Obyčajné diferenciálne rovnice

Rovnice prvého rádu

Aleš Kozubík

Katedra Matematických metód
Fakulta Riadenia a Informatiky
Žilinská Univerzita v Žiline

17. novembra 2011

Diferenciálna rovnica

Pod diferenciálnou rovnicou rozumieme rovnicu v tvare

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kde $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ je funkcia $n+2$ premenných definovaná na nejakej oblasti v $\mathbb{R}^{n+2}$.

Základné pojmy

Rád diferenciálnej rovnice

Najvyšší rád derivácie, ktorá sa v rovnici vyskytuje.

Integrálna krivka

Integrálna krivka diferenciálnej rovnice je krivka s rovnicou $y = \varphi(x)$, kde funkcia $\varphi(x)$ je riešením danej rovnice.

Rovnica prvého rádu

Definícia

Diferenciálne rovnica prvého rádu má všeobecný tvar

$$F(x, y, y') = 0,$$

kde $F(x, y, y')$ je funkcia troch premenných definovaná v nejakej oblasti v trojrozmernom priestore $\mathbb{R}^3$.

Tvary rovnice prvého rádu

Normálny tvar

Normálny tvar diferenciálnej rovnice prvého rádu je

$$y' = f(x, y).$$

Tento tvar vznikne zo všeobecného, ak z neho možno deriváciu y' vyjadriť explicitne ako funkciu premenných x a y.

Tvary rovnice prvého rádu

Diferenciálny tvar

Diferenciálny tvar diferenciálnej rovnice prvého rádu je

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

kde $M(x,y)$ a $N(x,y)$ sú funkcie premenných x a y.Tento tvar vznikne z normálneho tak, že dosadíme

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{a} \quad f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Tvary rovnice prvého rádu

Symetrický tvar

Symetrický tvar diferenciálnej rovnice prvého rádu je

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y)}.$$

Začiatočná úloha

Začiatočnou úlohou rozumieme diferenciálnu rovnicu

$$y' = f(x, y)$$

so začiatočnou podmienkou

$$y(x_0) = y_0.$$

Geometricky to znamená, že integrálna krivka $y = \varphi(x)$ prechádza bodom $[x_0, y_0]$.

Metóda separácie premenných

Rovnica so separovanými premennými

Rovnicou so separovanými premennými nazývame diferenciálnu rovnicu, ktorú možno písať v tvare

$$p(y) \cdot y' = q(x),$$

kde $p(y)$ a $q(x)$ sú spojité funkcie.

Každú diferenciálnu rovnicu prvého rádu, ktorá sa dá previesť na tento tvar nazývame rovnicou so separovateľnými premennými.

Prechod od rovnice so separovateľnými premennými ku tvaru rovnice so separovanými premennými nazývame separáciou premenných.

Metóda separácie premenných

Ak funkcia $y = \varphi(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$p(y) \cdot y' = q(x),$$

na nejakom intervale J, tak

$$p[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) = q(x),$$

a po integrácii dostávame

$$\int p[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x = \int q(x)\mathrm{d}x,$$

alebo

$$\int p(y)\mathrm{d}y = \int q(x)\mathrm{d}x.$$

Príklady

1. $y' = \cos x + \ln x$,
2. $y' = \frac{1}{4+9x^2}$,
3. $y' = \sin y$,
4. $y' = \frac{y^2-2y+5}{y+1}$,
5. $y' = \frac{1+y}{1-x}$,
6. $y' = \frac{y(1+x)}{x(y-1)}$,
7. $(y^2 + xy^2)\mathrm{d}x + (x^2 - yx^2)\mathrm{d}y = 0$,
8. $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$,
9. $y' = \mathrm{e}^{x-y}$,
10. $(1 + y^2)(\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y) - (1 + y)\mathrm{d}y = 0$.

Homogénna rovnica

Homogénna rovnica

Pod homogénnou rovnicou rozumieme rovnicu, ktorú je možné zapísať v tvare

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Predpokladáme, že $f(u)$ je spojitá funkcia na intervale (a, b).

