2 S I G N Á L

2.1 KLASIFIKÁCIA SIGNÁLOV

V úvode sme naznačili, že pod signálom budeme rozumieť zmenu niektorej merateľnej veličiny kanála, ktorá súvisí s prenosom zmien na vstupe kanála na výstup kanála. Vlastnosti signálu, ktoré nie sú ľubovoľné, ale závisia na vlastnostiach kanála a zmien na vstupe kanála budeme študovať na matematických modeloch signálu. Všeobecne platí, že určiť môžeme tým viac vlastností, čím predmet skúmania viac vymedzíme. Na druhej strane však potrebujeme určiť, ktoré vlastnosti sú podstatné, t.j. ktoré sa zachovávajú pri menšom počte obmedzení kladených na predmet skúmania. Preto aj v prípade štúdia vlastností signálov prijmeme postupne rôzne obmedzenia, čím sa množina signálov rozpadne na triedy, v ktorých signály daným obmedzeniam vyhovujú. Našou úlohou bude ukázať ako sa prejavia všeobecné vlastnosti signálu v danej triede a aké nové vlastnosti daná trieda signálov vykazuje. Preto aj plán tejto učebnej pomôcky možno rozdeliť na dve časti: všeobecnú (v ktorej všeobecné vlastnosti signálu sa postupne pretlmočia v pojmovom aparáte danej triedy signálov) a konkrétne (v ktorej sa budeme zaoberať ďalšími vlastnosťami danej triedy signálov zoradených podľa umiestnenia v informačnom reťazci).

Kvôli prehľadnosti (pojmy budú definované neskôr) uvedieme rozdelenie signálov, ako ho budeme používať.

Podľa toho, či máme úplnú alebo neúplnú informáciu o signále, budeme signály deliť na deterministické a náhodné. Podľa čísel, ktoré budeme priraďovať hodnotám merateľnej veličiny kanála, budeme signály deliť na signály s nespočetným, spočetným a konečným oborom hodnôt. Tak isto podľa čísel, ktoré priradíme časovým okamihom, v ktorých môže dôjsť k zmene sledovanej veličiny kanála, budeme hovoriť o signáloch s nespočetným, spočetným a konečným časom.

V tomto učebnom texte nebudeme sledovať všetky kombinácie, ktoré je možné z uvedených obmedzení vytvoriť. U deterministických aj náhodných signálov budeme sledovať len signály spojité, diskrétne a číslicové podľa nasledujúcej definície:

Definícia: Množinu čísel, ktorú priradíme časovým okamihom, v ktorých môže dôjsť k zmene sledovanej veličiny kanálu nazveme časovou množinou a označíme ju T. Množinu čísel, ktorú priradíme hodnotám sledovanej veličiny kanálu nazveme *abecedou signálu* a označíme ju F.

Spojitý signál je signál s nespočetnou abecedou aj časovou množinou.

Diskrétny signál je signál s nespočetnou abecedou a spočetnou časovou množinou.

Číslicový signál je signál so spočetnou abecedou aj časovou množinou.

2.1.1 Deterministický signál

Definícia:

Nech sú dané číselné množiny T, F, ktoré budeme nazývať časovou množinou a abecedou signálu. Modelom deterministického signálu (ďalej len deterministickým signálom) nazývame zobrazenia f časovej množiny T do abecedy signálu F.

2.1.2 Náhodný signál

Definícia

Pravdepodobnosť je zobrazenie P: $\varphi \rightarrow R$ definované na systéme φ podmnožín množiny Ω , pričom platí:

1. $\Omega \in \varphi$
2. Ak $A \in \varphi$, potom aj $A' \in \varphi$
3. Ak $A_n \in \varphi$ $(n = 1,2, \dots)$ potom aj $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \varphi$
4. $P(\Omega) = 1$
5. $P(A) \geq 0$ pre všetky $A \in \varphi$
6. Ak $A_n \in \varphi$ $(n = 1,2, \dots)$ a $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$, potom

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Trojicu (Ω, φ, P) nazývame pravdepodobnostným priestorom.

