8 ÚROVEŇ ZDROJ INFORMÁCIE - PRIJÍMAČ INFORMÁCIE

V tejto kapitole budeme sledovať prenos informácie bez ohľadu na to, aké transformácie signálu sa robia v informačnom reťazci. Budeme študovať vlastnosti základného informačného reťazca: zdroj informácie - kanál - prijímač informácie z pravdepodobnostného hľadiska v rámci Shannonovej teórie informácie.

Definícia:

Nech je daná konečná množina $X = \{x_o, x_1, \ldots, x_{M-1}\}$, ktorú nazveme abecedou a pravdepodobnostný priestor (X, Ω, P). Diskrétnym stacionárnym zdrojom informácie nazývame zariadenie, ktoré za každú časovú jednotku vygeneruje náhodnú správu $\mathbf{u} \in \Omega$.

Definícia:

Diskrétny stacionárny zdroj informácie (X, Ω, P) (označíme (X^N, P) a nazveme zdrojom s dĺžkou slova N, ak každá správa je $\mathbf{u} \in X^N$, t.j.

$$\mathbf{u} = (u_o, u_1, \ldots, u_{N-1}), \quad u_i \in X, \quad i = 0,1, \ldots, N-1$$

kde N je prirodzené číslo.

Diskrétny stacionárny zdroj informácie (X, Ω, P) nazveme Markovovým, ak pre každú správu $\mathbf{u} = (u_o, \ldots, u_{N-1}) \in \Omega$ platí

$$p(u_{N-1}/u_{N-2}) = p(u_{N-1}/u_{N-2}, \ldots, u_o)$$

Diskrétny stacionárny zdroj informácie (X, Ω, P) nazveme bez pamäte, ak pre každú správu $\mathbf{u} = (u_o, \ldots, u_{N-1}) \in \Omega$

$$p(u_{N-1}) = p(u_{N-1}/u_{N-2}, \ldots, u_o)$$

V ďalšom texte pod zdrojom informácie budeme rozumieť diskrétny stacionárny zdroj informácie s dĺžkou slova N.

8.1 VZÁJOMNÁ INFORMÁCIA

Definícia:

Veličinu $\mathcal{J}(y,x)$, budeme nazývať informáciou o jave $y \in Y$, ktorá je obsiahnutá v jave $x \in X$, ak platí:

1. v pravdepodobnostnom priestore $(X\times Y, \Omega, P)$ je $\mathcal{J}(y,x)$ diferencovateľnou funkciou $F(\varphi, \theta)$ dvoch premenných $\varphi = P(y)$, $\theta = P(y/x)$.
2. v pravdepodobnostnom priestore $(X\times Y\times Z, \Omega, P)$ je $\mathcal{J}(y,x/z)$ tou istou funkciou $F(\varphi, \theta)$ premenných $\varphi = P(y/Z)$, $\theta = P(y/xz)$
3. v pravdepodobnostnom priestore $(X\times Y\times Z, \Omega, P)$ platí

$$\mathcal{J}(y,xz) = \mathcal{J}(y,z) + \mathcal{J}(y,x/z)$$

4. v pravdepodobnostnom priestore $(X\times Y\times U\times V, \Omega, P)$, v ktorom

$$P(xyuv) = P(xy) \cdot P(uv)$$

platí

$$\mathcal{J}(xu, yv) = \mathcal{J}(x,y) + \mathcal{J}(u,v)$$

Dá sa ukázať [6] , že až na multiplikatívnu konštantu (ktorá tiež súvisí so základom logaritmu) vyhovuje danej definícii len funkcia

$$\mathcal{J}(y,x) = \log \frac{p(y/x)}{p(y)} \tag{1}$$

Vzájomnú informáciu

$$\varphi(y,x/z) = \log \frac{p(y/xz)}{p(y/z)}$$

voláme podmienenou vzájomnou informáciou.

Pri použití dvojkového logaritmu nazývame jednotku informácie Shannon v skratke [Sh] .

Presvedčte sa, že vzájomná informácia podľa (1) skutočne vyhovuje požiadavkám 3., 4. definície.

