1 Fourierove rady

- *Trigonometrickým radom* s periódou L nazývame rad funkcií

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{L} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} x \right), \tag{1}$$

  kde L je kladné číslo, reálne čísla a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \dots$ nazývame *koeficienty trigonometrického radu*. Trigonometrický rad, v ktorom $b_n = 0$ pre všetky $n = 1, 2, \dots$ nazývame *kosínusový trigonometrický rad*, trigonometrický rad, v ktorom $a_n = 0$ pre všetky $n = 0, 1, 2, \dots$ nazývame *sínusový trigonometrický rad.*

- Nech f je funkcia definovaná na intervale $\langle a; a + L\rangle$, po čiastkach spojitá na intervale $\langle a; a + L\rangle$ (t.j. existuje najviac konečný počet bodov tohoto intervalu, kde funkcia je nespojitá). Potom trigonometrický rad (1) nazývame *Fourierov rad* funckie f pre interval $\langle a; a + L\rangle$, ak platí

$$a_n = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \cos \frac{2\pi n}{L} x \, \mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \sin \frac{2\pi n}{L} x \, \mathrm{d}x.$$

- Hovoríme, že funkciu f možno rozvinúť do trigonometrického radu, ak existuje taký rad (1), že pre každé x je jeho súčet $f(x)$.

- Nech f je funkcia definovaná na intervale $\langle a; a + L\rangle$. *Periodickým predĺžením* funkcie f pre interval $\langle a; a + L\rangle$ budeme nazývať funkciu $\bar{f}$, pre ktorú platí

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\lim\limits_{t \to a+} f(t) + \lim\limits_{t \to (a+L)-} f(t) \right), & \text{pre } x = a, \\ \frac{1}{2} \left(\lim\limits_{t \to x+} f(t) + \lim\limits_{t \to x-} f(t) \right), & \text{pre } x \in (a; a + L), \\ \bar{f}(x + L), & \text{pre všetky } x. \end{cases}$$

- Nech f je párna funkcia na intervale $\langle -\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\rangle$ potom pre koeficienty jej Fourierovho radu pre interval $\langle -\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\rangle$ platí

$$a_n = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi n}{L} x \, \mathrm{d}x, \quad b_n = 0.$$

  Nech f je nepárna funkcia na intervale $\langle -\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\rangle$ potom pre koeficienty jej Fourierovho radu pre interval $\langle -\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\rangle$ platí

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi n}{L} x \, \mathrm{d}x.$$

  Súčtom akéhokoľvek kosínusového, resp. sínusového trigonometrického radu je funkcia párna, resp. nepárna.

- Nech f je funkcia definovaná na intervale $\langle a; a + L\rangle$ a nech f aj jej derivácia sú po čiastkach spojité na intervale $\langle a; a + L\rangle$. Potom Fourierov rad funkcie f pre interval $\langle a; a + L\rangle$ konverguje pre všetky $x \in \mathbb{R}$ a jeho súčtom je $\bar{f}$.

  Nech f je periodická funkcia s periódou L (t.j. $f(x) = f(x+L)$, pre všetky x z definičného oboru funkcie f) a nech f aj jej derivácia sú po čiastkach spojité na intervale $\langle a; a+L\rangle$ a pre každý bod nespojitosti c funkcie f platí $f(c) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \to c+} f(t) + \lim_{t \to c-} f(t)\right)$. Potom funkciu f možno rozvinúť do trigonometrického radu a za tento rad je možné zobrať Fourierov rad funkcie f pre interval $\langle a; a + L\rangle$.

Pre periodickú funkciu f s periódou L integrály pre výpočet koeficientov a_n, b_n môžeme počítať cez ľubovoľný interval dĺžky L. Častým prípadom je $L = 2\pi$, v tomto špeciálnom prípade máme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

Príklad 1. *Rozviňme funkciu $f(x) = e^{-x}$ na intervale $\langle 0; 2\pi\rangle$ do trigonometrického radu.*

Riešenie. Najprv vypočítame koeficienty Fourierovho radu funkcie f pomocou vzorcov

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x} \cos nx \, \mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x} \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

Tieto integrály môžeme integrovať po častiach. Výpočtom a_n (pre všetky n, teda aj pre nulu) dostaneme

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x} \cos nx \, \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x} \cos nx\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\mathrm{e}^{-x} n(-\sin nx) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left(1 - \mathrm{e}^{-2\pi}\right) - n\left[-\mathrm{e}^{-x} \sin nx\right]_0^{2\pi} + n \int_0^{2\pi} -\mathrm{e}^{-x} n \cos nx \, \mathrm{d}x = \left(1 - \mathrm{e}^{-2\pi}\right) - n^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x} \cos nx \, \mathrm{d}x,$$

z čoho

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x} \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\pi}}{1 + n^2}.$$

