B1 - Obyčajné diferenciálne rovnice (základné pojmy, DR rádu na jej riešenie, systém n DR 1.rádu a jeho riešenie, prevod DR rádu n na systém n DR 1.rádu, orbita a trajektória riešenia, počiatočné podmienky, Cauchyho úloha, ...)

Pod **diferenciálnou rovnicou** rozumieme rovnicu v tvare $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$, kde $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ je funkcia *n + 2* premenných definovaná na nejakej oblasti v R^{n+2}

Rád diferenciálnej rovnice je najvyšší rád derivácie, ktorá sa v rovnici vyskytuje. Integrálna krivka diferenciálnej rovnice je krivka s rovnicou y = φ(x), kde funkcia φ(x) je riešením danej rovnice.

Diferenciálna rovnica prvého rádu ma všeobecný tvar F(x,y,y') =0 kde F(x,y,y') je funkcia troch premenných definovaná v nejakej oblasti v trojrozmernom priestore R^3 . Normálny tvar je y' = f(x,y). Tento tvar vznike zo všeobecného, ak z neho možno deriváciu y' vyjadriť explicitne ako funkciu premenných x a y.

Začiatočnou úlohou, tiež **Cauchyho úloha** rozumieme diferenciálnu rovnicu y' = f(x,y) so začiatočnou podmienkou $y(x_0)= y_0$. Geometricky to znamená že integrálna krivka y =φ(x) prechádza bodom [x0, y0].

y=φ(x) je integrálna krivka DR, potom ak pre riešenie v čísle a patri I platia

y(a)=b0, y'(a)=b1, y''(a)=b2 ...y^n(a)=bn , b0 až bn sú ľubovolné reálne čísla, potom hovoríme týmto rovnostiam **počiatočné podmienky.** Takúto úlohu (teda vyriešenie DR spolu s počiatočnými podmienkami) nazývame **Cauchyho úloha**.

Obor hodnôt riešenia y=φ(x) sa nazýva **Orbita riešenia**.

Graf riešenia DR sa nazýva **trajektória riešenia**.

B2 - DR y'=f(x,y) (jej riešenie, lineárny element, smerové pole DR, izokliny, ilustračný príklad, ...)

DR y'=f(x,y) priradí každému bodu (x,y) patri O práve jednu hodnotu y', ktorú môžeme chápať ako smernicu priamky prechádzajúcej bodom (x,y). Túto priamku znázorňjeme krátkou úsečkou so stredom (x,y) a nazývame ju **lineárny element** DR. Množina všetkých lineárnych elementov – smerové pole DR.

Krivky, v ktorých bodoch je danná DR tá istá hodnota y' = C (t.j. rovnaké lineárne elementy) sa nazývajú **izokliny**.
Riešenie DR y'=f(x,y) má tú vlasnosť, že dotyčnica ku grafu v bode

(x,) obsahuje príslušný lineárny element => smerové pole dáva veľmi dobrú predstavu o riešení DR y'=f(x,y)

B3 - Metóda separácie premenných [MSP] (separovateľné DR, princíp MSP, ...)

Uvažujeme DR $\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$ $\left.\begin{matrix} f(x): (a,b) \to R \\ g(y): (c,d) \to R \end{matrix}\right\}$ spojité

Predpokladajme, že $\forall y \in (c,d): g(y) \neq 0$ (t. j. $g(y)>0$ resp. $g(y)<0$)

Nech φ(x) je riešením DR y'= f(x) * g(y) na intervale I také, že:

také, že: $\forall x \in I: g(\varphi(x)) \neq 0 \Rightarrow$

$$\forall x \in I: \varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x)) \Rightarrow f(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} \Rightarrow$$

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int \frac{\varphi'(x)\,dx}{g(\varphi(x))} + konšt. = \left[\begin{array}{l} \text{sub:} \\ v = \varphi(x) \end{array}\right] = \int \frac{dv}{g(v)} + konšt.}$$

t. j. riešenie DR vyhovuje implicitnej rovnici. Problém je v tom, že nie vždy nájde explicitný tvar riešenia.

Problém je v tom, že nie vždy nájdeme explicitný tvar riešenia.

