5.4 ČASOVO INVARIANTNÝ LINEÁRNY KANÁL SO SPOJITÝM ČASOM

Spojitý signál môžeme reprezentovať v báze posunutých Diracových impulzov

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, \delta(t - \tau)\, d\tau$$

Ako odozva časovo invariantného lineárneho kanála na Diracov impulz je

$$g(t) = \mathcal{K}(\delta(t))$$

potom

$$y(t) = \mathcal{K}(u(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, \mathcal{K}(\delta(t - \tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, g(t - \tau)\, d\tau$$

$$y(t) = u(t) * g(t)$$

Ak vstupným signálom je harmonický signál

$$u(t) = \cos \omega t$$

výstupný signál bude

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cos \omega (t - \tau)\, d\tau$$

Použitím goniometrického vzorca

$$\cos \omega (t - \tau) = \sin \omega t \sin \omega \tau + \cos \omega t \cos \omega \tau$$

a vybratím pred integrál dostaneme

$$y(t) = \sin \omega t \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \sin \omega \tau\, d\tau + \cos \omega t \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cos \omega \tau\, d\tau$$

Tento vzťah môžeme písať v tvare

$$y(t) = A \cos(\omega t - \alpha)$$

pretože po rozpísaní

$$f_2(t) = A \cos \alpha \cos \omega t + A \sin \alpha \sin \omega t$$

a porovnaním s predchádzajúcim vzorcom dostávame

$$A \sin \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau$$

$$A \cos \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau$$

Odozvou lineárneho kanála na harmonický signál je teda opäť harmonický signál s amplitúdou

$$A = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau \right)^2}$$

a fázovým posunutím

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau}$$

Ďalej budeme opäť študovať len také kanály, pre ktoré platí

$$\sum_{k=0}^{M_1-1} a_k u_{(t)}^{(k)} = \sum_{k=0}^{M_2-1} b_k y_{(t)}^{(k)}$$

kde

$$u_{(t)}^{(k)} = \frac{d^k}{dt^k} u(t) \; , \quad y_{(t)}^{(k)} = \frac{d^k}{dt^k} y(t) \; .$$

Ak na diferenciálnu rovnicu aplikujeme Fourierovu transformáciu, dostaneme spektrálny prenos v systéme komplexných harmonických signálov, ktorý voláme frekvenčný prenos

$$\sum_{k=0}^{M_1-1} a_k \mathcal{F} \left\{ u_{(t)}^{(k)} \right\} = \sum_{k=0}^{M_2-1} b_k \mathcal{F} \left\{ y_{(t)}^{(k)} \right\}$$

$$F_u(j\omega) \sum_{k=0}^{M_1-1} a_k (j\omega)^k = F_y(j\omega) \sum_{k=0}^{M_2-1} b_k (j\omega)^k$$

ak označíme

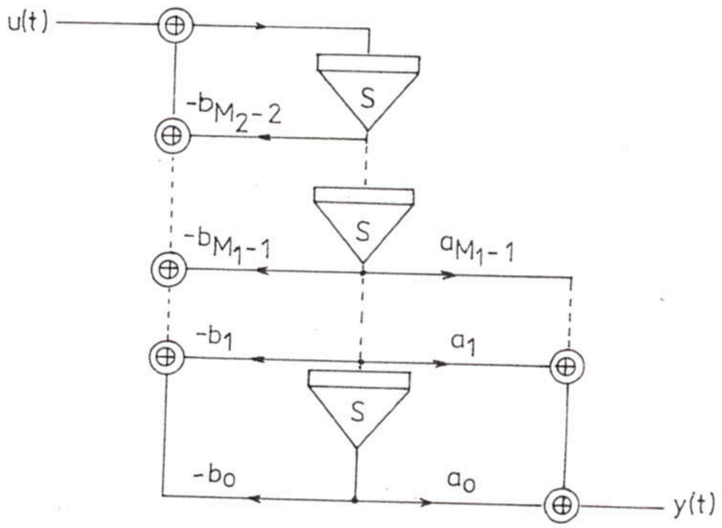
$$F(j\omega) = \frac{F_y(j\omega)}{F_u(j\omega)}$$

potom

$$F(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M_1-1} a_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{M_2-1} b_k(j\omega)^k}$$

