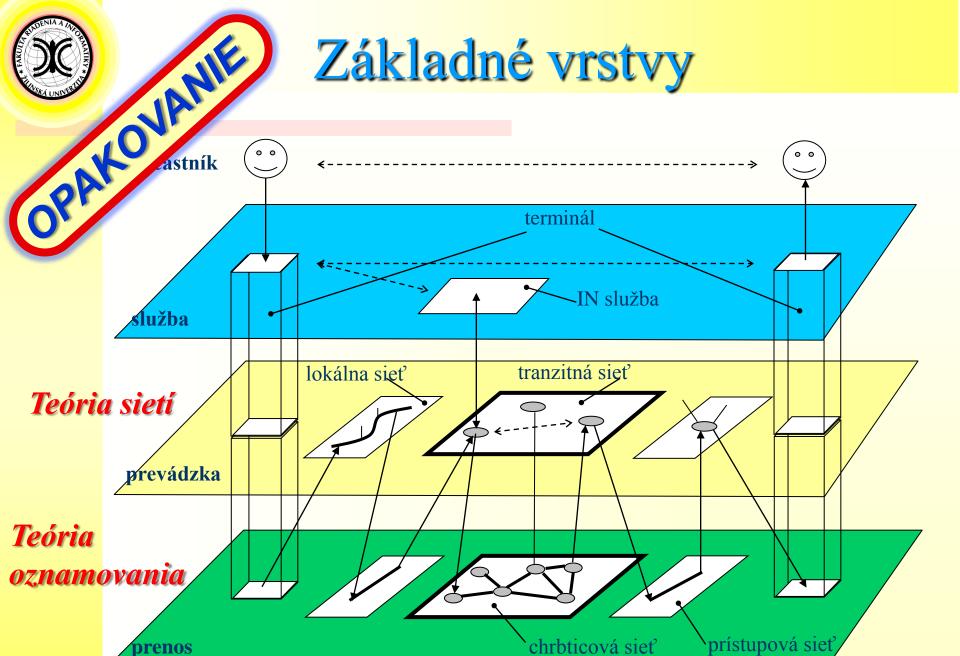


#### Teória oznamovania 11

#### Obsah:

- opakovanie
- zabezpečenie na úrovni kodéra zdroja
- detekčné kódy (paritný, cyklický)
- lineárne systematické blokové kódy
- vzdialenosť medzi slovami
- korekčné kódy (cyklický Hammingov)





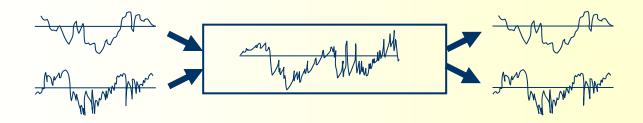
#### Vrstva prenosu

Alavné úlohy: ??

