6 Nezávislosť udalostí, podmienená pravdepodobnosť, veta o úplnej pravdepodobnosti, Bayesov vzorec

6.1 Nezávislosť udalostí

Príklad 6.1 *Výskumníci študovali podiel chlapcov a dievčat medzi študentami na Slovensku. Zistili, že tu študuje 100 000 chlapcov a 100 000 dievčat. Teda pravdepodobnosť, že náhodne vybratý študent je chlapec je* $\Pr(CH) = \frac{1}{2}$*. Potom zistili, že v populácii je 10 % modrookých ľudí. Počet modrookých študentov (chlapcov) je teda 10 % zo 100 000, teda 10 000. Pravdepodobnosť, že náhodne vybratý študent bude modrooký chlapec je*

$$\Pr(CH \cap M) = \Pr(CH) \cdot \Pr(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

Definícia 6.1 *Dve udalosti A a B nazveme* **nezávislé** *vtedy, ak platí*

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

Nezávislosť po dvoch

Udalosti $E_1, E_2, ...E_n$ sú **po dvoch nezávislé** práve vtedy, ak pre každú dvojicu udalostí E_j, E_k platí

$$\Pr(E_j \cap E_k) = \Pr(E_j) \cdot \Pr(E_k)$$

Vzájomná nezávislosť

Udalosti $E_1, E_2, ...E_n$ sú **vzájomné nezávislé** práve vtedy, ak pre každú k-prvkovú podmnožinu platí

$$\Pr\left[\bigcap_{\forall k} E_k\right] = \prod_{\forall k} \Pr(E_k)$$

Teda platí:

$$\begin{aligned}
\Pr(E_i \cap E_j) &= \Pr(E_i)\Pr(E_j) \\
\Pr(E_i \cap E_j \cap E_k) &= \Pr(E_i)\Pr(E_j)\Pr(E_k) \\
&\vdots \\
\Pr(E_1 \cdot ... \cdot E_n) &= \Pr(E_1) \cdot ... \cdot \Pr(E_n)
\end{aligned}$$

Príklad 6.2 *Hody troma mincami:*

Udalosť A_1 spočíva v tom, že to čo padne na prvej minci je rovnaké ako to, čo padne na druhej minci.

Udalosť A_2 spočíva v tom, že to čo padne na druhej minci je rovnaké ako to, čo padne na tretej minci.

Udalosť A_3 spočíva v tom, že to čo padne na tretej minci je rovnaké ako to, čo padne na prvej minci.

Ukážte, že tieto udalosti sú po dvoch nezávislé, ale nie sú vzájomne nezávislé.

Riešenie: Označme výsledky hodu mincou H a Z. Všetky možné výsledky sú:

$$\Omega = \{HHH,\ HHZ,\ HZH,\ HZZ,\ ZHH,\ ZHZ,\ ZZH,\ ZZZ\}$$

$$\Pr(A_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \Pr(A_2) = \Pr(A_3)$$

$$\Pr(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \Pr(A_2 \cap A_3) = \Pr(A_3 \cap A_1)$$

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{8} \neq \frac{1}{8} = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2) \cdot \Pr(A_3)$$

6.2 Podmienená pravdepodobnosť

Riešime úlohu výpočtu pravdepodobnosti udalosti A, keď vieme, že nastala udalosť B.

Príklad 6.3 *Ak je hracia kocka vyvážená tak, že všetky strany môžu padnúť s rovnakou pravdepodobnosťou, tak pravdepodobnosť udalosti A, že na kocke padne číslo 2, je*

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Ale pravdepodobnosť udalosti A, že na kocke padne číslo 2 za predpokladu, že vieme, že nastala udalosť B: na kocke padlo párne číslo, je iba

$$P(A|B) = \frac{1}{3}$$

□

Podmienená pravdepodobnosť udalosti A **za podmienky** B znamená, že namiesto pôvodnej množiny všetkých udalostí Ω budeme uvažovať len menšiu množinu B. Po tomto zúžení, nenulovú pravdepodobnosť výskytu budú mať tie prvky množiny A, ktoré sa nachádzajú v množine B.
Teda zmeníme vzorec pre pravdepodobnosť udalosti A:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

na vzorec pre pravdepodobnosť udalosti A za podmienky B

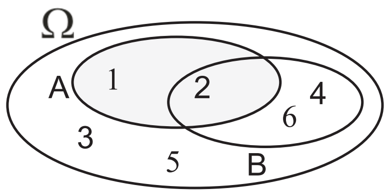
$$P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)}$$