Druhá poučka z internetu:
DR v tvare y'.q(y) = p(x), kde p,q sú spojité funkcie, nazývame obyčajnou diferenciálnou rovnicou so separovanými premennými. Každú diferenciálnu rovnicu prvého rádu, ktorá sa dá previesť na tento tvar nazývame rovnicou so separovateľnými premennými. Prechod od rovnice so separovateľnými premennými ku tvaru rovnice so separovanými premennými nazývame separáciou premenných. Ak funkcia y = FI(x) je riešením diferenciálnej rovnice y'. q(y) = p(x), na nejakom intervale J tak FI(x)'× q(FI(x)) = p(x), a po integrácii dostávame
INTEGRAL FI(x)'× q(FI(x)) DX = INTEGRAL p(x) DX
Alebo INTEGRAL q(y) DY = INTEGRAL p(x) DX

B4 – Metóda separácie premenných [MSP] (transformácie niektorých DR na separovateľné DR, DR y'=f(y/x), DR y'=f(ax+by+c), DR y'=f((ax+by)/(Ax+By), DR y'=f((ax+by+c)/(Ax+By+C), ...)

1 $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$, pričom $f(t): (a,b) \to R$ je spojitá

substitúcia: $\boxed{u = \frac{y}{x}}$ $\left[\text{t. j. } u(x) = \frac{y(x)}{x}\right] \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = ux \\ y' = u'x + u \end{array} \Longrightarrow$

separovateľná DR $\boxed{u'x + u = f(u)}$ t. j. $\boxed{u' = \frac{f(u) - u}{x}}$.

Ak y je riešenie DR $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, $y(x_0)=y_0$, $x_0\neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $u=\frac{y}{x}$ je riešenie DR $u'x+u=f(u)$, $u(x_0)=\frac{y_0}{x_0}$.

(2) $\boxed{y'=f(\alpha x+\beta y+\gamma)}$ $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\beta\neq 0$

$f(t):(a,b)\to\mathbb{R}$ spojitá

substitúcia: $\boxed{z=\alpha x+\beta y+\gamma}$ [t.j. $z(x)=\alpha x+\beta y(x)+\gamma$]

$$\Longleftrightarrow\ y=\frac{z-\alpha x-\gamma}{\beta}\ ;\quad y'=\frac{z'-\alpha}{\beta}\ \Longrightarrow$$

separovateľné DR $\boxed{\frac{z'-\alpha}{\beta}=f(z)}$ t.j. $\boxed{z'=\beta f(z)+\alpha}$.

Pri riešení je potrebné overiť, či implicitné rovnice

$0=\beta f(z)+\alpha$, t.j. $f(z)=-\frac{\alpha}{\beta}$ nedáva taktiež

nejaké riešenie danej DR.

(3) $\boxed{y'=f\left(\frac{\alpha x+\beta y}{Ax+By}\right)}$ $\alpha,\beta,A,B\in\mathbb{R}$ (61)

$f(t):(a,b)\to\mathbb{R}$ spojitá

(I) $\det\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ A & B\end{vmatrix}=\alpha B-A\beta=0$, t.j.: $\exists k\in\mathbb{R}, k\neq 0: \overbrace{\alpha x+\beta y=k(Ax+By)}^{\text{sú LZ}}$

$$\Longrightarrow\ \boxed{y'=f(k)=\text{konšt.}}$$

(II) $\det\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ A & B\end{vmatrix}\neq 0\ \xRightarrow{x\neq 0}\ \boxed{y'=f\left(\frac{\alpha+\beta\frac{y}{x}}{A+B\frac{y}{x}}\right)}$ t.j. DR tvaru

(1) $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$

B5. Lineárna DR 1.rádu y'+p(x)y=f(x), y(x_0)=y_0 (riešenie homogénnej DR y'+p(x)y=0, Lagrangeova variácia konštánt [LVK] a jej použitie pri riešení nehomogénnej DR y'+p(x)y=f(x), jednoznačnosť riešenia, Bernoulliho DR y'+p(x)y=q(x)y^s, ...)

Diferenciálnu rovnicu prvého rádu nazývame lineárnou, ak ju možno písať v tvare y’ = a(x)y + b(x), o funkciach a(x) a b(x) predpokladáme že sú spojite. Ak b(x) $\equiv$ 0 nazývame ju homogénnou. Homogénna lineárna diferenciálna rovnica je rovnocou so separovanými premennými y’ = a(x)y. Riešenie y $\equiv$ 0 nazývame triviálne. Pre

netriviálne riešenia máme $\int 1/y\,dy = \int x.a(x)\,dx$,po úprave získame $\ln y = e^{\int x.a(x)dx}$, čo zapisujeme v tvare $y = C.e^{\int x.a(x)dx}$.
Ak b(x) != 0 hovoríme o nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnici. Jej riešenie určíme metódou variácie konštánt. Jej podstatou je hľadanie riešenia v tvare $y = C(x).e^{\int x.a(x)dx}$
Teda integračnú konštantu v riešení homoténnej rovnice považujeme za funkciu premennej x. derivovaním dostávame
$y' = C(x).e^{\int a(x)dx} + C(x).e^{a(x)dx}.a(x)$.
po dosadení do rovnice y' = a(x)y + b(x) sa na oboch stranách rovnice objavia členy C(x)×exp{ INTEGRAL a(x)DX }×a(x).
Po ich vzájomnom vyrušení získavame diferenciálnu rovnicu pre neznámu funkciu C(x) v tvare $C'(x).e^{\int a(x)dx} = b(x)$ čo je opäť rovnica so separovanými premennými. Riešením poslednej rovnice dostávame

