6 Postupnosti

Základné pojmy

Pod pojmom postupnosť rozumieme zobrazenie, ktorého definičným oborom je podmnožina množiny celých čísel. Podľa toho, či je táto podmnožina konečná alebo nekonečná, hovoríme o konečných respektíve nekonečných postupnostiach. Zvyčajne je dané celé číslo p a definičný obor je množina $\{p, p+1, p+2, \ldots, q\}$ pre konečné postupnosti ($q \geq p$), alebo množina všetkých celých čísel, ktoré nie sú menšie ako p, v prípade nekonečných postupností. V týchto prípadoch používame značenie $\{a_n\}_{n=p}^{q}$ a $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$. Všeobecne používame zápis $\{a_n\}_{n\in I}$, kde $I \subset Z$.

Ak obor hodnôt postupnosti obsahuje iba čísla, hovoríme o číselných postupnostiach.

Spôsoby zadávania postupností:

1.) Vymenovaním členov postupnosti. To má význam predovšetkým pri konečných postupnostiach s malým počtom členov. Niekedy bývajú aj nekonečné postupnosti zadané vymenovaním niekoľkých prvých členov, je to však len v prípadoch, kedy sa môžeme spoľahnúť na našu intuíciu a predpokladáme, že pravidlo na vytváranie ďalších členov postupnosti je ľahko uhádnuteľné z prvých členov postupnosti. Napríklad, ak máme prvé členy postupnosti $1, 2, 3, 4, \ldots$, tak každého napadne, že pôjde o postupnosť všetkých prirodzených čísel. Aj keď v skutočnosti existuje nekonečne veľa postupností, ktoré môžu začínať štvoricou čísel $1, 2, 3, 4, \ldots$.

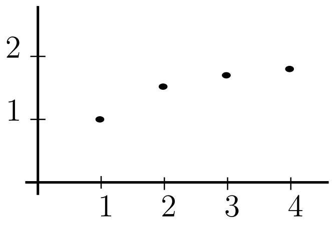
2.) Vzorcom na priamy výpočet n-tého člena postupnosti. Napríklad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{3n+4}{7n-1}$. Výpočtom zistíme, že prvý člen tejto postupnosti je $a_1 = \frac{3\cdot1+4}{7\cdot1-1} = \frac{7}{6}$, druhý člen $\frac{10}{13}$, prípadne člen $a_{99} = \frac{3\cdot99+4}{7\cdot99-1} = \frac{301}{692}$. Máme teda predpis, ktorým definujeme všetky členy postupnosti naraz.

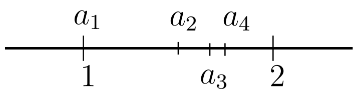
3.) Rekurzívne (rekurentne). Postupnosť môžeme definovať aj tak, že určíme niekoľko začiatočných členov a zadáme pravidlá na vytváranie ďalších členov tejto postupnosti pomocou členov, ktoré sú už určené. Príkladmi sú známa Fibonacciho postupnosť a faktoriál:

1. $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, pre $\forall n \in N$ $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$,

2. $a_0 = 1$, pre $\forall n \in N$ $a_n = n{\cdot}a_{n-1}$.

4.) Graficky. Na lepšiu ilustráciu sa v niektorých prípadoch používa aj grafické znázornenie malého počtu členov číselných postupností. Na obrázku sú dva spôsoby grafickej reprezentácie prvých štyroch členov postupnosti $\{\frac{2n-1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$.





Aritmetická a geometrická postupnosť

Aritmetická postupnosť je postupnosť, v ktorej rozdiel každých dvoch po sebe idúcich členov je rovný konštante: $\forall n \in N\ a_{n+1} - a_n = d$. Napríklad $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ alebo $-5, -2, 1, 4, 7, \ldots$ Vyjadrime n-tý člen aritmetickej postupnosti rekurentne aj vzorcom:

$$
\begin{array}{llllll}
a_1 & a_2 = a_1 + d & a_3 = a_2 + d & \ldots & a_n = a_{n-1} + d & \ldots \\
a_1 & a_2 = a_1 + d & a_3 = a_1 + 2d & \ldots & a_n = a_1 + (n-1)d & \ldots
\end{array}
$$