Definícia

Náhodná veličina je taká funkcia $\xi : \Omega \rightarrow R$, že

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \varphi$$

pre všetky $x \in R$. Distribučná funkcia náhodnej premennej je funkcia F: $R \rightarrow R$ definovaná vzťahom

$$F(x) = P(\{\omega ; \xi(\omega) < x\}) , \quad x \in R$$

Definícia

Nech $T \subset R$ je časová množina. Náhodný signál je taký systém náhodných premenných $\{X_t, t \in T\}$, že pre každý konečný podsystém $(X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tn})$ je množina náhodných premenných s distribučnou funkciou

$$F\, t_1, t_2, \dots, t_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_{t1} < x_1, \dots, X_{tn} < x_n).$$

X_t je teda funkciou dvoch premenných

$$X_t = f(\omega, t), \qquad \omega \in \Omega, \ t \in T.$$

Náhodnú premennú $f(\omega, t = \text{konšt.})$ pre pevne zvolený čas nazveme rezom náhodným signálom a deterministický signál $f(\omega = \text{konšt}, t)$ nazveme realizáciou náhodného signálu.

Množina ohraničených deterministických signálov (realizácií) potom pri vhodne určenom pravdepodobnostnom priestore tiež tvorí náhodný signál.

Zo spojitých a diskrétnych náhodných signálov budeme ďalej študovať len tie, ktorých distribučná funkcia je spojitá a teda existuje hustota pravdepodobnosti

$$f_{t1}, \ldots, t_n(x_{t1}, \ldots, x_{tn}) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F_{t1}, \ldots, t_n\,(x_1, \ldots, x_n)\Bigg|_{\substack{x_1 = x_{t1} \\ \vdots \\ x_n = x_{tn}}}$$

Ak rez náhodným signálom X_t, $t \in T$ má strednú hodnotu

$$\mathcal{E}\left\{X_t\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x)\, x\, dx$$

v prípade spojitého a diskrétneho signálu, alebo

$$\mathcal{E}\left\{X_t\right\} = \sum_{-\infty}^{\infty} p_t(x) \,.\, x$$

v prípade číslicového signálu, potom stredná hodnota náhodného signálu je taká funkcia $E(t)$, $t \in T$, že

$$E(t) = \mathcal{E}\left\{X_t\right\}.$$

Náhodný signál nazveme centrovaným, ak $E(t) = 0$, $t \in T$. Pretože každý náhodný signál môžeme vyjadriť ako súčet strednej hodnoty a centrovaného signálu, bez újmy na všeobecnosti, budeme v ďalších kapitolách predpokladať, že náhodný signál je centrovaný. Rozptyl náhodného signálu $\left\{X_t, t \in T\right\}$ je taká funkcia $D(t)$, že

$$D(t) = D\left\{X_t\right\}, \qquad t \in T$$

kde $D\left\{X_t\right\} = \mathcal{E}\left\{X_t^2\right\} - E^2(t)$ je rozptyl rezu náhodným signálom v čase t. Ďalej budeme predpokladať, že v každom čase má rozptyl konečnú hodnotu, t.j. $D(t) < \infty$, $t \in T$. Ak merateľnou veličinou v kanáli je napr. napätie $u(t)$, potom rozptyl centrovaného signálu predstavuje strednú hodnotu výkonu signálu v čase t na jednotkovej impedancii.

Pre náhodný signál $\{X_t, t \in T\}$ s konečným rozptylom nazývame kovariančnou funkciou

$$R(t_1,t_2) = \mathcal{E}\left\{\left[X_{t1} - E(t_1)\right]\left[X_{t2} - E(t_2)\right]\right\}, \quad t_1,t_2 \in T$$

Pre $t_1 = t_2 = t$ platí

$$R(t,t) = D(t), \quad t \in T$$

Náhodný signál nazývame stacionárnym v užšom zmysle (ďalej len stacionárnym), ak pre každé $t_1,t_2 \in T$ také, že $t_2-t_1 = \tau \in T$ platí

$$R(t_1,t_2) = R(\tau), \; E(\tau) = \text{konšt}$$

Krížovou kovariančnou funkciou signálov $\{X_t, t \in T\}$, $\{Y_t, t \in T\}$ voláme funkciu

$$R_{XY}(t) = \mathcal{E}\left\{\left[X_t - E_X(t)\right]\left[Y_t - E_Y(t)\right]\right\}$$

Signály voláme nekorelovanými, práve keď $R_{XY}(t) = 0$, $t \in T$.

2.1.3 Spojitý signál

Signál, ktorého abeceda F a časová množina T je nespočetná, nazývame spojitým signálom (v ďalšom texte predpokladáme $F = R$).

Poznámka:

V zmysle uvedenej definície budeme signály napr. typu

$$f(t) = kh(t), \; k \in R,$$

kde $h(t)$ je Heavisideov signál

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

považovať za spojité.

Pri aplikácii výsledkov dosiahnutých pre spojité signály predpokladáme, že je známy funkčný predpis závislosti hodnoty signálu na čase (u deterministických signálov) alebo hodnoty kovariančnej funkcie na čase (u centrovaných náhodných signálov).