prenos jedného signálu



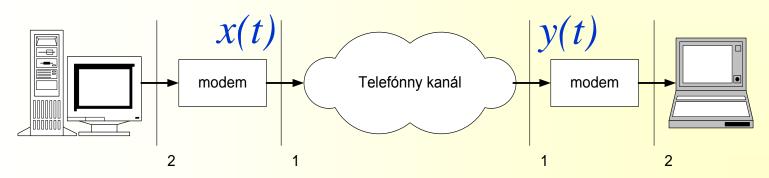
súčasný prenos signálov





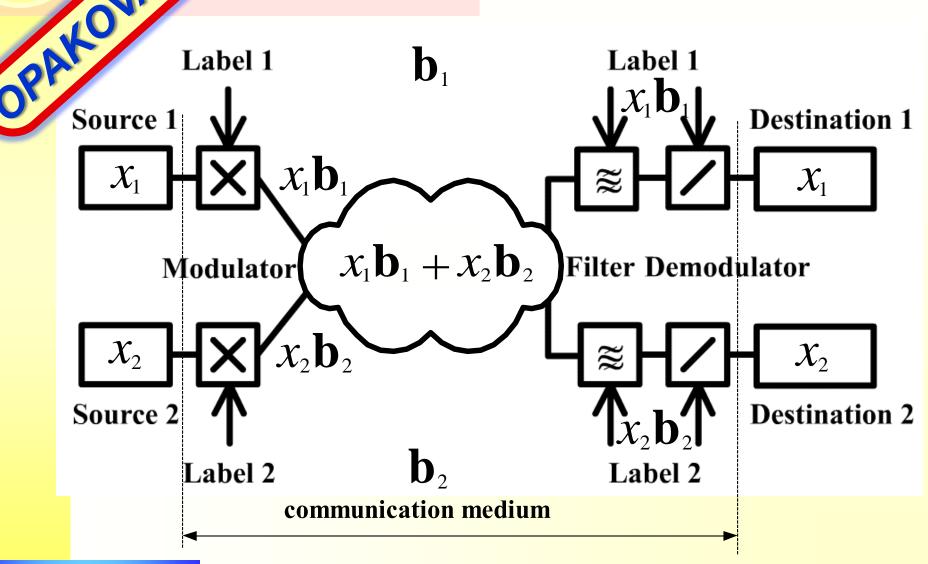


### Prispôsobenie prenosovému médiu





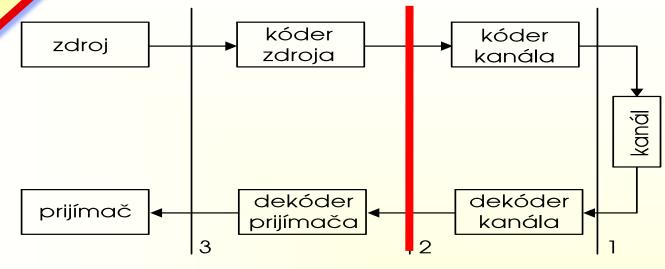
### Príznakový multiplex



KIS – FRI ŽU



#### Prenos bez skreslenia



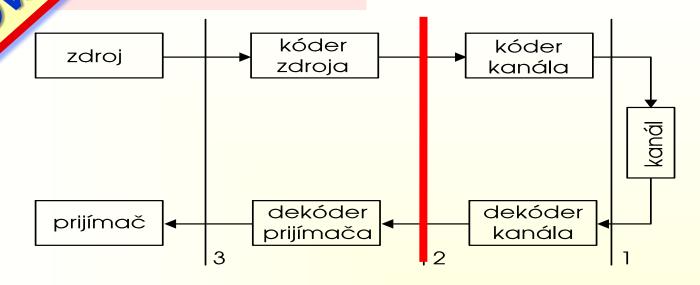
#### Korekcia kanála



$$|F_n^{kor}| = \alpha |F_n|^{-1} \varphi_n^{kor} = \varphi_n - \frac{2\pi}{N} n\Delta$$



#### Prenos bez skreslenia

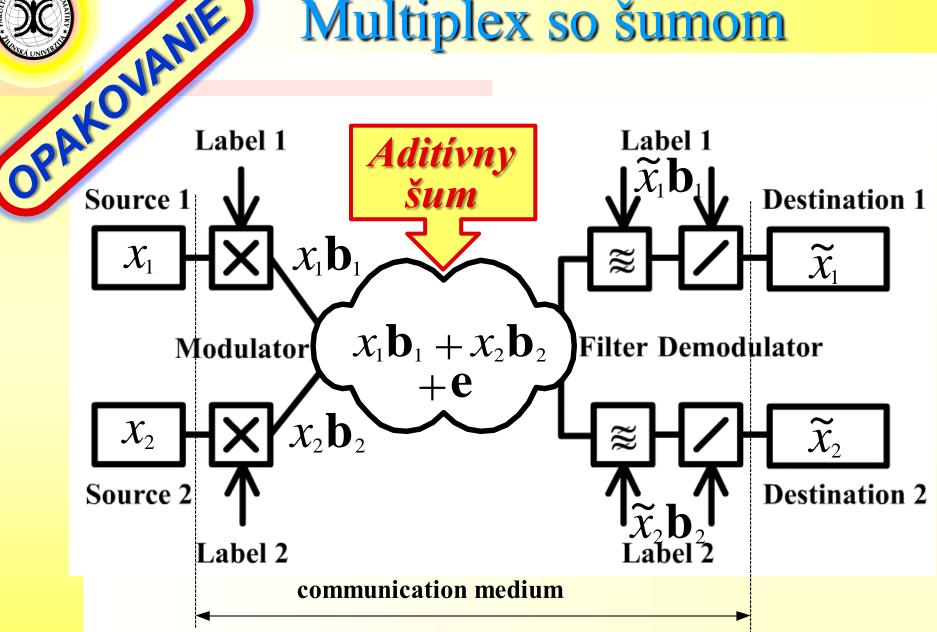


## Zabránenie vplyvu šumu





#### Multiplex so šumom





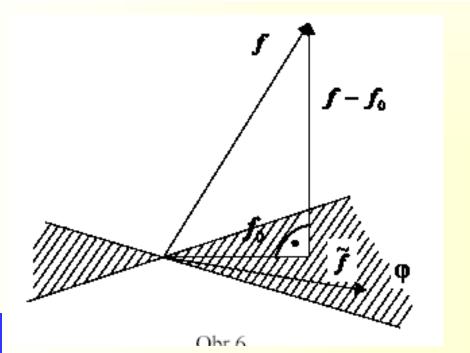
#### Priemet do podpriestoru

Nech je Hilbertov priestor a nech  $\varphi$  je uzavretý lineárny podpriestor priestoru . Nech signál a  $\delta = \inf$ 

