A

Príklad 1:

Vypočítajte body $\boldsymbol{x}^1$ a $\boldsymbol{x}^2$ minimalizačnej postupnosti v E_2 pre funkciu:

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 + 4x_2$$

s východiskovým bodom $\boldsymbol{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Pre minimalizáciu funkcií jednej premennej použite diferenciálny počet.

Úlohu riešte **gradientovou metódou s najväčším poklesom**.

Postup riešenia pre všetky 3 metódy:

$\boldsymbol{x}^{i+1} = \boldsymbol{x}^i + \alpha_i \boldsymbol{h}^i$ iteračná postupnosť pre $i=0, 1, \ldots$

Poznámka: Analyticky sa dá zistiť, že presné minimum je v bode $\boldsymbol{x}^{opt} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ a funkčná hodnota v bode minima je $f(\boldsymbol{x}^{opt}) = -20$.

Riešenie 1a (*gradientová metóda maximálneho poklesu*)**:**

$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 + 4x_2$ gradient $f'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 8 \\ 2x_2 + 4 \end{pmatrix}$

V gradientovej metóde najväčšieho poklesu je smer minimalizácie rovný antigradientu, t.j.
$\boldsymbol{h}^i = -f'(\boldsymbol{x}^i)$ a iteračná postupnosť bude:

$$\boxed{\boldsymbol{x}^{i+1} = \boldsymbol{x}^i - \alpha_i f'(\boldsymbol{x}^i)}$$

$i = 0$

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 - \alpha_0 f'(\boldsymbol{x}^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} 2*0-8 \\ 2*1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\alpha_0 \\ 1-6\alpha_0 \end{pmatrix}$$

α_0 volíme tak, aby funkcia f klesla v bode $\boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} 8\alpha_0 \\ 1-6\alpha_0 \end{pmatrix}$ čo najviac. Dosadíme bod $\boldsymbol{x}^1$ do funkcie a analyticky hľadáme minimum podľa premennej α_0:

$$g(\alpha_0) = f\left(\begin{pmatrix} 8\alpha_0 \\ 1-6\alpha_0 \end{pmatrix}\right) = (8\alpha_0)^2 + (1-6\alpha_0)^2 - 8(8\alpha_0) + 4(1-6\alpha_0)$$

g zderivujeme podľa α_0 a 1. Deriváciu položíme = 0:

$$g'(\alpha_0) = 128\alpha_0 - 2*6*(1-6\alpha_0) - 64 - 24 = 128\alpha_0 - 12 + 72\alpha_0 - 64 - 24 = 200\alpha_0 - 100$$

$$g'(\alpha_0) = 200\alpha_0 - 100 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = 0.5$$

$$\boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} 8\alpha_0 \\ 1-6\alpha_0 \end{pmatrix}_{\alpha_0=0.5} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gradient v bode $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sa rovná nulovému vektoru. Teda bod $(4,-2)^T$ je stacionárny, môže tu existovať minimum.

$i = 1$

$$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1 - \alpha_1 f'(\boldsymbol{x}^1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} 2*4-8 \\ 2*(-2)+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nezávislé od parametra α, takže nemáme čo minimalizovať

$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, to je skutočné minimum funkcie f, vďaka tomuto, pričom sme nemuseli použiť žiadne pravidlo zastavenia (vlastne je tu použité pravidlo: veľkosť gradientu v bode $\boldsymbol{x}^1$ je rovná 0, teda je menšia ako ľubovoľné kladné ε).

B Vypočítajte body $\boldsymbol{x}^1$ a $\boldsymbol{x}^2$ minimalizačnej postupnosti v E_2 pre funkciu:

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 + 4x_2$$

s východiskovým bodom $\boldsymbol{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Pre minimalizáciu funkcií jednej premennej použite diferenciálny počet.

Úlohu riešte **gradientovou metódou s konštantným krokom (α=3) a pravidlom zastavenia**: $|f(x^{i+1}) - f(x^i)| < \varepsilon$. Nech ε =0,05.