Vzájomná informácia je reálne číslo, pričom

$$\mathcal{J}(y,x) \quad \begin{cases} > 0 & \text{pre } p(y/x) > p(y) \\ = 0 & \text{pre } p(y/x) = p(y) \\ < 0 & \text{pre } p(y/x) < p(y) \end{cases}$$

Veta:

Vzájomná informácia je symetrická funkcia.

Dôkaz:

$$\mathcal{J}(y,x) = \log \frac{P(y/x)}{P(y)} = \log \frac{P(xy)}{P(x)P(y)} = \log \frac{P(x/y)}{P(x)} = \mathcal{J}(x,y)$$

pre

$$p(x) = 0, \quad p(y) \neq 0$$

Jednoduchými úpravami dostaneme tiež vzťah

$$\mathcal{J}(yz,x) = \mathcal{J}(x,yz) = \mathcal{J}(z,x) + \mathcal{J}(y,x/z)$$

Ak nastatie javu x úplne podmieňuje nastatie javu y, t.j.

$$P(y/x) = 1$$

potom platí

$$\mathcal{J}(y,x) = \mathcal{J}(y) = \log \frac{1}{P(y)}$$

Veličinu $\mathcal{J}(y)$ voláme úplnou informáciou o jave y . Pretože $P(y/x) \leq 1$ a z podmienky symetrie vyplýva

$$\mathcal{J}(x,y) \leq \mathcal{J}(x)$$

$$\mathcal{J}(x,y) \leq \mathcal{J}(y)$$

Podmienenou úplnou informáciou voláme veličinu

$$\mathcal{J}(y/z) = \log \frac{1}{P(y/z)}$$

Pre vzájomnú informáciu môžeme potom písať

$$\mathcal{J}(y,x) = \mathcal{J}(y) - \mathcal{J}(y/x)$$

resp.

$$\mathcal{J}(y,x) = \mathcal{J}(y) + \mathcal{J}(x) - \mathcal{J}(xy)$$

Odtiaľ pre úplnú informáciu o súčasnom nastatí javov xy

$$\mathcal{J}(xy) = \mathcal{J}(x) + \mathcal{J}(y) - \mathcal{J}(y,x)$$

8.2 STREDNÁ HODNOTA INFORMÁCIE

Vzájomná informácia $\mathcal{J}(y,x)$ je náhodnou veličinou v pravdepodobnostnom priestore $(X \times Y, \Omega, P)$. Môžeme ju charakterizovať číselnými charakteristikami, z ktorých najjednoduchšou je stredná hodnota.

Strednú hodnotu

$$\mathfrak{I}(Y,x) = \sum_{Y \in Y} p(y/x)\ \mathfrak{I}(y,x)$$

budeme volať informáciou o systéme javov Y, ktorá je v jave x .

Veta:

Platí

$$\mathfrak{I}(Y,x) \geq 0$$

Dôkaz

$$\mathfrak{I}(Y,x) = \sum_{y \in Y} p(y/x) \log \frac{p(y/x)}{p(y)}$$

resp.

$$- \mathfrak{I}(Y,x) = \sum_{y \in Y} p(y/x)\ \ell n \frac{p(y)}{p(y/x)} \log e$$

použitím nerovnosti

$$\ell n\ x \leq x-1$$

dostávame

$$- \mathfrak{I}(Y,x) \leq \sum_{y \in Y} p(y/x) \left[\frac{p(y)}{p(y/x)} - 1 \right] \log e$$

čo so vzťahmi

$$\sum_{y \in Y} p(y) = 1 , \quad \sum_{y \in Y} p(y/x) = 1$$

dáva

$$- \mathfrak{I}(Y,x) \leq 0$$

Strednú hodnotu

$$\mathfrak{I}(y,X) = \sum_{x \in X} p(x) \log \frac{p(y/x)}{p(y)}$$

voláme informáciou o jave y , ktorá je obsiahnutá v systéme javov X. Z vlastnosti symetrie vzájomnej informácie plynie