Geometrická postupnosť je postupnosť, v ktorej podiel každých dvoch po sebe idúcich členov je rovný konštante: $\forall n \in N\ a_{n+1}/a_n = q$. Napríklad $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ alebo $4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ Vyjadrime n-tý člen geometrickej postupnosti rekurentne aj vzorcom:

$$
\begin{array}{llllll}
a_1 & a_2 = a_1 q & a_3 = a_2 q & \ldots & a_n = a_{n-1} q & \ldots \\
a_1 & a_2 = a_1 q & a_3 = a_1 q^2 & \ldots & a_n = a_1 q^{n-1} & \ldots
\end{array}
$$

Reprezentácia reálnych čísel

Reálne čísla zapísané v pozičnej sústave so základom z sa dajú prirodzeným spôsobom vyjadriť pomocou postupností. Nech

$$x = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \ldots\ ,$$

kde $a_0 \in Z$, $\forall i \in N\ a_i \in \{0, 1, \ldots, z-1\}$. Postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ zodpovedá číslu x.

Iný spôsob vyjadrenia reálnych čísel je pomocou reťazových zlomkov. Je to nasledovný spôsob:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}},$$

kde a_0 je ľubovoľné celé číslo a koeficienty $a_1, a_2, \dots$ sú prirodzené čísla. V každom čitateli je jednotka, v menovateli je súčet koeficientu a_i a zlomku. V prípade, že x je racionálne číslo, na jeho vyjadrenie nám stačí konečný reťazový zlomok, to znamená, že potrebujeme konečný počet koeficientov a postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{q}$ je konečná. Ak je x iracionálne číslo, tak rozvoj tohto zlomku je nekonečný, podobne, ako postupnosť koeficientov $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Miesto tohto zápisu sa pri reťazových zlomkoch zaužíval zápis $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

Príklad. Zapíšme číslo 3/2 pomocou reťazového zlomku:

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = [1; 2] \ .$$

Príklad. Skúsme zapísať číslo 49/5 pomocou reťazového zlomku:

$$\frac{49}{5} = 9 + \frac{4}{5} = 9 + \frac{1}{\frac{5}{4}} = 9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}} = [9; 1, 4] \ .$$

Príklad. Na čísle $x_0 = 59/26$ si ukážme podrobnejšie postup, ako nájsť reťazový zlomok zodpovedajúci tomuto číslu.

$$x_0 = \frac{59}{26} \to x_0 = 2\frac{7}{26} \to a_0 = 2 \to r_0 = \frac{7}{26} \to \frac{1}{r_0} = \frac{26}{7}$$

Číslo $1/r_0 = x_1$ použijeme ako vstup a znova zopakujeme postup z predchádzajúceho riadku.

$$x_1 = \frac{26}{7} \to x_1 = 3\frac{5}{7} \to a_1 = 3 \to r_1 = \frac{5}{7} \to \frac{1}{r_1} = \frac{7}{5}$$

Zopakujeme postup pre $x_2 = 1/r_1$.

$$x_2 = \frac{7}{5} \to x_2 = 1\frac{2}{5} \to a_2 = 1 \to r_2 = \frac{2}{5} \to \frac{1}{r_2} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = \frac{5}{2} \to x_3 = 2\frac{1}{2} \to a_3 = 2 \to r_3 = \frac{1}{2} \to \frac{1}{r_3} = \frac{2}{1}$$

$$x_4 = \frac{2}{1} \to x_4 = 2\frac{0}{1} \to a_4 = 2 \to r_4 = \frac{0}{1} \to \frac{1}{r_4} = \nexists$$

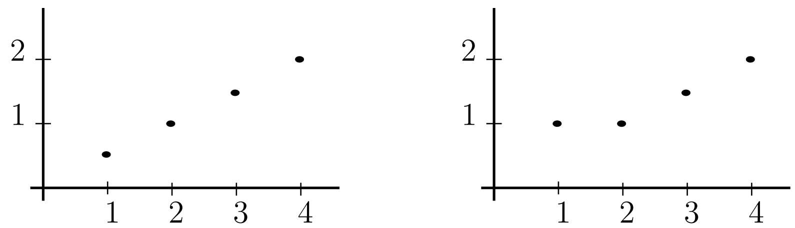
V tejto chvíli postup končí. Hľadané koeficienty sú $[2; 3, 1, 2, 2]$, takže hľadaný reťazový zlomok má nasledujúci tvar:

