Téma č. 15: Laplaceova transformácia

Anna Púchyová, Adrián Krištof, Lukáš Koribský, Pavol Drozd, Peter Cápa

Fakulta Riadania a Informatiky
Žilinská Univerzita

Zimný semester, 2013

Obsah

Úvod

- Kto odvodil Laplaceovu transformáciu?
- Využitie Laplaceovej transformácie v dnešnej dobe

Laplaceova transformácia

Vzorec Laplaceovej transformácie

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

Vzorec spätnej Laplaceovej transformácie

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$$

Tabuľka najznámejších originálov a obrazov

$f:(0,\infty)\to \mathbf{R}(\mathbf{C})$	$F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
$H(t)\equiv 1$	$\dfrac{1}{p}$
$H(t-\tau), \tau\in\mathbf{R}^+$	$\dfrac{1}{p}e^{-\tau p}$
$e^{at}=\exp\, at, a\in\mathbf{C}$	$\dfrac{1}{p-a}$
$t^n, n\in\mathbf{N}$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n\exp\, at, a\in\mathbf{C}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$

Lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami

Diferenciálna rovnica

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$$

kde $a_k \in R, k = 1, 2, ...n, f :< 0, \infty > \to R$
s počiatočnými podmienkami
$y(0) = y_0, y'(0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \qquad y_0^k \in R$

Predpokladáme, že $y^{(n)} \in D_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$ nájdeme Laplaceove obrazy derivácií $y^{(k)}, k = 1, 2, ..., n$:

Obrazy derivácií

$$\mathcal{L}\{y^{(k)}\} = p^k Y(p) - p^{k-1} y_0 - p^{k-2} y_0' - ... - p y_0^{k-2} - y_0^{k-1}$$

pre $k = 1, 2, 3, ..., n$.

Algoritmus výpočtu

- 1. Nájdeme Laplaceove obrazy derivácií a pravej strany rovnice
- 2. Vyriešime algebraickú rovnicu
- 3. Urobíme spätnú Laplaceovu transformáciu obrazu riešenia po jeho rozklade na parciálne zlomky

Typy príkladov

- Základne typy príkladov:
  - Diferenciálna rovnica so začiatočnými podmienkami v nule (aspoň jedna nenulová)
  - Diferenciálna rovnica s nulovými začiatočnými podmienkami v nule
  - Diferenciálna rovnica so začiatočnými podmienkami v inom bode ako nula
  - Diferenciálna rovnica bez začiatočných podmienok, hľadáme všeobecné riešenie

Typy príkladov

1) $2y'' + y' - y = 2e^t$

2) $y'' - 4y' + 3y = 0$ $\qquad y(0) = 6, y'(0) = 10$

3) $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2t}$ $\qquad y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 1$

4) $y'' + y = cos(t)$ $\qquad y(0) = y'(0) = 0$

5) $y'' - 2y' = 2e^t$ $\qquad y(1) = -1, y'(1) = 0$

Príklad

Príklad:

$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2t}$ $\qquad y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = 3$

Príklad

Príklad:
$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2t}$ $\qquad y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = 3$
Predpokladáme, že $y''' \in D_{\mathcal{L}}$ a označíme $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$.

Príklad

Príklad:

$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2t}$ $\qquad y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = 3$

Predpokladáme, že $y''' \in D_{\mathcal{L}}$ a označíme $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$.

$\mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p), \qquad \mathcal{L}\{y'''(t)\} = p^3Y(p) + 3p - 3, \qquad \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{p-2}$

Príklad

Príklad:
$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2t}$ $\qquad y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = 3$
Predpokladáme, že $y''' \in D_{\mathcal{L}}$ a označíme $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$.
$\mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p)$, $\quad \mathcal{L}\{y'''(t)\} = p^3Y(p) + 3p - 3$, $\quad \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{p-2}$
Dostávame rovnicu:

$$p^3Y(p) + 3p - 3 - 3(pY(p)) - 2Y(p) = 9\frac{1}{p-2}$$

Príklad

Príklad:
$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2t}$ $\qquad$ $y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = 3$
Predpokladáme, že $y''' \in D_{\mathcal{L}}$ a označíme $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$.
$\mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p)$, $\quad \mathcal{L}\{y'''(t)\} = p^3Y(p) + 3p - 3$, $\quad \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{p-2}$
Dostávame rovnicu:

$$p^3Y(p) + 3p - 3 - 3(pY(p)) - 2Y(p) = 9\frac{1}{p-2}$$

Po úprave:

$$Y(p) = \frac{-3p^2 + 9p + 3}{(p-2)(p^3 - 3p - 2)}$$

Príklad

Príklad:

$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2t}$ $\quad y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = 3$

Predpokladáme, že $y''' \in D_{\mathcal{L}}$ a označíme $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$.

$\mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p)$, $\quad \mathcal{L}\{y'''(t)\} = p^3 Y(p) + 3p - 3$, $\quad \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{p-2}$

Dostávame rovnicu:

$$p^3 Y(p) + 3p - 3 - 3(pY(p)) - 2Y(p) = 9\frac{1}{p-2}$$

Po úprave:

$$Y(p) = \frac{-3p^2 + 9p + 3}{(p-2)(p^3 - 3p - 2)}$$

Spravíme rozklad na parciálne zlomky:

$Y(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{(p-2)^2}$

Príklad

Príklad:
$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2t}$ $\qquad y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = 3$
Predpokladáme, že $y''' \in D_{\mathcal{L}}$ a označíme $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$.
$\mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p),\quad \mathcal{L}\{y'''(t)\} = p^3Y(p) + 3p - 3,\quad \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{p-2}$
Dostávame rovnicu:

$$p^3Y(p) + 3p - 3 - 3(pY(p)) - 2Y(p) = 9\frac{1}{p-2}$$

Po úprave:

$$Y(p) = \frac{-3p^2 + 9p + 3}{(p-2)(p^3 - 3p - 2)}$$

Spravíme rozklad na parciálne zlomky:
$Y(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{(p-2)^2}$

$$y(t) = e^{-t} - te^{-t} - e^{2t} + te^{2t} = (t+1)(e^{2t} - e^{-t})$$

Zdroje

- MORAVČÍK, J. 2000. Matematika V. (Integrálne transformácie) Žilinská Univerzita v Žiline EDIS, 2000
- http://frcatel.fri.uniza.sk/ beerb/odr/priklady.pdf (25.11.2013)
- http://www.kirp.chtf.stuba.sk/ cirka/vyuka/lcza/pdf//chapdcr.pdf (25.11.2013)

Ďakujem za pozornosť