Riešenie 1b (*gradientová metóda s konštantným krokom*)**:**

$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 + 4x_2$ gradient $f'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 8 \\ 2x_2 + 4 \end{pmatrix}$

Zvoľme **pravidlo zastavenia**: $|f(\boldsymbol{x}^{i+1}) - f(\boldsymbol{x}^i)| < \varepsilon$. Nech ε =0,05.

V gradientovej metóde s konštantným krokom je smer minimalizácie rovný normovanému antigradientu, t.j.

$\boldsymbol{h}^i = -\dfrac{f'(\boldsymbol{x}^i)}{|f'(\boldsymbol{x}^i)|}$ a iteračná postupnosť bude:

$$\boldsymbol{x}^{i+1} = \boldsymbol{x}^i - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^i)}{|f'(\boldsymbol{x}^i)|}$$

i = 0

$$\overline{\boldsymbol{x}}^1 = \boldsymbol{x}^0 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^0)}{|f(\boldsymbol{x}^0)|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 * \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-8)^2 + 6^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 * \frac{\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{100}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 * \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2,4 \\ 1,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

Keďže pri gradientovej metóde s konštantným krokom nemáme zabezpečené, že pri danom kroku α klesne hodnota účelovej funkcie v bode $\boldsymbol{x}^{i+1}$ oproti hodnote účelovej funkcie v bode $\boldsymbol{x}^i$, preto to musíme zistiť:

$f(\boldsymbol{x}^0) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ = $0^2+1^2-8*0+4*1=5$

$f(\overline{\boldsymbol{x}}^1) = f\left(\begin{pmatrix} 2,4 \\ -0,8 \end{pmatrix}\right)$ = $2,4^2+(-0,8)^2-8*2,4+4*(-0,8)$= 5,76+0,64-19,2-3,2=-16

$f(\boldsymbol{x}^0) > f(\overline{\boldsymbol{x}}^1)$, teda **pokračujeme** takto $\boldsymbol{x}^1 = \overline{\boldsymbol{x}}^1$, $f(\boldsymbol{x}^1) = f(\overline{\boldsymbol{x}}^1) = -16$, α=3, $\overline{\boldsymbol{x}}^2 = \boldsymbol{x}^1 - \alpha \dfrac{f'(\boldsymbol{x}^1)}{|f(\boldsymbol{x}^1)|}$, ale ešte predtým **overíme pravidlo zastavenia** $|f(\boldsymbol{x}^1) - f(\boldsymbol{x}^0)|=|-16-5|=-21>\varepsilon$, čo značí, že musíme pokračovať: $i=i+1$.

i = 1

$$\overline{\boldsymbol{x}}^2 = \boldsymbol{x}^1 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^1)}{|f(\boldsymbol{x}^1)|} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ -0.8 \end{pmatrix} - 3 * \frac{\begin{pmatrix} -3,2 \\ 2,4 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-3,2)^2 + 2,4^2}} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ -0.8 \end{pmatrix} - 3 * \frac{\begin{pmatrix} -3,2 \\ 2,4 \end{pmatrix}}{\sqrt{16}} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ -0.8 \end{pmatrix} - 3 * \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -2,6 \end{pmatrix}$$

$f(\boldsymbol{x}^1) = -16$

$f(\overline{\boldsymbol{x}}^2) = f\left(\begin{pmatrix} 4,8 \\ -2,6 \end{pmatrix}\right)$ $=4,8^2+(-2,6)^2-8*4,8+4*(-2,6)$= 23,04+6,76-38,4-10,4=-19

$f(\boldsymbol{x}^1) > f(\overline{\boldsymbol{x}}^2)$, teda **pokračujeme** takto $\boldsymbol{x}^2 = \overline{\boldsymbol{x}}^2$, $f(\boldsymbol{x}^2) = f(\overline{\boldsymbol{x}}^2) = -19$, α=3, $\overline{\boldsymbol{x}}^3 = \boldsymbol{x}^2 - \alpha \dfrac{f'(\boldsymbol{x}^2)}{|f(\boldsymbol{x}^2)|}$, ale ešte predtým **overíme pravidlo zastavenia** $|f(\boldsymbol{x}^2) - f(\boldsymbol{x}^1)|=|-19-(-16)|=|-19+16|=3>\varepsilon$, čo značí, že musíme pokračovať: $i=i+1$.