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Ako sme spomenuli vyššie, iracionálne čísla majú nekonečný rozvoj. Na ukážku uveďme koeficienty niektorých známych iracionálnych čísel pri ich rozvoji do reťazových zlomkov: $\sqrt{2} = [1; 2, 2, \ldots]$, $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \ldots]$, $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, \ldots]$.

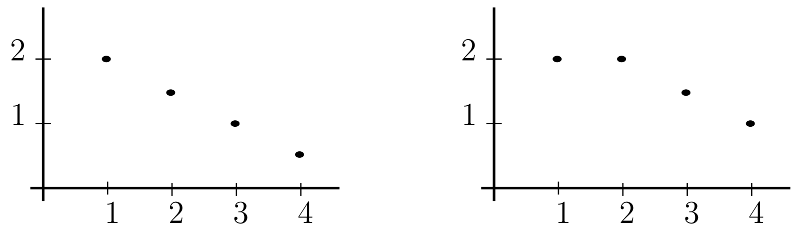
Vlastnosti postupností

Prejdime si teraz niektoré dôležité vlastnosti, ktoré môžu mať číselné postupnosti. Budeme uvažovať len o postupnostiach, ktorých členy sú reálne čísla.
1.) Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n\in I}$ je **konštantná**, ak existuje konštanta $c \in R$ taká, že pre $\forall n \in I$ platí, že $a_n = c$. Napríklad postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde pre $\forall n \in N$ $a_n = 3$ je konštantná.
2.) Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n\in I}$ je **rastúca**, ak pre $\forall n_1, n_2 \in I$ platí: ak $n_1 < n_2$, potom $a_{n_1} < a_{n_2}$. Špeciálne pre postupnosti v tvare $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ stačí uviesť: $\forall n \in N$ $n \geq p$ $a_n < a_{n+1}$. Čiže hodnota každého člena postupnosti musí byť väčšia, ako hodnoty všetkých jeho predchodcov.
3.) Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n\in I}$ je **neklesajúca**, ak pre $\forall n_1, n_2 \in I$ platí: ak $n_1 < n_2$, potom $a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Špeciálne pre postupnosti v tvare $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ stačí uviesť: $\forall n \in N$ $n \geq p$ $a_n \leq a_{n+1}$. Čiže hodnota žiadneho člena postupnosti nie je menšia, ako hodnoty všetkých jeho predchodcov. Každá rastúca postupnosť je aj neklesajúcou, ale naopak to neplatí. Na nasledujúcom obrázku máme porovnanie rastúcej postupnosti (vľavo) a neklesajúcej postupnosti, ktorá nie je rastúca.



4.) Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n\in I}$ je **klesajúca**, ak pre $\forall n_1, n_2 \in I$ platí:

ak $n_1 < n_2$, potom $a_{n_1} > a_{n_2}$. Špeciálne pre postupnosti v tvare $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ stačí uviesť: $\forall n \in N$ $n \geq p$ $a_n > a_{n+1}$. Čiže hodnota každého člena postupnosti musí byť menšia, ako hodnoty všetkých jeho predchodcov.
5.) Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n\in I}$ je **nerastúca**, ak pre $\forall n_1, n_2 \in I$ platí: ak $n_1 < n_2$, potom $a_{n_1} \geq a_{n_2}$. Špeciálne pre postupnosti v tvare $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ stačí uviesť: $\forall n \in N$ $n \geq p$ $a_n \geq a_{n+1}$. Čiže hodnota žiadneho člena postupnosti nie je väčšia, ako hodnoty všetkých jeho predchodcov. Každá klesajúca postupnosť je aj nerastúcou, ale naopak to neplatí. Na nasledujúcom obrázku máme porovnanie klesajúcej postupnosti (vľavo) a nerastúcej postupnosti, ktorá nie je klesajúca.