Potom existuje práve jeden signál  $f_{0} \in \varphi$  tak, že  $d(\mathbf{f}, \mathbf{f}_{0}) = \delta$ 

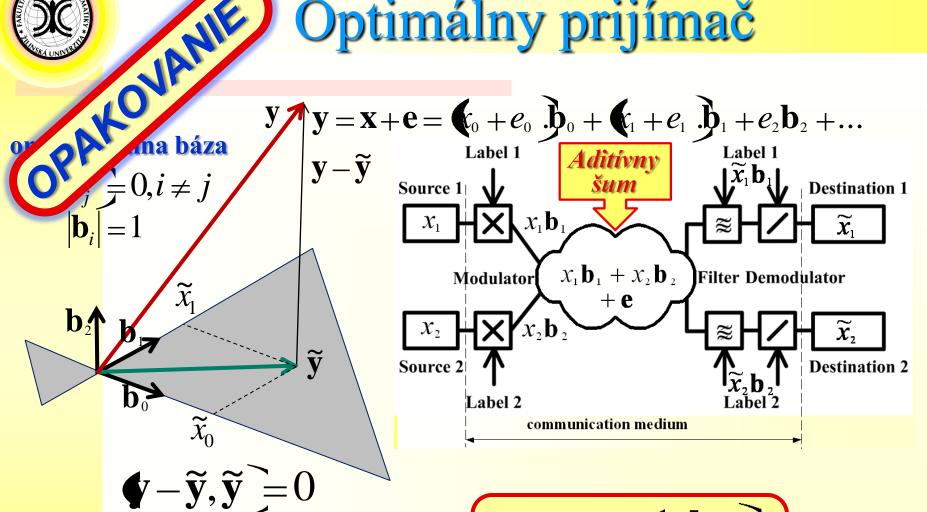
Navyše  $\mathbf{f} - \mathbf{f}_{0} \perp \varphi$ , t.j. pre všetky  $\widetilde{f} \in \varphi$  platí  $(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{0}, \widetilde{\mathbf{f}}) = 0$ 

Pritom  $f_{_0}$  je jediným signálom priestoru  $\phi$  s vlastnosťou  $\mathbf{f} - \mathbf{f}_{_0} \bot \phi$ 





# Optimálny prijímač

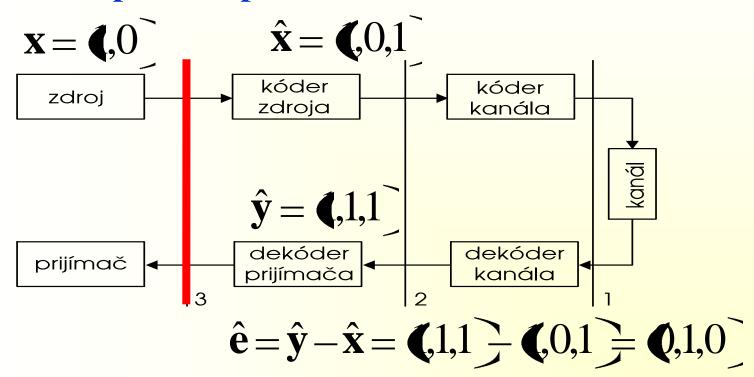


$$\widetilde{X}_n = \frac{\mathbf{v}, \mathbf{b}_n}{\mathbf{\phi}_n, \mathbf{b}_n}$$



#### Prenos bez skreslenia

#### Zabezpečenie paritou

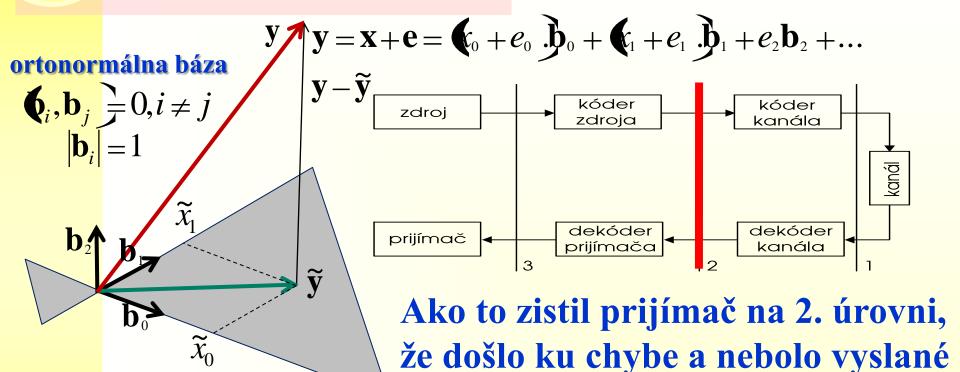


Ako zistí prijímač, že došlo ku chybe a nebolo vyslané slovo  $\hat{\mathbf{x}} = (1,1)$ ?

