Kapitola 1

Procesy a dáta ako prvky vektorových priestorov

V základných kurzoch algebry aj matematickej analýzy sa ako jedna z prvých definícií vyskytuje definícia vektorového priestoru ako štruktúry pozostávajúcej z komutatívnej grupy vektorov a poľa skalárov. Táto definícia je presná a pre nematematika nie príliš zrozumiteľná. V tejto kapitole sa pokúsime ukázať užitočnosť tejto definície a niektoré vlastnosti vektorových priestorov, ktoré sú zrozumiteľné v jednoduchších modeloch preniesť do modelov, ktoré si už človek predstaviť nevie.

1.1 Vektorové priestory

Objekty, ktorými budeme modelovať procesy závislé od času, budú vektory. Začnime otázkou: „Čo je to vektor?". S týmto pojmom sme sa stretli v matematike aj fyzike a môžeme povedať, že v rôznych disciplínach sú slovom vektor popísané rôzne objekty. Napríklad vo fyzike predstavuje vektor veličinu, ktorá má okrem veľkosti aj smer. Tým sa líši od obyčajného čísla, ktoré má iba veľkosť. Príkladom vektora vo fyzike je sila, ktorá má veľkosť a smer. Ďalším príkladom vektora je zrýchlenie. V matematike na strednej škole sme sa stretli s vektorom ako usporiadanou n-ticou prvkov, označovaných ako zložky vektora.

Keby sme chceli presne odpovedať na otázku v úvode, stačí povedať, že vektor je prvok vektorového priestoru. Teraz ale treba povedať, čo je vektorový priestor. Je to štruktúra obsahujúca dve množiny prvkov, na ktorých sú definované dve operácie s presne zadanými vlastnosťami.

Vektorový priestor $\mathbb{V} = (V, +)$ nad poľom $\mathbb{F} = (F, +, \cdot)$ je vlastne usporiadaná dvojica $(\mathbb{V}, \mathbb{F})$. V ďalšom texte budeme aj keď nie celkom presne hovoriť len o vektorovom priestore $\mathbb{V}$ nad poľom $\mathbb{F}$, prípadne, ak je zrejmé z kontextu o aké pole sa jedná, len o vektorovom priestore $\mathbb{V}$. Na množine V je definovaná binárna operácia $+$. Dvojica $(V, +)$ tvorí komutatívnu grupu, naviac je definované násobenie prvkov množiny V prvkami poľa F.

Pre $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ a pre $k, l \in F$ platia distributívne zákony:

$$(k + l) \cdot \mathbf{v} = k \cdot \mathbf{v} + l \cdot \mathbf{v}$$
$$k \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = k \cdot \mathbf{v} + k \cdot \mathbf{u}$$
$$(k \cdot l) \cdot \mathbf{v} = k \cdot (l \cdot \mathbf{v})$$

pre neutrálny prvok $1 \in F$ platí, že pre všetky $\mathbf{v} \in V$ je

$$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

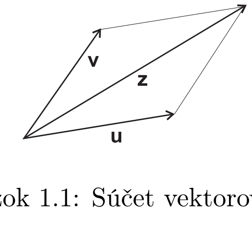
Prvky množiny V sa nazývajú **vektory**; prvky poľa F sa nazývajú **skaláry**.

V definícii sme použili pojem komutatívna grupa, ktorý je známy z algebry. **Komutatívnu grupu** tvorí množina V a na nej definovaná binárna operácia $+$ práve vtedy, ak platí, že $+$ je asociatívna a komutatívna operácia na V, vo V existuje nulový vektor a ku každému vektoru existuje opačný.

Definícia vektorového priestoru sa môže zdať komplikovaná, splňuje však úlohu zaviesť pojem, ktorý zastreší všetky doterajšie predstavy o vektoroch. Treba si uvedomiť, že táto definícia plní ešte jednu úlohu a to, že vymedzuje aj iné, nové vektory, ktoré nemusia byť vektormi tak, ako ich chápeme v geometrii, alebo vo fyzike. Môže to byť ľubovboľný matematický objekt spĺňajúci axiómy vektorového priestoru. Napríklad polynómy stupňa najviac n, alebo spojité funkcie. Samozrejme na to, aby polynómy, alebo funkcie mohli byť považované za vektory, musíme k uvedeným množinám objektov (vektorov) pridať operáciu sčítania, pridať pole skalárov, operáciu násobenia skalárom a zabezpečiť platnosť všetkých axióm vektorového priestoru. V týchto vektorových priestoroch platia rovnaké tvrdenia a vety ako v priestoroch, ktoré budeme rozoberať podrobnejšie. Je len na vôli čitateľa, aké zovšeobecnenia si vyberie pre svoje potreby.

V ďalšom texte budeme pracovať s dvomi vektorovými priestormi, $\mathbb{V}_1$ a $\mathbb{V}_2$. Prvý priestor $\mathbb{V}_1$ je posunutie, ako ho poznáme zo strednej školy. Druhý $\mathbb{V}_2$ je tvorený N-ticami prvkov z poľa reálnych alebo komplexných čísel. Cieľom bude ukázať, že vlastnosti, ktorým rozumieme v jednom priestore sa dajú zovšeobecniť a použiť v inom priestore. Nech **vektorový priestor** $\mathbb{V}_1$, je tvorený posunutiami roviny, teda množinu vektorov V_1 tvoria skupiny úsečiek, ktoré majú rovnaký smer, veľkosť a sú vzájomne rovnobežné. Množinu F_1 tvoria reálne čísla. Operácia $+$ na množine V_1 je definovaná pre ľubovoľné vektory $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{V}_1$ nasledovne $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{z}$, výsledný vektor $\mathbf{z}$ má veľkosť a smer rovnaké ako uhlopriečka rovnobežníka so stranami $\mathbf{v}, \mathbf{u}$. Operácie $+$ a $\cdot$ na množine $F_1 = R$ sú definované obvyklým spôsobom, tak aby $(R, +, \cdot)$ bolo pole.

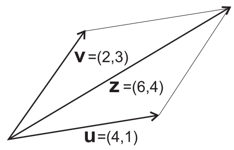
Príklad 1.1.1 *Na obrázku* 1.1 *je znázornený postup pri geometrickom sčítaní dvoch vektorov z priestoru* $\mathbb{V}_1$.



