ZS z09-021 7k 1,4,6,7 riešil(a): PETER MÁSIAR 51025

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{130}}{2^x} = 0$?

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{-130}}{2^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^{130}2^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} 2^x x^{130}} = \frac{1}{(\lim\limits_{x\to\infty} 2^x)(\lim\limits_{x\to\infty} x^{130})} = \frac{1}{2^{\lim\limits_{x\to\infty} x}(\lim\limits_{x\to\infty} x^{130})} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{130}}{(\frac{1}{2})^x} = \lim\limits_{x\to\infty} 2^x x^{130} = \lim\limits_{x\to\infty} 2^x \cdot \lim\limits_{x\to\infty} x^{130} = 2^{\lim\limits_{x\to\infty} x}(\lim\limits_{x\to\infty} x^{130}) = \infty(\lim\limits_{x\to\infty} x^{130}) = \infty$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{-130}}{(\frac{1}{2})^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^{130}(\frac{1}{2})^x} = \infty$?

5. $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x x^{130} = \lim\limits_{x\to\infty} 2^x \cdot \lim\limits_{x\to\infty} x^{130} = 2^{\lim\limits_{x\to\infty} x}(\lim\limits_{x\to\infty} x^{130}) = \infty(\lim\limits_{x\to\infty} x^{130}) = \infty$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x x^{-130} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^{130}} = \infty$?

7. $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{2})^x x^{130} = 0$?

8. $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{2})^x x^{-130} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\frac{1}{2})^x}{x^{130}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^{130}2^x} = 0$ ale v druhom príklade

9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{130}}{2^x} = \frac{0^+}{1} = 0$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{-130}}{2^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{130}2^x} = \frac{1}{0^+ \cdot 1} = +\infty$

11. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{130}}{(\frac{1}{2})^x} = \frac{0^+}{1} = 0$

$\frac{1}{\frac{1}{2^0}}$

12. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{-130}}{(\frac{1}{2})^x} = \frac{1}{1 \cdot 0^+} = +\infty$

13. $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^x x^{130} = 1 \cdot 0^+ = 0$

14. $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^x x^{-130} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

15. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{2})^x x^{130} = 1 \cdot 0^+ = 0$

16. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{2})^x x^{-130} = 1 \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty$

17. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^{130}}{2^x} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^{130}}{2^{\lim\limits_{x\to 2} x}} = \frac{2^{130}}{4}$

18. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^{-130}}{2^x} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x^{130}2^x} = \frac{1}{2^{\lim\limits_{x\to 2} x}(\lim\limits_{x\to 2} x^{130})} = \frac{1}{4 \cdot 2^{130}}$

19. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^{130}}{(\frac{1}{2})^x} = \lim\limits_{x\to 2} 2^x x^{130} = 2^{\lim\limits_{x\to 2} 2}(\lim\limits_{x\to 2} x^{130}) = 4 \cdot 2^{130}$

20. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^{-130}}{(\frac{1}{2})^x} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x^{130}(\frac{1}{2})^x} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{2^x}{x^{130}} = \frac{4}{2^{130}}$

21. $\lim\limits_{x\to 2} 2^x x^{130} = 4 \cdot 2^{130}$

22. $\lim\limits_{x\to 2} 2^x x^{-130} = 4 \cdot 2^{-130}$

23. $\lim\limits_{x\to 2} (\frac{1}{2})^x x^{130} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^{130}}{2^x} = \frac{2^{130}}{4}$

24. $\lim\limits_{x\to 2} (\frac{1}{2})^x x^{-130} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x^{130} \cdot 2^x} = \frac{1}{4 \cdot 2^{130}}$

Môžete použiť L'Hospitalovo pravidlo.

—pokračovanie—

25. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-5x)}{\ln(-9x)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{-5x}\cdot -5}{\frac{1}{-9x}\cdot -9} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac1x}{\frac1x} = 1$

26. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-5x)}{\ln(-9x)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac1x}{\frac1x} = 1$

27. $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln\sin(-5x)}{\ln\sin(-9x)} = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{\sin(-5x)}\cdot\cos(-5x)\cdot(-5)}{\frac{1}{\sin(-9x)}\cdot\cos(-9x)\cdot(-9)} = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin(-9x)}{\sin(-5x)}\cdot\frac59 = \frac59\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\cos(-9x)\cdot -9}{\cos(-5x)\cdot -5} = \frac59\cdot\frac{-9}{-5} = 1$

28. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos(-5x)}{\ln\cos(-9x)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-5\sin(5x)}{\cos(5x)}}{\frac{-9\sin(9x)}{\cos 9x}} = \lim\limits_{x\to0}\frac{-5\sin(5x)}{\cos(5x)}\cdot\frac{\cos(9x)}{-9\sin(9x)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{-25\cos(5x)}{-81\cos(5x)} = \frac{25}{81}$

29. $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln\operatorname{tg}(-5x)}{\ln\operatorname{tg}(-9x)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{5}{\cos^2(5x)\operatorname{tg}(5x)}}{\frac{9}{\cos^2(9x)\operatorname{tg}(9x)}} = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{5}{\cos5x\cdot\sin5x}}{\frac{9}{\cos9x\cdot\sin9x}} = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{5}{\cos5x\sin5x}\cdot\frac{\cos9x\sin9x}{9} = \frac59\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\cos9x\cdot9}{\cos5x\cdot5} = 1$

30. $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln\operatorname{cotg}(-5x)}{\ln\operatorname{cotg}(-9x)} = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{5}{\operatorname{cotg}(5x)\sin^2(5x)}}{\frac{9}{\operatorname{cotg}(9x)\sin^2(9x)}} = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{5}{\cos5x\cdot\sin5x}}{\frac{9}{\cos9x\cdot\sin9x}} = 1$ ako v predošlom príklade

31. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{-5}-x}{x^{-9}-x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{-x^6+5}{x^6}}{\frac{-x^{10}+9}{x^{10}}} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{-x^6+5}{x^6}\cdot\frac{x^{10}}{-x^{10}+9} = 5\cdot0^+ = 0$

32. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^5-x}{x^9-x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{5x^4-1}{9x^8-1} = 1$

33. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{-5}-x}{x^{-9}-x} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^5}-x}{\frac{1}{x^9}-x} = \lim\limits_{x\to1}\frac{x^4(x^6+5)}{x^{10}+9} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to1}x^4\right)\lim\limits_{x\to1}(x^6+5)}{\lim\limits_{x\to1}(x^{10}+9)} = \frac{1+5}{10} = \frac{6}{10} = \frac35$

34. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5-x}{x^9-x} = \lim\limits_{x\to1}\frac{5x^4-1}{9x^8-1} = \frac48 = \frac12$

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-5}-x}{x^{-9}-x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4(x^6+5)}{x^{10}+9} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^9+4(x^6+5)x^3}{10x^9} = \frac1{10}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x^9+4(x^6+5)x^3}{x^9}\right) = \frac1{10}\lim\limits_{x\to\infty}\left(10+\frac{20}{3x^6}\right) = \frac{10}{10} = 1$

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-x}{x^9-x} = \cancel{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^8}}{1-\frac{1}{x^8}}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5\left(1-\frac1{x^4}\right)}{x^9\left(1-\frac1{x^8}\right)} = \frac1\infty = 0$

37. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{-5}-1}{x^{-9}-1} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{-5}{x^6}}{\frac{-9}{x^{10}}} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{-5}{x^6}\cdot\frac{x^{10}}{-9} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{-5x^4}{-9} = 0$

38. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^5-1}{x^9-1} = 1$

39. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{-5}-1}{x^{-9}-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\frac1{x^5}-1}{\frac1{x^9}-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{5x^4}{9} = \frac59$

40. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5-1}{x^9-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{5}{9x^4} = \frac59$

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-5}-1}{x^{-9}-1} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac1{x^5}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac1{x^9}-1\right)} = \frac{\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}x^5}-1}{\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}x^9}-1} = \frac{\frac{1}{(\lim\limits_{x\to\infty}x)^5}-1}{\frac{1}{(\lim\limits_{x\to\infty}x)^9}-1} = \frac{-1}{-1} = 1$

42. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-1}{x^9-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5\left(1-\frac1{x^5}\right)}{x^9\left(1-\frac1{x^9}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac1\infty = 0$

Môžete použiť L'Hospitalovo pravidlo.

