Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity
katedra matematiky

Fourierovy řady

Bakalářská práce

2006

Tomáš Krisl

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci vypracoval samostatně. Veškerou literaturu a ostatní prameny, z nichž jsem při zpracování bakalářské práce čerpal, řádně cituji a uvádím v seznamu použité literatury.

V Brně dne 2.5. 2006 ....

Úvod

Úkolem první části bakalářské práce je vyložit základní pojmy a výsledky teorie trigonometrických řad se zaměřením na aproximace periodických funkcí jedné reálné proměnné. Teorie je v druhé části ilustrována na konkrétních příkladech.

Při výkladu teorie jsem se držel postupu použitého ve skriptech [1] , protože mi přišel srozumitelný a přímočarý. Nejdříve jsem vyložil teorii obecných Fourierových řad a poté přešel k trigonometrickým Fourierovým řadám. Nakonec jsem podrobně vyřešil několik příkladů na výpočet Fourierových řad. Některé z nich vedou v důsledku k určení součtů zajímavých číselných řad.

Na tomto místě bych velmi rád poděkoval panu docentu J. Šimšovi za jeho odbornou pomoc, poskytnutí potřebných informací a cenných podmětů k mé práci.

Základy teorie Fourierových řad

V přírodních vědách, především v mnoha fyzikálních oborech, se často vyšetřují periodické děje. Fourierovy řady slouží k aproximaci periodických funkcí, kterými tyto děje mohou být popsány. Uvážíme-li nejjednodušší periodické funkce $\sin nx$ a $\cos nx$, mohli bychom 2π-periodickou funkci příblížit pomocí trigonometrického polynomu

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

nebo pomocí nekonečné řady

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2}$$

s vhodnými číselnými koeficienty a_k, b_k. Při úvahách o přibližování periodických funkcí pomocí systému $\{\sin nx, \cos nx\}$ je podstatná ortogonalita tohoto systému. Existují i další systémy funkcí, které tuto vlastnost splňují, proto nejdříve popíšeme teorii pro obecné ortogonální systémy a poté přejdeme ke konkrétnímu trigonometrickému systému $\{\sin nx, \cos nx\}$.

Obecné Fourierovy řady

Nejdříve objasníme, kdy je systém $\{\varphi_n\}$ na daném intervalu ortogonální.

Definice 1. Nechť funkce f, g jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak *skalárním součinem* funkcí f, g na intervalu $\langle a, b\rangle$ nazveme číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Řekneme, že funkce f, g jsou *ortogonální*, právě když platí $(f, g) = 0$.

Poznámka 2. Protože integrál z nezáporné funkce je nezáporný, z definice 1 ihned plyne, že platí $(f, f) \geq 0$. Proto můžeme zavést následující definici.

Definice 3. *Normou funkce* f nazveme číslo $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Řekneme, že funkce f je *normovaná*, právě když $\|f\| = 1$.

Nyní již můžeme definovat, kdy je posloupnost funkcí $\{\varphi_n\}$ ortogonální.

Definice 4. Nechť $\{\varphi_n\}$ je konečná nebo spočetná posloupnost funkcí, které jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$. Tuto posloupnost nazveme *ortogonální*, právě když každé dvě funkce φ_n, φ_m jsou ortogonální pro $m \neq n$ a žádná funkce z této posloupnosti nemá nulovou normu.
Posloupnost $\{\varphi_n\}$ nazveme *ortonormální*, právě když je ortogonální a každá funkce φ_n je normovaná.

Poznámka 5. Je-li posloupnost $\{\varphi_n\}$ ortogonální, pak posloupnost $\{\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\}$ je ortonormální.

Věta 6. *Nechť $\{\varphi_n\}$ je nekonečná ortogonální posloupnost na intervalu $\langle a, b\rangle$, $\{c_n\}$ posloupnost reálných čísel. Nechť řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \tag{3}$$

stejmoměrně konverguje k funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak pro každé n platí:

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} \tag{4}$$

Poznámka 7. Je-li posloupnost $\{\varphi_n\}$ ortonormální, pak se vztah (4) zjednoduší na $c_n = (f, \varphi_n)$.

