\ln\left|\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x(1+\sqrt{1-x^2})}\right|=\ln\left|\frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})}\right|=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|\ \right]=$$

$$=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+c,\ x\in(-1\,;\,0)\cup(0\,;\,1),\ c\in R.$$

f) $$\int\frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x\cdot x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\begin{array}{l} 1.\ \text{ms:}\qquad t=1-x^2,\ \ \mathrm{d}t=-2x\,\mathrm{d}x \\ x^2=1-t,\ \ x\in(-1\,;\,1),\ \ t\in(0\,;\,1\rangle \end{array}\right]=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-t)^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}=$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int \tfrac{1-2t+t^2}{\sqrt{t}}\,dt = \int\Big(-\tfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}t^{\frac{3}{2}}\Big)\,dt = -\tfrac{t^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}} + \tfrac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \tfrac{t^{\frac{5}{2}}}{2\cdot\frac{5}{2}} + c =$$
$$= -\sqrt{t} + \tfrac{2\sqrt{t^3}}{3} - \tfrac{\sqrt{t^5}}{5} + c = -\sqrt{1-x^2} + \tfrac{2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \tfrac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5} + c,\ x\in(-1\,;\,1),\ c\in R.$$

g) $$\int\tfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \left[\begin{array}{c} x=t^3,\ t=\sqrt[3]{x},\ x\in\langle 0\,;\,\infty)\\ dx=3t^2\,dt \quad t\in\langle 0\,;\,\infty)\end{array}\right] = \int\tfrac{3t^2\,dt}{1+t} = \left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right] = \int\Big(3t-3+\tfrac{3}{t+1}\Big)dt =$$
$$= \tfrac{3t^2}{2} - 3t + 3\ln(t+1) + c = \tfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln(1+\sqrt[3]{x}) + c,\ x\in\langle 0\,;\,\infty),\ c\in R.$$

h) $$\int\tfrac{dx}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[4]{x}} = \left[\begin{array}{c} x=t^{12},\ t=\sqrt[12]{x},\ x\in\langle 0\,;\,\infty)\\ dx=12t^{11}\,dt \quad t\in\langle 0\,;\,\infty)\end{array}\right] = \int\tfrac{12t^{11}\,dt}{t^2+t^3} = \int\tfrac{12t^9\,dt}{1+t} = \left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right] =$$
$$= \int\Big(12t^8 - 12t^7 + 12t^6 - 12t^5 + 12t^4 - 12t^3 + 12t^2 - 12t + 12 - \tfrac{12}{1+t}\Big)\,dt =$$
$$= \tfrac{4t^9}{3} - \tfrac{3t^8}{2} + \tfrac{12t^7}{7} - 2t^6 + \tfrac{12t^5}{5} - 3t^4 + 4t^3 - 6t^2 + 12t - 12\ln(1+t) + c =$$
$$= \tfrac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - \tfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + \tfrac{12\sqrt[12]{x^7}}{7} - 2\sqrt{x} + \tfrac{12\sqrt[4]{x^5}}{5} - 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} -$$
$$-12\ln(1+\sqrt[12]{x}) + c,\ x\in(0\,;\,\infty),\ c\in R. \blacksquare$$

Príklad 1.1.45.
Vypočítajte: a) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$, b) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, c) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Riešenie.
a) Výpočet rozdelíme na dve časti (pre $x>0$ a pre $x<0$).

$$x\in(0\,;\,1) \Rightarrow \int\tfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \left[\begin{array}{c} t=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1} = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{|x|} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x},\ t^3=\frac{1-x^3}{x^3},\ t\in(0\,;\,\infty)\\ x^3=\frac{1}{t^3+1},\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}},\ dx=\frac{-\frac{1}{3}\cdot 3t^2\,dt}{\sqrt[3]{(t^3+1)^4}},\ \sqrt[3]{1-x^3}=tx=\frac{t}{\sqrt[3]{t^3+1}}\end{array}\right] =$$
$$= \int\frac{\frac{-t^2\,dt}{\sqrt[3]{(t^3+1)^4}}}{\frac{t}{\sqrt[3]{t^3+1}}} = \int\tfrac{-t\,dt}{t^3+1} = \left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right] = \int\Big(\tfrac{\frac{1}{3}}{t+1} + \tfrac{-\frac{t}{3}-\frac{1}{3}}{t^2-t+1}\Big)\,dt = \Big[\text{úpravy}\Big] =$$
$$= \tfrac{2}{6}\int\tfrac{dt}{t+1} - \tfrac{1}{6}\int\tfrac{(2t-1)\,dt}{t^2-t+1} - \tfrac{3}{6}\int\tfrac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \tfrac{2\ln(t+1)}{6} - \tfrac{\ln(t^2-t+1)}{6} - \tfrac{3}{6\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\tfrac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c =$$
$$= \tfrac{1}{6}\ln\tfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\tfrac{2t-1}{\sqrt{3}} + c = \tfrac{1}{6}\ln\tfrac{(t+1)^3}{t^3+1} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\tfrac{2t-1}{\sqrt{3}} + c =$$
$$= \left[\ln\tfrac{(t+1)^3}{t^3+1} = \ln\frac{\big(\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}+1\big)^3}{\frac{1}{x^3}} = \ln\big(\sqrt[3]{1-x^3}+x\big)^3 = 3\ln\Big(\sqrt[3]{1-x^3}+x\Big)\right] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln\Big(\sqrt[3]{1-x^3}+x\Big) - \tfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\tfrac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x\sqrt{3}} + c,\ c\in R.$$

$$x\in(-\infty\,;\,0) \Rightarrow \int\tfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \left[\begin{array}{c} t=\sqrt[3]{-(\frac{1}{x^3}-1)} = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{-x^3}} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{|x|} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{-x}, \quad t\in(1\,;\,\infty)\\ x^3=\frac{-1}{t^3-1},\ x=\frac{-1}{\sqrt[3]{t^3-1}},\ dx=\frac{-\frac{-1}{3}\cdot 3t^2\,dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}},\ \sqrt[3]{1-x^3}=-tx=\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}\end{array}\right] =$$
$$= \int\frac{\frac{t^2\,dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}}}{\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}} = \int\tfrac{t\,dt}{t^3-1} = \left[\begin{array}{c}\text{rozklad na}\\ \text{parc. zlomky}\end{array}\right] = \int\Big(\tfrac{\frac{1}{3}}{t-1} + \tfrac{-\frac{t}{3}+\frac{1}{3}}{t^2+t+1}\Big)\,dt = \Big[\text{úpravy}\Big] =$$
$$= \tfrac{2}{6}\int\tfrac{dt}{t-1} - \tfrac{1}{6}\int\tfrac{(2t+1)\,dt}{t^2+t+1} + \tfrac{3}{6}\int\tfrac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \tfrac{2\ln(t-1)}{6} - \tfrac{\ln(t^2+t+1)}{6} + \tfrac{3}{6\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\tfrac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c =$$
$$= \tfrac{1}{6}\ln\tfrac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\tfrac{2t+1}{\sqrt{3}} + c = \left[\begin{array}{c}\text{nepárnosť}\\ \text{funkcie arctg}\end{array}\right] = \tfrac{1}{6}\ln\tfrac{(t-1)^3}{t^3-1} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\tfrac{-2t-1}{\sqrt{3}} + c =$$
$$= \left[\ln\tfrac{(t-1)^3}{t^3-1} = \ln\frac{\big(\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{-x}-1\big)^3}{\frac{-1}{x^3}} = \ln\big(\sqrt[3]{1-x^3}+x\big)^3 = 3\ln\Big(\sqrt[3]{1-x^3}+x\Big)\right] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln\Big(\sqrt[3]{1-x^3}+x\Big) - \tfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\tfrac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x\sqrt{3}} + c,\ c\in R.$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x\sqrt{3}} + c,\ x\in(-\infty\,;\,0)\cup(0\,;\,1),\ c\in R.$$

b) Postup je analogický ako v časti a). Stručne ho načrtneme.

$$x\in(0\,;\,\infty) \Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x},\ t^3=\frac{1+x^3}{x^3},\quad t\in(1\,;\,\infty) \\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}},\ dx=\frac{-t^2\,dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}},\ \sqrt[3]{1+x^3}=\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} \end{array}\right] = \int\frac{-t\,dt}{t^3-1} =$$

$$\overset{a)}{=\!=} -\frac{1}{6}\ln\frac{(t-1)^3}{t^3-1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c = \left[\ \ln\frac{(t-1)^3}{t^3-1}=\ln\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}-1\right)^3}{\frac{1}{x^3}}=3\ln\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)\ \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}+c,\ c\in R.$$

$$x\in(-1\,;\,0) \Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt[3]{-\left(\frac{1}{x^3}+1\right)}=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{-x},\ t^3=\frac{1+x^3}{-x^3},\ t\in(0\,;\,\infty) \\ x=\frac{-1}{\sqrt[3]{t^3+1}},\ dx=\frac{t^2\,dt}{\sqrt[3]{(t^3+1)^4}},\ \sqrt[3]{1+x^3}=\frac{t}{\sqrt[3]{t^3+1}} \end{array}\right] = \int\frac{t\,dt}{t^3+1} =$$

$$\overset{a)}{=\!=} -\frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^3}{t^3+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+c = \left[\ \ln\frac{(t+1)^3}{t^3+1}=\ln\frac{\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{-x}+1\right)^3}{\frac{-1}{x^3}}=3\ln\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)\ \right] =$$

$$= \left[\ \operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}=-\operatorname{arctg}\frac{-2t+1}{\sqrt{3}}\ \right] = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}+c,\ c\in R.$$

$$\Longrightarrow \int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}+c,\ x\in(-1\,;\,0)\cup(0\,;\,\infty),\ c\in R.$$

c) Až na definičný obor integrálu $(1\,;\,\infty)$ je postup je analogický ako v a), resp. b).

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}=\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x},\ t^3=\frac{x^3-1}{x^3},\ x\in(1\,;\,\infty),\ t\in(0\,;\,1) \\ x^3=\frac{1}{1-t^3},\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{1-t^3}},\ dx=\frac{t^2\,dt}{\sqrt[3]{(1-t^3)^4}},\ \sqrt[3]{x^3-1}=\frac{t}{\sqrt[3]{1-t^3}} \end{array}\right] = \int\frac{t\,dt}{1-t^3} = \int\frac{-t\,dt}{t^3-1} =$$

$$\overset{a)}{=\!=} -\frac{1}{6}\ln\frac{(t-1)^3}{t^3-1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c = -\frac{1}{6}\ln\frac{(1-t)^3}{1-t^3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c =$$

$$= \left[\ \ln\frac{(t-1)^3}{t^3-1}=\ln\frac{\left(1-\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}\right)^3}{\frac{1}{x^3}}=3\ln\left(x-\sqrt[3]{x^3-1}\right)\ \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(x-\sqrt[3]{x^3-1}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^3-1}+x}{x\sqrt{3}}+c,\ x\in(1\,;\,\infty),\ c\in R.$$

Iné riešenie.
Pre $x>0$ použijeme rovnaké substitúcie, pre $x<0$ substitúcie zmeníme.

$$\text{a) } x\in(0\,;\,1) \Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \left[\ t=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}\ \right] = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x\sqrt{3}}+c.$$

$$x\in(-\infty\,;\,0) \Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \left[\begin{array}{l} x=-t,\ dx=-\,dt,\ t\in(0\,;\,\infty) \\ 1-x^3=1-(-t)^3=1+t^3 \end{array}\right] = \int\frac{-\,dt}{\sqrt[3]{1+t^3}} =$$

$$\overset{b)}{=\!=} \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+t^3}-t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+t^3}+t}{t\sqrt{3}}+c = \left[\ \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+t^3}+t}{t\sqrt{3}}=-\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+t^3}+t}{-t\sqrt{3}}\ \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1-x^3}-x}{x\sqrt{3}}+c,\ c\in R.$$

$$\text{b) } x\in(0\,;\,\infty) \Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \left[\ t=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}\ \right] = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}+c.$$

$$x\in(-1\,;\,0) \Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \left[\begin{array}{l} x=-t,\ dx=-\,dt,\ t\in(0\,;\,1) \\ 1+x^3=1+(-t)^3=1-t^3 \end{array}\right] = \int\frac{-\,dt}{\sqrt[3]{1-t^3}} =$$

$$\overset{a)}{=\!=} -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1-t^3}+t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1-t^3}-t}{t\sqrt{3}}+c = \left[\ \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1-t^3}-t}{t\sqrt{3}}=-\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1-t^3}-t}{-t\sqrt{3}}\ \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+x^3}-x\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}+c,\ c\in R. \blacksquare$$

Poznámka 1.1.7.
$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{x^n\pm 1}}$, $\int\sqrt[n]{x^n\pm 1}\,\mathrm{d}x$, $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, $\int\sqrt[n]{1-x^n}\,\mathrm{d}x$, $n=2,3,4,\ldots$ sa zaraďujú medzi tzv. ***binomické integrály*** *a racionalizujú sa pomocou substitúcií $t=\sqrt[n]{1\pm\frac{1}{x^n}}$, resp. $t=\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}\pm 1}$. Pre $n=2$ sú tieto integrály riešené v príkladoch 1.1.21, 1.1.22, 1.1.23, 1.1.24, 1.1.39.*

Cvičenia

1.1.1. Dokážte, že ak je funkcia $f(x)$, $x\in R$ periodická s periódou p, potom aj k nej primitívna funkcia $F(x)$, $x\in R$ je periodická s periódou p.

1.1.2. Vypočítajte:

a) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6}$, b) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$, c) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}$, d) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}$,
e) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+2}$, f) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$, g) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-3x^2-x+3}$, h) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-7x+6}$,
i) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+2x^2-x-2}$, j) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-x^2-4x+4}$, k) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-4x^2+5x-2}$, l) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+4x^2+5x+2}$,
m) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+3x^2-4}$, n) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-3x+2}$, o) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+2x^2+2x+1}$, p) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-2x^2+3x-2}$,
q) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-3x^2+3x-2}$, r) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$, s) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)x^2}$, t) $\int\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^3}$,
u) $\int\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+6)^3}$, v) $\int\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^3}$, w) $\int\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+3)^3}$, x) $\int\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+2)^3}$.

1.1.3. Vypočítajte:

a) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6(1+x^2)}$, b) $\int\frac{(x-1)^2\,\mathrm{d}x}{(2-x)^5}$, c) $\int\frac{(x-2)^3\,\mathrm{d}x}{(1-x)^5}$, d) $\int\frac{(x+1)^6\,\mathrm{d}x}{(-2-x)^3}$,
e) $\int\frac{(x+1)^4\,\mathrm{d}x}{(2-x)^3}$, f) $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$, g) $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$, h) $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^4}$,
i) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+6}}$, j) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+3}}$, k) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x-3}}$, l) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+3}}$,
m) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x+6}}$, n) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x-2}}$, o) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x-5}}$, p) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$,
q) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2-4x-2}}$, r) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$, s) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{2+3x}}$, t) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{-2+3x}}$,
u) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{-1-3x}}$, v) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{2+3x}}$, w) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{1-2x}}$, x) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{-1-2x}}$.

1.1.4. Vypočítajte:

a) $\int|x-1|(x-1)^6\,\mathrm{d}x$, b) $\int|x-1|(x-1)^7\,\mathrm{d}x$, c) $\int\sqrt{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x$,
d) $\int\sqrt{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x$, e) $\int\sqrt{x^2+4x-3}\,\mathrm{d}x$, f) $\int\sqrt{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$,
g) $\int\sqrt{-x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x$, h) $\int\sqrt{-x^2+4x-2}\,\mathrm{d}x$, i) $\int\sqrt{-x^2+4x-5}\,\mathrm{d}x$,
j) $\int\sqrt{-x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$, k) $\int\sqrt{-x^2-4x-2}\,\mathrm{d}x$, l) $\int\sqrt{-x^2-4x-3}\,\mathrm{d}x$,
m) $\int\frac{\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, n) $\int\frac{\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, o) $\int\frac{\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

1.1.5. Vypočítajte:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, b) $\int \frac{\sqrt{2+3x}\,dx}{x-2}$, c) $\int \frac{\sqrt{2+3x}\,dx}{x+2}$, d) $\int \frac{\sqrt{-1-2x}\,dx}{x-1}$, e) $\int \frac{\sqrt{1-2x}\,dx}{x-1}$,

f) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$, g) $\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$, h) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx$, i) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$, j) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

k) $\int \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,dx$, l) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$, m) $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{x+1}}$, n) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}+x}$, o) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$,

p) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$, q) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$, r) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x+\sqrt{x^3}}$, s) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+x}}$, t) $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$,

u) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, v) $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$, w) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, x) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4-1}}$, y) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

1.1.6. Vypočítajte:

a) $\int \arcsin x\,dx$, b) $\int x \arcsin x\,dx$, c) $\int x^2 \arcsin x\,dx$,

d) $\int \arccos x\,dx$, e) $\int x \arccos x\,dx$, f) $\int x^2 \arccos x\,dx$,

g) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, h) $\int x^2\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, i) $\int x^3\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$,

j) $\int x\,\mathrm{arctg}^2\,x\,dx$, k) $\int \mathrm{arccotg}\,x\,dx$, l) $\int x\,\mathrm{arccotg}\,x\,dx$,

m) $\int x^2\,\mathrm{arccotg}\,x\,dx$, n) $\int x^3\,\mathrm{arccotg}\,x\,dx$, o) $\int x\,\mathrm{arccotg}^2\,x\,dx$,

p) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$, q) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$, r) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx$,

s) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,dx$, t) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$, u) $\int \arccos\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$,

v) $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$, w) $\int \arccos\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,dx$, x) $\int \arccos\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

1.1.7. Vypočítajte:

a) $\int \sin^3 2x\,dx$, b) $\int \sin^4 3x\,dx$, c) $\int \cos^3 3x\,dx$, d) $\int \cos^4 2x\,dx$,

e) $\int \sinh^2 4x\,dx$, f) $\int \sinh^3 2x\,dx$, g) $\int \sinh^4 x\,dx$, h) $\int x \sinh x\,dx$,

i) $\int x^2 \sinh x\,dx$, j) $\int x^3 \sinh x\,dx$, k) $\int \cosh^2 3x\,dx$, l) $\int \cosh^3 x\,dx$,

m) $\int \cosh^4 2x\,dx$, n) $\int x \cosh x\,dx$, o) $\int x^2 \cosh x\,dx$, p) $\int x^3 \cosh x\,dx$.

1.1.8. Vypočítajte:

a) $\int \frac{dx}{\sin 2x+1}$, b) $\int \frac{dx}{2\sin 3x-5}$, c) $\int \frac{dx}{2\sin 2x+1}$, d) $\int \frac{dx}{4\sin x-3}$,

e) $\int \frac{dx}{\cos 2x-1}$, f) $\int \frac{dx}{4\cos 2x+5}$, g) $\int \frac{dx}{2\cos x+1}$, h) $\int \frac{dx}{\cos 3x+2}$,

i) $\int \frac{\sin 2x}{1-2\cos 2x}\,dx$, j) $\int \frac{\cos x}{4-3\sin x}\,dx$, k) $\int \frac{\cos 3x}{2-\sin 3x}\,dx$, l) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{4-3\cos 2x}$,

m) $\int \frac{\arcsin x\,dx}{x^2}$, n) $\int \frac{\arccos x\,dx}{x^2}$, o) $\int \frac{x \arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, p) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$,

q) $\displaystyle\int \frac{x \arccos x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$, r) $\displaystyle\int \frac{\arccos \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x}}$, s) $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arctg} x \, dx}{(x^2+1)^2}$, t) $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arctg} x \, dx}{(x^2-1)^2}$,

u) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{x^2}$, v) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{1+x^2}$, w) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arccotg} x \, dx}{1+x^2}$, x) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arccotg} x \, dx}{x^2}$.

1.1.9. Vypočítajte:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln^4 x \, dx}{x}$, b) $\displaystyle\int \frac{\ln x^4 \, dx}{x}$, c) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}} \, dx}{\sqrt{x}}$, d) $\displaystyle\int \frac{e^x \, dx}{1+e^x}$, e) $\displaystyle\int \frac{x^7 \, dx}{e^{x^2}}$, f) $\displaystyle\int \frac{x^3 \, dx}{e^{x^2}}$,

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2^x+4}}$, n) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2^x+3}}$, o) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2^x+2}}$, g) $\displaystyle\int \frac{dx}{2^x+4}$, h) $\displaystyle\int \frac{dx}{2^x+3}$, i) $\displaystyle\int \frac{dx}{2^x+2}$,

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2^x-1}}$, q) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2^x-4}}$, r) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2^x-3}}$. j) $\displaystyle\int \frac{dx}{2^x-1}$, k) $\displaystyle\int \frac{dx}{2^x-4}$, l) $\displaystyle\int \frac{dx}{2^x-3}$.

1.1.10. Vypočítajte:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}$, b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\arccos x \sqrt{1-x^2}}$, c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x}}$, d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arccotg} \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x}}$,

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$, f) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\cos^2 x+\sin^2 x}$, g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{-2+3x}}{x-2} \, dx$, h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{-1-3x}}{x+1} \, dx$,

i) $\displaystyle\int \frac{\ln \operatorname{arctg} x \, dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}$, j) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x \, dx}{\sqrt{1+\cos x^4}}$, k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+\ln x} \, dx}{x}$, l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$,

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3+x^6}}$, n) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$, o) $\displaystyle\int \frac{1-x}{x-\sqrt{x-x^2}} \, dx$, p) $\displaystyle\int \frac{1-x}{x-\sqrt{x^2-x}} \, dx$,

q) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3x+4} \, dx}{1+\sqrt[3]{3x+4}}$, r) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+1}{x\sqrt{1+x-x^2}} \, dx$, s) $\displaystyle\int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3} \, dx$, t) $\displaystyle\int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3} \, dx$.

1.1.11. Vypočítajte:

a) $\displaystyle\int |x-1|^7 \, dx$, b) $\displaystyle\int |x-1|^8 \, dx$, c) $\displaystyle\int e^{-|x|} \, dx$, d) $\displaystyle\int e^{|x|} \, dx$,

e) $\displaystyle\int x \ln x \, dx$, f) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx$, g) $\displaystyle\int x^3 \ln x \, dx$, h) $\displaystyle\int x^4 \ln x \, dx$,

i) $\displaystyle\int \ln (x+1)^7 \, dx$, j) $\displaystyle\int x^2 \ln^2 x \, dx$, k) $\displaystyle\int x^3 \ln^2 x \, dx$, l) $\displaystyle\int x^4 \ln^2 x \, dx$,

m) $\displaystyle\int \ln (2x-3)^4 \, dx$, n) $\displaystyle\int \ln (x^2+1) \, dx$, o) $\displaystyle\int x^2 e^{\sqrt{x}} \, dx$, p) $\displaystyle\int \sqrt{x} \, e^{\sqrt{x}} \, dx$,

q) $\displaystyle\int \sqrt[9]{2x-3} \, dx$, r) $\displaystyle\int \sqrt[7]{3-2x} \, dx$, s) $\displaystyle\int \frac{(x^3-1) \, dx}{e^x}$, t) $\displaystyle\int \frac{\arcsin e^x \, dx}{e^x}$,

u) $\displaystyle\int \frac{e^x (1+\sin x) \, dx}{1+\cos x}$, v) $\displaystyle\int \frac{e^x (1+\cos x) \, dx}{1-\sin x}$, w) $\displaystyle\int \frac{e^x (1-\cos x) \, dx}{1+\sin x}$, x) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} e^x \, dx}{e^x}$.

1.1.12. Vypočítajte:

a) $\displaystyle\int (x^2-1) \sin 2x \, dx$, b) $\displaystyle\int (x^3-1) \sin x \, dx$, c) $\displaystyle\int (x^3-1) \cos x \, dx$,

d) $\displaystyle\int (x^2-1) \cos 2x \, dx$, e) $\displaystyle\int (x^2+x+1) \sin 3x \, dx$, f) $\displaystyle\int (x^2+x+1) \cos 3x \, dx$,

g) $\displaystyle\int (\operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} 2x) \, dx$, h) $\displaystyle\int (x + 2)^3 \ln (x + 1)^6 \, dx$, i) $\displaystyle\int (x^2 - 1) \, e^{2x} \, dx$,

j) $\displaystyle\int (x - 1)^4 \ln (x + 1)^5 \, dx$, k) $\displaystyle\int e^x \sqrt{1 - 2 e^x} \, dx$, l) $\displaystyle\int x^2 \ln \sqrt{1 - x} \, dx$,

m) $\displaystyle\int (x + 1)^5 \ln (x - 2)^4 \, dx$, n) $\displaystyle\int (x^2 + x + 1) \, e^{3x} \, dx$, o) $\displaystyle\int e^x \sqrt{1 + e^x} \, dx$.

1.2 Riemannov určitý integrál

V tejto časti sa budeme zaoberať určitým integrálom funkcie, ktorý na rozdiel od neurčitého integrálu nie je funkcia, ale konkrétna hodnota (číslo alebo $\pm\infty$).

Určitý integrál môžeme definovať viacerými spôsobmi. My ho budeme definovať pomocou tzv. integrálnych súčtov a nazývať **Riemannov** (**určitý**) **integrál**. Niekedy sa definuje pomocou primitívnej funkcie (**Newtonov integrál**) alebo všeobecnejšie pomocou miery (**Lebesguov**, resp. **Lebesgue-Stieltjesov integrál**).

Príklad 1.2.1.
Nech $f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je kladná spojitá funkcia, $a,b\in R$, $a<b$. Určte plošný obsah množiny $P=\big\{[x;y]\in R^2\,;\,x\in\langle a\,;\,b\rangle\,,0\leq y\leq f(x)\big\}$. Množinu P nazývame **krivočiary lichobežník** určený funkciou f a intervalom $\langle a\,;\,b\rangle$.

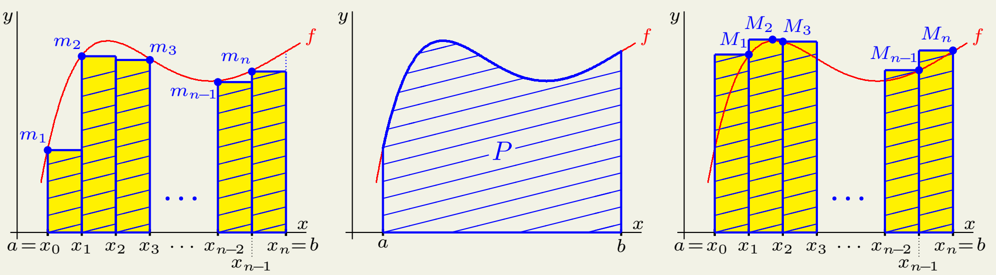
Riešenie.
Pokiaľ funkcia f nie je lineárna lomená, časť kružnice, ap., sú s našimi doterajšími vedomosťami pri určovaní obsahu P problémy. Plochu P pokryjeme neprekrývajúcimi sa obdĺžnikmi a jej obsah odhadneme pomocou súčtu obsahov týchto obdĺžnikov (obr. 1.2.1). Rozdeľme interval $\langle a\,;\,b\rangle$ pomocou bodov $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, $n\in N$ na n podintervalov $\langle x_0\,;\,x_1\rangle$, $\langle x_1\,;\,x_2\rangle$, $\ldots$, $\langle x_{n-2}\,;\,x_{n-1}\rangle$, $\langle x_{n-1}\,;\,x_n\rangle$ s rovnakou dĺžkou $\Delta x=x_1-x_0=x_2-x_1=\cdots=x_n-x_{n-1}=\frac{b-a}{n}$. Pre $i=1,2,\ldots,n$ označme

$$m_i=\min\{f(x)\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\},\qquad M_i=\max\{f(x)\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}.$$

Plochu P môžeme potom odhadnúť zhora a zdola hodnotami:

$$D_P=\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot\Delta x\leq P\leq\sum_{i=1}^{n}M_i\cdot\Delta x=H_P.$$

Je zrejmé, že keď zmenšíme Δx, odhady D_P, H_P sa zlepšia (v horšom prípade ostanú rovnaké). Pre $\Delta x\to 0$ bude platiť $D_P\to P$, $H_P\to P$ ■



Obr. 1.2.1: Krivočiary lichobežník P určený funkciou f na intervale $\langle a;\,b\rangle$ a jeho aproximácia pomocou dolných (vľavo) a horných (vpravo) integrálnych súčtov

Nech $\langle a\,;\,b\rangle$ je nedegenerovaný interval (t. j. $a<b$). **Delením intervalu** $\langle a\,;\,b\rangle$ nazývame každú konečnú množinu bodov

$$D=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}=\{x_i\}_{i=0}^{n}\,,\ n\in N,$$

takú, že $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$. Body x_0, x_1, $\ldots$, x_n sa nazývajú **deliace body** a **jednoznačne určujú** delenie D. Ak chceme zdôrazniť delený interval, potom delenie označujeme $D_{\langle a\,;\,b\rangle}$. Dĺžky intervalov $d_i=\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$ označujeme Δx_i, pričom dĺžku najdlhšieho z nich nazývame **norma delenia** D a značíme $\mu(D)$, t. j. $\mu(D)=\max\{\Delta x_i\,;\,i=1,2,\ldots,n\}$. Pre súčet dĺžok intervalov d_1, d_2, $\ldots$, d_n platí:

$$\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots+\Delta x_n=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_0=b-a.$$

Množinu všetkých delení intervalu $\langle a\,;\,b\rangle$ značíme $\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}=\{D; D \text{ je delenie } \langle a\,;\,b\rangle\}$.

Ak platí $D^*\subset D$, potom delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ nazývame **zjemnenie delenia** $D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$. Delenie $D=D^*\cup D^{**}$ nazývame **spoločné zjemenenie delení** $D^*, D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$.

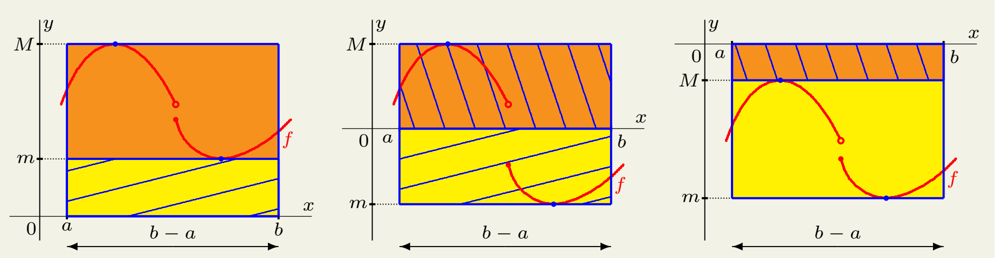
Je zrejmé, že každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ má nekonečne veľa zjemnení. Ak zvolíme ľubovoľný bod $\overline{x}\in\langle a\,;\,b\rangle-D$, potom delenie $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ je zjemnením delenia D.

Nech $f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n\in N$. Označme:

$$m_i=\inf\{f(x)\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\},\quad M_i=\sup\{f(x)\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\},\ \ i=1,2,\ldots,n.$$

Dolným $S_D(f,D)$ a **horným Riemannovým** (**integrálnym**) **súčtom** $S_H(f,D)$ funkcie f pri delení D nazývame čísla:

$$S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot\Delta x_i,\quad S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}M_i\cdot\Delta x_i.$$



Obr. 1.2.2: Veta 1.2.1

Veta 1.2.1.
$f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená
$\Longrightarrow$ množiny $\{S_D(f,D)\,;\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\}$, $\{S_H(f,D)\,;\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\}$ sú ohraničené.

Dôkaz.
Označme $m=\inf\{f(x)\,;\,x\in\langle a\,;\,b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x)\,;\,x\in\langle a\,;\,b\rangle\}$. Potom pre každé delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n\in N$ platí $m\le m_i\le M_i\le M$, $i=1,2,\ldots,n$. Potom (obr. 1.2.2):

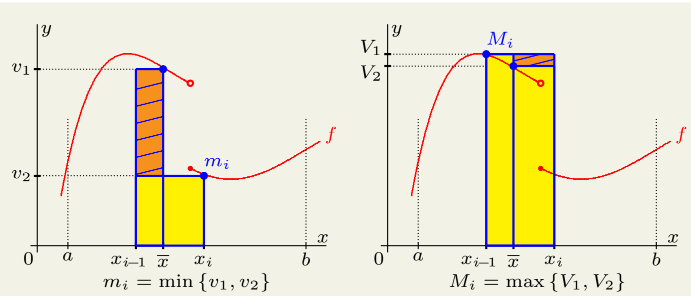
$$m(b-a)=m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}m\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=S_D(f,D)\le$$
$$\le S_H(f,D)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}M\Delta x_i=M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=M(b-a).\ \blacksquare$$

Veta 1.2.2.
$f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená, $D, D^*\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $D\subset D^*$ (D^* je zjemnením D)
$\implies S_D(f,D)\le S_D(f,D^*)\le S_H(f,D^*)\le S_H(f,D)$.

Dôkaz.
Delenie D^* vznikne z D pridaním konečného počtu bodov. To znamená, že vetu stačí dokázať pre prípad $D^*=D\cup\{\overline{x}\}$ a induktívne rozšíriť na počet pridaných bodov.
Nech $\overline{x}\in(x_{i-1}\,;\,x_i)$, pričom $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Integrálne súčty pre D a D^* sa líšia iba na intervale $\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$. Ak označíme $v_1=\inf\{f(x); x\in\langle x_{i-1}\,;\,\overline{x}\rangle\}$, $v_2=\inf\{f(x); x\in\langle \overline{x}\,;\,x_i\rangle\}$, $V_1=\sup\{f(x); x\in\langle x_{i-1}\,;\,\overline{x}\rangle\}$, $V_2=\sup\{f(x); x\in\langle \overline{x}\,;\,x_i\rangle\}$, potom platí (obr. 1.2.3):

$$\begin{aligned}S_H(f,D)-S_H(f,D^*) &= M_i(x_i-x_{i-1})-\big[V_1(x_i-\overline{x})+V_2(\overline{x}-x_{i-1})\big]=\\ &=\begin{bmatrix} M_i=\max\{V_1,V_2\}\\ V_1\le M_i,\ V_2\le M_i\end{bmatrix}\ge M_i(x_i-x_{i-1})-\big[M_i(x_i-\overline{x})+M_i(\overline{x}-x_{i-1})\big]=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_D(f,D^*)-S_D(f,D) &= v_1(x_i-\overline{x})+v_2(\overline{x}-x_{i-1})-m_i(x_i-x_{i-1})=\\ &=\begin{bmatrix} m_i=\min\{v_1,v_2\}\\ v_1\ge m_i,\ v_2\ge m_i\end{bmatrix}\ge m_i(x_i-\overline{x})+m_i(\overline{x}-x_{i-1})-m_i(x_i-x_{i-1})=0.\ \blacksquare\end{aligned}$$



Obr. 1.2.3: Veta 1.2.2

Dôsledok 1.2.2.a.
$f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená, $D^*, D^{**}\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ $\implies S_D(f,D^*)\le S_H(f,D^{**})$.

Dôkaz.
$D=D^*\cup D^{**} \xRightarrow{\text{veta 1.2.2}} S_D(f,D^*)\le S_D(f,D)\le S_H(f,D)\le S_H(f,D^{**})$. $\blacksquare$

Nech $f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená. Potom čísla

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\sup\{S_D(f,D)\,;\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\},\qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\inf\{S_H(f,D)\,;\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\}$$

nazývame **dolný** a **horný Riemannov** (**určitý**) **integrál funkcie f na intervale** $\langle a\,;\,b\rangle$ (resp. **od a po** b). Z vety 1.2.1 vyplýva, že tieto čísla **vždy existujú** a platí:

$$m(b-a)\le\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\le\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\le M(b-a),\tag{1.2}$$

pričom $m = \inf\{f(x); x \in \langle a\,;\,b\rangle\}$, $M = \sup\{f(x); x \in \langle a\,;\,b\rangle\}$.

Ak platí rovnosť medzi dolným a horným Riemannovým integrálom, potom číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazývame **Riemannov (určitý) integrál funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$**. Funkciu f nazývame **riemannovsky integrovateľná na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$** a označujeme $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$.

