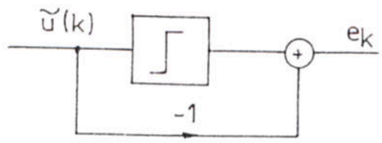
polovica rozdielu susedných úrovní vysielaného signálu. Potom na výstupe prahového obvodu dostaneme hodnotu zhodnú s vyslaným signálom.



Obr. 19
Odhad chyby prahovým obvodom

6.6 MODULÁCIE A OPTIMÁLNY PRÍJEM DÁTOVÉHO SIGNÁLU

Moduláciou signálu voláme zmenu bázy signálu $u(t)$ v tom istom signálovom priestore φ_u alebo jeho transformáciu do iného signálového priestoru φ_y nie menšej dimenzie. Ďalej budeme študovať moduláciu dátového signálu v rámci jedného charakteristického intervalu

$$u(t) = k\ , \quad k \in \{0,\ 1,\ \dots,\ M-1\}\ , \quad t \in \langle 0,a \rangle$$

Je to prvok jednorozmerného signálového priestoru n s bázickým signálom

$$b_o(t) = 1\ , \qquad t \in \langle 0,a \rangle$$

Transformáciu dátového signálu do jednorozmerného priestoru

$$\varphi_y = \left\{ y_k(t) = k \cos \omega_o t\ ;\ \ k = 0,1,\ \dots,\ M-1;\ \ t \in \langle 0,a \rangle \right\}$$

kde ω_o je násobkom kruhovej frekvencie $2\pi/a$ voláme amplitúdovou moduláciou. Bázickým signálom v tomto priestore je

$$b_o(t) = \cos \omega_o t$$

Transformáciu dátového signálu $u(t) = k$, do M rozmerného signálového priestoru

$$\varphi_y = \left\{ y_k(t) = \cos \omega_k t\ ;\ \ k = 0,1,\ \dots,\ M-1;\ \ t \in \langle 0,a \rangle \right\}$$

kde ω_i je násobkom $2\pi/a$ voláme frekvenčnou moduláciou. V tomto M rozmernom priestore sa vyskytujú len bázické signály. (Čitateľovi by určite nerobilo ťažkosti vytvoriť priestor, ktorý pri tejto báze obsahoval viac signálov.)
Transformácia dátového signálu do signálového priestoru

$$\varphi_y = \left\{ y_k(t) = \cos(\omega_o t - \frac{2\pi}{M}\ k),\ \ k = 0,1,\ \dots,\ M-1,\ \ t \in \langle 0,a \rangle \right\}$$

a ω_o je násobkom $2\pi/a$ sa nazýva fázová modulácia. Tento priestor je dvojrozmerný a jeho bázickými signálmi sú

$$b_0(t) = \cos \omega_0 t$$

$$b_1(t) = \sin \omega_0 t$$

pretože

$$\cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{M} k\right) = \cos \frac{2\pi}{M} k \cos \omega_0 t + \sin \frac{2\pi}{M} k \sin \omega_0 t$$

t.j.

$$y_k(t) = A_0 \cos \omega_0 t + A_1 \sin \omega_0 t$$

kde

$$A_0 \in \left\{ \cos \frac{2\pi}{M} k \ , \quad k = 0, 1, \ldots, M-1 \right\}$$

$$A_1 \in \left\{ \sin \frac{2\pi}{M} k \ , \quad k = 0, 1, \ldots, M-1 \right\}$$

Presvedčte sa, že u všetkých spomenutých signálových priestorov φ_y sú uvedené bázy orgotonálne, t.j.

$$(b_i(t),\ b_j(t)) = \begin{cases} 0 , & i \neq j \\ \frac{a}{2}, & i = j \end{cases} \qquad i,j \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$$

kde r je rozmernosť signálového priestoru.

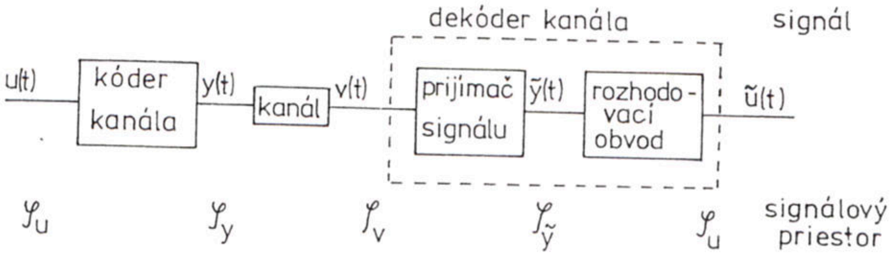
Pri prechode modulovaného signálu kanálom sa vplyvom dynamických vlastností kanála a hlukom môže tvar signálu zmeniť. Ak predpokladáme zachovanie Dirichletových podmienok pre signál $v(t)$, $t \in \langle 0,a \rangle$ na výstupe kanála, potom tento môžeme vyjadriť v báze komplexných harmonických signálov nekonečne (ak spočetne) rozmerného signálového priestoru φ_v

$$\varphi_v = \left\{ v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{-j \frac{2\pi}{a} n,t} \quad , \quad t \in \langle 0,a \rangle \right\} .$$