i = 2

$$\bar{\boldsymbol{x}}^3 = \boldsymbol{x}^2 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^2)}{|f(\boldsymbol{x}^2)|} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} - 3* \frac{\begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}}{\sqrt{1{,}6^2 + (-1{,}2)^2}} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} - 3* \frac{\begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}}{\sqrt{4}} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} - 3* \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$$

$f(\boldsymbol{x}^2) = -19$

$f(\bar{\boldsymbol{x}}^3) = -16$ (vlastne išlo o návrat do bodu $\boldsymbol{x}^1$ – to je náhoda, nebýva to pravidlom)

Neplatí $f(\boldsymbol{x}^2) > f(\bar{\boldsymbol{x}}^3)$, preto zmenšíme *α* napríklad na polovicu, t.j. *α*= *α*/2=1,5 a zopakujeme výpočet

$\bar{\boldsymbol{x}}^3 = \boldsymbol{x}^2 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^2)}{|f(\boldsymbol{x}^2)|}$.

$$\bar{\boldsymbol{x}}^3 = \boldsymbol{x}^2 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^2)}{|f(\boldsymbol{x}^2)|} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} - 1{,}5* \frac{\begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}}{\sqrt{1{,}6^2 + (-1{,}2)^2}} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} - 1{,}5* \frac{\begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}}{\sqrt{4}} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} - 1{,}5* \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ -1{,}7 \end{pmatrix}$$

$f(\boldsymbol{x}^2) = -19$

$f(\bar{\boldsymbol{x}}^3) =$ $3{,}6^2+(-1{,}7)^2-8*3{,}6+4*(-1{,}7)=$ 12,96+2,89-27,2-6,8=-18,15

Neplatí $f(\boldsymbol{x}^2) > f(\bar{\boldsymbol{x}}^3)$, preto zmenšíme *α* napríklad na polovicu, t.j. *α*= *α*/2=0,75 a zopakujeme výpočet

$\bar{\boldsymbol{x}}^3 = \boldsymbol{x}^2 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^2)}{|f(\boldsymbol{x}^2)|}$.

$$\bar{\boldsymbol{x}}^3 = \boldsymbol{x}^2 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^2)}{|f(\boldsymbol{x}^2)|} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} - 0{,}75* \frac{\begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}}{\sqrt{1{,}6^2 + (-1{,}2)^2}} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} - 0{,}75* \frac{\begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}}{\sqrt{4}} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} - 0{,}75* \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ -2{,}15 \end{pmatrix}$$

$f(\boldsymbol{x}^2) = -19$

$f(\bar{\boldsymbol{x}}^3) =$ $4{,}2^2+(-2{,}15)^2-8*4{,}2+4*(-2{,}15)=$ 17,64+4,6225-33,6-8,6=-19,9375

$f(\boldsymbol{x}^2) > f(\bar{\boldsymbol{x}}^3)$, teda **pokračujeme** takto $\boldsymbol{x}^3 = \bar{\boldsymbol{x}}^3$, $f(\boldsymbol{x}^3) = f(\bar{\boldsymbol{x}}^3) = -19{,}9375$, *α*=0,75, $\bar{\boldsymbol{x}}^4 = \boldsymbol{x}^3 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^3)}{|f(\boldsymbol{x}^3)|}$, ale

ešte predtým **overíme pravidlo zastavenia** $|f(\boldsymbol{x}^3)- f(\boldsymbol{x}^2)|=|-19{,}9375-(-19)|=|-19{,}9375+19|=0{,}9375>\varepsilon=0{,}05$, čo značí, že musíme pokračovať: *i*=*i*+1.