2.1.4 Diskrétny signál

Signál, ktorého abeceda F je nespočetná a časová množina T je spočetná nazývame diskrétnym signálom (v ďalšom texte predpokladáme $F=R$). Pretože každá spočítateľná množina je ekvivalentná s nejakou podmnožinou množiny nezáporných celých čísiel N_o, môžeme zaviesť dohodu, že $T = N_o$, alebo $T = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$ u signálov s ohraničeným časom.

Deterministický diskrétny signál je postupnosťou reálnych čísel $f_o, f_1, f_2, \ldots, f_i \in F$, $i \in N_o$. Náhodný diskrétny signál je systémom náhodných premenných $X_o, X_1, X_2, \ldots$ nad daným pravdepodobnostným priestorom.

V obidvoch prípadoch budeme signál zapisovať v tvare formálneho radu

$$\mathbf{f} = f_o + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \ldots$$

kde z sa nazýva neurčitá. V prípade ohraničeného času vyjadríme diskrétny signál formálnym polynómom

$$\mathbf{f} = f_o + f_1 z^{-1} + \ldots + f_N z^{-N}$$

(definíciu formálneho radu a polynómu uvedieme neskôr).

2.1.5 Číslicový signál

Signál, ktorého abeceda F aj časová množina T je spočetná nazývame číslicovým signálom.

Číslicový signál môžeme tiež zapísať v tvare formálneho polynómu alebo radu s tým rozdielom, že f_i, $i \in N_o$ budú diskrétne náhodné veličiny alebo celé čísla.

2.2 RELÁCIA USPORIADANIA

Aby sme so signálmi mohli pracovať, musíme v prvom rade vedieť porovnávať hodnoty signálov a časové okamihy.

Definícia:

Binárna relácia R v množine F je podmnožinou kartézskeho súčinu $F \times F$. Označenie $f_1 R f_2$ $(f_1 \in F, f_2 \in F)$ znamená, že $(f_1, f_2) \in R$.

Definícia:

Relácia $\leq$ v množine F sa volá neostré usporiadanie, ak:

- pre všetky $f \in F$ platí $f \leq f$
- pre všetky $f_1, f_2 \in F$ platí $(f_1 \leq f_2) \wedge (f_2 \leq f_1) \Rightarrow f_1 = f_2$
- pre všetky $f_1, f_2, f_3 \in F$ platí $(f_1 \leq f_2) \wedge (f_2 \leq f_3) \Rightarrow f_1 \leq f_3$

Definícia:

Relácia $<$ v množine F sa volá ostré usporiadanie, ak:

- pre všetky $f \in F$ neplatí $f < f$
- pre všetky $f_1, f_2 \in F$ platí $\neg(f_1 < f_2) \wedge \neg(f_2 < f_1) \Rightarrow f_1 = f_2$
- pre všetky $f_1, f_2, f_3 \in F$ platí $(f_1 < f_2) \wedge (f_2 < f_3) \Rightarrow f_1 < f_3$

Definícia:

Usporiadanou množinou voláme množinu F s reláciou ostrého alebo neostrého usporiadania definovaného v množine F.

2.3 OPERÁCIE S HODNOTAMI SIGNÁLOV

Operácie so signálmi sú odvodené od základných operácií s funkčnými hodnotami signálov.

Definícia:

Binárna operácia $\circledast$ na množine F je pravidlo, ktoré každému prvku množiny $F \times F$ priradí jediný prvok množiny F.

Definícia:

Binárna operácia $\circledast$ na množine F sa nazýva:

- asociatívna, ak pre každé $f_1, f_2, f_3 \in F$ platí
  $$(f_1 \circledast f_2) \circledast f_3 = f_1 \circledast (f_2 \circledast f_3)$$
- komutatívna, ak pre každé $f_1, f_2 \in F$ platí $f_1 \circledast f_2 = f_2 \circledast f_1$

Definícia:

Nech na množine F je daná binárna operácia $\circledast$. Prvok $e \in F$ nazývame neutrálnym, ak pre všetky $f \in F$ platí $e \circledast f = f \circledast e = e$. Prvok $f^{-1} \in F$ nazývame inverzným k prvku $f \in F$ ak platí $f^{-1} \circledast f = f \circledast f^{-1} = e$.

Kvôli jednoduchosti budeme pre hodnoty signálov definovať dve algebraické štruktúry - odbor integrity a pole, aj keď v niektorých prípadoch by sme vystačili aj s jednoduchšími štruktúrami.