Príklad 6.4 *Pravdepodobnosť udalosti A, že „na kocke padne číslo menšie ako 3" je*

$$P(A) = 2/6$$

Ale pravdepodobnosť udalosti $A|B$, že „na kocke padne číslo menšie ako 3 za predpokladu, že vieme, že na kocke padlo párne číslo" je

$$P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{1}{3} \tag{1}$$



Obr. 1: Pravdepodobnosť udalosti $A|B$, kde A znamená, že na kocke padne číslo väčšie ako 2 a B znamená, že na kocke padlo párne číslo

$\square$

Vzorec (1) ešte môžeme upraviť na tvar

$$P(A|B) = \frac{\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}}{\frac{N(B)}{N(\Omega)}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \tag{2}$$

Uvedené vzorce platia iba pre $P(B) \neq \emptyset$.

Nasledujúce vlastnosti podmienenej pravdepodobnosti ľahko pochopíme, keď príslušné množiny nakreslíme.

- $B \subsetneqq A \quad \Rightarrow \quad A\cap B = B \quad \Rightarrow \quad P(A|B) = 1$
- $P(A\cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A\cap B|C)$
- $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$

Príklad 6.5 *Uvažujme nad takýmto experimentom. Najskôr hodíme férovou mincou. Ak padne znak, tak hodíme jeden krát férovou kockou. Ak padne hlava, tak hodíme dvakrát férovou kockou a sčítame hodnoty týchto dvoch hodov. Aká je pravdepodobnosť, že dostaneme výsledok* 2*?*

Nezávislosť pomocou podmienenej pravdepodobnosti

Dá sa ukázať, že dve udalosti A a B sú nezávislé, ak podmienená pravdepodobnosť udalosti A za podmienky B nezávisí od tejto podmienky, teda ak

$$P(A|B) = P(A)$$

Podmienka sa dá upraviť na tvar

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$$

a odtiaľ

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

prípadne aj na

$$P(B|A) = P(B)$$

Ak udalosti nie sú nezávislé, nazveme ich **závislé**.
Vzorec pre výpočet pravdepodobnosti prieniku dvoch udalostí, ktoré sú závislé je:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Príklady, ktoré je možné riešiť pomocou vzorca pre podmienenú pravdepodobnosť sú teda úlohy o tom, aká bude pravdepodobnosť, keď sa zmení základná množina Ω.

Príklad 6.6 *Rodičia sa dozvedeli, že triede, kam chodí ich dieťa, niekto rozbil okno. Keďže šanca, že to bol niekto z triedy, je rovnaká pre všetkých* 30 *žiakov, každý zaplatí* $\frac{1}{30}$ *sumy za opravu.*
Na druhý deň sa zistilo, že okoloidúci zvonku videli, že to bol chlapec. Chlapcov je v triede 14 *a tak rodičia musia zaplatiť inú sumu. Väčšiu ak majú v triede syna a žiadnu, ak majú v triede dcéru. Predpokladajme, že títo rodičia majú v triede syna. Aká je pravdepodobnosť, že ich syn rozbil okno?*

Riešenie: Urobme formálny výpočet. Základná množina všetkých žiakov v triede je $\Omega = \{c_1, c_2, \ldots, c_{14}, d_1, d_2, \ldots, d_{16}\}$.
Udalosti A, že konkrétny chlapec, napríklad c_1, rozbil okno, zodpovedá množina $A = \{c_1\}$.
Udalosti B, že okno rozbil chlapec zodpovedá množina $B = \{c_1, c_2, \ldots, c_{14}\}$.
Pravdepodobnosť udalosti A, že chlapec c_1 rozbil okno je

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{30}$$

Pravdepodobnosť udalosti $A|B$, že c_1 rozbil okno za podmienky, že okno rozbil chlapec, je

$$P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{1}{14}$$

□

Pravidlo násobenia pre 2 závislé udalosti

$$\Pr(A_2) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2/A_1)$$

Pravidlo násobenia pre n závislých udalostí

$\Pr(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$\Pr(A_1 \cap ... \cap A_n) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2/A_1) \cdot \Pr(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot \Pr(A_n/A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$$