Definice 8. Nechť $\{\varphi_n\}$ je ortogonální posloupnost na intervalu $\langle a, b\rangle$, f je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak čísla c_n vyjádřená vztahem (4) nazýváme *Fourierovy koeficienty funkce f* vzhledem k posloupnosti $\{\varphi_n\}$ a řadu (3) *Fourierovu řadu funkce f* vzhledem k posloupnosti $\{\varphi_n\}$.

Už víme, že Fourierova řada funkce f existuje vždy, když je f integrovatelná. Vyvstávají ale otázky, zda Fourierova řada takové funkce f vůbec konverguje, a jaký je její součet. Vztahem mezi integrovatelnou funkcí f a její Fourierovou řadou se budeme nyní zabývat.

Definice 9. Nechť f a g jsou integrovatelné funkce $\langle a, b\rangle$. Pak *kvadratickou odchylkou funkcí* f, g nazveme číslo

$$\|f - g\| = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, \mathrm{d}x}.$$

Poznámka 10. Kvadratická odchylka určuje metriku na prostoru integrovatelných funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$, když funkce, které mají odlišné hodnoty v bodech tvořící množinu nulové míry, považujeme za totožné.

Věta 11. *Nechť $\{\varphi_n\}$ je ortogonální posloupnost na intervalu $\langle a, b\rangle$ a f integrovatelná funkce na $\langle a, b\rangle$. Pak pro každé $n = 1, 2, \dots$ nejmenší kvadratickou odchylku od funkce f má ta ze všech lineárních kombinací funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, jejíž koeficienty jsou právě Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k posloupnosti $\{\varphi_n\}$.*

Poznámka 12. Pro každé $n = 1, 2, \dots$ v situaci z věty 11 platí pro příslušné Fourierovy koeficienty c_k funkce f tzv. *Besselova identita*

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2\|\varphi_k\|^2,$$

z níž s ohledem na $\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\| \geq 0$ plyne tzv. *Besselova nerovnost*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2\|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{pro libovolné } n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Pokud je posloupnost $\{\varphi_n\}$ navíc ortonormální, pak *Besselova identita* bude ve tvaru

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

a *Besselova nerovnost* ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2 \quad \text{pro libovolné } n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 13. Ortogonální množina funkcí $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ generuje lineární podprostor prostoru integrovatelných funkcí. Funkce f obecně v tomto podprostoru neleží. Uvážíme-li Besselovu identitu, je vidět, že n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f je vlastně jejím kolmým průmětem do podprostoru tvořeného množinou funkcí $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

Věta 14. *Nechť $\{\varphi_n\}$ je nekonečná ortogonální posloupnost na intervalu $\langle a, b\rangle$ a f integrovatelná funkce na $\langle a, b\rangle$ a c_n Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k systému $\{\varphi_n\}$. Pak řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \tag{6}$$

konverguje a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|f\|^2. \tag{7}$$

Odtud plyne, že také platí $\lim_{n\to\infty} c_n \|\varphi_n\| = 0$.

Poznámka 15. Pokud v nerovnosti (7) nastane rovnost, řekneme, že pro funkci f platí *Parsevalova rovnost*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2. \tag{8}$$

Pro ortonormální posloupnost $\{\varphi_n\}$ se tato rovnost zjednoduší na tvar

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2.$$

Definice 16. Říkáme, že Fourierova řada funkce f *konverguje podle středu* k funkci f, právě když platí

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\| \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

Důsledek 17. Nechť $\{\varphi_n\}$ je nekonečná ortogonální posloupnost na intervalu $\langle a, b\rangle$ a f integrovatelná funkce na $\langle a, b\rangle$. Fourierova řada funkce f vzhledem k posloupnosti $\{\varphi_n\}$ konverguje podle středu, právě když platí pro funkci f Parsevalova rovnost (8).