Definícia:

Nech na množine F sú definované dve binárne operácie $\oplus$, $\odot$ s týmito vlastnosťami

- operácie $\oplus$, $\odot$ sú komutatívne a asociatívne
- existuje neutrálny prvok $0 \in F$ vzhľadom na operáciu $\oplus$ a neutrálny prvok $1 \in F$ vzhľadom na operáciu $\odot$, pričom $1 \neq 0$
- pre každé $f \in F$ existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $\oplus$
- pre každé $f_1, f_2, f_3 \in F$ platí distributívny zákon

$$f_1 \odot (f_2 \oplus f_3) = (f_1 \odot f_2) \oplus (f_1 \odot f_3)$$

- pre každé $f_1, f_2 \in F$ také, že $f_1 \odot f_2 = 0$ platí $f_1 = 0$ alebo $f_2 = 0$.

Potom algebraickú štruktúru $(F, \oplus, \odot)$ voláme oborom integrity.

Deliteľnosť

Ak v odbore integrity $(F, \oplus, \odot)$ existuje pre dané $f_1, f_2 \in F$ také $f \in F$, že $f_1 \odot f = f_2$, potom hovoríme, že f_1 delí f_2, čo zapisujeme $f_1 | f_2$. Ak $f \in F$ je deliteľom prvkov $f_1, f_2, \dots, f_n \in F$ a pre všetky $f' \in F$ také, že sú deliteľom prvkov $f_1, f_2, \dots, f_n$ platí, že f' je deliteľom prvku f, potom f nazývame najväčším spoločným deliteľom prvkov $f_1, f_2, \dots, f_n$ a píšeme $f = D(f_1, f_2, \dots, f_n)$. Ak $D(f_1, f_2, \dots, f_n) = 1$ potom prvky $f_1, f_2, \dots, f_n$ nazývame nesúdeliteľnými.

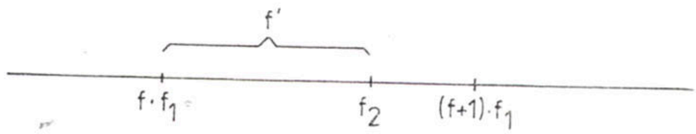
Euklidovský obor integrity

Obor integrity $(F, \oplus, \odot)$ sa volá euklidovským, ak existuje zobrazenie $\delta : F - \{0\} \to N$ tak, že platí

- ak f' je deliteľom prvku f, potom $\delta(f') \leq \delta(f)$
- pre každé $f_1, f_2 \in F$ existujú prvky $f, f' \in F$ tak, že $f_2 = f_1 \odot f + f'$, pričom alebo $f' = 0$, alebo $f' \neq 0$ a $\delta(f') < \delta(f_1)$

Veta:

Obor integrity $(Z, +, .)$ je euklidovským.
Dôkaz naznačíme na obrázku:



Obr. 4

Čísla ohodnotíme ich absolútnou hodnotou, t.j. $\delta(f) = |f|$.
Zrejme existuje taký interval $\langle f.f_1, (f+1).f_1)$, že číslo f bude práve z neho. Potom platí

$$f_2 = f_1 . f + f', \quad |f'| < |f_1|$$

Definícia:

Nech $(F, \oplus, \odot)$ je odbor integrity. Potom nenulový prvok $f \in F$, ktorý nie je jednotkou, voláme ireducibilným, ak má len nevlastných deliteľov, t.j. platí

$$(\forall f' \in F)\ f' | f \Rightarrow (f | f' \vee f' | 1)$$

Veta

Nech $(F, \oplus, \odot)$ je Euklidovským odborom integrity. Potom každý nenulový prvok $f \in F$, ktorý nie je jednotkou môžeme rozložiť na súčin konečného počtu ireducibilných prvkov. Dôkaz je dlhší, pozri napr. [13].

Ďalšou algebraickou štruktúrou, ktorú budeme používať je pole. Oproti oboru integrity požadujeme existenciu inverzného prvku vzhľadom na násobenie.

Definícia:

Nech na množine F sú definované dve binárne operácie $\oplus$, $\odot$ s týmito vlastnosťami:

- operácie $\oplus$, $\odot$ sú komutatívne a asociatívne
- existuje neutrálny prvok $0 \in F$ vzhľadom na operáciu $\oplus$ a neutrálny prvok $1 \in F$ vzhľadom na operáciu $\odot$, pričom $1 \neq 0$
- pre každé $f \in F$ existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $\oplus$
- pre každé $f_1, f_2, f_3 \in F$ platí distributívny zákon

$$f_1 \odot (f_2 \oplus f_3) = (f_1 \odot f_2) \oplus (f_1 \odot f_3)$$

- pre každé $f \in F - \{0\}$ existuje inverzný prvok vzhľadom na operáciu $\odot$.