6.) Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n\in I}$ je **zhora ohraničená**, ak $\exists k \in R$ také, že pre $\forall n \in I$ platí $a_n \leq k$.
7.) Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n\in I}$ je **zdola ohraničená**, ak $\exists k \in R$ také, že pre $\forall n \in I$ platí $a_n \geq k$.
8.) Ak je postupnosť ohraničená zdola aj zhora, tak hovoríme, že je **ohraničená**.

Ako zisťovať vlastnosti postupností

Ukážme na niekoľkých príkladoch, ako určovať spomínané vlastnosti postupností.

Príklad. Zistime vlastnosti postupnosti $\{\frac{n+1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Prvé členy tejto postupnosti sú

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$$

Podľa týchto členov by mala byť postupnosť klesajúca. Potrebujeme však dokázať, že to platí pre všetky členy postupnosti, čiže musíme dokázať, že nasledujúci výrok je pravdivý:

$$\forall n \in N \quad \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1} \, .$$

Z dôvodov, ktoré vysvetlíme nižšie musíme pravdivosť tohto výroku dokazovať nepriamo. Budeme predpokladať, že platí negácia daného výroku. To znamená: $\exists n \in N$ také, že

$$\frac{n+1}{n} \leq \frac{n+2}{n+1} \,.$$

Z uvedenej nerovnosti vyplýva:

$$\begin{array}{rcl} (n+1)(n+1) & \leq & (n+2)n \\ & \Downarrow & \\ n^2+2n+1 & \leq & n^2+2n \\ & \Downarrow & \\ 1 & \leq & 0 \,. \end{array}$$

Posledná nerovnosť je samozrejme hlúposť. Z negovaného výroku sme odvodili nezmysel, potom musí platiť pôvodný výrok:

$$\forall n \in N \quad \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$$

a postupnosť $\{\frac{n+1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca.

Ďalej ukážeme, že táto postupnosť je zdola ohraničená číslom 1 (potom bude samozrejme zdola ohraničená aj každým číslom, ktoré je menšie ako 1). To znamená, že dokazujeme pravdivosť výroku:

$$\forall n \in N \quad \frac{n+1}{n} \geq 1 \,.$$

Opäť budeme postupovať nepriamo. Predpokladajme, že platí negácia tohto výroku: $\exists n \in N$ také, že

$$\frac{n+1}{n} < 1 \,.$$

Z tejto nerovnosti vyplýva:

$$\begin{array}{rcl} n+1 & < & n \\ & \Downarrow & \\ 1 & < & 0 \,. \end{array}$$

Ako vidieť, znova sme dospeli k nezmyslu. Postupnosť je zdola ohraničená číslom 1.

Venujme teraz pozornosť otázke, prečo musíme postupovať nepriamo. Čo

by mohlo nastať, keby sme použili priamy dôkaz? Čo je nesprávne na nasledujúcom postupe?
Pre $\forall n \in N$ máme

$$\begin{array}{rcl} \frac{n+1}{n} & > & \frac{n+2}{n+1} \\ & \Downarrow & \\ (n+1)(n+1) & > & (n+2)n \\ & \Downarrow & \\ n^2+2n+1 & > & n^2+2n \\ & \Downarrow & \\ 1 & > & 0\,. \end{array}$$

Posledná nerovnosť platí, takže máme čo sme potrebovali. Alebo nie? Problém je, že tvrdenie

$$\forall n \in N \; \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}\,,$$

ktoré dokazujeme a jeho pravdivosť nepoznáme, sme použili, ako predpoklad v implikácii. Vieme však, že implikácia $p \Longrightarrow q$ je v prípade, že výrok p má pravdivostnú hodnotu 0, pravdivá vždy, bez ohľadu na pravdivosť q. Takto sa vieme prepracovať od nepravdivého výroku k pravdivému. K akým absurdnostiam sa môžeme dopracovať pri takomto " dokazovaní", sa presvedčíme na nasledujúcich príkladoch (prevzaté z [**?**, **?**]):

Príklad. "Dokážeme", že $0 = 1$.