$$\mathfrak{I}(y,X) \geq 0$$

Strednú hodnotu

$$\mathcal{J}(Y,X) = \sum_{x \in X} p(x) \quad \mathcal{J}(Y,x) = \sum_{y \in Y} p(y/x) \quad \mathcal{J}(y,X)$$

voláme informáciou o systéme javov Y, ktorá je obsiahnutá v systéme javov X. Po dosadení za $\mathcal{J}(Y,x)$, resp. $\mathcal{J}(y,X)$ dostávame

$$\mathcal{J}(Y,X) = \sum_{(x,y) \in XxY} p(xy) \log \frac{p(y/x)}{p(y)}$$

Je zrejmé, že platí

$$\mathcal{J}(Y,X) \geqq 0 .$$

Rovnosť platí práve vtedy, keď $p(xy) = p(x)\,p(y)$ pre všetky $(x,y) \in XxY$, t.j. javy x,y sú nezávislé.

8.3 ENTROPIA

Tak ako sme definovali strednú hodnotu vzájomnej informácie, budeme definovať aj strednú hodnotu úplnej informácie, ktorú voláme entropiou.

Definícia:

Nech je daný pravdepodobnostný priestor (X, Ω, P), resp. (XxY, Ω, P). Strednú hodnotu úplnej informácie

$$H(X) = \sum_{x \in X} p(x) \log \frac{1}{p(x)} \tag{1}$$

resp.

$$H(X/Y) = \sum_{(x,y) \in XxY} p(x,y) \log \frac{1}{p(x/y)} \tag{2}$$

voláme entropiou, resp. podmienenou entropiou systému javov X.

Veta:

Ak $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{M-1}\}$, potom

$$0 \leqq H(x) \leqq \log M$$

Dôkaz:

Ľavá nerovnosť vyplýva z toho, že v sume (1) sú všetky sčítance nezáporn
Rovnosť na ľavej strane nastáva, ak

$$p(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \quad i = 0,1, \ldots, M-1 \\ 0, & i \neq j \quad j \in \{0,1, \ldots, M-1\} \end{cases}$$

pretože $\lim_{p \to 0} p \log p = 0$.

Nerovnosť na pravej strane dokážeme dôkazom nerovnosti

$$H(x) - \log M \leq 0$$

pomocou nerovnosti

$$\ell n\ x \leq x-1$$

rovnako ako v prípade dôkazu nerovnosti $\mathcal{I}(Y,x) \geq 0$.
Rovnako je možné dokázať aj vzťah

$$H(X/Y) \leq H(X) \tag{3}$$

kde rovnosť nastáva, ak X a Y sú systéme nezávislých javov. Rozpísaním logaritmov a pravdepodobnosti súčasného nastatia dvoch javov dostaneme

$$H(XY) = H(X) + H(Y/x) = H(Y) + H(X/Y) \tag{4}$$

a dôležitý vzťah

$$\mathcal{I}(Y,X) = H(Y) - H(Y/X) \tag{5}$$

Doporučujeme čitateľovi, aby tieto vzťahy dokázal.

8.4 ZDROJ INFORMÁCIE

Stacionárny diskrétny zdroj informácie sme definovali v úvode kap. 8. Z informačného hľadiska budeme výdatnosť zdroja hodnotiť stredným množstvom informácie v jednom symbole, ktorý zdroj informácie vygeneroval. Vo všeobecnosti sú však generované symboly na sebe závislé. Ak zdroj informácie (X^N, P) generuje správy o dĺžke N, potom informačná výdatnosť stacionárneho zdroja bude $H(X^N)/N$. Podľa vzťahu (8.3.4) platí

$$H(X^N) = H(X^{N-1}) + H(X_N/X^{N-1})$$

kde $X^N = X \times X \times \ldots \times X$ je N-násobný kartézsky súčin a X_N je abeceda zdroja informácie v čase i=N. Čas uvádzame len kvôli lepšej orientácii, je zrejmé, že pre stacionárny zdroj, ktorý v tomto texte predpokladáme, platí

$$X_i = X, \quad i = 1, \ldots, N$$

Hodnota $H(X_N/X^{N-1})$ udáva stredné množstvo informácie v symbole u_N správy $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_N)$ za podmienky, že časť tejto správy $(u_1, \ldots, u_{N-1})$ je známa. Nasledujúca veta tvrdí, že toto množstvo s rastúcim N konverguje.