Obrázok 1.1: Súčet vektorov $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}$

Nech **vektorový priestor** $\mathbb{V}_2$ je tvorený N-ticami prvkov z poľa reálnych čísel, teda množinu V_2 tvoria usporiadané N-tice reálnych čísel. Množinu F_2 tvoria znovu reálne čísla. Opreácia $+$ na množine V_2 je definovaná pre ľubovoľné vektory $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1}), \mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{V}_2$ nasledovne: $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{z}$ je taký vektor, pre ktorý platí $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1}) = (v_0+u_0, v_1+u_1, \dots, v_{N-1}+u_{N-1})$. Operácie $+$ a $\cdot$ na množine $F_2 = R$ sú definované obvyklým spôsobom, tak aby $(R, +, \cdot)$ bolo pole.

Príklad 1.1.2 *Vektory na obrázku* 1.1 *môžeme chápať ako usporiadané dvojice. Na obrázku* 1.2 *skutočne vidíme, že geometrický súčet v priestore* $\mathbb{V}_1$ *môžeme nahradiť algebraickým súčtom v priestore* $\mathbb{V}_2$.



Obrázok 1.2: Súčet vektorov $\mathbf{v} = (2, 3)$ a $\mathbf{u} = (4, 1)$ je $\mathbf{z} = (6, 4)$

Úloha 1.1.1 *Overte, že* $\mathbb{V}_1$ *a* $\mathbb{V}_2$ *spĺňajú axiómy vektorového priestoru.*

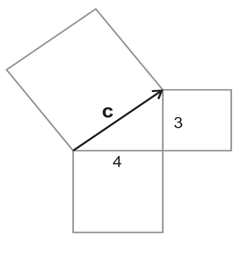
Úloha 1.1.2 *Dokážte, že ak vektor* $\mathbf{z}$ *je súčtom vektorov (posunov)* $\mathbf{v}$ *a* $\mathbf{u}$ *v priestore* $\mathbb{V}_1$*, tak zodpovedajúce vektory (usporiadané dvojice)* $\mathbf{v}$ *a* $\mathbf{u}$ *majú aj v priestore* $\mathbb{V}_2$ *súčet vektor* $\mathbf{z}$.

Príklad 1.1.3 *Aká je veľkosť vektora* $\mathbf{c} = (3, 4)$*?*

Riešenie:
Veľkosť vektora $\mathbf{c}$ na obrázku 1.3 sa dá vypočítať pomocou Pytagorovej vety $c^2 = a^2 + b^2$. Teda

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

□



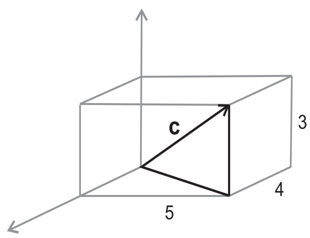
Obrázok 1.3: Veľkosť vektora $\mathbf{c}$=(3,4).

Príklad 1.1.4 *Aká je veľkosť vektora* $\mathbf{d} = (a, b, c)$*?*

Riešenie:
Veľkosť vektora **d** na obrázku 1.4 sa dá vypočítať pomocou dvojnásobného využitia Pytagorovej vety. Teda v trojrozmernom priestore bude veľkosť vektora

$$|d| = \sqrt{a^2 + u^2} = \sqrt{a^2 + (\sqrt{(b^2 + c^2)})^2} = \sqrt{a^2 + |(b^2 + c^2)|} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

□

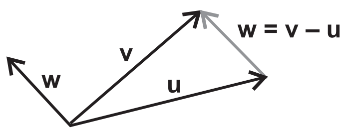


Obrázok 1.4: Veľkosť vektora **d**

Úloha 1.1.3 *Aká bude veľkosť vektora* **e** *v štvorrozmernom priestore?*

Úloha 1.1.4 *Môžeme vzorec pre veľkosť vektora v priestore* $\mathbb{V}_1$ *použiť v priestore* $\mathbb{V}_2$*? Ako bude vyzerať vzorec pre veľkosť vektora, ktorý má N zložiek? Čo znamená rozmer priestoru?*

Okrem súčtu vektorov je vo vektorovom priestore daný aj ich rozdiel.
Rozdiel vektorov $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ je súčet vektora **v** a opačného vektora k vektoru **u**. To je dobré si uvedomiť, kvôli geometrickej predstave rozdielu dvoch vektorov, ako je to vidno na obrázku 1.5.

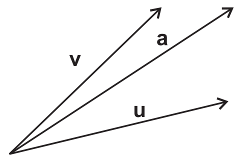


Obrázok 1.5: Vektor **w** je rozdiel vektorov **v** a **u**

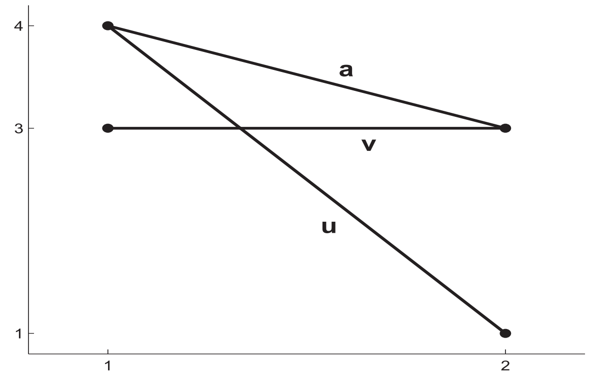
S pojmami veľkosť vektora a rozdiel dvoch vektorov je už možné riešiť úlohu ako aproximovať jeden vektor iným vektorom a určiť chybu, ktorej sme sa pri tom dopustili.

Príklad 1.1.5 *Ktorý z vektorov* **u**, **v** *na obrázku* 1.6 *lepšie nahradí vektor* **a**?

Riešenie:
V situácii, keď je potrebné vektor **a** nahradiť jedným z vektorov **u** alebo **v**, vyberieme ten vektor, ktorý lepšie aproximuje pôvodný vektor. Vektor **v** je k vektoru **a** podstatne bližšie, **v** sa viac podobá na **a**, než vektor **u**. Vyberieme vektor **v**, lebo veľkosť rozdielu $\mathbf{v} - \mathbf{a}$ je menšia ako veľkosť rozdielu $\mathbf{u} - \mathbf{a}$. □



Obrázok 1.6: Aproximácia vektora **a** bližším z vektorov **u**, **v**



Obrázok 1.7: Aproximácia 2-zložkového vektora **a** bližším z vektorov **u**, **v**

Príklad 1.1.6 *Vektory z príkladu* 1.1.5 *môžeme zakresliť do roviny aj tak, že jednotlivé zložky vektora budú hodnoty nejakého procesu v časoch* 1 *a* 2. *Na obrázku* 1.7 *vidíme ako možno nakresliť aj viaczložkové vektory.*

Úloha 1.1.5 *Môže sa problém z príkladu* 1.1.5 *riešiť aj v priestore* $\mathbb{V}_7$*?*
Ktorý z vektorov z vektorov $\mathbf{u} = (1, 4, 5, 2, 9, 3, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 2, 1, 3, 5, 2, 3)$ *je bižšie k vektoru* $\mathbf{a} = (3, 5, 2, 1, 4, 4, 3)$*?*