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 1 \\ & \Downarrow & \\ 1 & = & 0 \\ & \Downarrow & \\ 0+1 & = & 1+0 \\ & \Downarrow & \\ 1 & = & 1\,. \end{array}$$

Posledná rovnosť triviálne platí, každá z troch implikácií je pravdivá, ale naše tvrdenie to nedokazuje. Aby sme toto vedeli dokázať, museli by platiť aj všetky tri opačné implikácie, ale z rovnosti $0 + 1 = 1 + 0$ nevyplýva $1 = 0$, táto implikácia je nepravdivá.

Príklad. Podobne "dokážeme", že pre každé prirodzené číslo n platí: $n \geq n+1$.

$$\begin{array}{rcl} n & \geq & n+1 \\ & \Downarrow & \\ 0 \cdot n & \geq & 0 \cdot (n+1) \\ & \Downarrow & \\ 0 & \geq & 0\ . \end{array}$$

Posledná nerovnosť platí, ale nerovnosť $n \geq n+1$ zjavne pre žiadne prirodzené číslo nie (stačilo by nájsť jediné, aby sme pôvodné tvrdenie popreli). Implikácia

$$[n \geq n+1] \Rightarrow [0 \cdot n \geq 0 \cdot (n+1)]$$

je síce pravdivá pre ľubovoľné $n \in N$, ale my by sme potrebovali dokázať pravdivosť obrátenej implikácie

$$[0 \cdot n \geq 0 \cdot (n+1)] \Rightarrow [n \geq n+1]\ ,$$

čo sa nám určite nepodarí.

Hromadný bod postupnosti

Nech a je reálne číslo. Každý otvorený interval taký, že $a \in (x, y)$, kde $x, y \in R$ nazveme okolie bodu a. Pre okolie bodu a sa používa značenie $O(a)$. Každý otvorený interval (x, ∞) respektíve $(-\infty, y)$ nazveme okolie bodu ∞ respektíve $-\infty$. Pre tieto okolia sa používa značenie $O(\infty)$, respektíve $O(-\infty)$. Hovorí sa im tiež okolia nevlastných bodov ∞, resp. $-\infty$. Napríklad interval $(-1, 2) = O(1)$ je okolím bodu 1 a intervaly $(-1, \infty)$, $(10001, \infty)$ okoliami (nevlastného) bodu nekonečno.
Nech je a reálne číslo alebo ∞ alebo $-\infty$. Hovoríme, že a je hromadným bodom postupnosti $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$, ak pre ľubovoľné okolie bodu a platí, že nekonečne veľa členov tejto postupnosti patrí do tohto okolia. Priblížme si tento pojem na niekoľkých príkladoch.

Príklad. Konštantná postupnosť $\{c\}_{n=p}^{\infty}$, kde $p \in Z$, $c \in R$ má jediný hromadný bod - číslo c.

Príklad. Vezmime postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$. Členy tejto postupnosti nadobúdajú striedavo hodnoty -1 a 1. Nech si zvolíme ľubovoľné okolie bodu 1, nekonečne veľa členov tejto postupnosti (všetky párne) budú ležať v tomto okolí. Podobne to platí aj pre -1. Táto postupnosť má práve dva hromadné body: -1 a 1.

Všeobecne platí: ak nekonečne veľa členov postupnosti nadobudne hodnotu c, tak c je hromadný bod tejto postupnosti.

Príklad. V postupnosti $\{\sin(n\frac{\pi}{2}\}_{n=0}^{\infty}$ sa striedajú hodnoty 0, 1, -1 a toto sú hromadné body tejto postupnosti.

Doteraz sme mali príklady, keď hromadný bod postupnosti patril do oboru hodnôt postupnosti. V mnohých prípadoch to tak ovšem nie je. Ukážme si teraz príklady postupností, v ktorých hromadný bod nie je rovný žiadnemu členu postupnosti.