Príklad 1.2.2.

a) $f(x) = c$, $x \in \langle a\,;\,b\rangle$, $c \in R$ je konštanta. Pre každé delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n \in N$ pre všetky $i = 1, 2\ldots, n$ platí $c = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\} = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}$. Potom platí:

$$\left.\begin{aligned} S_D(f,D) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \\ S_H(f,D) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i \end{aligned}\right\} = \sum_{i=1}^{n} c \cdot \Delta x_i = c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a).$$

b) $\chi(x) =$ [16] $\begin{cases} 1, \ x \in \langle 0\,;\,1\rangle\,, \ x \in Q, \\ 0, \ x \in \langle 0\,;\,1\rangle\,, \ x \notin Q. \end{cases}$ Pre každé $D \in \mathfrak{D}_{\langle 0\,;\,1\rangle}$, $n \in N$ pre $i = 1, 2\ldots, n$ platí:

$$1 = \sup\{f(x); x \in \langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\} \;\Rightarrow\; S_H(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1 - 0 = 1.$$

$$0 = \inf\{f(x); x \in \langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\} \;\Rightarrow\; S_D(f,D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0.$$

Z toho vyplýva $\underline{\int_0^1} \chi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\overline{\int_0^1} \chi(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^1 \chi(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje. ■

Veta 1.2.3 (Nutná a postačujúca podmienka existencie integrálu).
$f(x)$, $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená $\Longrightarrow$

$$f(x) \in R_{\langle a\,;\,b\rangle} \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \exists D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle} \text{ tak, že } S_H(f,D) - S_D(f,D) < \varepsilon.$$

Dôkaz.
NP$_\Rightarrow$: $f(x) \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, označme $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$, $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$I = \sup\left\{S_D(f,D)\,;\, D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\right\} \Rightarrow \forall \varepsilon_0 > 0\ \exists D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}:\ I - S_D(f,D^*) < \varepsilon_0.$$

$$I = \inf\left\{S_H(f,D)\,;\, D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\right\} \Rightarrow \forall \varepsilon_0 > 0\ \exists D^{**} \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}:\ S_H(f,D^{**}) - I < \varepsilon_0.$$

Ak položíme $D = D^* \cup D^{**}$, potom na základe predchádzajúceho a vety 1.2.2 platí:

$$S_D(f,D^*) \le S_D(f,D) \;\Rightarrow\; I - S_D(f,D) \le I - S_D(f,D^*) < \varepsilon_0,$$

$$S_H(f,D) \le S_H(f,D^{**}) \;\Rightarrow\; S_H(f,D) - I \le S_H(f,D^{**}) - I < \varepsilon_0.$$

Z toho vyplýva $S_H(f,D) - S_D(f,D) = S_H(f,D) - I + I - S_D(f,D) < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = \varepsilon$.
PP$_\Leftarrow$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$: $S_H(f,D) - S_D(f,D) < \varepsilon$. Pre dolné a horné integrály platí:

[16] Dirichletova funkcia (ma1: str. 72).

$$S_D(f,D) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_H(f,D) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \forall \varepsilon > 0:\; 0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_H(f,D) - S_D(f,D) < \varepsilon.$$

Z toho vyplýva $0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \inf\{\varepsilon\,;\,\varepsilon > 0\} = 0.$

To znamená, že platí $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a teda $f(x) \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$. ■

Poznámka 1.2.1.
Podmienku: $\forall \varepsilon > 0\; \exists D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}:\; S_H(f,D) - S_D(f,D) < \varepsilon$, *môžeme písať v tvare:*

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}:\; \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i < \varepsilon.$$

Dôsledok 1.2.3.a.
$f(x)$, $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená $\Longrightarrow$

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle} \text{ tak, že } S_H(f,D) - I < \varepsilon,\; I - S_D(f,D) < \varepsilon.$$

Veta 1.2.4.
$f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $\langle c\,;\,d\rangle \subset \langle a\,;\,b\rangle \;\Longrightarrow\; f \in R_{\langle c\,;\,d\rangle}$.

Dôkaz.
$f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle} \;\Rightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists D^* \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}:\; S_H(f,D^*) - S_D(f,D^*) < \varepsilon.$
Označme $D_{\langle a\,;\,b\rangle} = D^* \cup \{c,d\} = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, pričom $c = x_r$, $d = x_s$, $r, s \in \{0,1,\ldots,n\}$, $r < s$.

$$\Rightarrow\; \varepsilon > S_H(f,D^*) - S_D(f,D^*) \geq S_H(f,D_{\langle a\,;\,b\rangle}) - S_D(f,D_{\langle a\,;\,b\rangle}) = \sum_{i=0}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{r} (M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{i=r}^{s} (M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{i=s}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \geq \sum_{i=r}^{s} (M_i - m_i)\Delta x_i.$$

Posledný súčet zodpovedá deleniu $D_{\langle c\,;\,d\rangle} = \{x_i\}_{i=r}^{s} \in \mathfrak{D}_{\langle c\,;\,d\rangle}$. Tým je veta dokázaná. ■

Z vety 1.2.3 vyplýva, že pri vyšetrovaní riemannovskej integrovateľnosti funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ sa nemusíme zaoberať všetkými deleniami $D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$. Stačí sa obmedziť na „niektoré špeciálne“ množiny delení, napr. na normálne postupnosti delení. **Postupnosť delení** $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ sa nazýva **normálna** práve vtedy, ak platí $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$.

Normálna postupnosť delení intervalu $\langle a\,;\,b\rangle$ je napríklad postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $D_k = \big\{x_i = a + \frac{i(b-a)}{k}\,;\, i = 0,1,2,\ldots,k\big\}$, t. j. $\mu(D_k) = \frac{b-a}{k}$ pre $k \in N$.

Poznámka 1.2.2.
V normálnej postupnosti $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ *jednotlivé delenia* D_k, $k \in N$ *nemusia mať* k *deliacich intervalov (príklad 1.2.4). Taktiež deliace body nemusia byť rovnako vzdialené (príklad 1.2.3). Jediná podmienka je, aby pre* $k \to \infty$ *platilo* $\mu(D_k) \to 0$.

Veta 1.2.5.
$f(x)$, $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená $\Longrightarrow$ $\forall$ normálnu $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ platí:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k), \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_H(f, D_k).$$

Dôkaz.
Dokážeme $I_D = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k)$. Druhá časť sa dokáže analogicky.
Nech $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ je normálna. Musíme dokázať (ma1: veta 2.3.2):

$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in N\ \forall k \in N,\ k \geq k_0\colon\ I_D - S_D(f, D_k) < \varepsilon.$

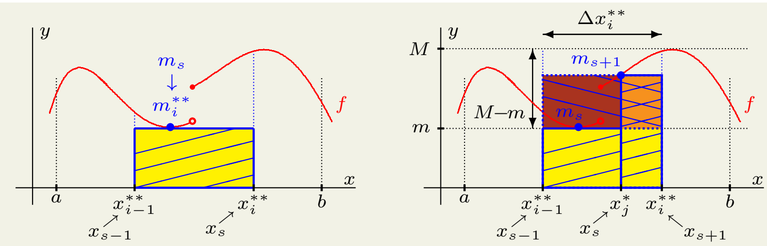
f je ohraničená, t. j. pre všetky $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ platí $m \leq f(x) \leq M$, kde $m, M \in R$, $m \neq M$.
Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné, t. j. aj $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ je ľubovoľné.
Zo vzťahu $I_D = \sup\left\{S_D(f, D)\,;\, D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\right\}$ vyplýva:

$\exists D^* = \{x_i^*\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle},\ n \in N\colon I_D - S_D(f, D^*) < \frac{\varepsilon}{2}$, t. j. $S_D(f, D^*) > I_D - \frac{\varepsilon}{2}$.

Označme $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2n(M-m)}$, t. j. $(M-m)\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2n}$. To znamená, že aj ε_0 je ľubovoľné.
Nech delenie $D^{**} = \{x_i^{**}\}_{i=0}^{p} \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $p \in N$ je také, že $\mu(D^{**}) < \varepsilon_0$. Ukážeme, že platí:

$$I_D - S_D(f, D^{**}) < \varepsilon.$$

Nech $D = \{x_s\}_{s=0}^{l} = D^* \cup D^{**}$, $l \leq p+n$ je zjemnenie delení D^*, D^{**}. Delenie D obsahuje body a, x_1^{**}, x_2^{**}, $\ldots$, x_{p-1}^{**}, b a body x_1^*, x_2^*, $\ldots$, x_{n-1}^*.
Odhadneme rozdiel $S_D(f, D) - S_D(f, D^{**})$. Pre každý interval $\langle x_{i-1}^{**}\,;\,x_i^{**}\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, p$ vo vzťahu k bodom x_j^*, $j = 1, 2, \ldots, x_{n-1}$ môžu nastať dve možnosti (obr. 1.2.4):



Obr. 1.2.4: Delenie $D = D^* \cup D^{**}$ z dôkazu vety 1.2.5

1. Neexistuje $x_j^* \in (x_{i-1}^{**}\,;\,x_i^{**})$. To znamená, že $S_D(f, D)$, $S_D(f, D^{**})$ sú na $\langle x_{i-1}^{**}\,;\,x_i^{**}\rangle$ rovnaké a ich rozdiel $S_D(f, D) - S_D(f, D^{**})$ sa na každom z takýchto intervalov rovná 0.

2. Existuje aspoň jedno $x_j^* \in (x_{i-1}^{**}\,;\,x_i^{**})$. Rozdiel $S_D(f, D) - S_D(f, D^{**})$ je na intervale $\langle x_{i-1}^{**}\,;\,x_i^{**}\rangle$ menší alebo rovný ako $(M-m)\Delta x_i^{**} < (M-m)\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2n}$. Takýchto intervalov je najviac $n-1$, t. j. menej ako n.

$\xRightarrow{1.,\,2.}\ S_D(f, D) - S_D(f, D^{**}) < 0 + n\frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow\ S_D(f, D^{**}) > S_D(f, D) - \frac{\varepsilon}{2}.$

Zo vzťahov $S_D(f, D) \geq S_D(f, D^*)$, $S_D(f, D^*) > I_D - \frac{\varepsilon}{2}$ (D je zjemnenie D^*) vyplýva:

$S_D(f, D^{**}) > S_D(f, D) - \frac{\varepsilon}{2} > I_D - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = I_D - \varepsilon$, t. j. $I_D - S_D(f, D^{**}) < \varepsilon$.

Ukázali sme, že ak pre delenie D platí $\mu(D) < \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2n(M-m)}$, potom $I_D - S_D(f, D^{**}) < \varepsilon$.
Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ je normálna, t. j. $\lim_{k\to\infty} \mu(D_k) = 0$, resp. (ma1: veta 2.3.2):

$\forall \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2n(M-m)} > 0\ \exists k_0 \in N\ \forall k \in N,\ k \geq k_0\colon\ \mu(D_k) < \varepsilon_0 \ \Rightarrow\ I_D - S_D(f, D_k) < \varepsilon.$ ■

Veta 1.2.6.
$f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená $\Longrightarrow$
$$f(x)\in R_{\langle a\,;\,b\rangle} \Leftrightarrow \forall \text{ normálnu } \{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle} \text{ platí } \lim_{k\to\infty}\big[S_H(f,D_k)-S_D(f,D_k)\big]=0.$$

Dôkaz.
Veta je priamym dôsledkom viet 1.2.3 a 1.2.5. ■

Dôsledok 1.2.6.a.
$f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená $\Longrightarrow$
$$I=\int_a^b f(x)\,dx \Leftrightarrow \forall \text{ normálnu } \{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}:\ \lim_{k\to\infty} S_H(f,D_k)=\lim_{k\to\infty} S_D(f,D_k)=I.$$

Nech $f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená funkcia, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n\in N$ a nech $t_i\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$. **Riemannovým** (**integrálnym**) **súčtom** funkcie f pri delení D a voľbe bodov $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}=\{t_i\,;\,t_i\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ nazývame číslo:
$$S_T(f,D)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i.$$

Funkcia f má pri danom delení D nekonečne veľa integrálnych súčtov (dolných a aj horných). Ak označíme $m=\inf\{f(x);x\in\langle a\,;\,b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x);x\in\langle a\,;\,b\rangle\}$, potom pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí:
$$m(b-a)\leq S_D(f,D)\leq S_T(f,D)\leq S_H(f,D)\leq M(b-a),$$

Ak je $f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ spojitá, $D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, potom funkcia f nadobúda svoje extrémy (ma1: veta 3.3.10) na každom intervale $\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$. To znamená, že $S_D(f,D)$ a $S_H(f,D)$ sú Riemannovými integrálnymi súčtami pre nejaké konkrétne voľby bodov T.

Dôsledok 1.2.6.b.
$f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená $\Longrightarrow$
$$I=\int_a^b f(x)\,dx \Leftrightarrow \forall \text{ normálnu } \{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle} \text{ a } \forall \text{ voľbu } T:\ \lim_{k\to\infty} S_T(f,D_k)=I.$$

Veta 1.2.7.
$f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je monotónna $\Longrightarrow$ $f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$.

Dôkaz.
Je zrejmé, že $f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená. Použijeme vetu 1.2.3.
Nech $\varepsilon>0$ je ľubovoľné. Delenie $D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ zvoľme tak, aby platilo:
$\frac{|f(b)-f(a)|(b-a)}{n}<\varepsilon$, t. j. aby $\frac{|f(b)-f(a)|(b-a)}{\varepsilon}<n$ a aby $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$, $i=1,2,\ldots,n$.
$f(x)$ je monotónna (nemusí byť spojitá) na každom intervale $\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$, pričom extrémy nadobúda v bodoch[17] x_{i-1} a x_i. Potom platí:
$$S_H(f,D)-S_D(f,D)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{(M_i-m_i)(b-a)}{n}=$$
$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)=\frac{(b-a)}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_{i-1})-f(x_i)\big)\right|=\frac{(b-a)}{n}\,|f(a)-f(b)|<\varepsilon.\ ■$$

[17] $M_i=f(x_{i-1})=\max\{f(x);x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}$, $m_i=f(x_i)=\min\{f(x);x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}$ pre f nerastúcu a $m_i=f(x_{i-1})=\min\{f(x);x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}$, $M_i=f(x_i)=\max\{f(x);x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}$ pre f neklesajúcu.

Predtým ako dokážeme integrovateľnosť spojitých funkcií, sformulujeme a dokážeme jednu ich dôležitú vlastnosť na uzavretých množinách. Ak $A \subset R$ je uzavretá množina, potom funkcia f sa nazýva **rovnomerne spojitá na množine A**, ak platí:[18]

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x^* \in A\colon\ |x - x^*| < \delta \implies |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Z definície je zrejmé, že ak je f rovnomerne spojitá na množine A, potom je tiež spojitá na A. Pre f spojitú na A totiž platí (ma1: veta 3.3.2):

$$\forall x^* \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x^* \in A\colon\ |x - x^*| < \delta \implies |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon.$$

Lema 1.2.8 (Cantorova veta o rovnomernej spojitosti).
$f(x),\ x \in \langle a\,;\, b\rangle$ je spojitá $\implies$ f je rovnomerne spojitá na $\langle a\,;\, b\rangle$.

Dôkaz.
Sporom. f je spojitá, ale nie rovnomerne na $\langle a\,;\, b\rangle$. Potom platí negácia vzťahu (1.3):

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta = \tfrac{1}{k} > 0\ \exists x_k, x_k^* \in \langle a\,;\, b\rangle : |x_k - x_k^*| < \tfrac{1}{k}\ \wedge\ |f(x_k) - f(x_k^*)| \geq \varepsilon > 0, \tag{1.4}$$

pričom sme vybrali iba $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in N$ (negácia zaručuje platnosť pre všetky $\delta > 0$).
f je na $\langle a\,;\, b\rangle$ ohraničená (ma1: veta 3.3.10). $\Rightarrow$ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ sú ohraničené a dajú sa z nich vybrať (ma1: veta 2.3.9) konvergentné podpostupnosti $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x_{m_k}^*\}_{k=1}^{\infty}$.

$$\xRightarrow{(1.4)}\ 0 \leq \lim_{k\to\infty} \left|x_{m_k} - x_{m_k}^*\right| \leq \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{m_k} = 0\ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \lim_{k\to\infty} x_{m_k}^* = \overline{x} \in \langle a\,;\, b\rangle\,.$$

f je spojitá v bode $\overline{x}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{m_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{m_k}^*) = f(\overline{x})$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{k\to\infty} \left|f(x_{m_k}) - f(x_{m_k}^*)\right| = 0$.
Ale zo vzťahu (1.4) vyplýva spor $\lim\limits_{k\to\infty} \left|f(x_{m_k}) - f(x_{m_k}^*)\right| \geq \varepsilon > 0$. ∎

Veta 1.2.9.
$f(x),\ x \in \langle a\,;\, b\rangle$ je spojitá $\implies$ $f(x) \in R_{\langle a\,;\, b\rangle}$.

Dôkaz.
$f(x),\ x \in \langle a\,;\, b\rangle$ je spojitá $\xRightarrow{\text{ma1: veta 3.3.10}}$ f je na $\langle a\,;\, b\rangle$ ohraničená. Použijeme vetu 1.2.3.
Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Označme $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{b-a} > 0$, t. j. $\varepsilon = \varepsilon_0(b-a)$.
f je na $\langle a\,;\, b\rangle$ rovnomerne spojitá (Cantorova veta 1.2.8), t. j. existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x, x^* \in \langle a\,;\, b\rangle$ platí: $|x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon_0$.
Delenie $D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\, b\rangle}$ zvoľme tak, aby $\mu(D) < \delta$, t. j. $\Delta x_i < \delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
f je na $\langle x_{i-1}\,;\, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ohraničená a nadobúda svoje extrémy (ma1: veta 3.3.10), t. j. existujú $x_i^*, x_i^{**} \in \langle x_{i-1}\,;\, x_i\rangle$, $|x_i^* - x_i^{**}| < \delta$ také, že $f(x_i^*) = m_i$, $f(x_i^{**}) = M_i$. Potom (rovnomerná spojitosť): $M_i - m_i = f(x_i^{**}) - f(x_i^*) < \varepsilon_0$. Z toho vyplýva:

$$S_H(f, D) - S_D(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_0 \Delta x_i = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon_0(b - a) = \varepsilon. \ ∎$$

[18] To znamená, že δ nezávisí od voľby bodov x, x^*, ale iba od ε.

Vetu 1.2.9 môžeme zovšeobecniť na po častiach spojité funkcie, t. j. na funkcie s konečným počtom bodov nespojitosti (odstrániteľných alebo neodstrániteľných 1. druhu). Vetu uvádzame bez dôkazu.

Veta 1.2.10.
$f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je po častiach spojitá $\Longrightarrow$ $f(x)\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$.

Príklad 1.2.3.
$a,b,c,d\in R$, $a<b<c<d$, $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(c\,;\,d)\,,\\ 0, & x\in\langle a\,;\,c\rangle\cup\langle d\,;\,b\rangle\,,\end{cases}$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = d-c$.

Riešenie.
Nech[19] $D_k=\{x_0,x_1,\ldots,x_5\}=\big\{a,c-\frac{1}{k},c+\frac{1}{k},d-\frac{1}{k},d+\frac{1}{k},b\big\}$, $k\in N$ (obr. 1.2.5).
$\Rightarrow$ $\Delta x_1=c-a-\frac{1}{k}$, $\Delta x_2=\frac{2}{k}$, $\Delta x_3=d-c-\frac{2}{k}$, $\Delta x_4=\frac{2}{k}$, $\Delta x_5=b-d-\frac{1}{k}$,
$m_1=M_1=0$, $m_2=0$, $M_2=1$, $m_3=M_3=1$, $m_4=0$, $M_4=1$, $m_5=M_5=0$.
Nech $\varepsilon>0$. Zvoľme $k\in N$ tak, aby $k>\frac{4}{\varepsilon}$, t. j. $\frac{4}{k}<\varepsilon$. Potom platí:

$$S_H(f,D_k)=0\cdot\big(c-a-\tfrac{1}{k}\big)+1\cdot\tfrac{2}{k}+1\cdot\big(d-c-\tfrac{2}{k}\big)+1\cdot\tfrac{2}{k}+0\cdot\big(b-d-\tfrac{1}{k}\big)=d-c+\tfrac{2}{k},$$
$$S_D(f,D_k)=0\cdot\big(c-a-\tfrac{1}{k}\big)+0\cdot\tfrac{2}{k}+1\cdot\big(d-c-\tfrac{2}{k}\big)+0\cdot\tfrac{2}{k}+0\cdot\big(b-d-\tfrac{1}{k}\big)=d-c-\tfrac{2}{k},$$

$S_H(f,D_k)-S_D(f,D_k)=\big(d-c+\frac{2}{k}\big)-\big(d-c-\frac{2}{k}\big)=\frac{4}{k}<\varepsilon \xRightarrow{\text{veta 1.2.3}} f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$.[20]

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx=\begin{cases}\inf\{S_H(f,D_k)\,;\,k\in N\}=\inf\big\{d-c+\frac{2}{k}\,;\,k\in N\big\}=d-c,\\ \sup\{S_D(f,D_k)\,;\,k\in N\}=\sup\big\{d-c-\frac{2}{k}\,;\,k\in N\big\}=d-c.\ \blacksquare\end{cases}$$

Príklad 1.2.4.
Vypočítajte: a) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x\,dx}{2}$, b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2\,dx$.

Riešenie.
a) Funkcia $f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\langle -1\,;\,0\rangle$ je rastúca (veta 1.2.7), spojitá (veta 1.2.9) $\Rightarrow$ $\frac{x}{2}\in R_{\langle -1\,;\,0\rangle}$.
Nech $D_k=\big\{-\frac{i}{k}\,;\,i=0,1,2,\ldots,k\big\}\subset\mathfrak{D}_{\langle -1\,;\,0\rangle}$, $k\in N$.
$\Rightarrow$ $\Delta x_i=\frac{1}{k}$, $m_i=f(x_i)=-\frac{i}{2k}$, $M_i=f(x_{i-1})=-\frac{i-1}{2k}$, $i=1,2,\ldots,k$ (obr. 1.2.6).[21]

$$S_H(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}\Big(-\frac{i-1}{2k}\cdot\frac{1}{k}\Big)=-\frac{0+1+\cdots+k}{2k^2}=-\frac{(k-1)k}{2\cdot 2k^2}=-\frac{k-1}{4k},$$
$$S_D(f,D_k)=\sum_{i=1}^{k}\Big(-\frac{i}{2k}\cdot\frac{1}{k}\Big)=-\frac{1+2+\cdots+(k-1)}{2k^2}=-\frac{k(k+1)}{2\cdot 2k^2}=-\frac{k+1}{4k}.$$

Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna. $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x\,dx}{2}=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}S_H(f,D_k)=-\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k-1}{4k}=-\frac{1}{4},\\ \lim\limits_{k\to\infty}S_D(f,D_k)=-\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k+1}{4k}=-\frac{1}{4}.\end{cases}$

b) Funkcia $f(x)=x^2$, $x\in\langle -1\,;\,1\rangle$ je spojitá (veta 1.2.9) $\Rightarrow$ $x^2\in R_{\langle -1\,;\,1\rangle}$.
Nech $D_k=\big\{-\frac{k}{k},-\frac{k-1}{k},\ldots,-\frac{1}{k},0,\frac{1}{k},\frac{2}{k},\ldots,\frac{k-1}{k},\frac{k}{k}\big\}=\big\{\frac{i}{k}-1\big\}_{i=0}^{2k}\subset\mathfrak{D}_{\langle -1\,;\,1\rangle}$, $k\in N$.

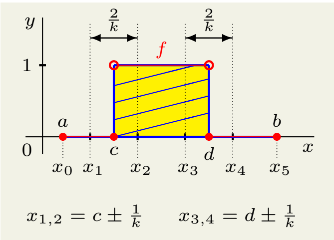
---

[19] Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ nie je normálna!
[20] Funkcia f je po častiach spojitá, t. j. (veta 1.2.10) $f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$.
[21] Kvôli prehľadnosti budeme deliace body a intervaly indexovať sprava doľava, t. j. pre $i=1,2,\ldots,k$ budeme značiť $d_i=\langle x_i\,;\,x_{i-1}\rangle=\langle -\frac{i}{k}\,;\,-\frac{i-1}{k}\rangle$.

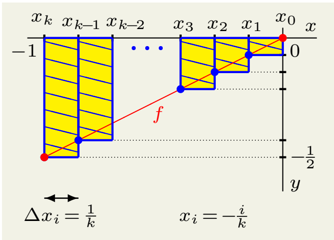
$\Rightarrow\ \Delta x_i = \frac{1}{k}$ (obr. 1.2.7). Zvoľme $T = \{-\frac{k}{k}, -\frac{k-1}{k}, \ldots, -\frac{1}{k}, 0, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}\}$, t. j. ľavé hraničné body deliacich intervalov. Potom platí:

$$S_T(f, D_k) = \Big[(-\tfrac{k}{k})^2 + (-\tfrac{k-1}{k})^2 + \cdots + (-\tfrac{1}{k})^2 + 0^2 + (\tfrac{1}{k})^2 + \cdots + (\tfrac{k-1}{k})^2\Big]\tfrac{1}{k} =$$
$$= \tfrac{2[1^2+2^2+\cdots+k^2]-k^2}{k^3} = \tfrac{\frac{2}{6}k(k+1)(2k+1)-k^2}{k^3} = \tfrac{\frac{1}{3}(k+1)(2k+1)-k}{k^2} = \tfrac{(k+1)(2k+1)-3k}{3k^2} = \tfrac{2k^2+1}{3k^2}.$$

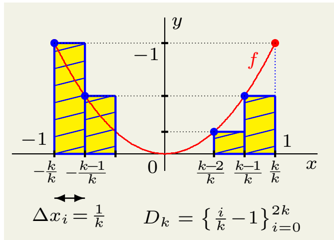
Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna. $\Rightarrow\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \lim_{k\to\infty} S_T(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \tfrac{2k^2+1}{3k^2} = \tfrac{2}{3}$. ■



Obr. 1.2.5: Príklad 1.2.3



Obr. 1.2.6: Príklad 1.2.4 a)



Obr. 1.2.7: Príklad 1.2.4 b)

Geometricky predstavuje Riemannov určitý integrál na intervale $\langle a\,;\, b\rangle$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a\,;\, b\rangle$. Pod osou x (t. j. ak je f záporná) je táto plocha záporná (obr. 1.2.6).

1.2.1 Základné vlastnosti Riemannovho integrálu

Hodnota Riemannovho integrálu je závislá od integrovanej funkcie, ale aj od intervalu integrovania $\langle a\,;\, b\rangle$. Najprv uvedieme vlastnosti, ktoré závisia od integrovanej funkcie.

Lema 1.2.11.
$f\colon A \to R,\ g\colon A \to R,\ A \subset R,\ c > 0 \implies$

a) $\inf\limits_{x\in A} f(x) = -\sup\limits_{x\in A}\big[-f(x)\big]$, b) $\sup\limits_{x\in A}(cf)(x) = c\sup\limits_{x\in A} f(x)$, c) $\inf\limits_{x\in A}(cf)(x) = c\inf\limits_{x\in A} f(x)$.

d) $\sup\limits_{x\in A}(f+g)(x) \le \sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x)$, e) $\inf\limits_{x\in A} f(x) + \inf\limits_{x\in A} g(x) \le \inf\limits_{x\in A}(f+g)(x)$,

Dôkaz.
a), b), c) vyplývajú priamo z definície, e) sa dokáže analogicky ako d).

d) $x \in A \ \Rightarrow\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \le f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x) \le \sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x)$.

To znamená, že $\sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x)$ je horné ohraničenie množiny $\{(f+g)(x); x\in A\}$.

$\Rightarrow\ \sup\{(f+g)(x); x\in A\} = \sup\limits_{x\in A}(f+g)(x) \le \sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x)$. ■

Poznámka 1.2.3.
Pre naše účely nám postačia ohraničené funkcie definované na ohraničených množinách. Množina A v leme 1.2.11 nemusí byť ohraničená a f, g nemusia byť ohraničené na A. Je zrejmé, že musí platiť $\inf\limits_{x\in A} f(x) < \infty$, $-\infty < \sup\limits_{x\in A} f(x)$ *a* $\inf\limits_{x\in A} g(x) < \infty$, $-\infty < \sup\limits_{x\in A} g(x)$.

V častiach d), e) platia vo všeobecnosti nerovnosti, napr. pre funkcie $f(x) = \sin x$, $x \in R$, $g(x) = -\sin x$, $x \in R$, $(f+g)(x) = 0$, $x \in R$ *platí:*

$$-2 = -1-1 = \inf f + \inf g < \inf(f+g) = 0, \quad 0 = \sup(f+g) < \sup f + \sup g = 1+1 = 2.$$

Veta 1.2.12.
$f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená $\implies \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = -\overline{\int_a^b}\big(-f(x)\big)\,dx.$

Dôkaz.
Nech $D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n\in N$. Označme $\overline{M_i} = \sup\{-f(x)\,;\, x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}$, $i=1,2,\ldots,n$. Platí:

$$m_i = \inf\{f(x)\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\} = -\sup\{-f(x)\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\} = -\overline{M_i},$$

$$S_D(f,D) = \sum_{i=1}^n m_i\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^n\big(-\overline{M_i}\big)\cdot\Delta x_i = -\sum_{i=1}^n \overline{M_i}\cdot\Delta x_i = -S_H(-f,D).$$

$$\implies \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\big\{S_D(f,D)\,;\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\big\} = \sup\big\{-S_H(-f,D)\,;\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\big\} =$$
$$= -\inf\big\{S_H(-f,D)\,;\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\big\} = -\overline{\int_a^b}\big(-f(x)\big)\,dx. \ \blacksquare$$

Veta 1.2.13.
$f(x)$, $g(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ sú ohraničené, $c\geq 0 \implies$

a) $\underline{\int_a^b} cf(x)\,dx = c\underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$ b) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]\,dx,$

c) $\overline{\int_a^b} cf(x)\,dx = c\overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$ d) $\overline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$

Dôkaz.
a) $c=0$: $\underline{\int_a^b} 0\cdot f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} 0\,dx \overset{\text{pr. 1.2.2}}{=\!=\!=} 0(b-a) = 0 = 0\cdot\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$

$c>0$: Nech $D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n\in N$. Pre $i=1,2,\ldots,n$ platí:

$$\overline{m_i} = \inf\{cf(x)\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\} = c\cdot\inf\{f(x)\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\} = c\cdot m_i,$$

$$S_D(cf,D) = \sum_{i=1}^n \overline{m_i}\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^n (cm_i)\cdot\Delta x_i = c\sum_{i=1}^n m_i\cdot\Delta x_i = c\cdot S_D(f,D).$$

$$\implies \underline{\int_a^b} cf(x)\,dx = \sup\big\{S_D(cf,D)\,;\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\big\} =$$
$$= \sup\big\{c\,S_D(f,D)\,;\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\big\} = c\,\sup\big\{S_D(f,D)\,;\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\big\} = c\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

b) Nech $D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n\in N$. Pre $i=1,2,\ldots,n$ platí:

$$\overline{m_i} = \inf\{f(x)+g(x)\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\} \geq$$
$$\geq \inf\{f(x)\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\} + \inf\{g(x)\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\} = m_i + w_i,$$

$$S_D(f+g,D) = \sum_{i=1}^n \overline{m_i}\cdot\Delta x_i \geq \sum_{i=1}^n (m_i+w_i)\cdot\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^n m_i\cdot\Delta x_i + \sum_{i=1}^n w_i\cdot\Delta x_i = S_D(f,D) + S_D(g,D).$$

Nech $\{D_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$ je normálna.

$$\implies \underline{\int_a^b}[f(x)+g(x)] = \lim_{k\to\infty} S_D(f+g,D_k) \geq \lim_{k\to\infty}\big[S_D(f,D_k)+S_D(g,D_k)\big] =$$
$$= \lim_{k\to\infty} S_D(f,D_k) + \lim_{k\to\infty} S_D(g,D_k) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

c), d) Dôkaz je analogický ako v častiach a), b). $\blacksquare$

Veta 1.2.14.
$f, g \in R_{\langle a\,;\,b\rangle},\ c \in R \implies cf, f+g \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ a platí:

$$\text{a)}\ \int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b)}\ \int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz.
Na základe viet 1.2.12 a 1.2.13 ukážeme, že sa dolné a horné integrály všetkých zúčastnených funkcií rovnajú.

$$\text{a) } c \geq 0: \quad \underline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\,\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c\,\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$c \leq 0,\ -c \geq 0: \quad \underline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x = -\overline{\int_a^b}\big[-cf(x)\big]\,\mathrm{d}x = -(-c)\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = c\,\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= c\,\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = -(-c)\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\underline{\int_a^b}\big[-cf(x)\big]\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} cf(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\text{b) } \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x \geq \overline{\int_a^b}\big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x \geq$$
$$\geq \underline{\int_a^b}\big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x. \ \blacksquare$$

Veta 1.2.15.
$f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle},\ m = \inf\{f(x)\,;\, x \in \langle a\,;\,b\rangle\},\ M = \sup\{f(x)\,;\, x \in \langle a\,;\,b\rangle\}$,
$\varphi\colon \langle m\,;\,M\rangle \to R$ je spojitá $\implies \varphi(f) \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$.

Dôkaz.
$\varphi(t),\ t \in \langle m\,;\,M\rangle$ je spojitá, t. j. (ma1: veta 3.3.10) je ohraničená a nadobúda svoje extrémy.
Označme $m^* = \min\{\varphi(t); t \in \langle m\,;\,M\rangle\}$, $M^* = \max\{\varphi(t); t \in \langle m\,;\,M\rangle\}$.
Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Označme $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{b-a+M^*-m^*}$, t. j. $\varepsilon = \varepsilon_0(b-a+M^*-m^*)$.
$\varphi(t),\ t \in \langle m\,;\,M\rangle$ je spojitá $\Rightarrow$ φ je rovnomerne spojitá na $\langle m\,;\,M\rangle$ $\Rightarrow$

$$\exists \delta > 0\ \forall t_1, t_2 \in \langle m\,;\,M\rangle: \ |t_1 - t_2| < \delta \ \Rightarrow \ |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon_0. \tag{1.5}$$

Je zrejmé, že $\delta > 0$ môžeme voliť tak, aby platilo[22] $\delta < \varepsilon_0$.
$f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, t. j. ku číslu δ^2 existuje delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n \in N$ také, že platí:

$$S_H(f,D) - S_D(f,D) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i < \delta^2,$$

pričom $m = \min\{f(x); x \in \langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}$, $M = \max\{f(x); x \in \langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Ukážeme, že $S_H(\varphi(f),D) - S_D(\varphi(f),D) = \sum\limits_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i < \varepsilon$ a veta bude dokázaná.
Rozdeľme $\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$ a ich indexy $i = 1, 2, \ldots, n$ na dve disjunktné množiny I_1, I_2:[23]

1. $i \in I_1$, ak platí $M_i - m_i < \delta$. Pre všetky $x, \overline{x} \in \langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$ na základe (1.5) platí:

$$|f(x) - f(\overline{x})| \leq M_i - m_i < \delta \ \Rightarrow \ |\varphi(f(x)) - \varphi(f(\overline{x}))| < \varepsilon_0 \ \Rightarrow \ M_i^* - m_i^* \leq \varepsilon_0$$

[22] Ak zmenšíme δ, tvrdenie implikácie $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon_0$ zostane v platnosti.

[23] $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\sum\limits_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i = \sum\limits_{i \in I_1} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i + \sum\limits_{i \in I_2} (M_i^* - m_i^*)\Delta x_i$.

$$\Rightarrow \sum_{i\in I_1}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_0\Delta x_i = \varepsilon_0\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon_0(b-a).$$

2. $i\in I_2$, ak platí $M_i-m_i\geq\delta$. Potom platí:

$$\delta\sum_{i\in I_2}\Delta x_i = \sum_{i\in I_2}\delta\Delta x_i \leq \sum_{i\in I_2}(M_i-m_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i < \delta^2 \Rightarrow \sum_{i\in I_2}\Delta x_i<\delta<\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in I_2}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i \leq \sum_{i\in I_2}(M^*-m^*)\Delta x_i = (M^*-m^*)\sum_{i\in I_2}\Delta x_i < \varepsilon_0(M^*-m^*).$$

$$\xRightarrow{1.,\ 2.} S_H(\varphi(f),D)-S_D(\varphi(f),D) = \sum_{i=1}^{n}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i\in I_1}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i + \sum_{i\in I_2}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i < \varepsilon_0(b-a)+\varepsilon_0(M^*-m^*) = \varepsilon. \blacksquare$$

Veta 1.2.16.
$f,g\in R_{\langle a\,;\,b\rangle} \implies |f|, f^2, fg\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$.

Dôkaz.
$f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $\varphi(t)=|t|$, $t\in R$ je spojitá $\xRightarrow{\text{veta 1.2.15}}$ $|f|\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$.

$f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $\varphi(t)=t^2$, $t\in R$ je spojitá $\xRightarrow{\text{veta 1.2.15}}$ $f^2\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$.

$f,g\in R_{\langle a\,;\,b\rangle} \xRightarrow{\text{veta 1.2.14}} fg=\frac{1}{4}\big[(f+g)^2-(f-g)^2\big]\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$. ■

Veta 1.2.17.
$f,g\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $\inf\{g(x); x\in\langle a\,;\,b\rangle\}>0$, resp. $\sup\{g(x); x\in\langle a\,;\,b\rangle\}<0 \implies \frac{1}{f}, \frac{f}{g}\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$.

Dôkaz.
Označme $m^*=\inf\{g(x); x\in\langle a\,;\,b\rangle\}$, $M^*=\sup\{g(x); x\in\langle a\,;\,b\rangle\}$.
$m^*>0$, resp. $M^*<0 \Rightarrow 0\notin\langle m^*\,;\,M^*\rangle \Rightarrow \varphi(t)=\frac{1}{t}$, $t\in\langle m^*\,;\,M^*\rangle$ je spojitá.
$g\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $\varphi(t)=\frac{1}{t}$ je spojitá $\xRightarrow{\text{veta 1.2.15}}$ $\frac{1}{g}\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ $\xRightarrow{\text{veta 1.2.16}}$ $\frac{f}{g}\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$. ■

Veta 1.2.18 (Nezápornosť integrálu).
$f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $f(x)\geq 0$ pre všetky $x\in\langle a\,;\,b\rangle \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq 0$.