$$C(x) = \int b(x) \exp\left\{-\int a(x)\,dx\right\} dx,$$

A pre riešenie pôvodnej nehomogennej rovnice tak platí

$$y = \exp\left\{\int a(x)\,dx\right\} \cdot \left(\int b(x) \exp\left\{-\int a(x)\,dx\right\} dx + K\right),$$

Kde K je integračná konštanta.
Diferenciálnu rovnicu prvého rádu nazývame Bernoulliho, ak ju možno zapísať v tvare: $y' = a(x)y + b(x)y^r,$

Kde r je konštanta. O funkciách a(x) a b(x) predpokladáme že sú spojité a b(x) != 0. taktiež predpokladáme že r != 0 r!=1.Riešime substitúciou y^{1-r} = u. Derivovaním dostávame (1-r)y y^{-r}y' = u', a rovnica sa trasformuje na:

$$u' = (1-r)a(x)u + (1-r)b(x),$$

Čo je lineárna rovnica, ktorú riešime metódou variácie konštánt.

B6 - Metóda derivovania - zavedenia parametra (princíp a popis metódy, použitie na riešenie DR y=f(x,y'), DR x=f(y,y'), DR y=f(y')x+g(y'), DR y=y'x+g(y'), ...)

Uvažujte implicitnú DR $F(x, y, y') = 0.$ Ak je to možné je lepšie ju previesť na explicitný tvar y'=f(x,y), Ale treba si dať pozor, aby sme nezabudli niektoré riešenia, resp aby sme zbytočne nezúžili definičný obor riešenia.

DR $F(x, y, y') = 0.$ za určitých predpokladov určuje jedna resp. niekoľko explicitných DR. 1 rádu

Rovnica v tvare $F(x, y, y') = 0.$ V tomto prípade je zvykom označovať y' = p a rovnicu zapísať v tvare $F(x, y, p) = 0.$. Riešenie nájdeme tzv. metódou derivovania v parametrickom tvare. Rovnice v ktorých sa nevyskytuje neznáma funkcia y, tj rovnice $F(x,y')=0.$ môžu vzniknúť 2 špecifické situácie $y'=f(x),$

čo je rovnica so separovanými premennými, alebo $x=g(y')$ teda $x=g(p).$
Venujeme sa druhému prípadu:
Zo vztahu $y'=p \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y=p\,\mathrm{d}x,$ a z rovnice

$x=g(p) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x=g'(p)\,\mathrm{d}p$ máme

$$\mathrm{d}y=g'(p)\cdot p\,\mathrm{d}p \quad \Rightarrow \quad y=\int g'(p)\cdot p\,\mathrm{d}p.$$

Parametrické vyjadrenie riešenia je teda: $x=g(p),\quad y=\int g'(p)\cdot p\,\mathrm{d}p.$

Rovnice v ktorých sa nevyskytuje premenná x, tj. rovnice $F(y,y')=0.$ Premennú

x považujeme za funkciu premennej y, takže platí $y'=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$ čím je rovnica

prevedená na predchádzajúci tvar.
Ak je možné rovnicu previesť na tvar: $y=\alpha(y')$ teda $y=\alpha(p).$ Ďalej platí

$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ odkiaľ $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{p}=\frac{\alpha'(p)}{p}\,\mathrm{d}p \quad \Rightarrow \quad x=\int\frac{\alpha'(p)}{p}\,\mathrm{d}p.$ Parametrické

vyjadrenie riešenia je teda: $y=\alpha(p),\quad x=\int\frac{\alpha'(p)}{p}\,\mathrm{d}p.$

Rovnice tvaru $y=x\cdot\alpha(y')+\beta(y').$ položíme y' = p a dostávame rovnicu

$y=x\cdot\alpha(p)+\beta(p).$ Derivovaním podľa x dostávame:

$p=\alpha(p)+x\cdot\alpha'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\beta'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$ odkiaľ $x'+\frac{\alpha'(p)}{\alpha(p)-p}x=-\frac{\beta'(p)}{\alpha(p)-p},$ čo je

lineárna diferenciálna rovnica.