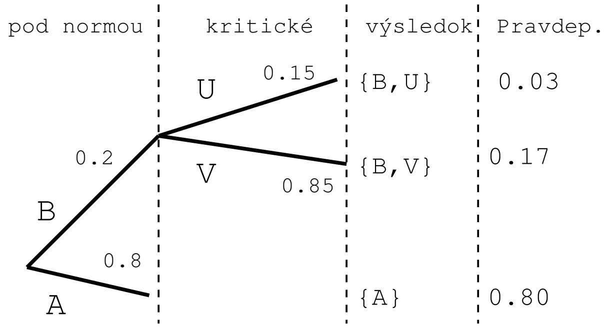
Príklad 6.7 *Počas roka je 20% dní pod normou (biologická záťaž), z toho 15% je kritických. Určte pravdepodobnosť, že zajtra bude kritický deň.*

Riešenie:

$$B - \text{ pod normou }, \quad U - \text{ kritický deň}, \quad U \subset B, \quad \Pr(B) = 0.2, \quad \Pr(U/B) = 0.15$$

$$\Pr(U) = \Pr(U \cap B) = \Pr(U/B)\Pr(B) = 0.15 \cdot 0.2 = 0.03$$

□

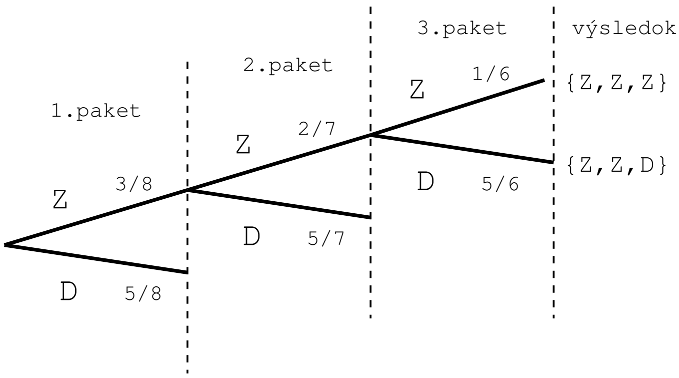


Obr. 2: Biologická záťaž

Príklad 6.8 *Z 8 paketov sú 3 poškodené. Postupne prijmeme 3 pakety. Určte pravdepodobnosť, že až tretí paket je v poriadku.*

Riešenie: Z_1 - 1. paket poškodený, Z_2 - 2. paket poškodený, D_3 - 3. paket v poriadku

$$\Pr(Z_1 \cap Z_2 \cap D_3) = \Pr(Z_1) \cdot \Pr(Z_2/Z_1) \cdot \Pr(D_3/Z_1 \cap Z_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = 0.089$$



Obr. 3: Paketové zhluky

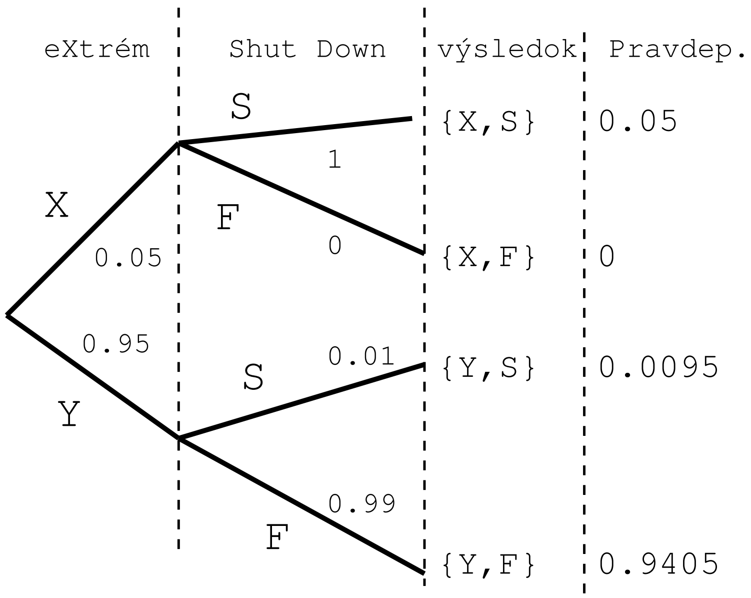
□

Príklad 6.9 *Ak v danom období prevádzky servera nenastane extrémna situácia, server padne s pravdepodobnosťou* 0.01*. Ak nastane extrémna situácia, server padne isto. Pravdepodobnosť nastatia extrémnej situácie v danom období je* 0.05*. Vypočítajte pravdepodobnosť bezporuchového chodu servera.*

