Centrá a mediány

Stanislav Palúch

Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita

10. mája 2011

Strediská obsluhy v dopravných sieťach

Problém určenia niektorých vrcholov v cestnej resp.dopravnej sieti, ktoré budú slúžiť ako strediská obsluhy.

Dve základné funkcie obslužných centier

1. Zásobovacia – tu voláme centrá **depá**
2. Záchranná – tu voláme centrá **havarijné strediská**

Pri zásobovacích centrách ide o minimalizáciu dopravných nákladov na obsluhu príslušného územia.

Pri havarijných strediskách ide o minimalizáciu vzdialenosti najhoršie položeného vrchola k svojmu stredisku.

Model dopravnej siete je hranovo i vrcholovo ohodnotený graf
$G = (V, H, c, w)$, kde
$c : H \to \mathbb{R}$ je ohodnotenie hrán vyjadrujúce dĺžku hrany,
$w : V \to \mathbb{R}$ je ohodnotenie vrcholov vyjadrujúce náročnosť vrchola na obsluhu.

Vážený p-medián

Označme $D \subseteq V$ množinu diep (napr. uhoľných skladov, skladov štrkopieskov, centrálnych skladov nábytku atď.)
Nech $w(v)$ je počet jázd potrebných na obsluhu vrchola v za plánované obdobie.
Vrchol v budeme obsluhovať z najbližšieho depa – náklady na jeho obsluhu budú úmerné $w(v).d(v, D)$.
Náklady na obsluhu všetkých vrcholov budú úmerné

$$f(D) = \sum_{v \in V} w(v).d(v, D) \ .$$

Veličina $f(D)$ určuje kvalitu množiny havarijných stredísk D z hľadiska dopravných nákladov.

Definícia

Nech $G = (V, H, c, w)$ je súvislý hranovo a vrcholovo ohodnotený graf, $D \subseteq V$.
Súhrnná vážená vzdialenosť $f(D)$ **všetkých vrcholov grafu** G **od množiny** D *je definovaná nasledovne:*

$$f(D) = \sum_{v \in V} w(v).d(v, D) \ . \tag{2}$$

Vážený p-medián

Definícia

Nech $1 \leq p < |V|$, D_p *p-prvková podmnožina množiny* V. *Hovoríme, že* D_p *je* **vážený** p-**medián** *grafu* G, *ak pre ľubovoľnú p-prvkovú podmnožinu* D'_p *množiny* V *platí*

$$f(D_p) \leq f(D'_p),$$

t.j. ak súhrnná vážená vzdialenosť všetkých vrcholov grafu G *od* D_p *je najmenšia medzi všetkými p-prvkovými podmnožinami množiny* V.
Špeciálne ak $w(v) = 1$ *pre všetky* $v \in V$, *hovoríme, že* D_p *je* p-**medián**.

Vážená excentricita množiny

Definícia

Nech $G = (V, H, c, w)$ *je súvislý hranovo a vrcholovo ohodnotený graf,* $D \subseteq V$.
Vážená excentricita ecc(D) **množiny** D *je definovaná nasledovne:*

$$ecc(D) = \max\{w(v).d(v, D) \mid v \in V\}.$$

Vážená excentricita množiny D je vážená vzdialenosť najhoršie položeného vrchola od množiny D.

Vyjadruje kvalitu množiny havarijných stredísk D z hľadiska kvality obsluhy najhoršie položeného vrchola vzhľadom na D.

Vážené p-centrum

Definícia

Nech $1 \leq p < |V|$, D_p *p-prvková podmnožina množiny* V.

Hovoríme, že D_p *je* **vážené** p-**centrum** *grafu* G, *ak pre ľubovoľnú p-prvkovú podmnožinu* D'_p *množiny* V *platí*

$$ecc(D_p) \leq ecc(D'_p),$$

t. j. ak množina D_p *má najmenšiu váženú excentricitu zo všetkých p-prvkových podmnožín množiny* V.

Špeciálne ak $w(v) = 1$ *pre všetky* $v \in V$, *hovoríme, že* D_p *je* p-**centrum**.

Algoritmus

Heuristický algoritmus na hľadanie váženého p-mediánu v súvislom hranovo a vrcholovo ohodnotenom grafe $G = (V, H, c, w)$.

- **Krok 1.** *Náhodne vyber p-prvkovú podmnožinu množiny V.* *Nech $D_p = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $V - D_p = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$,* *kde $q = |V| - p$.*
- **Krok 2.** *Hľadaj také i, j, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$,* *že pre $D'_p(i,j) = (D_p \cup \{u_j\}) - \{v_i\}$ je $f(D'_p) < f(D_p)$.*
- **Krok 3.** *Ak taká dvojica indexov i, j neexistuje, STOP.* *Inak polož $D_p := D'_p(i,j)$ a GOTO Krok 2.*

♣

Poznámka

Zámenou podmienky $f(D'_p) < f(D_p)$ za $ecc(D'_p) < ecc(D_p)$ dostaneme suboptimálny algoritmus pre hľadanie váženého p-centra grafu G.

Definícia

Nech je daný súvislý hranovo a vrcholovo ohodnotený graf $G = (V, H, c, w)$ *a p-prvková množina diep* D_p.

Atrakčný obvod $A(v)$ *depa* $v \in D_p$ *je množina všetkých takých vrcholov grafu* G*, ktorých vzdialenosť od depa* v *je menšia alebo rovná ako vzdialenosť od iných diep, t.j.*

$$A(v) = \{x |\ x \in V,\ \forall u \in D_p\ d(v, x) \leq d(u, x)\}$$

Prvotný atrakčný obvod $A'(v)$ *depa* $v \in D_p$ *je množina všetkých takých vrcholov grafu* G*, ktorých vzdialenosť od depa* v *je menšia ako vzdialenosť od iných diep, t.j.*

$$A'(v) = \{x |\ x \in V,\ \forall u \in D_p,\ u \neq v\ d(v, x) < d(u, x)\}$$

Systém pridelených atrakčných obvodov *je systém podmnožín* $A^v(v), v \in D_p$ *vrcholovej množiny* V *takých že*

1. $A'(v) \subseteq A^v(v) \quad \forall v \in D_p$
2. $A^v(v) \subseteq A(v) \quad \forall v \in D_p$
3. $A^v(u) \cap A^v(v) = \varnothing \quad \forall u, v \in D_p,\ u \neq v$
4. $\displaystyle\bigcup_{v \in D_p} A^v(v) = V$