B7 – Lineárna DR n-tého rádu a_0(x)y^(n)+a_1(x)y^(n-1)+...+a_n(x)y=f(x) (základné vlastnosti homogénnej DR a_0(x)y^(n)+a_1(x)y^(n-1)+...+a_n(x)y=0, operátor L(y)=a_0(x)y^(n)+a_1(x)y^(n-1)+...+a_n(x)y a jeho vlastnosti, všeobecné riešenie homogénnej DR -- základné vlastnosti, báza riešenia, ..., veta o znížení rádu homogénnej DR, všeobecné a partikulárne riešenie nehomogénnej DR, princíp superpozície riešenia, ...)

Linearna diferenciálna rovnica n-tého rádu s konštantnými koeficientami je rovnica

v tvare $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$ kde

$a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, n$ a predpokladáme a_n != 0.

Ak f(x) ≡ 0 nazývame ju homogénna a ak f(x) != 0 tak hovoríme o rovnici nehomogénnej. Množinu všetkých riešení HLDR NLDR nazývame všeobecným riešením.
Bázu tvoria funkcie u1..un : (a,b)->R taký že ui je riešením úlohy HLDR s počiatočnými podmienkami $y_i^{(k)}$(x0)=0

pre $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $k \neq i-1$, $y_i^{(i-1)}(x_0) = 1$.

Každé riešenie je súčtom všeobecného a partikulárneho riešenia. Všeobecným riešením rovnice rozumieme riešenia pridruženej homogénnej rovnice. Partikulárnym riešením rovnice rozumieme ľubovoľné riešenie pôvodnej nehomogénnej rovnice.

Ak y1(x) je riešenie HDR na (a,b) také že $\forall x \in (a,b): y_1(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ subst. $y(x) = y_1(x) \int z(x)\,dx$ dostaneme lineárnu homogénnu DR radu n-1

$\boxed{\text{Postup}}$

$$y(x) = y_1(x)\int z(x)\,dx$$
$$y'(x) = y_1'(x)\int z(x)\,dx + y_1(x)z(x)$$
$$y''(x) = y_1''(x)\int z(x)\,dx + 2y_1'(x)z(x) + y_1(x)\cdot z'(x)$$
$$\ldots$$
$$y^{(n)}(x) = y_1^{(n)}(x)\int z(x)\,dx + \binom{n}{1} y_1^{(n-1)}(x)\cdot z(x) + \ldots + y_1(x)\cdot z^{(n-1)}(x)$$

Posadíme do DR (*H1)

$\rightarrow$ 0

$\rightarrow$ DR rádu n−1

Princíp superpozície riešenia

Ak má nehomogenna DR L(y)=f(x) partikulárne riešenie y_f a nehomogénna DR L(y)= g(x) partikulárne riešenie y_g potom platí L(y)=f(x) + g(x) má partikulárne riešenie y_f + y_g.

B8. Lineárna DR n-tého rádu y^(n)+a_1y^(n-1)+...+a_ny=f(x) s konštantnými koeficientami, (homogénna DR y^(n)+a_1y^(n-1)+...+a_ny=0, charakteristický polynóm, všeobecné riešenie tejto DR v závislosti od koreňov charakteristického polynómu, ...)

Charakteristickou rovnicou rovnice :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

nazývame rovnicu:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Ak tato rovnica má len jedoduché reálne korene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n.$ Potom fundamentálny systém riešení tvoria funkcie $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}.$ Všeobecné riešenie má teda tvar $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$

Ak charakteristická rovnica homogénnej rovnice má m-násobný reálny koreň λ, tak funkcie $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1} e^{\lambda x},$ sú lineárne nezávislými riešeniami homogénnej rovnice. Sú teda súčasťou fundamentálneho systému riešení.

Ak charakteristická rovnica má jednoduchý komplexný koreň $\lambda = \alpha + \beta \mathrm{i}$, tak má aj komplexne združený koreň $\overline{\lambda} = \alpha - \beta \mathrm{i}.$ Týmto koreňom zodpovedajú riešenia v tvare $e^{(\alpha+\beta \mathrm{i})x}, e^{(\alpha-\beta \mathrm{i})x},$ odkiaľ s pomocou Eulerových vzťahov dostávame riešenia $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x.$

Ak charakteristická rovnica ma m-násobný komplexný koreň $\lambda = \alpha + \beta \mathrm{i}$, tak má aj komplexne združený koreň $\overline{\lambda} = \alpha - \beta \mathrm{i}.$ týmto koreňom zodpovedajú riešenia v tvare

$$e^{(\alpha+\beta \mathrm{i})x}, x e^{(\alpha+\beta \mathrm{i})x}, \ldots, x^{m-1} e^{(\alpha+\beta \mathrm{i})x},$$
$$e^{(\alpha-\beta \mathrm{i})x}, x e^{(\alpha-\beta \mathrm{i})x}, \ldots, x^{m-1} e^{(\alpha-\beta \mathrm{i})x},$$

Odkial s pomocou eulerových vztahov dostávame riešenia

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$
$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

B9. Lineárna DR n-tého rádu y^(n)+a_1y^(n-1)+...+a_ny=f(x) s konštantnými koeficientami, (nehomogénna DR y^(n)+a_1y^(n-1)+...+a_ny=f(x) so špeciálnou pravou stranou f(x)=Q(x).Exp((a+ib)x), hľadanie partikulárneho riešenia, ...)