Potom riešime substitúciou $u = \frac{y}{x}$, odkiaľ $y = u \cdot x$ a $y' = u + xu'$
Rovnica tak prejde do tvaru

$$u'x + u = f(u),$$

a túto rovnicu riešime separáciou premenných.

Príklady

1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right),$
2. $(x + 2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0,$
3. $y' = -\frac{x+y}{x},$
4. $(2\sqrt{xy} - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0,$
5. $2x^3 \cdot y' = y(2x^2 - y^2),$
6. $xy' = y - x\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},$
7. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x},$
8. $(x^2 + y^2)y' = 2xy.$

Rovnica $y' = f\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{ax+by+c}\right)$

Predpokladáme, že $f(u)$ je spojitá funkcia na intervale (a, b). Ak by platilo $\gamma = c = 0$, tak by rovnica

$$y' = f\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$$

bola homogénna v prípade, že $\alpha b - \beta a \neq 0$, alebo v tvare $y' = konst.$ ak by bolo $\alpha b - \beta a = 0$.

Budeme teda ďalej predpokladať, že platí

$$\gamma^2 + c^2 \neq 0.$$

Rovnica $y' = f\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{ax+by+c}\right)$

Ak by platilo $\alpha b - \beta a = 0$, tak v prípade, že $\alpha = a = 0$ alebo $\beta = b = 0$, má rovnica separované premenné.
Nech teda platí $\alpha^2 + a^2 \neq 0$ a $\beta^2 + b^2 \neq 0$ a nech je napr. $b \neq 0$.

Potom z rovnice $\alpha b - \beta a = 0$ dostávame

$$\alpha = \frac{a\beta}{b} \Rightarrow \alpha x + \beta y + \gamma = \frac{a\beta}{b} x + \beta y + \gamma = \frac{\beta}{b}(ax + by) + \gamma,$$

a rovnica má teda tvar

$$y' = f\left(\frac{\frac{\beta}{b}(ax + by) + \gamma}{ax + by + c}\right).$$

Rovnica $y' = f\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{ax+by+c}\right)$

Rovnicu

$$y' = f\left(\frac{\frac{\beta}{b}(ax+by)+\gamma}{ax+by+c}\right)$$

prevedieme substitúciou $ax+by=z$ na tvar

$$\frac{1}{b}(z'-a) = f\left(\frac{\frac{\beta}{b}z+\gamma}{z+c}\right),$$

čo je rovnica so separovanými premennými.

Podobne postupujeme v prípade, že $b=0$ a $\beta \neq 0$.

Rovnica $y' = f\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{ax+by+c}\right)$

Ostáva teda vyriešiť prípad $\alpha b - \beta a \neq 0$. Existuje jediná dvojica čísiel h a k taká, že platí

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha h & + & \beta k & + & \gamma & = & 0 \\ ah & + & bk & + & c & = & 0 \end{array}$$

Substitúciou $x = \xi + h$ a $y = \eta + k$ potom rovnicu upravíme na tvar

$$y' = f\left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{a\xi + b\eta}\right).$$

Rovnica $y' = f\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{ax+by+c}\right)$

Rovnicu

$$y' = f\left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{a\xi + b\eta}\right).$$

ďalej prevedieme na tvar

$$y' = f\left(\frac{\alpha + \beta\frac{\eta}{\xi}}{a + b\frac{\eta}{\xi}}\right),$$

čo je opäť homogénna rovnica.

Príklady

1. $y' = \frac{x+y-3}{x+y-1}$,
2. $(3y - 7x + 7)\,\mathrm{d}x + (3x - 7y - 3)\,\mathrm{d}y = 0$,
3. $(x - y)\,\mathrm{d}x + (2y - x + 1)\,\mathrm{d}y = 0$,
4. $y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$,
5. $(x + x + 1)\,\mathrm{d}x + (2x + 2y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$,
6. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

Lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu

Lineárna rovnica

Diferenciálnu rovnicu prvého rádu nazývame lineárnou, ak ju možno písať v tvare

$$y' = a(x)y + b(x).$$

O funkciách $a(x)$ a $b(x)$ predpokladáme, že sú spojité.