Riešenie: S - server padne, Y - nenastane extrém
$\Pr(S/Y) = 0.01, \quad \Pr(S/X) = 1, \quad \Pr(X) = 0.05$

$$\Pr(F \cap Y) = \Pr(F/Y)\Pr(Y) = 0.99 \cdot 0.95 = 0.9405$$

□



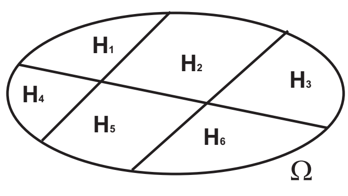
Obr. 4: Paketové zhluky

Rovnosti pre podmienenú pravdepodobnosť

1. $B \subset A \quad \Rightarrow \quad A \cap B = B \quad \Rightarrow \quad \Pr(A/B) = 1$
2. $A \subset B \quad \Rightarrow \quad A \cap B = A \quad \Rightarrow \quad \Pr(A/B) = \dfrac{\Pr(A)}{\Pr(B)}$
3. $\Pr((A \cup B)/C) = \Pr(A/C) + \Pr(B/C) - \Pr((A \cap B)/C)$
4. $\Pr((A \cup B)/C) = \Pr(A/C) + \Pr(B/C), \quad A \cap B = \emptyset$
5. $\Pr(A^C/B) = 1 - \Pr(A/B)$
6. $\Pr(A \cap B) = \Pr(A/B)\Pr(B) = \Pr(B/A)\Pr(A)$

6.3 Veta o úplnej pravdepodobnosti

Dôležitým tvrdením o podmienenej pravdepodobnosti je veta o úplnej pravdepodobnosti. Táto veta umožňuje nájsť pravdepodobnosť komplikovanej udalosti pomocou zjednotenia viacerých udalostí, ktorých pravdepodobnosť vieme vypočítať jednoduchšie. Rozložme základnú množinu Ω na niekoľko množín $H_k \quad k = 1, 2, \ldots$ tak, aby sa neprekrývali, ako vidno na obrázku 5. Takéto podmnožiny nazývame úplný systém podmnožín, alebo rozklad množiny Ω.



Obr. 5: Rozklad množiny Ω na úplný systém podmnožín

Úplný systém podmnožín množiny Ω je taký systém H_k, pre ktorý platí:

$$H_j \cap H_i = \emptyset, \quad \text{pre všetky} \quad j \neq i$$

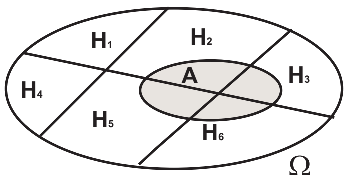
$$\bigcup_{\forall k} H_k = \Omega$$

Veta o úplnej pravdepodobnosti

Pre úplný systém podmnožín H_k množiny Ω, taký, že $\forall H_k$; $P(H_k) \neq 0$ platí

$$P(A) = \sum_{\forall k} P(A|H_k).P(H_k)$$

Množinovú schému vety o úplnej pravdepodobnosti vidíme na obrázku 6.



Obr. 6: Veta o úplnej pravdepodobnosti

Úloha 6.1 *Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vytiahnutá karta z kopy pomiešaných sedmových a žolíkových kariet bude eso (označme ju ako udalosť E)?*

Riešenie: Sedmových kariet je 32 a žolíkových je 52. V každom z balíčkov sú 4 esá, teda pravdepodobnosť, že vytiahneme sedmové eso je 4/32 a že vytiahneme žolíkové eso je 4/52. To, že karta je zo sedmového balíčka (označme ju ako udalosť S), je $32/(32+52) = 32/84$. To, že karta je zo žolíkového balíčka (označme ju ako udalosť Z), je $52/(32+52) = 52/84$.

Použitím vety o úplnej pravdepodobnosti dostávame:

$$P(E) = P(E|S) \cdot P(S) + P(E|Z) \cdot P(Z) = \frac{4}{32} \cdot \frac{32}{84} + \frac{4}{52} \cdot \frac{52}{84} = \frac{8}{84}$$

Je potešiteľné, že rovnaký výsledok dostaneme, ak riešime úlohu jednoduchou úvahou. V pomiešaných balíčkoch je 84 kariet, z toho 8 z nich sú esá, preto pravdepodobnosť, že vytiahnutá karta bude eso je 8/84.