Úloha 1.1.6 *Ako zakresliť vektor z priestoru* $\mathbb{V}_2$*? Vidno z obrázku* 1.8, *ktorý z vektorov* $\mathbf{u}$ *alebo* $\mathbf{v}$ *lepšie aproximuje vektor* $\mathbf{a}$*?*

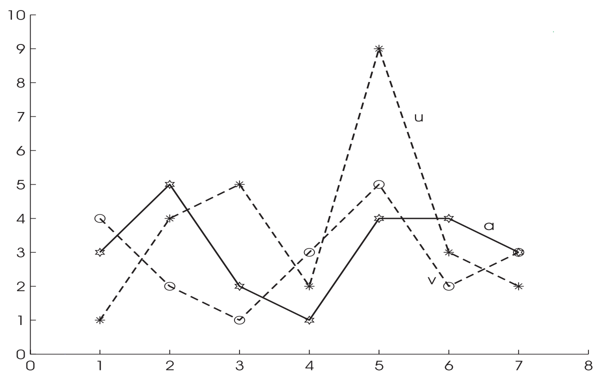
Na to, aby sme mohli presne odpovedať na otázky v predchádzajúcich úlohách, bude potrebné zaviesť (alebo zopakovať) ďalšie pojmy z lineárnej algebry. Nech $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$ sú skaláre (t.j. prvky poľa F).
Vektor $\mathbf{v} = c_0 \cdot \mathbf{v}_0 + c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + c_{N-1} \cdot \mathbf{v}_{N-1}$ nazveme **lineárnou kombináciou** vektorov $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{N-1}$.

Príklad 1.1.7 *Vektor* $(2, 4, 1)$ *je lineárnou kombináciou vektorov* $(1, 2, 4)$ *a* $(0, 0, 1)$, *lebo*

$$(2, 4, 1) = 2 \cdot (1, 2, 4) - 7 \cdot (0, 0, 1)$$

Rovnako vektory $(-1, -2, -4)$, $(0, 0, 0)$ *aj* $(1, 2, 1)$ *sú lineárnymi kombináciami vektorov* $(1, 2, 4)$ *a* $(0, 0, 1)$, *pretože*

$$(-1, -2, -4) = -1 \cdot (1, 2, 4) + 0 \cdot (0, 0, 1)$$



Obrázok 1.8: Aproximácia 7-zložkového vektora **a** bližším z vektorov **u**, **v**

$$(0,0,0) = 0 \cdot (1,2,4) + 0 \cdot (0,0,1)$$
$$(1,2,1) = 1 \cdot (1,2,4) - 3 \cdot (0,0,1)$$

Úloha 1.1.7 *Vyjadrite postupne vektor* $\mathbf{a} = (2,4)$ *ako lineárnu kombináciu vektorov* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *a načrtnite príslušný obrázok.*

- $\mathbf{u} = (1,0)$, $\mathbf{v} = (0,1)$
- $\mathbf{u} = (2,0)$, $\mathbf{v} = (0,2)$
- $\mathbf{u} = (1,4)$, $\mathbf{v} = (4,2)$
- $\mathbf{u} = (1,4)$, $\mathbf{v} = (2,8)$

Úloha 1.1.8 *Vyjadrite postupne vektor* $\mathbf{a} = (2,4,6)$ *ako lineárnu kombináciu vektorov:*

- $\mathbf{u} = (1,0,0)$, $\mathbf{v} = (0,2,3)$
- $\mathbf{u} = (2,0,0)$, $\mathbf{v} = (0,2,4)$
- $\mathbf{u} = (1,0,2)$, $\mathbf{v} = (0,2,0)$, $\mathbf{w} = (0,0,2)$

Vektory $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{N-1}$ sa nazývajú **lineárne závislé**, ak existuje vektor **c** taký, že platí

$$c_0\mathbf{v}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{N-1}\mathbf{v}_{N-1} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) \neq \mathbf{0}$$

Poznámka:
Vektor **c** je nenulový, ak aspoň jedno z čísel $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$ je rôzne od nuly.

Príklad 1.1.8 *Vektory* $(2,4,8,1)$, $(1,2,4,0)$ *a* $(0,0,0,1)$ *sú lineárne závislé lebo*

$$1 \cdot (2,4,8,1) - 2 \cdot (1,2,4,0) - 1 \cdot (0,0,0,1) = (0,0,0,0) = \mathbf{0}$$

teda existuje nenulový vektor koeficientov $\mathbf{c} = (1,-2,-1) \neq (0,0,0)$ *taký, že pomocou neho možné urobiť lineárnu kombináciu, ktorá je rovná vektoru* $\mathbf{0}$.

Úloha 1.1.9 *Nakreslite*

- *dvojicu lineáne závislých vektorov* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$
- *trojicu lineáne závislých vektorov* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{w}$
- *principiálne inú trojicu lineáne závislých vektorov* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{w}$

Úloha 1.1.10 *Doplňte na*

- *dvojicu lineáne závislých vektorov* $\mathbf{u} = (1, 0)$*,* $\mathbf{v} =?$
- *dvojicu lineáne závislých vektorov* $\mathbf{u} = (1, 1)$*,* $\mathbf{v} =?$
- *dvojicu lineáne závislých vektorov* $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$*,* $\mathbf{v} =?$
- *trojicu lineáne závislých vektorov* $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (1, 1, 1), \mathbf{w} =?$
- *trojicu lineáne závislých vektorov* $\mathbf{u} = (4, 2, 4), \mathbf{v} = (2, 1, 2), \mathbf{w} =?$

Vektory $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{N-1}$ sa nazývajú **lineárne nezávislé**, ak lineárna kombinácia $c_0\mathbf{v}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{N-1}\mathbf{v}_{N-1}$ je rovná nule iba pre nulový vektor $\mathbf{c} = (\mathbf{c_0}, \mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_{N-1}}) = \mathbf{0}$.

