Toky v sieťach

Stanislav Palúch

Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita

12. apríla 2011

Sieť

Definícia

Sieťou *nazveme neorientovane súvislý hranovo ohodnotený digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$, *v ktorom ohodnotenie* $c(h) > 0$ *každej hrany* $h \in H$ *je celočíselné a predstavuje priepustnosť hrany h, a v ktorom existuje*

- *práve jeden vrchol z taký, že* $\mathrm{ideg}(z) = 0$ – **zdroj** *a*
- *práve jeden vrchol taký u, že* $\mathrm{odeg}(u) = 0$ – **ústie**.

Značenie: Pre každý vrchol $v \in V$ digrafu $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ je

- $H^+(v)$ množina všetkých hrán z vrchola v vychádzajúcich a
- $H^-(v)$ množina všetkých hrán do vrchola v vchádzajúcich.

Tok v sieti

Definícia

Tokom v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ *nazveme* [redacted] *funkciu* $\mathbf{y} : H \to \mathbb{R}$ *definovanú na množine orientovaných hrán H, pre ktorú platí:*

$$1. \quad \mathbf{y}(h) \geq 0 \quad \textit{pre všetky } h \in H \tag{1}$$

$$2. \quad \mathbf{y}(h) \leq c(h) \quad \textit{pre všetky } h \in H \tag{2}$$

$$3. \quad \sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h) \quad \textit{pre všetky také } v \in V, \quad \textit{že } v \neq u, \quad v \neq z \tag{3}$$

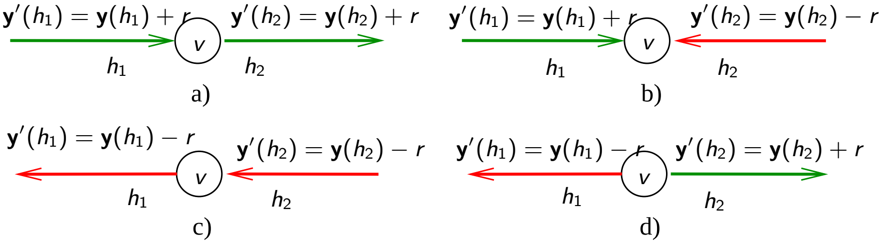
$$4. \quad \sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h) \tag{4}$$

Veľkosťou *toku* $\mathbf{y}$ *nazveme číslo* $F(\mathbf{y}) = \sum_{h \in H^+(z)} \mathbf{y}(h)$ *(ktoré sa rovná* $\sum_{h \in H^-(u)} \mathbf{y}(h)$*).*

Zväčšujúca cesta umožňuje zväčšiť tok

Platnosť Kirchhoffovho zákona z definície toku

$$\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h) = \sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h) \quad \text{pre všetky také } v \in V, \quad \text{že } v \neq u, \ v \neq z$$



Štyri možnosti orientácie hrán incidentných s vrcholom v na rezervnej poloceste.

a) $\mathbf{y}'(h_1)$ zväčší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\mathbf{y}'(h_2)$ zväčší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

b) $\mathbf{y}'(h_1)$ zväčší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\mathbf{y}'(h_2)$ zmenší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

c) $\mathbf{y}'(h_1)$ zmenší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\mathbf{y}'(h_2)$ zmenší $\sum_{h \in H^-(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

d) $\mathbf{y}'(h_1)$ zmenší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r, $\mathbf{y}'(h_2)$ zväčší $\sum_{h \in H^+(v)} \mathbf{y}(h)$ o r

Definícia

Hovoríme, že tok $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G}$ *je* **maximálny**, *ak má najväčšiu veľkosť zo všetkých možných tokov v sieti* $\overrightarrow{G}$.
Orientovanú hranu $h \in H$ *nazveme* **nasýtenou**, *ak* $\mathbf{y}(h) = c(h)$.

Poznámka

- *Tok v sieti je teda reálna funkcia* $\mathbf{y} : H \to \mathbb{R}$ *definovaná na množine všetkých hrán. Číslo* $\mathbf{y}(h)$ *je funkčná hodnota funkcie* $\mathbf{y}$ *v jednom prvku* h *svojho definičného oboru (porovnaj* $\mathbf{y}$ *a* $\mathbf{y}(h)$ *s dvojicou pojmov funkcia* $\log$ *a* $\log(2)$*) a budeme ho volať* **tok hranou** h.
- *Tok* $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G}$ *je vlastne ďalšie hranové ohodnotenie, takže sieť* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *môžeme považovať za digraf* $\overrightarrow{G} = (V, H, c, \mathbf{y})$ *s dvomi ohodnoteniami hrán.*

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, \mathbf{y})$ *je sieť s tokom* $\mathbf{y}$, *nech* $v,\ w \in V$.
Nech $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je* v–w *polocesta, nech* h *je orientovaná hrana tejto polocesty.*
Definujeme $r(h)$ **rezervu hrany** *v poloceste* $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *nasledovne:*

$$r(h) = \begin{cases} c(h) - \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v } \boldsymbol{\mu}(v,w) \text{ v smere orientácie} \\ \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v } \boldsymbol{\mu}(v,w) \text{ proti smeru orientácie} \end{cases} \tag{5}$$

Rezerva polocesty $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je minimum rezerv hrán tejto polocesty.*

Hovoríme, že polocesta $\boldsymbol{\mu}(v, w)$ *je* **rezervná polocesta** *ak má kladnú rezervu.*
Rezervná polocesta $\boldsymbol{\mu}(z, u)$ *zo zdroja do ústia sa nazýva* **zväčšujúca polocesta**.