Trigonometrické Fourierovy řady

V této kapitole přejdeme od obecného ortogonálního systému ke konkrétnímu systému trigonometrických funkcí

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots\} \tag{9}$$

Protože jde o funkce 2π-periodické, můžeme je použít k přiblížení 2π-periodických funkcí, nebo funkcí definovaných na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Lemma 18. *Nechť f je 2π-periodická funkce integrovatelná na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Pak pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 19. Protože platí předchozí lemma, stačí v dalším uvažovat pouze libovolný interval délky 2π, nejčastěji interval $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Lemma 20. *Systém (9) je ortogonální na každém intervalu délky 2π. Ortonormální posloupnost příslušná tomuto ortogonálnímu systému je*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots\right\}.$$

Vyjádříme-li Fourierovy koeficienty (4) obecné funkce f pro trigonometrický systém (9), dostaneme následující větu:

Věta 21. *Fourierova řada libovolné funkce f integrovatelné na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ má vzhledem k trigonometrické soustavě* (9) *tvar*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \tag{10}$$

kde pro Fourierovy koeficienty a_n, b_n funkce f platí vzorce

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x, n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x, n \in \mathbb{N}.$$

Důsledek 22. Nechť f je integorvatelná funkce na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.
Je-li f funkce sudá, její Fourierova řada má tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ kde } a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x \ (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Je-li f funkce lichá, její Fourierova řada má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ kde } b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x \ (n \in \mathbb{N}).$$

Poznámka 23. Mějme funkci f integrovatelnou na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Položíme-li $f(x) = f(-x)$ pro $x \in \langle -\pi, 0)$, zkonstruujeme tak *sudé rozšíření* funkce f na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$. Fourierovu řadu sudého rozšíření funkce f nazveme rozvoj funkce f v *kosinovou řadu* na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
Mějme integrovatelnou funkci f na intervalu $(0, \pi \rangle$. Položíme-li $f(0) = 0$, $f(x) = -f(-x)$ pro $x \in (-\pi, 0\rangle$, zkonstruujeme tak *liché rozšíření* funkce f na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$. Fourierovu řadu lichého rozšíření funkce f nazveme rozvoj funkce f v *sinovou řadu* na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Konvergence Fourierových řad

V této kapitole popíšeme podmínky zaručující, že Fourierova řada (10) konverguje bodově nebo dokonce stejnoměrně. Kromě toho ukážeme, jaká funkce je pak jejím součtem.

Nejdříve zavedeme několik označení:

Definice 24. Zápisem $f(x_0^+)$ budeme myslet číslo $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, ovšem pouze pokud tato hodnota existuje. Podobně zápis $f(x_0^-)$ značí číslo $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Definice 25. Funkci f nazveme po částech spojitou na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, pokud má na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ pouze konečný počet bodů nespojitosti a v těchto bodech existují vlastní jednostranné limity (tzv. nespojitost prvního druhu).

Definice 26. Funkci f nazveme po částech monotonní na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, pokud existuje takové konečné dělení tohoto intervalu, že v každém dělícím intervalu je funkce f monotonní.

Nyní uvedeme větu o podmínce, která zaručuje, že Fourierova řada funkce f konverguje bodově, a o tom, jaký je pak její součet.

Věta 27 (Dirichletova). *Mějme dánu funkci f, která je na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ po částech spojitá a po částech monotonní. Potom Fourierova řada této funkce na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ konverguje a hodnoty tohoto součtu jsou:*

1. *$f(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, kde je f spojitá,*

2. *$\frac{1}{2}\left[f(x_0^-) + f(x_0^+)\right]$ v těch bodech $x_0 \in (-\pi, \pi)$, kde je f nespojitá,*

3. *$\frac{1}{2}\left[f(-\pi^+) + f(\pi^-)\right]$ v krajních bodech intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.*

Poznámka 28. Jsou-li splněny předpoklady této věty, pak má Fourierova řada stejné hodnoty jako funkce f v těch bodech, kde je f spojitá, a v bodech nespojitosti a v krajních bodech je hodnota rovna aritmetickému průměru hodnot jednostranné limity zleva a zprava.