—pokračovanie—

43. Silážna jama má mať tvar pravouhlého rovnobežnostena (bez hornej steny) s objemom $V = 700\ \mathrm{m}^3$. Dĺžka podstavy má byť 5–krát väčšia ako jej šírka. Náklady na vybudovanie $1\ \mathrm{m}^2$ dna sú 4–krát menšie ako náklady na vybudovanie $1\ \mathrm{m}^2$ steny. Určte najnižšiu možnú sumu, ktorá postačí na vybudovanie tejto silážnej jamy, ak $1\ \mathrm{m}^2$ steny stojí 2400 €.

a = šírka
b = dĺžka
c = výška

$700 = a \cdot b \cdot c$
$700 = a\, 5a \cdot c$
$700 = 5a^2 \cdot c$
$\frac{140}{a^2} = c$

povrch dna –
$a \cdot b = 5a^2$
cena dna
$3000\, a^2$

m² dna
$2400 : 4 = 600$

povrch stien
$(a+b+a+b) \cdot c = 12a \cdot \frac{140}{a^2} = \frac{1680}{a}$

cena stien
$\frac{4032\,000}{a}$

cena
$3000\, a^2 + \frac{4032\,000}{a}$

$6000\, a - \frac{4032\,000}{a^2} = 0$

$6000 a = \frac{4032\,000}{a^2} \quad / \cdot a^2$

$\cancel{6000\, a^3} = 4032\,000$

$a^3 \doteq 672$

$a \doteq 8{,}759$

$3000 \cdot 8{,}759^2 + \frac{4032\,000}{8{,}759} \doteq 690\,486{,}80$

náklady
690 486,80 €

Náklady sú 2080 1605,34 Sk.

44. Vypočítajte hodnoty $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ funkcie $y = f(x)$ zadanej implicitne vzťahmi $x^3 + x^5 y + y^4 - 1 = 0$, $y \geq 0$.

$f(0) = \quad y^4 - 1$
$y^4 = 1$
$y = \pm 1$
$y = 1$

$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{3x^2 + 5x^4 y}{x^5 + 4y^3}$

$[0,1] \quad -\frac{3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 1}{0 + 4} = 0$

$3x^2 + 5x^4 y + (x^5 + 4y^3)\, y' = 0$

$f'(0) = 0$

$3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^4 \cdot 1 + (0^5 + 4 \cdot 1^3)\, y' = 4y' = 0$

$f''(0) =$

$6x + 20x^3 + 2(5x^4)\, y' + (12y^2)(y')^2 + (x^5 + 4y^3)\, y'' = 0$
$6 \cdot 0 + 20 \cdot 0^3 + 2(5 \cdot 0^4) \cdot 0 + (12 \cdot 1)(0)^2 + (0^5 + 4 \cdot 1)\, y'' = 0 \quad = y'' = 0$

$f'(0) =$ 0 , $f''(0) =$ 0 .

45. Vypočítajte deriváciu rádu $n \in N$ funkcie $f(x) = \cos(-4x)$.

$f'(x) =$ $-4 \sin 4x$, $f''(x) =$ $-16 \cos 4x$, $f'''(x) =$ $64 \sin 4x$, $f^{(n)}(x) =$ $n = 2k$: $2^{4k} \cdot \cos 4x \cdot (-1)^k$; $n = 2k+1$: $2^{4k+2} \sin 4x \cdot (-1)^{k+1}$

46. Vypočítajte deriváciu rádu $n \in N$ funkcie $f(x) = \frac{1}{-6x-7}$.

$f'(x) = \frac{6}{(-6x-7)^2}$, $f''(x) = \frac{72}{(-6x-7)^3}$, $f'''(x) = \frac{1296}{(-6x-7)^4}$, $f^{(n)}(x) = \frac{6^n\, n!}{(-6x-7)^{n+1}}$.

4SB do 15.12.09 3SB do 22.12.09 2SB do 07.01.10 1SB do 29.01.10

(1.) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{130}}{2^x} = 0$ ako použijeme L'hospitalovo pravidlo dostatočne veľa krát v menovateli ostane konkrétne číslo, v čitateli zostane vždy $2^x \cdot \ldots\ldots$ číslo $\dfrac{\text{číslo}}{2^x \ldots\ldots}$

(4.) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{-130}}{\left(\frac{1}{2}\right)^x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{-130}{x^{131}}}{\frac{\ln 2}{2^x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-130 \cdot 2^x}{x^{131} \cdot \ln 2} = \infty$ obdobne ako pri prvom príklade len naopak

$$\frac{2^x \cdot \ldots\ldots}{\text{číslo}}$$

(6.) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^{130}} = \infty$ to isté ako v 4. príklade

(7.) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot x^{130} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{130}}{2^x} = 0$ ako v 1. príklade