12 Markovove reťazec

Obsah kapitoly

Markovova vlastnosť pre udalosti

$\Pr(A_1 \cap ... \cap A_n) = \Pr(A_n/A_{n-1}) \cdot \Pr(A_{n-1}/A_{n-2}) \cdot ... \cdot \Pr(A_3/A_2) \cdot \Pr(A_2/A_1) \cdot \Pr(A_1)$

12.1 Náhodný reťazec s diskrétnym časom

Náhodný proces s diskrérnym časom $X(t)$ je postupnosť náhodných premenných $\{X_i\}_i$, ktoré v čase $i = t_i$ nadobúdajú hodnotu s_i. Hovoríme tiež, že reťazec sa v čase t_i nachádza v stave s_i, $X(t_i) = X_i = s_i$. Náhodný proces, ktorý nadobúda hodnoty v diskrétnych časoch, nazveme náhodný reťazec. Množinu $S = \{s_0, s_1, s_2, ...\}$ nazveme množinou stavov náhodného reťazca $X(t)$. Pravdepodobnosť $p_k(t)$ bude označovať pravdepodobnosť, že reťazec sa v čase t nachádza v stave s_k:

$$p_k(t) = \Pr(X(t) = s_k)$$

Rozdelenie pravdepodobnosti reťazca v čase t je vektor

$$\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), ...)$$

Počiatočné rozdelenie reťazca:

$$\mathbf{p}(0) = (p_0(0), p_1(0), p_2(0), ...)$$

Markovova vlastnosť pre náhodný reťazec

$$\Pr(X(t_n) = s_n / X(t_{n-1}) = s_{n-1}, \cap X(t_{n-2}) = s_{n-2} \cap ... \cap X(t_0) = s_0) =$$
$$= \Pr(X(t_n) = s_n / X(t_{n-1}) = s_{n-1})$$

Markovov reťazec je náhodný reťazec s Markovovou vlastnosťou

Pravdep. prechodov

Pravdepodobnosti prechodov medzi stavmi Markovovho reťazca:

$$p_{i,j} = \Pr(X(h) = s_j / X(h-1) = s_i)$$

Homogénny Markovov reťazec

Markovov reťazec nazveme homogénny, ak pravdepodobnosť prechodu medzi stavmi nezáleží od času h:

$$\Pr(X(h_1) = s_j / X(h_1 - 1) = s_i) = \Pr(X(h_2) = s_j / X(h_2 - 1) = s_i) = p_{i,j}$$

Matica prechodov medzi stavmi reťazca: $\mathbf{P} = \{p_{i,j}\}$

Vlastnosti matice prechodov:

1. $\forall i, j; \quad p_{i,j} \leq 0$

2. $\forall i; \quad \sum_{\forall j} p_{i,j} = 1$

Príklad 12.1

(*Príklad na cvičenie:*) Pravdepodobnosť, že sa zariadenie v priebehu dňa pokazí je 0.1. Pravdepodobnosť, že zariadenie bude v priebehu dňa opravené je 0.7. Nech chyby zariadenia sú navzájom nezávislé. Na začiatku systém funguje. Aký je stredný počet dní v mesiaci, počas ktorých systém funguje?

Stavy systému: s_1 - systém funguje, s_2 - systém je pokazený. Pravdepodobnosti prechodov: $p_{1,2} = 0.1$, $p_{2,1} = 0.7$. Matica pravdepodobností prechodov $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$. Počiatočné rozdelenie reťazca $\mathbf{p}(0) = (1, 0)$.

Pravdepodobnosť, že systém po jednom dni funguje:

$$p_1(1) = p_1(0)p_{1,1} + p_2(0)p_{2,1} = (p_1(0), p_2(0)) \begin{pmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}_{.1} = 1 \cdot 0.9 + 0 \cdot 0.7 = 0.9$$

Pravdepodobnosť, že systém po jednom dni je pokazený:

$$p_2(1) = p_1(0) \cdot p_{1,2} + p_2(0) \cdot p_{2,2} = (p_1(0), p_2(0)) \begin{pmatrix} p_{1,2} \\ p_{2,2} \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}_{.2} = 1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.3 = 0.1$$

Rozdelenie reťazca v čase $t = 1$:

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P} = (1, 0) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.9, 0.1)$$

Rozdelenie reťazca v čase $t = 2$:

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(1) \cdot \mathbf{P} = (0.9, 0.1) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.88, 0.12)$$

Rozdelenie reťazca v čase $t = n$:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}(n-2) \cdot \mathbf{P}^2 = \mathbf{p}(n-3) \cdot \mathbf{P}^3 = ... = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^n$$

Rozdelenie reťazca v čase n môžeme získať dvoma spôsobmi, rekurentne pomocou rozdelenia v predchádzajúcom čase, alebo pomocou n-tej mocniny matice. Vždy musíme poznať počiatočné rozdelenie reťazca v čase $t = 0$.