KIS – FRI ŽU



### Optimálny prijímač



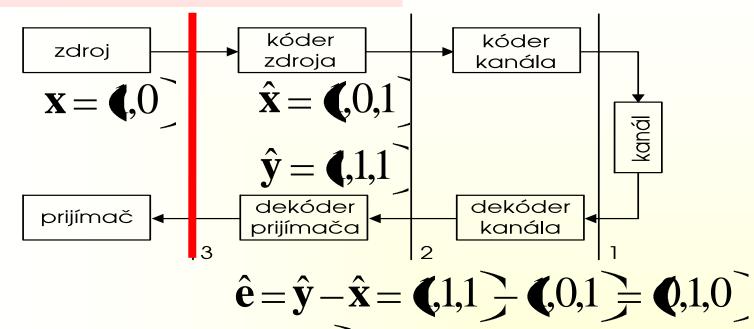
slovo?

Prijímač zistil, že prijatý signál neleží v dohodnutom signálovom priestore!!

 $(\mathbf{v} - \widetilde{\mathbf{y}}, \widetilde{\mathbf{y}}) = 0$ 



#### Prenos bez skreslenia



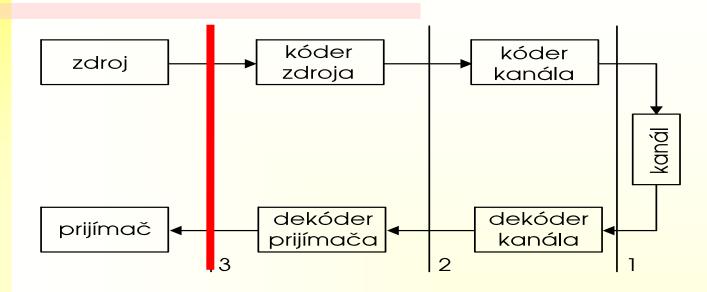
Leží prijaté slovo  $\hat{y} = (1,1,1)$  mimo dohodnutého priestoru?

NIE, ak je dohodnutý priestor  $S = \mathbb{Q}1^3$  ANO, ak je dohodnutý jeho vhodný podpriestor

Napríklad: párna parita



#### Blokový kód



Kódový priestor

Podpriestor slov kódu

Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)



### Paritný kód – párna parita

#### Kódový priestor

Podpriestor slov kódu Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)



Ródový priestor

Podpriestor slov
kódu

Ródu

Ródu

To, čo sa naučíme o cyklickom kóde, platí pre všetky blokové, systematické, lineárne kódy.

blokový kód	$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{N-1})$
systematický kód	$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_0,, \hat{x}_{n-1}, \vdots, z_0,, z_{k-1})$
lineárny kód	$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=0}^{n+k-1} x_i \hat{\mathbf{b}}_i$



### Paritný kód je systematický



Podpriestor slov – kódu Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

Dvojrozmerný podpriestor trojrozmerného priestoru

Dvojrozmerný Jednotková Báza kódu priestor báza  $\mathbf{x}_{0} = \mathbf{Q}, 0$   $\mathbf{x}_{0} = \mathbf{Q}, 0, 0$   $\hat{\mathbf{x}}_{0} = \mathbf{Q}, 0, 0$   $\mathbf{x}_{1} = \mathbf{Q}, 1, 0$   $\mathbf{x}_{1} = \mathbf{Q}, 1, 1$   $\mathbf{x}_{2} = \mathbf{Q}, 0$   $\mathbf{x}_{2} = \mathbf{Q}, 0, 0$   $\mathbf{x}_{3} = \mathbf{Q}, 0, 1$   $\mathbf{x}_{3} = \mathbf{Q}, 1, 0$   $\mathbf{x}_{3} = \mathbf{Q}, 1, 0$ kóder kóder zdroj zdroja kanála dekóder dekóder

informačná časť

prijímača

prijímač

zabezpečujúca časť

kanála

**Q**,1,:1



#### Paritný kód je lineárny

Kódový priestor

Podpriestor slov kódu

Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

Dvojrozmerný podpriestor kódu trojrozmerného kódového priestoru

Dvojrozmerný priestor zdroja

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}, 0$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{Q}, \mathbf{1}$$

$$\mathbf{x}_2 = 4.0$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{(},1\mathbf{)}$$

$$\mathbf{b}_{0} = (0)$$

$$\mathbf{b}_{1} = \mathbf{0}, 1$$

Jednotková Báza kódu báza

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, 0, 0 \quad \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}, 0, 0$$

