3 Kombinatorický dôkaz. Vytvárajúce funkcie.

3.1 Kombinatorický dôkaz

Príklad 3.1 *Do súťažného tímu máme vybrať k ľudí z n. Všetkých možností je $\binom{n}{k}$. Máme ale informáciu o problematickom Hugovi, ktorý síce všetko vyhráva, ale mimo súťaž je nezvládnuteľný.*

- Ak by sme Huga vybrali, potom možností, ako zostaviť tým je $\binom{n-1}{k-1}$.

- Ak by sme Huga nevybrali, možností je $\binom{n-1}{k}$.

Počet tímov s Hugom a bez Huga predstavuje počet všetkých možností, preto platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Príklad 3.2 *Balíček kariet obsahuje n červených a $2n$ čiernych kariet. Na ruku si z balíčka vytiahnem n kariet. Všetkých možností je $\binom{3n}{n}$. Počet možností, aby som mal na ruke práve r červených je $\binom{n}{r}\binom{2n}{n-r}$. Preto platí*

$$\binom{3n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{2n}{n-r}$$

Príklad 3.3 *Pri kontrole kvality žiaroviek neodskúšajú každú žiarovku, či svieti. Namiesto toho sa používa test, pri ktorom sa vyberie nejaký menší počet m spomedzi všetkých M žiaroviek. Medzi všetkými M žiarovkami je N chybných. Označme n počet chybných žiaroviek v skupine vybratých m žiaroviek. Pre počet možností, ako medzi všetkými M žiarovkami môžeme rozmiestniť N chybných platí*

$$\binom{M}{N} = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n}\binom{M-m}{m-n}$$

Postup pri kombinatorickom dôkaze:

a) Definujeme množinu S.

b) Vyjadríme počet prvkov množiny S nejakým výrazom, vzorcom, alebo formulou $F1$:

$$|S| = F1$$

c) Vyjadríme počet prvkov množiny S iným výrazom, vzorcom, alebo formulou $F2$:

$$|S| = F2$$

d) Pretože sme formulami $F1$ a $F2$ vyjadrili počet prvkov tej istej množiny S, musí platiť:

$$F1 = F2$$

Iný pohľad na Binomickú vetu:

V nasledujúcom texte budeme všetky n-bitové slová reprezentovať pomocou mocnín x nasledujúcim spôsobom. Na mieste nuly napíšeme x^0 ($x^0 = 1$) a namiesto 1 píšeme x^1 ($x^1 = x$). Teda n-tici priradíme mocninu x:

$$101001 \to x^1x^0x^1x^0x^0x^1 \to x^3$$

Výraz x^0 teda znamená, že v danom bite sa nachádza 0, výraz x^1 znamená, že sa v danom bite nachádza 1.
Výraz $(1+x)^1 = \binom{1}{0} \cdot x^0 + \binom{1}{1} \cdot x^1$ predstavuje všetky možnosti, ako zapísať do 1-bitového slova hodnotu 0 alebo 1. Obdobne výraz $(1+x)^2$ môže reprezentovať všetky možnosti, ako zapísať do 2-bitového slova hodnoty 0 alebo 1:

$$(x^0 + x^1)^2 = (1+x)^2 = x^0x^0 + x^0x^1 + x^1x^0 + x^1x^1 = 1 + 2x + x^2$$

Výraz $(1+x)^n$ môže reprezentovať spôsob ako zapisovať jednotky a nuly do n-bitového slova. Binomický rozvoj výrazu $(1+x)^n$ postupne obsahuje výrazy, v ktorých je kombinačným číslom vyjadrený počet slov s jednou jednotkou, počet slov s dvoma jednotkami, ... až s n jednotkami. Počet jednotiek zodpovedajúci určitej mocnine x^n určí pri nej napísané kombinačné číslo.