Dôkaz.
$f(x)\geq 0$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle \Rightarrow m=\inf\{f(x)\,;\,x\in\langle a\,;\,b\rangle\}\geq 0 \xRightarrow{(1.2)} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq m(b-a)\geq 0$. ■

Veta 1.2.19 (Monotónnosť integrálu).
$f,g\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $f(x)\leq g(x)$ pre všetky $x\in\langle a\,;\,b\rangle \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Dôkaz.
$g(x)-f(x)\geq 0$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle \xRightarrow{\text{veta 1.2.18}} 0\leq\displaystyle\int_a^b\big[g(x)-f(x)\big]\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Dôsledok 1.2.19.a.
$f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle} \implies \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Dôkaz.
$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle \Rightarrow -\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$. ■

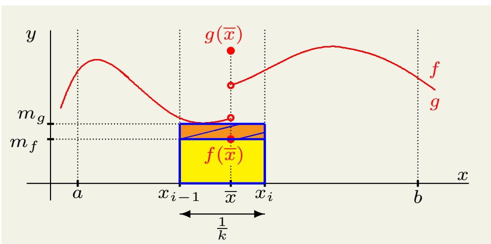
Skutočnosť, že pre f, g nejaká vlastnosť ($f(x)=g(x)$, $f(x)\leq g(x)$, ...) **platí pre všetky uvažované x okrem konečného počtu bodov** budeme stručne zapisovať **(o.k.p.)**.

Veta 1.2.20.
$f(x)$, $g(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ sú ohraničené, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ (o.k.p.) $\Longrightarrow$

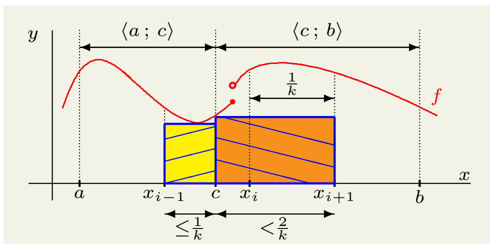
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz.
Budeme predpokladať, že sa funkcie f, g líšia iba v jednom bode $\overline{x}$, t. j. že $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a\,;\,b\rangle-\{\overline{x}\}$. V opačnom prípade postupujeme matematickou indukciou po počet líšiacich sa bodov. Dokážeme iba prvé tvrdenie, druhé sa dokáže analogicky.
Označme $D_k=\{x_i\}_{i=1}^n=\{a+\frac{i(b-a)}{k}\}_{i=1}^k\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $k\in N$. Existuje práve jedno prirodzené číslo $j\in\{1,2,\dots,k\}$ také, že $\overline{x}\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$. Funkcie f, g sa líšia iba na intervale $\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$. Označme (obr. 1.2.8) $m_f=\inf\{f(x); x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}$, $m_g=\inf\{g(x); x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}$. Platí $\mu(D_k)=\frac{1}{k}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k)=0$, t. j. postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna. Potom:[24]

$$\lim_{k\to\infty} \underline{S}_D(f,D_k)-\lim_{k\to\infty} \underline{S}_D(g,D_k)=\lim_{k\to\infty}\big[\underline{S}_D(f,D_k)-\underline{S}_D(g,D_k)\big]=$$
$$=\lim_{k\to\infty}(m_f-m_g)(x_{i+1}-x_{i-1})=\lim_{k\to\infty}\frac{m_f-m_g}{k}=0.$$
$$\xRightarrow{\text{veta 1.2.5}}\ \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\underline{S}_D(f,D_k)=\lim_{k\to\infty}\underline{S}_D(g,D_k)=\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.\ \blacksquare$$



Obr. 1.2.8: Veta 1.2.20



Obr. 1.2.9: Veta 1.2.22

Veta 1.2.21.
$f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $f(x)=g(x)$ pre všetky $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ (o.k.p.) $\Longrightarrow$
$g\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Dôkaz.
Z vety 1.2.20 vyplýva: $\displaystyle\underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$ $\blacksquare$

Z predchádzajúcich viet vyplýva, že konečný počet bodov nemá vplyv na Riemannov integrál (vrátane dolného a horného). To znamená, že môžeme určitý integrál na $\langle a\,;\,b\rangle$

[24] $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$, m_f-m_g je ohraničené, potom platí (ma1: dôsledok 3.2.4.b): $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{m_f-m_g}{k}=0$.

definovať pre ohraničenú funkciu, ktorá nie je definovaná v konečnom počte bodov.[25] Funkcia nemusí byť definovaná ani v krajných bodoch intervalu a Riemannov integrál môžeme definovať na ľubovoľnom z intervalov $\langle a\,;\,b\rangle$, $(a\,;\,b\rangle$, $\langle a\,;\,b)$, $(a\,;\,b)$. Pre interval I s hraničnými bodmi a, b môžeme použiť označenie

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 1.2.22.
$f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ je ohraničená, $c\in(a\,;\,b)$ $\Longrightarrow$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz.
Dokážeme iba prvé tvrdenie, druhé tvrdenie sa dokáže analogicky.
Nech $D'_k = \{x_i\}_{i=1}^n = \{a+\frac{i(b-a)}{k}\}_{i=1}^k \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $k\in N$, potom existuje index $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ taký, že platí $c\in(x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$.
Položme[26] $D_k = (D'_k - \{x_i\}) \cup \{c\} = \{a, x_1, \ldots, x_{i-1}, c, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}, b\} \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$.
$\mu(D_k) < \frac{2}{k}$ (obr. 1.2.9) $\Rightarrow$ $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna $\xrightarrow{\text{veta 1.2.5}}$ $\lim\limits_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Označme $D_k^* = \{a, x_1, \ldots, x_{i-1}, c\} \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,c\rangle}$, $D_k^{**} = \{c, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}, b\} \in \mathfrak{D}_{\langle c\,;\,b\rangle}$.
$\mu(D_k^*) \le \mu(D_k)$, $\mu(D_k^{**}) \le \mu(D_k)$, t. j. $\{D_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, $\{D_k^{**}\}_{k=1}^{\infty}$ sú normálne a platí:

$$\lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k^*) = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k^{**}) = \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ďalej platí:

$$S_D(f, D_k) = \sum_{j=1}^{k} m_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^{i} m_j \Delta x_j + \sum_{j=i+1}^{k} m_j \Delta x_j = S_D(f, D_k^*) + S_D(f, D_k^{**}).$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k) = \lim_{k\to\infty} \left[S_D(f, D_k^*) + S_D(f, D_k^{**})\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k^*) + \lim_{k\to\infty} S_D(f, D_k^{**}) = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \blacksquare$$

Veta 1.2.23 (Aditívnosť integrálu).
$f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $c\in(a\,;\,b)$ $\Leftrightarrow$ $f\in R_{\langle a\,;\,c\rangle}$, $f\in R_{\langle c\,;\,b\rangle}$ a platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dôkaz.
Tvrdenie vety vyplýva z definície Riemannovho integrálu a z vety 1.2.22 (obr. 1.2.10).

$$NP_{\Rightarrow}:\quad 0 = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) - \left(\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{\ge 0} + \underbrace{\left(\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{\ge 0} \ge 0.$$

[25] Vety 1.2.20 a 1.2.21 môžeme rozšíriť z konečného počtu bodov na spočítateľný počet bodov, resp. na množiny s tzv. Jordanovou mierou nula [21, 24].

[26] Deliaci bod x_i nahradíme bodom c, t. j. $d_i = \langle x_{i-1}\,;\,c\rangle$, $d_{i+1} = \langle c\,;\,x_{i+1}\rangle$.

$$\Rightarrow\ \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \text{ t. j. } f\in R_{\langle a\,;\,c\rangle},\ f\in R_{\langle c\,;\,b\rangle}.$$

$$PP_{\Leftarrow}\colon\ \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) - \left(\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \left(\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0+0=0\ \Rightarrow\ f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}.$$

$$\xRightarrow{\text{veta 1.2.22}}\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \ \blacksquare$$

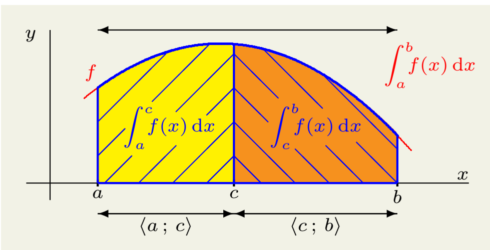
Riemannov integrál môžeme definovať nielen pre $a<b$, ale aj pre $a\geq b$. To znamená, že dolná hranica integrovania **môže byť väčšia** ako horná hranica.[27] Definujeme:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pre všetky } a\in R \text{ a všetky funkcie } f,$$

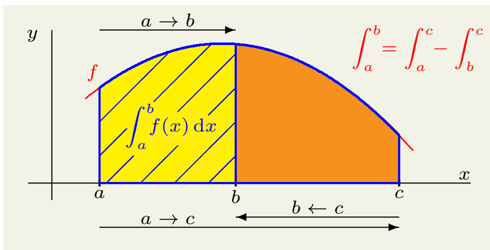
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pre } a>b, \text{ pokiaľ existuje } \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ t. j. } f\in R_{\langle b\,;\,a\rangle}.$$

Ako dokazuje nasledujúca veta, aditívnosť integrálu nie je závislá na vzájomnej polohe bodov a,b,c. Ak $f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, potom z uvedenej definície vyplýva:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$



Obr. 1.2.10: Veta 1.2.23



Obr. 1.2.11: Veta 1.2.24

Veta 1.2.24.
$f\in R_I$, $I\subset R$ je ohraničený interval, $a,b,c\in I \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Dôkaz.
Je zrejmé, že funkcia f je riemannovsky integrovateľná na všetkých intervaloch, ktoré vytvoria body $a,b,c\in I$. Je desať možností pre vzájomné usporiadanie a,b,c. Kvôli prehľadnosti nebudeme písať „$f(x)\,\mathrm{d}x$“. Na základe definície, vety 1.2.23 a vzťahu (1.6) platí:

$\boxed{a<c<b}\quad \displaystyle\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$ (veta 1.2.23, obr. 1.2.10),

[27] $f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ bude naďalej znamenať riemannovsku integrovateľnosť na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$, t. j. pre $a<b$.

$$\boxed{a<b<c}\ \int_a^c+\int_c^b=\left(\int_a^b+\int_b^c\right)+\int_c^b=\int_a^b+\left(\int_b^c+\int_c^b\right)=\int_a^b+0=\int_a^b \quad \text{(obr. 1.2.11)},$$

$$\boxed{b<a<c}\ \int_a^c+\int_c^b=\int_a^c-\int_b^c=\int_a^c-\left(\int_b^a+\int_a^c\right)=-\int_b^a=\int_a^b,$$

$$\boxed{b<c<a}\ \int_a^c+\int_c^b=-\int_c^a-\int_b^c=-\left(\int_b^c+\int_c^a\right)=-\int_b^a=\int_a^b,$$

$$\boxed{c<a<b}\ \int_a^c+\int_c^b=\int_a^c+\left(\int_c^a+\int_a^b\right)=\left(\int_a^c+\int_c^a\right)+\int_a^b=0+\int_a^b=\int_a^b,$$

$$\boxed{c<b<a}\ \int_a^c+\int_c^b=-\int_c^a+\int_c^b=-\left(\int_c^b+\int_b^a\right)+\int_c^b=-\int_b^a=\int_a^b.$$

Posledné štyri možnosti sú splnené triviálne:

$$\boxed{a=b=c}\ \int_a^a=\int_a^a+\int_a^a, \quad \boxed{a=b}\ \int_a^a=\int_a^c+\int_c^a, \quad \boxed{a=c}\ \int_a^b=\int_a^a+\int_a^b, \quad \boxed{b=c}\ \int_a^b=\int_a^b+\int_b^b. \ \blacksquare$$

Aditívnosť Riemannovho integrálu môžeme názorne ilustrovať na vektoroch. Ak si predstavíme integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ako vektory $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{ba}=-\overrightarrow{ab}$ na reálnej osi, potom napr. pre $a<b<c$ (obr. 1.2.11) platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)+\int_c^b f(x)=\int_a^c f(x)-\int_b^c f(x), \quad \text{resp.} \quad \overrightarrow{ab}=\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{cb}=\overrightarrow{ac}-\overrightarrow{bc}.$$

Doteraz sme sa zaoberali Riemannovým integrálom na ohraničenom intervale. V mnohých prípadoch je užitočné rozšíriť definíciu Riemannovho integrálu na zjednotenie konečného počtu disjunktných ohraničených intervalov.

Nech I_1, I_2, $\ldots$, I_k, $k\in N$ sú nedegenerované ohraničené reálne intervaly, ktoré sú navzájom po dvoch disjunktné, t. j. $I_i\cap I_j=\emptyset$ pre $i,j\in\{1,2,\ldots,k\}$, $i\neq j$. Ak je funkcia f riemannovsky integrovateľná na každom z intervalov I_1, I_2, $\ldots$, I_k, potom ju nazývame **riemannovsky integrovateľná na množine** $A=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_k$ a číslo

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{I_1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{I_2} f(x)\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{I_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

nazývame[28] **Riemannov (určitý) integrál funkcie f na množine A**.

1.2.2 Výpočet Riemannovho integrálu

Ak $f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, potom pre každé $c\in\langle a\,;\,b\rangle$ existuje Riemannov integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, ktorý je jednoznačne určený reálnym číslom. To znamená, že môžeme definovať funkciu:

$$G_h(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x\in\langle a\,;\,b\rangle\,.$$

Funkciu G_h nazývame **neurčitý Riemannov integrál** funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$, resp. **integrál ako funkcia hornej hranice** (**hornej medze**). Keďže premenná x sa nachádza v hornej hranici integrálu, integračná premenná musí byť označená inak ako x. Geometricky predstavuje funkčná hodnota $G_h(x)$ plochu krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a intervalom $\langle a\,;\,x\rangle$ (obr. 1.2.12).

[28] Korektnosť definície je zaručená aditívnosťou integrálu.

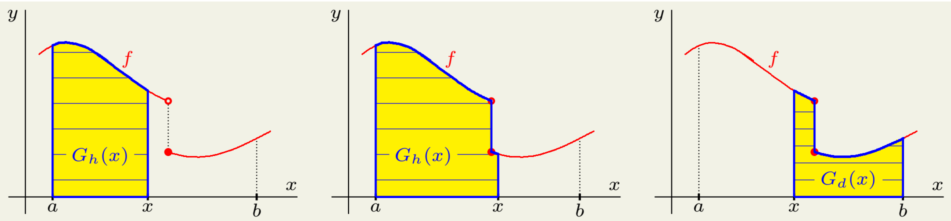
Ukážeme, že funkcia G_h je spojitá a je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$, t. j. aj neurčitým integrálom[29] v zmysle kapitoly 1.1.

Analogicky definujeme **integrál ako funkciu dolnej hranice** (**dolnej medze**):

$$G_d(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \langle a\,;\,b\rangle\,.$$

Z predchádzajúceho vyplýva, že pre všetky $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ platí:

$$G_h(a) = G_d(b) = 0, \quad G_h(b) = G_d(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \quad G_h(x) + G_d(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Obr. 1.2.12: Integrál ako funkcia hornej hranice G_h a dolnej hranice G_d

Veta 1.2.25.
$f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $c, d \in \langle a\,;\,b\rangle \implies \displaystyle\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = G_h(d) - G_h(c) = G_d(c) - G_d(d).$

Dôkaz.
Tvrdenie vyplýva z definície a z vety 1.2.24.

$$G_h(d) - G_h(c) = \int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$G_d(c) - G_d(d) = \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^d f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t. \blacksquare$$

Dôsledok 1.2.25.a.
$f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \langle a\,;\,b\rangle \implies G_h$ je neklesajúca, G_d je nerastúca na $\langle a\,;\,b\rangle$.

Dôkaz.
$x, x^* \in \langle a\,;\,b\rangle$, $x < x^* \xRightarrow{\text{veta 1.2.18}} G_h(x^*) - G_h(x) = G_d(x) - G_d(x^*) = \displaystyle\int_x^{x^*} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0. \blacksquare$

Veta 1.2.26.
$f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle} \implies G_h, G_d$ sú spojité na $\langle a\,;\,b\rangle$.

Dôkaz.
$f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $K = \sup\{|f(x)|\,;\, x \in \langle a\,;\,b\rangle\} \;\Rightarrow\; |f(x)| \leq K$ pre všetky $x \in \langle a\,;\,b\rangle$.
Nech $\varepsilon > 0$. Označme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, t. j. $\varepsilon = \delta K$.

[29] Preto sa nazýva „neurčitý“ Riemannov integrál.

Nech body $x, x^* \in \langle a\,;\, b\rangle$ sú také, že platí[30] $0 \le x - x^* < \delta$. Potom na základe vety 1.2.25, dôsledku 1.2.19.a, vzťahu (1.2) platí:

$$|G_h(x) - G_h(x^*)| = \left| \int_{x^*}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \le \int_{x^*}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \le K(x - x^*) < \delta K = \varepsilon.$$

To znamená (ma1: veta 3.3.2) spojitosť G_h na $\langle a\,;\, b\rangle$. Dôkaz spojitosti G_d je analogický. ■

Veta 1.2.27.
$f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, f je spojitá v bode $x^* \in \langle a\,;\, b\rangle \implies$
G_h, G_d sú diferencovateľné[31] v bode x^* a platí $G_h'(x^*) = f(x^*)$, $G_d'(x^*) = -f(x^*)$.

Dôkaz.
Nech $\varepsilon > 0$.
f je spojitá v x^*, t. j. $\exists \delta > 0\ \forall x \in \langle a\,;\, b\rangle,\ |x - x^*| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$.
Nech $x \in \langle a\,;\, b\rangle$, $x \neq x^*$, $|x - x^*| < \delta$, t. j. $0 < |x - x^*| < \delta$, potom platí:

$$\left| \tfrac{G_h(x) - G_h(x^*)}{x - x^*} - f(x^*) \right| = \left| \tfrac{1}{x - x^*} \int_{x^*}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \tfrac{f(x^*)}{x - x^*} \int_{x^*}^{x} \mathrm{d}t \right| = \tfrac{1}{|x - x^*|} \left| \int_{x^*}^{x} [f(t) - f(x^*)]\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left[\ t \text{ leží medzi } x \text{ a } x^* \Rightarrow |t - x^*| \le |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x^*)| < \varepsilon\ \right] \le$$

$$\le \tfrac{1}{|x - x^*|} \left| \int_{x^*}^{x} |f(t) - f(x^*)|\,\mathrm{d}t \right| < \tfrac{1}{|x - x^*|} \left| \int_{x^*}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t \right| = \tfrac{1}{|x - x^*|} \varepsilon\, |x - x^*| = \varepsilon.$$

$$\xRightarrow{\text{ma1: veta 3.2.1}} f(x^*) = \lim_{x \to x^*} \tfrac{G_h(x) - G_h(x^*)}{x - x^*} = G_h'(x^*).$$

$$G_d'(x^*) = \lim_{x \to x^*} \tfrac{G_d(x) - G_d(x^*)}{x - x^*} \overset{\text{veta 1.2.25}}{=\!=\!=} -\lim_{x \to x^*} \tfrac{G_h(x) - G_h(x^*)}{x - x^*} = -f(x^*).\ ■$$

Dôsledok 1.2.27.a.
$f(x)$, $x \in \langle a\,;\, b\rangle$ je spojitá $\implies$ G_h, $-G_d$ sú primitívne funkcie k f na $\langle a\,;\, b\rangle$.

Dôsledok 1.2.27.b.
$f(x)$, $x \in \langle a\,;\, b\rangle$ je po častiach spojitá $\implies$
G_h, $-G_d$ sú zovšeobecnené primitívne funkcie k f na $\langle a\,;\, b\rangle$.

Nasledujúca veta je veľmi dôležitá pre výpočet určitého integrálu. V literatúre sa často nazýva **základná veta integrálneho počtu**.

Veta 1.2.28 (Newton–Leibnizov vzorec).
$f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, F je (zovšeobecnená) primitívna k f na $\langle a\,;\, b\rangle \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Dôkaz.
Z vety 1.1.2 a poznámky 1.1.6 vyplýva, že existuje konštanta $k \in R$ taká, že pre všetky $x \in \langle a\,;\, b\rangle$ platí $F(x) - G_h(x) = k$, t. j. $F(x) = G_h(x) + k$. Z toho vyplýva (veta 1.2.25):

$$F(b) - F(a) = \big[G_h(b) + c\big] - \big[G_h(a) + c\big] = G_h(b) - G_h(a) =$$

$$= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.■$$

---

[30] Je zrejmé, že bez straty všeobecnosti môžeme predpokladať platnosť nerovnosti $x^* \le x$.
[31] V krajných bodoch a, b sa myslia jednostranné derivácie.

Z vety vyplýva, že na výpočet určitého integrálu môžeme použiť ľubovoľnú (zovšeobecnenú) primitívnu funkciu. Newton–Leibnizov vzorec sa zvykne zapisovať v tvare:[32]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

Pred použitím Newton–Leibnizovho vzorca musíme overiť obidva predpoklady. V praxi sa overujú počas výpočtu. V príklade 1.2.5 d) síce k danej funkcii f existuje zovšeobecnená primitívna funkcia, ale f nie je ohraničená. Integrovaniu takýchto funkcií sa budeme venovať v nasledujúcej časti o nevlastných integráloch.

Niekedy sa v literatúre určitý integrál definuje pomocou Newton–Leibnizovho vzorca. Ak má funkcia f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$ (zovšeobecnenú) primitívnu funkciu F, potom číslo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ nazývame **Newtonovým (určitým) integrálom funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$**. Newtonov a Riemannov integrál **nie sú ekvivalentné**, ale pokiaľ obidva existujú, potom sa rovnajú (základná veta integrálneho počtu).

Príklad 1.2.5.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \tfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{x^2}{2\cdot 2}\Big]_{-1}^{0} = \Big[\tfrac{x^2}{4}\Big]_{-1}^{0} = \tfrac{0^2}{4} - \tfrac{(-1)^2}{4} = \tfrac{1}{4}$ (príklad 1.2.4 a), obr. 1.2.6).

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \tfrac{1^2}{3} - \tfrac{(-1)^3}{3} = \tfrac{2}{3}$ (príklad 1.2.4 b), obr. 1.2.7).

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \Big[\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)\Big]_0^1 = \ln\big(1+\sqrt{1^2+1}\big) - \ln\big(0+\sqrt{0^2+1}\big) =$

$= \ln\big(1+\sqrt{2}\big) - \ln 1 = \ln\big(1+\sqrt{2}\big).$

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big(\sin\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x}\cos\tfrac{1}{x}\big)\,\mathrm{d}x$ — zatiaľ nevieme vypočítať (viď príklad 1.2.18).

Nie sú splnené predpoklady vety 1.2.28. Funkcia $f(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ nie je na $\langle -\pi\,;\,\pi\rangle$ ohraničená,[33] t. j. $f\notin R_{\langle -\pi\,;\,\pi\rangle}$. Na druhej strane funkcia $F(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $x\in\langle -\pi\,;\,\pi\rangle$, $F(0)=0$ je zovšeobecnenou primitívnou funkciou k f na $\langle -\pi\,;\,\pi\rangle$. ■

Veta 1.2.29 (1. veta o strednej hodnote).
$f, g\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $g(x)\geq 0$ pre $x\in\langle a\,;\,b\rangle$, $m=\inf\{f(x); x\in\langle a\,;\,b\rangle\}$, $M=\sup\{f(x); x\in\langle a\,;\,b\rangle\}$

$\Longrightarrow$ existuje $\alpha\in\langle m\,;\,M\rangle$ také, že $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Dôkaz.
$m\leq f(x)\leq M$, $g(x)\geq 0$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ $\Rightarrow$ $mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$ $\xRightarrow{\text{veta 1.2.19}}$

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x = M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.7)$$

$g(x)\geq 0$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ $\xRightarrow{\text{veta 1.2.18}}$ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\geq 0$. Sú dve možnosti:

[32] Konštanta c prislúchajúca k primitívnej funkcii sa nepíše.
[33] f nie je v bode 0 ani definovaná. To by nevadilo, pokiaľ by bola na $\langle -\pi\,;\,\pi\rangle$ ohraničená.

1. $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies 0 = m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \forall\alpha\in\langle m\,;\,M\rangle\colon \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0 \implies m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le M$, t. j. stačí položiť $\alpha = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$. ■

Dôsledok 1.2.29.a.
$f,g\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $g(x)\le 0$ pre $x\in\langle a\,;\,b\rangle \implies \exists\alpha\in\langle m\,;\,M\rangle\colon \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Dôkaz.
$h(x) = -g(x)\ge 0$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle \Rightarrow$

$$\exists\alpha\in\langle m\,;\,M\rangle\colon \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = -\alpha\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.\ ■$$

Dôsledok 1.2.29.b.
f je spojitá na $\langle a\,;\,b\rangle$, $g\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $g(x)\ge 0$, resp. $g(x)\le 0$ pre $x\in\langle a\,;\,b\rangle \implies$

$$\exists c\in\langle a\,;\,b\rangle\colon \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dôkaz.
f je spojitá na $\langle a\,;\,b\rangle$, $\alpha\in\langle m\,;\,M\rangle \xrightarrow{\text{ma1: veta 3.3.12}} \exists c\in\langle a\,;\,b\rangle\colon \alpha = f(c)$. ■

Dôsledok 1.2.29.c.
$f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle} \implies \exists\alpha\in\langle m\,;\,M\rangle\colon \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha(b-a).$

Dôkaz.
$g(x) = 1$, $\langle a\,;\,b\rangle \Rightarrow \exists\alpha\in\langle m\,;\,M\rangle\colon \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b \mathrm{d}x = \alpha(b-a).$ ■

Dôsledok 1.2.29.d.
f je spojitá na $\langle a\,;\,b\rangle \implies \exists c\in\langle a\,;\,b\rangle\colon \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$

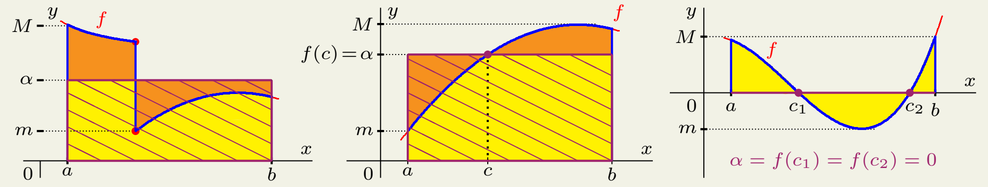
Ak $f(x)\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, potom číslo $\alpha\in R$ (viď dôsledok 1.2.29.c) také, že platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha(b-a), \quad \text{t. j. } \alpha = \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazývame **integrálna stredná hodnota** funkcie f na intervale $\langle a\,;\,b\rangle$. Geometricky predstavuje α výšku obdĺžnika s rovnakým obsahom ako obsah[34] krivočiareho lichobežníka určeného funkciou f a rovnakou podstavou $\langle a\,;\,b\rangle$ (obr. 1.2.13).

Príklad 1.2.6.
Odhadnite hodnotu integrálu $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{121}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[17]{x^2+1}}$.

[34] Tým sa myslí orientovaný obsah, t. j. plocha pod osou x je záporná.



Obr. 1.2.13: Integrálna stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a;\, b\rangle$

Riešenie.
Označme $f(x) = \frac{1}{\sqrt[17]{x^2+1}}$, $g(x) = x^{121}$, $x\in\langle 0\,;\, 1\rangle$.
Potom $g(x)=x^{121} \geq 0$, $m=0 \leq f(x)=\frac{1}{\sqrt[17]{x^2+1}} \leq 1=M$ pre všetky $x\in\langle 0\,;\, 1\rangle$.

$$\xRightarrow{(1.7)} \quad 0 = 0\cdot\int_0^1 x^{121}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^{121}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[17]{x^2+1}} \leq 1\cdot\int_0^1 x^{121}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{122}}{122}\right]_0^1 = \frac{1}{122} \approx 0{,}008\,197. \ \blacksquare$$

Príklad 1.2.7.
Určte integrálnu strednú hodnotu α_k funkcie $f(x) = x\sin x$ na intervale $\langle 0\,;\, k\pi\rangle$, $k\in N$.

Riešenie.
Z definície vyplýva (obr. 1.2.14):

$$\alpha_k = \frac{1}{k\pi-0}\int_0^{k\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x \overset{\text{pr. 1.1.37}}{=\!=\!=} \frac{1}{k\pi}\Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{k\pi} =$$
$$= \frac{1}{k\pi}\Big[-k\pi\cdot\cos k\pi + \sin k\pi - 0\cdot\cos 0 - \sin 0\Big] = -\cos k\pi = -(-1)^k = (-1)^{k-1}. \ \blacksquare$$

Pre odhady Riemannových integrálov je v mnohých prípadoch užitočná nasledujúca veta (2. veta o strednej hodnote), ktorú uvádzame bez dôkazu.

Veta 1.2.30 (2. veta o strednej hodnote).
$f, g\in R_{\langle a\,;\, b\rangle}$, f je monotónna na $\langle a\,;\, b\rangle$
$\Longrightarrow$ existuje $c\in\langle a\,;\, b\rangle$ také, že $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Dôsledok 1.2.30.a.
$f\in R_{\langle a\,;\, b\rangle}$, f je monotónna na $\langle a\,;\, b\rangle$
$\Longrightarrow$ existuje $c\in\langle a\,;\, b\rangle$ také, že $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)(c-a) + f(b)(b-c)$.

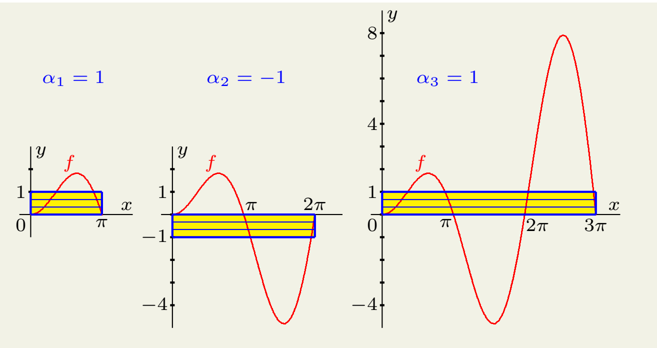
Dôkaz.
Ak položíme $g(x)=1$, $x\in\langle a\,;\, b\rangle$, potom platí (obr. 1.2.15):

$$\exists c\in\langle a\,;\, b\rangle\colon \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^c \mathrm{d}x + f(b)\int_c^b \mathrm{d}x = f(a)(c-a) + f(b)(b-c). \ \blacksquare$$

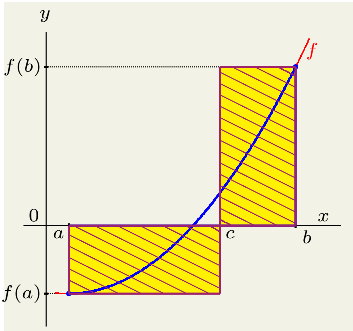
Príklad 1.2.8.
Odhadnite hodnotu integrálu $\displaystyle\int_1^a \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, kde $a\in R$, $a>1$.

Riešenie.
$f(x) = \frac{1}{x}$ je monotónna na $\langle 1\,;\, a\rangle$, $g(x) = \sin x\in R_{\langle 1\,;\, a\rangle}$ $\xRightarrow{\text{veta 1.2.30}}$

$$\exists c\in\langle 1\,;\,a\rangle\colon \int_1^a \tfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{1}\int_1^c \sin x\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{a}\int_c^a \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_1^c + \tfrac{1}{a}\Big[-\cos x\Big]_c^a$$
$$\Longrightarrow\ 0 \le \left|\int_1^a \tfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le |-\cos c + \cos 1| + \tfrac{1}{a}\,|-\cos a + \cos c| \le 2 + \tfrac{2}{a}. \ \blacksquare$$



Obr. 1.2.14: Integrálna stredná hodnota funkcie $f(x)=x\sin x$ na $\langle 0;\, k\pi\rangle$, $k=1,2,3$ (pr. 1.2.7)



Obr. 1.2.15: Odhad integrálu pomocou dôsledku 1.2.30.a

Určité integrály vo všeobecnosti počítame pomocou Newton–Leibnizovho vzorca. Aby sme tento vzorec mohli použiť, musíme poznať primitívnu funkciu. Na určenie primitívnej funkcie môžeme použiť všetky poznatky a metódy z predchádzajúcej časti o neurčitom integráli. Metódu per partes a substitučné metódy môžeme upraviť a určitý integrál počítať pomocou nich priamo. Po substitúcii sa nemusíme vracať k pôvodným premenným.

Veta 1.2.31 (Metóda per partes).
$u, v \in R_{\langle a\,;\,b\rangle},\ u', v' \in R_{\langle a\,;\,b\rangle} \quad\Longrightarrow\quad \displaystyle\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$

Dôkaz.
Z predpokladov vety vyplýva, že u, v sú spojité na $\langle a\,;\,b\rangle$ a že uv', $u'v$, $(uv)'=uv'+u'v$ sú riemanovsky integrovateľné na $\langle a\,;\,b\rangle$. Ďalej pre všetky $x\in\langle a\,;\,b\rangle$ (o.k.p.) platí:

$$\big[u(x)v(x)\big]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \ \Longrightarrow\ \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big[u(x)v(x)\big]'\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b \big[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x. \ \blacksquare$$

Príklad 1.2.9.
$$\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,\mathrm{d}x \overset{\text{veta 1.2.31}}{=\!=\!=} \left[\begin{array}{l|l} u\ = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v\ = -\cos x \end{array}\right] = \Big[-x^2\cos x\Big]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\begin{array}{l|l} u\ = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v\ = \sin x \end{array}\right] = \Big(-4\pi^2\cos 2\pi + 0^2\cdot\cos 0\Big) + 2\left[\Big[x\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= -4\pi^2 + 2\Big(2\pi\sin 2\pi - 0\cdot\sin 0\Big) - 2\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= -4\pi^2 - 2\Big(-\cos 2\pi + \cos 0\Big) = -4\pi^2 - 2\big(-1+1\big) = -4\pi^2.$$

Iné riešenie.
Najprv vypočítame primitívnu funkciu a potom dosadíme do Newton–Leibnizovho vzorca.

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \,\mathrm{d}x \overset{\text{pr. 1.1.37}}{=\!=\!=} \Big[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\Big]_0^{2\pi} =$$
$$= -4\pi^2\cos 2\pi + 2\cdot 2\pi \sin 2\pi + 2\cos 2\pi + 0^2\cos 0 - 2\cdot 0 \sin 0 - 2\cos 0 = -4\pi^2. \blacksquare$$

Veta 1.2.32 (1. veta o substitúcii).
f je spojitá na intervale I, $x=\varphi(t)$, $t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$, $\varphi(\langle\alpha\,;\,\beta\rangle)\subset I$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$,

$$\varphi' \text{ je spojitá na } \langle\alpha\,;\,\beta\rangle \implies f(\varphi)\varphi'\in R_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle} \text{ a platí: } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dôkaz.
f je spojitá na I $\Rightarrow$ f má na I primitívnu funkciu F, t. j. $F'(x)=f(x)$, $x\in I$.
Označme $G(t)=F\big(\varphi(t)\big)$, $t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$, potom (ma1: veta 4.1.7) pre všetky $t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$ platí $G'(t)=F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)=f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$, t. j. $G(t)$ je primitívna k $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ na $\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$.
φ' a aj φ sú spojité na $\langle\alpha\,;\,\beta\rangle \xRightarrow{\text{veta 1.2.15}} f(\varphi)\in R_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle} \Rightarrow f(\varphi)\varphi'\in R_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle}$.
Potom na základe Newton–Leibnizovho vzorca platí:

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(\beta)-G(\alpha) = F\big(\varphi(\beta)\big)-F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \blacksquare$$

Vetu 1.2.32 môžeme použiť obomi smermi. Existencia $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ vyplýva zo spojitosti funkcie f na $\langle a\,;\,b\rangle$. Ak počítame integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a sú splnené predpoklady vety, potom existuje aj integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ a platí rovnosť. To znamená, že integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pretransformujeme na integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ a ten vypočítame.

Ak počítame $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ a sú splnené predpoklady vety 1.2.32, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a na základe tejto vety existuje aj $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ a platí rovnosť. To znamená, že integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ vypočítame pomocou $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Príklad 1.2.10.

a) $$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} x=\sin t,\ t\in\big\langle-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\big\rangle,\ x\in\langle-1\,;\,1\rangle,\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t & \sin\frac{\pi}{2}=1 \end{array}\right] =$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{t}{2}+\tfrac{\sin 2t}{2\cdot 2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{\pi}{2\cdot 2}+\tfrac{\sin\pi}{4}-\tfrac{-\pi}{2\cdot 2}+\tfrac{\sin(-\pi)}{2\cdot 2} = \tfrac{\pi}{2}.$$

Predpoklady vety 1.2.32 sú splnené: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ je spojitá na $\langle-1\,;\,1\rangle$, $x=\varphi(t)=\sin t$, $t\in\big\langle-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\big\rangle$ má spojitú deriváciu $\varphi'(t)=\cos t$, $\varphi(\big\langle-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\big\rangle)=\langle-1\,;\,1\rangle$, $\varphi(\pm\frac{\pi}{2})=\pm 1$.

b) $$\int_{-1}^{2} t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c|c} x=t^2+1,\ \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t & (-1)^2+1=2 \\ t\in\langle-1\,;\,2\rangle,\ x\in\langle 1\,;\,5\rangle & 2^2+1=5 \end{array}\right] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_2^5 \sin x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_2^5 = -\tfrac{1}{2}\Big[\cos x\Big]_2^5 = \tfrac{\cos 5-\cos 2}{2}.$$

Predpoklady vety sú splnené: $f(x)=\sin x$ je spojitá na R, $x=\varphi(t)=t^2+1$, $t\in\langle-1\,;\,2\rangle$ má spojitú deriváciu $\varphi'(t)=2t$, $\varphi(\langle-1\,;\,2\rangle)=\langle 1\,;\,5\rangle\subset R$, $\varphi(-1)=2$, $\varphi(2)=5$.