$$\mathbf{x}_{1} = \mathbf{0}, 1$$
 $\mathbf{x}_{1} = \mathbf{0}, 1, 0$ 
 $\hat{\mathbf{x}}_{1} = \mathbf{0}, 1, 1$ 
 $\mathbf{x}_{2} = \mathbf{0}, 0$ 
 $\hat{\mathbf{x}}_{3} = \mathbf{0}, 0$ 
 $\hat{\mathbf{x}}_{4} = \mathbf{0}, 1, 1$ 
 $\mathbf{x}_{5} = \mathbf{0}, 0$ 
 $\hat{\mathbf{x}}_{6} = \mathbf{0}, 0, 1$ 
 $\mathbf{x}_{7} = \mathbf{0}, 0$ 
 $\hat{\mathbf{x}}_{8} = \mathbf{0}, 0, 1$ 
 $\mathbf{x}_{8} = \mathbf{0}, 1, 0$ 
 $\hat{\mathbf{x}}_{8} = \mathbf{0}, 1, 0$ 

$$\mathbf{x}_2 = (0,0)$$
  $\mathbf{x}_2 = (0,0)$   
 $\mathbf{x}_3 = (1,0)$ 

$$\mathbf{b}_0 = (0.0)^{2} \hat{\mathbf{b}}_0 = (0.1)^{2}$$

$$\mathbf{b}_{0} = \langle 0 \rangle
 \mathbf{b}_{0} = \langle 0,0 \rangle
 \hat{\mathbf{b}}_{0} = \langle 0,1 \rangle
 \mathbf{b}_{1} = \langle 0,1,0 \rangle
 \hat{\mathbf{b}}_{1} = \langle 0,1,1 \rangle$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}, 0, 1$$
  $\hat{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{0}, 0, 1$ 

$$\hat{\mathbf{x}} = (1,0,1)$$

$$0,1,1$$

$$0,0,1$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}.\hat{\mathbf{B}}$$

$$\mathbf{x} = (1.\mathbf{b}_0 + 1.\mathbf{b}_1 + 0.\mathbf{b}_2 = (1.0)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = 1.\hat{\mathbf{b}}_0 + 1.\hat{\mathbf{b}}_1 + 0.\hat{\mathbf{b}}_2$$

$$\hat{\mathbf{x}} = 1.$$
 (0,1,1 +0.0,0,1 = (1,1,0)



### Systematický lineárny kód

Kódový priestor

kódu

Podpriestor slov | Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1,0,1\\0,1,1\\0,0,1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}$$



Kódový priestor

Podpriestor slov – kódu

Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

```
informačná časť zabezpečujúca časť (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)
```

Generujúci polynóm 
$$g = x^2 + x + 1$$
  $g = (1,1)$ 

$$\hat{\mathbf{b}}_0 = (0,0,:z_0,z_1) = (0,0,:1,0)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{Q}, 1, 0, \vdots z_0, z_1 = \mathbf{Q}, 1, 0, \vdots 0, 1$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{2} = \mathbf{Q}, 0, 1, \vdots z_{0}, z_{1} = \mathbf{Q}, 0, 1, \vdots 1, 1$$

$$\hat{\mathbf{b}}_3 = \mathbf{Q}, 0, 0, \vdots 1, 0 = \mathbf{Q}, 0, 0, \vdots 1, 0$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{4} = \mathbf{0}, 0, 0, \vdots 0, 1^{<} = \mathbf{0}, 0, 0, \vdots 0, 1^{<}$$

Vyskúšajte g(x) = x+1. Aký kód ste dostali?



 $\hat{\mathbf{b}}_0 = (0,0,0,0,0)$   $\mathbf{x} = (0,0,0,0,0)$   $\mathbf{x} = (0,0,0,0,0)$   $\mathbf{x} = (0,0,0,0,0,0)$ 

$$\mathbf{x} = (1,0)$$

kódu

Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

Kódový priestor

$$\hat{\mathbf{b}}_{3} = \mathbf{0}, 0, 0, \vdots 1, \hat{0}$$

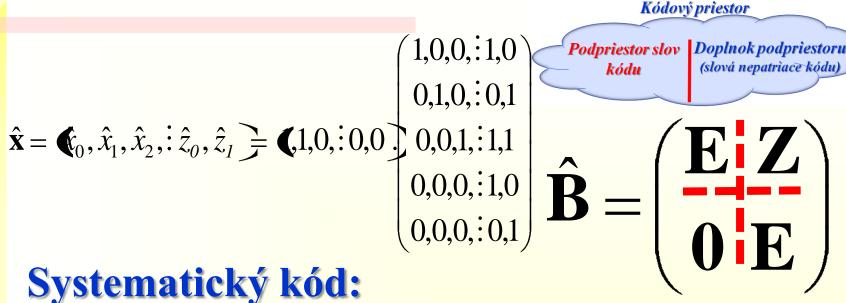
$$\hat{\mathbf{b}}_{3} = (0,0,0,:1,0)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{4} = (0,0,0,:0,1)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = 1.\hat{\mathbf{b}}_0 + 1.\hat{\mathbf{b}}_1 + 0.\hat{\mathbf{b}}_2 + 0.\hat{\mathbf{b}}_3 + 0.\hat{\mathbf{b}}_4 = (1,0,1,1)$$