Veta:

Pre každý diskrétny stacionárny zdroj existuje limita

$$H(X/X^{\infty}) = \lim_{N \to \infty} H(X_N/X^{N-1})$$

Dôkaz:

Ukážeme, že postupnosť

$$H(X_1),\ H(X_2/X_1),\ \ldots,\ H(X_N/X_{N-1} \ldots X_1)$$

nerastie. Pre stacionárny zdroj sa uvedená postupnosť rovná postupnosti

$$H(X_N),\ H(X_N/X_{N-1}),\ \ldots,\ H(X_{N-1}, \ldots, X_1)$$

a táto je podľa (8.3.3) nerastúca.

Okrem toho členy postupnosti sú ohraničené zdola

$$H(X_N/X_{N-1}, \ldots, X_1) \geq 0$$

Pretože každá monotónna postupnosť má limitu, bude ju mať aj uvedená postupnosť a ako sme už ukázali, bude konečná.

Ak informačnú výdatnosť zdroja (X^N, P) označíme

$$H_N(X) = \frac{H(X^N)}{N}$$

potom pre rastúce $N \to \infty$ konverguje.

Veta:

Pre každý stacionárny diskrétny zdroj existuje limita

$$\lim_{N \to \infty} H_N(X) = \lim_{N \to \infty} H(X_N/X^{N-1}) = H(X/X^{\infty})$$

Dôkaz:

Ukážeme najskôr, že limita existuje. Z (8.3.4) a (8.3.3) vyplýva

$$H(X^{N+1}) = H(X^N) + H(X_{N+1}/X^N) \leq H(X^N) + H(X_N/X^{N-1}) \tag{1}$$

Zovšeobecnením vzťahu (8.3.4) dostávame

$$H(X^N) = \sum_{i=1}^{N} H(X_i/X^{i-1})$$

a pretože podľa (8.3.3)

$$H(X_N/X^{N-1}) \leq H(X_i/X^{i-1}), \qquad i = 1,2, \ldots, N$$

kde $H(X_1/X_o) = H(X_1)$, platí

$$H(X^N) \geq NH(X_N/X^{N-1})$$

Spolu s nerovnosťou (1) dostávame

$$\frac{H(X^{N+1})}{N+1} \leq \frac{H(X^N)}{N}$$

teda postupnosť $H_N(X)$ je nerastúca. Keďže je ohraničená zdola nulou, má konečnú limitu.

Ďalej ukážeme, že táto limita sa rovná $H(X/X^{\infty})$.

Platí

$$H_N(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H(X_i/X^{i-1}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} H(X_i/X^{i-1}) +$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{i=k+1}^{n} H(X_i/X^{i-1}) \leq \frac{k}{N} H(X) + \frac{N-k}{N} H(X_{k+1}/X^k) \tag{2}$$

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľne malé číslo. Zvolíme k tak, že

$$H(X_{k+1}/X^{k+1}) - H(X/X^{\infty}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

k zvolenému k vyberieme N_o tak, že pri $N > N_o$

$$\frac{kH(X)}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

Potom pri $N > N_o$ dostávame z nerovností (2), (3), (4)

$$H_N(X) \leq H(X/X^{\infty}) + \varepsilon$$

Na druhej strane

$$H_N(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H(X_i/X^{i-1}) \geq H(X_N/X^{N-1}) \geq H(X/X^{\infty})$$

Pretože $\varepsilon > 0$ je ľubovoľne malé, z týchto nerovností vyplýva, že postupnosť $H_N(X)$, $N = 1,2, \ldots$ konverguje k hodnote $H(X/X^{\infty})$. Z uvedeného dôkazu vety vyplýva, že výdatnosť zdroja informácie nerastie s rastúcim N. To znamená, že ak zdroj vygeneruje v jednom symbole strednú informáciu $H(X)$ a zdroj (X^N,P) v jednej N-tici strednú informáciu $H(X^N)$, potom z rovnosti

$$H(X^N) = nH(X)$$

vyplýva nerovnosť

$$N \leq n$$

t.j. pri kódovaní N-tíc symbolov je potrebná menšia, nanajvýš rovnaká dĺžka kódu než pri kódovaní symbolov jednotlivo, nezávisle na predchádzajúcich symboloch. Nevýhodou takéhoto kódovania je, že na prijímacej strane musíme dekódovať naraz celú N-ticu.