Ak je $b(x) \equiv 0$, nazývame ju homogénnou.

Lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu

Homogénna lineárna diferenciálna rovnica je rovnicou so separovanými premennými

$$y' = a(x)y.$$

Riešenie $y \equiv 0$ nazývame triviálne. Pre netriviálne riešenia máme

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = a(x)\,\mathrm{d}x$$

odkiaľ

$$\ln y = \int a(x)\,\mathrm{d}x,$$

čo zapisujeme aj v tvare

$$y = C \cdot \exp\left\{\int a(x)\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu

Ak je $b(x) \neq 0$, hovoríme o nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnici. Jej riešenie určíme metódou variácie konštánt. Jej podstatou je hľadanie riešenia v tvare

$$y = C(x) \cdot \exp\left\{ \int a(x)\,\mathrm{d}x \right\}.$$

Teda integračnú konštantu v riešení homogénnej rovnice považujeme za funkciu premennej x. Derivovaním dostávame

$$y' = C'(x) \cdot \exp\left\{ \int a(x)\,\mathrm{d}x \right\} + C(x) \cdot \exp\left\{ \int a(x)\,\mathrm{d}x \right\} \cdot a(x).$$

Lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu

Po dosadení do rovnice

$$y = a(x) \cdot y + b(x),$$

sa na oboch stranách rovnice objavia členy

$$C(x) \cdot \exp\left\{\int a(x)\,\mathrm{d}x\right\} \cdot a(x).$$

Po ich vzájomnom vyrušení získame diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu $C(x)$ v tvare

$$C'(x) \cdot \exp\left\{\int a(x)\,\mathrm{d}x\right\} = b(x),$$

čo je opäť rovnica so separovanými premennými.

Lineárna diferenciálna rovnica 1.rádu

Riešením poslednej rovnice dostávame

$$C(x) = \int b(x) \exp\left\{-\int a(x)\,\mathrm{d}x\right\} \mathrm{d}x,$$

a pre riešenie pôvodnej nehomogénnej rovnice tak platí

$$y = \exp\left\{\int a(x)\,\mathrm{d}x\right\} \cdot \left(\int b(x) \exp\left\{-\int a(x)\,\mathrm{d}x\right\} \mathrm{d}x + K\right),$$

kde K je integračná konštanta.

Príklady

1. $y' = \frac{2}{x \ln x} y + \frac{1}{x}$,
2. $x^2 y' + xy + 1 = 0$,
3. $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$,
4. $(1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2)^2$,
5. $y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y}$,
6. $y' \operatorname{cotg} x + y = 2, \quad y(0) = -1$,
7. $y' + 2xy = 2x\, \mathrm{e}^{-x^2}$,
8. $xy' + (x + 1) y = 3x^2\, \mathrm{e}^{-x}$,
9. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x + 1)^3$.

Bernoulliho diferenciálna rovnica

Bernoulliho rovnica

Diferenciálnu rovnicu prvého rádu nazývame Bernoulliho, ak ju možno písať v tvare

$$y' = a(x)y + b(x)y^r,$$

kde r je konštanta.

O funkciách $a(x)$ a $b(x)$ predpokladáme, že sú spojité a $b(x) \neq 0$.

Taktiež predpokladáme $r \neq 0$ a $r \neq 1$.

Bernoulliho diferenciálna rovnica

Riešime substitúciou

$$y^{1-r} = u.$$

Derivovaním dostávame

$$(1-r)y^{-r}y' = u',$$

a rovnica sa transformuje na rovnicu

$$u' = (1-r)a(x)u + (1-r)b(x),$$

čo je lineárna rovnica, ktorú riešime metódou variácie konštánt.