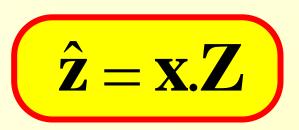
$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{z}_0, \hat{z}_1) = (1,0,0,0)$$





stačí počítať zabezpečovaciu časť

$$\hat{\mathbf{z}} = \{0, \hat{z}_1\} = \{1, 0\}$$

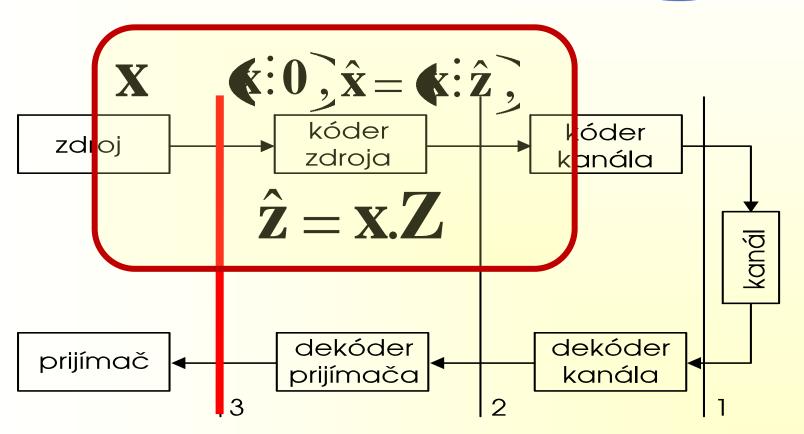


KIS – FRI ŽU



#### Kóder lineárneho kódu





KIS – FRI ŽU



### Detekčný cyklický kód

#### Kódový priestor

$$\hat{\mathbf{b}}_{0} = (1,0,0,:1,0) 
\hat{\mathbf{b}}_{1} = (0,1,0,:0,1) 
\hat{\mathbf{b}}_{2} = (0,0,1,:1,1)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{2} = (0,0,0,:0,1) 
\hat{\mathbf{b}}_{4} = (0,0,0,:0,1) 
\hat{\mathbf{b}}_{4} = (0,0,0,:0,1)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{3} = (0,0,0,:1,0)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{4} = (0,0,0,:0,1)$$

#### Vyslané slovo

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{n=0}^{2} x_n \hat{\mathbf{b}}_n$$

Prijaté slovo

Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu) 
$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_{n=0}^{4} y_n \hat{\mathbf{b}}_n$$

Podpriestor slov kódu

Patrí prijaté slovo ŷ do kódu?

Patrí, ak má tvar 
$$y = (y_0, y_1, y_2, 0, 0)$$



### Dekódovanie cyklického kódu

#### Kódový priestor

$$\hat{\mathbf{b}}_{0} = (1,0,0,:1,0) 
\hat{\mathbf{b}}_{1} = (0,1,0,:0,1) 
\hat{\mathbf{b}}_{2} = (0,0,1,:1,1)$$

Podpriestor slov

kódu

$$\hat{\mathbf{b}}_{3} = (0,0,0,:1,0)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{4} = (0,0,0,:0,1)$$

#### Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}.\hat{\mathbf{B}}$$

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}.\hat{\mathbf{B}}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0,1,0, \vdots 0,1 \\ 0,0,1, \vdots 1,1 \\ 0,0,0, \vdots 1,0 \\ 0,0,0 \vdots 0,1 \end{bmatrix}$$

1,0,0,:1,0

Doplnok podpriestoru Podpriestor slov (slová nepatriace kódu) kódu

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{n=0}^{\tau} x_n \hat{\mathbf{b}}_n$$

Prijaté slovo

$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_{n=0}^{4} y_n \hat{\mathbf{b}}_n$$

$$\hat{\mathbf{B}}^{-1} = ?$$

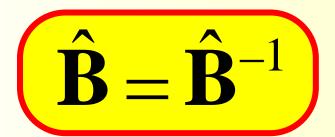


#### Inverzná matica kódu

1,0,0,1,0,:1,0,0,0,0 0,1,0,0,1,:0,1,0,0,0 0,0,1,1,1,:0,0,1,0,0 0,0,0,1,0,:0,0,0,1,0 0,0,0,0,1,:0,0,0,0,1

 $\begin{array}{c}
I_{+IV} \\
III_{+V} \\
III_{+IV+V} \\
\downarrow \\
0,1,0,0,0,\vdots \\
0,1,0,0,0,\vdots \\
0,0,1,0,0,\vdots \\
0,0,0,1,1,1 \\
0,0,0,1,0,\vdots \\
0,0,0,0,1,0,\vdots \\
0,0,0,0,1,1,1
\end{array}$ 