Príklad 1.1.9 *Vektory* $(2, 4, 7, 1)$*,* $(1, 2, 4, 0)$ *a* $(0, 0, 0, 1)$ *sú lineárne nezávislé lebo rovnica*

$$c_0 \cdot (2, 4, 7, 1) - c_1 \cdot (1, 2, 4, 0) - c_2 \cdot (0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

pre neznámu $\mathbf{c}$ *má iba jediné riešenie* $\mathbf{c} = (0, 0, 0)$*.*

Úloha 1.1.11 *Nakreslite*

- *dvojicu lineáne nezávislých vektorov* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$
- *trojicu lineáne nezávislých vektorov* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{w}$
- *principiálne inú trojicu lineáne nezávislých vektorov* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{w}$

Úloha 1.1.12 *Doplňte na*

- *dvojicu lineáne nezávislých vektorov* $\mathbf{u} = (1, 0)$*,* $\mathbf{v} =?$
- *dvojicu lineáne nezávislých vektorov* $\mathbf{u} = (1, 1)$*,* $\mathbf{v} =?$
- *dvojicu lineáne nezávislých vektorov* $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$*,* $\mathbf{v} =?$
- *trojicu lineáne nezávislých vektorov* $\mathbf{u} = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (1, 1, 1), \mathbf{w} =?$
- *trojicu lineáne nezávislých vektorov* $\mathbf{u} = (4, 2, 4), \mathbf{v} = (2, 1, 2), \mathbf{w} =?$

Pri riešení úloh môže pomôcť nasledujúce tvrdenie (ktorého dôkaz čitateľ nájde v učebniciach lineárnej algebry alebo ho urobí sám). Pre lepšiu orientáciu v lineárnej algebre odporúčame zopakovať vedomosti zo základného kurzu algebry napríklad podľa [14], hlbšie uchopenie problematiky a teoretické zázemie nájde čitateľ v [17].

Tvrdenie 1.1.1 *Vektory* $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{N-1}$ *sú lineárne závislé, ak aspoň jeden z nich sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia ostatných vektorov.*

1.2 Báza a dimenzia vektorového priestoru

Jedným z najdôležitejších pojmov, s ktorými v tejto knihe budeme pracovať je pojem bázy. **Bázou vektorového priestoru** nazveme usporiadanú n-ticu vektorov $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{N-1})$ vektorového priestoru $\mathbb{V}$ práve vtedy, ak

- vektory $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{N-1}$ sú lineárne nezávislé
- každý z vektorov priestoru $\mathbb{V}$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov tejto bázy, teda pre ľubovoľný vektor $\mathbf{x} \in V$ existujú také koeficienty $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1} \in F$, že platí

$$\mathbf{x} = c_0\mathbf{b}_0 + c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_{N-1}\mathbf{b}_{N-1}$$

Poznámka:
Hovoríme, že systém bázových vektorov je **nezávislý** (lineárna nezávislosť vektorov bázy) a **úplný** (všetky vektory sa dajú vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov bázy).

Nezávislosť systému zabezpečí, že dostaneme jednoznačný rozklad (a súčasne najmenší počet vektorov v lineárnej kombinácii). Vďaka úplnosti systému, môžeme do bázy rozložiť ľubovoľný vektor priestoru $\mathbb{V}$.

Príklad 1.2.1 *Systém vektorov $\mathcal{B} = ((2,5), (-1,3))$ je bázou vektorového priestoru $\mathbb{V}$ všetkých dvojzložkových vektorov.*

Riešenie:
Skutočne, ľubovoľný vektor $\mathbf{v} = (v_0, v_1)$ sa dá napísať ako lineárna kombinácia vektorov $(2,5)$ a $(-1,3)$.

$$(v_0, v_1) = c_0(2,5) + c_1(-1,3)$$

Táto vektorová rovnica vedie na lineárnu sústavu rovníc

$$\begin{aligned} v_0 &= c_0 2 + c_1(-1) \\ v_1 &= c_0 5 + c_1 3 \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy (s neznámymi c_0, c_1 a parametrami v_0, v_1) sú

$$c_0 = \frac{3v_0 + v_1}{11}$$

$$c_1 = \frac{-5v_0 + 2v_1}{11}$$

Skutočne platí, že

$$\begin{aligned} c_0 \cdot (2,5) + c_1 \cdot (-1,3) &= \frac{3v_0 + v_1}{11} \cdot (2,5) + \frac{-5v_0 + 2v_1}{11} \cdot (-1,3) = \\ &= \left(\frac{6v_0 + 2v_1}{11}, \frac{15v_0 + 5v_1}{11}\right) + \left(\frac{5v_0 - 2v_1}{11}, \frac{-15v_0 + 6v_1}{11}\right) \\ &= \left(\frac{11v_0}{11}, \frac{11v_1}{11}\right) = (v_0, v_1) \end{aligned}$$

□

Úloha 1.2.1 *Zistite, či nasledujúce systémy vektorov tvoria bázu vektorového priestoru:*

- $\mathcal{B}_0 = ((1,0),(1,1))$
- $\mathcal{B}_1 = ((1,0,1),(1,1,0))$
- $\mathcal{B}_2 = ((1,0,1),(1,1,0),(2,2,1)$
- $\mathcal{B}_3 = ((1,0),(1,1),(2,3))$
- $\mathcal{B}_4 = ((1,0,1),(1,1,0),(0,0,1),(1,0,0))$
- $\mathcal{B}_5 = ((51,14,76,22),(1,1,0,4),(3,0,0,1))$
- $\mathcal{B}_6 = ((34,42,50),(61,19,30),(0,0,0))$

Tvrdenie 1.2.1 *Všetky bázy vektorového priestoru $\mathbb{V}$ majú rovnaký počet prvkov.*

Predchádzajúce tvrdenie umožňuje zaviesť pojem dimenzie priestoru.
Dimenzia vektorového priestoru $\mathbb{V}$ je počet prvkov bázy tohoto priestoru.
Poznámka:
Ak má vektorový priestor dimenziu N, nazýva sa N**-rozmerný vektorový priestor**, značíme $dim(\mathbb{V}) = N$.
Prvky bázy nazývame **bázové vektory**, alebo vektory bázy.

Príklad 1.2.2 *Koľkorozmerný je vektorový priestor $\mathbb{V}$ obsahujúci všetky trojzložkové vektory (v_0, v_1, v_2) ?*

Riešenie:
Vektory môžeme napísať ako lineárnu kombináciu

$$(v_0, v_1, v_2) = v_0 \cdot (1,0,0) + v_1 \cdot (0,1,0) + v_2 \cdot (0,0,1)$$

Systém troch vektorov $\mathcal{E}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ tvorí bázu (presnejšie jednu z mnohých báz) priestoru $\mathbb{V}$. To dokážeme tým, že overíme úplnosť a lineárnu nezávislosť systému $\mathcal{E}_3$. Preto je priestor $\mathbb{V}$ trojrozmerný. $\square$

V príklade 1.2.2 sme ukázali úplne jasné tvrdenie, že trojzložkové vektory tvoria trojrozmerný vektorový priestor. Dôležitejší než výsledok úlohy je však postup, ktorý neskôr použijeme pri určovaní rozmeru v zložitejších priestoroch.