Potom algebraickú štruktúru $(F, \oplus, \odot)$ voláme poľom.

Poznámka: Každé pole je odborom integrity (dokážte).

Uviedli sme už predpoklad, ktorý v tomto texte používame, že abecedou spojitých a diskrétnych signálov je nejaká podmnožina množiny reálnych čísel. Presvedčte sa, že množina reálnych čísel s operáciami sčítania a násobenia, t.j. štruktúra $(R, +, .)$ tvorí pole. Ak množina hodnôt číslicového signálu je nekonečná, môžeme ju ztotožniť s množinou racionálnych čísel, ktorá s operáciami sčítania a násobenia tvorí tiež pole. Dôležitou triedou číslicových signálov sú signály s konečnou abecedou, ktorú môžeme stotožniť s množinou $F = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. Pretože výsledok operácie musí patriť do abecedy, musíme operácie $\oplus$, $\odot$ definovať ináč ako sčítanie a násobenie.

Nech je dané prirodzené číslo p, ktoré nazveme modulom. Pretože $(N_0, +, .)$ je Euklidovským odborom integrity s ohodnotením $\delta(f) = f$, existujú ku každému $f \in F$ také f_1, $f' \in F$, že

$$f = p \cdot f_1 + f', \quad f' < p$$

Potom hovoríme, že f a f' sa rovnajú modulo p, čo zapisujeme

$$f = f' \pmod p$$

Definícia:

Nech $F = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, kde $p \in N$ je modul. Operáciu $\underset{p}{\oplus}$ nazývame súčtom modulo p a operáciu $\underset{p}{\odot}$ súčinom modulo p, ak pre všetky f_1, f_2, f_3 platí:

$$f_1 \underset{p}{\oplus} f_2 = f_3 \iff f_3 = f_1 + f_2 \pmod p$$

$$f_1 \underset{p}{\odot} f_2 = f_3 \Leftrightarrow f_1 \cdot f_2 \pmod p$$

Ak je modul zrejmý, budeme operácie značiť $\oplus$, $\odot$.

Veta:

Nech $F = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ a modul $p \in N$ je prvočíslo. Algebraická štruktúra $(F, \underset{p}{\oplus}, \underset{p}{\odot})$ je pole.

Dôkaz:

Je zrejmé, že operácie $\underset{p}{\oplus}$, $\underset{p}{\odot}$ sú komutatívne. Presvedčme sa, že operácia $\underset{p}{\oplus}$ je asociatívna.

Nech $a = f_1 \oplus (f_2 \oplus f_3)$, $b = (f_1 \oplus f_2) \oplus f_3$. Potom existujú také čísla $r, q, r', q' \in N_0$, že

$$a = f_1 \oplus (f_2 + f_3 - pr) \ , \qquad b = (f_1 + f_2 - pr') \oplus f_3$$

$$a = f_1 + f_2 + f_3 - pr - pq \ , \qquad b = f_1 + f_2 - pr' + f_3 - pq'$$

teda

$$f_1 + f_2 + f_3 = a + p\,(r+q) = b + p\,(r' + q')$$

Odtiaľ

$$|a - b| = |p(r+q-r' - q')|$$

Pretože $0 \leq a \leq p$, $0 \leq b < p$, bude aj $|a-b| < p$. Pretože súčasne je číslo $|a-b|$ násobkom čísla p, jediné riešenie je $|a-b| = 0$, t.j. $a = b$. Rovnako by sme dokázali aj asociatívnosť vzhľadom na súčin modulo p a distributívnosť.

Neutrálnym prvkom vzhľadom na $\oplus$ je 0 , vzhľadom na $\odot$ je 1. Inverzným prvkom k prvku $f \in F$ vzhľadom na $\oplus$ je $p - f$. Ostáva ešte ukázať, že ku každému prvku $f \in F - \{0\}$ existuje inverzný prvok vzhľadom na $\odot$.

Nech $f \in F$, $f \neq 0$. Potom ak p je prvočíslo, najväčší spoločný deliteľ je $D(f,p) = 1$ a existujú také čísla $x, y \in F$, že

$$f \cdot x + p \cdot y = 1$$

Odtiaľ $f \cdot x = 1 - p \cdot y$. Pretože $f \odot x = f \cdot x \pmod p$, platí

$$f \underset{p}{\odot} x = 1 - py \pmod p$$

t.j. $f \underset{p}{\odot} x = 1$

Prvok $x \in F$ je teda inverzný k $f \in F$ vzhľadom na $\underset{p}{\odot}$.