Príklad 6.10 *Nech nejaký systém závisí od troch prvkov Z_1, Z_2, Z_3. Ak zlyhajú všetky tri prvky, systém prestane pracovať, ak zlyhajú ľubovoľné dva prvky, systém prestane pracovať s pravdepodobnosťou 0.7, ak zlyhá iba jeden prvok systém prestane pracovať s pravdepodobnosťou 0.1. Ak žiadny prvok nezlyhá, systém pracuje iste. Pravdepodobnosti zlyhania prvkov sú* $\Pr(Z_1) = 0.4$, $\Pr(Z_2) = 0.3$ *a* $\Pr(Z_3) = 0.1$. *Úlohou je určiť pravdepodobnosť zlyhania celého systému.*

$$\Pr(A/H_0) = 0 \qquad \Pr(A/H_1) = 0.2 \qquad \Pr(A/H_1) = 0.7 \qquad \Pr(A/H_1) = 1$$

$$\Pr(Z_1) = 0.4 \qquad \Pr(Z_2) = 0.3 \qquad \Pr(Z_3) = 0.1$$

Určíme $\Pr(H_i)$, teda pravdepodobnosti, ľe práve i prvkov zlyhalo:

$$\begin{aligned}
\Pr(H_0) &= 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.9 = 0.378 \\
\Pr(H_1) &= 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.1 = 0.456 \\
\Pr(H_2) &= 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.9 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = 0.154 \\
\Pr(H_3) &= 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = 0.012
\end{aligned}$$

Udalosti H_i tvoria úplný rozklad pravdepodobnostného priestoru, preto súčet všetkých $\Pr(H_i)$ je rovný 1. Pravdepodobnosť zlyhania systému je

$$\Pr(A) = \sum_{k=0}^{4} \Pr(A/H_k) \cdot \Pr(H_k) = 0.211$$

6.4 Bayesov vzorec

Bayesov vzorec pre dve udalosti

Použitím vzorca pre podmienenú pravdepodobnosť a vety o úplnej pravdepodobnosti dostaneme Bayesov vzorec.
Podmienená pravdepodobnosť:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Po úpravách:

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Bayesov vzorec pre viac udalostí

Ak je udalosť A zjednotením viacerých disjunktných udalostí, môžeme použiť vetu o úplnej pravdepodobnosti:

$$H_j \cap H_i = \emptyset, \quad \text{pre všetky} \quad j \neq i$$

$$\bigcup_{\forall k} H_k = \Omega, \quad \forall H_k;\ P(H_k) \neq 0$$

$$P(A) = \sum_{\forall k} P(A|H_k) \cdot P(H_k)$$

Odvodenie:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)}$$

$$P(A) = \sum_{\forall k} P(A|H_k) \cdot P(H_k)$$

po dosadení druhej rovnosti do prvej dostaneme **Bayesov vzorec**:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum\limits_{\forall k} P(A|H_k) \cdot P(H_k)} \tag{3}$$

Nasleduje úloha, ktorú vyriešime najprv pomocou zdravého 'sedliackeho rozumu' a následne aj pomocou Bayesovho vzorca.

Úloha 6.2 *V červenej a modrej miske boli cukríky. Cukríky boli zelené a biele. V červenej miske boli* 2 *zelené a* 8 *bielych cukríkov, v modrej miske boli* 4 *zelené a* 1 *biely cukrík. Cukríky sme vysypali na tanier a ponúkli hosťom. Následne sa zistilo, že cukríky v modrej miske olízal pes. Aká je pravdepodobnosť, že hosť si vybral cukrík olízaný psom, ak vieme, že hosť zjedol biely cukrík?*

Riešenie: Úlohu vyriešime ľahko, bez pomoci špeciálnych vzorcov. Bielych cukríkov bolo 9, z toho jeden bol v modrej miske. Teda

$$P(M|B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{9}$$

Nie vždy sú však známe tie pravdepodobnosti, ktoré potrebujeme k takémuto jednoduchému výpočtu. Vyriešime príklad ešte raz, aby sme videli, že na výpočet môžeme použiť aj iné vstupné informácie.

