# 12 Náhodný proces, Bernoulliho model IP prevádzky, Markovov reťazec, základný model buffera.

**Markovova vlastnosť pre udalosti**

$$\Pr(A_1 \cap ... \cap A_n) = \Pr(A_n/A_{n-1}) \cdot \Pr(A_{n-1}/A_{n-2}) \cdot ... \cdot \Pr(A_3/A_2) \cdot \Pr(A_2/A_1) \cdot \Pr(A_1)$$

**Náhodný reťazec s diskrétnym časom**
Náhodný proces s diskrérnym časom $X(t)$ je postupnosť náhodných premenných $\{X_i\}_i$, ktoré v čase $i = t_i$ nadobúdajú hodnotu $s_i$. Hovoríme tiež, že reťazec sa v čase $t_i$ nachádza v stave $s_i$, $X(t_i) = X_i = s_i$. Náhodný proces, ktorý nadobúda hodnoty v diskrétnych časoch, nazveme náhodný reťazec. Množinu $S = \{s_0, s_1, s_2, ...\}$ nazveme množinou stavov náhodného reťazca $X(t)$. Pravdepodobnosť $p_k(t)$ bude označovať pravdepodobnosť, že reťazec sa v čase $t$ nachádza v stave $s_k$:

$$p_k(t) = \Pr(X(t) = s_k)$$

Rozdelenie pravdepodobnosti reťazca v čase $t$ je vektor

$$\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), ...)$$

Počiatočné rozdelenie reťazca:

$$\mathbf{p}(0) = (p_0(0), p_1(0), p_2(0), ...)$$

**Markovova vlastnosť pre náhodný reťazec**

$$\Pr(X(t_n) = s_n/X(t_{n-1}) = s_{n-1}, \cap X(t_{n-2}) = s_{n-2} \cap ... \cap X(t_0) = s_0) =$$

$$= \Pr(X(t_n) = s_n/X(t_{n-1}) = s_{n-1})$$

**Markovov reťazec je náhodný reťazec s Markovovou vlastnosťou**

**Pravdepodobnosti prechodov medzi stavmi Markovovho reťazca:**

$$p_{i,j} = \Pr(X(h) = s_j/X(h-1) = s_i)$$

**Homogénny Markovov reťazec:**
Pravdepodobnosť prechodu medzi stavmi nezáleží od času $h$:

$$\Pr(X(h_1) = s_j/X(h_1 - 1) = s_i) = \Pr(X(h_2) = s_j/X(h_2 - 1) = s_i) = p_{i,j}$$

**Matica prechodov medzi stavmi reťazca: $\mathbf{P} = \{p_{i,j}\}$**

**Vlastnosti matice prechodov:**

**1.** $\forall i, j; \quad p_{i,j} \leq 0$

**2.** $\forall i; \quad \sum_{\forall j} p_{i,j} = 1$

**Príklad 12.1** *Pravdepodobnosť, že sa zariadenie v priebehu dňa pokazí je 0.1. Pravdepodobnosť, že zariadenie bude v priebehu dňa opravené je 0.7. Nech chyby zariadenia sú navzájom nezávislé. Na začiatku systém funguje. Aký je stredný počet dní v mesiaci, počas ktorých systém funguje?*

Stavy systému: $s_1$ - systém funguje, $s_2$ - systém je pokazený. Pravdepodobnosti prechodov: $p_{1,2} = 0.1$, $p_{2,1} = 0.7$. Matica pravdepodobností prechodov $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$. Počiatočné rozdelenie reťazca $\mathbf{p}(0) = (1, 0)$.

Pravdepodobnosť, že systém po jednom dni funguje:

$$p_1(1) = p_1(0)p_{1,1} + p_2(0)p_{2,1} = (p_1(0), p_2(0)) \begin{pmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \end{pmatrix} = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}_{.1} = 1 \cdot 0.9 + 0 \cdot 0.7 = 0.9$$

Pravdepodobnosť, že systém po jednom dni je pokazený:

$$p_2(1) = p_1(0) \cdot p_{1,2} + p_2(0) \cdot p_{2,2} = (p_1(0), p_2(0)) \begin{pmatrix} p_{1,2} \\ p_{2,2} \end{pmatrix} = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}_{.2} = 1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.3 = 0.1$$

Rozdelenie reťazca v čase $t = 1$:

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P} = (1, 0) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.9, 0.1)$$

Rozdelenie reťazca v čase $t = 2$:

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(1) \cdot \mathbf{P} = (0.9, 0.1) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.88, 0.12)$$