#### Čo ste si všimli?





### Dekódovanie cyklického kódu

#### Kódový priestor

Kódový priestor

Podpriestor slov kódu Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

$$\hat{\mathbf{b}}_{0} = (1,0,0, : 1,0) 
\hat{\mathbf{b}}_{1} = (0,1,0, : 0,1) 
\hat{\mathbf{b}}_{2} = (0,0,1, : 1,1)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{3} = (0,0,0,:1,0)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{4} = (0,0,0,:0,1)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \hat{\mathbf{b}}_n$$

Podpriestor slov Doplnok podpriestoru kódu (slová nepatriace kódu)

Prijaté slovo  $\hat{\mathbf{y}} = \sum_{n=0}^{4} y_n \hat{\mathbf{b}}_n$ 

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}.\hat{\mathbf{B}}$$

$$y = \hat{y}.\hat{B}$$



Kódový priestor

Podpriestor slov kódu

Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

$$(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4) = (0,0,1,:1,1)$$

**Patrí do kódu ak**  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0,0,0,0,0,0\\0,0,0,0,0,0 \end{bmatrix}$ 

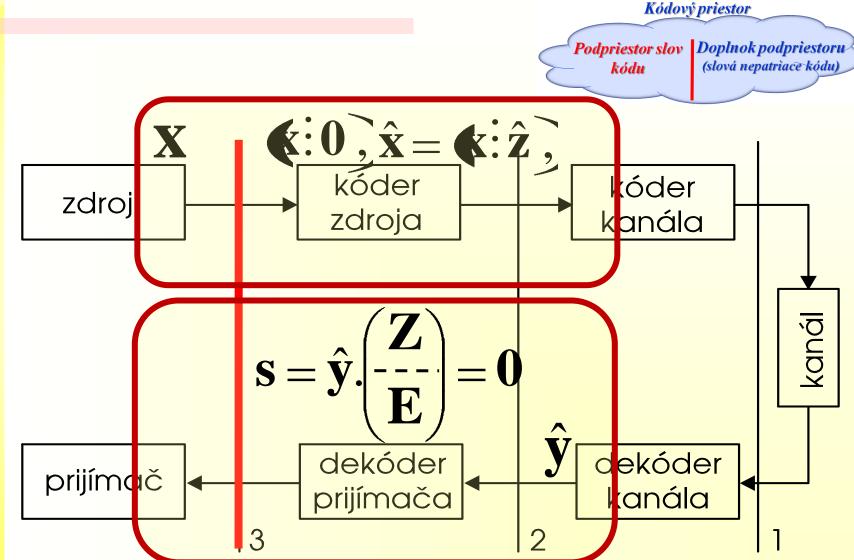
$$\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, 0, 0)$$

#### Je potrebné počítať celé slovo y?

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$



#### Dekóder detekčného kódu





Podpriestor slov Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

#### Použili sme:

• signálový priestor (báza, lineárna nezávislosť)

#### Nepoužili sme:

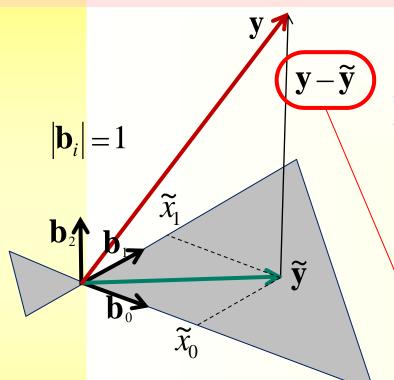
skalárny súčin (kolmosť, vzdialenosť)

#### Vieme:

zostaviť detekčný lineárny kód,
 t.j. povedať, či prijaté slovo patrí do kódu

KIS – FRI ŽU





Podpriestor slov Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

#### Potrebujeme:

 zostaviť korekčný lineárny kód, t.j. odhadnúť, ktoré slovo bolo vyslané

Musíme vedieť merať vzdialenosť

- Množina vzdialeností □0,1□ je nedostatočná
- Vektor (1,1,1,1) má nulovú veľkosť



#### Kódová vzdialenosť

Kódový priestor

Podpriestor slov – kódu Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

#### Binárne kódy:

Hammingova vzdialenosť – počet bitov, v ktorých

sa dve kódové slová líšia 
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \oplus y_n$$