Príklad. Pozrime sa lepšie na postupnosť $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Členy tejto postupnosti sú vždy kladné a postupnosť je klesajúca. Zdá sa, že členy tejto postupnosti sú "rozložené v blízkosti" nuly - čím väčšie n zvolíme, tým je člen $a_n = \frac{1}{n}$ bližšie k nule. Ukážeme, že 0 je hromadným bodom tejto postupnosti. Potrebujeme ukázať, že v ľubovoľnom okolí 0 nájdeme nekonečne veľa členov našej postupnosti. Zvoľme si okolie $O_1(0) = (-x_1, x_1)$. Na dolnej hranici okolia samozrejme nezáleží, keďže všetky členy postupnosti sú kladné. Zaujímavá bude pre nás horná hranica tohto intervalu. Hľadáme také členy postupnosti, pre ktoré platí $0 < \frac{1}{n} < x_1$. Nie je ťažké zistiť, že to budú práve tie členy postupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré $n > \frac{1}{x_1}$. Nech je x_1 akékoľvek kladné reálne číslo, vždy bude existovať nekonečne veľa prirodzených čísel n, ktoré sú väčšie ako $\frac{1}{x_1}$ a preto nekonečne veľa členov $\frac{1}{n}$ bude patriť tomuto okoliu. Nech je okolie $O_1(0)$ akékoľvek, bude v ňom nekonečne veľa členov tejto postupnosti a 0 je jej hromadným bodom.

Príklad. Postupnosť $\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ má hromadné body -1 a 1. Ak vezmeme okolie $O_1(1) = (0, 2)$, budú do neho patriť členy $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_4 = \frac{5}{4}$, $a_6 = \frac{7}{6}$, ... (všetky členy postupnosti s párnymi indexmi). Ak okolie zúžime, vypadne z neho len niekoľko prvých členov postupnosti, nekonečne veľa ich tam zostane. Napríklad vezmime okolie $O_2(1) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Vidíme, že $a_2 \notin O_2(1)$, ale ostatné členy s párnymi indexmi tam budú patriť. Ak vezmeme ľubovoľné okolie $O(1) = (x, y)$, hľadáme také párne čísla n, pre ktoré

$$\frac{n+1}{n} < y \ .$$

Po úprave máme

$$1 < ny - n = n(y-1)$$

a keďže $y > 1$, tak musí platiť

$$n > \frac{1}{y-1} \ .$$

Nech si zvolíme ľubovoľné okolie bodu 1 s hornou hranicou y, vďaka predchádzajúcej nerovnosti ľahko nájdeme najmenšie párne číslo n také, že počnúc týmto číslom budú všetky členy s párnym indexom patriť do zvoleného okolia. Napríklad vezmime okolie $O_3(1) = (0; 1,01)$. Potom platí

$$n > \frac{1}{1,01-1} = 100 \ .$$

Počnúc členom a_{102}, všetky členy s párnymi indexmi (je ich nekonečne veľa) budú patriť do okolia $O_3(1)$. Keď to zhrnieme, tak v každom okolí bodu 1 nájdeme nekonečne veľa členov tejto postupnosti. To znamená, že 1 je hromadný bod tejto postupnosti. Pomocou podobných úvah možno ukázať, že -1 je tiež hromadným bodom tejto postupnosti.

Príklad. Postupnosť $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ má dva hromadné body: $+\infty$ a $-\infty$. Počiatočné členy tejto postupnosti sú: $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$. V ľubovoľnom okolí $(x, +\infty)$ bodu $+\infty$ sa nachádza nekonečne veľa kladných párnych čísel, ktoré sú členmi postupnosti a v ľubovoľnom okolí $(-\infty, y)$ bodu $-\infty$ sa nachádza nekonečne veľa záporných nepárnych čísel, ktoré sú členmi tejto postupnosti. Potom $+\infty$ a $-\infty$ sú hromadné body tejto postupnosti.

