**8. prednáška**

## Odhady parametrov

Problémy štatistickej indukcie sa tradične delia na problémy *odhadovania* a *testy štatistických hypotéz.*
**Odhady parametrov** – úlohou je na základe náhodného výbeu čo najlepšie odhadnúť neznámy parameter $\theta$ rozdelenia, z ktorého náhodný výber pochádza. To môžeme urobiť dvomi spôsobmi:

1. Vypočítať hodnotu výberovej štatistiky a tú považovať za odhad parametra. Takýto odhad nazývame *bodový.*
2. Určiť nielen jeden najlepší odhad, ale na základe náhodného výberu skonštruovať taký interval, ktorý s vopred danou pravdepodobnosťou obsahuje neznámy parameter. Vtedy hovoríme o *intervalovom odhade.*

## Bodové odhady parametrov

Uvažujme, že máme k dispozícii náhodný výber $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Vieme, z akého rozdelenia pochádza, ale nepoznáme parametre tohto rozdelenia. Neznámy parameter označme $\theta$ a jeho odhad $\widehat{\theta}$.
Základnou otázkou teórie odhadu je nájsť takú štatistiku $T_n = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ktorá by bola dobrým odhadom parametra $\theta$. Uvedieme dve metódy: *metódu momentov* a *matódu maximálnej vierohodnosti.*

**Metóda momentov** – je jedna z najstarších metód. Používa sa tam, kde iné metódy sú numericky náročné.
Predpokladajme, že základný súbor so známym rozdelením pravdepodobnosti závisí od parametrov $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ a predpokladajme, že existujú teoretické počiatočné momenty k–teho rádu $\nu_k = E(X^k)$. Odhady $\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}, \ldots, \widehat{\theta_r}$, získame z rovníc:

$$\nu_k = v_k$$

teda

$$E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

pre $k = 1, 2, \ldots, r$.
Ak by $r$ rovníc nestačilo, pridáme ďalšie, až získame potrebný počet rovníc s jednoznačným riešením.
PRÍKLAD:

**Metóda maximálnej vierohodnosti**
Nech $X_1, X_2, \dots, X_n$ je náhodný výber s rozdelením daným pravdepodobnostnou funkciou $p(x, \theta)$, resp. hustotou rozdelenia pravdepodobnosti $f(x, \theta)$.
**Vierohodnostnou funkciou** nazývame funkciu:

$$L(x_1, x_2, \dots .x_n; \theta) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) \\ \prod\limits_{i=1}^{n} p(x_i; \theta) \end{cases}$$

resp.

$$L(x_1, x_2, \dots .x_n; \theta) = \begin{cases} f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta) \\ \\ p(x_1; \theta) p(x_2; \theta) \dots p(x_n; \theta) \end{cases}$$

**Maximálne vierohodným odhadom** parametra $\theta$ nazývame taký bod $\widehat{\theta}$, v ktorom vierohodnostná funkcia nadobúda maximum.

Postup pri zostrojení maximálne vierohodného odhadu parametra:

1. Zostrojíme vierohodnostnú funkciu $L(x_1, x_2, \dots .x_n; \theta)$.
2. Nájdeme $\ln L(x_1, x_2, \dots .x_n; \theta)$.
3. Maximálne vierohodný odhad parametra $\theta$ získame riešením rovnice

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots .x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Ak je rozdelenie základného súboru závislé od viacerých parametrov $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$, tak za maximálne vierohodné odhady prijmeme tie $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \dots, \widehat{\theta}_r$, ktoré dostávame riešením rovníc

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_i} = 0,$$

pre $i = 1, 2, \dots, r$.

Metóda maximálnej vierohodnosti dáva vo všeobecnosti lepšie odhady ako metóda momentov. Čo je lepší odhad, je vecou dohody. Uvedieme niekoľko vlastností, ktoré by mal spĺňať dobrý odhad. Budeme sa riadiť predovšetkým požiadavkou, aby hodnoty odhadu boli blízke reálnej hodnote odhadovaného parametra.

Vlastnosti odhadu:

1. **Neskreslenosť (nevychýlenosť)** – budeme hovoriť, že štatistika $T_n$ je *neskreslený* (*nevychýlený*) odhadom parametra $\theta$, ak $E(T_n) = \theta$.

   Táto vlastnosť ešte neposkytuje záruku dobrého odhadu, ale zabezpečuje, že nerobíme systematickú chybu.

   Odhad budeme nazývať *asymptoticky neskreslený(nevychýlený)*, ak platí: $\lim\limits_{n\to\infty} E(T_n) = \theta$.

2. **Konzistentnosť** – budeme hovoriť, že $T_n$ je *konzistentným odhadom* parametra $\theta$, ak plati: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\mid T_n - \theta \mid < \epsilon\right) = 1$ pre ľubovoľné $\epsilon > 0$.

   Táto vlastnosť zaručuje veľkú pravdepodobnosť malej chyby.