Ak pravá strana rovnice má niektorý z tvarov:

$$P_m(x),$$
$$P_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$
$$P_m(x) \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x,$$
$$P_m(x) \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

Kde $P_m(x)$ je polynóm stupňa m, tak partikulárne riešenie môžeme určiť metódou tzv. neurčitých koeficientov. Riešenie hľadáme v rovnakom tvare ako je pravá strana rovnice, tak že dourčíme neznáme (neurčité) koeficienty.

Pravá strana $P_m(x),$

Ak nieje nula koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare $y = Q_m(x)$ kde polynom $Q_m(x)$ je polynómom rovnakého stupňa ako $P_m(x)$. Ak nula je k-násobným koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare $y = x^k \cdot Q_m(x)$ kde $Q_m(x)$ je opäť polynómom rovnakého stupňa ako $P_m(x)$.

$$\boxed{L(y) = Q_m(x) \cdot e^{(\alpha + i\beta)x} = Q_m(x)\, e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x + i \sin \beta x)}$$

riešime tak isto ako:

Pravá strana $P_m(x) \cdot e^{\alpha x},$

Ak nieje alfa koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare $y = Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ kde polynóm $Q_m(x)$ je polynómom rovnakého stupňa ako $P_m(x)$. Ak alfa je k-násobným koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie predpokladáme v tvare $y = x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ kde $Q_m(x)$ je opäť polynómom rovnakého stupňa ako $P_m(x)$.

B10. Eulerova DR x^ny^(n)+a_1x^{n-1}y^(n-1)+...+a_ny=f(x) s konštantnými koeficientami (jej transformácia na lineárnu DR n-tého rádu s konštantnými koeficientami, všeobecné riešenie Eulerovej DR, ...)

Niektoré lineárne DR sa dajú vhodnou transformáciou premenit na DR s konštantými koeficientami. Príkladom je Eulerova DR.

$$\boxed{L(y) = x^n \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot x \cdot y' + a_n \cdot y = \begin{cases} f(x) & \text{(ENR)} \\ 0 & \text{(EHR)} \end{cases}}$$

Použijeme substitúciu $\boxed{t = \ln x,\ x = e^t,\ t \in R \text{ pre } x > 0}$

Resp. $\boxed{t = \ln(-x),\ x = -e^{-t},\ t \in R \text{ pre } x < 0}$

Predpokladajme že x >0(pre x<0 je postup analogický):

$\boxed{x = e^t}$ $\boxed{t = \ln x}$ označme $\boxed{y(x) = y(e^t) =: z(t) = z(\ln x)}$

$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$ $\boxed{z' = \frac{dz}{dt}}$ derivujeme ako zloženú funkciu

$$\Rightarrow y'(x) = [z(\overbrace{\ln x}^{t})]' = \frac{dz(t)}{dt} \cdot (\overbrace{\ln x}^{t'})' = \frac{z'(t)}{x} \Rightarrow x \cdot y'(x) = z'(t) \quad (94)$$

$$\Rightarrow y''(x) = \left[\frac{z'(t)}{x}\right]' = \frac{z''(t) \cdot (\ln x)'}{x} + z'(t) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{z''(t) - z'(t)}{x^2} \Rightarrow x^2 \cdot y''(x) = z''(t) - z'(t)$$

$$\Rightarrow y'''(x) = \frac{z'''(t) \cdot \frac{1}{x} - z''(t) \cdot \frac{1}{x}}{x^2} - 2\frac{z''(t) - z'(t)}{x^3} = \frac{z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t)}{x^3}$$

$$\Rightarrow x^3 \cdot y'''(x) = z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t)$$

$$\dots \Rightarrow x^n \cdot y^{(n)}(x) = z^{(n)}(t) + d_{n-1} \cdot z^{(n-1)}(t) + \dots + d_1 \cdot z'(t),\ d_1, \dots d_{n-1} \in R \quad (*)$$