Úlohou spätnej transformácie, t.j. rozhodnutia o vyslanom dátovom signále na základe prijatého signálu rieši dekóder kanála v dvoch krokoch. V prvom rozhoduje o vyslanom modulovanom signále na vstupe kanála na základe prijatého signálu na výstupe kanála a v druhom kroku rozhoduje o vyslanom dátovom signále na základe odhadnutého vyslaného modulovaného signálu.

Úlohou prijímača signálu je nájdenie signálu $\tilde{y}(t)$ v M rozmernom podpriestore $\varphi_{\tilde{y}}$ priestoru φ_v

$$\varphi_{\tilde{y}} = \left\{ \tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{A}_i\, b_i(t) \ , \quad A_i \in R \ , \quad i = 0,1, \ldots, M-1, \quad t \in \langle 0,a \rangle \right\}$$



Obr. 20
Priebeh signálu od kódera k dekóderu kanála

kde $b_i(t)$ sú bázické signály podľa druhu modulácie. Pretože báza $\{b_i(t),\ i = 0,1,\ \dots,\ M-1\}$ je ortogonálna, vieme že riešenie tejto úlohy v zmysle minimalizácie vzdialenosti

$$d(v(t),\ \tilde{y}(t)) = \sqrt{(v(t) - \tilde{y}(t),\ v(t) - \tilde{y}(t))} = \int_0^a (v(t) - \tilde{y}(t))^2\, dt$$

je

$$\tilde{A}_i = \frac{(v(t),\ b_i(t))}{(b_i(t),\ b_i(t))}, \qquad i = 0,1,\ \dots,\ r-1$$

$$\tilde{A}_i = \frac{2}{a} \int_0^a v(t)\, b_i(t)\, dt\ , \qquad i = 0,1,\ \dots,\ r-1$$

Pre odhad v jednorozmernom priestore pri amplitúdovej modulácii bude

$$\tilde{A}_o = \frac{2}{a} \int_0^a v(t) \cos \omega_o t\, dt$$

pre odhad v dvojrozmernom priestore pri fázovej modulácii

$$\tilde{A}_o = \frac{2}{a} \int_0^a v(t) \cos \omega_o t\, dt$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{2}{a} \int_0^a v(t) \sin \omega_o t\, dt$$

a pre odhad v M-rozmernom priestore pri frekvenčnej modulácii

$$\tilde{A}_i = \frac{2}{a} \int_0^a v(t) \cos \omega_i t\, dt\ , \qquad i = 0,1,\ \dots,\ M-1$$

Koeficienty $\tilde{A} = (\tilde{A}_0, \ldots, \tilde{A}_{r-1})$ vytvárajú r rozmerný reálny vektorový priestor $\varphi_{\tilde{A}}$, ktorý je nadpriestorom priestoru φ_A

$$\varphi_A = \left\{ (A_0, \ldots, A_{r-1}),\ A_i \in \left\{ 0,1, \ldots, S-1 \right\},\ i = 0, \ldots, r-1 \right\}$$

kde S je počet hodnôt koeficientov A_i. Pre amplitúdovú moduláciu je tento priestor jednorozmerný a tvoria ho veľkosti dátového signálu

$$\varphi_A = \left\{ A,\ A \in \left\{ 0,1, \ldots, M-1 \right\} \right\}$$

Pre fázovú moduláciu je priestor dvojrozmerný

$$\varphi_A = \left\{ (A_0, A_1),\ A_0 \in \left\{ \cos \frac{2\pi}{M} k \right\},\ A_1 \in \left\{ \sin \frac{2\pi}{M} k \right\},\ k = 0,1, \ldots, M-1 \right\}$$

a pre frekvenčnú moduláciu je φ_A M-rozmerný

$$\varphi_A = \left\{ (A_0, \ldots, A_{M-1}),\ A_i \in \left\{ 0,1 \right\},\ i = 0,1, \ldots, M-1 \right\}$$

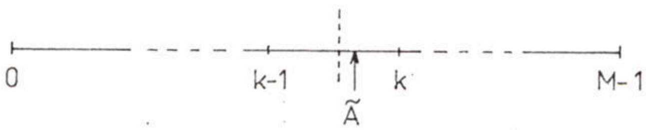
kde

$$A_i = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

k - hodnota dátového signálu.

