Obyčajné diferenciálne rovnice

Lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu s konštantnými koeficientmi

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

4. decembra 2012

Lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu s konštantnými koeficientmi

Je rovnica v tvare

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \qquad (1)$$

kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, n$ a predpokladáme $a_n \neq 0$.

Ak $f(x) \equiv 0$ nazývame ju homogénna a ak $f(x) \neq 0$, tak hovoríme o rovnici nehomogénnej.

Každé riešenie rovnice (1) je súčtom všeobecného a partikulárneho riešenia.

Lineárna diferenciálna rovnica n-tého rádu s konštantnými koeficientmi

Všeobecným riešením rovnice (1) rozumieme riešenia pridruženej homogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Partikulárnym riešením rovnice (1) rozumieme ľubovoľné riešenie pôvodnej nehomogénnej rovnice.

Hovoríme, že funkcie $y_1, \ldots, y_n$ tvoria fundamentálny systém riešení rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

ak ich wronskián

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & , & y_2 & , \ldots , & y_n \\ y_1' & , & y_2' & , \ldots , & y_n' \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(n-1)} & , & y_2^{(n-1)} & , \ldots , & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

je rôzny od nuly.

Charakteristická rovnica

Charakteristickou rovnicou rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

nazývame rovnicu

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Jednoduché reálne korene

Ak charakteristická rovnica homogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

má len jednoduché reálne korene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Potom fundamentálny systém riešení tvoria funkcie

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}.$$

Všeobecné riešenie má teda tvar

$$y = C_1 \,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \,\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n \,\mathrm{e}^{\lambda_n x}.$$

Násobný reálny koreň

Ak charakteristická rovnica homogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

má m–násobný reálny koreň λ, tak funkcie

$$e^{\lambda x}, x\, e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1}\, e^{\lambda x},$$

sú lineárne nezávislými riešeniami homogénnej rovnice.
Sú teda súčasťou fundamentálneho systému riešení.

Ak charakteristická rovnica homogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

má jednoduchý komplexný koreň $\lambda = \alpha + \beta\,\mathrm{i}$, tak má aj komplexne združený koreň $\overline{\lambda} = \alpha - \beta\,\mathrm{i}$. Týmto koreňom zodpovedajú riešenia v tvare

$$\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\,\mathrm{i})x}, \mathrm{e}^{(\alpha-\beta\,\mathrm{i})x},$$

odkiaľ s pomocou Eulerových vzťahov dostávame riešenia

$$\mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Ak charakteristická rovnica homogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

má m–násobný komplexný koreň $\lambda = \alpha + \beta\,\mathrm{i}$, tak má aj komplexne združený koreň $\overline{\lambda} = \alpha - \beta\,\mathrm{i}$ rovnakej násobnosti. Týmto koreňom zodpovedajú riešenia v tvare

$$\begin{array}{l} \mathrm{e}^{(\alpha+\beta\,\mathrm{i})x}\,,\, x\,\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\,\mathrm{i})x}\,,\, \ldots\,,\, x^{m-1}\,\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\,\mathrm{i})x}\,, \\ \mathrm{e}^{(\alpha-\beta\,\mathrm{i})x}\,,\, x\,\mathrm{e}^{(\alpha-\beta\,\mathrm{i})x}\,,\, \ldots\,,\, x^{m-1}\,\mathrm{e}^{(\alpha-\beta\,\mathrm{i})x}\,, \end{array}$$

odkiaľ opäť s pomocou Eulerových vzťahov dostávame riešenia

$$\begin{array}{l} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,,\, x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,,\, \ldots\,,\, x^{m-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \\ \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,,\, x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,,\, \ldots\,,\, x^{m-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x. \end{array}$$

Príklady

Určte fundamentálny systém riešení a všeobecné riešenie rovnice

1. $y'' - 5y' - 6y = 0,$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0,$
3. $y'' + 5y' - 2y = 0,$
4. $y'' - 6y' + 13y = 0,$
5. $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0,$
6. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0,$
7. $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0,$
8. $y''' + 8y'' + 25y' + 26y = 0,$
9. $y''' + 4y'' + 4y' - 9y = 0.$