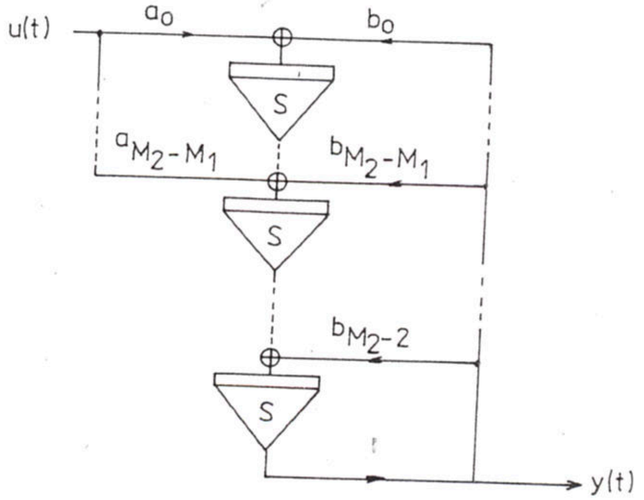
Vo frekvenčnom prenose $F(j\omega) = |F(n)|\, e^{j\varphi(n)}$ nazývame $|F(\omega)|$ amplitúdový prenos a $\varphi(\omega)$ fázový prenos kanála.

Kanál modelovaný diferenciálnou rovnicou je z hľadiska šumových pomerov výhodnejšie realizovať po M_2-1 násobnom integrovaní diferenciálnej rovnice. Priama kanonická forma má potom tvar uvedený na obr. 10 ($b_{M_2-1} = 1$).



Obr. 10
Realizácia priamou kanonickou formou

Inú kanonickú formu môžeme realizovať zapojením na obr. 11 ($b_{M_2-1} = 1$).



Obr. 11
Realizácia inou kanonickou formou

Pre prenos informácie sa snažíme, aby kanál mal ideálny prenos, t.j. taký, že výstupný signál bude mať rovnaký tvar (až na veľkosť a časové posunutie) ako vstupný signál, t.j. ak

$$y(t) = \mathcal{K}(u(t))$$

potom

$$ku(t - \tau) = \mathcal{K}_{id}(u(t)), \quad k \neq 0, \quad \tau \geq 0$$

Z vlastností Fourierovej transformácie vyplýva, že ideálny frekvenčný prenos má konštantný amplitúdový a lineárny fázový prenos

$$F(j\omega) = ke^{j\omega\tau}$$

(Presvedčte sa o tom aplikovaním Fourierovej transformácie na predchádzajúcu rovnicu v časovej oblasti.)

Ekvivalentnou charakteristikou k fázovému prenosu $\varphi(\omega)$ je skupinové oneskorenie $a(\omega)$, ktoré je definované vzťahom

$$a(\omega) = \frac{d}{d\omega}\varphi(\omega)$$

Skupinové oneskorenie ideálneho kanála je

$$a(\omega) = \tau$$

Na ilustráciu vplyvu nelineárneho fázového prenosu na skupinové oneskorenie vypočítajme odozvu kanála na harmonický signál $\cos \omega_0 t$, ktorý je modulovaný signálom $1 + A \cos \varepsilon t$, kde $\varepsilon \to 0^+$. Vstupný signál potom je

$$u(t) = (1 + A \cos \varepsilon t) \cos \omega_0 t$$

resp. po úprave

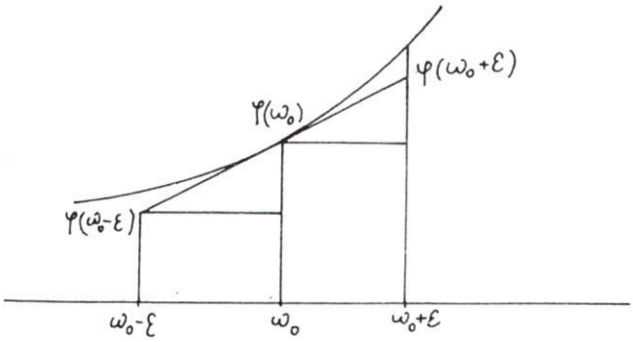
$$u(t) = \cos \omega_0 t + \frac{A}{2}\left[\cos(\omega_0 + \varepsilon)t + \cos(\omega_0 - \varepsilon)t\right]$$

Pri prechode signálu, ktorý sa skladá z troch harmonických signálov, dôjde k fázovému posunu jeho zložiek o

$\varphi(\omega_0)$ - na kruhovej frekvencii ω_0

$\varphi(\omega_0) + \varepsilon\left[\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_0}$ - na kruhovej frekvencii $\omega + \varepsilon$

$$\varphi(\omega_o) - \varepsilon \left[\frac{d\,\varphi(\omega)}{d\,\omega} \right]_{\omega = \omega_o}$$ - na kruhovej frekvencii $\omega - \varepsilon$