• Li-ova vzdialenosť  $x_n \in \{1, ..., q-1, \} = 0, 1, ..., N-1$ 

$$|a|_{L} = \min a, q - a$$
  $d(x, y)_{L} = \sum_{n=0}^{N-1} |a_{n} - b_{n}|_{L}$ 

$$preq = 2a3: d(x,y) = d(x,y)$$

KIS – FRI ŽU



Kódový priestor

informačná časť zabezpečujúca časť

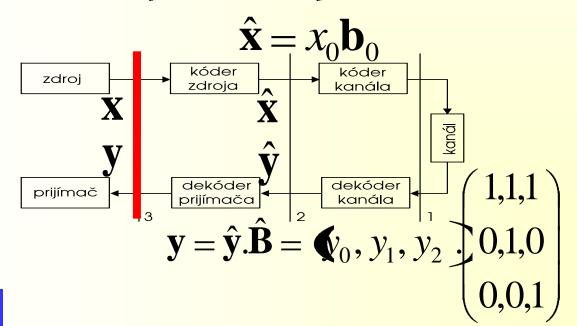
 $x_0,: z_0, z_1$ 

Podpriestor slov kódu

Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

Generujúci polynóm 
$$g = x^2 + x + 1$$
  
 $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g} = \mathbf{g} = \mathbf{g}$ 

$$\hat{\mathbf{b}}_0 = (:z_0, z_1] = (:1,1]$$





# Korekčný cyklický kód

#### Pre prijaté $\hat{y}$ nájdite $\tilde{y}$ tak že:

- $\triangleright$  leží v priestore  $\hat{\mathbf{b}}_{n}$
- > je najbližšie k ŷ

$$\hat{\mathbf{y}}_{0} = \mathbf{Q}, 0, 0$$
 $\hat{\mathbf{y}}_{1} = \mathbf{Q}, 0, 1$ 
 $\hat{\mathbf{y}}_{2} = \mathbf{Q}, 1, 0$ 
 $\hat{\mathbf{y}}_{3} = \mathbf{Q}, 1, 1$ 

$$\hat{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{0}, 0, 1$$

$$\hat{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{0}, 1, 0$$

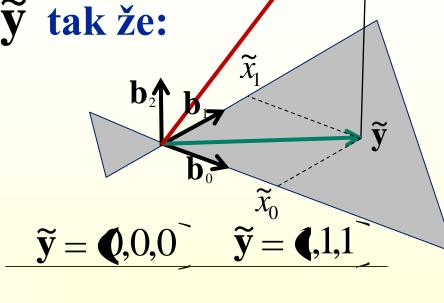
$$\hat{\mathbf{y}}_3 = \mathbf{0}, 1, 1$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{4} = \mathbf{\zeta},0,0$$

$$\hat{\mathbf{y}}_5 = (0,1)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{6} = (1,0)$$
 $\hat{\mathbf{y}}_{7} = (1,1)$ 

$$\hat{y}_7 = (1,1)$$





 $\hat{\mathbf{x}} = x_0 \mathbf{b}_0$  $y = \hat{y}.\hat{B} = \hat{Q}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2$  0,1,0 Čo ste si všimli? 0,0,1 Kódový priestor

Podpriestor slov kódu

Doplnok podpriestoru (slová nepatriace kódu)

$$\hat{\mathbf{x}}_{0} = (0,0,0) \quad \mathbf{syndrom} \quad \hat{\mathbf{x}}_{1} = (1,1,1) \quad \mathbf{syndrom}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{0} = (0,0,0) \quad \mathbf{0},0 \quad \hat{\mathbf{y}}_{7} = (1,1,1) \quad \mathbf{0},0$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{1} = (0,0,1) \quad \mathbf{0},1 \quad \hat{\mathbf{y}}_{3} = (0,1,1) \quad \mathbf{1},1$$

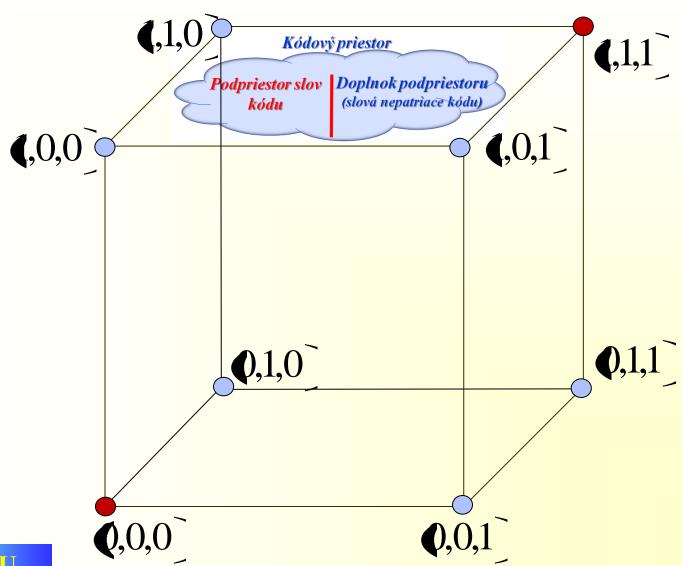
$$\hat{\mathbf{y}}_{2} = (0,1,0) \quad \mathbf{1},0 \quad \hat{\mathbf{y}}_{5} = (1,0,1) \quad \mathbf{1},0$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{6} = (1,1,0) \quad \mathbf{0},1$$

Syndrom ukazuje na miesto chyby!



### Hammingov kód





#### Teória oznamovania 11

# Dakujem za Vašu pozornosť