Príklady

1. $y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{y}$,
2. $y' + xy = x^3y^2$,
3. $y' + yx = x^3y^3$,
4. $(1 - x^2)y' - xy = \alpha xy^2$,
5. $(y \ln x - 2)y \, \mathrm{d}x = x \, \mathrm{d}y$,
6. $y - y' \cos x = y^2 \cos x(1 - \sin x)$,
7. $xy' + 2y + x^5y^3 \, \mathrm{e}^x = 0$,
8. $y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x$,
9. $xy \, \mathrm{d}y = (y^2 + x) \, \mathrm{d}x$.

Rovnica nerozriešená vzhľadom na deriváciu

Rrovnica v tvare

$$F(x, y, y') = 0.$$

V tomto prípade je zvykom označovať $y' = p$ a rovnicu zapísať v tvare

$$F(x, y, p) = 0.$$

Riešenie nájdeme tzv. metódou derivovania v parametrickom tvare.

Rovnica nerozriešená vzhľadom na deriváciu

Rovnice, v ktorých sa nevyskytuje neznáma funkcia y, tj. rovnice

$$F(x, y') = 0.$$

Môžu vzniknúť dve špecifické situácie:

$$y' = f(x),$$

čo je rovnica so separovanými premennými, alebo

$$x = g(y') \quad \text{teda} \quad x = g(p).$$

Ďalej sa venujeme druhému prípadu.

Rovnica nerozriešená vzhľadom na deriváciu

Zo vzťahu

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x,$$

a z rovnice

$$x = g(p) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = g'(p)\,\mathrm{d}p$$

máme

$$\mathrm{d}y = g'(p) \cdot p\,\mathrm{d}p \quad \Rightarrow \quad y = \int g'(p) \cdot p\,\mathrm{d}p.$$

Parametrické vyjadrenie riešenia teda je

$$x = g(p), \quad y = \int g'(p) \cdot p\,\mathrm{d}p.$$

Rovnica nerozriešená vzhľadom na deriváciu

Rovnice, v ktorých sa nevyskytuje premenná x, tj. rovnice

$$F(y, y') = 0.$$

Premennú x považujeme za funkciu premennej y, takže platí

$$y' = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

čím je rovnica prevedená na predchádzajúci tvar.

Rovnica nerozriešená vzhľadom na deriváciu

Rovnice, v ktorých sa nevyskytuje premenná x, tj. rovnice

$$F(y, y') = 0.$$

Ak je možné rovnicu previesť na tvar

$$y = \alpha(y') \quad \text{teda} \quad y = \alpha(p).$$

Ďalej platí $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ odkiaľ

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{p} = \frac{\alpha'(p)}{p}\,\mathrm{d}p \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{\alpha'(p)}{p}\,\mathrm{d}p.$$

Parametrické vyjadrenie riešenia teda je

$$y = \alpha(p), \quad x = \int \frac{\alpha'(p)}{p}\,\mathrm{d}p.$$

Príklady

1. $e^{y'} + y' = x$,
2. $y'^3 - 3xy' + x^3 = 0$,
3. $x = y' + \ln y'$,
4. $y = y'^2 + 3$,
5. $y = y'^2 - y'x + \frac{1}{2}x^2$,
6. $y'^2 e^{y'} = y$,
7. $y(1 + y'^2) = 2a$ kde $a \in \mathbb{R}$,
8. $y = y'^2 + 2y'^3$.

Lagrangeova rovnica

Rovnice tvaru

$$y = x \cdot \alpha(y') + \beta(y').$$

Položíme $y' = p$ a dostávame rovnicu

$$y = x \cdot \alpha(p) + \beta(p).$$

Derivovaním podľa x dostávame

$$p = \alpha(p) + x \cdot \alpha'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \beta'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

odkiaľ

$$x' + \frac{\alpha'(p)}{\alpha(p) - p}x = -\frac{\beta'(p)}{\alpha(p) - p},$$

čo je lineárna diferenciálna rovnica.

Príklady

1. $y = 2xy' + {y'}^2$,
2. $y = xy'(y' + 2)$,
3. $y = y'x + \frac{a}{y'}$ kde $a \in \mathbb{R}$,
4. $y = y'x - 3{y'}^3$.