Úlohou rozhodovacieho obvodu je nájsť vektor $A \in \varphi_A$, ktorý je najbližšie k vektoru $\tilde{A} \in \varphi_{\tilde{A}}$.
U amplitúdovej modulácie

$$A = k \Leftrightarrow |\tilde{A} - k| \leq |\tilde{A} - i|,\quad i \in \left\{ 0,1, \ldots, M-1 \right\}$$



Obr. 21
Rozhodovanie u amplitúdovej modulácie

U fázovej modulácie

$$A_0 = \cos \frac{2\pi}{M} k,\quad A_1 = \sin \frac{2\pi}{M} k$$

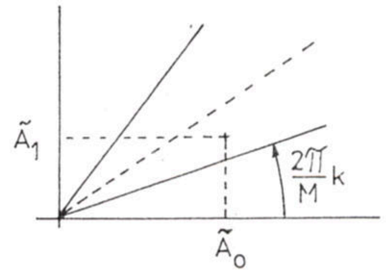
práve vtedy, keď

$$\left| \operatorname{arc\,tg} \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_0} - \frac{2\pi}{M} k \right| \leq \left| \operatorname{arctg} \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_0} - \frac{2\pi}{M} i \right|,\quad i \in \left\{ 0,1, \ldots, M-1 \right\}$$

resp.

$$\left(\tilde{A}_o - \cos\frac{2\pi}{M}k\right)^2 + \left(\tilde{A}_1 - \sin\frac{2\pi}{M}k\right)^2 \leq \left(\tilde{A}_o - \cos\frac{2\pi}{M}i\right)^2 +$$

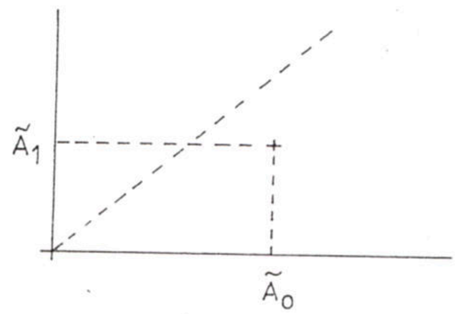
$$+ \left(\tilde{A}_1 - \cos\frac{2\pi}{M}i\right)^2$$



Obr. 22
Rozhodovanie u fázovej modulácie

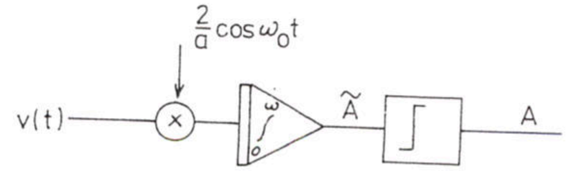
U frekvenčnej modulácie

$$A_i = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad <=> \tilde{A}_k = \max\left\{\tilde{A}_j, \quad j = 0, 1, \ldots, M-1\right\}$$

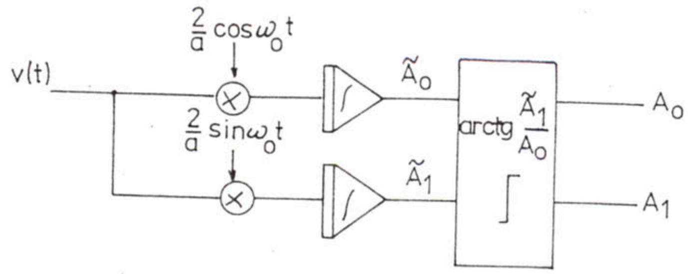


Obr. 23
Rozhodovanie u frekvenčnej modulácie (M=2)

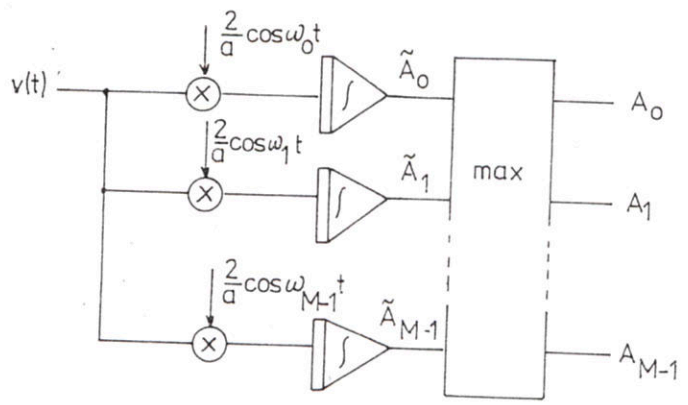
Z uvedeného vyplýva štruktúra optimálnych prijímačov amplitúdovo, frekvenčne a fázovo modulovaných dátových signálov ako sú uvedené na nasledujúcich obrázkoch.



Obr. 24
Optimálny prijímač amplitúdovo modulovaného dátového signálu



Obr. 25
Optimálny prijímač fázovo modulovaného dátového signálu



Obr. 26
Optimálny prijímač frekvenčne modulovaného dátového signálu

Uvedené prijímače voláme koherentné. Vyžadujú zhodu bázických signálov v kódere a dekódere kanála, čo v praxi robí ťažkosti hlavne pri dodržiavaní zhody fáze.