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c|c} x=\sin t,\ \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t & \sin 0 = 0 \\ t\in\langle 0;\,\frac{\pi}{2}\rangle,\ x\in\langle 0;\,1\rangle & \sin\frac{\pi}{2}=1 \end{array}\right] = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$

d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x} = \left[\begin{array}{c|c} t=\ln x,\ \mathrm{d}t=\frac{\ln x}{x} & x=1\Rightarrow t=0 \\ x\in\langle 1;\,\mathrm{e}\rangle,\ t\in\langle 0;\,1\rangle & x=\mathrm{e}\Rightarrow t=1 \end{array}\right] = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$

e) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c|c} t=1-x^2, \quad x\in\langle 0;\,1\rangle & 0\mapsto 1 \\ \mathrm{d}t=-2x\,\mathrm{d}x,\ t\in\langle 0;\,1\rangle & 1\mapsto 0 \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int_1^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^t\Big]_1^0 = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2}.$

Iné riešenie.

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{pr. 1.1.24}}{=\!=\!=} \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right]_{-1}^1 =$

$$= \frac{1\cdot\sqrt{1-1^2}}{2} + \frac{\arcsin 1}{2} - \frac{-1\cdot\sqrt{1-(-1)^2}}{2} - \frac{\arcsin(-1)}{2} = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{-\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

b) $\displaystyle\int_{-1}^2 t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\cos(t^2+1)\right]_{-1}^2 = \frac{\cos 5 - \cos 2}{2}.$

$$\int t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t = \left[\begin{array}{c} \text{1. ms: } x=t^2+1,\ t\in R \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t,\ x\in\langle 1;\,\infty) \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \sin x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{2}\cos x + c = -\frac{1}{2}\cos(t^2+1) + c,\ t\in R,\ c\in R.$$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t \overset{\text{pr. 1.1.10}}{=\!=\!=} \left[\frac{\sin^4 t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^4\frac{\pi}{2}}{4} - \frac{\sin^4 0}{4} = \frac{1}{4}.$ ■

Ak budeme predpokladať, že funkcia φ je rýdzo monotónna, potom môžeme predpoklady predchádzajúcej vety pre funkciu f zovšeobecniť. Platí nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu (viď napr. [21]).

Veta 1.2.33 (2. veta o substitúcii).
f je ohraničená na $\langle a;\,b\rangle$, $x=\varphi(t)\colon J\to\langle a;\,b\rangle$, J je uzavretý interval s hranicami α, β, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi'(t)\neq 0$ pre všetky $t\in J$.[35] $\Longrightarrow$

$$f\in R_{\langle a;\,b\rangle} \ \Leftrightarrow\ f(\varphi)\varphi'\in R_J \text{ a pokiaľ existujú platí: } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.2.3 Integrovanie párnych, nepárnych a periodických funkcií

Nech $f\in R_{\langle a;\,b\rangle}$. Ak použijeme substitúciu $x=\varphi(t)=-t$, potom $f\in R_{\langle -b;\,-a\rangle}$ a platí:

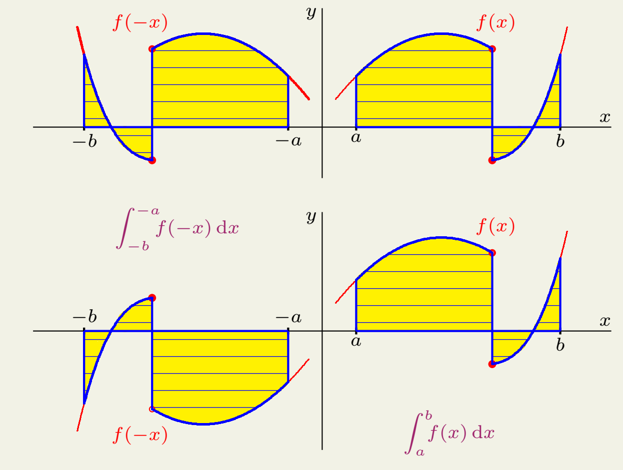
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x=-t, \quad \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t \\ x\in\langle a;b\rangle,\ t\in\langle -b;-a\rangle \\ a\mapsto -a, \quad b\mapsto -b \end{array}\right] = -\int_{-a}^{-b} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Ak je funkcia $f\in R_{\langle a;\,b\rangle}$ párna, potom (obr. 1.2.16):

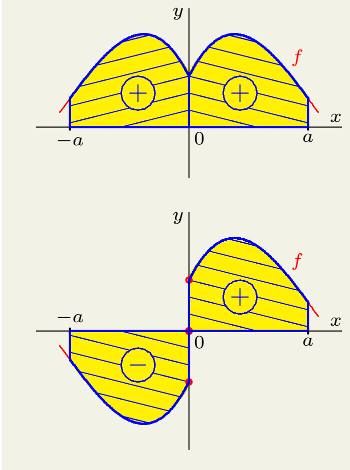
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

Ak je funkcia $f\in R_{\langle a;\,b\rangle}$ nepárna, potom (obr. 1.2.16):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} \big[-f(x)\big]\,\mathrm{d}x = -\int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.9}$$



Obr. 1.2.16: Integrovanie párnej a nepárnej funkcie



Obr. 1.2.17: Príklad 1.2.11

Príklad 1.2.11.
Nech $a > 0$, $f \in R_{\langle -a\,;\,a\rangle}$.

a) f je párna (obr. 1.2.17 hore) $\Rightarrow$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1.8)}{=\!=\!=} \int_{0}^{-(-a)} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) f je nepárna (obr. 1.2.17 dole) $\Rightarrow$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1.9)}{=\!=\!=} -\int_{0}^{-(-a)} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \blacksquare$$

Príklad 1.2.12.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt[3]{x^2+\sin^2 x}}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l}\text{integrand je spojitá}\\ \quad\text{a nepárna funkcia na } \langle -1\,;\,1\rangle\end{array}\right] = 0.$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l}\sin|x| \text{ je spojitá}\\ \quad\text{a párna na } \langle -\pi\,;\,\pi\rangle\end{array}\right] = 2\int_{0}^{\pi} \sin|x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x =$

$$= 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 2\big[-(-1)+1\big] = 4.$$

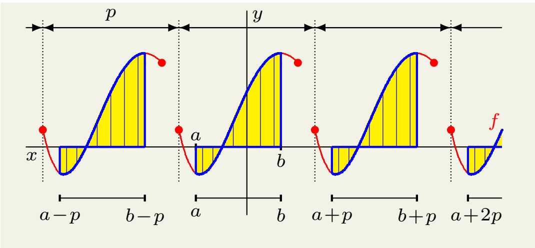
c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Big(x^4 - \sin^3 4x\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 4x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x - 0 = 2\Big[\tfrac{x^5}{5}\Big]_0^{\pi} = \tfrac{2\pi^5}{5}.$ $\blacksquare$

Nech $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, f je periodická s periódou $p > 0$. Nech $k \in Z$ je ľubovoľné. Potom pre všetky $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ (o.k.p.) platí[36] $f(x+kp) = f(x)$. Ďalej platí:

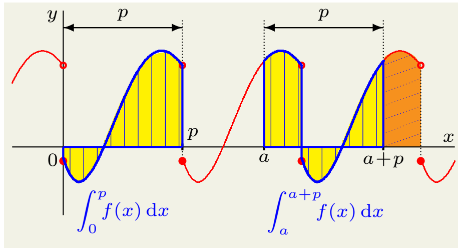
$$\int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = t+kp, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t\\ x \in \langle a+kp\,;\,b+kp\rangle, t \in \langle a\,;\,b\rangle\\ a+kp \mapsto a, \quad b+kp \mapsto b\end{array}\right] = \int_a^b f(t+kp)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad (1.10)$$

[35]Pre všetky $t \in J$ platí $\varphi'(t) > 0$, resp. $\varphi'(t) < 0$, t. j. φ je rastúca, resp. klesajúca na J (lema 1.1.7).
[36]Okrem konečného počtu bodov intervalu $\langle a\,;\,b\rangle$, kde nemusí byť f definovaná.

t. j. $f \in R_{\langle a+kp\,;\,b+kp\rangle}$ a navyše hodnota Riemannovho integrálu funkcie f je na každom intervale $\langle a+kp\,;\,b+kp\rangle$, $k\in Z$ rovnaká (obr. 1.2.18).



Obr. 1.2.18: Integrovanie periodickej funkcie



Obr. 1.2.19: Veta 1.2.34

Veta 1.2.34.

f je periodická s periódou $p>0$, $a\in R \implies$

$$f\in R_{\langle 0\,;\,p\rangle} \Leftrightarrow f\in R_{\langle a\,;\,a+p\rangle} \text{ a pokiaľ existujú platí: } \int_0^p f(x)\,dx = \int_a^{a+p} f(x)\,dx.$$

Dôkaz.

Nech $k\in Z$ je také, že $a\in\langle (k-1)p\,;\,kp\rangle$ (obr. 1.2.19).

$NP_{\Rightarrow}$: $f\in R_{\langle 0\,;\,p\rangle}$, $\langle a\,;\,a+p\rangle \subset \langle (k-1)p\,;\,(k+1)p\rangle$

$$\xRightarrow{(1.10)} f\in R_{\langle (k-1)p\,;\,kp\rangle},\ f\in R_{\langle kp\,;\,(k+1)p\rangle} \Rightarrow f\in R_{\langle (k-1)p\,;\,(k+1)p\rangle} \xRightarrow{(1.10)} f\in R_{\langle a\,;\,a+p\rangle}.$$

$PP_{\Leftarrow}$: $f\in R_{\langle a\,;\,a+p\rangle}$, $(k-1)p\in\langle a-p\,;\,a\rangle$, $kp\in\langle a\,;\,a+p\rangle$, $\langle (k-1)p\,;\,kp\rangle \subset \langle a-p\,;\,a+p\rangle$

$$\xRightarrow{(1.10)} f\in R_{\langle a-p\,;\,a\rangle} \Rightarrow f\in R_{\langle a-p\,;\,a+p\rangle} \Rightarrow f\in R_{\langle (k-1)p\,;\,kp\rangle} \xRightarrow{(1.10)} f\in R_{\langle 0\,;\,p\rangle}.$$

Ďalej platí: $$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_a^{kp} f(x)\,dx + \int_{kp}^{a+p} f(x)\,dx =$$

$$\overset{(1.10)}{=\!=} \int_a^{kp} f(x)\,dx + \int_{kp-p}^{a} f(x)\,dx = \int_{(k-1)p}^{kp} f(x)\,dx \overset{(1.10)}{=\!=} \int_0^p f(x)\,dx. \ \blacksquare$$

Príklad 1.2.13.

$a\in R$, $m,n\in N$, $m\neq n \xRightarrow{\text{pr. 1.1.36, veta 1.2.34}}$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx \overset{\text{párna}}{=\!=}$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = 2\Big[\tfrac{x}{2} - \tfrac{\sin(2nx)}{4n}\Big]_0^{\pi} = 2\big[\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\sin(2n\pi)}{4n} - \tfrac{0}{2} + \tfrac{\sin 0}{4n}\big] = 2\big[\tfrac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0\big] = \pi.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx \overset{\text{párna}}{=\!=}$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = 2\Big[\tfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \tfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\Big]_0^{\pi} =$$

$$= 2\big[\tfrac{\sin(m-n)\pi}{2(m-n)} - \tfrac{\sin(m+n)\pi}{2(m+n)} - \tfrac{\sin 0}{2(m-n)} + \tfrac{\sin 0}{2(m+n)}\big] = 2\big[0 - 0 - 0 + 0\big] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx \overset{\text{párna}}{=\!=}$$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = 2\Big[\tfrac{x}{2} + \tfrac{\sin 2nx}{4n}\Big]_0^{\pi} = 2\big[\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\sin(2n\pi)}{4n} - \tfrac{0}{2} - \tfrac{\sin 0}{4n}\big] = 2\big[\tfrac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\big] = \pi.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \overset{\text{párna}}{=\!=\!=}$$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\Big[\tfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \tfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\Big]_0^{\pi} =$$

$$= 2\big[\tfrac{\sin(m-n)\pi}{2(m-n)} + \tfrac{\sin(m+n)\pi}{2(m+n)} - \tfrac{\sin 0}{2(m-n)} - \tfrac{\sin 0}{2(m+n)}\big] = 2\big[0 + 0 - 0 - 0\big] = 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(nx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \overset{\text{nepárna}}{=\!=\!=} 0.$$

$$\int_a^{a+2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \overset{\text{nepárna}}{=\!=\!=} 0.$$

Všetky integrandy sú definované na celej reálnej množine R, sú to spojité a periodické funkcie s periódou 2π, t. j. prepoklady vety 1.2.34 sú splnené. ■

1.2.4 Numerické integrovanie

Riemannov integrál dokážeme vypočítať pomocou Newton–Leibnizovho vzorca, samozrejme, pokiaľ existuje primitívna funkcia. A čo v prípade, ak primitívnu funkciu nevieme určiť, alebo ju nedokážeme „jednoducho“ vyjadriť (str. 6), alebo je vyjadrenie primitívnej funkcie priveľmi prácne, resp. neúčelné? Často (najmä pri technických výpočtoch) nám postačí približná hodnota, ktorá sa od presnej hodnoty nelíši viac ako maximálna (dovolená) chyba. V takýchto prípadoch používame na výpočet Riemannovho integrálu **približné**, tzv. **numerické metódy**. Numerické integrovanie sa niekedy v literatúre nazýva **numerická kvadratúra**. Uvedieme tri jednoduché metódy na približný výpočet Riemannovho integrálu: **obdĺžnikovú**, **lichobežníkovú** a **Simpsonovu**.

Nech $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$. Uvažujme postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, pričom jednotlivé delenia $D_n = \big\{x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}\,;\, i = 0, 1, \ldots, n\big\}$, $n \in N$ majú $n+1$ rovnako vzdialených deliacich bodov ($\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$). Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je normálna, pretože platí $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(D_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0$.

Aby sme situáciu nekomplikovali, budeme predpokladať, že je funkcia f definovaná v deliacich bodoch a pre jednoduchosť budeme značiť $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

- **Obdĺžniková metóda**

Integrál aproximujeme integrálnymi súčtami, ktoré geometricky predstavujú obdĺžniky. Z vety 1.2.6 a jej dôsledkov vyplýva, že pre ľubovoľnú voľbu bodov T platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_T(f, D_n) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n} \tfrac{f(t_i)(b-a)}{n}\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\tfrac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Big) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{b-a}{n}\Big(f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n)\Big).$$

Potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ také, že pre všetky $n \in N$, $n \geq n_0$ platí:

$$R_n = \Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \tfrac{b-a}{n}\Big(f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n)\Big)\Big| < \varepsilon,$$

t. j. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dokážeme vypočítať s ľubovoľnou presnosťou (chybou) $R_n < \varepsilon$.

Ak ako body T volíme ľavé hraničné body deliacich intervalov (obr. 1.2.20), t. j. zvolíme $t_i = x_{i-1}$, $i=1,2,\dots,n$, potom $f(t_i) = f(x_{i-1}) = y_{i-1}$ a pre odhad integrálu platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = \tfrac{b-a}{n}\big(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}\big). \qquad (\mathrm{O_l})$$

Ak ako T volíme pravé hraničné body intervalov (obr. 1.2.21), analogicky platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{i} = \tfrac{b-a}{n}\big(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n}\big). \qquad (\mathrm{O_p})$$

Ak je funkcia $f(x)$, $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ diferencovateľná a má ohraničenú deriváciu, potom pre chybu aproximácie vzorcov $(\mathrm{O_l})$ a $(\mathrm{O_p})$ platí (viď napr. [21, 30]):

$$R_n \leq \delta_1 \tfrac{(b-a)^2}{n}, \qquad \text{pričom} \quad |f'(x)| \leq \delta_1 \text{ pre } x \in \langle a\,;\,b\rangle\,.$$

- **Lichobežníková metóda**

Integrál aproximujeme obsahom lichobežníkov, ktoré sú určené intervalmi $\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$ (predstavujú výšku) a hodnotami y_{i-1}, y_i (predstavujú základne), t. j. vrcholmi so súradnicami $[x_{i-1};0]$, $[x_i;0]$, $[x_{i-1};y_{i-1}]$, $[x_i;y_i]$ (obr. 1.2.22). Obsahy uvedených lichobežníkov sa rovnajú $P_i = \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x = \frac{b-a}{2n}(y_{i-1}+y_i)$, $i=1,2,\dots,n$. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1}+y_i) = \tfrac{b-a}{2n}\big(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\big). \qquad (\mathrm{L})$$

Zo vzťahov $(\mathrm{O_l})$, $(\mathrm{O_p})$, (L) vyplýva:

$$\tfrac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1}+y_i) = \tfrac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} + \tfrac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} + \tfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i\Big),$$

t. j. odhad určený lichobežníkovou metódou (L) sa rovná aritmetickému priemeru odhadov získaných obdĺžnikovými metódami $(\mathrm{O_l})$ a $(\mathrm{O_p})$. Z toho vyplýva, že aj touto metódou dokážeme integrál aproximovať s ľubovoľnou presnosťou.

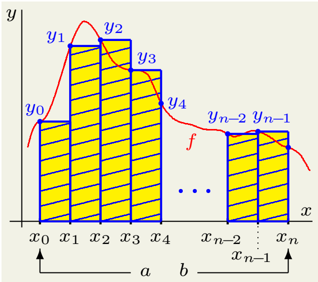
Ak je funkcia $f(x)$, $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ diferencovateľná rádu 2 a má ohraničenú druhú deriváciu, potom pre chybu aproximácie vzorca (L) platí (viď napr. [21, 30]):

$$R_n \leq \delta_2 \tfrac{(b-a)^3}{12n^2}, \qquad \text{pričom} \quad |f''(x)| \leq \delta_2 \text{ pre } x \in \langle a\,;\,b\rangle\,.$$

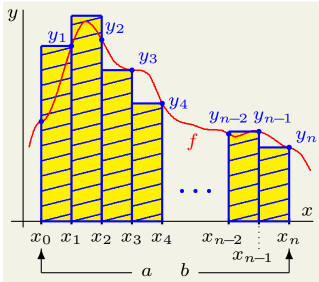
- **Simpsonova metóda**

Pri obdĺžnikovej metóde sme funkciu f na každom z intervalov $\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$, $i=1,2,\dots,n$ nahradili konštantnou funkciou $y = y_{i-1}$, resp. $y = y_i$. Pri lichobežníkovej metóde sme funkciu f na uvedených intervaloch nahradili lineárnou funkciou (úsečkou) spájajúcou body $[x_{i-1};y_{i-1}]$ a $[x_i;y_i]$. Pri **Simpsonovej metóde**[37] potrebujeme párny počet deliacich

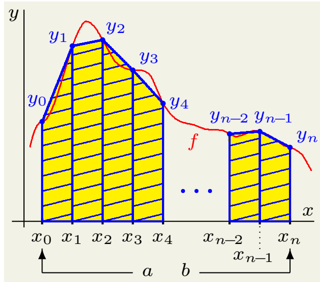
[37] *Thomas Simpson* [1710–1761] — anglický matematik a vynálezca.



Obr. 1.2.20: Obdĺžniková metóda ($\mathrm{O_l}$)



Obr. 1.2.21: Obdĺžniková metóda ($\mathrm{O_p}$)



Obr. 1.2.22: Lichobežníková metóda (L)

intervalov, t. j. n musí byť párne. Funkciu f nahrádzame na dvojnásobne dlhších intervaloch $\langle x_{2i-2}\,;\,x_{2i}\rangle$, $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$ kvadratickou funkciou (parabolou), ktorá prechádza bodmi $[x_{2i-2};y_{2i-2}]$, $[x_{2i-1};y_{2i-1}]$, $[x_{2i};y_{2i}]$ (obr. 1.2.24).

Na intervale $\langle x_{2i-2}\,;\,x_{2i}\rangle$, $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$ nahradíme funkciu $f(x)$ kvadratickou funkciou $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$. Označme $\Delta x=h$. Dĺžka intervalu $\langle x_{2i-2}\,;\,x_{2i}\rangle$ je $2h$.

Úlohu si zjednodušíme tak, že pre funkciu $g(x)$, $x\in\langle x_{2i-2}\,;\,x_{2i}\rangle$, $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$ budeme požadovať, aby bola periodická s periódou $x_{2i}-h=x_{2i-1}$ a budeme ju vyšetrovať na intervale $\langle -h\,;\,h\rangle$. Takže budeme požadovať $g(x_{2i-2})=g(-h)=y_{2i-2}$, $g(x_{2i-1})=g(0)=x_{2i-1}$, $g(x_{2i})=g(h)=y_{2i}$. Potom na základe vzťahu (1.10) platí (obr. 1.2.23):

$$\begin{aligned}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \big[\alpha x^2+\beta x+\gamma\big]\,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} \big[\alpha x^2+\beta x+\gamma\big]\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{\alpha x^3}{3}+\tfrac{\beta x^2}{2}+\gamma x\Big]_{-h}^{h} = \\ &= \tfrac{\alpha h^3}{3}+\tfrac{\beta h^2}{2}+\gamma h-\tfrac{\alpha(-h)^3}{3}-\tfrac{\beta(-h)^2}{2}-\gamma(-h) = \tfrac{2\alpha h^3}{3}+2\gamma h = \tfrac{h}{3}\big(2\alpha h^2+6\gamma\big).\end{aligned}$$

Ešte musíme vypočítať koeficienty α, β, γ. Platí:

$$\left.\begin{aligned} y_{2i-2} &= g(-h) = \alpha h^2-\beta h+\gamma \\ y_{2i-1} &= g(0) \quad = \gamma \\ y_{2i} &= g(h) \quad\; = \alpha h^2+\beta h+\gamma \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\Longrightarrow\; y_{2i-2}+y_{2i} = 2\alpha h^2+2\gamma \\ &\qquad\Longrightarrow\; 2\alpha h^2+6\gamma = y_{2i-2}+y_{2i}+4\gamma = \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = y_{2i-2}+y_{2i}+4y_{2i-1},\end{aligned}$$

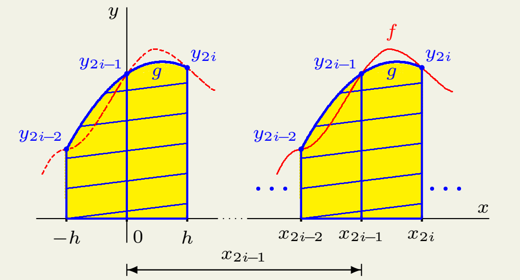
t. j. $\displaystyle\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,\mathrm{d}x\approx\tfrac{h}{3}\big(2\alpha h^2+6\gamma\big)=\tfrac{b-a}{3n}\big(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}\big)$, $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$. Z toho vyplýva:[38]

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\bigg(\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,\mathrm{d}x\bigg) \approx \tfrac{b-a}{3n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\big(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}\big) = \\ &= \tfrac{b-a}{3n}\big(y_0+4y_1+2y_2+4y_1+2y_2+\cdots+4y_{n-3}+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\big). \qquad \text{(S)}\end{aligned}$$

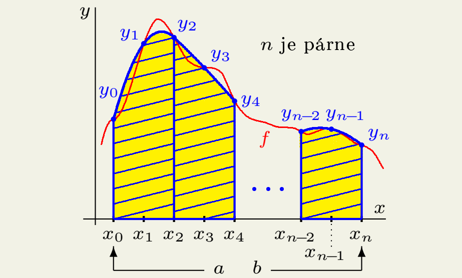
[38] Z geometrie je známy tzv. **univerzálny Simpsonov vzorec**, na výpočet objemu V ľubovoľného kvádra, valca, kužeľa, ihlana, resp. gule a ich častí (kolmých, kosých, zrezaných aj nezrezaných). Má tvar $V=\frac{(P_1+4P+P_2)v}{6}$, pričom v je výška telesa, P_1, P_2 sú plošné obsahy dolnej a hornej podstavy ($P_2=0$ pre nezrezané teleso), P je plošný obsah stredného rezu (prierez v polovici výšky v).

Ak je funkcia $f(x)$, $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ diferencovateľná rádu 4 a má ohraničenú štvrtú deriváciu, potom pre chybu aproximácie **Simpsonovho vzorca** (S) platí (viď napr. [21, 30]):

$$R_n \leq \delta_4 \tfrac{(b-a)^5}{180n^4}, \qquad \text{pričom} \quad \left|f^{(4)}(x)\right| \leq \delta_4 \text{ pre } x \in \langle a\,;\,b\rangle\,.$$



Obr. 1.2.23: Simpsonov vzorec – odvodenie



Obr. 1.2.24: Simpsonova metóda

Príklad 1.2.14.
$\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}693\,147.$

Pre numerický výpočet tohto integrálu použijeme 10 rovnako dlhých deliacich intervalov, t. j. delenie $D = \{1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ \ldots;\ 1{,}9;\ 2\} = \big\{1+\frac{i}{10}\big\}_{i=0}^{10} \subset D_{\langle 1\,;\,2\rangle}$. Postup a výsledky numerického integrovania pomocou $(\mathrm{O_l})$, $(\mathrm{O_p})$, (L) a (S) sú uvedené v tabuľke 1.2.2.

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1\,;\,2\rangle$ je spojitá, $x_i = 1+\frac{i}{10} = \frac{10+i}{10}$, $y_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i} = \frac{10}{10+i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

Funkcie f, f', f'', f''', $f^{(4)}$ sú spojité a ohraničené na $\langle 1\,;\,2\rangle$. Pre všetky $x \in \langle 1\,;\,2\rangle$ platí:

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $|f'(x)| \leq 1 = \delta_1 \Rightarrow$ vzorce $(\mathrm{O_l})$, $(\mathrm{O_p})$ majú chybu $R_n \leq 1\frac{(2-1)^2}{10} = 0{,}1$.

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$, $|f''(x)| \leq 2 = \delta_2 \Rightarrow$ vzorec (L) má chybu $R_n \leq 2\frac{(2-1)^3}{12\cdot 10^2} = 0{,}001\,667$.

$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$, $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$, $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 24 = \delta_4$

$\Rightarrow$ vzorec (S) má chybu $R_n \leq 24\frac{(2-1)^5}{180\cdot 10^4} = 0{,}000\,013$. ■

1.2.5 Nevlastný integrál

Riemannov integrál sme definovali pre ohraničenú funkciu na ohraničenom intervale, preto ho tiež niekedy nazývame **vlastný Riemannov integrál**. V mnohých praktických aplikáciach (matematických, fyzikálnych, technických, ekonomických, ...) sa vyžaduje integrovanie na neohraničenom intervale a mnohokrát aj integrovanie funkcie, ktorá nie je ohraničená. Preto rozšírime pojem Riemannovho integrálu aj na tieto prípady a integrál budeme nazývať **nevlastný**. Nevlastné integrály budeme definovať aj v prípade, keď ich hodnota bude nevlastná, t. j. $\pm\infty$. Najprv uvedieme motivačný príklad.

	(O_l)	(O_p)	(L)	(S)
$x_0 = 1,0$	$y_0 = 1,000\,000$	—	$y_0 = 1,000\,000$	$y_0 = 1,000\,000$
$x_1 = 1,1$	$y_1 = 0,909\,091$	$y_1 = 0,909\,091$	$2y_1 = 1,818\,182$	$4y_1 = 3,636\,364$
$x_2 = 1,2$	$y_2 = 0,833\,333$	$y_2 = 0,833\,333$	$2y_2 = 1,666\,667$	$2y_2 = 1,666\,667$
$x_3 = 1,3$	$y_3 = 0,769\,231$	$y_3 = 0,769\,231$	$2y_3 = 1,538\,462$	$4y_3 = 3,076\,923$
$x_4 = 1,4$	$y_4 = 0,714\,286$	$y_4 = 0,714\,286$	$2y_4 = 1,428\,571$	$2y_4 = 1,428\,571$
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,666\,667$	$y_5 = 0,666\,667$	$2y_5 = 1,333\,333$	$4y_5 = 2,666\,667$
$x_6 = 1,6$	$y_6 = 0,625\,000$	$y_6 = 0,625\,000$	$2y_6 = 1,250\,000$	$2y_6 = 1,250\,000$
$x_7 = 1,7$	$y_7 = 0,588\,235$	$y_7 = 0,588\,235$	$2y_7 = 1,176\,471$	$4y_7 = 2,352\,941$
$x_8 = 1,8$	$y_8 = 0,555\,556$	$y_8 = 0,555\,556$	$2y_8 = 1,111\,111$	$2y_8 = 1,111\,111$
$x_9 = 1,9$	$y_9 = 0,526\,316$	$y_9 = 0,526\,316$	$2y_9 = 1,052\,632$	$4y_9 = 2,105\,263$
$x_{10} = 2,0$	—	$y_{10} = 0,500\,000$	$y_{10} = 0,500\,000$	$y_{10} = 0,500\,000$
	$\sum = 7,187\,715$	$\sum = 6,687\,715$	$\sum = 13,875\,429$	$\sum = 20,794\,507$
$\int_1^2 \frac{dx}{x}$	$\frac{\sum}{10} = 0,718\,772$	$\frac{\sum}{10} = 0,668\,772$	$\frac{\sum}{20} = 0,693\,771$	$\frac{\sum}{30} = 0,693\,150$
	$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \big[\ln x\big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0,693\,147$			
chyba R_n	$R_n \leq 0,1$	$R_n \leq 0,1$	$R_n \leq 0,001\,667$	$R_n \leq 0,000\,013$
skutočná chyba	0,025 625	0,024 375	0,000 624	0,000 003

Tabuľka 1.2.2: Numerické integrovanie obdĺžnikovou (O_l), (O_p), lichobežníkovou (L) a Simpsonovou (S) metódou

Príklad 1.2.15.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c,\ x\in(0\,;\,\infty),\ c\in R \implies \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 2.$

Primitívna funkcia $2\sqrt{x}$ je síce ohraničená na intervale $(0;\,1\rangle$, ale problém je v tom, že pôvodna funkcia $\frac{1}{\sqrt{x}}$ nie je na tomto intervale ohraničená.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0\,;\,1\rangle$ je neohraničená funkcia na ohraničenom intervale (obr. 1.2.25).

$\varepsilon\in(0\,;\,1) \ \Rightarrow\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in\langle\varepsilon\,;\,1\rangle$ je ohraničená $\Rightarrow\ f\in R_{\langle\varepsilon\,;\,1\rangle} \ \Rightarrow$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \ \Rightarrow\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \big[2 - 2\sqrt{\varepsilon}\big] = 2.$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in\langle 1\,;\,\infty)$ je ohraničená funkcia na neohraničenom intervale.

$\varepsilon\in(1\,;\,\infty) \ \Rightarrow\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in\langle 1\,;\,\varepsilon\rangle$ je integrovateľná, t. j. $f\in R_{\langle 1\,;\,\varepsilon\rangle} \ \Rightarrow$

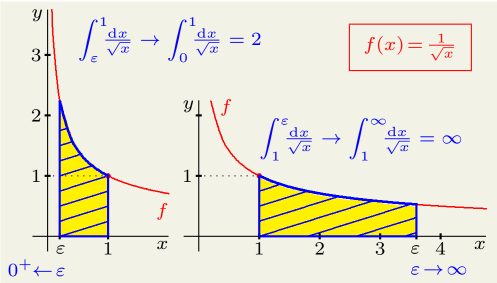
$$\int_1^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^\varepsilon = 2\sqrt{\varepsilon} - 2 \ \Rightarrow\ \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_1^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \big[2\sqrt{\varepsilon} - 2\big] = \infty.$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c,\ x\in(0\,;\,\infty),\ c\in R.$

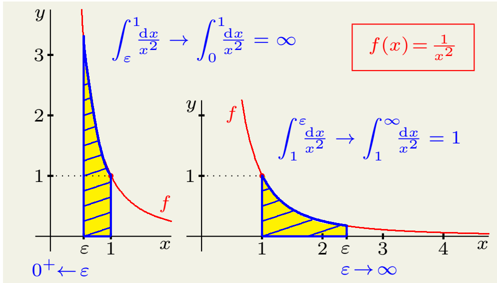
V tomto prípade je aj primitívna funkcia neohraničená na intervale $(0;\,1\rangle$. Analogicky ako v prípade a) platí (obr. 1.2.26):

$$\varepsilon \in (0\,;\,1) \Rightarrow \tfrac{1}{x^2} \in R_{\langle \varepsilon\,;\,1\rangle},\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big[-\tfrac{1}{x}\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \big[-1+\tfrac{1}{\varepsilon}\big] = \infty.$$

$$\varepsilon \in (1\,;\,\infty) \Rightarrow \tfrac{1}{x^2} \in R_{\langle 1\,;\,\varepsilon\rangle},\ \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to \infty} \int_1^\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to \infty} \Big[-\tfrac{1}{x}\Big]_1^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to \infty} \big[-\tfrac{1}{\varepsilon}+1\big] = 1. \blacksquare$$



Obr. 1.2.25: Príklad 1.2.15 a)



Obr. 1.2.26: Príklad 1.2.15 b)

Nech $a, b \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$. Bod $c \in (a\,;\,b)$ nazývame **singulárny bod funkcie $f(x)$, $x \in (a\,;\,b)$ vplyvom funkcie**, ak je funkcia f neohraničená v nejakom okolí $O(c)$. Ak je funkcia f definovaná na neohraničenom intervale, potom body ∞, resp. $-\infty$ nazývame **singulárne body funkcie f vplyvom hranice**.

Ak má funkcia f aspoň jeden singulárny bod $c \in (a\,;\,b)$, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sa nazýva **nevlastný integrál** (**vplyvom funkcie**, resp. **vplyvom hranice**).

Aby sme situáciu zbytočne nekomplikovali, budeme predpokladať, že funkcia f má najviac konečný počet singulárnych bodov. Najprv vyšetríme prípad, keď má funkcia f práve jeden singulárny bod na hranici intervalu integrovania. Sú štyri možnosti.

Nevlastné integrály vplyvom hranice:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_a^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to-\infty} \int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{-\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nevlastné integrály vplyvom funkcie:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to b^-} \displaystyle\int_a^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x, & f \text{ je neohraničená v okolí bodu } b, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to a^+} \displaystyle\int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x, & f \text{ je neohraničená v okolí bodu } a. \end{cases}$$

Nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, $a, b \in R^*$, ak existuje príslušná limita na pravej strane. V opačnom prípade hovoríme, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **neexistuje**, resp. **osciluje**. Ak je táto limita nevlastná, t. j. $\pm\infty$, potom hovoríme, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **diverguje do $\pm\infty$**. Stručne to zapisujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \pm\infty$, resp. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \pm\infty$.

Ak sa táto limita rovná číslu $I \in R$, potom hovoríme, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje k číslu I** a označujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = a$, resp. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto a$.

Ak nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ osciluje alebo diverguje do $\pm\infty$, potom hovoríme, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **diverguje** (je **divergentný**) a označujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \not\longmapsto$. Ak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje k číslu a, potom stručne hovoríme, že že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje** (je **konvergentný**)[39] a označujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto$.

Poznámka 1.2.4.
V takto definovanom nevlastnom integráli je zachovaná jedna zo základných vlastností Riemannovho integrálu – aditívnosť. Pre ľubovoľnú voľbu $d \in (a\,;\,b)$, $a, b \in R^*$ platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pričom jeden z integrálov na pravej strane je nevlastný a druhý vlastný.

Poznámka 1.2.5.
Pojem nevlastného integrálu môžeme zovšeobecniť aj na vlastný integrál. Riemannov integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (pokiaľ existuje) sa rovná nejakému reálnemu číslu I. Takže môžeme povedať, že (vlastný) integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje k číslu I.

Z predchádzajúcej definície vyplýva, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje práve vtedy, ak je funkcia f riemannovsky integrovateľná na každom z príslušných intervalov $\langle a\,;\,\varepsilon\rangle$, resp. $\langle \varepsilon\,;\,b\rangle$, kde $\varepsilon \in (a\,;\,b)$.