Rozdelenie reťazca v čase $t = 3$:

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(2) \cdot \mathbf{P} = (0.88, 0.12) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.876, 0.124)$$

Rozdelenie reťazca v čase $t = 4$:

$$\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(3) \cdot \mathbf{P} = (0.876, 0.124) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.8752, 0.1248)$$

Rozdelenie reťazca v čase 5:

$$\mathbf{p}(5) = \mathbf{p}(4) \cdot \mathbf{P} = (0.8752, 0.1248) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.87504, 0.12496)$$

Tranzitívny reťazec (všetky stavy sú navzájom dosiahnuteľné) sa stabilizuje v čase, pravdepodobnosti stavov prestanú závisieť od času:

$$\forall j; \quad \lim_{t\to\infty} p_j(t) = \pi_j, \quad \text{resp.} \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t) = \boldsymbol{\pi}$$

Vektor pravdepodobnosti $\boldsymbol{\pi}$ nazveme invariantné rozdelenie reťazca (steady-states probabilities). Získame ho limitným prechodom v rekurentných vzťahoch:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1) \cdot \mathbf{P} \;\Rightarrow\; \pi = \pi \cdot \mathbf{P}$$

Pre príklad dostávame:

$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{rl} \pi_1 = & 0.9\pi_1 + 0.7\pi_2 \\ \pi_2 = & 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 \end{array} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rl} 0.1\pi_1 - 0.7\pi_2 & = 0 \\ -0.1\pi_1 + 0.7\pi_2 & = 0 \end{array} \;\Rightarrow\; \begin{array}{rl} 0.1\pi_1 - 0.7\pi_2 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array} \;\Rightarrow\; \pi_2 = \frac{1}{7}\,\pi_1$$

Z normovacej podmienky pre pravdepodobnosti dostávame

$$\pi_1 + \pi_2 = 1 \;\Rightarrow\; \pi_1 + \frac{1}{7}\,\pi_1 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{8}{7}\,\pi_1 = 1 \;\Rightarrow\; \pi_1 = \frac{7}{8} = 0.875, \quad \pi_2 = 0.125$$

Zariadenie funguje 87.5% z celkového času, z 30 dní je stredný počet dni, kedy funguje:

$$30 \cdot \pi_1 = 30 \cdot 0.875 = 26.5 \text{ dní}$$

Príklad 12.2 Môžeme hrať na dvoch automatoch. Prvý je zle nastavený, a pravdepodobnsoť výhry je 0.7, pravdepodobnosť výhry na druhom automate je spravodlivá, 0.5. Nemáme informáciu, ktorý automat je ktorý, preto zvolíme nasledujúcu stratégiu: vyberieme si náhodne jeden automat, v prípade prvej prehry automat zmeníme, túto stratégiu opakujeme počas celého hrania. Koľko percent z celkového času odohráme na prvom automate?

Matica pravdepodobností prechodov $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$. Pravdepodobnosti stavov vypočítame pomocou $\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^n$. Mocniny matice prechodov sú:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.36 \\ 0.60 & 0.40 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.628 & 0.372 \\ 0.620 & 0.380 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.626 & 0.374 \\ 0.624 & 0.376 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0.625 & 0.375 \\ 0.625 & 0.375 \end{pmatrix}$$

Ak začneme s hrou na prvom automate, pravdepodobnsoti stavov postupne sú:

$$\mathbf{p}(0) = (1, 0), \quad \mathbf{p}(1) = (0.7, 0.3), \quad \mathbf{p}(2) = (0.64, 0.36)$$

$$\mathbf{p}(3) = (0.628, 0.372), \quad \mathbf{p}(4) = (0.626, 0.374), \quad \mathbf{p}(5) = (0.625, 0.375)$$

Ak začneme s hrou na druhom automate:

$$\mathbf{p}(0) = (0, 1), \quad \mathbf{p}(1) = (0.5, 0.5), \quad \mathbf{p}(2) = (0.6, 0.4)$$

$$\mathbf{p}(3) = (0.62, 0.38), \quad \mathbf{p}(4) = (0.624, 0.376), \quad \mathbf{p}(5) = (0.625, 0.375)$$

Vektor pravdepodobnosti $\boldsymbol{\pi}$ nazveme invariantné rozdelenie reťazca (steady-states probabilities). Získame ho limitným prechodom v rekurentných vzťahoch:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1) \cdot \mathbf{P} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{P}$$

$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{array}{rl} \pi_1 = & 0.7\pi_1 + 0.5\pi_2 \\ \pi_2 = & 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2 \end{array} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \begin{array}{rl} 0.3\pi_1 - 0.5\pi_2 & = 0 \\ -0.3\pi_1 + 0.5\pi_2 & = 0 \end{array} \ \Rightarrow \ \begin{array}{rl} 0.3\pi_1 - 0.5\pi_2 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array} \ \Rightarrow \ \pi_2 = \frac{3}{5}\,\pi_1$$

Z normovacej podmienky pre pravdepodobnosti dostávame

$$\pi_1 + \pi_2 = 1 \ \Rightarrow \ \pi_1 + \frac{3}{5}\,\pi_1 = 1 \ \Rightarrow \ \frac{8}{5}\,\pi_1 = 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \pi_1 = \frac{5}{8} = 0.625, \quad \pi_2 = \frac{3}{8} = 0.375$$

Z celkového času 62.5% odohráme na prvom automate.

