4 Binárne relácie

S binárnymi reláciami sa stretávame od prvých ročníkov základnej školy. Napríklad s reláciami na prirodzených číslach, ktoré sú vyjadrené znakmi $=$, $<$, $>$.

Definícia. Nech $A \times B$ je karteziánsky súčin dvoch neprázdnych množín. Každá podmnožina $R \subseteq A \times B$ tohto karteziánskeho súčinu je binárna relácia z A do B. Ak $A = B$ (čiže $R \subseteq A \times A$), tak hovoríme o binárnej relácii na množine A.

Binárna relácia teda vyjadruje, či je medzi dvomi prvkami x, y nejaký vopred špecifikovaný vzťah (vtedy platí, že usporiadaná dvojica $(x, y) \in R$), alebo nie je (vtedy platí $(x, y) \notin R$). Miesto značenia $(x, y) \in R$ dávame často prednosť značeniu xRy a hovoríme, že x je v relácii R s y. Napríklad používame zápis $x < y$ a nie $(x, y) \in <$.

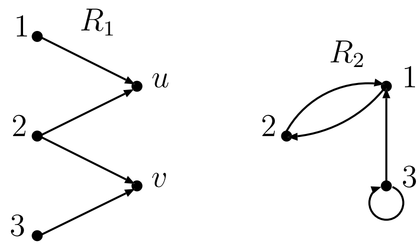
Uveďme niekoľko príkladov.

Príklad. Nech $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{u, v\}$. Príklady relácií z A do B, respektíve na množine A sú $R_1 \subseteq A \times B$ a $R_2 \subseteq A \times A$, kde $R_1 = \{(1, u), (2, u), (2, v), (3, v)\}$ a $R_2 = \{(2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3)\}$.

Príklad. Nech S je množina všetkých študentov fakulty XYZ a P množina všetkých predmetov, ktoré možno navštevovať na danej fakulte. Potom $S \times P$ je množina obsahujúca všetky usporiadané dvojice v tvare (študent,predmet). Definujme binárnu reláciu $R_{navst} \subseteq S \times P$ nasledovne: x je v relácii R_{navst} s y (čiže $(x, y) \in R_{navst}$), ak študent $x \in S$ navštevoval predmet $y \in P$.

Príklad. Nech F je množina všetkých ľudí s kontom na facebooku. Definujme reláciu $R_p \subseteq F \times F$ nasledovne: osoba x je v relácii R_p s osobou y, ak x je v zozname priateľov y. Značíme to xR_py. Nie je ťažké si uvedomiť, že pre túto reláciu špeciálne platí: ak xR_py, potom aj yR_px.

Niekedy je výhodné binárne relácie z A do B (na množine A) reprezentovať pomocou šípkových diagramov. Prvky množín A, B značíme, ako body v rovine a relačný vzťah xRy značíme šípkou z bodu x do bodu y. Na obrázku 1 máme diagramy relácií R_1 a R_2 z prvého príkladu.



Obrázok 1: Relácie z A do B a na množine A.

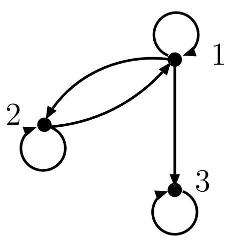
Vlastnosti binárnych relácií na množine

Pozrime sa teraz lepšie na vlastnosti binárnych relácií na množine. Nech je daná množina $A \neq \emptyset$.
1) Hovoríme, že relácia $R \subseteq A \times A$ je **reflexívna** ak pre

$$\forall x \in A \;\; xRx \; .$$

Čiže **každý prvok** množiny A je v relácii sám so sebou. Napríklad relácia $\leq$ na množine reálnych čísel (ale aj prirodzených čísel, celých čísel a ďalších množinách) je takouto reláciou. Na obrázku 2 máme ďalší príklad reflexívnej relácie na množine $A = \{1, 2, 3\}$. Pri reflexívnej relácii musí byť slučka (šípka začínajúca aj končiaca v tom istom prvku) pri každom prvku tejto množiny. Ak **existuje aspoň jeden** prvok, ktorý nie je v relácii sám so sebou, tak relácia nie je reflexívna.