Rozdelenie reťazca v čase $t = n$:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1) \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}(n-2) \cdot \mathbf{P}^2 = \mathbf{p}(n-3) \cdot \mathbf{P}^3 = ... = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^n$$

Rozdelenie reťazca v čase $n$ môžeme získať dvoma spôsobmi, buď rekurentne pomocou rozdelenia v predchádzajúcom čase, alebo pomocou $n$-tej mocniny matice. Samozrejme vždy musíme poznať počiatočné rozdelenie reťazca v čase $t = 0$.
Rozdelenie reťazca v čase $t = 3$:

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(2) \cdot \mathbf{P} = (0.88, 0.12) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.876, 0.124)$$

Rozdelenie reťazca v čase $t = 4$:

$$\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(3) \cdot \mathbf{P} = (0.876, 0.124) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.8752, 0.1248) \doteq (0.875, 0.125)$$

Rozdelenie reťazca v čase $n$:

$$\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(3) \cdot \mathbf{P} = (0.8752, 0.1248) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.87504, 0.12496) \doteq (0.875, 0.125)$$

Tranzitívny reťazec (všetky stavy sú navzájom dosiahnuteľné) sa stabilizuje v čase, pravdepodobnosti stavov prestanú závisieť od času:

$$\forall j; \quad \lim_{t\to\infty} p_j(t) = \pi_j, \quad \text{resp.} \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t) = \boldsymbol{\pi}$$

Vektor pravdepodobnosti $\boldsymbol{\pi}$ nazveme stacionárne rozdelenie reťazca (steady-states probabilities). Získame ho limitným prechodom v rekurentných vzťahoch:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1) \cdot \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \pi = \pi \cdot \mathbf{P}$$

Pre príklad dostávame:

$$(\pi_1, \pi_2) = (\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \pi_1 = &\ 0.9\pi_1 + 0.7\pi_2 \\ \pi_2 = &\ 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 0.1\pi_1 - 0.7\pi_2 &= 0 \\ -0.1\pi_1 + 0.7\pi_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 0.1\pi_1 - 0.7\pi_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{1}{7}\,\pi_1$$

Z normovacej podmienky pre pravdepodobnosti dostávame

$$\pi_1 + \pi_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 + \frac{1}{7}\,\pi_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{7}\,\pi_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{7}{8} = 0.875, \quad \pi_2 = 0.125$$

Zariadenie funguje 87.5% z celkového času, z 30 dní je stredný počet dni, kedy funguje:

$$30 \cdot \pi_1 = 30 \cdot 0.875 = 26.5 \text{ dní}$$

**Príklad 12.2 (ALOHA)** *Systém prenosu paketov budeme modelovať tak, že definujeme tri stavy: T - ticho, P - prenos, K - kolízia. Zvolíme časový interval tak malý, že sa počas neho môžu uskutočniť len nasledujúce prechody:*

$$T \to T,\ T \to P, \qquad P \to T,\ P \to P,\ P \to K, \qquad K \to T$$

*Namerali sme pravdepodobnosti týchto prechodov:*
$\Pr(T_n/T_{n-1}) = 0.3, \quad \Pr(P_n/T_{n-1}) = 0.7$
$\Pr(T_n/P_{n-1}) = 0.1, \quad \Pr(P_n/P_{n-1}) = 0.6, \quad \Pr(K_n/P_{n-1}) = 0.3$
$\Pr(T_n/K_{n-1}) = 1$
*Systém môžeme popísať aj homogénnym Markovovým reťazcom s maticou pravdepodobností prechodov*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočítame stacionárne rozdelenie reťazca:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \pi_1 = &\ 0.3\pi_1 + 0.1\pi_2 + \pi_3 \\ \pi_2 = &\ 0.7\pi_1 + 0.6\pi_2 \\ \pi_3 = &\ 0.3\pi_2 \end{aligned}$$

Dostali sme homogénny systém rovníc:

$$\begin{aligned} 0.7\pi_1 - 0.1\pi_2 - \pi_3 = &\ 0 \\ -0.7\pi_1 + 0.4\pi_2 = &\ 0 \\ -0.3\pi_2 + \pi_3 = &\ 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0.7 & -0.1 & -1 \\ -0.7 & 0.4 & 0 \\ 0 & -0.3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.7 & -0.1 & -1 \\ 0 & 0.3 & -1 \\ 0 & -0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0.3\pi_2 = \pi_3, \quad 0.7\pi_1 = 0.1\pi_2 + \pi_3 = 0.4\pi_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{70}{40}\,\pi_1, \quad \pi_3 = 0.3\frac{70}{40}\,\pi_1 = \frac{21}{40}\,\pi_1$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 + \frac{70}{40}\,\pi_1 + \frac{21}{40}\,\pi_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{131}{40}\,\pi_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{40}{131}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{40}{131} = 0.3053, \qquad \pi_2 = \frac{70}{131} = 0.5344, \qquad \pi_3 = \frac{21}{131} = 0.1603$$

Stacionárne rozdelenie reťazca je $\pi = (0.3053,\ 0.5344,\ 0.1603)$. To znamená, že ALOHA z celkovej prevádzky je 30.5% nečinná, 53.4% aktívne vysiela a 16.0% je v kolíznom stave.