Dosadíme do DR a dostaneme lineárnu DR n-téo rádu s konštantými koeficientami pre premennú z(t). Bázické funkcie všeobecného riešenia nehomogénnej DR majú tvar:

$$\boxed{y(x) = e^{\delta t} = (e^t)^\delta = x^\delta,\ x > 0} \Rightarrow$$

$$y'(x) = \delta \cdot x^{\delta - 1} \Rightarrow y''(x) = \delta(\delta - 1)\, x^{\delta - 2} \Rightarrow \dots$$

$$\boxed{y^{(k)}(x) = \delta(\delta - 1) \dots (\delta - k + 1) \cdot x^{\delta - k},\ x > 0,\ k = 1, 2, \dots n}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^k \cdot y^{(k)}(x) = \delta(\delta - 1) \dots (\delta - k + 1) \cdot x^\delta,\ k = 1, 2, \dots n} \quad (**)$$

B11. Lineárny sytém DR 1.rádu y'=A(x)y+f(x) (základné vlastnosti, všeobecné riešenie homogénneho systému y'=A(x)y, základné vlastnosti, báza riešenia, ..., všeobecné a partikulárne riešenie nehomogénneho systému y'=A(x)y+f(x), princíp superpozície riešenia, ...)

Budeme sa zaoberat systémom:

$$y'_1 = a_{11}(x) \cdot y_1 + a_{12}(x) y_2 + \dots + a_{1n}(x) y_n + f_1(x)$$
$$y'_2 = a_{21}(x) y_1 + a_{22}(x) y_2 + \dots + a_{2n}(x) y_n + f_2(x)$$
$$\dots$$
$$y'_n = a_{n1}(x) y_1 + a_{n2}(x) y_2 + \dots + a_{nn}(x) y_n + f_n(x)$$

Kde a11(x), a12(x),...,ann(x), f1(x),....fn(x):(a,b) ->R sú spojité.

Ak označíme

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}; \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ - & - & - & - \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}; \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Preto systém môžeme písať vo vektorovom tvare:

$$\boxed{y' = A(x) \cdot y + f(x)}$$

- nehomogenny lineárny system

$$\boxed{y' = A(x) y}$$

- homogénny lineárny systém.

Pre systémy nehomogénnych prípadne homogénnych DR platia analogické tvrdenia ako pre lineárne DR n-tého rádu.
Množina všetkých riešení homogénneho resp nehomogenneho SDR sa nazýva všeobecné riešenie HSDR resp NSDR. HSDR resp. NSDR s počiatočnou podmienkou y(x0)=x0, x patri (a,b) má na (a,b) práve jedno riešenie.
Všeobecne riešenie Y0 homogénneho systemu tvorí n-rozmerný lineárny podpriestor priestoru všetkých spojitých vektorových funkcií u(x):(a,b)->R^n takých, že aj ich všetky parciálne derivácie sú spojité funcie na (a,b).
Bázu Y0 tvoria funkcie u1,u2,...un:(a,b)-> R^n také, že ui(i=1,2,,..n) je riešením ulohy HSDR s počiatočnou podmienkou

$$y(x_0) = e_i = (0, \dots 0, 1, 0, \dots 0)^T \to i\text{-te miesto}$$

y’=A(x)y

$\boxed{y'=Ay}$ (*SH1) Homogénny systém lineárnych DR s konštantnými koeficientami (103)

$$A=(a_{ij})_{n\times n},\quad a_{ij}\in R,\ i,j=1,2,\dots n,\ x\in R$$

Ak $\boxed{n=1}$: $\boxed{y'=ay}$ t.j. lineárna DR → viď príklad 61

⇒ všeobecné riešenie $\boxed{y=ce^{ax},\ x\in R}$

Ak $\boxed{n>1}$: riešenie hľadáme v tvare $\boxed{y=e^{\delta x}\cdot b}$,

pričom $\delta\in C,\ b=(b_1,b_2,\dots b_n)^T\in C^n$ (opäť pripúšťame komplexné čísla)

$$\Rightarrow y'=\delta e^{\delta x}\cdot b=\delta e^{\delta x}\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\delta e^{\delta x}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}}_{\text{jednotková matica } E}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=e^{\delta x}\cdot\delta Eb$$

Posadíme do (*SH1):

$$\boxed{e^{\delta x}\cdot\delta Eb=A\cdot e^{\delta x}\cdot b=e^{\delta x}\cdot Ab}$$

$$\Rightarrow \Theta_n=e^{\delta x}Ab-e^{\delta x}\delta Eb=e^{\delta x}(A-\delta E)b$$

$$\Rightarrow \boxed{(A-\delta E)b=\Theta_n}$$ t.j.: δ.. vlastné číslo, b.. vlastný vektor } matice A