Ak by sme dekódovali po menších blokoch, môže sa stať, že niektoré bloky nie sú jednoznačne dekódovateľné. Rozdeľme preto množinu X^N na disjunktné množiny T_N, $\overline{T}_N$, kde

T_N - množina jednoznačne dekódovateľných slov

$\overline{T}_N$ - množina viacznačne dekódovateľných slov.

Pravdepodobnosť chyby dekódovania je definovaná vzťahom

$$p_e = P(x \in \overline{T}_N)$$

Nech T_N je množina správ (blokov dĺžky N) zdroja informácie, ktorú kódujeme rôznymi znakmi D-nárneho kódu abecedou $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_L\}$, kde všetky znaky majú rovnakú dĺžku

$$m = \frac{\log L}{\log D}$$

(dĺžka vyplýva z podmienky $D^m = L$).

<u>Definícia:</u>

Dvojicu (U, T_N), kde U, T_N sú vyššie uvedené voláme rovnomerným kódom zdroja. Veličinu

$$R = \frac{\log_2 L}{N} \quad [\mathrm{Sh/symbol}]$$

kde L je kapacita kódu (počet znakov), N - dĺžka kódovaných postupností voláme rýchlosťou kódu zdroja (U, T_N).

Ak kód zdroja je binárny, potom rýchlosť kódu zdroja udáva počet binárnych symbolov, ktoré sú potrebné na zakódovanie jedného symbolu zdroja. Pre nebinárne kódy je počet potrebných symbolov kódu

$$m = N \frac{R}{\log_2 D}$$

Pretože počet prvkov v množine T_N nie je väčší než M^N, platí

$$0 \leq R \leq \log M$$

Ak $R = \log M$, potom počet kódových slov sa rovná počtu postupností v množine X^N, t.j. všetky postupnosti môžu byť jednoznačne dekódovateľné.

Množinu X^N s $M^N = 2^{N\log M}$ prvkami sme rozdelili na disjunktné podmnožiny T_N a $\overline{T}_N$, kde množina T_N obsahuje 2^{NR} prvkov a množina $\overline{T}_N$ obsahuje zvyšné prvky.

Z uvedeného vyplýva, že vlastnosti kódu zdroja nezávisia od voľby symbolov kódu ale len od rýchlosti kódu a množine T_N. Preto kód zdroja budeme označovať (R, T_N). Veličiny R a N udávajú kapacitu kódu $L = 2^{NR}$ a T_N udáva množinu postupností symbolov dĺžky N, ktoré sú jednoznačne dekódovateľné.

Poznámka: Všetky dĺžky, ktoré z uvedených vzťahov vychádzajú neceločíselné, chápeme ako najmenšie celé číslo, ktoré nie je menšie než vypočítaná neceločíselná hodnota.

Ukážeme si ďalej niektoré vlastnosti stacionárneho zdroja bez pamäte, ktorý generuje symboly z $\{X, p(x)\}$. Pravdepodobnosť vygenerovania symbolu $\mathbf{x} \in X^N$ bude

$$p(\mathbf{x}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i)$$

Veta:

Nech $T_N(\varepsilon) \subseteq X^N$ je množina takých $\mathbf{x} \in T_N(\varepsilon)$, že

$$N\,[H(X) - \varepsilon] \leq \mathcal{I}(x) = \log \frac{1}{p(\mathbf{x})} \leq N\,[H(X) + \varepsilon]$$

kde $H(X)$ je entropia $\{X, p(x)\}$. Potom pre ľubovoľné malé kladné čísla ε, δ existuje také n, že pre $N > n$

$$p(T_N(\varepsilon)) = \sum_{\mathbf{x} \in T_N(\varepsilon)} p(\mathbf{x}) \geq 1 - \delta \qquad (5)$$

$$(1-\delta)\, 2^{N[H(X)-\varepsilon]} \leq M_\varepsilon \leq 2^{N[H(X)+\varepsilon]} \tag{6}$$

kde M_ε je počet postupností v množine $T_N(\varepsilon)$.