i = 3

$$\bar{\boldsymbol{x}}^4 = \boldsymbol{x}^3 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^3)}{|f(\boldsymbol{x}^3)|} = \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ -2{,}15 \end{pmatrix} - 0{,}75* \frac{\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}}{\sqrt{0{,}4^2 + (-0{,}3)^2}} = \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ -2{,}15 \end{pmatrix} - 0{,}75* \frac{\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}}{\sqrt{0{,}25}} = \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ -2{,}15 \end{pmatrix} - 0{,}75* \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ -1{,}7 \end{pmatrix}$$

$f(\boldsymbol{x}^3) = -19{,}9375$

$f(\bar{\boldsymbol{x}}^4) =$ $3{,}6^2+(-1{,}7)^2-8*3{,}6+4*(-1{,}7)=$ 12,96+2,89-27,2-6,8=-18,15

Neplatí $f(\boldsymbol{x}^3) > f(\bar{\boldsymbol{x}}^4)$, preto zmenšíme *α* napríklad na polovicu, t.j. *α*= *α*/2= 0,375 a zopakujeme výpočet

$\bar{\boldsymbol{x}}^4 = \boldsymbol{x}^3 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^3)}{|f(\boldsymbol{x}^3)|}$.

$$\bar{\boldsymbol{x}}^4 = \boldsymbol{x}^3 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^3)}{|f(\boldsymbol{x}^3)|} = \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ -2{,}15 \end{pmatrix} - 0{,}375* \frac{\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}}{\sqrt{0{,}4^2 + (-0{,}3)^2}} = \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ -2{,}15 \end{pmatrix} - 0{,}375* \frac{\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}}{\sqrt{0{,}25}} = \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ -2{,}15 \end{pmatrix} - 0{,}375* \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}9 \\ -1{,}925 \end{pmatrix}$$

$f(\boldsymbol{x}^3) = -19{,}9375$

$f(\bar{\boldsymbol{x}}^4) =$ $3{,}9^2+(-1{,}925)^2-8*3{,}9+4*(-1{,}925)=$ 15,21+3,705625-31,2-7,7=-19,984375

$f(\boldsymbol{x}^3) > f(\bar{\boldsymbol{x}}^4)$, teda **pokračujeme** takto $\boldsymbol{x}^4 = \bar{\boldsymbol{x}}^4$, $f(\boldsymbol{x}^4) = f(\bar{\boldsymbol{x}}^4) = -19{,}984375$, *α*=0,375, $\bar{\boldsymbol{x}}^5 = \boldsymbol{x}^4 - \alpha \frac{f'(\boldsymbol{x}^4)}{|f(\boldsymbol{x}^4)|}$,

ale ešte predtým **overíme pravidlo zastavenia**

$|f(\boldsymbol{x}^4)- f(\boldsymbol{x}^3)|=|$ $-19{,}984375-(-19{,}9375)|=|$ $-19{,}984375+19{,}9375)|=$ $0{,}046875<\varepsilon=0{,}05$, čo značí, že presnosť je splnená, t.j. prehlásime, že minimum funkcie je v bode $\boldsymbol{x}^4 = \begin{pmatrix} 3{,}9 \\ -1{,}925 \end{pmatrix}$ a funkčná hodnota v bode minima je

$f(\boldsymbol{x}^4) = -19{,}984375$.

C Vypočítajte body $\boldsymbol{x}^1$ a $\boldsymbol{x}^2$ minimalizačnej postupnosti v E_2 pre funkciu:

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 + 4x_2$$

s východiskovým bodom $\boldsymbol{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Pre minimalizáciu funkcií jednej premennej použite diferenciálny počet.

Úlohu riešte **Powellovou metódou.**

Tu sú rozpísané jednotlivé výsledky, je potrebné to ešte spracovať.

y00=(0.1), beta1=4, y01=(4,1), beta2= - 3, y02=(4, -2), h0=(-4,3), alfa0= 1, x1=(4, -2)
y10=(4, -2), beta1=0, y11=(4, -2), beta2=0, y12=(4, -2), h1=(0,0), x2=(4, -2)

Keďže x1=x2=x3=….., prehlásime x2=(4, -2)^T za minimum s hodnotou ÚF=-20

V tychto vysledkoch je nejaka chyba. Pozri vypocet Powellovej metody v subore, kde je projekcia.