12.2 Ethernet CSMA/CD

Na jednej zbernici je pripojených niekoľko počítačov. Ak chce jeden užívateľ vysielať, vyšle signál do zbernice, aby zistil, či je zbernica voľná. V tom istom okamihu, resp. počas doby šírenia overujúceho signálu po zbernici, mohol začat overovať možnosť vysielania iný užívatel. V takomto prípade dôjde ku kolízii signálov, a obidva počítače skončia s vysielaním. Vygenerujú náhodnú dobu, po ktorej opakujú proces. Ak zistí jeden počítač, že zbernica je voľná, začne vysielať. Počas vysielania jedného účastníka ostatní úživatelia vysielať nemôžu.

Príklad 12.3

Ethernet CSMA/CD: 3 stavy: 1. I-idle, 2. T-transmit, 3. C-collision, vďaka technológii môžu nastať iba nasledujúce prechody:

$$I \to I,\ I \to T,\ I \to C, \qquad T \to I,\ T \to T, \qquad C \to I$$

$$\begin{array}{l}\Pr(I_n/I_{n-1}) = 0.2, \quad \Pr(T_n/I_{n-1}) = 0.5, \quad \Pr(C_n/I_{n-1}) = 0.3 \\ \Pr(I_n/T_{n-1}) = 0.4, \quad \Pr(T_n/T_{n-1}) = 0.6, \\ \Pr(I_n/C_{n-1}) = 1\end{array}$$

Systém popíšeme homogénnym Markovovým reťazcom s maticou pravdepodobností prechodov : $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočítame stacionárne rozdelenie reťazca:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rl} \pi_1 = & 0.2\pi_1 + 0.4\pi_2 + \pi_3 \\ \pi_2 = & 0.5\pi_1 + 0.6\pi_2 \\ \pi_3 = & 0.3\pi_1 \end{array}$$

Dostali sme homogénny systém rovníc:

$$\begin{array}{rl} 0.8\pi_1 - 0.4\pi_2 - \pi_3 = & 0 \\ -0.5\pi_1 + 0.4\pi_2 = & 0 \\ -0.3\pi_1 + \pi_3 = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 & -1 \\ -0.5 & 0.4 & 0 \\ -0.3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 & -1 \\ 0.3 & 0 & -1 \\ -0.3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0.3\pi_1 = \pi_3, \quad 0.5\pi_1 = 0.4\pi_2 \ \Rightarrow \ \pi_2 = \frac{0.5}{0.4}\,\pi_1, \quad \pi_3 = 0.3\ \pi_1$$

Zákon o zachovaní toku pravdepodobnosti: Ak množínu stavov Markovho reťazca rozdelíme na dve disjunktné podmnožiny $S = S_1 \cap S_2$, potom

$$\forall k, l \in S_1; \quad \forall i, j \in S_2; \quad \sum_{k,j} \pi_k p_{k,j} = \sum_{i,l} \pi_i p_{i,l}$$

Inými slovami rekurentné vzťahy medzi pravdepodobnosťami π_j dostaneme vhodnou voľbou rezu medzi stavmi reťazca, a nemusím tak riešiť celý systém algebraických rovníc:

$$\pi_1 \cdot 0.3 = \pi_3 \quad \Rightarrow \quad \pi_3 = 0.3\pi_1 \cdot 1; \qquad \pi_1 \cdot 0.5 = \pi_2 \cdot 0.4 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{0.5}{0.4}\,\pi_1$$

Ďalej použijeme normovaciu podmienku:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \ \Rightarrow \ \pi_1 + \frac{0.5}{0.4}\,\pi_1 + 0.3\ \pi_1 = 1 \ \Rightarrow \ \frac{51}{20}\,\pi_1 = 1 \ \Rightarrow \ \pi_1 = \frac{20}{51}$$

$$\Rightarrow \ \pi_1 = \frac{20}{51} = 0.3922, \qquad \pi_2 = \frac{25}{51} = 0.4902, \qquad \pi_3 = \frac{6}{51} = 0.1176$$

Z celkovej prevádzky systém 49.02% aktívne vysiela.

Určenie matice pre systém homogénnych rovníc:

$$\pi = \pi\mathbf{P} \ \Rightarrow \ \pi^{\mathbf{T}} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}\pi^{\mathbf{T}} \ \Rightarrow \ \pi^{\mathbf{T}} - \mathbf{P}^{\mathbf{T}}\pi^{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ (\mathbf{E} - \mathbf{P}^{\mathbf{T}})\pi^{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$$