Koeficient a_n sa rovná

$$a_n = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi(1 + n^2)}.$$

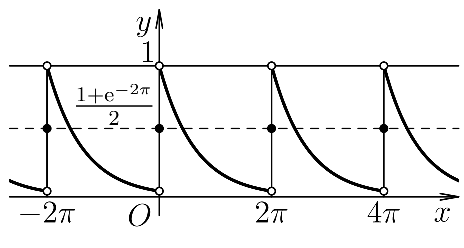
Podobným spôsobom vypočítame aj b_n, podrobný postup už nebudeme uvádzať:

$$b_n = \frac{n(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})}{\pi(1 + n^2)}.$$

Hľadaný rozvoj do trigonometrického radu zapíšeme pomocou Fourierovho radu

$$f(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1 + n^2)} \cos nx + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\pi(1 + n^2)} \sin nx\right].$$

Keďže funkcia aj jej derivácia sú na intervale $\langle 0; 2\pi\rangle$ spojité, mohli sme písať rovnosť vo vnútri tohoto intervalu a naviac vieme, že mimo intervalu rad na pravej strane rovnosti konverguje k periodickému predĺženiu funkcie f, ktoré je nakreslené na obrázku:



∎

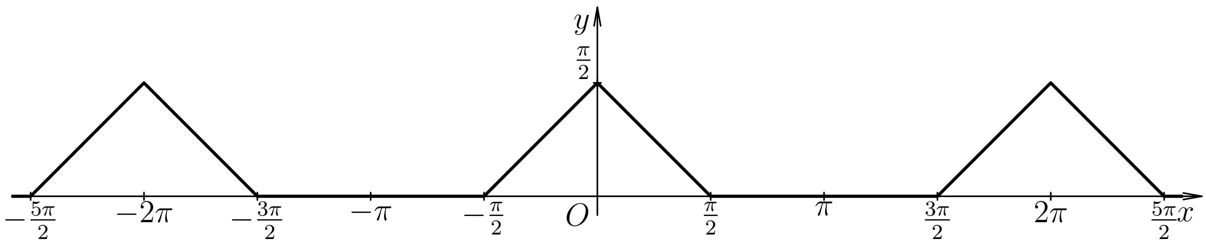
Príklad 2. *Nájdime rozvoj funkcie $f(x)$ do kosínusového trigonometrického radu a nakreslime graf súčtovej funkcie tohoto radu, kde*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle, \\ 0, & x \in (\frac{\pi}{2}; \pi \rangle \end{cases}$$

Riešenie. Keďže máme funkciu rozvinúť do kosínusového radu, súčtová funkcia $\bar{f}(x)$ tohoto radu bude párna, naviac, na intervale $\langle -\pi; 0 \rangle$ musí platiť

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & x \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0 \rangle, \\ 0, & x \in \langle -\pi; -\frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Graf funkcie $\bar{f}(x)$, ktorá je definovaná pre všetky $x \in \mathbb{R}$, teda bude vyzerať tak, ako na obrázku:



Uvedomme si pritom, že perióda súčtovej funkcie $\bar{f}$ je $L = 2\pi$.

Poďme sa teraz venovať rozvoju a vypočítajme koeficienty $a_n, n \geq 1$ Fourierovho radu funkcie $\bar{f}$. Výpočtom integrovaním po častiach dostaneme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos nx \, \mathrm{d}x = \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{n} \, \mathrm{d}x = -\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n^2}\left(1 - \cos\frac{n}{2}\pi\right).$$

Pre $n = 0$ máme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Koeficient a_n teda vypočítame zo vzťahu

$$a_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(1 - \cos\frac{n}{2}\pi\right), n \geq 1,$$

pričom výraz v zátvorke nadobúda hodnoty 0, 1 alebo 2 podľa nasledujúcej tabuľky:

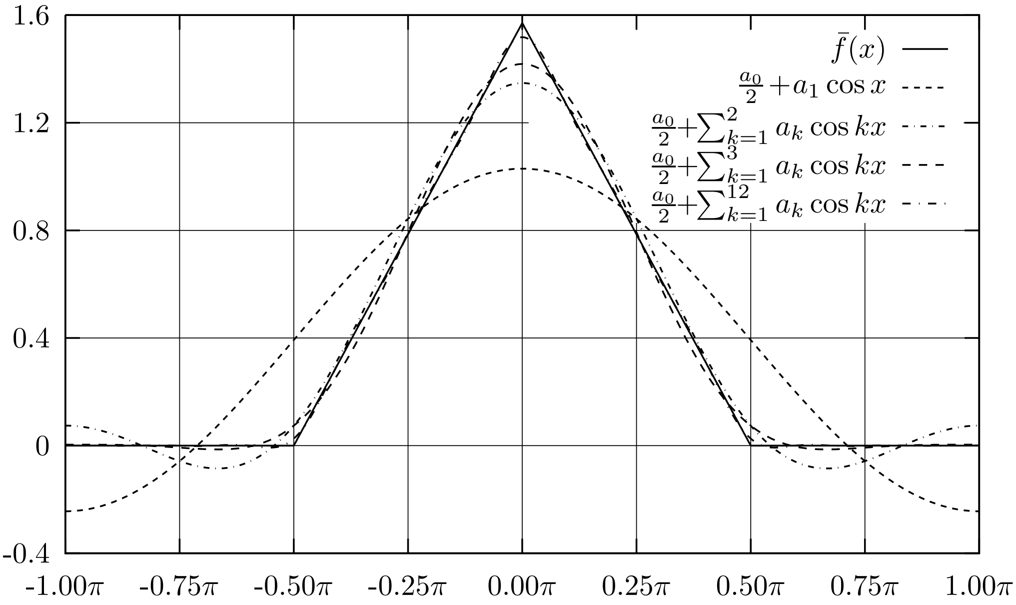
n	$(1 - \cos\frac{n}{2}\pi)$
$4k$	0
$4k+1$	1
$4k+2$	2
$4k+3$	1

Môžeme teda písať

$$\bar{f}(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\left(1 - \cos\frac{n}{2}\pi\right)}{\pi n^2} \cos nx =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \frac{1}{18}\cos 6x + \dots\right).$$

Nakoniec ešte ukážme, ako konverguje postupnosť čiastočných súčtov radu k funkcii $\bar{f}(x)$. Obrázok ukazuje súčtovú funkciu aj niektoré čiastočné súčty radu.



■

Úlohy

V úlohách **1.** až **8.** rozložte funkcie na danom intervale do trigonometrického radu.

1. $f(x) = \cos^4 x, \quad x \in \langle -\pi; \pi \rangle\,.$

2. $f(x) = \cos \frac{x}{2}, \quad x \in \langle -\pi; \pi \rangle\,.$

3. $f(x) = x, \quad \langle -\pi; \pi \rangle\,.$

4. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0; \pi \rangle \\ 0, & x \in (\pi; 2\pi \rangle \end{cases}\,.$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\pi; 0 \rangle \\ 1, & x \in (0; \pi \rangle \end{cases}\,.$

6. $f(x) = \mathrm{e}^x, \langle -k, k \rangle, k > 0\,.$

7. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0, & x \in (\frac{\pi}{2}; \pi \rangle \end{cases}\,.$

8. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \langle 0; \pi \rangle \\ 0, & x \in (\pi; 2\pi \rangle \end{cases}\,.$

V úlohách **9.** až **14.** rozložte funkcie do kosínusového trigonometrického radu na určenom intervale.

9. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \\ -1, & x \in (\frac{\pi}{2}; \pi \rangle \end{cases}\,.$

10. $f(x) = \frac{\pi}{2} - x, \quad x \in \langle 0; \pi \rangle\,.$

11. $f(x) = \cos x, \quad x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle\,.$

12. $f(x) = \sin x, \quad x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle\,.$

13. $f(x) = x^2, \quad x \in \langle 0; \pi \rangle\,.$

14. $f(x) = x(\pi - x), \quad x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle\,.$

V úlohách **15.** až **20.** rozložte funkcie do sínusového trigonometrického radu na určenom intervale.

15. $f(x) = 1, \quad x \in \langle 0; \pi \rangle\,.$

16. $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|, \quad x \in \langle 0; \pi \rangle\,.$

17. $f(x) = \cos x, \quad x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle\,.$

18. $f(x) = \sin x, \quad x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle\,.$

19. $f(x) = x^2, \quad x \in \langle 0; \pi \rangle\,.$

20. $f(x) = x(\pi - x), \quad x \in \langle 0; \pi \rangle\,.$

21. Pre úlohy **1.** až **20.** načrtnite graf periodického predĺženia funkcií $f(x)$.

2 Riešenia úloh

1. $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

2. $\frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2-1}\cos nx\right)$

3. $-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$

4. $\frac{\pi}{4}+\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\right)-\frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}\right)$

5. $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

6. $\left(\mathrm{e}^k+\mathrm{e}^{-k}\right)\left\{\frac{1}{2k}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n\frac{k}{k^2+n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{k}+(-1)^{n+1}\frac{n\pi}{k^2+n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{k}\right)\right\}$

7. $\frac{1}{2}\sin x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\sin 2nx$

8. $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$

9. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$

10. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$

11. $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos 2nx$

12. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$

13. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

14. $\frac{\pi^2}{6}-4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx$

15. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$

16. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$

17. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$

18. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\sin 2nx$

19. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n^2\pi^2)(-1)^{n-1}-2}{n^3}\sin nx$

20. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$