Definice 29. Mějme funkci f, která je po částech spojitá na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, Zkonstruujeme funkci $\overline{f}$, která se nazývá *2π-periodické rozšířená funkce f*, tímto způsobem:

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi)\,, \\ f(x - 2k\pi), & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)\,,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{2}\left[f(-\pi^+) + f(\pi^-)\right], & x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pokud máme neperiodickou funkci definovanou na $\mathbb{R}$, nemůžeme jí přiřadit Fourierovu řadu. Vezmeme-li ovšem tuto funkci na některém intervalu délky 2π, můžeme její Fourierovu řadu sestavit, pokud je na tomto intervalu zkoumaná funkce integrovatelná.

Periodickou funkci s periodou 2π už umíme rozvést do Fourierovy řady. Nyní ukážeme, jak lze Fourierovu řadu vytvořit i pro funkci s jinou periodou.

Nechť funkce g má periodu $2p$ a je integrovatelná na intervalu $\langle -p, p \rangle$. Pak funkce $f(x) = g(\frac{p}{\pi}t)$ je periodická s periodou 2π. Pokud je g po částech a po částech monotonní na intervalu $\langle -p, p \rangle$, je také f po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Funkci f lze rozvinout do Fourierovy řady (10) na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Pak po provedení zpětné transformace dostaneme Fourierovu řadu funkce g na intervalu $\langle -p, p \rangle$ ve tvaru:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x \right),$$

kde Fourierovy koeficienty jsou dány vztahy:

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} g(x) \cos \frac{n\pi}{p} x \, \mathrm{d}x$$
$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} g(x) \sin \frac{n\pi}{p} x \, \mathrm{d}x.$$

Nyní uvedeme větu, která udává podmínky zaručující že, Fourierova řada dané funkce f konverguje stejnoměrně k téže funkci f.

Věta 30. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Dále nechť je na tomto intervalu po částech spojitá její derivace f'. Potom Fourierova řada funkce f konverguje stejnoměrně k funkci f na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.*

Věta 31. *Nechť některá řada*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ a jejím součtem je daná funkce f. Pak koeficienty a_n, b_n jsou právě Fourierovy koeficienty funkce f.

Řešené příklady

Příklad 1. Bez výpočtu integrálů určete Fourierovy řady na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ funkcí

(a) $f(x) = \sin 2x \cos 3x$

(b) $f(x) = \cos^4 x$

Řešení:

(a)

$$\begin{aligned}
\sin 2x \cos 3x &= (\text{použiji vztah pro } \cos(2x + x)) = \\
&= \sin 2x (\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x) = \\
&= \frac{1}{2} \cos x \sin 4x - \sin x \sin^2 2x = \\
&= \left(\text{použiji vztah } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cos x \sin 4x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x \cos 4x = \\
&= (\text{použiji vztah } \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)) =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 5x$$

V tomto případě $b_1 = -\frac{1}{2}, b_5 = \frac{1}{2}$ a ostaní koeficienty jsou nulové.

(b)

$$\cos^4 x = \left(\text{použiji vztah } \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) = \left(\text{použiji stejný vztah pro } \cos^2 2x\right) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

V tomto případě $a_0 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{8}$ a ostatní koeficienty jsou nulové.

U tohoto příkladu vidíme, že ne vždy je třeba počítat Fourierovy koeficienty přes integrály. Pokud mám součet, součin či mocninu goniometrických funkcí, je někdy možné použitím vztahů, které pro ně platí, převést funkci na lineární kombinaci funkcí $\cos nx, \sin nx$. Získáme tak vlastně Fourierovu řadu dané funkce s konečným počtem nenulových koeficientů.

Příklad 2. Pomocí koeficientů a_n, b_n Fourierovy řady 2π-periodické funkce $y = f(x)$ vyjádřete koeficienty a'_n, b'_n posunuté funkce $y = g(x) = f(x+h)$, kde $h > 0$ je kladná konstanta.