Obr. 12
Zložky spektra signálu u(t)

Výstupný signál bude

$$y(t) = \cos\left[\omega_o t - \varphi(\omega_o)\right] + \frac{A}{2}\cos\left\{(\omega_o + \varepsilon)t + \varepsilon\left[\frac{d\,\varphi(\omega)}{d\,\omega}\right]_{\omega = \omega_o} - \varphi(\omega_o)\right\} + \frac{A}{2}\cos\left\{(\omega_o - \varepsilon)t - \varepsilon\left[\frac{d\,\varphi(\omega)}{d\,\omega}\right]_{\omega = \omega_o} - \varphi(\omega_o)\right\}$$

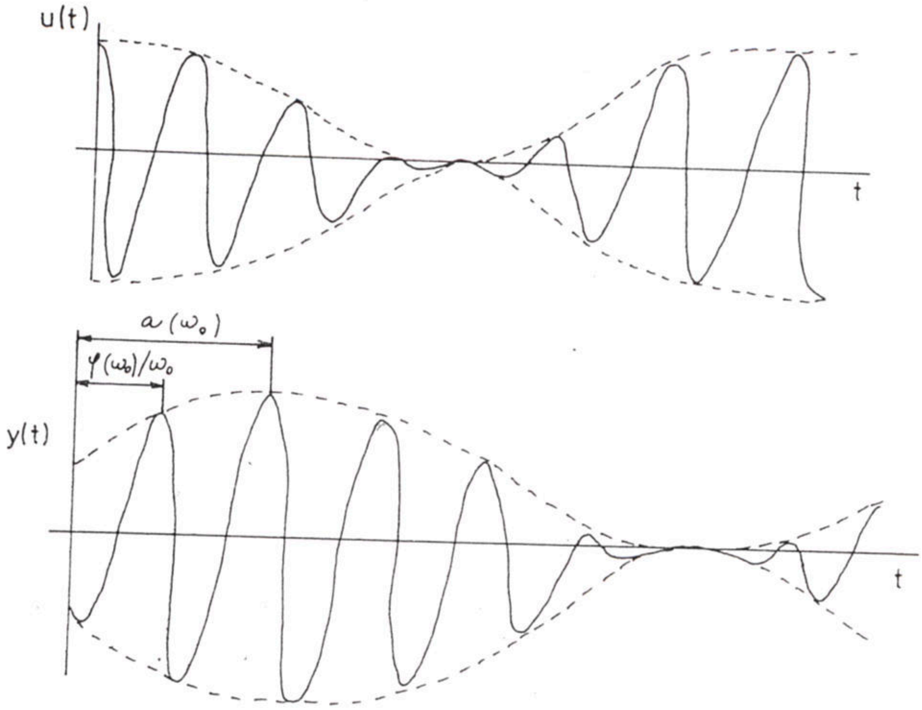
Po úprave pomocou vzťahu

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right]$$

dostaneme

$$y(t) = \left\{1 + A\cos\varepsilon\left\{t - \left[\frac{d\,\varphi(\omega)}{d\,\omega}\right]_{\omega = \omega_o}\right\}\right\}\cos\omega_o\left[t - \frac{\varphi(\omega_o)}{\omega_o}\right]$$

takže skupinové oneskorenie spôsobilo posunutie obálky modulovaného signálu. Táto vlastnosť sa používa na meranie skupinového oneskorenia kanála.



Obr. 13
Vstupný a výstupný signál pri meraní skupinového oneskorenia

5.5 PRECHOD NÁHODNÉHO SIGNÁLU LINEÁRNYM SPOJITÝM KANÁLOM

Nech $\mathcal{K}$ je časovo invariantný lineárny, rovnomerne spojitý kanál s nulovým počiatočným stavom. Ak na jeho vstup privedieme náhodný signál $u(\omega, t)$, $\omega \in (\Omega, \varphi, P)$, $t \in (-\infty, \infty)$, ktorý je stacionárny, resp. ergodický, potom aj výstupný signál $y(\omega, t)$ je stacionárny, resp. ergodický. Pre odozvu kanála $\mathcal{K}$ na vstupný signál $u(\omega, t)$ platí

$$y(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, u(\omega, t - \tau)\, d\tau$$