Tvrdenie 1.2.2 *Každá množina N lineárne nezávislých vektorov patriacich do N-rozmerného vektorového priestoru $\mathbb{V}$ tvorí bázu vektorového priestoru $\mathbb{V}$.*

Vektorový priestor $\mathbb{V}_1$ je **vektorovým podpriestorom** vektorového priestoru $\mathbb{V}$, ak pre každý vektor z $\mathbb{V}_1$ platí:

$$\mathbf{v} \in \mathbb{V}_1 \Rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{V}$$

Príklad 1.2.3 *Objekty „priamka", „rovina", „priestor" v geometrickom chápaní môžu byť vektorovými priestormi.*

- Objekt „priamka" je jednorozmerným vektorovým podpriestorom dvojrozmerného vektorového priestoru „roviny".

- Objekt „rovina" je dvojrozmerným vektorovým podpriestorom trojrozmerného vektorového „priestoru".
- Objekt „priamka" je jednorozmerným vektorovým podpriestorom trojrozmerného vektorového „priestoru".

□

Tvrdenie 1.2.3 *Množina všetkých lineárnych kombinácií vektorov* $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{M-1} \in V_N$ *tvorí vektorový podpriestor* $\mathbb{V}_M$ *priestoru* $\mathbb{V}_N$*.*

$$\mathbb{V}_M = \{c_0\mathbf{v}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{M-1}\mathbf{v}_{M-1};\ c_0, c_1, \ldots, c_{M-1} \in F\}$$

Hovoríme, že vektory $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{M-1}$ **generujú** podriestor $\mathbb{V}_M$, značíme

$$\mathbb{V}_M = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{M-1}]$$

Príklad 1.2.4 *Príklady systémov vektorov, ktoré generujú vektorové priestory.*

- $\mathcal{S}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ generuje trojrozmerný vektorový priestor
- $\mathcal{S}_2 = ((1,0,0),(0,1,0))$ generuje dvojrozmerný vektorový podpriestor trojrozmerného vektorového priestoru
- $\mathcal{S}_3 = ((1,1,0),(2,2,0))$ generuje jednorozmerný vektorový podpriestor trojrozmerného vektorového priestoru

□

Úloha 1.2.2 *Zistite, koľkorozmerný vektorový podpriestor generujú vektory*

- $\mathcal{B}_1 = ((1,0,0,0),(2,0,1,0),(0,0,0,1))$
- $\mathcal{B}_2 = ((4,4,3,3),(2,2,1,1),(0,0,1,1))$

O podpriestory akého priestoru sa jedná?

Úloha 1.2.3 *Ako súvisí rozmer priestoru generovaného systémom vektorov* $\mathcal{B}$ *s hodnosťou matice* $\mathbf{B}$*, ktorej riadky sú jednotlivé vektory systému* $\mathcal{B}$*?*

Jednotkovou bázou $\mathcal{E}$ Euklidoveho vektorového priestoru $\mathbf{E}_N$, nazveme bázu

$$\mathcal{E} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{N-1})$$

kde $\mathbf{e}_\mathbf{k} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ je vektor, ktorý má všetky zložky 0, len na k-tom mieste má 1.

1.3 Súradnice vektora vzhľadom na bázu

Tvrdenie 1.3.1 *Každý vektor* $\mathbf{v}$ *vektorového priestoru* $\mathbb{V}$ *možno jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu bázových vektorov*

$$\mathbf{v} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{b}_k$$

Koeficienty $(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$ rozkladu vektora do bázy nazývame **súradnice vektora v** vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$.
Píšeme

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$$

Ak bázu v zápise neoznačíme, budú to koeficienty v jednotkovej báze $\mathcal{E}$:

$$\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{N-1})$$

$$\mathbf{v}_{\mathcal{E}} = (v_0, v_1, \ldots, v_{N-1})$$

Tvrdenie 1.3.2 *k-tu súradnicu vektora* $\mathbf{v}$ *vypočítame ako skalárny súčin vektora* $\mathbf{e_k} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ *a vektora* $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{N-1})$*:*

$$v_k = (\mathbf{v}, e_k) = ((v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}), (0, \ldots, 1, \ldots, 0))$$

Matica patriaca k báze $\mathcal{B}$, je matica $\mathbf{B}$, ktorej riadky sú vektory bázy $\mathcal{B}$.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \ldots & b_{0N-1} \\ b_{10} & b_{11} & \ldots & b_{1N-1} \\ \vdots & & & \\ b_{N-10} & b_{N-11} & \ldots & b_{N-1N-1} \end{pmatrix}$$

Poznámka:
Ak vektor $\mathbf{v}$ má vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$ súradnice $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$, potom platí:

$$\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{N-1})$$

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{b}_k = \mathbf{c} \cdot \mathbf{B} \tag{1.3.1}$$

Príklad 1.3.1 *Aké sú súradnice vektora* $\mathbf{v} = (-2, 11)$ *v báze* $\mathcal{B} = (1, 2), (-1, 1))$*?*

Riešenie:
K báze $\mathcal{B} = ((1, 2), (-1, 1))$ patrí matica $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Súradnice vektora $\mathbf{v} = (-2, 11)$ v báze $\mathcal{B}$ sú $c_0 = 3, c_1 = 5$.
Naozaj platí

$$\mathbf{v} = (-2, 11)$$
$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (3, 5) = c_0\mathbf{b}_0 + c_1\mathbf{b}_1 = 3 \cdot (1, 2) + 5 \cdot (-1, 1)$$

V maticovom tvare

$$\mathbf{v} = (-2, 11) = (3, 5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}$$

□

Úloha 1.3.1 *Ako bude vyzerať rovnica* (1.3.1) *v prípade jednorozmernej bázy* $\mathcal{B}$*?*

1.4 Zmena bázy

Pri analyzovaní procesu sa na dáta pozeráme rôznym spôsobom. Jednou z metód analýzy je chápať proces ako vektor a zmena pohľadu na dáta je vlastne zmena bázy a v nej vyjadrené súradnice procesu. Zmenou bázy zabezpečíme zmenu pohľadu na dáta ako sme to využili v kapitole **??**.