2) Hovoríme, že relácia $R \subseteq A \times A$ je **symetrická**, ak pre $\forall x, y \in A$ je



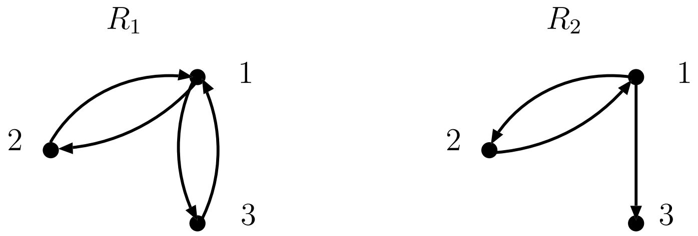
Obrázok 2: Reflexívna relácia.

nasledujúci výrok pravdivý:

$$xRy \Rightarrow yRx \; .$$

Uvedený výrok je implikácia, takže je nepravdivý len v prípade, ak x je v reácii R s y (je splnený predpoklad), ale y nie je v relácii R s x. Ak nájdeme aspoň jednu dvojicu prvkov $x, y \in A$, pre ktorú výrok nie je pravdivý, tak relácia nie je symetrická. Príkladom symetrickej relácie je relácia "byť priateľom" na facebooku. Na obrázku 3 máme príklad symetrickej relácie R_1 a relácie R_2, ktorá nie je symetrická (pretože 1 je v relácii s 3, ale naopak to neplatí). Pri grafickej reprezentácii symetrickej relácie musí platiť, že medzi každou dvojicou prvkov existuje buď dvojica protisebe idúcich šípok, alebo žiadna šípka. Ak nájdeme takú dvojicu rôznych prvkov, medzi ktorými je len jedna šípka (na obrázku 3 dvojica $1, 3$ pre R_2), tak relácia nie je symetrická.

3) Hovoríme, že relácia $R \subseteq A \times A$ je **asymetrická**, ak pre $\forall x, y \in A$ je

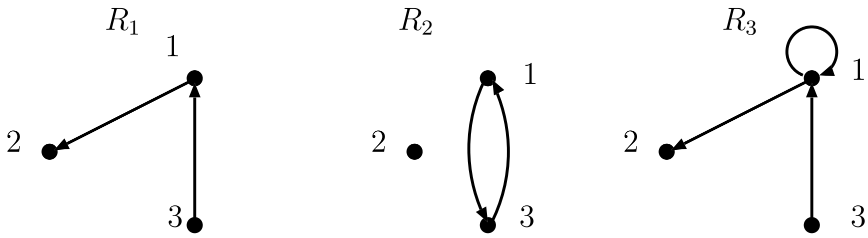


Obrázok 3: Symetrická relácia R_1 a relácia R_2, ktorá nie je symetrická.

nasledujúci výrok pravdivý:

$$xRy \Rightarrow \neg(yRx) \ .$$

Tento výrok je opäť implikáciou a nie je pravdivý len v prípade, ak x je v relácii s y, a zároveň y je tiež v relácii s x. Príkladom asymetrickej relácie je relácia $<$ na množine reálnych čísel. Na obrázku 4 máme príklad asymetrickej



Obrázok 4: Asymetrická relácia R_1 a relácie R_2, R_3, ktoré nie sú asymetrické.

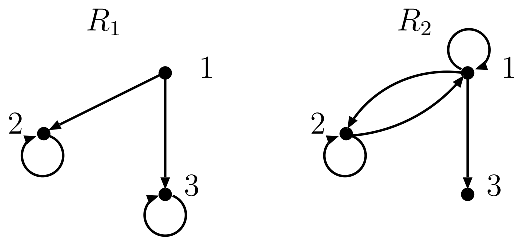
relácie R_1 a relácií R_2, R_3, ktoré nie sú asymetrické. V asymetrickej relácii nemôže existovať dvojica protisebe idúcich šípok, ani slučka pri žiadnom prvku. Medzi každou dvojicou rôznych prvkov môže byť **najviac jedna** šípka.