kde $g(t)$ je impulzná charakteristika kanála $\mathcal{K}$ a integrál je stochastickým integrálom. Z hľadiska korelačnej teórie je dynamika náhodného signálu úplne popísaná kovariančnou funkciou. Ak ďalej predpokladať, že $u(\omega, t)$ je stacionárny, potom jeho kovariančná funkcia

$$R_u(\tau) = \mathcal{E}\left\{ u(\omega, 0) \,.\, u(\omega, \tau) \right\}$$

a kovariančná funkcia výstupného signálu

$$R_y(\tau) = \mathcal{E}\left\{ y(\omega, 0) \,.\, y(\omega, \tau) \right\}$$

Po vyjadrení výstupného signálu

$$y(\omega, o) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)\, u(\omega_1 - \tau_1)\, d\tau_1$$

$$y(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)\, u(\omega, \tau - \tau_1)\, d\tau_1$$

dostávame po prepise na dvojnásobný integrál

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)\, g(\tau_2)\, \mathcal{E}\left\{ x(\omega - \tau_1) . x(\omega, \tau - \tau_2)\right\} d\tau_1\, d\tau_2$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)\, g(\tau_2)\, R_x(\tau + \tau_1 - \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2$$

Jednoduchší vzťah dostaneme pre spektrálnu výkonovú hustotu výstupného signálu

$$F_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$F_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)\, g(\tau_2) \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \tau_1 - \tau_2) e^{-j\omega\tau}\, d\tau\, d\tau_1\, d\tau_2$$

po substitúcii $z = \tau + \tau_1 - \tau_2$ a úprave

$$F_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)\, e^{j\omega\tau_1}\, d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2)\, e^{-j\omega\tau_2}\, d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(z) e^{-j\omega z}\, dz$$

$$F_y(\omega) = F(-j\omega) \,.\, F(j\omega) \,.\, F_x(\omega)$$

$$F_y(\omega) = \left| F(j\omega) \right|^2 . \, F_x(\omega)$$

5.6 NÁHODNÝ KANÁL

Doposiaľ sme predpokladali, že priradenie výstupného signálu z kanála k vstupnému signálu

$$y(t) = \mathcal{K}(u(t))$$

je jednoznačné. Kanál s touto vlastnosťou voláme deterministický kanál. V skutočnosti odozvy kanála na ten istý vstupný signál môžu byť následkom náhodných vplyvov rôzne. Takýmito vplyvmi sú najmä náhodné zmeny vlastností kanála, ktoré sú spôsobené samotným signálom alebo okolím kanála, alebo sú to ďalšie signály v kanále a sú z hľadiska prenášaného signálu rušivé, ktoré sa do kanála dostali z jeho okolia alebo vznikli priamo v kanále vplyvom prenášaného signálu. Z pravdepodobnostného hľadiska bude náhodný kanál úplne popísaný, ak pre každý vstupný signál $\mathbf{u}$ z priestoru vstupných signálov φ_u každý podpriestor φ'_y priestoru výstupných signálov je daná podmienená pravdepodobnosť

$$P\left\{\mathbf{y} \in \varphi'_y / \mathbf{u}\right\}, \quad \mathbf{u} \in \varphi_u, \quad \varphi'_y \subset \varphi_y$$

že výstupný signál patrí do podpriestoru φ'_y za podmienky, že vstupný signál je $\mathbf{u}$.

Úvahy sa podstatne zjednodušia, ak sa obmedzíme na kanály, v ktorých spomínané náhodné vplyvy nezávisia na vstupnom signále. Výstupný náhodný signál $y(\omega,t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$ z lineárneho kanála s touto vlastnosťou je potom daný

$$y(\omega,t) = u(\omega,t) * g(\omega,t) + \tau(\omega,t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in T$$

kde $*$ vyjadruje konvolúciu vstupného signálu a impulznej charakteristiky a náhodný signál $\tau(\omega,t)$ voláme aditívnym šumom. Impulzná charakteristika je rovnako náhodnou funkciou, ktorá charakterizuje náhodné zmeny parametrov kanála.

Kvôli jednoduchosti budeme ďalej predpokladať, že impulzná charakteristika je deterministickou funkciou a aditivny šum $\tau(\omega,t)$ je stacionárny a má korelačnú funkciu

$$R(t) = \delta(t), \quad t \in (-\infty, \infty)$$

kde $\delta(t)$ je Diracova funkcia a rez šumom má Gaussove rozdelenie s nulovou strednou hodnotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Výstupný signál potom je

$$y(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, g(t-\tau)\, d\tau + \eta(\omega,t).$$