**Určenie matice pre systém homogénnych rovníc:**

$$\pi = \pi\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \pi^T = \mathbf{P}^T\pi^T \quad \Rightarrow \quad \pi^T - \mathbf{P}^T\pi^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{E} - \mathbf{P^T})\pi^{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$$

**Príklad 12.3 (Hrací automat)** *Do automatu hodíme guličku jedným z piatich otvorov $s_1, s_3, s_5, s_7, s_9$. Vzápätí sa gulička ocitne na jednej s ďalších pozícií $s_2, s_4, s_6, s_8$. Symbol $\circ$ predstavuje pozíciu guličky, szmbol $+$ rozbočovač, symbol $\bullet$ pozíciu, kde nakoniec gulička skončí:*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | + | $s_3$ | + | $s_5$ | + | $s_7$ | + | $s_9$ |
| + | $s_2$ | + | $s_4$ | + | $s_6$ | + | $s_8$ | + |
| ∘ | + | ∘ | + | ∘ | + | ∘ | + | ∘ |
| + | ∘ | + | ∘ | + | ∘ | + | ∘ | + |
| ∘ | + | ∘ | + | ∘ | + | ∘ | + | ∘ |
| + | ∘ | + | ∘ | + | ∘ | + | ∘ | + |
| ∘ | + | ∘ | + | ∘ | + | ∘ | + | ∘ |
| + | • | + | • | + | • | + | • | + |
| + | 1. | + | 2. | + | 3. | + | 4. | + |

*Aký je rozdiel v dopade guličky, ak ju vhodíme do automatu prvým otovorom $s_1$, alebo stredným otovrom $s_5$?*

Automat môžeme popísať homogénnym Markovovým reťazcom s množinou stavov $S = \{s_1, ..., s_9\}$ a maticou prechodov:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**1.** Vhodíme guličku prvým otovorom:

| | |
|---|---|
| $\mathbf{p}(0) = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ | $\mathbf{p}(4) = (0.375,\ 0,\ 0.5,\ 0,\ 0.125,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ |
| $\mathbf{p}(1) = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ | $\mathbf{p}(5) = (0,\ 0.625,\ 0,\ 0.3125,\ 0,\ 0.0625,\ 0,\ 0,\ 0)$ |
| $\mathbf{p}(2) = (0.5,\ 0,\ 0.5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ | $\mathbf{p}(6) = (0.313,\ 0,\ 0.469,\ 0,\ 0.186,\ 0,\ 0.031,\ 0, 0)$ |
| $\mathbf{p}(3) = (0,\ 0.75,\ 0,\ 0.5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ | $\mathbf{p}(7) = (0,\ 0.547,\ 0,\ 0.328,\ 0,\ 0.109,\ 0,\ 0.016,\ 0)$ |

Najmenšiu šancu, kam gulička dopadne má pozícia 4.

**2.** Vhodíme guličku stredným otovorom:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(0) &= (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\\
\mathbf{p}(1) &= (0,\ 0,\ 0,\ 0.5,\ 0,\ 0.5,\ 0,\ 0,\ 0)\\
\mathbf{p}(2) &= (0,\ 0,\ 0.25,\ 0,\ 0.5,\ 0,\ 0.25,\ 0,\ 0)\\
\mathbf{p}(3) &= (0,\ 0.125,\ 0,\ 0.375,\ 0,\ 0.375,\ 0,\ 0.125,\ 0)\\
\mathbf{p}(4) &= (0.0625,\ 0,\ 0.25,\ 0,\ 0.375,\ 0,\ 0.25,\ 0,\ 0.0625)\\
\mathbf{p}(5) &= (0,\ 0.1875,\ 0,\ 0.3125,\ 0,\ 0.3125,\ 0,\ 0.1875,\ 0)\\
\mathbf{p}(6) &= (0.0938,\ 0,\ 0.25,\ 0,\ 0.3125,\ 0,\ 0.25,\ 0,\ 0.0938)\\
\mathbf{p}(7) &= (0,\ 0.2188,\ 0,\ 0.2813,\ 0,\ 0.2813,\ 0,\ 0.2188,\ 0)
\end{aligned}$$

Šance pre 1. a 4. pozíciu sú menšie než pre 2. a 3., avšak rozdiel nie je až taký veľký.

