4 Použitie vytvárajúcich funkcií

4.1 Riešenie kombinatorických úloh

Príklad 4.1 *Zistite, koľkými spôsobmi môžeme rozmeniť n eur na 1-eurové a 2-eurové mince.*

Náčrt riešenia:

1. Vyjadríme vytvárajúcu funkciu:
$$G(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)^2}.$$
2. Rozložíme ju na parciálne zlomky:
$$G(x) = \frac{\frac{1}{4}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{1+x}.$$
3. Z nich poskladáme riešenie:
$$a_n = \frac{1}{4}(1 + 2(n+1) + (-1)^n).$$

Napríklad $a_5 = 3$ a sú to tieto možnosti:
$1+1+1+1+1$
$1+1+1+2$
$1+2+2$.

4.2 Rekurentné vyjadrenie, Fibonacciho postupnosť

Príklad 4.2 *Zistite, ako možno n-tý člen Fibonacciho postupnosti $\langle 0,1,1,2,3,5,8,13,21,...\rangle$ vyjadriť v uzavretom tvare. To znamená, nájdite vzorec $f(n)$, pomocou ktorého vypočítame n-tý člen Fibonacciho postupnosti ako funkciu čísla n. Rekurentný tvar je:*
$f_0 = 0$,
$f_1 = 1$,
$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$

Náčrt riešenia:

1. Vyjadríme Fibonacciho postupnosť ako súčet postupností
$$\langle f_0, f_1, f_0+f_1, f_1+f_2, f_2+f_3, f_3+f_4, ...\rangle =$$
$$= \langle f_0, f_1, f_0, f_1, f_2, f_3, ...\rangle + \langle 0, 0, f_1, f_2, f_3, f_4, ...\rangle =$$
$$= \langle 0, 1, 0, 1, f_2, f_3, ...\rangle + \langle 0, 0, 1, f_2, f_3, f_4, ...\rangle =$$
$$= \langle 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ...\rangle + \langle 0, 0, 0, 1, f_2, f_3, ...\rangle + \langle 0, 0, 1, f_2, f_3, f_4, ...\rangle =$$

2. Vyjadríme rovnicu pre vytvárajúcu funkciu:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-2} + f_{n-1}) x^n =$$

$$= x + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^{n-2} + x \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^{n-1} = x + x^2 F(x) + x \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \right] =$$

$$= x + x^2 F(x) + x \left[F(x) - f_0 \right] = x + xF(x) + x^2 F(x)$$

3. Z rovnice pre vytvárajúcu funkciu vyjadríme $F(x)$:

$$F(x) = x + x^2 F(x) + xF(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

4. Vypočítame korene menovateľa:

$$1 - x - x^2 = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

5. Rozložíme $F(x)$ na parciálne zlomky:

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A_1}{1 - \alpha_1 x} + \frac{A_2}{1 - \alpha_2 x} = \frac{-x(\alpha_2 A_1 + \alpha_1 A_2) + A_1 + A_2}{(1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x)}$$

$$A_1 + A_2 = 0, \quad \alpha_2 A_1 + \alpha_1 A_2 = -1$$

$$A_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad A_1 = \frac{-1}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

6. Vyjadríme $F(x)$ ako súčet dvoch jednoduchších postupností:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1 - \alpha_1 x} - \frac{1}{1 - \alpha_2 x} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \big((1 + \alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \dots) - (1 + \alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \dots) \big)$$

7. Vyjadríme $f(n)$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha_1^n - \alpha_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$