Zmenou bázy $\mathcal{B}$ na bázu $\mathcal{B}^\star$ rozumieme prechod od súradníc v báze $\mathcal{B}$ k súradniciam v báze $\mathcal{B}^\star$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{\mathcal{B}} &= (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) \\
\mathbf{v}_{\mathcal{B}^\star} &= (c_0^\star, c_1^\star, \ldots, c_{N-1}^\star) \\
\mathbf{v} &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot \mathbf{b}_k = \mathbf{c} \cdot \mathbf{B} \\
\mathbf{v} &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k^\star \mathbf{b}_k^\star = \mathbf{c}^\star \cdot \mathbf{B}^\star
\end{aligned}$$

Z rovnosti

$$\mathbf{v} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{c}^\star \cdot \mathbf{B}^\star \tag{1.4.1}$$

dostávame

$$\mathbf{c}^\star = \mathbf{c} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B}^\star)^{-\mathbf{1}} \tag{1.4.2}$$

Poznámka:
Pre stĺpcový vektor $\mathbf{v}$ a maticu $\mathbf{B}$ prislúchajúcu báze, tvorenú stĺpcovými vektormi

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \ldots & \mathbf{b}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{10} & \ldots & b_{N-1,0} \\ b_{01} & b_{11} & \ldots & b_{N-1,1} \\ \vdots & & & \\ b_{0N-1} & b_{1N-1} & \ldots & b_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

Vzťahy (1.3.1), (1.4.1) a (1.4.2) majú tvar

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c_0} \\ \mathbf{c_1} \\ \vdots \\ \mathbf{c_{N-1}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{b}_k = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{B}^\star \cdot \mathbf{c}^\star$$
$$\mathbf{c}^\star = (\mathbf{B}^\star)^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}$$

□

Súradnice procesu vzhľadom na bázu $\mathcal{E}$ nazývame **namerané hodnoty procesu**.
Súradnice procesu vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$ nazývame **spektrum procesu** vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$.

Príklad 1.4.1 *Nech vektor* $\mathbf{v}$ *má v báze*
$\mathcal{B} = (\mathbf{b}_0 = (-2,1,-5),\ \mathbf{b}_1 = (1,2,0),\ \mathbf{b}_2 = (-2,1,1))$ *koeficienty* $\mathbf{c} = (1,4,3)$.
Teda $\mathbf{v}_\mathcal{B} = (1,4,3)$.
Aké koeficienty bude mať vektor $\mathbf{v}$ *v báze*
$\mathcal{B}^\star = (\mathbf{b}_0^\star = (2,1,0),\ \mathbf{b}_1^\star = (1,1,0),\ \mathbf{b}_2^\star = (1,1,1))$*?*

Riešenie:

$$\mathbf{v}_\mathcal{B} = (c_0, c_1, c_2)$$
$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}^\star} = (c_0^\star, c_1^\star, c_2^\star)$$
$$\mathbf{v} = (c_0, c_1, c_2)\,\mathbf{B} = (c_0^\star, c_1^\star, c_2^\star)\,\mathbf{B}^\star$$
$$\mathbf{v} = (1,4,3)\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (c_0^\star, c_1^\star, c_2^\star)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(c_0^\star, c_1^\star, c_2^\star) = (1,4,3)\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$(c_0^\star, c_1^\star, c_2^\star) = (-4,12,-2)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-16,30,-2)$$

Skutočne
$$\mathbf{v}_\mathcal{B} = (1,4,3)$$
$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}^\star} = (-16,30,-2)$$

Lepšie však bude vypočítať najskôr súčin matíc $\mathbf{B}\ (\mathbf{B}^\star)^{-1}$, pretože matica

$$\mathbf{B}_{pr} = \mathbf{B}\ (\mathbf{B}^\star)^{-1}$$

je maticou prechodu od bázy $\mathcal{B}$ k báze $\mathcal{B}^\star$.

$$(c_0^\star, c_1^\star, c_2^\star) = (1,4,3)\begin{pmatrix} -3 & 9 & -5 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-16,30,-2)$$

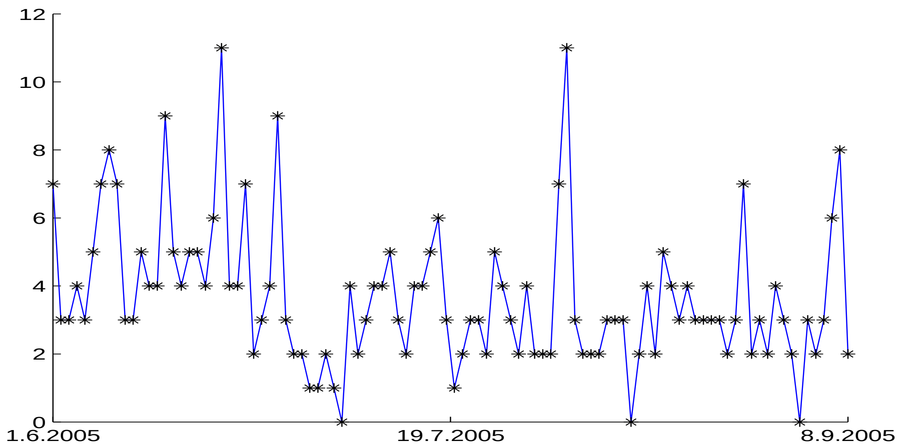
□

Úloha 1.4.1 *Bez výpočtu odhadnite súčin vektora* $(-16,30,-2)$ *a matice* $\mathbf{B}^\star$ *z príkladu* 1.4.1.

Príklad 1.4.2 *Zmena škály na súradnicových osiach grafu je vlastne jednoduchá zmena bázy. Napríklad vektor* $\mathbf{v}_{\mathcal{E}} = (8, 6)$ *v jednotkovej báze* $\mathcal{E}$ *má v báze* $\mathcal{B} = ((2, 0), (0, 2))$ *súradnice* $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (4, 3)$.

Úloha 1.4.2 *Zistite kde sa používa logaritmické škálovanie a vysvetlite prečo je výhodné ho použiť.*

Úloha 1.4.3 *Vyhľadajte na internete dáta, ktoré tvoria* 100 *hodnôt nejakého procesu v závislosti od času. Tieto dáta tvoria* 100*-zložkový vektor. Je to vektor* 100 *rozmerného vektorového priestoru. Vektor vykreslite a napíšte k nemu stručný popis, teda v akých časových intervaloch sa dáta merali a čo boli namerané hodnoty. Namerané hodnoty sú súradnice procesu vzhľadom na jednotkovú bázu* $\mathcal{E}$. *Zmeňte vektory bázy (napríklad desaťnásobne zväčšite ich dĺžku). Ako sa zmenia koeficienty procesu vzhľadom na túto bázu oproti pôvodným nameraným hodnotám?*



Obrázok 1.9: Počty koncertov ako proces

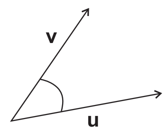
Príklad 1.4.3 100 *zložkový vektor môžu tvoriť napríklad počty koncertov , ktoré sa uskutočnili v Bratislave v dobe od* 1. *júna do* 8. *októbra* 2005*, čo je presne* 100 *dní.*

1.5 Skalárny súčin

Spomedzi vektorových priestorov sa v aplikáciách najčastejšie používajú vektorové priestory so skalárnym súčinom. V geometrii bol skalárny súčin definovaný ako skalár, ktorý vznikne ako výsledok binárnej operácie medzi dvoma vektormi. Predpis pre skalárny súčin dvoch vektorov v rovine je

$$\mathbf{v} \odot \mathbf{u} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \cos \varphi \tag{1.5.1}$$

kde φ je uhol, ktorý zvierajú vektory $\mathbf{v}, \mathbf{u}$.