   Bez dôkazu uvedieme tvrdenie, ktoré je použiteľnejšie na zistenie konzistentnosti odhadu ako samotná definícia:

   Nech $T_n$ je odhad parametra $\theta$, pre ktorý platí: $\lim\limits_{n\to\infty} E(T_n) = \theta$ a $\lim\limits_{n\to\infty} D(T_n) = 0$. Potom $T_n$ je *konzistentný odhad* parametra $\theta$.

3. **Efektívnosť (výdatnosť)** – budeme hovoriť, že nevychýlený bodový odhad $T_n$ neznámeho parametra $\theta$ je *efektívny*, ak má zo všetkých nevychýlených bodových odhadov najmenší rozptyl.

Poznámka:
Keď uvažujeme vychýlené i nevychýlené bodové odhadu parametra $\theta$, potom kritériom výdatnosti bodového odhadu je **stredná kvadratická chyba** definovaná takto: $E\left[(T_n - \theta)^2\right]$.
*Stredná kvadratická chyba* bodového odhadu $T_n$ vyjadruje očakávanú mieru kolísania hodnôt odhadu okolo hodnoty parametra $\theta$. Platí

$$E\left[(T_n - \theta)^2\right] = D(T_n) + \left(E(T_n) - \theta\right)^2,$$

t.j. stredná kvadratická chyba bodového odhadu je súčtom jeho rozptylu a štvorca vychýlenia.

**Intervalové odhady parametrov**

Pri odhade neznámeho parametra rozdelenia základného súboru pomocou bodových odhadov odhadneme parameter jedným číslom. Pri intervalovom odhade odhadujeme reálny parameter intervalom tak, aby sme s určitým stupňom dôvery mohli tvrdiť, že skutočná hodnota neznámeho parametra leží v tomto intervale.
Našou úlohou bude na základe náhodného výberu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nájsť taký interval, ktorý bude obsahovať neznámy parameter $\theta$ s pravdepodobnosťou $1-\alpha$. Pravdepodobnosť $1-\alpha$ nazývame **spoľahlivosť intervalu** a nájdený interval nazývame **interval spoľahlivosti**.
*Ako chápať koeficient* $1-\alpha$*?*
Pri mnohonásobnom konštruovaní intevalu spoľahlivosti pre daný parameter $\theta$ vždy na základe iného náhodného výberu, ale s konštantným rozsahom $n$, relatívna početnosť prípadov, keď interval spoľahlivosti bude obsahovať neznámy parameter, sa bude približovať k hodnote $1-\alpha$.
Spoľahlivosť $1-\alpha$ požadujeme blízku 1. Je zrejmé, že čím vyššiu spoľahlivosť požadujeme, tým širší interval spoľahlivosti získame. Rastúca šírka intervalu zhoršuje vypovedaciu schopnosť odhadu. Požiadavka na spoľahlivosť odhadu býva v praxi často určená vopred ako kompromis medzi spoľahlivosťou *1-*$\alpha$ a rizikom $\alpha$. V technickej praxi sa spoľahlivosť najčastejšie volí $0,95$ a riziko (hladina významnosti) $0,05$. Ak chceme intervalový odhad spresniť (zúžiť interval spoľahlivosti), je vhodné zaistiť väčší rozsah náhodného výberu. S rastúcim $n$ sa šírka intervalových odhadov zmenšuje úmerne $\sqrt{n}$. Intervaly spoľahlivosti konštruujeme ako *obojstranné* alebo *jednostranné*.

Všeobecný postup konštrukcie intevalov spoľahlivosti zhrnnieme do nasledovných krokov:

1. Skonštruujeme vhodný bodový odhad $T_n$ parametra $\theta$.

2. Nájdeme funkciu $t(T_n, \theta)$ odhadu $T_n$, ktorá závisí od parametra $\theta$, so známym rozdelením pravdepodobnosti nezávislým od parametra.

3. Nájdeme $t_1$ a $t_2$ tak, aby platilo:

$$P\left(t_1 < t(T_n, \theta) < t_2\right) = 1-\alpha,$$

   kde $t_1, t_2$ sú *kritické hodnoty* rozdelenia funkcie $t(T_n, \theta)$.

4. Matematickými úpravami vzťah $P\left(t_1 < t(T_n, \theta) < t_2\right) = 1-\alpha$ upravíme na tvar:
   $P(T_D < \theta < T_H) = 1-\alpha$ v prípade obojstranného intervalu spoľahlivosti,
   $P(\theta < T_H) = 1-\alpha$ v prípade pravostranného intervalu spoľahlivosti,
   $P(T_D < \theta) = 1-\alpha$ v prípade ľavostranného intervalu spoľahlivosti,
   kde $T_D = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ aj $T_H = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Spôsob konštrukcie štatistík $T_D$, $T_H$ závisí na tvare rozdelenia základného súboru. Ukážeme si len najpoužívanejšie intervalové odhady – budeme hľadaťintervaly spoľahlivosti pre parametre normálneho rozdelenia.