Najskôr pre $\forall\delta\in C$ je tiež riešením $b=\Theta_n \Rightarrow \boxed{y=\Theta_n,\ x\in R}$

y'=A(x)y+f(x)

Partikulárne riešenie NSDR hľadáme metódou variácie konštánt

$$\boxed{y_p(x)=C_1(x)\cdot u_1(x)+\dots+C_n(x)\cdot u_n(x)=(u_1(x),\dots u_n(x))\cdot\begin{pmatrix}C_1(x)\\ \vdots\\ C_n(x)\end{pmatrix}=V(x)\cdot C(x)}$$

B12. Lineárny sytém DR 1.rádu y'=Ay+f(x) s konštantnými koeficientami (homogénny systém y'=Ay, charakteristický polynóm, všeobecné riešenie sytému v závislosti od koreňov charakteristického polynómu, reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov, ...)

y'=A(x)y

$\boxed{y' = Ay}$ (*SH1) Homogénny systém lineárnych DR s konštantnými koeficientami

$A = (a_{ij})_{m \times m}$, $a_{ij} \in R$, $i,j = 1,2,\dots m$, $x \in R$

Ak $\boxed{m=1}$: $\boxed{y' = ay}$ t.j. lineárna DR ↗ viď príklad 61

⇒ všeobecné riešenie $\boxed{y = ce^{ax}, x \in R}$

Ak $\boxed{m>1}$: riešenie hľadáme v tvare $\boxed{y = e^{\lambda x}.b}$,

pričom $\lambda \in C$, $b = (b_1, b_2, \dots b_m)^T \in C^m$ (opäť pripúšťame komplexné čísla)

$$\Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x}.b = \lambda e^{\lambda x}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda x} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{jednotková matica } E} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \lambda E b$$

Dosadíme do (*SH1):

$$\boxed{e^{\lambda x}.\lambda E b = A.e^{\lambda x}.b = e^{\lambda x}.Ab}$$

$$\Rightarrow \Theta_m = e^{\lambda x} A b - e^{\lambda x} \lambda E b = e^{\lambda x}(A - \lambda E) b$$

$\Rightarrow \boxed{(A - \lambda E) b = \Theta_m}$ t.j.: λ.. vlastné číslo, b.. vlastný vektor } matice A

Najskôr pre $\forall \lambda \in C$ je triviálnym riešením $b = \Theta_m \Rightarrow \boxed{y = \Theta_m, x \in R}$

Charakteristický polynóm

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -\lambda^2 \\ -1 & 1-\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -\lambda^2 \\ 1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda + \lambda^2(1-\lambda) = 2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+1) = 0$$

B13. Lineárny homogénny sytém DR 1.rádu y'=Ay s konštantnými koeficientami s počiatočnou podmienkou y(x_0)=y_0, (fundamentálna (bázická) matica, jej vzťah s riešením danej Cauchyho úlohy, štandartná fundamentálna

(bázická) matica, jej základné vlastnosti, jej vzťah s riešením danej Cauchyho úlohy, jej výpočet, Putzerova metóda, ...)

$\boxed{y' = Ay}$ (*SH1) $\boxed{y(x_0) = y_0}$ $x_0 \in R,\ y_0 \in R^n$

Jedna možnosť je určiť všeobecné riešenie HSDR a následne dopočítať koeficienty Ci tak, aby vyhovovali počiatočnej podmienke y(x0)=y0

Druhá možnosť je použiť tzv fundamentálnu (bázickú) maticu systému HSDR, t. j. maticu V(x) typu n×n ktorej stĺpce tvoria jednotlivé bázické funkcie všeobecného riešenia HSDR, je ich n a sú lineárne nezávisle => pre $\forall x \in R$ je matica V(x) regulárna, t. j. $\boxed{\forall x \in R : \det V(x) \neq 0}$.

Všeobecné riešenie HSDR má potom tvar $\boxed{y(x) = V(x) . c}$, $x \in R$, kde $\boxed{c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in R^n}$ je ľubovolný stĺpcový vektor. Existuje jediné riešenie HSDR y(x0)=y0 a môžeme ho vyjadriť v tvare: $\boxed{y(x) = V(x) . \bar{c}}$ x patri R, pričom hodnotu $\bar{c}$ určíme z počiatočnej podmienky: $\boxed{y(x_0) = V(x_0) . \bar{c} = y_0}$ => $\bar{c} = V^{-1}(x_0) . y_0$ =>

riešenie $\boxed{y(x) = V(x) . V^{-1}(x_0) . y_0}$ $x \in R$

Nevýhoda je hľadanie inverznej matice $V^{-1}(x_0)$.