4) Hovoríme, že relácia $R \subseteq A \times A$ je **antisymetrická**, ak pre $\forall x, y \in A$ je nasledujúci výrok pravdivý:

$$(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y \ .$$

Opäť sa jedná o implikáciu. Čiže ten výrok nie je pravdivý, ak je x v relácii s y, aj y s x a x, y sú navzájom rôzne prvky množiny A. Typickým príkladom antisymetrickej relácie je relácia $\leq$ (ak $x \leq y$ a zároveň $y \leq x$, tak $x = y$). Na obrázku 5 máme antisymetrickú reláciu R_1 a reláciu R_2, ktorá nie je antisymetrická. Vidíme, že antisymetrickosť je zoslabením asymetrickosti. Opäť máme zakázané dvojice protisebe idúcich šípok medzi rôznymi prvkami, ale v tomto prípade sú slučky dovolené.

5) Hovoríme, že relácia $R \subseteq A \times A$ je **tranzitívna**, ak pre $\forall x, y, z \in A$ je

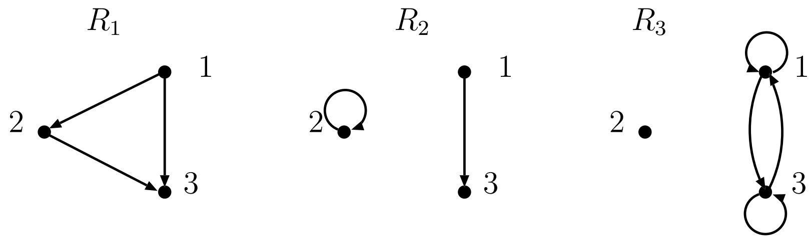


Obrázok 5: Antisymetrická relácia R_1 a R_2, ktorá nie je antisymetrická.

nasledujúci výrok pravdivý:

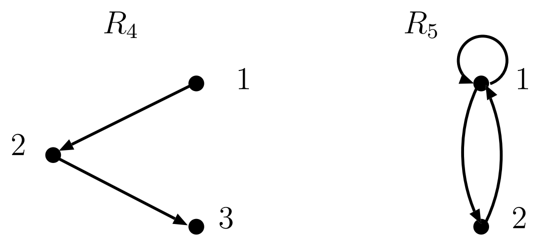
$$xRy \land yRz \Rightarrow xRz \ .$$

Príkladom tranzitívnych relácií sú $<$, $\leq$ na množine reálnych čísel (ak $x \leq y$



Obrázok 6: Tranzitívne relácie R_1, R_2, R_3.

a zároveň $y \leq z$, tak $x \leq z$). Keďže spomínaný výrok je opäť implikácia, relácia nebude tranzitívna, ak existuje aspoň jedna trojica prvkov $x, y, z \in A$ taká, že xRy a zároveň yRz, ale x nie je v relácii s prvkom z. Na obrázku 6 máme príklady tranzitívnych relácií R_1, R_2, R_3 na množine $A = \{1, 2, 3\}$. V prípade R_2 si musíme uvedomiť, že predpoklad ($xR_2y \land yR_2z$) implikácie z definície nie je pre túto reláciu nikdy splnený, preto je táto implikácia pre R_2 vždy pravdivá. Na obrázku 7 máme príklady relácií R_4, R_5, ktoré nie sú tranzitívne. V druhom prípade máme $2R_51$ a zároveň $1R_52$, ale 2 nie je v relácii R_5 s 2.



Obrázok 7: Relácie, ktoré nie sú tranzitívne.

Relácia ekvivalencie

Relácia $R \subseteq A \times A$ je reláciou ekvivalencie, ak je reflexívna, symetrická, tranzitívna.

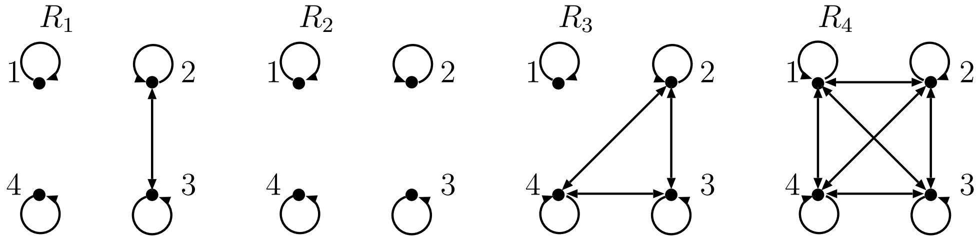
Príklad. Na množine prirodzených čísel N definujme nasledovnú reláciu: číslo $a \in N$ bude v relácii s číslom $b \in N$ práve vtedy, keď tieto čísla dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 3. Zapisujeme to

