# Komplexná analýza

## Derivácia funkcie komplexnej premennej

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

18. novembra 2011

# Cauchy–Riemannove vzťahy

Nech $u(x,y), v(x,y)$ sú funkcie diferencovateľné na $G \subset \mathbb{C}$,
$f$ funkcia definovaná na $G$, taká, že $\mathrm{Re} f = u(x,y)$ a $\mathrm{Im} f = v(x,y)$.
$f$ je holomorfná práve vtedy, ak $u(x,y)$ a $v(x,y)$ spĺňajú Cauchy–Riemannove vzťahy:

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y) \quad \text{a} \quad u'_y(x,y) = -v'_x(x,y).$$

# Derivácia komplexnej funkcie

Na základe Cauchy–Riemannových vzťahov pre deriváciu komplexnej funkcie $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ platí:

$$f'(z) = u'_x(x, y) + \mathrm{i}v'_x(x, y) \quad \text{resp.} \quad f'(z) = v'_y(x, y) - \mathrm{i}u'_y(x, y).$$

# Príklad

Rozhodnite, v ktorých bodoch existujú derivácie danej funkcie a určte ich.

a) $f(z) = \overline{z}$,
b) $f(z) = |z|^2$,
c) $f(z) = \mathrm{e}^z$
d) $f(z) = x^2 - y^2 + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot xy$, kde $z = x + \mathrm{i}y$.

# Príklad

Rozhodnite, či existuje holomorfná funkcia $f$, definovaná na $\mathbb{C} - \{0\}$ taká, že:

$$\mathrm{Re} f(z) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

# Príklady

Rozhodnite, či existuje holomorfná funkcia $f$, definovaná na $M \subset \mathbb{C}$ taká, že:

1. $\operatorname{Re} f(z) = \sin(x+1) \cdot (e^{y} + e^{-y})$, kde $M = \mathbb{C}$,
2. $\operatorname{Im} f(z) = e^{x+1} \cdot \sin y$, kde $M = \mathbb{C}$,
3. $\operatorname{Re} f(z) = \ln((x+1)^2 + y^2)$, kde $M = \mathbb{C} - \{-1\}$,
4. $\operatorname{Im} f(z) = 2xy - y$, kde $M = \mathbb{C}$,
5. $\operatorname{Re} f(z) = x - \frac{x}{x^2+y^2}$, kde $M = \mathbb{C} - \{0\}$,
6. $\operatorname{Im} f(z) = y - \frac{y}{x^2+y^2}$, kde $M = \mathbb{C} - \{0\}$,
7. $\operatorname{Re} f(z) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - y^2 + x^2$, kde $M = \mathbb{C} - \{0\}$,
8. $\operatorname{Im} f(z) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + 2xy$, kde $M = \mathbb{C} - \{0\}$,
9. $\operatorname{Re} f(z) = \frac{y^2+x^2+x}{y^2+x^2+2x+1}$, kde $M = \mathbb{C} - \{-1\}$,
10. $\operatorname{Im} f(z) = \frac{-2y}{y^2+x^2-2x+1}$, kde $M = \mathbb{C} - \{1\}$.