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

Z iného pohľadu počet všetkých n-bitových slov je počet všetkých $n-$tíc vytvorených z núl a z jednotiek, ich počet je $|\{0,1\}^n| = 2^n$. Tým sme pomocou kombinatorického dôkazu dokázali rovnosť

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

3.2 Vytvárajúce (generujúce) funkcie

Vytvárajúce funkcie tvoria prechod medzi diskrétnou matematikou a spojitou matematikou resp. matematickou analýzou. Hlavnou myšlienkou je zobrazenie (mapovanie) postupnosti čísel na polynóm, respektíve zovšeobecnený polynóm. Táto technika umožňuje riešiť rôzne komplikované problémy v diskrétnej matematike tak, že ich prevedieme do pojmov spojitej matematiky a tam ich vyriešime a prevedieme naspäť. Analogické prepojenie môžeme nájsť napríklad v geometrii medzi klasickou a analytickou geometriou.

Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť celých čísel, potom polynóm $A(x)$ nazveme vytvrajúcou funkciou postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, ak platí:

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \langle a_0, a_1, a_2, a_3 ... \rangle \quad \leftrightarrow \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = A(x)$$

$$\langle 3, 2, 1, 0, 0, 0, ... \rangle \quad \leftrightarrow \quad 3 + 2x + x^2$$

$$\langle 1, 4, 6, 4, 1, 0, ... \rangle \quad \leftrightarrow \quad 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 = (1+x)^4$$

geometrická postupnosť:

$$\langle 1,1,1,1,1,1,...\rangle \quad \leftrightarrow \quad 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+... = \frac{1}{1-x} \qquad |x|<1$$

$$\langle 1,2,4,8,16,32,...\rangle \quad \leftrightarrow \quad 1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+32x^5+... = \frac{1}{1-2x}$$

$$\langle 1,q,q^2,q^3...\rangle \leftrightarrow \frac{1}{1-qx}$$

násobenie konštantou:

$$\langle 2,2,2,2,2,2,...\rangle \quad \leftrightarrow \quad 2+2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+... = \frac{2}{1-x}$$

$$\langle a_0,a_1,a_2,a_3...\rangle \leftrightarrow A(x) \quad \Rightarrow \quad \langle ca_0,ca_1,ca_2,ca_3...\rangle \leftrightarrow cA(x)$$

posun o m-pozícií doprava:

$$\langle 0,1,1,1,1,1,...\rangle \quad \leftrightarrow \quad x+x^2+x^3+x^4+x^5+... = \frac{x}{1-x}$$

$$\langle 0,0,1,1,1,1,...\rangle \quad \leftrightarrow \quad x^2+x^3+x^4+x^5+... = \frac{x^2}{1-x}$$

$$\langle a_0,a_1,a_2,a_3...\rangle \leftrightarrow A(x) \quad \Rightarrow \quad \langle 0,...,0,a_0,a_1,a_2,a_3...\rangle \leftrightarrow x^mA(x)$$

súčet postupností:

$$\langle 0,1,2,2,2,2,...\rangle = \langle 0,1,1,1,1,1,...\rangle + \langle 0,0,1,1,1,1,...\rangle \leftrightarrow \frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x}=\frac{x(1+x)}{1-x}$$

$\langle a_0,a_1,a_2,a_3...\rangle \leftrightarrow A(x)$
$\langle b_0,b_1,b_2,b_3...\rangle \leftrightarrow B(x)$

$\langle a_0+b_0,a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3...\rangle \leftrightarrow C(x)=A(x)+B(x)$

opačný postup:

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{1-x}=(1+x+x^2+x^3+...)+(x+x^2+x^3+x^4...)=$$

$$=1+2x+2x^2+2x^3+...\rangle \leftrightarrow \langle 1,2,2,2,2,...\rangle$$

$$\frac{1}{1-x^2}=\left(\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+...\right)=1+x^2+x^4+x^6+x^8+... \leftrightarrow \langle 1,0,1,0,1,0,1,...\rangle$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-... \leftrightarrow \langle 1,-1,1,-1,1,-1,1,...\rangle$$

Súvislosť medzi výsledkami kombinatorických úloh a koeficientami vytvárajúcich postupností

Koľkými spôsobmi sa dá usporiadať n-ľudí do radu na obed?

$$\langle 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, ..., n!, ...\rangle \leftrightarrow F(x)$$

Koľkými spôsobmi sa dajú vybrať traja medailisti z n-ľudí?

$$\langle 0, 0, 0, 1, 4, 10, ...\rangle = \langle 0, 0, 0, \binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, ... \binom{n}{3}, ...\rangle \leftrightarrow F(x)$$

Vo vytvárajúcej funkcii $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ koeficient a_n pri mocnine x^n zodpovedá riešeniu kombinatorickej úlohy pre počet n.