$$a \equiv b \ (mod\ 3)$$

(matematici tento zápis čítajú: "a je kongruentné s b modulo 3 "). Ukážeme, že táto relácia je reláciou ekvivalencie.
i) Aby bola relácia reflexívna, pre $\forall x \in N$ má platiť $x \equiv x \ (mod\ 3)$. Čiže x a x majú dávať rovnaký zvyšok po delení číslom 3, čo určite platí.
ii) Ako sme hovorili, ak $x \equiv y \ (mod\ 3)$, číslo x dáva rovnaký zvyšok po delení číslom 3 ako y. Potom to môžeme otočiť a povedať, že y dáva rovnaký zvyšok po delení trojkou ako x. Takže platí aj $y \equiv x \ (mod\ 3)$ a táto relácia je symetrická.
iii) Ak pre nejaké $x, y, z \in N$ platí $x \equiv y \ (mod\ 3)$ a zároveň $y \equiv z \ (mod\ 3)$, tak čísla x, y, z dávajú rovnaký zvyšok po delení trojkou, preto môžeme písať aj $x \equiv z \ (mod\ 3)$, takže sa jedná o tranzitívnu reláciu.
Ako vidieť, táto relácia je reláciou ekvivalencie.

Uveďme ešte príklady relácií ekvivalencie na konečnej množine.

Príklad. Nech je daná množina $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Na obrázku 8 máme príklady štyroch relácií ekvivalencie definovaných na tejto množine. (Dvojice protisebe idúcich šípok sme nahradili kvôli prehľadnosti jednou obojstrannou.)



Obrázok 8: Relácie ekvivalencie.

Relácia čiastočného usporiadania

Relácia $R \subseteq A \times A$ je čiastočným usporiadaním, ak je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna. Relácia $\leq$ je príkladom takejto relácie. Uveďme ešte jeden príklad relácie čiastočného usporiadania.

Príklad. Ukážeme, že relácia "delí", definovaná na množine prirodzených čísel je reláciou čiastočného usporiadania. Pre túto reláciu používame značenie $a \mid b$. Čítame to a delí b (myslí sa tým, že a je deliteľom b, nie a delené b, ako býva častou chybou). Vieme, že prirodzené číslo a je deliteľom prirodzeného čísla b práve vtedy, keď existuje prirodzené číslo x také, že $b = x{\cdot}a$. Tento jednoduchý fakt nám pomôže pri dokazovaní, že naša relácia je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.
i) Pre ľubovoľné $a \in N$ platí, že a je deliteľom samého seba (čiže $a \mid a$), takže táto relácia je reflexívna.
ii) Nech pre prirodzené čísla a, b platí: $a \mid b$ a zároveň $b \mid a$. Potom existujú $x, y \in N$ také, že $b = x{\cdot}a$ a zároveň $a = y{\cdot}b$. Po dosadení druhej rovnosti do prvej dostávame $b = x{\cdot}y{\cdot}b$, čiže $1 = x{\cdot}y$, čo pre $x, y \in N$ platí len v prípade, ak $x = y = 1$. To znamená, že $a = b$. Pre ľubovoľné $a, b \in N$ je teda výrok:

$$\text{ak } (a \mid b \text{ a zároveň } b \mid a), \text{ potom } a = b$$

pravdivý a relácia je antisymetrická.
iii) Nech pre prirodzené čísla a, b, c platí: $a \mid b$ a zároveň $b \mid c$. Potom existujú $x, y \in N$ také, že $b = x{\cdot}a$ a zároveň $c = y{\cdot}b$. Po dosadení prvej rovnosti do druhej dostávame $c = y{\cdot}x{\cdot}a$, čiže existuje prirodzené číslo $z = y{\cdot}x$, pre ktoré platí $c = z{\cdot}a$. Potom platí $a \mid c$ a relácia je tranzitívna.