Obrázok 1.10: Uhol vektorov **v** a **u**

Príklad 1.5.1 *Skalárny súčin vektorov* $\mathbf{v} = (1,1), \mathbf{u} = (2,0)$ *je*

$$(1,1) \odot (2,0) = |(1,1)| \cdot |(2,0)| \cdot \cos(45°) = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

Jednoduchší spôsob výpočtu je

$$(1,1) \odot (2,0) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 2$$

Úloha 1.5.1 *Zistite, prečo oba spôsoby výpočtu v príklade* 1.5.1 *dávajú rovnaký výsledok.*

Úloha 1.5.2 *Nakreslite v rovine aspoň tri rôzne dvojice vektorov, ktorých skalárny súčin je rovný nule.*

Vo vektorovom priestore $\mathbb{V}$ je teda možné okrem sčítania vektorov definovať ďalšiu operáciu nazývanú skalárny súčin. Zovšeobecnením geometrického skalárneho súčinu je skalárny súčin dvoch vektorov vo vektorovom priestore. Definujeme ho tak, aby v konkrétnom vektorovom priestore z príkladu 1.5.1 platil predpis 1.5.1. Zmena označenia skalárneho súčinu v tomto texte je zámerná, treba si uvedomiť, že nasledujúca definícia je zovšeobecnením pôvodného pojmu.
Skalárny súčin vo vektorovom priestore $\mathbb{V} = ((V,+),(F,+,\cdot))$ je zobrazenie $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to F$, pre ktoré platí:

$$\begin{array}{ll} \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \geq 0, \text{naviac } \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0 & \text{pozitívnosť} \\ \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle & \text{symetria} \\ \langle \mathbf{u}+\mathbf{h},\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{h},\mathbf{v}\rangle & \text{bilinearita} \\ \langle k\,\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = k\,\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle & \end{array} \tag{1.5.2}$$

Skalárny súčin nie je súčasťou definície vektorového priestoru. V našom kurze však budeme uvažovať iba priestory so skalárnym súčinom. Konečnorozmerný reálny vektorový priestor so skalárnym súčinom sa nazýva **Euklidov vektorový priestor**.

Úloha 1.5.3 *Dokážte, že súčin vektorov N-rozmerného Euklidovho vektorového priestoru* $\mathbb{V}$ *z príkladu* 1.1.1 *definovaný ako*

$$\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} v_k \cdot u_k$$

je naozaj skalárny súčin.

Vektory $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ nazveme navzájom **kolmé** (ortogonálne) práve vtedy, ak je ich skalárny súčin rovný 0.

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{u} \Leftrightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$$

Bázu vektorového priestoru nazveme **ortogonálnou bázou** práve vtedy, ak sú každé dva navzájom rôzne vektory bázy na seba kolmé:

$$\mathcal{B} = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{N-1}); \quad \langle \mathbf{b_i}, \mathbf{b_j} \rangle = 0 \quad \text{pre} \quad i \neq j$$

Príklad 1.5.2 *Báza*

- $\mathcal{B}_1 = ((1,1,0),(1,-1,0),(0,0,3))$ *je ortogonálna*

- $\mathcal{B}_2 = ((1,1,0),(1,-1,1),(0,3,3))$ *nie je ortogonálna*

Úloha 1.5.4 *Dokážte, že ortogonálny systém nenulových vektorov je lineárne nezávislý.*

Úloha 1.5.5 *Nájdite príklad použitia neortogonálnej bázy (napr. v deskriptívnej geometrii).*

1.6 Súradnice vektora v ortogonálnej báze

V odseku 1.4 sme riešili úlohu, ako vypočítať koeficienty v novej báze, ak poznáme koeficienty v pôvodnej. Ilustráciu takéhoto výpočtu koeficientov nájdeme aj v kapitole **??**. Nasledujúce tvrdenie dáva návod, ako koeficienty vypočítať s pomocou skalárneho súčinu. Teda riešime úlohu, ako z nameraných hodnôt procesu vypočítať koeficienty v ortogonálnej báze $\mathcal{B}$.

$$\mathbf{v}_{\mathcal{E}} = (v_0, v_1, \ldots, v_{N-1})$$
$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (c_0 =?, c_1 =?, \ldots, c_{N-1} =?)$$

Tvrdenie 1.6.1 *Nech je vo vektorovom priestore daná ortogonálna báza $\mathcal{B}$, potom koeficienty ľubovoľného vektora $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{N-1})_{\mathcal{E}}$ sa v báze $\mathcal{B}$ dajú vypočítať podľa vzorca*

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_i \rangle}{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle} \tag{1.6.1}$$

Dôkaz:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_i \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_i \right\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle c_k \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_i \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \langle \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_i \rangle = c_i \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle$$

odtiaľ

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_i \rangle}{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i \rangle}$$

□

Príklad 1.6.1 *Aké koeficienty má vektor $\mathbf{v}_{\mathcal{E}} = (1,4,2)$ v báze $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = ((-2,1,-5),(1,2,0),(-2,1,1))$?*

Riešenie:
Najskôr jednoduchým výpočtom overíme, že báza $\mathcal{B}$ je ortogonálna.
Skutočne, skalárny súčin každej dvojice vektorov bázy je 0.

$$\begin{array}{lcccccl} \langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1 \rangle & = & (-2,1,-5) & \odot & (1,2,0) & = 0 \\ \langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2 \rangle & = & (-2,1,-5) & \odot & (-2,1,1) & = 0 \\ \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle & = & (1,2,0) & \odot & (-2,1,1) & = 0 \end{array}$$

Báza je ortogonálna a preto môžeme použiť vzorec 1.6.1, podľa ktorého

$$c_0 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_0 \rangle}{\langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0 \rangle} = -\frac{8}{30}$$
$$c_1 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_1 \rangle}{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle} = \frac{9}{5}$$
$$c_2 = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \rangle}{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle} = \frac{4}{6}$$

Skutočne

$$c_0 \cdot \mathbf{b}_0 + c_1 \cdot \mathbf{b}_1 + c_2 \cdot \mathbf{b}_2 = -\frac{8}{30} \cdot (-2,1,-5) + \frac{9}{5} \cdot (1,2,0) + \frac{4}{6} \cdot (-2,1,1) = (1,4,2)$$

□

Úloha 1.6.1 *Je možné vypočítať koeficienty vektora pomocou skalárneho súčinu (ako v príklade 1.6.1) aj v prípade, že báza nie je ortogonálna?*

Úloha 1.6.2 *Navhrnite spôsob ako pomocou skalárneho súčinu vektor*

$$\mathbf{v} = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})_{\mathcal{B}}$$

s koeficientami v ortogonálnej báze $\mathcal{B}$ vyjadriť ako vektor

$$\mathbf{v} = (c_0^\star, c_1^\star, \ldots, c_{N-1}^\star)_{\mathcal{B}^\star}$$

v inej ortogonálnej báze $\mathcal{B}^\star$.