Řešení:

Původní funkce je $y = f(x)$, její koeficienty jsou

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x.$$

Funkce $y = f(x+h)$ má koeficienty

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\,\cos\,nx\,\mathrm{d}x = (\text{použiji substituci } t = x+h) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\cos(nt-nh)\,\mathrm{d}t = (\text{použiji vzorec pro kosinus rozdílu})$$
$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\cos\,nt\,\mathrm{d}t\right]\cos\,nh + \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\sin\,nt\,\mathrm{d}t\right]\sin\,nh =$$

(nyní využiji toho, že platí: $\displaystyle\int_{-\pi+h}^{\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{\pi+h} - \int_{-\pi}^{-\pi+h} = \int_{-\pi}^{-\pi}$,

protože z toho důvodu, že funkce má periodu 2π, mají druhý

a třetí člen opačnou velikost, takže se odečtou)

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos\,nt\,\mathrm{d}t\right]\cos\,nh + \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin\,nt\,\mathrm{d}t\right]\sin\,nh =$$
$$= a_n\,\cos\,nh + b_n\,\sin\,nh$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\,\sin\,nx\,\mathrm{d}x = (\text{použiji substituci } t = x+h) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\sin(nt-nh)\,\mathrm{d}t = (\text{použiji vzorec pro sinus rozdílu})$$
$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\sin\,nt\,\mathrm{d}t\right]\cos\,nh - \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\,\cos\,nt\,\mathrm{d}t\right]\sin\,nh =$$

(upravím meze jako u koeficientů a_n :)

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin\,nt\,\mathrm{d}t\right]\cos\,nh - \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos\,nt\,\mathrm{d}t\right]\sin\,nh =$$
$$= b_n\cos\,nh - a_n\,\sin\,nh$$

Příklad 3. Nechť $y = f(x)$ je funkce integrovatelná na $\langle-\pi,\pi\rangle$. Dokažte, že pro koeficienty a_k, b_k Fourierovy řady funkce f platí:

(a) Je-li f periodická s periodou π, tj. $f(x) = f(x+\pi)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_{2k-1} = b_{2k-1} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

(b) Je-li f tzv. antiperiodická s antiperiodou π, tj. $f(x+\pi) = -f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Řešení:

(a)

$$a_{2k-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = \text{(u prvního integrálu provedu substituci}$$
$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\cos{(2k-1)(x+\pi)}\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = \text{(použiji vztah pro kosinus součtu a}$$
$$\text{využiji, že platí } f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left[\cos{(2k-1)x}\ \cos{(2k-1)\pi}\right.$$
$$\left.-\sin{(2k-1)x}\ \sin{(2k-1)\pi}\right]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$b_{2k-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = \text{(u prvního integrálu provedu substituci}$$
$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\sin{(2k-1)(x+\pi)}\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = \text{(použiji vztah pro sinus součtu a}$$
$$\text{využiji, že že platí } f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left[\sin{(2k-1)x}\ \cos{(2k-1)\pi}\right.$$
$$\left.+\cos{(2k-1)x}\ \sin{(2k-1)\pi}\right]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k-1)x}\,\mathrm{d}x = 0$$

(b)

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$
$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\cos(2k)(x+\pi)\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro kosinus součtu a}$$
$$\text{využiji, že platí } -f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,[\cos(2k)x\,\cos(2k)\pi$$
$$+\sin(2k)x\,\sin(2k)\pi]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k)x\,\mathrm{d}x = 0$$

$$b_{2k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$
$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\sin(2k)(x+\pi)\,\mathrm{d}x +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro sinus součtu a}$$
$$\text{využiji, že platí } -f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,[\sin(2k)x\,\cos(2k)\pi$$
$$+\cos(2k)x\,\sin(2k)\pi]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k)x\,\mathrm{d}x = 0$$

Příklad 4. Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Pro která x nalezená řada konverguje a jaký je její součet? Pomocí výsledku určete součet nekonečné řady

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Řešení:

Zadaná funkce je tohoto tvaru:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Funkce je lichá, a tedy všechny koeficienty a_n jsou nulové. Spočteme koeficienty b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1 \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\right)$$

Podle Dirichletovy věty Fourierova řada konverguje k funkci $\operatorname{sgn}(x)$ na celém intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Pro každé $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$ tedy platí

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}\sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

Řadu $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$ lze zapsat pomocí sumy: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Pro $x = \frac{\pi}{2}$ dostaneme:

$$1 = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Odtud získáme:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{4}{\pi}$$