Fordova – Fulkersonova veta o maximálnom toku

Veta (Ford – Fulkerson)

Tok $\mathbf{y}$ v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$ so zdrojom z a ústím u je maximálny práve vtedy, keď neexistuje z–u zväčšujúca polocesta.

Algoritmus

Fordov – Fulkersonov algoritmus na hľadanie maximálneho toku v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c)$.

- **Krok 1.** *Zvoľ v sieti začiatočný tok* $\mathbf{y}$, *napríklad nulový tok.*
- **Krok 2.** *Nájdi v sieti* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *zväčšujúcu polocestu* $\boldsymbol{\mu}(z, u)$.
- **Krok 3.** *Ak zväčšujúca polocesta neexistuje, tok* $\mathbf{y}$ *je maximálny. STOP.*
- **Krok 4.** *Ak zväčšujúca polocesta* $\boldsymbol{\mu}(z, u)$ *existuje a má rezervu* r, *zmeň tok* $\mathbf{y}$ *nasledujúco:*

$$\mathbf{y}(h) := \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na ceste } \boldsymbol{\mu}(z,u) \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

GOTO Krok 2.

♣

Najlacnejší tok danej veľkosti

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *je sieť, kde* $d(h)$ *je ďalšie ocenenie hrany* h *predstavujúce cenu za jednotku toku na hrane* h. *Nech* $\mathbf{y}$ *je tok v sieti* $\overrightarrow{G}$. **Cena toku y** *je definovaná*

$$\boxed{D(\mathbf{y}) = \sum_{h \in H} d(h).\mathbf{y}(h)}$$

Definícia

Najlacnejší tok *danej veľkosti* F *je ten tok veľkosti* F, *ktorý má zo všetkých tokov veľkosti* F *najmenšiu cenu.*

Poznámka

Analogicky možno definovať najdrahší tok danej veľkosti.

Poznámka

Veľmi častou praktickou úlohou je hľadanie najlacnejšieho maximálneho toku.

Rezerva hrany v polocykle, rezervný polocyklus

Definícia

Nech $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *je sieť s tokom* $\mathbf{y}$, C *polocyklus v sieti* $\overrightarrow{G}$.

Rezerva $r(h)$ **orientovanej hrany** h **v polocykle** C *je*

$$r(h) = \begin{cases} c(h) - \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v polocykle } C \text{ v smere orientácie} \\ \mathbf{y}(h) & \text{ak je hrana } h \text{ použitá v v polocykle } C \text{ proti smeru orientácie} \end{cases}$$

Rezerva polocyklu C *je minimum rezerv jeho hrán.*

Polocyklus C *nazveme* **rezervný polocyklus**, *ak jeho rezerva je kladná.*

Cena $d(C)$ **polocyklu** C *je definovaná ako súčet cien hrán súhlasne orientovaných s polocyklom mínus súčet cien hrán s ním opačne orientovaných.*

Kritérium optimality toku

Veta

Tok $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *je najlacnejším tokom svojej veľkosti práve vtedy, ak v sieti* $\overrightarrow{G}$ *neexistuje rezervný polocyklus zápornej ceny.*

Algoritmus

Algoritmus na hľadanie najlacnejšieho toku danej veľkosti v sieti $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$.

- **Krok 1.** *Začni tokom* $\mathbf{y}$ *v sieti* $\overrightarrow{G} = (V, H, c, d)$ *danej veľkosti.*
- **Krok 2.** *V sieti* $\overrightarrow{G}$ *s tokom* $\mathbf{y}$ *nájdi rezervný polocyklus* C *so zápornou cenou a rezervou* r, [redacted]
- **Krok 3.** *Ak rezervný polocyklus zápornej ceny neexistuje, tok* $\mathbf{y}$ *je najlacnejší zo všetkých tokov svojej veľkosti. STOP.*
- **Krok 4.** *Ak taký polocyklus* C *existuje, zmeň tok* $\mathbf{y}$ *nasledujúco:*

$$\mathbf{y}(h) := \begin{cases} \mathbf{y}(h) & \text{ak } h \text{ neleží na polocykle } C \\ \mathbf{y}(h) + r & \text{ak } h \text{ leží na polocykle } C \text{ v smere svojej orientácie} \\ \mathbf{y}(h) - r & \text{ak } h \text{ leží na polocykle } C \text{ proti smeru svojej orientácie} \end{cases}$$

GOTO Krok 2.

♣