**Príklad 12.4 (Pamäť počítača)** *Pamäti počítača je systém, ktorý sa skladá z veľmi rýchlej vyrovnávacej (cache) pamäte, rýchlej operačnej pamäte (RAM) a pomalého pevného disku. Počítač má prístup ku každej pamäti a sú povolené aj všetky prechody medzi nimi.*

*Prechody medzi jednotlivými časťami pamäti budeme modelovať ako Markovov reťazec so stavmi systému predstavujúcimi jednotlivé časti pamäte počítača.*

*- stav $s_1$ zodpovedá vyrovnávacej pamäti*
*- stav $s_2$ zodpovedá operačnej pamäti*
*- stav $s_3$ zodpovedá pevnému disku.*

*Matica prechodov je daná nasledovne:*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

*Vypočítajte, aké je stacionárne rozdelenie pre jednotlivé druhy pamäte.*

$$\begin{pmatrix} 0.3 & -0.1 & 0.0 \\ -0.2 & 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.3 & -0.1 & 0.0 \\ 0.1 & 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.3 & -0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7 & -0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = 3\pi_1, \quad \pi_3 = \frac{7}{3}\pi_2 = 7\pi_1 \quad \pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1+3\pi_1+7\pi_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 11\pi_1 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \pi_1 = 0.091, \quad \pi_2 = 0.273, \quad \pi_3 = 0.636$$

Výsledok sa dá interpretovať tak, že z pamätí je najviac využívaný pevný disk (hard disk), 63.6%, potom operačná pamäť (RAM), 27.3% a najmenej vyrovnávacia pamäť (cache), 9.1% z celkového využitia pamätí.

### Modely IP prevádzky

Náhodný preces $A(n)$ predstavuje počet výskytov paketov za $n$ časových slotov. Počet paketov v $i$-tom slote modeluje náhodná premenná $a_i$. Ak predpokladáme, že premenné $a_i$ majú rovnaké rozdelenie a sú navzájom nezávislé, budeme tok $A(n)$ nazývať stacionárny s i.i.d. prírastkami. Platí

$$A(n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

**Bernoulliho proces**

Nech náhodné premenné $a_i$ sú Bernoulliho a majú alternatívne rozdelenie:

$$a_i \sim Alt(p); \quad PDF(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

Náhodný proces $A(n)$ má Binomické rozdelenie:

$$A(n) \sim Bi(n, p); \quad PDF_n(k) = \Pr(A(n) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n$$

Stredný počet vysielaných paketov za $n$-časových slotov je $EA(n) = np$.

Nech náhodná premenná $T$ modeluje medzery v Bernoulliho toku, potom

$$T \sim Geo(p); \quad PDF_T(t) = \Pr(T = t) = q^t p, \quad t = 0, 1, 2, ...$$

Nech náhodná premenná $Z$ modeluje paketové zhluky v Bernoulliho toku, potom

$$Z \sim Geo(q); \quad PDF_Z(z) = \Pr(Z = z) = p^z q, \quad z = 0, 1, 2, ...$$

Pre Bernoulliho proces platí:

$$ET = \frac{q}{p}, \quad EN = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad ET = \frac{1}{EN}$$

Ak posledná rovnosť nie je pre nameraný tok splnená, musíme siahnuť po iných modeloch.

**Príklad 12.5 (Buffer)** *Vstup a výstup je Bernoulliho proces, pravdepodobnosť výskytu paketu v ms je $\alpha = 0.04$, pravdepodobnosť vyslatia paketu v ms je $\beta = 0.08$. Buffer má 4 miesta na pakety vrátane vysielacieho miesta. Matica pravdepodobnsoti prechodov $\boldsymbol{P}$ má tvar:*