Příklad 5. Rozložte ve Fourierovu řadu funkci:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\pi, 0\rangle \\ \sin x, & x \in \langle 0, \pi\rangle\,. \end{cases}$$

Řešení: Na intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$ jsou části integrálů pro koeficienty a_n, b_n nulové.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(1+n)x - \sin(1-n)x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)$$

Pro $n > 1$ platí:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(1-n)x - \cos(1+n)x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n}\right]_0^{\pi} = 0$$

Koeficient b_1 musíme spočítat odděleně: :

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1 - \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

Fourierova řada má tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)\cos nx =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

Podle Dirichletovy věty je součet této řady roven $f(x)$ pro každé $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

Příklad 6. Rozložte v kosinovou Fourierovu řadu funkci:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \\ -\cos x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle. \end{cases}$$

Řešení:

Protože rozkládáme v kosinovou řadu, jsou všechny koeficienty b_n nulové.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos nx \, dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(1+n)x +$$

$$+ \cos(1-n)x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(1+n)x + \cos(1-n)x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{pro } n \text{ liché} \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-n^2}, & \text{pro } n = 4k+2 \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-n^2}, & \text{pro } n = 4k \end{cases}$$

Tento zápis lze sjednotit do jediného:

$$a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^{\frac{n}{2}}\left((-1)^n + 1\right)\frac{1}{1-n^2}$$

Pak tedy, protože funkce je spojitá, platí podle Dirichletovy věty na celém

intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{2}}\left((-1)^n + 1\right)\frac{\cos nx}{1-n^2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{1-n^2}$$

Příklad 7. Rozložte v sinovou Fourierovu řadu funkci $f(x) = \cos 2x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení:

Protože rozkládáme v sinovu řadu, všechny koeficienty a_n jsou nulové.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2+n)x + \sin(n-2)x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+2)x}{n+2} - \frac{\cos(n-2)x}{n-2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n+2} + \frac{(-1)^{n+1}+1}{n-2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((-1)^{n+1} + 1\right)\frac{n+2+n-2}{n^2-4} = \frac{2n}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2-4}$$

Protože funkce je spojitá, podle Dirichletovy věty platí na celém

intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\left((-1)^{n+1}+1\right)\sin nx}{n^2-4}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(2n+1)^2-4}\sin(2n+1)x$$

Příklad 8. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $\langle -\pi,\pi\rangle$ funkci

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(\pi+x) & x\in(-\pi,0)\\ \frac{1}{2}(\pi-x) & x\in\langle 0,\pi)\,.\end{cases}$$

Řešení:

Jde o lichou funkci, tedy všechny její koeficienty a_n jsou nulové. Spočteme koeficienty b_n:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x\right)=$$

$=$ použiji metodu per partes $=$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}-\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}-\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}-\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}=\frac{1}{n}$$

Podle Dirichletovy věty řada konverguje pro všechna $x\in(-\pi,\pi)$

kromě $x=0$ k zadané funkci:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

Příklad 9. Funkci $f(x)=\pi^2-x^2$ rozložte ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi,\pi)$. Najděte součty řad:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2},\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Řešení:

Jde o sudou funkci, tedy všechny její koeficienty b_n jsou rovny nule. Spočtu koeficienty a_n:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi^2-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[x\pi^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\pi^3-\frac{\pi^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\pi^2 - x^2\right)\cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\left[\pi^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi x^2\cos nx\,\mathrm{d}x\right) =$$

$= \text{dvakrát použijeme metodu per partes} =$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 - \left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2x\frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \left[-2x\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\frac{\cos nx}{n^2}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 2\left[\frac{\sin nx}{n^3}\right]_0^\pi\right) = \frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}$$

Protože funkce je spojitá, podle Dirichletovy věty konverguje na celém intervalu $(-\pi, \pi)$:

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

Pro $x = 0$ dostanu: $\pi^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, z toho tedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Pro $x = \pi$ dostanu: $0 = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, z toho tedy:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Seznam použité literatury

[1] Došlá Z., Novák V. *Nekonečné řady*, Masarykova univerzita, Brno 2002

[2] Kadlec J., Kufner A. *Fourierovy řady*, Academia, Praha 1969