Dôkaz:

Pre stacionárny zdroj bez pamäti platí

$$\mathfrak{I}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \log \frac{1}{p(x_i)} = \sum_{i=1}^{N} \mathfrak{I}(x_i)$$

kde $\mathfrak{I}(x_i)$, $i = 1,2, \ldots, N$ je postupnosť nezávislých náhodných veličín s rovnakým rozdelením. Aplikovaním zákona veľkých čísel na túto postupnosť dostávame, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ existuje také n, že pre $N > n$ platí

$$p\left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathfrak{I}(x_i) - H(X) \right| > \varepsilon \right) \leq \delta$$

alebo

$$p\left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathfrak{I}(x_i) - H(X) \right| \leq \varepsilon \right) \geq 1 - \delta$$

Odtiaľ vyplýva (5). Z predpokladu vety dostávame

$$2^{-N[H(X)-\varepsilon]} \geq p(\mathbf{x}) \geq 2^{-N[H(X)+\varepsilon]}$$

Nech M_ε je počet prvkov množiny $T_N(\varepsilon)$. Platí

$$1 \geq \sum_{\mathbf{x} \in T_N(\varepsilon)} p(\mathbf{x}) \geq M_\varepsilon\, 2^{-N[H(X)+\varepsilon]}$$

Vyjadrením M_ε dostávame pravú časť nerovnosti (6).
Z nerovníc

$$(1-\delta) \leq \sum_{\mathbf{x} \in T_N(\varepsilon)} p(\mathbf{x}) \leq M_\varepsilon\, 2^{-N[H(X)-\varepsilon]}$$

dostaneme ľavú nerovnosť (6).

Veta (priama veta o kódovaní zdroja bez pamäti)

Pre každý stacionárny zdroj bez pamäti s abecedou X existuje pri $R > H(X)$ taká postupnosť kódov

$$\left\{ (R, T_N),\ N = 1,2, \ldots \right\}$$

že platí

$$\lim_{N \to \infty} P_e(R, T_N) = 0$$

Dôkaz:

Nech $R > H(X)$ a $\varepsilon = R - H(X) > 0$. Pre každé N zostrojíme (R, T_N) kód, pre ktorý $T_N = T_N(\varepsilon)$. Potom podľa (5) platí uvedená veta.

Veta (obrátená veta o kódovaní zdroja bez pamäte)

Pre každý stacionárny zdroj bez pamäti s abecedou X existuje pri $R < H(X)$ také číslo $\delta > 0$, že pre každé N a každý kód (R, T_N) je

$$P_e(R, T_N) > \delta$$

Okrem toho pre každú postupnosť kódov (R, T_N), $N = 1, 2, \ldots$ platí

$$\lim_{N \to \infty} P_e(R, T_N) = 1$$

Dôkaz neuvádzame, čitateľ ho môže nájsť v [10]. V tejto literatúre je aj návod dôkazu, že priama a inverzná veta o kódovaní stacionárneho zdroja platí aj všeobecnejšie - pre ergodické zdroje informácie, ak entropiu $H(X)$ nahradíme entropiou $H(X/X^{\infty})$.

Poznámka: Diskrétny stacionárny zdroj voláme ergodickým, ak pre ľubovoľné k, ľubovoľnú reálnu funkciu $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, k$ a ľubovoľné kladné čísla ε, δ existuje také n, že pre všetky $N > n$ platí

$$p\left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi(x_1, \ldots, x_k) - \mathcal{E}[\varphi(x)] \right| > \varepsilon \right) \leq \delta$$

8.5 KANÁL PRENOSU INFORMÁCIE

Nech je daná vstupná abeceda kanála

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{Mx}\}$$

výstupná abeceda kanála

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{My}\}$$

vzdialenosť

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in X^N, \quad \mathbf{y} \in Y^N$$