Variácia konštánt

Hľadáme riešenie nehomogénnej rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Nech funkcie $y_1, \ldots, y_n$ tvoria fundamentálny systém riešení rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice hľadáme v tvare

$$y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots C_n(x) y_n.$$

Derivovaním a dosadením do pôvodnej rovnice dostávame pre derivácie funkcií $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ systém rovníc

$$\begin{array}{ccccc}
C_1'y_1 & +\cdots+ & C_n'y_n & = & 0 \\
C_1'y_1' & +\cdots+ & C_n'y_n' & = & 0 \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
C_1'y_1^{(n-2)} & +\cdots+ & C_n'y_n^{(n-2)} & = & 0 \\
C_1'y_1^{(n-1)} & +\cdots+ & C_n'y_n^{(n-1)} & = & \frac{f(x)}{a_n}
\end{array}$$

Príklady

Určte riešenie diferenciálnej rovnice:

1. $y''' - 2y'' + y' = \frac{e^x}{1+x}$
2. $y'' - y' = \frac{e^x}{e^x+1}$
3. $2y'' + 5y' = \cos^2 x$
4. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$
5. $y'' + y = -\operatorname{cotg}^2 x$

Špeciálny tvar pravej strany

Ak pravá strana rovnice má niektorý z tvarov:

- $P_m(x)$,
- $P_m(x) \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}$,
- $P_m(x) \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x$,
- $P_m(x) \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$,

kde $P_m(x)$ je polynóm stupňa m, tak partikulárne riešenie môžeme určiť metódou tzv. neurčitých koeficientov.

Riešenie hľadáme v rovnakom tvare ako je pravá strana rovnice tak, že dourčíme neznáme (neurčité) koeficienty.

Pravá strana $P_m(x)$

Ak nula nie je koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = Q_m(x)$$

kde $Q_m(x)$ je polynóm rovnakého stupňa ako $P_m(x)$.

Ak nula je k–násobným koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = x^k \cdot Q_m(x)$$

kde $Q_m(x)$ je opäť polynóm rovnakého stupňa ako $P_m(x)$.

Pravá strana $P_m(x) \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}$

Ak α nie je koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = Q_m(x) \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}$$

kde $Q_m(x)$ je polynóm rovnakého stupňa ako $P_m(x)$.

Ak α je k–násobným koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = x^k \cdot Q_m(x) \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}$$

kde $Q_m(x)$ je opäť polynóm rovnakého stupňa ako $P_m(x)$.

Ak $\alpha + i\beta$ nie je koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = Q_{1m}(x) \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{2m}(x) \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x$$

kde $Q_{1m}(x)$ a $Q_{2m}(x)$ sú polynómy rovnakého stupňa ako $P_m(x)$.

Ak $\alpha + i\beta$ je k–násobným koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare

$$y = x^k (Q_{1m}(x) \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{2m}(x) \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x)$$

kde $Q_{1m}(x)$ a $Q_{2m}(x)$ sú opäť polynómy rovnakého stupňa ako $P_m(x)$.

Určte všetky riešenia rovnice

1. $y'' - 4y' + 4y = x^2$,
2. $y^{(4)} - 2y'' - y' = x^2 - 2x + 2$,
3. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3x\,\mathrm{e}^x$,
4. $y'' + y' - 2y = x\,\mathrm{e}^{-2x}$,
5. $y'' - y = x\cos x\,\mathrm{e}^x$,
6. $y'' + 4y = x\sin 2x$,
7. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = (x+1)\,\mathrm{e}^x$,
8. $y'' + y = \sin x - 2\,\mathrm{e}^{-x}$
9. $y'' + 3y' = 9x$,
10. $y'' - y = (x-1)\sin 2x$.