Na výpočet nevlastných integrálov môžeme použiť Newton–Leibnizov vzorec. Ak F je primitívna funkcia k f na $(a\,;\,b)$, potom platí:

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_a^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to\infty}\Big[F(x)\Big]_a^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to\infty}\Big[F(\varepsilon)-F(a)\Big] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to\infty}F(\varepsilon)-F(a) = \lim_{x\to\infty}F(x)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^\infty,\\
\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to-\infty}\int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to-\infty}\Big[F(x)\Big]_\varepsilon^b = \lim_{\varepsilon\to-\infty}\Big[F(a)-F(\varepsilon)\Big] = \\
&= F(a)-\lim_{\varepsilon\to-\infty}F(\varepsilon) = F(a)-\lim_{x\to-\infty}F(x) = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^b,\\
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to b^-}\int_a^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to b^-}\Big[F(x)\Big]_a^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to b^-}\Big[F(\varepsilon)-F(a)\Big] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to b^-}F(\varepsilon)-F(a) = \lim_{x\to b^-}F(x)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b,\\
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to a^+}\Big[F(x)\Big]_\varepsilon^b = \lim_{\varepsilon\to a^+}\Big[F(b)-F(\varepsilon)\Big] = \\
&= F(b)-\lim_{\varepsilon\to a^+}F(\varepsilon) = F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x) = \Big[F(x)\Big]_a^b.
\end{aligned}$$

[39] Názvoslovie je analogické ako pri číselných radoch (viď ma1: časť 2.4 Číselné rady, str. 53).

Poznámka 1.2.6.
Označenie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$ *budeme používať aj pre nevlastné integrály. V singulárnych bodoch bude zápis* $F(a)$*, resp.* $F(b)$ *predstavovať príslušnú limitu:*

$$\Big[\ln x\Big]_0^\infty = \ln\infty - \ln 0^+, \quad \textit{t. j.}\ \Big[\ln x\Big]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \lim_{x\to 0^+} \ln x = \infty - (-\infty) = \infty.$$

Ak má $f(x)$, $x\in(a\,;\,b)$, $a,b\in R$ jeden singulárny bod $c\in(a\,;\,b)$ vplyvom funkcie, potom:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje** práve vtedy, ak konvergujú oba integrály[40] $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ak aspoň jeden z nich diverguje, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **diverguje**.

Ak aspoň jeden z integrálov $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje. Ak $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existujú a nekonvergujú, potom ich súčet nemusí mať zmysel a v tom prípade nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje (príklad 1.2.16).

(**Cauchyho**) **hlavnou hodnotou integrálu** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazývame

$$v.p.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big]. \tag{1.11}$$

Ak má $f(x)$, $x\in(a\,;\,b)$ dva singulárne body $a,b\in R$ vplyvom funkcie, potom:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{d}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $d\in(a\,;\,b)$ je ľubovoľné. Integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konverguje** práve vtedy, ak konvergujú $\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ak aspoň jeden z nich diverguje, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **diverguje**.

(**Cauchyho**) **hlavnou hodnotou integrálu** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazývame

$$v.p.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\int_{a+\varepsilon}^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x\Big] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.12}$$

Ak F je primitívna funkcia k f na $(a\,;\,b)$, $d\in(a\,;\,b)$, potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^d + \Big[F(x)\Big]_d^b =$$
$$= F(d) - \lim_{x\to a^+} F(x) + \lim_{x\to b^-} F(x) - F(d) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x) = \Big[F(x)\Big]_a^b,$$
$$v.p.\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(1.12)}{=\!=\!=} \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[F(x)\Big]_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[F(b-\varepsilon) - F(a+\varepsilon)\Big].$$

[40] Jeden z integrálov $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ môže byť vlastný.

Ak má $f(x)$, $x\in(-\infty\,;\,\infty)$ dva singulárne body $\pm\infty$ vplyvom hranice, potom:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{d} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{d}^{\varepsilon} f(x)\,dx,$$

kde $d\in R$ je ľubovoľné.[41] Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ **konverguje** práve vtedy, ak konvergujú $\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx$, $\int_{d}^{\infty} f(x)\,dx$. Ak aspoň jeden z nich diverguje, potom $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ **diverguje**.

(**Cauchyho**) **hlavnou hodnotou integrálu** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ nazývame

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\int_{-\varepsilon}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\varepsilon} f(x)\,dx\right] = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{1.13}$$

Ak F je primitívna funkcia k f na $(-\infty\,;\,\infty)$, $d\in R$, potom platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\infty} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{d} + \Big[F(x)\Big]_{d}^{\infty} =$$
$$= F(d) - \lim_{x\to-\infty} F(x) + \lim_{x\to\infty} F(x) - F(d) = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{\infty},$$
$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{(1.13)}{=\!=\!=} \lim_{\varepsilon\to\infty}\Big[F(x)\Big]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to\infty}\Big[F(\varepsilon)-F(-\varepsilon)\Big] = \lim_{x\to\infty}\Big[F(x)-F(-x)\Big].$$

Priamo z definície a z vlastností limít (ma1: veta 3.2.9) vyplýva pre Cauchyho hlavné hodnoty integrálov (1.11), (1.12), (1.13) nasledujúce tvrdenie.

Veta 1.2.35.

$a,b\in R^* = R\cup\{\pm\infty\}$, $\int_a^b f(x)\,dx\ \exists \implies \exists\ v.p.\int_a^b f(x)\,dx$ a platí $\int_a^b f(x)\,dx = v.p.\int_a^b f(x)\,dx$.

Oba prípady s dvomi singulárnymi bodmi na hraniciach zovšeobecníme. Ak má $f(x)$, $x\in(a;\,b)$ dva singulárne body $a,b\in R^*$ vplyvom funkcie, resp. hranice, potom:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_{\varepsilon}^{d} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to b^-}\int_{d}^{\varepsilon} f(x)\,dx,$$

kde $d\in R$ je ľubovoľné. Ak F je primitívna funkcia k f na $(a\,;\,b)$, potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^d + \Big[F(x)\Big]_d^b = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Príklad 1.2.16.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x} = \left[\begin{array}{c}0\ldots\text{ singulárny bod}\\ \text{vplyvom funkcie}\end{array}\right] = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \int_{0}^{2}\frac{dx}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{0} + \Big[\ln x\Big]_{0}^{2} =$

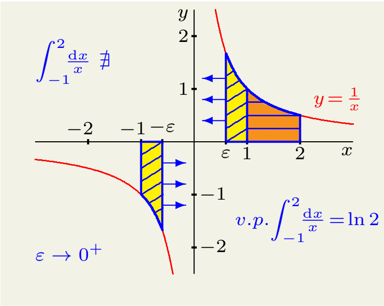
$$= \lim_{x\to0^-}\ln|x| - \ln 1 + \ln 2 - \lim_{x\to0^+}\ln x = -\infty+0-\ln 2-(-\infty) = -\infty+\infty\ \ldots\ \nexists.$$

$$v.p.\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x}\right] = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{-\varepsilon} + \Big[\ln x\Big]_{\varepsilon}^{2}\right] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 2 - \ln\varepsilon\Big] = \lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[\ln 2 - \ln 1\Big] = \ln 2.$$

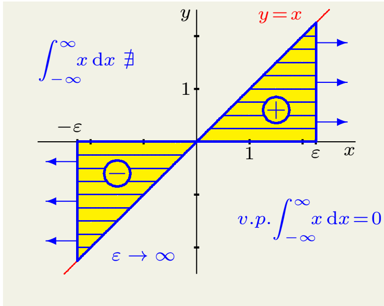
Graficky predstavuje hlavná hodnota uvedeného integrálu plochy dvoch krivočiarych lichobežníkov na $(-1\,;\,\varepsilon\rangle$ a $\langle\varepsilon\,;\,2)$, ktorých súčet je konštantný a rovný $\ln 2$. Neohraničené časti, t. j. krivočiare lichobežníky na $\langle-\varepsilon\,;\,0)$ a $(0\,;\,\varepsilon\rangle$ sa vynulujú (obr. 1.2.27).

---

[41] Voľba bodu $d\in R$ nemá vplyv na integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ (viď poznámka 1.2.4).



Obr. 1.2.27: Príklad 1.2.16 a)

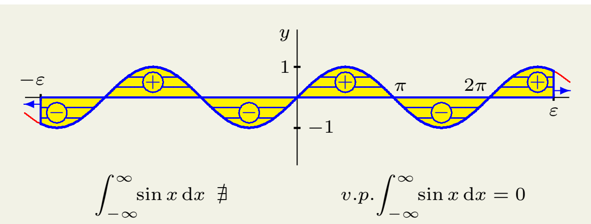


Obr. 1.2.28: Príklad 1.2.16 b)

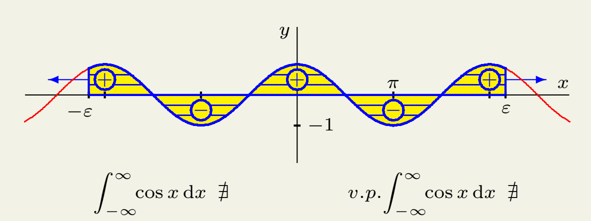
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\infty^2}{2} - \frac{(-\infty)^2}{2} = \infty - \infty \ldots \nexists.$

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \left[\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right] = 0.$$

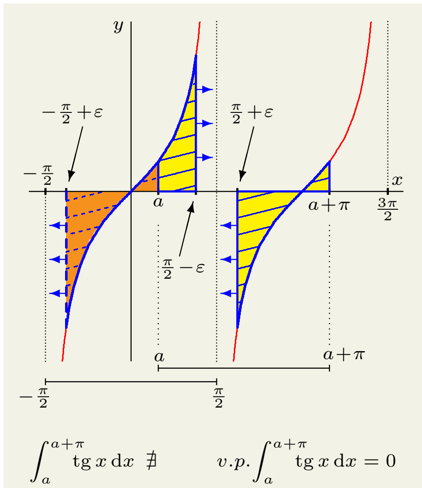
Graficky predstavuje hlavná hodnota uvedeného integrálu plochu krivočiareho lichobežníka s nulovou veľkosťou na $\langle -\varepsilon\,;\,\varepsilon\rangle$, $\varepsilon \to \infty$. Rovnako veľké, ale opačne orientované krivočiare lichobežníky na $\langle -\varepsilon\,;\,0\rangle$ a $\langle 0\,;\,\varepsilon\rangle$ sa eliminujú (obr. 1.2.28). ■



Obr. 1.2.29: Príklad 1.2.17 a)



Obr. 1.2.30: Príklad 1.2.17 b)



Obr. 1.2.31: Príklad 1.2.17 c)

Príklad 1.2.17.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\big[-\cos x\big] - \lim_{x\to-\infty}\big[-\cos x\big] \ldots \nexists$ (obr. 1.2.29).

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin x\,dx = \left[\begin{array}{c}\sin x,\,x\in(-\varepsilon\,;\,\varepsilon)\ \text{je nepárna}\\ \text{príklad 1.2.11}\end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to\infty} 0 = 0.$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\sin x - \lim_{x\to-\infty}\sin x\ \ldots\ \nexists$ (obr. 1.2.30).

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\cos x\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\cos x\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\Big[\sin x\Big]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to\infty}\big[\sin\varepsilon - \sin(-\varepsilon)\big] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to\infty}\big[\sin\varepsilon + \sin\varepsilon\big] = 2\lim_{\varepsilon\to\infty}\sin\varepsilon\ \ldots\ \nexists.$$

c) $a\in R\ \Rightarrow\ \displaystyle\int_a^{a+\pi}\operatorname{tg} x\,dx\ \ldots\ \nexists,\quad v.p.\int_a^{a+\pi}\operatorname{tg} x\,dx = 0$ (obr. 1.2.31).

Funkcia $y=\operatorname{tg} x$ je periodická s periódou π, má nekonečne veľa singulárnych bodov vplyvom funkcie $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$. Funkcia $y=\operatorname{tg} x$, $x\in(a\,;\,a+\pi)$ má buď dva singulárne body a, $a+\pi$, alebo jeden singulárny bod $c\in(a\,;\,a+\pi)$.

$a=-\frac{\pi}{2}+k\pi$, $a+\pi=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ sú singulárne body $\Rightarrow$

$$\int_a^{a+\pi}\operatorname{tg} x\,dx = \Big[\ln|\cos x|\Big]_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} = \left[\begin{array}{c}x\to\pm\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ |\cos x|\to 0^+\\ \ln|\cos x|\to-\infty\end{array}\right] = -\infty+\infty\ \ldots\ \nexists.$$

$$v.p.\int_a^{a+\pi}\operatorname{tg} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+k\pi-\varepsilon}\operatorname{tg} x\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{periodickosť}\\ \text{veta 1.2.34}\end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\operatorname{tg} x\,dx =$$
$$= \Big[\ \text{nepárnosť}\ \Big] = \lim_{\varepsilon\to0^+} 0 = 0.$$

$c=-\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ je singulárny bod, $c\in(a\,;\,a+\pi)\ \Rightarrow$

$$\int_a^{a+\pi}\operatorname{tg} x\,dx = \int_a^{k\pi-\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg} x\,dx + \int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{a+\pi}\operatorname{tg} x\,dx = \Big[\ln|\cos x|\Big]_a^{k\pi-\frac{\pi}{2}} + \Big[\ln|\cos x|\Big]_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{a+\pi} =$$
$$= \ln|0| - \ln|\cos a| + \ln|\cos(a+\pi)| - \ln|0| = -\infty - \ln|\cos a| + \ln|\cos(a+\pi)| + \infty\ \ldots\ \nexists.$$

$$v.p.\int_a^{a+\pi}\operatorname{tg} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\operatorname{tg} x\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{a+\pi}\operatorname{tg} x\,dx\right] = \Big[\ \text{periodickosť}\ \Big] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{a+\pi}^{c+\pi-\varepsilon}\operatorname{tg} x\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{a+\pi}\operatorname{tg} x\,dx\right] = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{c+\varepsilon}^{c+\pi-\varepsilon}\operatorname{tg} x\,dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+k\pi-\varepsilon}\operatorname{tg} x\,dx = \Big[\ \text{periodickosť}\ \Big] = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\operatorname{tg} x\,dx = 0. \ \blacksquare$$

Ak má $f(x)$, $x\in(a\,;\,b)$, $a,b\in R^*$ konečný počet singulárnych bodov $c_1,c_2,\ldots,c_k$, $k\in N$, $a\le c_1<c_2<\cdots<c_k\le b$, potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx + \int_{c_k}^b f(x)\,dx.$$

Nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ **konverguje** práve vtedy, ak konvergujú všetky integrály na pravej strane. Ak aspoň jeden z nich diverguje, potom $\int_a^b f(x)\,dx$ **diverguje**. Integrály na pravej strane majú jeden alebo dva singulárne body na hraniciach integrovania.[42]

[42] Ak medzi singulárne body patrí $a\in R^*$, potom $\int_a^{c_1} f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$. Analogicky pre singulárny bod $b\in R^*$ platí $\int_{c_k}^b f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0$.

Poznámka 1.2.7.
V budúcnosti nebudeme rozlišovať medzi zápismi vlastných a nevlastných integrálov. To znamená, že pri vyšetrovaní integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ musíme najprv nájsť všetky singulárne body funkcie f na intervale $(a\,;b)$, potom integrál rozdeliť na príslušné nevlastné integrály s jedným, resp. dvomi singulárnymi bodmi, a tie vypočítať.

Nevlastné integrály majú podobné vlastnosti ako vlastné Riemannove integrály. Uvedieme najdôležitejšie z nich (viď veta 1.2.14 a veta 1.2.23 pre vlastné integrály).

Veta 1.2.36.
$a, b \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$, $c \in R$, $c \neq 0 \implies$

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \longmapsto \Leftrightarrow \int_a^b cf(x)\,dx \longmapsto$, pričom (pokiaľ existujú): $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \longmapsto,\ \int_a^b g(x)\,dx \longmapsto \ \Rightarrow\ \int_a^b \big[f(x) \pm g(x)\big]\,dx \longmapsto,$

pričom platí: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big[f(x) \pm g(x)\big]\,dx.$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \longmapsto,\ \int_a^b g(x)\,dx \not\longmapsto \ \Rightarrow\ \int_a^b \big[f(x) \pm g(x)\big]\,dx \not\longmapsto.$

Pre súčin fg a absolútnu hodnotu $|f|$ podobné tvrdenie neplatí (príklady 1.2.18, 1.2.27).

Príklad 1.2.18.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \overset{\text{pr. 1.2.15}}{=\!=\!=} \Big[2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 2,\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+ = 0 + \infty = \infty.$

b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \big(\sin\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x}\cos\tfrac{1}{x}\big)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \big(\sin\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x}\cos\tfrac{1}{x}\big)\,dx + \int_{0}^{\pi} \big(\sin\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x}\cos\tfrac{1}{x}\big)\,dx \overset{\text{pr. 1.2.5 d)}}{=\!=\!=}$$
$$= \Big[x\sin\tfrac{1}{x}\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[x\sin\tfrac{1}{x}\Big]_{0}^{\pi} = \lim_{x\to 0^-} x\sin\tfrac{1}{x} - (-\pi)\sin\big(-\tfrac{1}{\pi}\big) + \pi\sin\tfrac{1}{\pi} - \lim_{x\to 0^+} x\sin\tfrac{1}{x} =$$
$$= \Big[\, x \neq 0 \Rightarrow -|x| \le x\sin\tfrac{1}{x} \le |x| \Rightarrow \lim_{x\to 0} x\sin\tfrac{1}{x} = 0 \,\Big] = 0 - \pi\sin\tfrac{1}{\pi} + \pi\sin\tfrac{1}{\pi} - 0 = 0.$$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big[\arcsin x\Big]_{-1}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \tfrac{\pi}{2} - \big(-\tfrac{\pi}{2}\big) = \pi.$ ■

Z predchádzajúcich úvah a z poznámky 1.2.4 vyplýva nasledujúca veta.

Veta 1.2.37 (Aditívnosť nevlastného integrálu).
$a, b \in R^*$, $c \in (a\,;b) \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \longmapsto \iff \int_a^c f(x)\,dx \longmapsto,\ \int_c^b f(x)\,dx \longmapsto,$

pričom (pokiaľ integrály existujú) platí: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

Metóda per partes (veta 1.2.31) a substitučná metóda (veta 1.2.33) sa môžu účinne používať aj pri výpočte nevlastných integrálov. Pri týchto metódach sa môže niekedy nevlastný integrál previesť na vlastný.

Veta 1.2.38 (Metóda per partes pre nevlastné integrály).
$a, b \in R^*$, u, v, u', v' sú spojité na $(a\,;\,b)$

$$\Longrightarrow \text{ (pokiaľ existujú) } \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Veta 1.2.39 (Metóda substitúcie pre nevlastné integrály).
$a, b \in R^*$, $x = \varphi(t)\colon J \to \langle a;\, b\rangle$ je spojitá, J je interval s hranicami α, β, $\varphi'(t) \neq 0$ pre $t \in J$, $\lim\limits_{t\to\alpha^+} \varphi(t) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta^-} \varphi(t) = b$ pre $\alpha < \beta$, resp. $\lim\limits_{t\to\alpha^-} \varphi(t) = a$, $\lim\limits_{t\to\beta^+} \varphi(t) = b$ pre $\alpha > \beta$

$$\Longrightarrow \text{ (pokiaľ existujú) } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Príklad 1.2.19.
Vypočítajte $I_n = \displaystyle\int_0^\infty x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, $n \in N \cup \{0\}$.

Riešenie.

$$I_0 = \int_0^\infty x^0\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^\infty = -\mathrm{e}^{-\infty} + \mathrm{e}^0 = 0 + 1 = 1 = 0!.$$

$$I_n = \left[\begin{array}{l|l} u = x^n & u' = nx^{n-1} \\ v' = \mathrm{e}^{-x} & v = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right] = \Big[-x^n\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \text{ma1: veta 3.2.12} \\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0 \end{array}\right] =$$

$$= -0 + 0^n \cdot \mathrm{e}^0 + n\int_0^\infty x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n!\,I_0 = n!. \ \blacksquare$$

Príklad 1.2.20.

a) $$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right] = \Big[x\ln x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x = 1\cdot\ln 1 - \lim_{x\to 0+} x\ln x - \int_0^1 \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} x = 0\right] = -\int_0^1 \mathrm{d}x = -\Big[x\Big]_0^1 = -1.$$

b) $$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \left[\begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t \text{ je spojitá, rastúca, } (\operatorname{tg} t)' = \frac{1}{\cos^2 t} > 0,\ t \in \big(0\,;\,\frac{\pi}{2}\big),\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \\ (1+x^2)^2 = (1+\operatorname{tg}^2 t)^2 = (1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t})^2 = \frac{1}{\cos^4 t},\ \operatorname{tg} 0 = 0,\ \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} t = \infty \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^4 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \overset{\text{pr. 1.1.14 b)}}{=\!=\!=\!=} \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{\pi}{4} - 0 - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

c) $$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \left[\begin{array}{l} \text{UGS: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1},\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} \\ t\to 0 \Leftrightarrow x \to 0,\quad t \to 1 \Leftrightarrow x \to \frac{\pi}{2},\quad t\to\infty \Leftrightarrow x \to \pi \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} + \int_1^\infty \frac{2\,\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} - \int_1^\infty \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = -\Big[\ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big|\Big]_0^1 - \Big[\ln\frac{t-1}{t+1}\Big]_1^\infty =$$

$$= -\Big[\lim_{t\to 1^-} \ln\frac{1-t}{1+t} - \lim_{t\to 0^+} \ln\frac{1-t}{1+t}\Big] - \Big[\lim_{t\to\infty} \ln\frac{t-1}{t+1} - \lim_{t\to 1^+} \ln\frac{t-1}{t+1}\Big] =$$

$$= -\big[\ln 0^+ - \ln 1\big] - \big[\ln 1 - \ln 0^+\big] = \infty - 0 + 0 - \infty \ \ldots\ \nexists. \ \blacksquare$$

Výpočet nevlastných integrálov býva častokrát problematický, pretože okrem vlastného integrálu musíme vypočítať aj limitu. Nevlastné integrály vyskytujúce sa v praxi (najmä technickej) bývajú zložité a málokedy sa dajú vypočítať presne. Vtedy ich nahrádzame vlastnými, ktorých hranice integrovania sa „veľmi nelíšia“ od pôvodných, t. j. ich rozdiel je dostatočne malý, aby chyba výpočtu bola v tolerancii. Ak nedokážeme tieto vlastné integrály vypočítať presne, použijeme niektorú z numerických metód.

Aby sme nepočítali zbytočne, je dobré vedieť, či daný nevlastný integrál konverguje alebo diverguje. Taktiež niekedy nepotrebujeme poznať súčet nevlastného integrálu, ale nám postačí iba informácia o jeho konvergentnosti. Uvedieme niekoľko kritérií, pomocou ktorých vyšetríme konvergenciu nevlastných integrálov.

Obmedzíme sa na prípady, keď sú singulárne body na hraniciach integrovania. Ak je singulárnych bodov viac, musíme kritéria aplikovať na každý čiastkový integrál zvlášť.

Veta 1.2.40 (Porovnávacie kritérium).
$a, b \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pre všetky $x \in (a\,;\,b)$,
singulárne sú iba body a, resp. b $\Longrightarrow$ (pokiaľ existujú)

$$\text{a)}\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \infty \ \Rightarrow\ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty, \qquad \text{b)}\ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto\ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto.$$

Dôkaz.
Nech a je singulárnym bodom vplyvom hranice, resp. funkcie (pre b je dôkaz analogický).

$$\text{a)}\ \infty = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \Rightarrow\ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

$$\text{b)}\ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto I_g,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ \exists,\ \text{t. j.}\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \text{(tvrdenie vety) alebo} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

$$\text{Nech}\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x = \infty \ \Rightarrow$$

$$\infty = \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = I_g < \infty,\ \text{t. j. spor.}\ \blacksquare$$

Je zrejmé, že ak existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$, potom existuje aj $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$. Ale ak existuje a konverguje $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nemusí existovať (príklad 1.2.21).

Existenciu nevlastného integrálu nezápornej funkcie $f(x) \geq 0$ na intervale $(a\,;\,b)$ nám zaručí napríklad jej spojitosť alebo monotónnosť. Nech $\varepsilon \in (a\,;\,b)$:

1. Ak b je singulárny bod, potom $f \in R_{(a\,;\,\varepsilon\rangle}$, funkcia $G_h(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$, $x \in (a\,;\,\varepsilon\rangle$ je neklesajúca (dôsledok 1.2.25.a), t. j. hodnota výrazu $G_h(\varepsilon) = \int_a^\varepsilon f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ sa pre $\varepsilon \to b^-$ zväčšuje a existuje $\lim\limits_{\varepsilon\to b^-} G_h(\varepsilon) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (vlastná alebo $+\infty$).
2. Ak a je singulárny bod, potom $f \in R_{\langle\varepsilon\,;\,b)}$, funkcia $G_d(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$, $x \in \langle\varepsilon\,;\,b)$ je nerastúca (dôsledok 1.2.25.a), t. j. hodnota $G_d(\varepsilon) = \int_\varepsilon^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ sa pre $\varepsilon \to a^+$ zväčšuje a existuje $\lim\limits_{\varepsilon\to a^+} G_d(\varepsilon) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (vlastná alebo $+\infty$).

Dôsledok 1.2.40.a.
$a, b \in R^*$, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pre všetky $x \in (a\,;\,b)$, singulárne sú iba body a, resp. b,

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto,\ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto\ \Longrightarrow\ \text{(pokiaľ existuje)}\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto.$$

Dôkaz.
Z predpokladov vyplýva, že pre všetky $x \in (a\,;\,b)$ platí $0 \leq f(x) - h(x) \leq g(x) - h(x)$.

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto,\ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \xRightarrow{\text{veta 1.2.36}} \int_a^b \big[g(x) - h(x)\big]\,\mathrm{d}x \longmapsto\ \Longrightarrow\ \text{(pokiaľ existuje)}$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \longmapsto \xrightarrow{\text{veta } 1.2.36} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [f(x)-g(x)+g(x)]\,dx \longmapsto. \blacksquare$$

Príklad 1.2.21.
$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0\,;\,1)$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q \cap (0\,;\,1), \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0\,;\,1) - Q. \end{cases}$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ (príklad 1.2.15), $0 \le f(x) \le g(x)$ pre všetky $x \in (0\,;\,1)$, ale $\int_0^1 f(x)\,dx \nexists$.

$$\varepsilon \in (0\,;\,1) \Rightarrow \underline{\int_\varepsilon^1} f(x)\,dx = \underline{\int_\varepsilon^1} 0\,dx = 0,\ \overline{\int_\varepsilon^1} f(x)\,dx = \overline{\int_\varepsilon^1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2-2\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx \nexists. \blacksquare$$

Príklad 1.2.22.

a) $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}\,dx \longmapsto$. Predpoklady vety 1.2.40 sú splnené: 0 je jediný singulárny bod, $\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}$, $x \in (0\,;\,1)$ je spojitá, t. j. $\exists \int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$, $0 \le \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ pre $x \in (0\,;\,1)$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$.

b) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx \longmapsto$. ∞ je singulárny bod, $\frac{\sin^2 x}{e^x}$, $x > 0$ je spojitá, t. j. $\exists \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx$,

$$0 \le \frac{\sin^2 x}{e^x} \le \frac{1}{e^x} \text{ pre } x \in (0\,;\,\infty),\ \int_0^\infty \frac{dx}{e^x} = \Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty = e^0 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1.$$

c) $\int_0^1 \operatorname{cotg} x\,dx = \infty$. 0 je jediný singulárny bod,

$$x \in (0\,;\,1) \ \Rightarrow\ \cos x \text{ je rastúca, } x < \sin x \text{ (ma1: príklad 4.3.5)} \ \Rightarrow$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \ge \frac{\cos 1}{\sin x} \ge \frac{1}{x},\ \int_0^1 \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+ = \infty. \blacksquare$$

Nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ **konverguje absolútne** (označenie $\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow{a}$), ak konverguje $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ **konverguje relatívne** (označenie $\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow{r}$), ak $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje a $\int_a^b |f(x)|\,dx$ diverguje, t. j. $\int_a^b |f(x)|\,dx = \infty$.

Veta 1.2.41.
$$\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow{a} \implies \text{(pokiaľ existuje)} \int_a^b f(x)\,dx \longmapsto, \text{ pričom } \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dôkaz.
Tvrdenie vety vyplýva z dôsledku 1.2.40.a a z nerovnosti $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. $\blacksquare$

Ako dokazuje nasledujúci príklad, nevlastný integrál môže konvergovať absolútne a pritom nemusí existovať, ale ak existuje, potom konverguje.

Príklad 1.2.23.
Označme $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in Q \cap (0\,;\,1), \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0\,;\,1) - Q. \end{cases}$ Potom $|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0\,;\,1)$.

$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ (príklad 1.2.15) $\implies \int_0^1 f(x)\,dx \xrightarrow{a}$. Ale $\int_0^1 f(x)\,dx \nexists$.

$$\varepsilon \in (0\,;\,1) \Rightarrow \underline{\int_\varepsilon^1} f(x)\,dx = -\underline{\int_\varepsilon^1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\varepsilon} - 2,\ \overline{\int_\varepsilon^1} f(x)\,dx = \overline{\int_\varepsilon^1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2-2\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx \nexists. \blacksquare$$

Veta 1.2.42 (Limitné porovnávacie kritérium).
$a, b \in R^* = R \cup \{\pm\infty\}$, funkcie f, g sú definované na $(a\,;\,b)$, $g(x) > 0$ pre všetky $x \in (a\,;\,b)$, a [resp. b] je jediný singulárny bod, existuje vlastná $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ $\left[\text{resp. } \lim\limits_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0\right]$

$$\Longrightarrow \text{ (pokiaľ existujú) } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \iff \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto.$$

Dôkaz.
Vetu dokážeme pre singulárny bod a. Pre singulárny bod b je dôkaz analogický.

$PP_{\Leftarrow}$: $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \pm\infty \end{cases} \xRightarrow{\text{ma1: veta 3.2.2}} \exists c \in (a\,;b)$ tak, že $\frac{f}{g}$ je na $(a\,;c\rangle$ ohraničená.

$\Rightarrow$ $\exists p > 0$ tak, že pre všetky $x \in (a\,;\,c\rangle$ platí $-p \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq p \;\Rightarrow\; -pg(x) \leq f(x) \leq pg(x)$.

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \;\Rightarrow\; \int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \;\Rightarrow\; \pm\int_a^c pg(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \;\Rightarrow\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ pričom } \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ je vlastný } \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto.$$

$NP_{\Rightarrow}$: $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} \frac{g(x)}{f(x)} = q \begin{cases} \neq 0 \\ \neq \pm\infty \end{cases} \xRightarrow{\text{ma1: veta 3.2.2, dôsledok 3.2.7.a}}$

$\exists c \in (a\,;b)$ tak, že $\frac{f}{g}$ je na $(a\,;c\rangle$ ohraničená a kladná (pre $q > 0$), resp. záporná (pre $q < 0$).

$\Rightarrow$ $\exists p > 0$ tak, že pre všetky $x \in (a\,;\,c\rangle$ platí $-p \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq p$ a navyše $f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$, t. j. $-pf(x) \leq g(x) \leq pf(x)$ pre $q > 0$, resp. $pf(x) \leq g(x) \leq -pf(x)$ pre $q < 0$.

Zvyšok dôkazu je analogický ako pri postačujúcej podmienke. ■

Príklad 1.2.24.

a) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{cotg}\,(\sqrt{x^2+1} - 1)\,\mathrm{d}x = \infty$. Predpoklady vety 1.2.42 sú splnené:

$f(x) = \operatorname{cotg}\,(\sqrt{x^2+1} - 1)$, $g(x) = \frac{1}{x} > 0$, $x \in (0;\,1)$ majú jediný singulárny bod 0,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln x\Big]_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+ = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{cotg}\,(\sqrt{x^2+1}-1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sin\,(\sqrt{x^2+1}-1)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} \cdot \cos\,(\sqrt{x^2+1} - 1)\right) = 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \frac{1}{x} > 0$, $x \in (1\,;\,\infty)$ majú singulárny bod ∞,

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^\infty = \ln\infty - \ln 1 = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}. \;■$$

Príklad 1.2.25.

$x \in (0;\,\infty)$, $c \in R$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \int x^{-p}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln x + c, & \text{pre } p = 1, \\ \frac{x^{1-p}}{1-p} + c = \frac{-1}{(p-1)x^{p-1}} + c, & \text{pre } p \neq 1. \end{cases}$

$$p>1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \left[\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}}\right]_0^1 = \frac{-1}{1-p} - \frac{-1}{0^+} = \infty, \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \left[\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}}\right]_1^\infty = \frac{-1}{\infty} - \frac{-1}{p-1} = \frac{1}{p-1}.$$

$$p=1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln x\Big]_0^1 = \ln 1 - \ln 0^+ = \infty, \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^\infty = \ln\infty - \ln 1 = \infty.$$

$$p<1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_0^1 = \frac{1}{1-p} - 0 = \frac{1}{1-p}, \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^\infty = \infty - \frac{1}{1-p} = \infty. \;■$$

• Vzťah medzi nevlastnými integrálmi a číselnými radmi

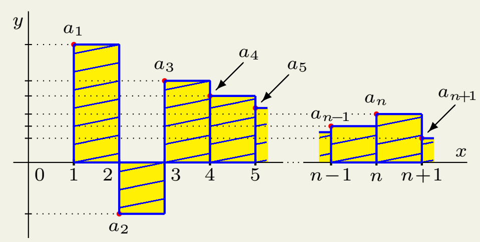
Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný číselný rad s reálnymi členmi a_n, $n \in N$. Uvažujme po častiach konštantnú funkciu $f(x)$, $x \in \langle 1\,;\,\infty)$ definovanú predpisom (obr. 1.2.32):

$$f(x) = a_n, \ \ x \in \langle n\,;\, n+1), \ \ n \in N.$$

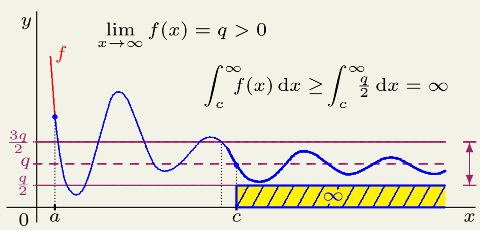
Integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ predstavuje plochu, ktorá sa rovná súčtu obsahov obdĺžnikov so základňami $(n+1)-1 = 1$ a výškami a_n, t. j. súčtu plôch a_n. To znamená, že platí:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (ma1: veta 2.4.1). Pre nevlastné integrály vplyvom hranice platí analogická nutná podmienka konvergencie. V niektorých prípadoch dokážeme vyšetriť konvergenciu číselného radu pomocou vhodne zvoleného nevlastného integrálu (tzv. integrálne kritérium) alebo naopak.



Obr. 1.2.32: Vzťah medzi číselnými radmi a nevlastnými integrálmi



Obr. 1.2.33: Nesplnená nutná podmienka konvergencie nevlastného integrálu

Veta 1.2.43 (Nutná podmienka konvergencie nevlastného integrálu).

$a, b \in R^*$, $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \Big[\text{resp. } \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto\Big]$

$\Longrightarrow$ (pokiaľ existuje) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ $\Big[$resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0\Big]$.

Dôkaz.

Dokážeme sporom. Nech $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = q > 0$.

$\xRightarrow{\text{ma1: veta 3.2.1}}$ Existuje[43] $c > a$ tak, že pre $x \in \langle c\,;\,\infty)$ platí $|f(x)-q| < \frac{q}{2}$, t. j. $\frac{q}{2} < f(x)$.

Potom (porovnávacie kritérium 1.2.40) dostaneme spor ($\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ je vlastný):

$$\int_c^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_c^{\infty} \tfrac{q}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{qx}{2}\Big]_c^{\infty} = \infty \ \Rightarrow\ \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Ostatné prípady pre $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) < 0$, resp. pre $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto$ sa dokážu analogicky. ■

[43] $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in R$ tak, že pre všetky $x > \delta$ platí $|f(x) - q| < \varepsilon$, t. j. v našom prípade $\varepsilon = \frac{q}{2}$, $\delta = c$.

Ako dokazuje nasledujúci príklad, integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ môže konvergovať a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nemusí existovať. Ale ak existuje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq 0$, potom $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Príklad 1.2.26.
a) Nech $f(x)=\begin{cases}1, & x\in N,\\ \frac{1}{x^2}, & x\in(1\,;\infty)-N,\end{cases}$ potom $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje, ale $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=1.$

$\varepsilon>1 \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{1}{x^2}$ pre všetky[44] $x\in\langle 1\,;\varepsilon\rangle$ (o.k.p.) $\xrightarrow{\text{veta 1.2.21}} f\in R_{\langle 1\,;\varepsilon\rangle}$,

$$\int_1^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^\varepsilon \frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^\varepsilon=-\frac{1}{\varepsilon}+1 \;\Longrightarrow\; \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to\infty}\big[1-\tfrac{1}{\varepsilon}\big]=1.$$

$$\left.\begin{aligned} x\in N &\;\Rightarrow\; f(x)=1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}1=1\\ x\notin N &\;\Rightarrow\; f(x)=\tfrac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{x^2}=0\end{aligned}\right\}\;\Longrightarrow\; \lim_{x\to\infty} f(x)\,\dots\,\nexists.$$

b) $\displaystyle\int_6^\infty f(x)\,\mathrm{d}x=\int_6^\infty \frac{2x^4-3x^2-x}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x=\infty$, pričom ∞ je jediný singulárny bod.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2 \xrightarrow{\text{neplatí nutná podmienka konvergencie}} \displaystyle\int_6^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2 \xrightarrow{\text{ma1: veta 3.2.1}}$ Existuje $c>4$ tak, že pre všetky $x>c$ platí $|f(x)-2|<1$.