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta(1\text{-}\alpha) & 1-\beta(1\text{-}\alpha)-\alpha(1\text{-}\beta) & \alpha(1\text{-}\beta) & 0 & 0 \\ 0 & \beta(1\text{-}\alpha) & 1-\beta(1\text{-}\alpha)-\alpha(1\text{-}\beta) & \alpha(1\text{-}\beta) & 0 \\ 0 & 0 & \beta(1\text{-}\alpha) & 1-\beta(1\text{-}\alpha)-\alpha(1\text{-}\beta) & \alpha(1\text{-}\beta) \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Systém homogénnych lineárnych rovníc $(\mathbf{E} - \mathbf{P^T})\pi^\mathbf{T} = \mathbf{0}$ má maticu koefincientov:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & \beta(1\text{-}\alpha)+\alpha(1\text{-}\beta) & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(1\text{-}\beta) & \beta(1\text{-}\alpha)+\alpha(1\text{-}\beta) & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha(1\text{-}\beta) & \beta(1\text{-}\alpha)+\alpha(1\text{-}\beta) & -\beta(1\text{-}\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha(1\text{-}\beta) & \beta \end{pmatrix}$$

Maticu upravíme na trojuholníkový tvar pomocou riadkovo ekvivalentných úprav, budeme postupne sčítavať riadky odhora nadol:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(1\text{-}\beta) & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha(1\text{-}\beta) & \beta(1\text{-}\alpha)+\alpha(1\text{-}\beta) & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha(1\text{-}\beta) & \beta(1\text{-}\alpha)+\alpha(1\text{-}\beta) & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha(1\text{-}\beta) & \beta \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \alpha & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(1\text{-}\beta) & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1\text{-}\beta) & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha(1\text{-}\beta) & \beta(1\text{-}\alpha)+\alpha(1\text{-}\beta) & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha(1\text{-}\beta) & \beta \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \alpha & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(1\text{-}\beta) & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1\text{-}\beta) & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(1\text{-}\beta) & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha(1\text{-}\beta) & \beta \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \alpha & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(1\text{-}\beta) & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1\text{-}\beta) & -\beta(1\text{-}\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(1\text{-}\beta) & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Získali sme rekurentné vzťahy pre pravdepodobnosti stavov:

$$\pi_1 = \frac{\alpha}{\beta(1\text{-}\alpha)}\pi_0, \quad \pi_2 = \frac{\alpha(1\text{-}\beta)}{\beta(1\text{-}\alpha)}\pi_1, \quad \pi_3 = \frac{\alpha(1\text{-}\beta)}{\beta(1\text{-}\alpha)}\pi_2, \quad \pi_4 = \frac{\alpha(1\text{-}\beta)}{\beta}\pi_3,$$

Pre dané pravdepodobnosti $\alpha = 0.04, \quad \beta = 0.08$ platí:

$$\pi_1 = 0.52083\ \pi_0, \quad \pi_2 = 0.47917\ \pi_1, \quad \pi_3 = 0.47917\ \pi_2, \quad \pi_4 = 0.46000\ \pi_3,$$

Vyjadríme všetky pravdepodobnosti pomocou $\pi_0$:

$$\pi_1 = 0.52083\ \pi_0, \quad \pi_2 = 0.24957\ \pi_0, \quad \pi_3 = 0.11959\ \pi_0, \quad \pi_4 = 0.05501\ \pi_0,$$

Pravdepodobnosť $\pi_0$ získame z normovacej podmienky:

$$\sum_{i=0}^{4} \pi_i = 1 \quad \Rightarrow \quad [1 + 0.52083 + 0.24957 + 0.11959 + 0.05501]\pi_0 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = 0.51414, \quad \pi_1 = 0.26778, \quad \pi_2 = 0.12831, \quad \pi_3 = 0.06148, \quad \pi_4 = 0.02825$$

Ak sú $\alpha$ a $\beta$ veľmi malé, môžeme súčin $\alpha\beta$ zanedbať:

$$\alpha(1\text{-}\beta) = \alpha - \alpha\beta = \alpha, \quad \beta(1\text{-}\alpha) = \beta - \alpha\beta \doteq \beta \quad \Rightarrow \quad \pi_k = \frac{\alpha}{\beta}\pi_{k-1} \quad \Rightarrow \quad \pi_k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \pi_0$$

Ak označíme $\varrho = \dfrac{\alpha}{\beta}$, potom $\pi_k = \varrho^k \pi_0$. Pravdepodobnosť $\pi_0$ vypočítame z normovacej podmienky.

Ak je buffer nekonečný, platí:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k \pi_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi_0}{1-\varrho} = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 1 - \varrho$$

Nech náhodná premenná $K$ popisuje počet paketov v bufferi.

$$PDF_K(k) = \Pr(K = k) = \varrho^k(1-\varrho) \quad \Rightarrow \quad K \sim Geo(1-\varrho)$$

Stredný počet paketov v bufferi je $\quad EK = \dfrac{\varrho}{1-\varrho}$.