Princíp konvolúcie

Nech $A = \{a_1, a_2\}$. Možnosti výberu n-prvkových podmnožín sú $\{\emptyset\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$ odpovedajú postupnosti $\langle 1, 2, 1, 0, 0, 0, ...\rangle$ resp. vytvárajúcej funkcií $A(x) = (1 + x)^2$.
Nech $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Možnosti výberu n-prvkových podmnožín odpovedajú postupnosti $\langle 1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, ...\rangle$ resp. vytvárajúcej funkcií $B(x) = (1 + x)^4$.
Pre možnosti výberu n-prvkových podmnožín zo 6-prvkovej množiny platí:

$$(1 + x)^6 = (1 + x)^2(1 + x)^4 = (1 + 2x + x^2)(1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4) =$$

$$= 1 + (1 \cdot 4 + 2 \cdot 1) \cdot x + (1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1) \cdot x^2 + ...$$

Koeficient pri x^2 môžeme interpretovať ako spôsoby vyberania 6 prvkov z 2-prvkovej a 4-prvkovej množiny:
$1 \cdot 6$ - 1 možnosť výberu 0 prvkov z A, $\binom{2}{0} = 1$, a 6 možností výberu 2 prvkov z B, $\binom{4}{2} = 6$
$2 \cdot 4$ - 2 možnosti výberu 1 prvku z A, $\binom{2}{1} = 2$, a 4 možnosti výberu 1 prvku z B, $\binom{4}{1} = 4$
$1 \cdot 1$ - 1 možnosť výberu 2 prvkov z A, $\binom{2}{2} = 1$, a 0 možností výberu 0 prvku z B, $\binom{4}{0} = 1$

$$\binom{6}{2} = \binom{2}{0}\binom{4}{2} + \binom{2}{1}\binom{4}{1} + \binom{2}{2}\binom{4}{0} \quad \Rightarrow \quad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

Konvolučné pravidlo:

Nech z množiny A vyberáme 0,1,2,3,... prvkov podľa určitého pravidla. Nech $A(x)$ je vytárajúca funkcia k postupnosti počtu týchto výberov z A.
Nech z množiny B vyberáme 0,1,2,3,... prvkov podľa toho istého pravidla a $B(x)$ je vytárajúca funkcia k postupnosti počtu týchto výberov z B. Nech $A \cap B = \emptyset$ a $C = A \cup B$. Potom $C(x) = A(x) \cdot B(x)$ je vytvárajúca funkcia k postupnosti počtu výberov 0,1,2,3,... prvkov podľa toho istého pravidla z množiny C.

Teda ak platí $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, pričom $A \cap B = \emptyset$, potom pre $C(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, ktorá popisuje výber prvkov z $C = A \cup B$ platí: $C(x) = A(x) \cdot B(x)$, resp. $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$, kde postupnosť $\{c_n\}$ sa nazýva konvolúciou postupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$.

Príklad 3.4 *Do batohu môžeme dať 6 kusov ovocia podľa daných pravidiel:*

- jablká J len párny počet
- banány B násobky 5
- pomaranče P najviac 4
- hrušky H najviac 1

Koľko je možností, ako naplniť batoh n kusmi ovocia? Koľko je možností, ako naplniť batoh 20 kusmi ovocia?