$\Longrightarrow$ pre všetky $x>c$ platí $1<f(x)<3 \xrightarrow{\text{veta 1.2.40}} \infty=\displaystyle\int_6^\infty \mathrm{d}x\le\int_6^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$ ■

Príklad 1.2.27.

a) $$\int_1^\infty \frac{(-1)^{\lfloor x+1\rfloor}\,\mathrm{d}x}{\lfloor x\rfloor}=\int_1^2\frac{(-1)^2\,\mathrm{d}x}{1}+\int_2^3\frac{(-1)^3\,\mathrm{d}x}{2}+\int_3^4\frac{(-1)^4\,\mathrm{d}x}{3}+\dots+\int_n^{n+1}\frac{(-1)^{n+1}\,\mathrm{d}x}{n}+\dots=$$
$$=\sum_{n=1}^\infty\Big[\int_n^{n+1}\frac{(-1)^{n+1}\,\mathrm{d}x}{n}\Big]=\sum_{n=1}^\infty\Big[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_n^{n+1}\mathrm{d}x\Big]=\sum_{n=1}^\infty\Big[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\big[x\big]_n^{n+1}\Big]=$$
$$=\sum_{n=1}^\infty\Big[\frac{(-1)^{n+1}}{n}(n+1-n)\Big]=\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{n}\;\overset{\text{ma1: príklad 2.4.21}}{=\!=\!=}\;\ln 2\in R \text{ (obr. 1.2.34).}$$

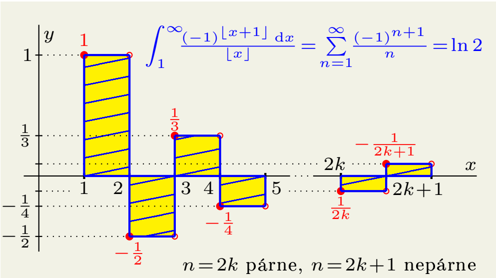
b) $$\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}x}{\lfloor x\rfloor}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1}+\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{2}+\dots+\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{n}+\dots=\sum_{n=1}^\infty\Big[\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{n}\Big]=\sum_{n=1}^\infty\Big[\frac{1}{n}\int_n^{n+1}\mathrm{d}x\Big]=$$
$$=\sum_{n=1}^\infty\Big[\frac{1}{n}\big[x\big]_n^{n+1}\Big]=\sum_{n=1}^\infty\big[\tfrac{1}{n}(n+1-n)\big]=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\;\overset{\text{ma1: príklad 2.4.5}}{=\!=\!=}\;\infty \text{ (obr. 1.2.35).}$$ ■

Veta 1.2.44 (Integrálne kritérium konvergencie číselných radov).
$f(x)$, $x\in\langle 1\,;\infty)$ je nerastúca, nezáporná, $a_n=f(n)$ pre všetky $n\in N$ $\Longrightarrow$
$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \longmapsto \;\Longleftrightarrow\; \sum_{n=1}^\infty a_n\longmapsto.$$

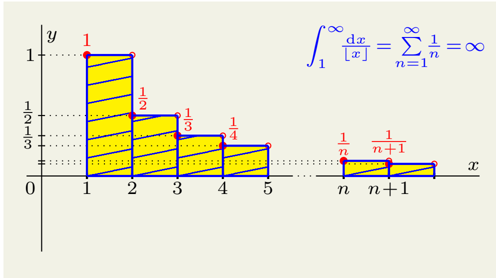
Dôkaz.
$NP_{\Rightarrow}$: $g(x)=a_{n+1}$, $x\in\langle n\,;n+1)$ pre $n\in N$ (obr. 1.2.36 vľavo) $\Rightarrow \displaystyle\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^\infty a_n.$

$0\le g(x)\le f(x)$ pre všetky $x\in\langle 1\,;\infty)$, $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\longmapsto \xrightarrow{\text{veta 1.2.40}}$
$$\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^\infty a_n\longmapsto \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^\infty a_n\longmapsto.$$

[44] Rovnosť neplatí pre prirodzené čísla — na každom intervale $\langle 1\,;\varepsilon\rangle$ ich je konečný počet.



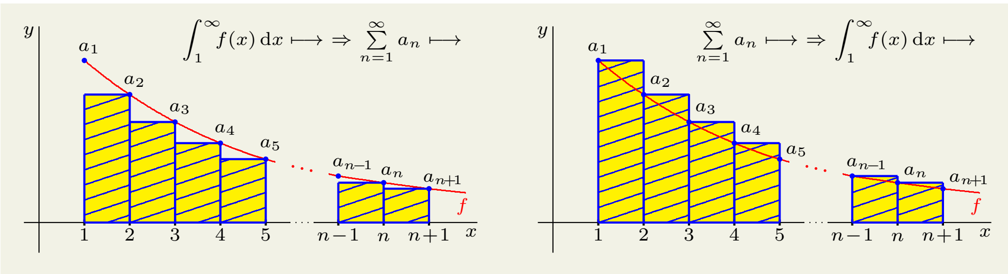
Obr. 1.2.34: Príklad 1.2.27 a)



Obr. 1.2.35: Príklad 1.2.27 b)

$PP_{\Leftarrow}$: $g(x) = a_n,\ x\in\langle n\,;\, n+1)$ pre $n\in N$ (obr. 1.2.36 vpravo) $\Rightarrow \displaystyle\int_1^\infty g(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty a_n.$

$0 \le f(x) \le g(x)$ pre všetky $x\in\langle 1\,;\,\infty)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n \longmapsto \xRightarrow{\text{veta 1.2.40}} \int_1^\infty f(x)\,dx \longmapsto$. ■



Obr. 1.2.36: Integrálne kritérium konvergencie číselných radov 1.2.44

1.2.6 Aplikácie Riemannovho integrálu

Z geometrického hľadiska predstavuje Riemannov určitý integrál (vlastný i nevlastný) plochu krivočiareho lichobežníka. To znamená, že určitý integrál môžeme použiť na výpočet obsahov rovinných útvarov. Pomocou Riemannovho integrálu môžeme vypočítať nielen obsahy týchto útvarov, ale aj ich obvody, statické momenty, prípadne ťažiská. Tiež môžeme vypočítať objemy a povrchy telies, ktoré vzniknú ich rotáciou v priestore.

Obmedzíme sa na odvodenie vzorcov pre ohraničené rovinné plochy a ohraničené priestorové telesá. Tieto vzorce ostanú v platnosti aj pre neohraničené objekty, ale budú mať tvar nevlastných integrálov.

Vo všeobecnosti môžeme plochy v rovine ohraničiť grafmi reálnych funkcií alebo krivkami. Názorne si môžeme krivku predstaviť ako (obvykle spojitú) čiaru v rovine s určitými vlastnosťami, napr. ako dráhu nejakého pohybu hmotného bodu. Matematicky môžeme krivku v rovine definovať viacerými spôsobmi. Najčastejšie sa vyjadrujú parametricky.

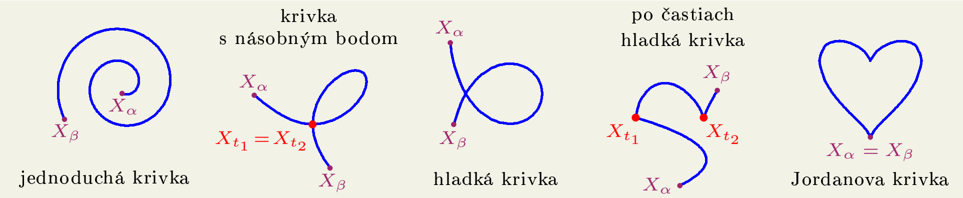
Explicitne krivku f vyjadrujeme ako graf spojitej funkcie jednej reálnej premennej $y = f(x)$, $x \in I$, resp. $x = f(y)$, $y \in I$, kde $I \subset R$ je interval, t. j. ako množinu bodov

$\{[x; f(x)] \; ; \, x \in R\}$, resp. množinu bodov $\{[f(y); y] \; ; \, y \in R\}$. **Implicitne** môžeme vyjadriť **krivku f** ako množinu bodov[45] $\{[x;y] \in R^2 \, ; \, F(x,y)=0\}$, pričom $F \colon R^2 \to R$.

Množina[45] $f = \{[x;y] \in R^2 \, ; \, x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in J\}$, pričom $\varphi, \psi \colon J \to R$ sú spojité funkcie a J je interval, sa nazýva **parametrické vyjadrenie krivky f**. Jednotlivé body krivky f označme pre $t \in J$ symbolom $X_t = [\varphi(t); \psi(t)]$.

Ak pre $t_1, t_2 \in J$, $t_1 \neq t_2$ platí $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, potom hovoríme, že sa **krivka f pretína v bode $X_{t_1} = X_{t_2}$**, ktorý nazývame **násobný bod**. Ak $X_{t_1} \neq X_{t_2}$ pre všetky $t_1, t_2 \in J$, $t_1 \neq t_2$ (nikde sa nepretína, t. j. nemá násobné body), potom sa krivka f nazýva **jednoduchá**.

Ak $J = \langle \alpha \, ; \, \beta \rangle$ je uzavretý interval, potom $X_\alpha = [\varphi(\alpha); \psi(\alpha)]$ sa nazýva **počiatočný bod** a $X_\beta = [\varphi(\beta); \psi(\beta)]$ sa nazýva **koncový bod krivky f**. Krivka f nazýva **uzavretá**, ak platí $X_\alpha = X_\beta$. Ak je krivka f uzavretá a jednoduchá na intervale $(\alpha \, ; \, \beta)$, potom sa nazýva **jednoduchá uzavretá** alebo **Jordanova krivka**.



Obr. 1.2.37: Príklady rôznych kriviek v rovine

Krivka f sa nazýva **hladká na J**, ak sú funkcie φ', ψ' spojité na J a pre všetky $t \in J$ platí[46] $|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0$, t. j. $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$. Hladká krivka má v každom bode dotyčnicu, pričom v krajných bodoch má jednostranné dotyčnice.

Krivka f sa nazýva **po častiach hladká**, ak je hladká na každom intervale $\langle t_{i-1} \, ; \, t_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $n \in N$, $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, t. j. $\{t_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle \alpha \, ; \, \beta \rangle}$. Po častiach hladká krivka má dotyčnicu v každom bode okrem konečného počtu, kde má jednostranné dotyčnice. Funkcie φ', ψ' sú po častiach spojité na J a spojité na $\langle t_{i-1} \, ; \, t_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

- **Obsah rovinnej plochy**

Obsah rovinnej plochy ohraničenej funkciou, resp. krivkou je vždy kladný. Pre obsah plochy P_f ohraničenej funkciou $f \in R_{\langle a \, ; \, b \rangle}$ a osou x na intervale $\langle a \, ; \, b \rangle$ platí:

$$0 \leq f(x) \;\Rightarrow\; P_f = \{[x;y] \, ; x \in \langle a \, ; \, b \rangle \, , 0 \leq y \leq f(x)\} = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

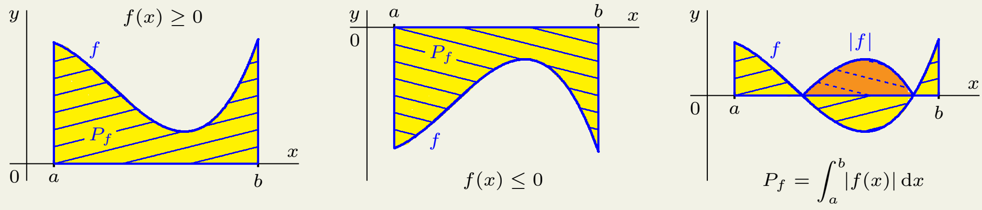
$$f(x) \leq 0 \;\Rightarrow\; P_f = P_{-f} = \int_a^b \big[-f(x)\big] \, \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Vo všeobecnosti pre $f \in R_{\langle a \, ; \, b \rangle}$ platí (obr. 1.2.38): $P_f = P_{|f|} = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$.

Pre obsah plochy $P_{f-g} = \{[x;y] \, ; x \in \langle a \, ; \, b \rangle, \, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ ohraničenej funkciami $f, g \in R_{\langle a \, ; \, b \rangle}$, pričom $g(x) \leq f(x)$ pre $x \in \langle a \, ; \, b \rangle$, platí (obr. 1.2.39):

[45] Je to analogické ako pri implicitnej, resp. parametrickej definícii funkcie (ma1: str. 73), ale pri krivke môže byť priradených jednému vzoru x viacero obrazov y.

[46] V krajných bodoch intervalu J sa myslia jednostranné derivácie.



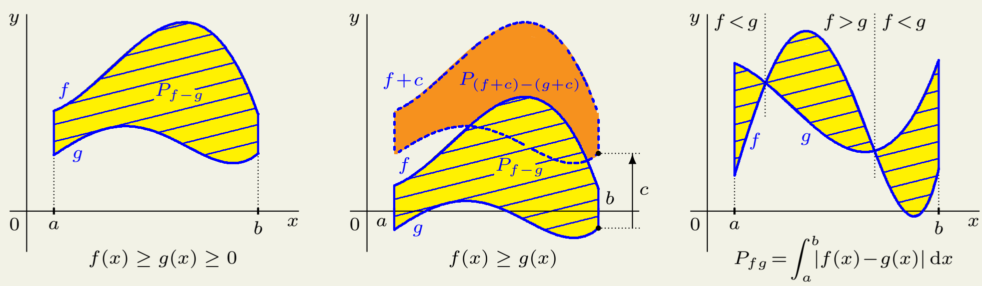
Obr. 1.2.38: Obsah rovinnej plochy ohraničenej funkciou f a osou x na $\langle a;\, b\rangle$

$$0 \le g(x) \le f(x) \;\Rightarrow\; P_{f-g} = P_f - P_g = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big[f(x)-g(x)\big]\,\mathrm{d}x,$$

$g(x) \le f(x) \;\Rightarrow\;$ existuje[47] $c>0$ tak, aby $0 \le g(x)+c \le f(x)+c$, $x \in \langle a\,;\, b\rangle$

$$\Longrightarrow\; P_{f-g} = P_{(f+c)-(g+c)} = \int_a^b \big[(f(x)+c) - (g(x)+c)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big[f(x)-g(x)\big]\,\mathrm{d}x.$$

Všeobecne pre $f, g \in R_{\langle a\,;\, b\rangle}$ platí (obr. 1.2.39 vpravo): $P_{fg} = P_{|f-g|} = \displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.$



Obr. 1.2.39: Obsah rovinnej plochy ohraničenej funkciami f, g na $\langle a;\, b\rangle$

Nech je funkcia $f \in R_{\langle a\,;\, b\rangle}$ parametrizovaná spojitými funkciami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, pričom α, β sú hraničné body J. Nech $\varphi'(t) > 0$ (φ je rastúca, $\alpha < \beta$), resp. $\varphi'(t) < 0$ (φ je klesajúca, $\beta < \alpha$) na J. Potom (ma1: veta 3.1.5) φ je prostá na J a existuje $t = \varphi^{-1}(x) : \langle a;\, b\rangle \to J$, t. j. $y = f(x) = \psi(t) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$, $x \in I$. Pre obsah plochy P_f ohraničenej funkciou f a osou x platí:[48]

$$P_f = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \text{subst.}\;\; x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right] = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vo všeobecnosti, ak je $f : x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha\,;\, \beta\rangle$, $\alpha < \beta$ jednoduchá po častiach

[47] Plocha sa nezmení, iba sa posunie o hodnotu c v kladnom smere osi y.

[48] $P_f = \int_\alpha^\beta |\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha |\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha |\psi(t)|(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha |\psi(t)\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ pre φ klesajúcu, $P_f = \int_\alpha^\beta |\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta |\psi(t)\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ pre φ rastúcu.

hladká uzavretá krivka, potom pre plochu P_f ohraničenú touto krivkou platí:

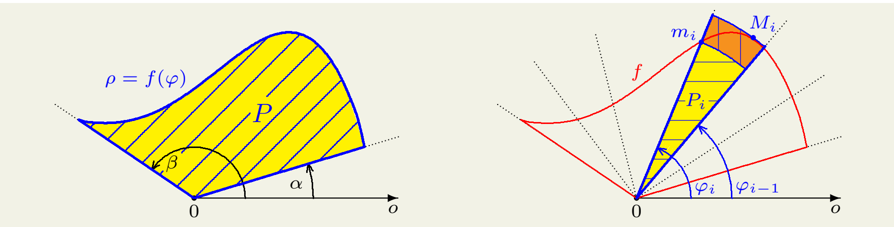
$$P_f = \int_\alpha^\beta |\psi(t)|\cdot|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta |\psi(t)\cdot\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Pre niektoré aplikácie je výhodnejšie, keď je funkcia, resp. krivka f zadaná **v polárnych súradniciach**. V tomto prípade budeme predpokladať, že explicitné vyjadrenie má tvar $f = \{[\varphi;\rho]\in R^2\,;\ \rho = f(\varphi)\}$, resp. $f = \{[\varphi;\rho]\in R^2\,;\ \varphi = f(\rho)\}$.

Medzi karteziánskymi a polárnami súradnicami platia vzťahy (ma1: str. 74): $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $\rho\in\langle 0\,;\,\infty)$, $\varphi\in R$, resp. $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\rho}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\rho}$ pre $\rho\neq 0$.

Ak je krivka f zadaná v polárnych súradniciach rovnicou $\rho = f(\varphi)$, $\varphi\in J$, kde J je interval, potom ju môžeme vyjadriť v karteziánskych súradniciach **v parametrickom tvare**: $f = \{[x;y]\in R^2\,;\ x=f(\varphi)\cdot\cos\varphi, y=f(\varphi)\cdot\sin\varphi, \varphi\in J\}$.

Plochu v polárnych súradniciach, ktorá je ohraničená polpriamkami $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ a po častiach spojitou funkciou $\rho = f(\varphi)\geq 0$, $\varphi\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$, $0<\beta-\alpha\leq 2\pi$ (obr. 1.2.40 vľavo), t. j. $P = \{[x;y]\in R^2; x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, \varphi\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle, 0\leq\rho\leq f(\varphi)\}$, nazývame **krivočiary výsek** určený funkciou f a polpriamkami $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$.



Obr. 1.2.40: Krivočiary výsek P a jeho delenie na podvýseky P_i

Delenie $D = \{\varphi_i\}_{i=0}^n \in \mathfrak{D}_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle}$, $n\in N$ rozdelí krivočiary výsek P na n krivočiarych výsekov P_i, $i=1,2,\ldots,n$ ohraničených polpriamkami $\varphi=\varphi_{i-1}$, $\varphi=\varphi_i$ (obr. 1.2.40 vpravo). Pre $i=1,2,\ldots,n$ označme

$$m_i = \min\{f(\varphi)\,;\ \varphi\in\langle\varphi_{i-1}\,;\,\varphi_i\rangle\},\qquad M_i = \max\{f(\varphi)\,;\ \varphi\in\langle\varphi_{i-1}\,;\,\varphi_i\rangle\}.$$

Každú z plôch P_i môžeme odhadnúť zdola a zhora kruhovými výsekmi s polomermi m_i a M_i a stredovým uhlom $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Pre plochu P potom platí:[49]

$$\tfrac{S_D(f^2,D)}{2} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i^2\Delta\varphi_i = \sum_{i=1}^n \tfrac{m_i^2\Delta\varphi_i}{2} \leq P \leq \sum_{i=1}^n \tfrac{M_i^2\Delta\varphi_i}{2} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n M_i^2\Delta\varphi_i = \tfrac{S_H(f^2,D)}{2}.$$

Uvedené vzťahy predstavujú dolné a horné Riemannove integrálne súčty funkcie $f^2(\varphi)$, $\varphi\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$. Keďže $f^2\in R_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle}$, potom pre obsah krivočiareho výseku P platí:

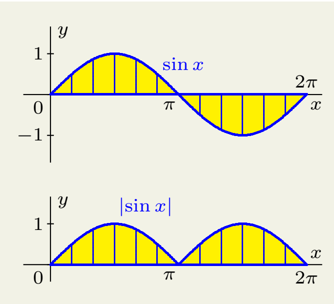
$$P = \tfrac{1}{2}\sup\{S_D(f^2,D)\,;\ D\in\mathfrak{D}_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle}\} = \tfrac{1}{2}\inf\{S_H(f^2,D)\,;\ D\in\mathfrak{D}_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle}\} = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

[49] Obsah kruhového výseku so stredovým uhlom φ a polomerom ρ sa rovná hodnote $\pi\rho^2\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\rho^2\varphi}{2}$.

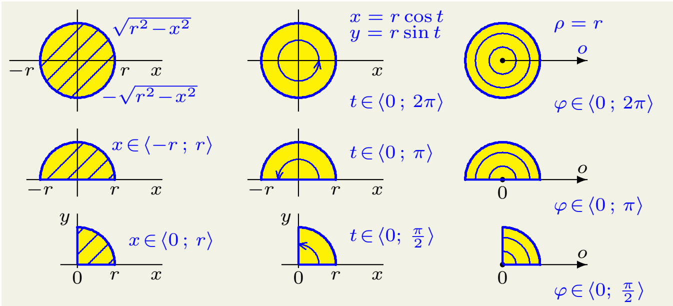
Príklad 1.2.28.
Určte obsah plochy P ohraničenej funkciou $y=\sin x$, $x\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$ a osou x.

Riešenie.
$P=\int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}=-1-(-1)=0.$
Uvedený postup **je nesprávny**, pretože (obr. 1.2.41) na $\langle\pi\,;\,2\pi\rangle$ je funkcia $\sin x$ záporná.
Správne riešenie je nasledujúce:

$$P=\int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}\big(-\sin x\big)\,\mathrm{d}x=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}+\Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}=$$
$$=-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi=-(-1)+1+1-(-1)=4.\ \blacksquare$$



Obr. 1.2.41: Príklad 1.2.28



Obr. 1.2.42: Príklad 1.2.29

Príklad 1.2.29.
Odvoďte vzorec pre obsah P kruhu K s polomerom $r>0$.

Riešenie.
a) Explicitne (obr. 1.2.42 vľavo) je kruh K ohraničený funkciami $\pm\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\langle -r\,;\,r\rangle$.

$$\Longrightarrow\quad P=\int_{-r}^{r}\Big[\sqrt{r^2-x^2}-\big(-\sqrt{r^2-x^2}\big)\Big]\,\mathrm{d}x=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ \overset{\text{pr. 1.1.24}}{=\!=\!=\!=}$$
$$=2\Big[\tfrac{r^2}{2}\arcsin\tfrac{x}{r}+\tfrac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}\Big]_{-r}^{r}=2\Big[\tfrac{r^2}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2}+0-\tfrac{r^2}{2}\cdot\tfrac{-\pi}{2}-0\Big]=\pi r^2.$$

b) Parametricky (obr. 1.2.42 stred) je kruh K ohraničený uzavretou jednoduchou krivkou $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$.

$$\Longrightarrow\quad P=\int_0^{2\pi}\Big|r\cos t\cdot\big[r\sin t\big]'\Big|\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\big|r^2\cos^2 t\big|\,\mathrm{d}t=r^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\ \overset{\text{pr. 1.1.36}}{=\!=\!=\!=}$$
$$=r^2\Big[\tfrac{t}{2}+\tfrac{\sin 2t}{4}\Big]_0^{2\pi}=r^2\Big[\tfrac{2\pi}{2}+0-0-0\Big]=\pi r^2.$$

c) V polárnych súradniciach (obr. 1.2.42 vpravo) je kruh K ohraničený konštantnou funkciou $\rho=r$, $\varphi\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$.

$$\Longrightarrow\quad P=\int_0^{2\pi}\tfrac{r^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi=\tfrac{r^2}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\tfrac{r^2}{2}\cdot 2\pi=\pi r^2.\ \blacksquare$$

Poznámka 1.2.8.
Obsah kruhu P môžeme taktiež vypočítať ako dvojnásobok polkruhu, resp. štvornásobok štvrťkruhu (obr. 1.2.42):

$$P = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} r^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\pi}\frac{r^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi,$$

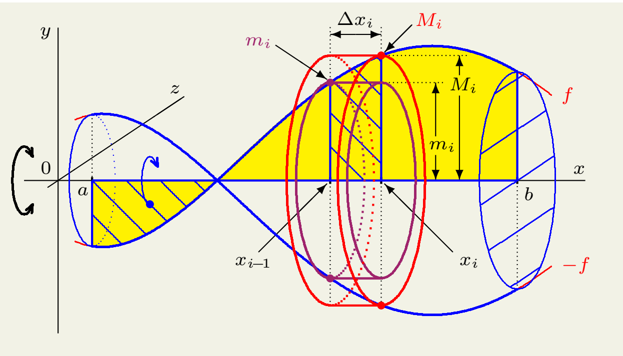
$$\textit{resp. } P = 4\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

- **Objem rotačného telesa — krivka rotuje okolo osi x**

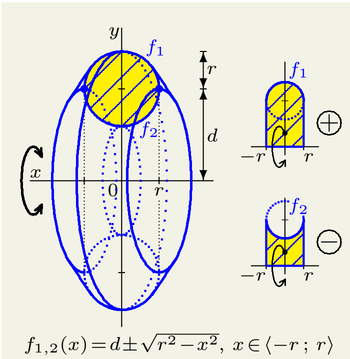
Nech $f(x)$, $x \in \langle a\,;\,b\rangle$ je po častiach spojitá funkcia. Plocha ohraničená funkciou f, osou x a intervalom $\langle a\,;\,b\rangle$ leží v rovine xy. Ak ju necháme rotovať okolo osi x, vznikne v priestore xyz rotačné teleso (obr. 1.2.43).[50] Určíme objem V_x tohto rotačného telesa.

Uvažujme delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^{n} \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n \in N$. Pre $i = 1, 2, \ldots, n$ označme

$$m_i = \min\{|f(x)|\,;\, x \in \langle x_{i-1}\,;\, x_i\rangle\}, \quad M_i = \max\{|f(x)|\,;\, x \in \langle x_{i-1}\,;\, x_i\rangle\}.$$



Obr. 1.2.43: Objem rotačného telesa (f rotuje okolo osi x)



Obr. 1.2.44: Anuloid (príklady 1.2.30, 1.2.38)

Každý z objemov[51] V_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ môžeme ohraničiť objemami valcov s výškou Δx_i a s polomermi podstáv m_i a M_i, t. j. objemami $\pi m_i^2 \Delta x_i$ a $\pi M_i^2 \Delta x_i$. Potom platí:

$$\pi S_D(f^2, D) = \pi\sum_{i=1}^{n} m_i^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\pi m_i^2\Delta x_i \le V_x = \sum_{i=1}^{n} V_i \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n}\pi M_i^2\Delta x_i = \pi\sum_{i=1}^{n} M_i^2\Delta x_i = \pi S_H(f^2, D).$$

Vyššie uvedené vzťahy predstavujú dolné a horné Riemannove integrálne súčty funkcie $|f(x)|^2 = f^2(x)$, $x \in \langle a\,;\, b\rangle$. Keďže $f^2 \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, potom pre objem V_x platí:

$$V_x = \pi\cdot\sup\left\{S_D(f^2, D)\,;\, D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\right\} = \pi\cdot\inf\left\{S_H(f^2, D)\,;\, D \in \mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\right\} = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

[50] Z obrázku je tiež zrejmé, že nezáleží na tom, či je funkcia f kladná alebo záporná. Pri rotácii funkcií f, $-f$, resp. $|f|$ vznikne rovnaké teleso.
[51] V_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ vznikne rotáciou funkcie $f(x)$, $x \in \langle x_{i-1}\,;\, x_i\rangle$ okolo osi x.

Nech je funkcia $f \in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ parametrizovaná spojitými funkciami $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t \in J$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, pričom $\varphi'(t)>0$ ($J=\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$, φ je rastúca), resp. $\varphi'(t)<0$ ($J=\langle\beta\,;\,\alpha\rangle$, φ je klesajúca) na J. Potom je φ prostá a existuje $t=\varphi^{-1}(x)\colon\langle a\,;\,b\rangle \to J$, t. j. $y=f(x)=\psi(t)=\psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$, $x\in I$. Pre objem rotačného telesa V_x platí:[52]

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}\text{subst. } x=\varphi(t)\\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vo všeobecnosti pre funkciu $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$ (φ, ψ sú spojité, $\varphi'(t)>0$, resp. $\varphi'(t)<0$) a ňou určený objem rotačného telesa V_x (okolo osi x) platí:

$$V_x=\pi\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\cdot|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Príklad 1.2.30.
Vypočítajte objem anuloidu[53] s polomermi $d\pm r$, $d\geq r>0$.

Riešenie.
Anuloid vznikne rotáciou kružnice s polomerom r okolo priamky vzdialenej od jej stredu o hodnotu d (obr. 1.2.44). Jeho objem vypočítame ako rozdiel objemov telies, ktoré vzniknú rotáciami polkružníc $f_1=d+\sqrt{r^2-x^2}$ a $f_2=d-\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\langle -r\,;\,r\rangle$ okolo osi x. Platí:

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-r}^r f_1^2(x)\,\mathrm{d}x-\pi\int_{-r}^r f_2^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_{-r}^r\Big(d+\sqrt{r^2-x^2}\Big)^2-\pi\int_{-r}^r\Big(d-\sqrt{r^2-x^2}\Big)^2\,\mathrm{d}x=\\&=\pi\int_{-r}^r\Big(d^2+2d\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\Big)-\pi\int_{-r}^r\Big(d^2-2d\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\Big)\,\mathrm{d}x=\\&=\pi\int_{-r}^r 4d\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}t=rx,\ \ x=-r\Rightarrow t=-1\\ \mathrm{d}t=r\,\mathrm{d}x,\ \ \ x=r\Rightarrow t=1\end{bmatrix}=4\pi d\int_{-1}^1\sqrt{r^2-r^2t^2}\,r\,\mathrm{d}t=\\&\qquad\qquad=4\pi dr^2\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\overset{\text{pr. 1.2.10 a)}}{=\!=\!=}4\pi dr^2\tfrac{\pi}{2}=2\pi dr^2.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Príklad 1.2.31.
Odvoďte vzorec pre objem V gule G s polomerom $r>0$ (obr. 1.2.45).

Riešenie.
a) Guľa G vznikne rotáciou polkružnice $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\langle -r\,;\,r\rangle$ okolo osi x:

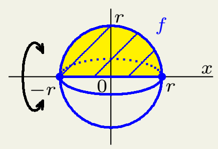
$$V=\pi\int_{-r}^r\big(\sqrt{r^2-x^2}\big)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_{-r}^r(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\Big[r^2x-\tfrac{x^3}{3}\Big]_{-r}^r=\pi\big[r^3-\tfrac{r^3}{3}+r^3-\tfrac{r^3}{3}\big]=\tfrac{4\pi r^3}{3}.$$

b) V parametrickom tvare má polkružnica f tvar $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in\langle 0\,;\,\pi\rangle$ a platí:

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^\pi(r\sin t)^2\cdot|(r\cos t)'|\,\mathrm{d}t=\pi\int_0^\pi r^2\sin^2 t\cdot|-r\sin t|\,\mathrm{d}t=\pi r^3\int_0^\pi\sin^3 t\,\mathrm{d}t=\\&=\pi r^3\int_0^\pi\tfrac{3\sin t-\sin 3t}{4}\,\mathrm{d}t=\pi r^3\Big[-\tfrac{3\cos t}{4}+\tfrac{\cos 3t}{4\cdot 3}\Big]_0^\pi=\pi r^3\Big[-\tfrac{-3}{4}+\tfrac{-1}{12}+\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{12}\Big]=\tfrac{4\pi r^3}{3}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

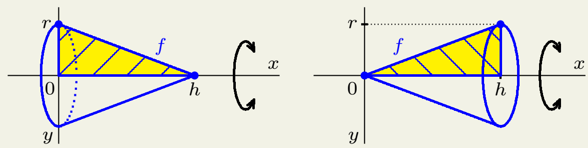
[52] $V_x=\pi\int_\alpha^\beta\psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=-\pi\int_\beta^\alpha\psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\pi\int_\beta^\alpha\psi^2(t)(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t=\pi\int_\beta^\alpha\psi^2(t)\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ pre φ klesajúcu, $V_x=\pi\int_\alpha^\beta\psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\pi\int_\alpha^\beta\psi^2(t)\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ pre φ rastúcu.

[53] Anuloid je teleso, ktoré má tvar plávajúceho kolesa, resp. pneumatiky.



$f(x)=\sqrt{r^2-x^2},\ x\in\langle -r\,;\,r\rangle$

Obr. 1.2.45: Objem gule



$f(x)=r-\frac{r}{h}x,\ x\in\langle 0\,;\,h\rangle$ $\quad f(x)=\frac{r}{h}x,\ x\in\langle 0\,;\,h\rangle$

Obr. 1.2.46: Objem kužeľa (príklad 1.2.32)

Príklad 1.2.32.
Určte objem rotačného kužeľa s polomerom podstavy $r>0$ a výškou $h>0$.

Riešenie.
a) Daný kužeľ (obr. 1.2.46 vľavo) vznikne rotáciou trojuholníka s vrcholmi $[0;0]$, $[h;0]$, $[0;r]$, t. j. úsečky $f(x)=r-\frac{r}{h}x=\frac{r}{h}(h-x)$, $x\in\langle 0\,;\,h\rangle$ okolo osi x. Pre jeho objem platí:

$$V=\pi\int_0^h\left[\tfrac{r}{h}(h-x)\right]^2\mathrm{d}x=\tfrac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h(x-h)^2\,\mathrm{d}x=\tfrac{\pi r^2}{h^2}\left[\tfrac{(x-h)^3}{3}\right]_0^h=\tfrac{\pi r^2}{h^2}\left[0-\tfrac{-h^3}{3}\right]=\tfrac{\pi r^2h}{3}.$$

b) Daný kužeľ vznikne (obr. 1.2.46 vpravo) taktiež rotáciou trojuholníka s vrcholmi $[0;0]$, $[h;0]$, $[h;r]$, t. j. úsečky $f(x)=\frac{r}{h}x$, $x\in\langle 0\,;\,h\rangle$ okolo osi x. Pre objem platí:

$$V=\pi\int_0^h\left[\tfrac{r}{h}x\right]^2\mathrm{d}x=\tfrac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x=\tfrac{\pi r^2}{h^2}\left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^h=\tfrac{\pi r^2}{h^2}\left[\tfrac{h^3}{3}-0\right]=\tfrac{\pi r^2h}{3}.\ \blacksquare$$

- **Objem rotačného telesa — krivka rotuje okolo osi y**

Nech $f(x)$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$, $a\geq 0$ je po častiach spojitá funkcia. Plocha ohraničená funkciou f, osou x a intervalom $\langle a\,;\,b\rangle$ leží v rovine xy (v polrovine $x\geq 0$). Ak ju necháme rotovať okolo osi y, vznikne v priestore xyz rotačné teleso (obr. 1.2.47). Určíme jeho objem V_y.

Uvažujme delenie $D=\{x_i\}_{i=0}^n\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}$, $n\in N$. Pre $i=1,2,\ldots,n$ označme

$$m_i=\min\{|f(x)|\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\},\qquad M_i=\max\{|f(x)|\,;\,x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle\}.$$

Každý z objemov[54] V_i, $i=1,2,\ldots,n$ môžeme ohraničiť zdola objemom medzivalcia s výškou m_i a zhora objemom medzivalcia s výškou M_i s totožnými polomermi podstáv x_{i-1} a x_i, t. j. objemami $\pi(x_i^2-x_{i-1}^2)m_i$ a $\pi(x_i^2-x_{i-1}^2)M_i$. Pre $i=1,2,\ldots,n$ platí:

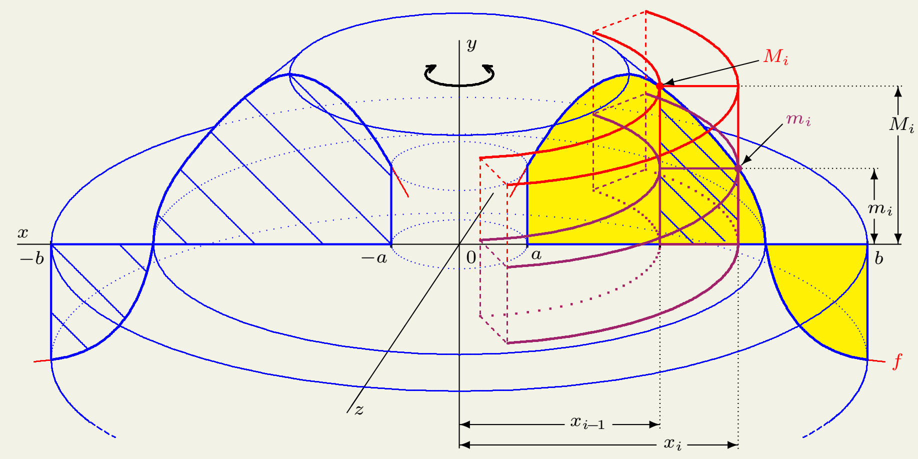
$$2x_{i-1}\Delta x_i\leq x_i^2-x_{i-1}^2=(x_i+x_{i-1})(x_i-x_{i-1})=(x_i+x_{i-1})\Delta x_i\leq 2x_i\Delta x_i.$$

$$\Longrightarrow\ 2\pi S_D(xf,D)=2\pi\sum_{i=1}^n x_{i-1}m_i\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^n\pi(x_i^2-x_{i-1}^2)m_i\leq V_y=$$
$$=\sum_{i=1}^n V_i\leq\sum_{i=1}^n\pi(x_i^2-x_{i-1}^2)M_i=2\pi\sum_{i=1}^n x_iM_i\Delta x_i=2\pi S_H(xf,D).$$

[54] V_i, $i=1,2,\ldots,n$ vznikne rotáciou funkcie $f(x)$, $x\in\langle x_{i-1}\,;\,x_i\rangle$ okolo osi y.