Zamerajme sa teraz špeciálne na postupnosti, ktoré majú práve jeden hromadný bod. Predpokladajme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ má jediný hromadný bod L. V každom okolí L sa teda nachádza nekonečne veľa členov postupnosti a mimo tohto okolia ich musí byť len konečný počet. Ak by tomu tak nebolo a mimo niektorého okolia $O_i(L)$ by sa nachádzalo nekonečne veľa členov tejto postupnosti, tak by tam nutne musel existovať ďalší hromadný bod okrem L. Zjednodušene (ale z matematického hľadiska trochu nepresne) si to môžeme predstaviť tak, že tých nekonečne veľa členov mimo okolia $O_i(L)$ možno "schovať"do jedného, alebo viacerých intervalov, pričom v každom intervale bude nekonečne veľa členov postupnosti a v každom zo spomenutých intervalov vieme nájsť potom ďalšie hromadné body.

Ak má teda postupnosť len jeden hromadný bod L, tak pri zvolení akéhokoľvek okolia tohto bodu zostane mimo tohto okolia len konečný počet členov postupnosti. Z toho možno odvodiť záver, že pre ľubovoľné okolie bude existovať index $n_0 \in Z$, $n_0 \geq p$ taký, že všetky členy tejto postupnosti počnúc členom a_{n_0} budú patriť do daného okolia.

Príklad. Situáciu máme na obrázku pre postupnosť $\{\frac{n-1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Jej jediný hromadný bod je 1 a hodnoty prvých členov $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{3}{4}, a_5 = \frac{4}{5}, a_6 = \frac{5}{6}, a_7 = \frac{6}{7}, a_8 = \frac{7}{8}, \dots$. Do okolia $O_1(1)$ patria všetky členy postupnosti počnúc členom a_3, do $O_2(1)$ všetky členy počnúc a_4, do $O_3(1)$ všetky členy počnúc a_7.

Z predchádzajúcich úvah a príkladov si možno uvedomiť, že postupnosti, ktoré majú jeden hromadný bod z množiny R, sa správajú nasledovne: čím sú indexy členov väčšie, tým sú členy postupnosti viac "nalepené" na tento hromadný bod (trochu slušnejšie povedané - blížia sa k tejto hodnote). Ak je tento hromadný bod $+\infty$ (resp.$-\infty$) tak členy postupnosti rastú nad všetky hranice - blížia sa k $+\infty$ (resp. klesajú pod všetky hranice - blížia sa k $-\infty$).

Limita postupnosti

Postupnosti s jedným hromadným bodom, o ktorých sme hovorili v závere predchádzajúcej časti majú v matematike dôležité postavenie a toto postavenie súvisí s pojmom limita, ktorému sa teraz budeme venovať.

Definícia. Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ má limitu rovnú L, keď L je jediný hromadný bod tejto postupnosti ($L \in R$, alebo $L = \pm\infty$). Zapisujeme to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \ .$$

Pojem limita teda vyjadruje približovanie sa členov postupnosti k jednej hodnote - jedinému hromadnému bodu tejto postupnosti. Aby sme nezostali len pri abstraktnej definícii, uveďme niekoľko príkladov.

Príklad. Konštantná postupnosť $\{c\}_{n=p}^{\infty}$, kde $c \in R$ má jediný hromadný bod c, takže

$$\lim_{n\to\infty} c = c \ .$$

Príklad. Mali sme spomenuté postupnosti $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{(n-1)/n\}_{n=1}^{\infty}$, ktoré majú jeden hromadný bod: 0, resp. 1. Preto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ \text{ a } \ \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \ .$$

Príklad. Postupnosti $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, respektíve $\{-n\}_{n=1}^{\infty}$ majú jediný hromadný bod $+\infty$ resp. $-\infty$. Preto

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty \ .$$

Vlastnosti limít

Určovanie limít pomocou hromadných bodov je dosť ťažkopádne. Výhodnejšie je využiť k ich výpočtu niektoré ich vlastnosti.

1. Ak je postupnosť neklesajúca a zhora ohraničená (nerastúca a zdola ohraničená), potom má limitu. Napríklad postupnosť $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca (takže aj nerastúca) a zdola ohraničená. Jej limita je 0, ako tu už bolo spomenuté.