Určíme všetky možnosti ako naplniť batoh o veľkosti 6:

J	0	0	6	4	4	2	2
B	5	5	0	0	0	0	0
P	0	1	0	1	2	4	3
H	1	0	0	1	0	0	1

Batoh o veľkosti $n = 6$ môžeme naplniť siedmimi spôsobmi. Pomocou vytvárajúcich funkcií môžeme nájsť riešenie pre batoh o veľkosti n:

$$\text{J:} \quad \langle 1,0,1,0,1,0,...\rangle \quad \leftrightarrow \quad J(x) = \frac{1}{1-x^4}$$

$$\text{B:} \quad \langle 1,0,0,0,0,1,...\rangle \quad \leftrightarrow \quad B(x) = \frac{1}{1-x^5}$$

$$\text{P:} \quad \langle 1,1,1,1,1,0,...\rangle \quad \leftrightarrow \quad P(x) = \frac{1-x^5}{1-x}$$

$$\text{H:} \quad \langle 1,1,0,0,0,0,...\rangle \quad \leftrightarrow \quad H(x) = 1+x$$

Použijeme konvolučné pravidlo pre výber n kusov ovocia, množinu $F = J \cup B \cup P \cup H$, pričom ostávajú v platnosti pravidlá pre výbery z množín J, B, P, H.

Vytvárajúca funkcia pre počet výberov ovocia z množiny F má tvar:

$$F(x) = J(x) \cdot B(x) \cdot P(x) \cdot H(x) = \frac{1}{1-x^4} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x}(1+x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = (1+x+x^2+x^3+...)(1+x+x^2+x^3+...) =$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + (n+1)x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Pre veľkosť batohu n existuje $n+1$ možností ako batoh naplniť. Pre veľkosť batohu 20 existuje 21 možností ako batoh naplniť.

Vytvárajúca funkcia pre postupnosť 1, 2, 3, 4, . . . :

Postupom použitým v predchádzajúcej úlohe (konvolúcia) dostaneme vytvárajúce funkcie pre postupnosti:

$$\langle 1,2,3,4,5,6,...\rangle \quad \leftrightarrow \quad 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + ... = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\langle 0,1,3,6,10,15,\dots\rangle \quad \leftrightarrow \quad x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + 15x^5 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^3}$$

Príklad 3.5 *Do krabice o veľkosti n dávame šišky podľa daných pravidiel:*

- *čokoládové H sú aspoň 3*
- *citrónové C sú najviac 2*
- *kokosové K sú 2 alebo žiadna*
- *banánové B sú násobky 4*

Koľko je možností ako si objednať n šišiek? Koľko je možností, ako si objednať 11 šišiek?

Nájdeme vytvárajúce funkcie pre jednotlivé pravidlá a k nim prislúchajúce množiny:

- čokoládové H sú aspoň 3: $\langle 0,0,0,1,1,1,1,1,...\rangle \leftrightarrow H(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$

- citrónové C sú najviac 2: $\langle 1,1,1,0,0,0,0,0,...\rangle \leftrightarrow C(x) = 1+x+x^2$

- kokosové K sú 2 alebo žiadna: $\langle 1,0,1,0,0,0,0,0,...\rangle \leftrightarrow K(x) = 1+x^2$

- banánové B sú násobky 4: $\langle 1,0,0,0,1,0,0,0,...\rangle \leftrightarrow B(x) = \dfrac{1}{1-x^4}$

Použijeme konvolučné pravidlo na vyjadrenie vytvárajúcej funkcie $F(x)$ a následne jej rozklad na parciálne zlomky, kvôli opačnému postupu na získanie postupnosti, prislúchajúcej k $F(x)$:

$$F(x) = \frac{x^3}{1-x}(1+x+x^2)(1+x^2)\frac{1}{1-x^4} = \frac{x^3(1+x+x^2)}{(1-x)^2(1+x)}$$

$$\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (A+(n+1)B+(-1)^n C)\, x^n$$

$$1+x+x^2 = A(1-x)(1+x) + B(1+x) + C(1-x)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x=1: \ B = \frac{3}{2}, \qquad x=-1: \ C = \frac{1}{4}, \qquad x=0: \ 1 = A+B+C \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{3}{4}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{1-x}(1+x+x^2)(1+x^2)\frac{1}{1-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (A+(n+1)B+(-1)^n C)\, x^{n+3} =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \left(A+(n-2)B+(-1)^{n-3}C\right) x^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{6n-15+(-1)^{n-1}}{4} x^n$$

Krabicu o veľkosti n môžeme naplniť $\dfrac{6n-15+(-1)^{n-1}}{4}$ spôsobmi.

Krabicu o veľkosti $n=11$ môžeme naplniť $a_{11} = 13$ spôsobmi.