1.7 Norma vektora

Teraz už môžeme presne zaviesť pojem veľkosť vektora, ktorý sme zatiaľ zaviedli len intuitívne v geometrickom modeli. Vo vektorovom priestore so skalárnym súčinom môže byť **veľkosť (norma)** vektora definovaná nasledovne:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

Poznámka:
V Euklidovom vektorovom priestore môže byť skalárny súčin definovaný ako $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} v_k \cdot u_k$. Norma odvodená od tohoto skalárneho súčinu má tvar

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} v_k^2}$$

Vo vektorovom priestore môžu byť vzdialenosti definované ai iným spôsobom. Rovnako normy nemusia byť odvodené od skalárneho súčinu.

Príklad 1.7.1 *Aká je norma (veľkosť) vektora* $\mathbf{u} = (1, 4, 5, 2, 9, 3, 2)$*?*
Po dosadení do vzorca dostaneme

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} v_k^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 5^2 + 2^2 + 9^2 + 3^2 + 2^2} = 11.83$$

Úloha 1.7.1 *Zistite, čo znamená slovo ortonormálny. Nájdite dva ortonormálne vektory.*

Nasledujúca veta je tvrdenie známe z geometrie, ktorého platnosť je možné dokázať aj vo všeobecnom vektorovom priestore. Stačí ak je v tomto priestore definovaný skalárny súčin.

Tvrdenie 1.7.1 (Pytagorova veta) *Vo vektorovom priestore so skalárnym súčinom, pre každé dva ortogonálne vektory* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{u}$ *platí:*

$$\Rightarrow ||\mathbf{v} + \mathbf{u}||^2 = ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{u}||^{\mathbf{2}}$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{v} + \mathbf{u}||^2 &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 0 + 0 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{u}||^2 \end{aligned}$$

Úloha 1.7.2 *Dokážte, že Pytagorova veta platí aj pre rozdiel kolmých vektorov. Vo vektorovom priestore so skalárnym súčinom, pre každé dva ortogonálne vektory* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{u}$ *platí:*

$$||\mathbf{v} - \mathbf{u}||^2 = ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{u}||^{\mathbf{2}}$$

Úloha 1.7.3 *Platí aj nasledujúce tvrdenie?*

Vo vektorovom priestore so skalárnym súčinom, pre každé dva ortogonálne vektory $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{u}$ *platí:*

$$||\mathbf{v} + \mathbf{u}||^2 = ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||^2$$

O aké geometrické tvrdenie sa jedná?

Vo vektorovom priestore so skalárnym súčinom môžeme definovať **vzdialenosť** dvoch vektorov ako veľkosť rozdielového vektora.

$$\mathrm{d}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = ||\mathbf{v} - \mathbf{u}|| \tag{1.7.1}$$

Tvrdenie 1.7.2 (Vlastnosti metriky) *Dá sa ukázať, že* vzdialenosť (metrika) *definovaná vzťahom* (1.7.1) *má nasledujúce vlastnosti:*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{d}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \geq 0, \text{ pričom } \mathrm{d}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u} & \text{pozitívnosť} \\ \mathrm{d}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \text{symetria} \\ \mathrm{d}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \leq \mathrm{d}(\mathbf{v}, \mathbf{h}) + \mathrm{d}(\mathbf{h}, \mathbf{u}) & \text{trojuholníková nerovnosť} \end{array} \tag{1.7.2}$$

Existujú metriky, ktoré nie sú odvodené od skalárneho súčinu. Na to, aby bola binárna operácia (definovaná na dvojiciach vektorov, taká, že jej výsledkom je kladné reálne číslo) **metrika**, stačí aby spĺňala vlastnosti (1.7.2).

Špeciálna metrika, odvodená od skalárneho súčinu $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} v_k \cdot u_k$, ktorá má tvar

$$\mathrm{d}\left(\mathbf{v}, \mathbf{u}\right) = ||\mathbf{v} - \mathbf{u}|| = \sqrt{\langle \mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} (v_k - u_k)^2} \tag{1.7.3}$$

sa nazýva **Euklidova metrika**.

Príklad 1.7.2 *V zmysle Euklidovej metriky* (1.7.3) *sa problém z úlohy* 1.1.5 *môže riešiť ako hľadanie vektora s menšou vzdialenosťou.*

Riešenie:
Ktorý z vektorov $\mathbf{u} = (1, 4, 5, 2, 9, 3, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 2, 1, 3, 5, 2, 3)$ je bližšie k vektoru $\mathbf{a} = (3, 5, 2, 1, 4, 4, 3)$?
K vektoru $\mathbf{a}$ je bližšie vektor $\mathbf{v}$, pretože

$$||\mathbf{a} - \mathbf{v}|| = 4.47 < ||\mathbf{a} - \mathbf{u}|| = 6.48$$

□

Euklidova metrika sa používa napríklad pri rozpoznávaní reči. Jednotlivým hláskam sú priradené vektory. Ak sa nameraný zvuk nelíši svojimi hodnotami od vektora niektorej hlásky viac ako je vopred daná, empiricky zistená tolerancia, tak ho môžeme považovať za túto hlásku.

Metrika, ktorá nie je odvodená od skalárneho súčinu je napríklad Hammingova metrika. Používa sa pri kódovaní pomocou vektorov zložených z 0 a 1, kde sa meranie pomocou Euklidovej metriky ukázalo ako nevhodné. **Hammingova vzdialenosť** je počet jednotiek v súčte kódových slov modulo dva:

$$1011101010 + 0011001001 = 1000100011$$

Hammingova metrika sa používa napríklad pri samoopravných kódoch.

Úloha 1.7.4 *Dokážte, že Hammingova vzdialenosť je skutočne metrika.*

Úloha 1.7.5 *Zistite ako je definovaná Mahalanobisova metrika a kde sa používa.*