Označme udalosti postupne C (cukrík z červenej misky), M (cukrík z modrej misky), B (biely cukrík)a Z (zelený cukrík). Jednotlivé pravdepodobnosti potom budú

$$P(C) = \frac{2}{3}, \quad P(M) = \frac{1}{3}, \quad P(B|C) = \frac{8}{10}, \quad P(B|M) = \frac{1}{5}$$

Použitím Bayesovho vzorca dostávame:

$$P(M|B) = \frac{P(B|M) \cdot P(M)}{P(B|M) \cdot P(M) + P(B|C) \cdot P(C)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{9} = 0.11$$

□

6.5 Spoľahlivostné systémy

Sériový systém s m nezávislými prvkami

Nech A_i znamená, že je i-ty prvok systému pracuje. Nech prvky systému sú identické. Nech každý prvok v systéme funguje nezávisle od ostatných. Ak v sériovo zapojenom systéme zlyhá ľubovoľný prvok, potom zlyhá celý systém.
Spoľahlivosť systému je pravdepodobnosť s akou bude pracovať celý systém:

$$\Pr(\text{systém pracuje}) = \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) = \prod_{i=1}^{m} \Pr(A_i)$$

Príklad 6.11 *Nech systém obsahuje 2 identické prvky zapojené sériovo so spoľahlivosťou 0.9, potom spoľahlivosť celého systému je:*

$$\Pr(\textit{systém pracuje}) = 0.9^2 = 0.810$$

Paralelný systém s r nezávislými prvkami

Nech A_i znamená, že je i-ty prvok systému pracuje. Nech prvky systému sú identické. Každý prvok v systéme funguje nezávisle od ostatných. Systém zlyhá, ak zlyhajú všetky prvky systému.
Spoľahlivosť systému je pravdepodobnosť s akou bude pracovať celý systém:

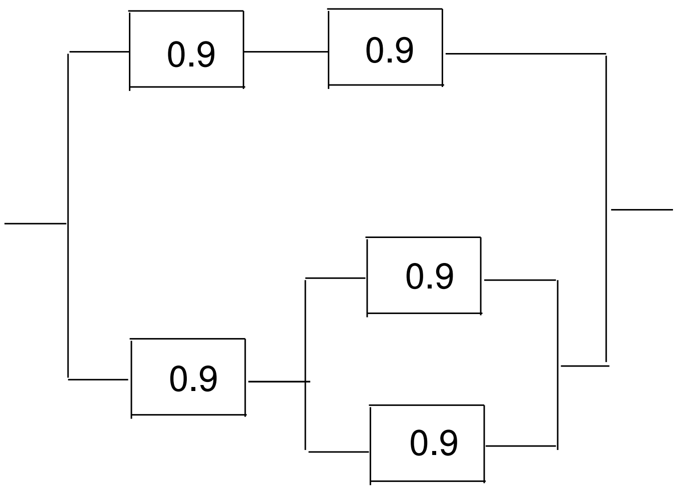
$$\Pr(\text{systém pracuje}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right) = 1 - \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i^c\right) = 1 - \prod_{i=1}^{r} \Pr(A_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^{r} (1 - \Pr(A_i^c))$$

Príklad 6.12 *Nech systém obsahuje 2 identické prvky zapojené paralelne so spoľahlivosťou 0.9. Spoľahlivosť celého systému je:*

$$\Pr(\textit{systém pracuje}) = 0.9 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.9 = 1 - 0.1 \cdot 0.1 = 0.990$$

Sériovo-paralelný systém s k nezávislými prvkami

Príklad 6.13 *Nech sú prvky systému rozmiestnené sériovo aj paralelne tak, ako na obrázku:*



Obr. 7: Sériovo-paralelný systém s 5 nezávislými, rovnako spoľahlivými prvkami

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{systém pracuje}) &= 1 - (1 - 0.9 \cdot 0.9) \cdot (1 - 0.9 \cdot (1 - (1 - 0.9) \cdot (1 - 0.9))) = \\
&= 1 - (1 - 0.9 \cdot 0.9)(1 - 0.9 \cdot 0.99) = 1 - (1 - 0.810)(1 - 0.891) = \\
&= 1 - 0.110 \cdot 0.109 = 1 - 0.01199 = 0.98801
\end{aligned}$$