Z hľadiska odolnosti modulácie voči nesprávnemu príjmu je rozhodujúca vzdialenosť medzi susednými vysielanými signálmi. Pre porovnanie modulácií binárneho signálu predpokladajme, že obidve hodnoty dátového signálu sú rovnako pravdepodobné (t.j. nastávajú s pravdepodobnosťou $p(o)=p(1)=0,5$) a použitý signál má na charakteristickom intervale jednotkovú strednú energiu.

Pre amplitúdovú moduláciu

$$y_k(t) = A_k \cos \omega_o t \;, \quad A_k \in \{0,1\} \;, \quad k = 0,\ 1$$

bude stredná energia jednotková, ak

$$\int_0^a \mathcal{E}\{A_k^2\} \cos^2 \omega_o t \, dt = 1$$

Pre rovnomerné rozdelenie náhodnej veličiny A_k platí $\mathcal{E}\{A_k^2\} = A^2/2$, takže z predchádzajúcej podmienky dostávame

$$A = \frac{2}{\sqrt{a}}$$

Vzdialenosť signálov

$$y_o(t) = 0$$

$$y_1(t) = \frac{2}{\sqrt{a}} \cos \omega_o t$$

bude

$$d = (y_o(t),\ y_1(t)) = \sqrt{(y_o(t) - y_1(t)\ ,\ y_o(t) - y_1(t))} =$$

$$= \sqrt{\int_0^a \frac{4}{a} \cos^2 \omega_o t\ dt} = \sqrt{2}$$

Pri fázovej modulácii

$$y_o(t) = A \cos \omega_o t$$

$$t \in \langle 0,a \rangle$$

$$y_1(t) = -A \cos \omega_o t$$

Energia je v obidvoch signáloch rovnaká, takže amplitúdu môžeme vypočítať z podmienky

$$\int_0^a A^2 \cos \omega_o t\ dt = 1$$

odkiaľ

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

Vzdialenosť signálov $y_o(t)$, $y_1(t)$ je

$$d(y_o(t),\ y_1(t) = \sqrt{(y_o(t) - y_1(t),\ y_o(t) - y_1(t))} =$$

$$= \sqrt{\int_0^a \frac{8}{a} \cos^2 \omega_o t\ dt} = 2$$

U frekvenčnej modulácie je rovnako ako u fázovej modulácie amplitúda signálu konštantná, takže pri dodržaní jednotkovej energie bude

$$y_o(t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \omega_o t$$

$$t \in \langle 0,a \rangle$$

$$y_1(t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \omega_1 t$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{(v(t), \tilde{b}_1(t))}{(\tilde{b}_1(t), \tilde{b}_1(t))} = \frac{2}{a} \int_0^a v(t) \sin(\omega_0 t - \varphi)\, dt$$

alebo po úprave

$$\tilde{A}_0 = \sin\varphi \frac{2}{a} \int_0^a v(t) \sin \omega_0 t\, dt + \cos\varphi \frac{2}{a} \int_0^a v(t) \cos \omega_0 t\, dt$$

$$\tilde{A}_1 = \cos\varphi \frac{2}{a} \int_0^a v(t) \sin \omega_0 t\, dt - \sin\varphi \frac{2}{a} \int_0^a v(t) \cos \omega_0 t\, dt$$

Pretože optimálny odhad je

$$\tilde{A} = \frac{2}{a} \int_0^a v(t) \sin \omega_0 t\, dt = \frac{2}{a} \int_0^a v(t) \cos \omega_0 t\, dt$$

môžeme písať

$$\tilde{A}_0 = \tilde{A} \sin \varphi + \tilde{A} \cos \varphi$$

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A} \cos \varphi - \tilde{A} \sin \varphi$$

odkiaľ

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{A}_0^{\,2} + \tilde{A}_1^{\,2}}$$

Vypočítajte vzdialenosť medzi susednými signálmi pri zachovaní jednotkovej strednej energie signálu na charakteristickom intervale.

Rovnaký princíp zdvojenia signálovej bázy môžeme použiť aj pri frekvenčnej modulácii, kde vysielame signály

$$y_k(t) = \cos \omega_k t + \sin \omega_k t\,, \quad t \in \langle 0, a \rangle$$

Pri fázovej modulácii môžeme za referenčnú bázu brať fázu harmonického signálu v predchádzajúcom charakteristickom intervale. Ak dátový signál vo vysielanom charakteristickom intervale má hodnotu k, potom sa vysiela harmonický signál s fázou posunutou o uhol $2\pi k/M$ oproti predchádzajúcemu intervalu. Tento spôsob sa volá diferenciálna fázová modulácia.