2. Nech

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

sú limity postupností $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=p}^{\infty}$, pričom a, b sú reálne čísla a $c \in R$ je konštanta. Potom

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= a + b \\ \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= a - b \\ \lim_{n\to\infty} (c a_n) &= c \cdot a \\ \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= a \cdot b \ . \end{aligned}$$

Ak navyše pre ľubovoľné $n \in Z$, $n \geq p$ máme $b_n \neq 0$ a $b \neq 0$, tak platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \ .$$

Príklad. Vypočítajme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n}{n^2} \ .$$

Vieme, že

$$\frac{n^2 + n}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \ .$$

Keďže

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ ,$$

tak podľa vlastností limity súčtu dvoch postupností dostávame:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1 \ .$$

Príklad. Vypočítajme limitu postupnosti $\{(-1)/n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \Big(-\frac{1}{n}\Big) = (-1)\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = (-1)\cdot 0 = 0 \ .$$

Príklad. Podobne vypočítajme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \ .$$

Keďže $1/n^2 = (1/n)\cdot(1/n)$ a limita postupnosti $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ je 0, tak platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \cdot 0 = 0 \ .$$

3. Nech $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=p}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=p}^{\infty}$ sú také postupnosti, že $\forall n \in Z$, $n \geq p$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$ a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n \ .$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n \ .$$

Príklad. Vypočítajme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ .$$

Pre $\forall n \in N$ platí, že

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

a tiež

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ .$$

Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \ .$$

4. Nech

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \in R \ \text{ a } \lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty \ .$$

Potom
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0 \text{ a } \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}\pm\infty & ,ak \quad c>0\\ \mp\infty & ,ak \quad c<0\end{cases}$$
Príklad. Vezmime postupnosti $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{n\}_{n=1}^{\infty}$. Keďže
$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1\in R \text{ a } \lim_{n\to\infty} n=\infty ,$$
tak platí
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \text{ a } \lim_{n\to\infty}\frac{n}{1}=\infty ,$$
čo sa zhoduje s našimi predchádzajúcimi úvahami o týchto limitách.

5. Nech
$$\lim_{n\to\infty} a_n = c\in R, \quad \lim_{n\to\infty} b_n=0$$
a pre $\forall n\in Z$, $n\geq p$ platí $b_n>0$. Potom
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty .$$

Niektoré dôležité limity postupností

1. Pre geometrickú postupnosť $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:
$$\lim_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}\infty & ,ak \quad q>1\\ 1 & ,ak \quad q=1\\ 0 & ,ak \quad q\in(-1,1)\\ \nexists & ,ak \quad q\leq -1\end{cases}$$

2. V prípade, že $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=p}^{\infty}$ sú rastúce postupnosti,
$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$$
a
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0 ,$$
tak postupnosť v menovateli rastie oveľa rýchlejšie. Tieto úvahy sa využívajú pri porovnávaní výpočtovej náročnosti algoritmov. Ak máme algoritmus (počítačový program) na riešenie nejakého problému, ktorý pri vstupe veľkosti n (napríklad počet bitov) vykoná v najhoršom prípade a_n krokov a iný algoritmus (program) na riešenie toho istého problému, ktorý pri vstupe veľkosti n vykoná v najhoršom prípade b_n krokov, pričom pre postupnosti $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$,

$\{b_n\}_{n=p}^{\infty}$ platia vyššie spomenuté podmienky, tak môžeme skonštatovať, že prvý algoritmus je rýchlejší, ako druhý. Z tohto pohľadu sú pre nás dôležité nasledujúce postupnosti a limity:
Nech $k \in R^+$ a $q > 1$ sú konštanty. Pre postupnosti $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^k\}_{n=1}^{\infty}$, $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{n^n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \ .$$

3. Za jedno z najdôležitejších čísel v matematike je považované Eulerovo číslo $e = 2,71828\ldots$. Definujeme ho nasledovne

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Je prekvapujúce, kde všade sa toto číslo vyskytuje. Môžeme sa s ním stretnúť pri zloženom úročení, pri určovaní počtu nerozpadnutých jadier pri rádioaktívnom rozpade, pri popise javov v atmosfére alebo v elektrickom kondenzátore, nezaobíde sa bez neho ani moderná štatistika. Toto nenápadné číslo je natoľko dôležité, že je mu venovaný pekný článok aj v jednom obrázkovom týždenníku [?].