Uvedené vzťahy predstavujú dolné a horné Riemannove integrálne súčty funkcie $x\,|f(x)|$, $x\in\langle a\,;\,b\rangle$. Keďže $x\,|f|\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$, potom pre objem rotačného telesa V_y platí:

$$V_y=2\pi\cdot\sup\bigl\{S_D(x|f|,D);\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\bigr\}=2\pi\cdot\inf\bigl\{S_H(x|f|,D);\,D\in\mathfrak{D}_{\langle a\,;\,b\rangle}\bigr\}=2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$



Obr. 1.2.47: Objem rotačného telesa (f rotuje okolo osi y)

Nech je funkcia $f\in R_{\langle a\,;\,b\rangle}$ parametrizovaná spojitými funkciami $x=\varphi(t)\geq 0$, $y=\psi(t)$, $t\in J$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, pričom $\varphi'(t)>0$ ($J=\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$, φ je rastúca), resp. $\varphi'(t)<0$ ($J=\langle\beta\,;\,\alpha\rangle$, φ je klesajúca) na J. Potom je φ prostá a existuje $t=\varphi^{-1}(x)\colon\langle a\,;\,b\rangle\to J$, t. j. $y=f(x)=\psi(t)=\psi\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr)$, $x\in I$. Pre objem rotačného telesa V_y platí:[55]

$$V_y=2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c}\text{subst. }\ x=\varphi(t)\\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right]=2\pi\int_\alpha^\beta\varphi(t)\,|\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vo všeobecnosti pre funkciu $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$ (φ, ψ sú spojité, $\varphi'(t)>0$, resp. $\varphi'(t)<0$) a ňou určený objem rotačného telesa V_y (okolo osi y) platí:

$$V_y=2\pi\int_\alpha^\beta\varphi(t)\,|\psi(t)|\cdot|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t=2\pi\int_\alpha^\beta\varphi(t)\,|\psi(t)\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Príklad 1.2.33.

a) Objem gule s polomerom $r>0$ (viď príklad 1.2.31) môžeme vypočítať ako dvojnásobok objemu polgule, ktorá vznikne rotáciou štvrťkružnice $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\langle 0\,;\,r\rangle$ okolo osi y (obr. 1.2.48). Pre objem V gule platí:

$$V=2\cdot2\pi\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c|c}-x^2=t & x=0\Rightarrow t=0\\ -2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t & x=r\Rightarrow t=-r^2\end{array}\right]=-2\pi\int_0^{-r^2}\sqrt{r^2+t}\,\mathrm{d}t=$$

$$=-2\pi\int_0^{-r^2}(t+r^2)^{\frac12}\,\mathrm{d}t=-2\pi\left[\frac{(t+r^2)^{\frac32}}{\frac32}\right]_0^{-r^2}=-\frac{4\pi}{3}\left[0-r^3\right]=\frac{4\pi r^3}{3}.$$

[55] $V_y=-2\pi\int_\beta^\alpha\varphi(t)\,|\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=2\pi\int_\beta^\alpha\varphi(t)\,|\psi(t)|(-\varphi'(t))\,\mathrm{d}t=2\pi\int_\beta^\alpha\varphi(t)\,|\psi(t)|\cdot|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ pre klesajúcu φ a $V_y=2\pi\int_\alpha^\beta\varphi(t)\,|\psi(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=2\pi\int_\alpha^\beta\varphi(t)\,|\psi(t)|\cdot|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ pre φ rastúcu.

V parametrickom tvare má štvrťkružnica f tvar $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in\langle 0;\, \frac{\pi}{2}\rangle$ a platí:

$$V = 2\cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos t\,|r\sin t\cdot(r\cos t)'|\,\mathrm{d}t = 4\pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \sin t = u & t=0 \Rightarrow u=0 \\ \cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u & t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1 \end{array}\right] = 4\pi r^3 \int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u = 4\pi r^3 \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 4\pi r^3\left[\frac{1}{3}-0\right] = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

b) Rotačný kužeľ s polomerom podstavy $r>0$ a výškou $h>0$ vznikne rotáciou trojuholníka s vrcholmi $[0;0]$, $[r;0]$, $[0;h]$, t. j. úsečky $f(x) = h-\frac{h}{r}x = \frac{h}{r}(r-x)$, $x\in\langle 0\,;\, r\rangle$ okolo osi y (obr. 1.2.49). Pre jeho objem platí:

$$V = 2\pi\int_0^r x\tfrac{h}{r}(r-x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi h}{r}\int_0^r (xr-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi h}{r}\left[\frac{x^2 r}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{2\pi h}{r}\left[\frac{r^3}{2}-\frac{r^3}{3}\right] = \frac{\pi r^2 h}{3}. \ \blacksquare$$

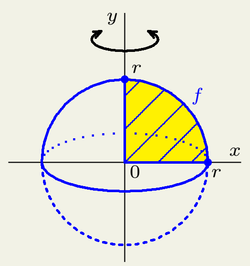
Príklad 1.2.34.
Určte objem telesa V, ktoré vznikne rotáciou úsečky $y=2-x$, $x\in\langle 0\,;\,4\rangle$ okolo osi y.

Riešenie.

$$V = 2\pi\int_0^4 x\,|2-x|\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^2 x(2-x)\,\mathrm{d}x + 2\pi\int_2^4 x(x-2)\,\mathrm{d}x =$$

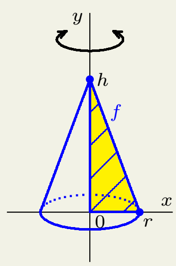
$$= 2\pi\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + 2\pi\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^4 = 2\pi\left[4-\frac{8}{3}\right] + 2\pi\left[\frac{64}{3}-16-\frac{8}{3}+4\right] = 16\pi.$$

Iné riešenie.
Rotáciou vznikne teleso zložené z kužeľa a z dutého valca s chýbajúcou časťou v tvare zrezaného kužeľa (obr. 1.2.50). Kužeľ vznikne rotáciou úsečky $y=2-x$, $x\in\langle 0\,;\,2\rangle$, má výšku 2, polomer podstavy 2 a objem $V_1 = \frac{2^2\cdot 2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$.
Dutý valec vznikne rotáciou úsečky $y=2-x$, $x\in\langle 2\,;\,4\rangle$, má výšku 2, polomery podstáv 2, resp. 4 a objem $V_2 = V_2' - V''_2 = \frac{96\pi}{3} - \frac{56\pi}{3} = \frac{40\pi}{3}$, pričom $V_2' = 4^2\cdot 2\pi = \frac{96\pi}{3}$ je objem valca a $V''_2 = \frac{4^2\cdot 4\pi}{3} - \frac{2^2\cdot 2\pi}{3} = \frac{56\pi}{3}$ je objem chýbajúceho zrezaného kužeľa (pôvodný kužeľ: výška 4, polomer podstavy 4, odrezaný kužeľ: výška 2, polomer podstavy 2).
$\Longrightarrow\ V = V_1+V_2 = \frac{8\pi}{3}+\frac{40\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi.\ \blacksquare$



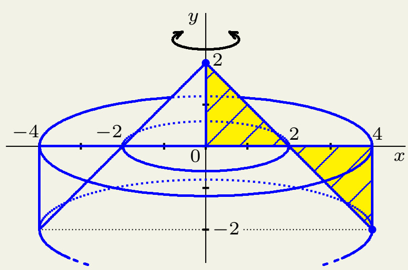
$f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\langle 0\,;\,r\rangle$

Obr. 1.2.48: Objem gule (príklad 1.2.33 a)



$f(x)=h-\frac{h}{r}x$, $x\in\langle 0\,;\,h\rangle$

Obr. 1.2.49: Objem kužeľa (príklad 1.2.33 b)



$f(x)=2-x$, $x\in\langle 0\,;\,4\rangle$

Obr. 1.2.50: Objem telesa (príklad 1.2.34)

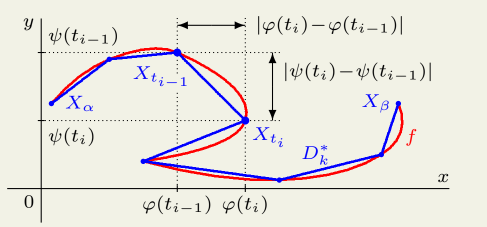
- **Dĺžka krivky**

Nech $f: x=\varphi(t),\, y=\psi(t),\, t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$ je po častiach hladká krivka, $D=\{t_i\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle}$, $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$, $n\in N$ je ľubovoľné delenie. Označme $\left|X_{t_{i-1}}X_{t_i}\right|$, $i=1,2,\ldots,n$ dĺžku úsečky, ktorá spája body $X_{t_{i-1}}$, X_{t_i}. **Dĺžkou krivky** f nazývame hodnotu:[56]

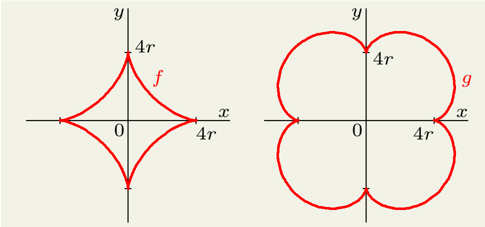
$$d(f)=\sup\left\{d(X_D);\, D\in\mathfrak{D}_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle}\right\},\quad \text{kde } d(X_D)=\sum_{i=1}^{n}\left|X_{t_{i-1}}X_{t_i}\right|.$$

Dĺžka krivky f je nezávislá na jej vyjadrení a so zvolenou presnosťou ju môžeme aproximovať hodnotou $d(X_D)$, pričom $D\in\mathfrak{D}_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle}$.

Uvažujme po častiach hladkú krivku $f: x=\varphi(t),\, y=\psi(t),\, t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$. Označme hraničné body intervalov, na ktorých je f hladká postupne $t_0^*=\alpha<t_1^*<t_2^*<\cdots<t_{n-1}^*<t_n^*=\beta$, $n\in N$. Je zrejmé, že $D^*=\{t_i^*\}_{i=0}^{n}\in\mathfrak{D}_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle}$.



Obr. 1.2.51: Dĺžka krivky f



Obr. 1.2.52: Príklad 1.2.35

Označme $D_k^*=\{\alpha+\frac{i(\beta-\alpha)}{k};\, i=0,1,\ldots,k\}\in\mathfrak{D}_{\langle\alpha\,;\,\beta\rangle}$ pre ľubovoľné $k\in N$. Uvažujme zjemnenie $D_k=D^*\cup D_k^*=\{t_i\}_{i=0}^{l}$, $k\in N$. Delenia D^* a D_k majú spoločné minimálne dva body[57] $t_0^*=\alpha+\frac{0(\beta-\alpha)}{k}=\alpha$, $t_n^*=\alpha+\frac{k(\beta-\alpha)}{k}=\beta$, t. j. $l\in\{k,k+1,\ldots,k+n-1\}$. Navyše platí $\mu(D_k)\leq\frac{\beta-\alpha}{k}$, t. j. $\mu(D_k)\to 0$ pre $k\to\infty$. To znamená, že postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna a pre dĺžku krivky f platí $d(f)=\lim\limits_{k\to\infty}d(X_{D_k})$. Pre dĺžku lineárnej lomenej krivky D_k, $k\in N$ (obr. 1.2.51) platí:

$$d(D_k)=\sum_{i=1}^{l}\left|X_{t_{i-1}}X_{t_i}\right|=\sum_{i=1}^{l}\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}.$$

Na $\langle t_{i-1}\,;\,t_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,l$ sú pre funkcie φ, ψ splnené predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (ma1: veta 4.3.3). Potom existujú $\tau_i,\overline{\tau_i}\in(t_{i-1}\,;\,t_i)$, $i=1,2,\ldots,l$ také, že $\varphi'(\tau_i)=\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{\Delta t_i}$, $\psi'(\overline{\tau_i})=\frac{\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})}{\Delta t_i}$, kde $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. Potom platí:

$$d(D_k)=\sum_{i=1}^{l}\Delta t_i\sqrt{\left[\frac{\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right]^2+\left[\frac{\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})}{\Delta t_i}\right]^2}=\sum_{i=1}^{l}\Delta t_i\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\overline{\tau_i})]^2}. \quad (1.14)$$

Predtým ako budeme pokračovať, dokážeme najskôr jedno pomocné tvrdenie.

[56] $d(X_D)$ je dĺžka lineárnej lomenej krivky X_D, ktorá je zložená z úsečiek postupne spájajúcich body X_{t_i}, $i=0,1,\ldots,n$ (obr. 1.2.51).

[57] Môžu mať spoločné aj niektoré iné body.

Lema 1.2.45.
Pre ľubovoľné $a, b, c \in R$ platí nerovnosť $\left|\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2}\right| \leq |c-b|$.

Dôkaz.
Pre $b = c$ je nerovnosť splnená triviálne.
Nech $b < c$ (pre $b > c$ je dôkaz analogický). Funkcia $g(x) = \sqrt{a^2+x^2}$, $x \in \langle b\,;\, c\rangle$ spĺňa predpoklady Lagrangeovej vety o strednej hodnote (ma1: veta 4.3.3), je spojitá a pre všetky $x \in (c\,;\, b)$ existuje $g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Potom existuje $s \in (b\,;\, c)$ také, že platí:

$$g'(s) = \frac{g(c)-g(b)}{c-b}, \text{ t. j. } \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}}{c-b} \implies$$
$$\frac{\left|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right|}{|c-b|} = \left|\frac{\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}}{c-b}\right| = \left|\frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}\right| = \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{a^2+s^2}} \leq 1. \blacksquare$$

Položme $a = \varphi'(\tau_i)$, $c = \psi'(\overline{\tau_i})$, $b = \psi'(\tau_i)$ pre $i = 1, 2, \ldots, l$. Potom pre $i = 1, 2, \ldots, l$ platí:

$$\left|\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\overline{\tau_i})]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\right| \leq |\psi'(\overline{\tau_i}) - \psi'(\tau_i)|\,.$$

Funkcia ψ' je po častiach spojitá na $\langle \alpha\,;\, \beta\rangle$, je spojitá a teda aj rovnomerne spojitá na intervaloch $\langle \alpha\,;\, t_1^*\rangle$, $\langle t_1^*\,;\, t_2^*\rangle$, $\langle t_2^*\,;\, t_3^*\rangle$, …, $\langle t_{n-1}^*\,;\, \beta\rangle$. Potom pre každé $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} > 0$ existuje $\delta > 0$ a tiež $k \in N$ tak, že pre všetky $|t-\overline{t}| < \frac{\beta-\alpha}{k} \leq \delta$ platí $|\psi'(t)-\psi'(\overline{t})| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} = \varepsilon_0$. Keďže[58] $\tau_i, \overline{\tau_i} \in (t_{i-1}\,;\, t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, t. j. $|\tau_i - \overline{\tau_i}| < t_i - t_{i-1} < \frac{\beta-\alpha}{k} \leq \delta$, potom platí:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\sum_{i=1}^{l} \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\overline{\tau_i})]^2} - \sum_{i=1}^{l} \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{l} \Delta t_i \left|\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\overline{\tau_i})]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{l} \Delta t_i \, |\psi'(\overline{\tau_i}) - \psi'(\tau_i)| < \sum_{i=1}^{l} \Delta t_i \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \sum_{i=1}^{l} \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha) = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.15}$$

To znamená, že $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{l} \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\overline{\tau_i})]^2}\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{l} \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\right)$ a na základe vzťahu (1.14) pre dĺžku krivky f platí:[59]

$$d(f) = \lim_{k\to\infty} d(X_{D_k}) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{l} \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\right) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t.$$

Explicitne zadanú funkciu $y = f(x)$, $x \in \langle a\,;\, b\rangle$ môžeme parametrizovať $x = t$, $y = f(t)$, $t \in \langle a\,;\, b\rangle$. Ak je f' spojitá na $\langle a\,;\, b\rangle$, potom pre dĺžku grafu funkcie f platí:

$$d(f) = \int_a^b \sqrt{[t']^2 + [f'(t)]^2}\, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

[58] Z konštrukcie bodov $t_0, t_1, \ldots, t_l$ vyplýva, že každý z intervalov $\langle t_{i-1}\,;\, t_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, l$ je podmnožinou nejakého intervalu $\langle \alpha\,;\, t_1^*\rangle$, $\langle t_1^*\,;\, t_2^*\rangle$, $\langle t_2^*\,;\, t_3^*\rangle$, …, $\langle t_{n-1}^*\,;\, \beta\rangle$.

[59] Posledná suma predstavuje integrálny súčet funkcie $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ na $\langle \alpha\,;\, \beta\rangle$.

V polárnych súradniciach zadanú krivku $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha\,;\,\beta\rangle$ môžeme (v karteziánskych súradniciach) parametrizovať v tvare $x = \rho\cos t = f(t)\cos t$, $y = \rho\sin t = f(t)\sin t$, $t \in \langle \alpha\,;\,\beta\rangle$. Ak je funkcia f' spojitá, potom pre dĺžku krivky f platí:

$$d(f) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big[\big(f(t)\cos t\big)'\big]^2 + \big[\big(f(t)\sin t\big)'\big]^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \left[\begin{array}{l} \big[\big(f(t)\cos t\big)'\big]^2 = \big[f'(t)\cos t - f(t)\sin t\big]^2 = [f'(t)]^2\cos^2 t - f'(t)f(t)\sin 2t + f^2(t)\sin^2 t \\ \big[\big(f(t)\sin t\big)'\big]^2 = \big[f'(t)\sin t + f(t)\cos t\big]^2 = [f'(t)]^2\sin^2 t + f'(t)f(t)\sin 2t + f^2(t)\cos^2 t \end{array}\right] =$$
$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + f^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\varphi)]^2 + f^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Príklad 1.2.35.
Určte dĺžku hviezdice (asteroidy) f: $x = 3r\cos t + r\cos 3t$, $y = 3r\sin t - r\sin 3t$, $t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$ a štvorlístka g: $x = 5r\cos t - r\cos 5t$, $y = 5r\sin t - r\sin 5t$, $t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$, $r > 0$.

Riešenie.
Pre hviezdicu[60] f a jej dĺžku $d(f)$ platí (obr. 1.2.38 vľavo):

$$\left.\begin{array}{l} \big[(3r\cos t + r\cos 3t)'\big]^2 = \big[-3r\sin t - 3r\sin 3t\big]^2 = 9r^2[\sin^2 t + 2\sin t\sin 3t + \sin^2 3t] \\ \big[(3r\sin t - r\sin 3t)'\big]^2 = \big[3r\cos t - 3r\cos 3t\big]^2 = 9r^2[\cos^2 t - 2\cos t\cos 3t + \cos^2 3t] \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$d(f) = \int_0^{2\pi} 3r\sqrt{\big[\sin^2 t + 2\sin t\sin 3t + \sin^2 3t\big] + \big[\cos^2 t - 2\cos t\cos 3t + \cos^2 3t\big]}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 3r\int_0^{2\pi}\sqrt{2 - 2[\cos t\cos 3t - \sin t\sin 3t]}\,\mathrm{d}t = 3r\int_0^{2\pi}\sqrt{2 - 2\cos 4t}\,\mathrm{d}t = (*) =$$
$$= 6r\int_0^{2\pi}\sqrt{\tfrac{1-\cos 4t}{2}}\,\mathrm{d}t = 6r\int_0^{2\pi}\sqrt{\tfrac{1-\cos 4t}{2}}\,\mathrm{d}t = 6r\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 2t}\,\mathrm{d}t = 6r\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,\mathrm{d}t =$$
$$= \left[\begin{array}{c}\text{4 rovnaké}\\ \text{oblúky}\end{array}\right] = 6r\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,\mathrm{d}t = 6r\cdot 4\Big[-\tfrac{\cos 2t}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 24r\big[-\tfrac{-1}{2} + \tfrac{1}{2}\big] = 24r.$$

Pre štvorlístok[61] g a jeho dĺžku $d(g)$ platí (obr. 1.2.38 vpravo):

$$\left.\begin{array}{l} \big[(5r\cos t - r\cos 5t)'\big]^2 = \big[-5r\sin t + 5r\sin 5t\big]^2 = 25r^2[\sin^2 t - 2\sin t\sin 5t + \sin^2 5t] \\ \big[(5r\sin t - r\sin 5t)'\big]^2 = \big[5r\cos t - 5r\cos 5t\big]^2 = 25r^2[\cos^2 t - 2\cos t\cos 5t + \cos^2 5t] \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$d(f) = \int_0^{2\pi} 5r\sqrt{\big[\sin^2 t - 2\sin t\sin 5t + \sin^2 5t\big] + \big[\cos^2 t - 2\cos t\cos 5t + \cos^2 5t\big]}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 5r\int_0^{2\pi}\sqrt{2 - 2[\cos t\cos 5t + \sin t\sin 5t]}\,\mathrm{d}t = 5r\int_0^{2\pi}\sqrt{2 - 2\cos 4t}\,\mathrm{d}t \overset{(*)}{=\!=} 5\tfrac{24r}{3} = 40r. \ \blacksquare$$

Príklad 1.2.36.
Odvoďte vzorec pre obvod o kružnice K s polomerom $r > 0$ (obr. 1.2.42).

Riešenie.
a) Explicitne sa kružnica K skladá z grafov funkcií $\pm f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r\,;\,r\rangle$. Sú to dve polkružnice, ktorých dĺžka je rovnaká.

[60] Hviezdica je špeciálny prípad krivky nazývanej hypocykloida.
[61] Štvorlístok je špeciálny prípad krivky nazývanej epicykloida.

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} \;\Rightarrow\; 1+[f'(x)]^2=1+\frac{x^2}{r^2-x^2}=\frac{r^2}{r^2-x^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{1+[f'(x)]^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\Longrightarrow\; o=2\int_{-r}^{r}\frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}=2r\int_{-r}^{r}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}=2r\Big[\arcsin\frac{x}{r}\Big]_{-r}^{r}=2r\big[\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{-\pi}{2}\big]=2\pi r.$$

b) Parametricky je kružnica K definovaná rovnicami $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$.

$$o=\int_0^{2\pi}\sqrt{\big[-r\sin t\big]^2+\big[r\cos t\big]^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2}\,\mathrm{d}t=r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi r.$$

c) V polárnych súradniciach je kružnica K ohraničená konštantou $\rho=r$, $\varphi\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$.

$$o=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+[r']^2}\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+0^2}\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}r\,\mathrm{d}\varphi=r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=2\pi r. \;\blacksquare$$

Poznámka 1.2.9.
*Ak $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$ je parametrické vyjadrenie **priestorovej krivky** f v R^3, pričom φ',ψ',χ' sú spojité na $\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$, $|\varphi'(t)|+|\psi'(t)|+|\chi'(t)|>0$ pre všetky $t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$ okrem konečného počtu, potom pre dĺžku krivky f platí:*

$$d(f)=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

- **Povrch rotačného telesa — krivka rotuje okolo osi x**

Uvažujme v rovine xy po častiach hladkú krivku $f\colon x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$. Ak ju necháme rotovať okolo osi x, vytvorí v priestore xyz rotačnú plochu[62] (obr. 1.2.53). Určíme obsah tejto rotačnej plochy P_x, t. j. povrch plášťa (bez podstáv) takto vzniknuvšieho rotačného telesa.

Nech $D_k=\{t_i\}_{i=0}^{l}$, $k\in N$ je delenie intervalu $\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$, ktoré sme definovali na strane 99 pri výpočte dĺžky krivky f. Každú z plôch[63] P_i, $i=1,2,\ldots,l$ aproximujeme povrchom plášťa kolmého zrezaného kužeľa (obr. 1.2.54) s výškou $|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|$ a polomermi podstáv $|\psi(t_{i-1})|$ a $|\psi(t_i)|$, t. j. hodnotou (viď napr. [1]):

$$\pi\big(|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big)\cdot\big|X_{t_{i-1}}X_{t_i}\big|=\pi\big(|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big)\Delta t_i\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\overline{\tau_i})]^2},$$

kde $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. Hodnoty $\tau_i,\overline{\tau_i}\in(t_{i-1}\,;\,t_i)$ majú rovnaký význam ako vo vzťahu (1.14) v predchádzajúcej časti pri určovaní dĺžky krivky.

Postupnosť $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ je normálna, takže pre plochu P_x platí:

$$P_x=\pi\lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{l}\big(|\psi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)|\big)\Delta t_i\sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\overline{\tau_i})]^2}\Big).$$

Funkcia ψ je na $\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$ spojitá a ohraničená (ma1: Weierstrasseho veta 3.3.10), t. j. existuje $m\in R$ také, že pre všetky $t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$ platí $|\psi(t)|\le m$. Analogicky ako pri vzťahu (1.15) pre každé $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{2m(\beta-\alpha)}>0$ existujú $\delta>0$, $k\in N$ tak, že pre všetky $\big|t-\bar{t}\big|<\frac{\beta-\alpha}{k}\le\delta$ platí $\big|\psi'(t)-\psi'(\bar{t})\big|<\varepsilon_0$. Keďže $|\tau_i-\overline{\tau_i}|<t_i-t_{i-1}<\frac{\beta-\alpha}{k}\le\delta$, $i=1,2,\ldots,l$, potom platí:

---

[62] Krivka f môže byť uzavretá, môže sa pretínať a funkcia ψ môže nadobúdať záporné hodnoty.
[63] Plocha P_i, $i=1,2,\ldots,l$ vznikne rotáciou krivky $f\colon x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in\langle t_{i-1}\,;\,t_i\rangle$ okolo osi x.

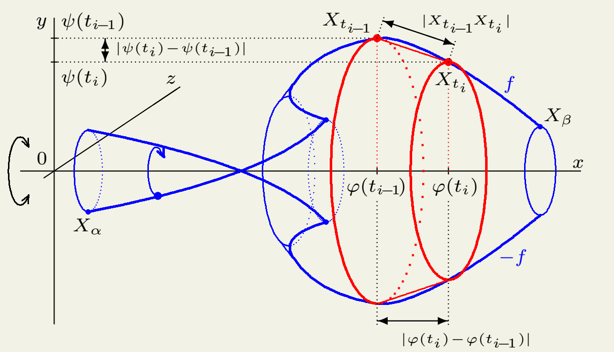
$$0 \le \Bigg| \sum_{i=1}^{l} \big(|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|\big)\Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\overline{\tau_i})]^2} - \\ - \sum_{i=1}^{l} \big(|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|\big)\Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \Bigg| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{l} \big(|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|\big)\Delta t_i \left| \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\overline{\tau_i})]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \right| \le$$

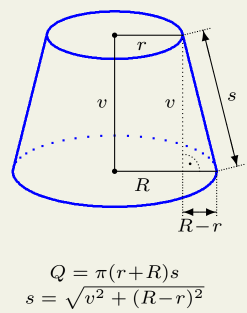
$$\le \sum_{i=1}^{l} 2m\Delta t_i \, |\psi'(\overline{\tau_i}) - \psi'(\tau_i)| < \sum_{i=1}^{l} 2m\Delta t_i \tfrac{\varepsilon}{2m(\beta-\alpha)} = \tfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha} \sum_{i=1}^{l} \Delta t_i = \tfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}(\beta-\alpha) = \varepsilon.$$

To znamená, že platí:

$$P_x = \pi \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{l} \big(|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|\big)\Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\overline{\tau_i})]^2} \Big) = \\ = \pi \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{l} \big(|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|\big)\Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \Big).$$



Obr. 1.2.53: Povrch rotačného telesa (f rotuje okolo osi x)



Obr. 1.2.54: Povrch plášťa zrezaného kolmého kužeľa

Funkcie φ', ψ' sú po častiach spojité na $\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$. Na každom podintervale, na ktorom sú φ', ψ' spojité, je tiež spojitá (ma1: veta 3.3.4) a tým pádom aj ohraničená zložená funkcia $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$. To znamená, že existuje $m\in R$ také, že pre všetky $t\in\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$ platí $0 \le \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \le m$. Funkcia ψ je spojitá na $\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$. Z toho vyplýva, že funkcia $|\psi|$ je spojitá a tiež rovnomerne spojitá na $\langle\alpha\,;\,\beta\rangle$, t. j. pre každé $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2m(\beta-\alpha)} > 0$ existujú $\delta > 0$, $k\in N$ tak, že pre všetky $\big|t-\overline{t}\big| < \frac{\beta-\alpha}{k} \le \delta$ platí $\big||\psi(t)| - |\psi(\overline{t})|\big| < \varepsilon_0$. Keďže $|t_{i-1} - \tau_i| < t_i - t_{i-1} < \delta$, $|t_i - \tau_i| < t_i - t_{i-1} < \delta$, $i = 1, 2, \ldots, l$, potom platí:

$$0 \le \Bigg| \sum_{i=1}^{l} \big(|\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)|\big)\Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} - \\ - 2\sum_{i=1}^{l} |\psi(\tau_i)|\big)\Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \Bigg| \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{l} \big||\psi(t_{i-1})| + |\psi(t_i)| - 2\,|\psi(\tau_i)|\big| \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{l} \Big(\big||\psi(t_{i-1})| - |\psi(\tau_i)|\big| + \big||\psi(t_i)| - |\psi(\tau_i)|\big|\Big) \Delta t_i m <$$

$$< \sum_{i=1}^{l} (\varepsilon_0 + \varepsilon_0) \Delta t_i m = 2\varepsilon_0 m \sum_{i=1}^{l} \Delta t_i = 2\tfrac{\varepsilon}{2m(\beta-\alpha)} m(\beta-\alpha) = \varepsilon.$$

Pre povrch P_x rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou krivky f okolo osi x, potom platí:[64]

$$P_x = 2\pi \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{l} |\psi(\tau_i)|\, \Delta t_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2}\Big) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)|\, \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t.$$

Explicitne zadanú funkciu $y = f(x)$, $x \in \langle a\,;\, b\rangle$ môžeme parametrizovať $x = t$, $y = f(t)$, $t \in \langle a\,;\, b\rangle$. Ak je f' spojitá na $\langle a\,;\, b\rangle$, potom pre obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie f okolo osi x, platí:

$$P_x = 2\pi \int_a^b |f(t)|\, \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, \mathrm{d}t = 2\pi \int_a^b |f(x)|\, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

Príklad 1.2.37.

Odvoďte vzorec pre povrch S gule G s polomerom $r > 0$ (viď obr. 1.2.42).

Riešenie.

a) Guľa G vznikne rotáciou polkružnice $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r\,;\, r\rangle$ okolo osi x:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \big(\sqrt{r^2-x^2}\big)^2\, \mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, \mathrm{d}x = \pi \Big[r^2 x - \tfrac{x^3}{3}\Big]_{-r}^{r} = \pi \big[r^3 - \tfrac{r^3}{3} + r^3 - \tfrac{r^3}{3}\big] = \tfrac{4\pi r^3}{3}.$$

b) V parametrickom tvare má polkružnica f tvar $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0\,;\, \pi\rangle$ a platí:

$$V = \pi \int_0^{\pi} (r\sin t)^2 \cdot |(r\cos t)'|\, \mathrm{d}t = \pi \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 t \cdot |-r\sin t|\, \mathrm{d}t = \pi r^3 \int_0^{\pi} \sin^3 t\, \mathrm{d}t =$$

$$= \pi r^3 \int_0^{\pi} \tfrac{3\sin t - \sin 3t}{4}\, \mathrm{d}t = \pi r^3 \Big[-\tfrac{3\cos t}{4} + \tfrac{\cos 3t}{4\cdot 3}\Big]_0^{\pi} = \pi r^3 \Big[-\tfrac{-3}{4} + \tfrac{-1}{12} + \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{12}\Big] = \tfrac{4\pi r^3}{3}. \ \blacksquare$$

Príklad 1.2.38.

Vypočítajte povrch anuloidu s polomermi $d \pm r$, $d \geq r > 0$ (obr. 1.2.44).

Riešenie.

Pre povrch anuloidu platí (plochy sa sčítajú, viď pr. 1.2.30):

$$P = 2\pi \int_{-r}^{r} |f_1|\, \sqrt{1 + [f_1'(x)]^2}\, \mathrm{d}x + 2\pi \int_{-r}^{r} |f_2|\, \sqrt{1 + [f_2'(x)]^2}\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-r}^{r} \tfrac{(|f_1| + |f_2|) r\, \mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= 2\pi 2dr \int_{-r}^{r} \tfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi dr \Big[\arcsin \tfrac{x}{r}\Big]_{-r}^{r} = 4\pi dr \big(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{-\pi}{2}\big) = 4\pi^2 dr,$$

pričom pre $x \in \langle -r\,;\, r\rangle$ platí $f_{1,2} = d \pm \sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$, $f_{1,2}'(x) = \pm\frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{\mp x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, $|f_1| + |f_2| = f_1 + f_2 = 2d$, $\sqrt{1 + [f_{1,2}'(x)]^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. $\blacksquare$

---

[64] Posledná suma predstavuje integrálny súčet funkcie $|\psi(t)|\, \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ na intervale $\langle \alpha\,;\, \beta\rangle$.