Riešenie HSDR s počiatočnou podmienkou y(x0)=y0 :

$$\boxed{y(x) = V(x) . V^{-1}(x_0) . y_0},\ x \in R.$$

B14. Lineárny nehomogénny sytém DR 1.rádu y'=Ay+f(x) s konštantnými koeficientami s počiatočnou podmienkou y(x_0)=y_0, (Lagrangeova metóda variácie konštánt na hľadanie partikulárneho riešenia daného sytému,

Wronskián, systémy so špeciálnou pravou stranou f(x)=Exp((a+ib)x).(q_1(x),..., q_n(x))^T, hľadanie partikulárneho riešenia, ...)

(*SN) $\boxed{y' = A(x)\cdot y + f(x)}$ $\boxed{y(x_0) = y_0}$ $x_0 \in (a,b),\ y_0 \in R^n$

$a_{11}(x), \dots a_{nn}(x), f_1(x), \dots f_n(x) : (a,b) \to R$ sú spojité

$\boxed{\text{veta 33}} \Rightarrow \exists$ práve jedno riešenie (*SN), $y(x_0) = y_0$.

Nech $y_n(x)=c_1u_1(x)+\dots+c_nu_n(x)$, x patri (a,b), $c_1, \dots, c_n$ patrí R je všeobecné riešenie homogénneho systému DR $\boxed{y' = A(x) y}$. Nech $y_p(x) : (a,b) \to R^n$ je ľubovolné (partikulárne) riešenie NSDR $\boxed{y' = A(x) y + f(x)}$ potom

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x) + y_p(x),\ x \in (a,b),\ c_1, \dots c_n \in R$$

Je všeobecné riešenie NSDR.
Partikularne riešenie $y_p(x)$ hľadáme metódou variácie konštánt(Lagrangeova metóda variácie):

$$\boxed{y_p(x) = c_1(x)\cdot u_1(x) + \dots + c_n(x)\cdot u_n(x) = (u_1(x), \dots u_n(x)) \cdot \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix} = V(x)\cdot C(x)}$$

Kde $C(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \dots \\ c_n(x) \end{pmatrix} : (a,b) \to R^n$ (neprelustitelne slovo- nezname) asi nepárne diferencovateľné funkcie

$V(x) = (u_1(x), \dots u_n(x))$ fundamentálne matice HSDR -> regulárne pre $\forall x \in (a,b)$

t. j. $\forall i = 1, 2, \dots n : \boxed{u_i' = A(x)\cdot u_i}$ $\Rightarrow \boxed{c_i(x)\cdot u_i'(x) = c_i(x)\cdot A(x)\cdot u_i(x)}$

Dosadíme do (*SN): $\boxed{y_p'(x) = A(x)\cdot y_p(x) + f(x)}$ $\Rightarrow$ $y_p(x) = V(x)\cdot c(x)$

$$V'(x)\cdot c(x) + V(x)\cdot c'(x) = A(x)\cdot V(x)\cdot c(x) + f(x) \Rightarrow \boxed{V(x)\cdot c'(x) = f(x)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A(x)\cdot(u_1(x), \dots u_n(x))\cdot\begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x)\end{pmatrix} &= A(x)\cdot[c_1(x)u_1(x) + \dots + c_n(x)u_n(x)] = \\ &= c_1(x)A(x)u_1(x) + \dots + c_n(x)A(x)\cdot u_n(x)\end{aligned}}$$

$$\boxed{(u_1'(x), \dots u_n'(x))\cdot\begin{pmatrix} c_1(x) \\ \dots \\ c_n(x)\end{pmatrix} = c_1(x)u_1'(x) + \dots + c_n(x)\cdot u_n'(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{c'(x) = V^{-1}(x) f(x)} \Rightarrow c(x) = \int_{x_0}^{x} V^{-1}(t) f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = V(x)\cdot\int_{x_0}^{x} V^{-1}(t) f(t)\,dt} \quad x \in (a,b),\ x_0 \in (a,b)$$

Sústavu $\boxed{V(x)\cdot c'(x) = f(x)}$ môžeme riešiť (bez použitia) pomocou Cranerovho pravidla:

$$\boxed{W(x) = \det V(x) \neq 0} \quad x \in (a,b)$$

Obecne
Tzv. Wronského determinant(Wronskián)

$$\boxed{W_i(x) = \det V_i(x) = \det(u_1(x), \dots, f(x), \dots u_n(x))}$$

t. j. i-tý stĺpec $u_i(x)$ je nahradený stĺpcom f(x)

$$\Rightarrow \text{pre } i = 1, 2, \dots n: \boxed{c_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}} \Rightarrow \boxed{c_i(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{W_i(t)}{W(t)}\,dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = c_1(x)\cdot u_1(x) + \dots + c_n(x)\cdot u_n(x)}$$