„Tati, bila tě někdy tvoje maminka?“ „Ne, jenom tvoje.“
úryvok z filmu SLUNCE, SENO A PÁR FACEK

Ach milí priatelia, priatelia neexistujú!
ARISTOTELES

Výsledky cvičení

1 Integrál reálnej funkcie

1.1.2. a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c$, $x \in R$, b) $\operatorname{arctg}(x+2) + c$, $x \in R$, c) $-\frac{1}{x+2} + c$, $x \in R$, $x \neq -2$, d) $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x+3| + c$, $x \in R$, $x \neq -1$, $x \neq -3$, e) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|x+2-\sqrt{2}| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln|x+2+\sqrt{2}| + c$, $x \in R$, $x \neq -2 \pm \sqrt{2}$, f) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$, $x \in R$, g) $-\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{8} \ln|x-3| + \frac{1}{8} \ln|x+1| + c$, $x \in R$, $x \neq 1$, $x \neq 3$, $x \neq -1$, h) $-\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{5} \ln|x-2| + \frac{1}{20} \ln|x+3| + c$, $x \in R$, $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq -3$, i) $\frac{1}{6} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c$, $x \in R$, $x \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq -1$, j) $-\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{12} \ln|x+2| + c$, $x \in R$, $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq -2$, k) $\ln|x-2| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$, $x \in R$, $x \neq 1$, $x \neq 2$, l) $\ln|x+2| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$, $x \in R$, $x \neq -1$, $x \neq -2$, m) $\frac{1}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{9} \ln|x+2| - \frac{1}{3(x+2)} + c$, $x \in R$, $x \neq 1$, $x \neq -2$, n) $\frac{1}{9} \ln|x+2| - \frac{1}{9} \ln|x-1| + \frac{1}{3(x-1)} + c$, $x \in R$, $x \neq 1$, $x \neq -2$, o) $\ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$, $x \in R$, $x \neq -1$, p) $\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2-x+2) - \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + c$, $x \in R$, $x \neq 1$, q) $\frac{1}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$, $x \in R$, $x \neq 2$, r) $\frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$, $x \in R$, $x \neq -1$, s) $\ln|x-1| - \ln|x| + \frac{1}{x} + c$, $x \in R$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, t) $-\frac{1}{4(x^2+2x+3)^2} + c$, $x \in R$, u) $\frac{-x-4}{8(x^2+4x+6)^2} - \frac{3(x+2)}{32(x^2+4x+6)} - \frac{3}{32\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c$, $x \in R$, v) $\frac{-x-3}{4(x^2+4x+5)^2} - \frac{3(x+2)}{8(x^2+4x+5)} - \frac{3}{8} \operatorname{arctg}(x+2) + c$, $x \in R$, w) $\frac{x+1}{4(x^2+4x+3)^2} - \frac{3(x+2)}{8(x^2+4x+3)} + \frac{3}{16} \ln|x+3| - \frac{3}{16} \ln|x+1| + c$, $x \in R$, $x \neq -1$, $x \neq -3$, x) $\frac{x}{8(x^2+4x+2)^2} - \frac{3(x+2)}{32(x^2+4x+2)} + \frac{3}{64\sqrt{2}} \ln|x+2-\sqrt{2}| - \frac{3}{64\sqrt{2}} \ln|x+2-\sqrt{2}| + c$, $x \in R$, $x \neq -2 \pm \sqrt{2}$. **1.1.3.** a) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} - \operatorname{arctg} x + c$, $x \in R$, $x \neq 0$, b) $\frac{1}{4(x-2)^4} + \frac{2}{3(x-2)^3} + \frac{1}{2(x-2)^2} + c$, $x \in R$, $x \neq 2$, c) $-\frac{1}{4(x-1)^4} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{3}{2(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + c$, $x \in R$, $x \neq 1$, d) $\frac{1}{2(x+2)^2} - \frac{6}{x+2} - 15 \ln|x+2| + 20(x+2) - \frac{15(x+2)^2}{2} + 2(x+2)^3 - \frac{(x+2)^4}{4} + c$, $x \in R$, $x \neq -2$, e) $\frac{81}{2(x-2)^2} + \frac{108}{x-2} - 54 \ln|x-2| - 12(x-2) - \frac{(x-2)^2}{2} + c$, $x \in R$, $x \neq 2$, f) $-\frac{1}{2(1+x^2)} + c$, $x \in R$, g) $-\frac{1}{4(1+x^2)^2} + c$, $x \in R$, h) $-\frac{1}{6(1+x^2)^3} + c$, $x \in R$, i) $\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+6}) + c$, $x \in R$, j) $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}| + c$, $x \in (-\infty\,;\,-3) \cup (-1\,;\,\infty)$, k) $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x-3}| + c$, $x \in (-\infty\,;\,-2-\sqrt{7}) \cup (-2+\sqrt{7}\,;\,\infty)$, l) $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}) + c$, $x \in R$, m) $\arcsin \frac{x-2}{\sqrt{10}} + c$, resp. $-\arccos \frac{x-2}{\sqrt{10}} + c$, resp. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{10}-\sqrt{-x^2+4x+6}}{x-2} + c$, $x \in (2-\sqrt{10}\,;\,2+\sqrt{10})$, resp. $-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-x^2+4x+6}}{x-2} + c$, $x \in (2-\sqrt{10}\,;\,2+\sqrt{10})$, $x \neq 2$, n) $\arcsin \frac{x-2}{\sqrt{2}} + c$, resp. $-\arccos \frac{x-2}{\sqrt{2}} + c$, resp. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{-x^2+4x+3}}{x-2} + c$, $x \in (2-\sqrt{2}\,;\,2+\sqrt{2})$, resp. $-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-x^2+4x-2}}{x-2} + c$, $x \in (2-\sqrt{2}\,;\,2+\sqrt{2})$, $x \neq 2$, o) $\nexists$, p) $\arcsin \frac{x-2}{3} + c$, resp. $-\arccos \frac{x-2}{3} + c$, resp. $2 \operatorname{arctg} \frac{3-\sqrt{-x^2+4x+5}}{x-2} + c$, $x \in (-1\,;\,5)$, resp. $-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-x^2+4x+5}}{x-2} + c$, $x \in (-1\,;\,5)$, $x \neq 2$, q) $\arcsin \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c$, resp. $-\arccos \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c$, resp. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{-x^2-4x-2}}{x+2} + c$, $x \in (-2-\sqrt{2}\,;\,-2+\sqrt{2})$, resp. $-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-x^2-4x-2}}{x+2} + c$, $x \in (-2-\sqrt{2}\,;\,-2+\sqrt{2})$, $x \neq -2$, r) $\arcsin(x+2) + c$, resp. $-\arccos(x+2) + c$, resp. $2 \operatorname{arctg} \frac{1-\sqrt{-x^2-4x-3}}{x+2} + c$, $x \in (-3\,;\,-1)$, resp. $-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-x^2-4x-3}}{x+2} + c$, $x \in (-3\,;\,-1)$, $x \neq -2$, s) $\frac{1}{\sqrt{8}} \ln|\sqrt{2+3x}-\sqrt{8}| - \frac{1}{\sqrt{8}} \ln|\sqrt{2+3x}+\sqrt{8}| + c$, $x \in (-\frac{2}{3}\,;\,\infty)$, $x \neq 2$, t) $\frac{1}{2} \ln|\sqrt{-2+3x}-2| - \frac{1}{2} \ln|\sqrt{-2+3x}+2| + c$, $x \in (\frac{2}{3}\,;\,\infty)$, $x \neq 2$, u)

$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{-1-3x}-\sqrt{2}|\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{-1-3x}+\sqrt{2}|+c$, $x\in(-\infty\,;\,-\frac{1}{3})$, $x\neq-1$, v) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2+3x}}{2}+c$, $x\in(-\frac{2}{3}\,;\,\infty)$, w) $2\operatorname{arctg}\sqrt{1-2x}+c$, $x\in(-\infty\,;\,\frac{1}{2})$, x) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-1-2x}}{\sqrt{3}}+c$, $x\in(-\infty\,;\,-\frac{1}{2})$. **1.1.4.** a) $\frac{1}{8}\,|x-1|(x-1)^7+c$, $x\in R$, b) $\frac{1}{9}\,|x-1|(x-1)^8+c$, $x\in R$, c) $\frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+6}}{2}+\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+6})+c$, $x\in R$, d) $\frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}{2}-\frac{1}{2}\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}|+c$, $x\in R$, $(-\infty\,;\,-3)\cup(-1\,;\,\infty)$, e) $\frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x-3}}{2}-\frac{7}{2}\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x-3}|+c$, $x\in R$, $(-\infty\,;\,-2-\sqrt{7})\cup(-2+\sqrt{7}\,;\,\infty)$, f) $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})+\frac{(x+1)\sqrt{x^2+4x+3}}{2}+c$, $x\in R$, g) $\frac{(x-2)\sqrt{-x^2+4x+6}}{2}\ +5g(x)+c$, $x\in(2-\sqrt{10}\,;\,2+\sqrt{10})$, kde $g(x)=\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{10}}$, resp. $-\arccos\frac{x-2}{\sqrt{10}}$, resp. $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}-\sqrt{-x^2+4x+6}}{x-2}$, resp. $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2+4x+6}}{x-2}$, $x\neq 2$, h) $\frac{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-2}}{2}\ +g(x)+c$, $x\in(2-\sqrt{2}\,;\,2+\sqrt{2})$, kde $g(x)=\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{2}}$, resp. $-\arccos\frac{x-2}{\sqrt{2}}$, resp. $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{-x^2+4x+3}}{x-2}$, resp. $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2+4x-2}}{x-2}$, $x\neq2$, i) $\nexists$, j) $\frac{(x-2)\sqrt{-x^2+4x+5}}{2}\ +\frac{9}{2}g(x)+c$, $x\in(-1\,;\,5)$, kde $g(x)=\arcsin\frac{x-2}{3}$, resp. $-\arccos\frac{x-2}{3}$, resp. $2\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{-x^2+4x+5}}{x-2}$, resp. $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2+4x+5}}{x-2}$, $x\neq2$, k) $\frac{(x+2)\sqrt{-x^2-4x-2}}{2}\ +g(x)+c$, $x\in(-2-\sqrt{2}\,;\,-2+\sqrt{2})$, kde $g(x)=\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{2}}$, resp. $-\arccos\frac{x+2}{\sqrt{2}}$, resp. $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{-x^2-4x-2}}{x+2}$, resp. $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2-4x-2}}{x+2}$, $x\neq-2$, l) $\frac{(x+2)\sqrt{-x^2-4x-3}}{2}\ +\frac{1}{2}g(x)+c$, $x\in(-3\,;\,-1)$, kde $g(x)=\arcsin(x+2)$, resp. $-\arccos(x+2)$, resp. $2\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{-x^2-4x-3}}{x+2}$, resp. $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2-4x-3}}{x+2}$, $x\neq-2$, m) $-96\sqrt[6]{x-1}\ -24\sqrt[3]{x-1}\ -8\sqrt{x-1}\ -3\sqrt[3]{(x-1)^2}\ -\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5}\ -192\ln(-2+\sqrt[6]{x-1})+c$, $x\in(1\,;\,\infty)$, n) $-6\sqrt[6]{x-1}\ -3\sqrt[3]{x-1}\ -2\sqrt{x-1}\ -\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}\ -\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5}\ -6\ln(-1+\sqrt[6]{x-1})+c$, $x\in(1\,;\,\infty)$, o) $6\sqrt[6]{x-1}\ -3\sqrt[3]{x-1}\ +2\sqrt{x-1}\ -\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}\ +\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5}\ -6\ln(1+\sqrt[6]{x-1})+c$, $x\in(1\,;\,\infty)$. **1.1.5.** a) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}+c$, $x\in(0\,;\,1)$, b) $2\sqrt{2+3x}\ +\sqrt{8}\ln|\sqrt{2+3x}-\sqrt{8}|\ -\sqrt{8}\ln|\sqrt{2+3x}+\sqrt{8}|+c$, $x\in\langle-\frac{2}{3}\,;\,\infty)$, $x\neq2$, c) $2\sqrt{2+3x}\ -4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2+3x}}{2}+c$, $x\in\langle-\frac{2}{3}\,;\,\infty)$, d) $2\sqrt{-1-2x}\ -2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-1-2x}}{\sqrt{3}}+c$, $x\in(-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\rangle$, e) $2\sqrt{1-2x}\ -2\operatorname{arctg}\sqrt{1-2x}+c$, $x\in(-\infty\,;\,\frac{1}{2}\rangle$, f) $x\sqrt{t}\ -\frac{1}{2}\ln|\sqrt{t}-1|\ +\frac{1}{2}\ln|\sqrt{t}+1|+c$, $x\in(-\infty\,;\,-1\rangle\cup(0\,;\,\infty)$, kde $t=\frac{x+1}{x}$, g) $(x+1)\sqrt{t}+\frac{1}{2}\ln|\sqrt{t}-1|-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{t}+1|+c$, $x\in(-\infty\,;\,-1)\cup\langle0\,;\,\infty)$, kde $t=\frac{x}{x+1}$, h) $(x+2)\sqrt{t}\ +\frac{1}{2}\ln|\sqrt{t}-1|\ -\frac{1}{2}\ln|\sqrt{t}+1|+c$, $x\in(-\infty\,;\,-2)\cup\langle-1\,;\,\infty)$, kde $t=\frac{x+1}{x+2}$, i) $\sqrt{1+x^2}+c$, $x\in R$, j) $-\sqrt{1-x^2}+c$, $x\in(-1\,;\,1)$, k) $(x+1)\sqrt{t}\ -\frac{1}{2}\ln|\sqrt{t}-1|\ +\frac{1}{2}\ln|\sqrt{t}+1|+c$, $x\in(-\infty\,;\,-2\rangle\cup(-1\,;\,\infty)$, kde $t=\frac{x+2}{x+1}$, l) $(x+1)\sqrt{t}+\ln|\sqrt{t}-1|-\ln|\sqrt{t}+1|+c$, $x\in(-\infty\,;\,-1)\cup\langle1\,;\,\infty)$, kde $t=\frac{x-1}{x+1}$, m) $\frac{3(x-4)}{5}\sqrt[3]{(x+1)^2}+c$, $x\in(-1\,;\,\infty)$, n) $-2\sqrt{x}+x+2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$, $x\in(0\,;\,\infty)$, o) $5+4\sqrt{x}-x-4\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$, $x\in(0\,;\,\infty)$, p) $5-4\sqrt{x}-x-4\ln\left|-1+\sqrt{x}\right|+c$, $x\in(0\,;\,\infty)$, $x\neq1$, q) $-6\sqrt[6]{x}\ +2\sqrt{x}\ -\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}\ +\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}\ +6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c$, $x\in(0\,;\,\infty)$, r) $2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{-1+2\sqrt[6]{x}}{\sqrt{3}}\ -2\ln(1+\sqrt[6]{x})+\ln(1-\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x})+c$, $x\in(0\,;\,\infty)$, s) $2\sqrt{x^2+x}+c$, $x\in(-\infty\,;\,-1)\cup(0\,;\,\infty)$, t) $\frac{2x^3-4}{9}\sqrt{1+x^3}+c$, $x\in(-1\,;\,\infty)$, u) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$, $x\in(-\infty\,;\,-1)\cup(1\,;\,\infty)$, v) $\frac{2\sqrt{(x^3+1)^3}}{9}\ -\frac{2\sqrt{x^3+1}}{3}+c$, $x\in(-1\,;\,\infty)$, w) $\frac{1}{4}\ln(\sqrt[4]{x^4+1}+x)\ -\frac{1}{4}\ln(\sqrt[4]{x^4+1}-x)\ -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}+c$, $x\in R$, $x\neq0$, x) $\frac{1}{4}\ln|x+\sqrt[4]{x^4-1}|\ -\frac{1}{4}\ln|x-\sqrt[4]{x^4-1}|\ -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4-1}}{x}+c$, $x\in(-\infty\,;\,-1)\cup(1\,;\,\infty)$, y) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|\sqrt{1-x^4}+x\sqrt[4]{4-4x^4}+x^2|\ -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|\sqrt{1-x^4}-x\sqrt[4]{1-x^4}+x^2|\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{4-4x^4}+x}{x}\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{4-4x^4}-x}{x}+c$, $x\in(-1\,;\,1)$, $x\neq0$. **1.1.6.** a) $\sqrt{1-x^2}\ +x\arcsin x+c$, $x\in\langle-1\,;\,1\rangle$, b) $\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}\ +\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x+c$, $x\in\langle-1\,;\,1\rangle$, c) $\frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2}\ +\frac{x^3}{3}\arcsin x+c$, $x\in\langle-1\,;\,1\rangle$, d) $-\sqrt{1-x^2}\ +x\arccos x+c$, $x\in\langle-1\,;\,1\rangle$, e) $-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+\frac{2x^2-1}{4}\arccos x+c$, $x\in\langle-1\,;\,1\rangle$, f) $-\frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2}\ +\frac{x^3}{3}\arccos x+c$, $x\in\langle-1\,;\,1\rangle$, g) $-\frac{x}{2}\ +\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x+c$, $x\in R$, h) $-\frac{x^2}{6}\ +\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+c$, $x\in R$, i) $\frac{x}{4}\ -\frac{x^3}{12}\ -\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+\frac{x^4}{4}\operatorname{arctg}x+c$, $x\in R$, j) $-x\operatorname{arctg}x\ +\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}^2x\ +\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$, $x\in R$, k) $x\operatorname{arccotg}x\ +\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$, $x\in R$, l) $\frac{x}{2}\ +\frac{x^2}{2}\operatorname{arccotg}x\ -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$, $x\in R$, m) $\frac{x^2}{6}\ +\frac{x^3}{3}\operatorname{arccotg}x\ -\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+c$, $x\in R$, n) $-\frac{x}{4}\ +\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{4}\operatorname{arccotg}x+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+c$, $x\in R$, o) $x\operatorname{arccotg}x+\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arccotg}^2x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$, $x\in R$, p) $x\arcsin\sqrt{t}+\sqrt{-(x+1)}+c$, $x\in(-\infty\,;\,-1\rangle$, kde $t=\frac{x+1}{x}$, q) $x\arcsin\sqrt{t}\ -\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c$, resp. $(x+1)\arcsin\sqrt{t}-\sqrt{x}+c$, $x\in\langle0\,;\,\infty)$, kde $t=\frac{x}{x+1}$, r) $x\arcsin\sqrt{t}\ -\sqrt{x+1}\ +2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+c$, resp. $(x+2)\arcsin\sqrt{t}$

$-\sqrt{x+1}+c$, $x\in\langle -1\,;\infty)$, kde $t=\frac{x+1}{x+2}$, s) $x\arcsin\sqrt{t}+\sqrt{-(x+2)}+\operatorname{arctg}\sqrt{-(x+2)}+c$, resp. $(x+1)\arcsin\sqrt{t}+\sqrt{-(x+2)}+c$, $x\in(-\infty\,;-2\rangle$, kde $t=\frac{x+2}{x+1}$, t) $x\arcsin\sqrt{t}-\sqrt{2(x-1)}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2}}+c$, resp. $(x+1)\arcsin\sqrt{t}-\sqrt{2(x-1)}+c$, $x\in\langle 1\,;\infty)$, kde $t=\frac{x-1}{x+1}$, u) $x\arccos\sqrt{t}-\sqrt{-(x+1)}+c$, $x\in(-\infty\,;-1\rangle$, kde $t=\frac{x+1}{x}$, v) $x\arccos\sqrt{t}+\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c$, resp. $(x+1)\arccos\sqrt{t}+\sqrt{x}+c$, $x\in\langle 0\,;\infty)$, kde $t=\frac{x}{x+1}$, w) $x\arccos\sqrt{t}-\sqrt{-(x+2)}-\operatorname{arctg}\sqrt{-(x+2)}+c$, resp. $(x+1)\arccos\sqrt{t}-\sqrt{-(x+2)}+c$, $x\in(-\infty\,;-2\rangle$, kde $t=\frac{x+2}{x+1}$, x) $x\arccos\sqrt{t}+\sqrt{2(x-1)}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2}}+c$, resp. $(x+1)\arccos\sqrt{t}+\sqrt{2(x-1)}+c$, $x\in\langle 1\,;\infty)$, kde $t=\frac{x-1}{x+1}$. **1.1.7.** a) $-\frac{\sin^2 2x\cdot\cos 2x}{6}-\frac{\cos 2x}{3}+c$, resp. $-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos^3 2x}{6}+c$, $x\in R$, b) $\frac{3x}{8}-\frac{\cos 3x\cdot\sin 3x}{8}-\frac{\cos 3x\cdot\sin^3 3x}{12}+c$, $x\in R$, c) $\frac{\cos^2 3x\cdot\sin 3x}{9}+\frac{2\sin 3x}{9}+c$, resp. $\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin^3 3x}{9}+c$, $x\in R$, d) $\frac{3x}{8}+\frac{3\sin 2x\cdot\cos 2x}{16}+\frac{\sin 2x\cdot\cos^3 2x}{8}+c$, $x\in R$, e) $-\frac{\sinh 4x\cdot\cosh 4x}{8}-\frac{x}{2}+c$, resp. $\frac{\sinh 8x}{16}-\frac{x}{2}+c$, resp. $\frac{\mathrm{e}^{8x}}{32}-\frac{x}{2}-\frac{\mathrm{e}^{-8x}}{32}+c$, $x\in R$, f) $\frac{\sinh^2 2x\cdot\cosh 2x}{6}-\frac{\cosh 2x}{3}+c$, resp. $\frac{\cosh^3 2x}{6}-\frac{\cosh 2x}{2}+c$, resp. $\frac{\mathrm{e}^{6x}}{48}-\frac{3\,\mathrm{e}^{2x}}{16}-\frac{3\,\mathrm{e}^{-2x}}{16}+\frac{\mathrm{e}^{-6x}}{48}+c$, $x\in R$, g) $\frac{3x}{8}-\frac{3\sinh x\cdot\cosh x}{8}+\frac{\sinh^3 x\cdot\cosh x}{4}+c$, resp. $\frac{\mathrm{e}^{4x}}{64}-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{8}+\frac{3x}{8}+\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{8}-\frac{\mathrm{e}^{-4x}}{64}+c$, $x\in R$, h) $x\cosh x-\sinh x+c$, $x\in R$, i) $(x^2+2)\cosh x-2x\sinh x+c$, $x\in R$, j) $(x^3+6x)\cosh x-(3x^2+6)\sinh x+c$, $x\in R$, k) $\frac{\sinh 3x\cdot\cosh 3x}{6}+\frac{x}{2}+c$, resp. $\frac{\sinh 6x}{12}+\frac{x}{2}+c$, resp. $\frac{\mathrm{e}^{6x}}{24}+\frac{x}{2}-\frac{\mathrm{e}^{-6x}}{24}+c$, $x\in R$, l) $\frac{\sinh x\cdot\cosh^2 x}{3}+\frac{2\sinh x}{3}+c$, resp. $\frac{\sinh^3 x}{3}+\sinh x+c$, resp. $\frac{\mathrm{e}^{3x}}{24}+\frac{3\,\mathrm{e}^{x}}{8}-\frac{3\,\mathrm{e}^{-x}}{8}-\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{24}+c$, $x\in R$, m) $\frac{3x}{8}+\frac{3\sinh 2x\cdot\cosh 2x}{16}+\frac{\sinh 2x\cdot\cosh^3 2x}{8}+c$, resp. $\frac{\mathrm{e}^{8x}}{128}+\frac{\mathrm{e}^{4x}}{16}+\frac{3x}{8}-\frac{\mathrm{e}^{-4x}}{16}-\frac{\mathrm{e}^{-8x}}{128}+c$, $x\in R$, n) $x\sinh x-\cosh x+c$, $x\in R$, o) $(x^2+2)\sinh x-2x\cosh x+c$, $x\in R$, p) $(x^3+6x)\sinh x-(3x^2+6)\cosh x+c$, $x\in R$. **1.1.8.** a) $-\frac{1}{\operatorname{tg}x+1}+c$, $x\in R$, $x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$, b) $-\frac{2}{3\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-2}{\sqrt{21}}+c$, $x\in R$, $x\neq\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in Z$, c) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|\operatorname{tg}x+2-\sqrt{3}|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|\operatorname{tg}x+2+\sqrt{3}|+c$, $x\in R$, $x\neq-\frac{\pi}{12}+k\pi$, $x\neq\frac{7\pi}{12}+k\pi$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$, d) $-\frac{1}{\sqrt{7}}\ln|3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-4-\sqrt{7}+\frac{1}{\sqrt{7}}\ln|3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-4+\sqrt{7}|+c$, $x\in R$, $\sin x\neq\frac{3}{4}$, $x\neq\pi+2k\pi$, $k\in Z$, e) $\frac{1}{2\operatorname{tg}x}+c$, $x\in R$, $x\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$, f) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{3}+c$, $x\in R$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$, g) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{3}|+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{3}|+c$, $x\in R$, $x\neq\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x\neq\pi+2k\pi$, $k\in Z$, h) $\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{3x}{2}}{\sqrt{3}}+c$, $x\in R$, $x\neq\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in Z$, i) $-\frac{1}{4}\ln|1-2\cos 2x|+c$, $x\in R$, $x\neq\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in Z$, j) $-\frac{1}{3}\ln(4-3\sin x)+c$, $x\in R$, k) $-\frac{1}{3}\ln(2-\sin 3x)+c$, $x\in R$, l) $-\frac{1}{6}\ln(4-3\cos 2x)+c$, $x\in R$, m) $-\frac{\arcsin x}{x}+\ln|x|-\ln(2+2\sqrt{1-x^2})+c$, $x\in\langle -1\,;1\rangle$, $x\neq 0$, n) $-\frac{\arccos x}{x}-\ln|x|+\ln(2+2\sqrt{1-x^2})+c$, $x\in\langle -1\,;1\rangle$, $x\neq 0$, o) $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+c$, $x\in(-1\,;1)$, p) $2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+c$, $x\in(0\,;1)$, q) $-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x+c$, $x\in(-1\,;1)$, r) $-2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\arccos\sqrt{x}+c$, $x\in(0\,;1)$, s) $\frac{x+(x^2-1)\operatorname{arctg}x}{4(x^2+1)}+c$, $x\in R$, t) $-\frac{x^2+1}{4(x^2-1)}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{8}\ln|x-1|-\frac{1}{8}\ln|x+1|+c$, $x\in R$, $x\neq\pm 1$, u) $-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}+\frac{1}{2}\ln x^2-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$, $x\in R$, $x\neq 0$, v) $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+c$, $x\in R$, w) $-\frac{1}{2}\operatorname{arccotg}^2 x+c$, $x\in R$, x) $-\frac{\operatorname{arccotg}x}{x}-\frac{1}{2}\ln x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$, $x\in R$, $x\neq 0$. **1.1.9.** a) $\frac{1}{5}\ln^5 x+c$, $x\in(0\,;\infty)$, b) $\frac{1}{8}\ln^2 x^4+c$, $x\in R$, $x\neq 0$, c) $2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+c$, $x\in(0\,;\infty)$, d) $\ln(1+\mathrm{e}^{x})+c$, $x\in R$, e) $-\frac{x^6+3x^4+6x^2+6}{2}\,\mathrm{e}^{-x}+c$, $x\in R$, f) $-\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}+c$, $x\in R$, m) $\frac{1}{2\ln 2}\ln|\sqrt{2^x+4}-2|-\frac{1}{2\ln 2}\ln|\sqrt{2^x+4}+2|+c$, $x\in R$, n) $\frac{1}{\sqrt{3}\ln 2}\ln|\sqrt{2^x+3}-\sqrt{3}|-\frac{1}{\sqrt{3}\ln 2}\ln|\sqrt{2^x+3}+\sqrt{3}|+c$, $x\in R$, o) $\frac{1}{\sqrt{2}\ln 2}\ln|\sqrt{2^x+2}-\sqrt{2}|-\frac{1}{\sqrt{2}\ln 2}\ln|\sqrt{2^x+2}+\sqrt{2}|+c$, $x\in R$, g) $\frac{x}{4}-\frac{1}{4\ln 2}\ln(2^x+4)+c$, $x\in R$, h) $\frac{x}{3}-\frac{1}{3\ln 2}\ln(2^x+3)+c$, $x\in R$, i) $\frac{x}{2}-\frac{1}{2\ln 2}\ln(2^x+2)+c$, $x\in R$, p) $\frac{2}{\ln 2}\operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1}+c$, $x\in(0\,;\infty)$, q) $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2^x-4}}{2}+c$, $x\in(2\,;\infty)$, r) $\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2^x-3}}{\sqrt{3}}+c$, $x\in(\ln_2 3\,;\infty)$, j) $\frac{1}{\ln 2}\ln|2^x-1|-x+c$, $x\in R$, $x\neq 0$, k) $\frac{1}{4\ln 2}\ln|2^x-4|-\frac{x}{4}+c$, $x\in R$, $x\neq 2$, l) $\frac{1}{3\ln 2}\ln|2^x-3|-\frac{x}{3}+c$, $x\in R$, $x\neq 2$. **1.1.10.** a) $\ln|\arcsin x|+c$, $x\in(-1\,;1)$, $x\neq 0$, b) $-\ln|\arccos x|+c$, $x\in(-1\,;1)$, c) $2\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\ln(x+1)+c$, $x\in(0\,;\infty)$, d) $2\sqrt{x}\operatorname{arccotg}\sqrt{x}+\ln(x+1)+c$, $x\in(0\,;\infty)$, e) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x)+c$, $x\in R$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$, f) $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{cotg}x)+c$, $x\in R$, $x\neq k\pi$, $k\in Z$, g) $2\sqrt{-2+3x}+2\ln|\sqrt{-2+3x}-2|-2\ln|\sqrt{-2+3x}+2|+c$, $x\in\langle\frac{2}{3}\,;\infty)$, $x\neq 2$, h) $2\sqrt{-1-3x}+\sqrt{2}\ln|\sqrt{-1-3x}-\sqrt{2}|-\sqrt{2}\ln|\sqrt{-1-3x}+\sqrt{2}|+c$, $x\in(-\infty\,;-\frac{1}{3}\rangle$, $x\neq -1$, i) $\frac{1}{2}\ln^2\operatorname{arctg}x+c$, $x\in(0\,;\infty)$, j) $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos x^4})+c$, $x\in R$, k) $\frac{2}{3}\sqrt{(2+\ln x)^3}+c$, $x\in(\mathrm{e}^{-2}\,;\infty)$, l) $\arcsin\ln x+c$, $x\in(\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e})$, m) $\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|2-x^3+2\sqrt{1-x^3+x^6}|+c$, $x\in R$, $x\neq 0$, n) $\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}|+c$, $x\in R$, $x\neq 0$, o) $\frac{1}{4}\ln(1-2\sqrt{x-x^2})+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-x^2}}{x}-\frac{x+\sqrt{x-x^2}}{2}+c$, $x\in(0\,;1)$, p) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x}|+\frac{5-2x}{4}\sqrt{x^2-x}+c$, $x\in(-\infty\,;0)\cup\langle 1\,;\infty)$,

q) $x + \sqrt[3]{3x+4} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+4)^2} - \ln(1 + \sqrt[3]{3x+4}) + c$, $x \in \langle -\frac{4}{3}; \infty)$, r) $-2\sqrt{1+x-x^2} + \ln|x| - \ln|2 + x + 2\sqrt{1+x-x^2}| + c$, $x \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2})$, $x \neq 0$, s) $6 \operatorname{arctg}\sqrt{t} - 4\sqrt{t} - \sqrt{1-x^2} + c$, $x \in (-1; 1\rangle$, kde $t = \frac{1-x}{1+x}$, t) $4\sqrt{t} - 6 \operatorname{arctg}\sqrt{t} + \sqrt{1-x^2} + c$, $x \in \langle -1; 1)$, kde $t = \frac{1+x}{1-x}$. **1.1.11.** a) $\frac{1}{8}|x-1|^7(x-1) + c$, $x \in R$, b) $\frac{1}{9}|x-1|^8(x-1) + c$, $x \in R$, c) $-\operatorname{sgn} x\, \mathrm{e}^{-|x|} + c$, $x \in R$, $x \neq 0$, d) $\operatorname{sgn} x\, \mathrm{e}^{|x|} + c$, $x \in R$, $x \neq 0$, e) $-\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2}\ln x + c$, $x \in (0; \infty)$, f) $-\frac{x^3}{9} + \frac{x^3}{3}\ln x + c$, $x \in (0; \infty)$, g) $-\frac{x^4}{16} + \frac{x^4}{4}\ln x + c$, $x \in (0; \infty)$, h) $-\frac{x^5}{25} + \frac{x^5}{5}\ln x + c$, $x \in (0; \infty)$, i) $(x+1)\ln(x+1)^7 - 7x + c$, $x \in (-1; \infty)$, j) $\frac{2x^3}{27} - \frac{2x^3}{9}\ln x + \frac{x^3}{3}\ln^2 x + c$, $x \in (0; \infty)$, k) $\frac{x^4}{32} - \frac{x^4}{8}\ln x + \frac{x^4}{4}\ln^2 x + c$, $x \in (0; \infty)$, l) $\frac{2x^5}{125} - \frac{2x^5}{25}\ln x + \frac{x^5}{5}\ln^2 x + c$, $x \in (0; \infty)$, m) $(2x-3)\ln(2x-3)^2 - 4x + c$, $x \in R$, $x \neq \frac{3}{2}$, n) $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + c$, $x \in R$, o) $(2\sqrt[2]{x^5} - 10x^2 + 40\sqrt{x^3} - 120x + 240\sqrt{x} - 240)\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + c$, $x \in \langle 0; \infty)$, p) $(2x - 4\sqrt{x} + 4)\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + c$, $x \in \langle 0; \infty)$, q) $\frac{9}{20}\sqrt[9]{(2x-3)^{10}} + c$, $x \in \langle \frac{3}{2}; \infty)$, r) $-\frac{7}{16}\sqrt[7]{(3-2x)^8} + c$, $x \in (-\infty; \frac{3}{2}\rangle$, s) $-(x^3 + 3x^2 + 6x + 5)\,\mathrm{e}^{-x} + c$, $x \in R$, t) $x - \mathrm{e}^{-x}\arcsin \mathrm{e}^x - \ln(1 + \sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}) + c$, $x \in (-\infty; 0\rangle$, u) $\mathrm{e}^x \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c$, $x \in R$, $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in Z$, v) $\frac{\mathrm{e}^x(\sin x + 1)}{\cos x}$, $x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, w) $\frac{\mathrm{e}^x(\sin x - 1)}{\cos x}$, $x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, x) $-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{-2x} + 1) + c$, $x \in R$. **1.1.12.** a) $-\frac{2x^2-3}{4}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + c$, $x \in R$, b) $(3x^2-6)\sin x - (x^3 - 6x - 1)\cos x + c$, $x \in R$, c) $(3x^2-6)\cos x + (x^3 - 6x - 1)\sin x + c$, $x \in R$, d) $\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{2x^2-3}{4}\sin 2x + c$, $x \in R$, e) $-\frac{9x^2+9x+7}{27}\cos 3x + \frac{2x+1}{9}\sin 3x + c$, $x \in R$, f) $\frac{2x+1}{9}\cos 3x + \frac{9x^2+9x+7}{27}\sin 3x + c$, $x \in R$, g) $\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg} 2x + c$, $x \in R$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$, h) $\frac{(x+2)^4}{4}\ln(x+1)^6 - \frac{3(x+1)^4}{8} - 2(x+1)^3 - \frac{9(x+1)^2}{2} - 6(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x+1)^6 + c$, $x \in R$, $x \neq -1$, i) $\frac{2x^2-2x-1}{4}\mathrm{e}^{2x} + c$, $x \in R$, j) $(x-1)^5\ln(x+1) - \frac{(x+1)^5}{5} + \frac{5(x+1)^4}{2} - \frac{40(x+1)^3}{3} + 40(x+1)^2 - 80(x+1) + 32\ln(x+1) + c$, $x \in (-1; \infty)$, k) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-2\,\mathrm{e}^x)^3} + c$, $x \in (-\infty; -\ln 2)$, l) $\frac{x^3-1}{6}\ln(1-x) - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6} + c$, $x \in (-\infty; -1)$, m) $\frac{(x+1)^6}{6}\ln(x-2)^4 - \frac{(x-2)^6}{9} - \frac{12(x-2)^5}{5} - \frac{45(x-2)^4}{2} - 120(x-2)^3 - 405(x-2)^2 - 972(x-2)q - 243\ln(x-2)^2 + c$, $x \in R$, $x \neq 2$, n) $\frac{9x^2+3x+8}{27}\mathrm{e}^{3x} + c$, $x \in R$, o) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\mathrm{e}^x)^3} + c$, $x \in R$.

Literatúra

[1] Bartsch H. J., *Matematické vzorce,* 3. revidované vydání, Praha, Mladá fronta 2000, ISBN 80-204-0607-7.

[2] Berman G. N., *Zbierka úloh z matematickej analýzy,* Bratislava, ŠNTL 1955.

[3] Blaško R., *Matematická analýza 1,* Žilina, EDIS 2009, ISBN 978-80-554-0119-5.

[4] Brabec J., Martan F., Rozenský Z., *Matematická analýza I,* Praha, SNTL ALFA 1985.

[5] Под редакцией Демидовича Б. П., *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов,* издание пятое, Москва, НАУКА 1966.

[6] Демидович Б. П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу,* издание девятое, Москва, Издательство НАУКА 1977.

[7] Demlová M., Nagy J., *Algebra,* Matematika pro VŠT, sešit III, Praha, SNTL 1985.

[8] Eliaš J., Horváth J., Kajan J., *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1., 2., 3. a 4. časť,* Bratislava, ALFA 1970–72.

[9] Frank L. a kolektiv autorů, *Matematika,* Praha, SNTL 1973.

[10] Göhler W., Ralle B., *Lexikón vyššej matematiky,* Vzorce, Bratislava, ALFA 1992.

[11] Hlaváček A., *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky, I. a II. díl,* 2. změněné vydání, Praha, SPN 1971.

[12] Holenda J., *Řady,* Matematika pro VŠT, sešit XII, Praha, SNTL 1990.

[13] Horský Z., *Diferenciální počet,* Matematika pro VŠT, sešit V, Praha, SNTL 1981.

[14] Jarník V., *Integrální počet I, II,* Praha, Nakladatelství ČSAV 1956.

[15] Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z., *Sbírka řešených příkladů z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1982.

[16] Kluvánek I., Mišík L., Švec M., *Matematika pre štúdium technických vied, I. a II. diel,* Bratislava, SVTL 1965.

[17] Knichal V., Bašta A., pišl M., rektorys K., *Matematika II,* Praha, SNTL SVTL 1966.

[18] Kolektiv autorů za redakce Nečase J., *Aplikovaná matematika I (A—L) a II (M—Ž),* odborové encyklopedie, Praha, SNTL 1978.

[19] Míka S., *Numerické metody algebry,* Matematika pro VŠT, sešit IV, Praha, SNTL 1985.

[20] Mikola M., *Algebra,* 2. vydanie, skriptá ŽU, Žilina 1998.

[21] Nagy J., Nováková E., Vacek M., *Integrální počet,* Matematika pro VŠT, sešit VI, Praha, SNTL 1984.

[22] Nekvinda M., Šrubař J., Vild J., *Úvod do numerické matematiky,* Praha, SNTL 1976.

[23] Neubrunn T., Vencko J., *Úvod do matematickej analýzy,* skriptá MFF UK, Bratislava 1981.

[24] Neubrunn T., Vencko J., *Matematická analýza II,* skriptá MFF UK, Bratislava 1984.

[25] Prágerová A., *Cvičení z matematiky,* Praha, SNTL ALFA 1987.

[26] Přikryl P., *Numerické metody matematické analýzy,* Matematika pro VŠT, sešit XXIV, Praha, SNTL 1985.

[27] Šilov G. J., *Matematická analýza,* Bratislava, ALFA 1974.

[28] Smoljanskij M. L., *Tabuľky neurčitých integrálov,* Bratislava, ALFA 1963.

[29] Švec M., Šalát T., Neubrunn T., *Matematická analýza funkcií reálnej premennej,* Bratislava, ALFA SNTL 1987.

[30] Vitásek E, *Numerické metódy,* Praha, SNTL 1987.

[31] Blaško, R., *Matematická analýza I,* `http://frcatel.fri.uniza.sk/~beerb/ma1/ma1.htm`, (učebnica MA 1) 2007.

[32] Drexel University, The Math Forum, `http://mathforum.org/`, Internet Mathematics Library, `http://mathforum.org/library/`.

[33] EMIS, The European Mathematical Information Service, `http://www.emis.de/`.

[34] Encyklopédie des Formes Mathématiques Remarquables, `http://www.mathcurve.com/`.

[35] Excellent Matematika, `http://matematika.host.sk/index2.htm`.

[36] GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra, `http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/`.

[37] Geometry the online learning center, `http://www.geometry.net/`.

[38] Turnbull, The MacTutor History of Mathematics archive, `http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/`.

[39] World of mathematics, A Wolfram Web Resource, `http://mathworld.wolfram.com/`, WolframAlpha – computational knowledge engine, `http://www.wolframalpha.com/`.