1. prednáška

Spojitá náhodná premenná

Zapísali ste si predmet Pravdepodobnosť a štatistika. V jeho názve sú zahrnuté dve *"odvetvia"* matematiky: Teória pravdepodobnosti a Štatistika. Pojem pravdepodobnosť nie je pre vás úplne neznámy - pred rokom ste začali študovať predmet *Diskrétna pravdepodobnosť.* V tomto predmete ste sa, okrem iného, zoznámili s pojmami *náhoda*, *náhodný jav*, *pravdepodobnosť*, *náhodná premenná*, ...
Pripomeňme si tieto pojmy a dohodnime sa na označovaní týchto pojmov tak, ako je to štandardne uvádzané vo väčšine dostupnej a používanej literatúry.
Náhodu môžeme charakteizovať ako súhrn drobných, nezistiteľných vplyvov, ktoré spôsobujú, že výsledky určitej činnosti sa v jednotlivých prípadoch menia.
Náhodné javy sú javy, ktoré za určitých podmienok v závislosti od náhody môžu, alebo nemusia nastať. Ozn. A, B, C, ...
Náhodný jav je výsledok náhodného pokusu a výsledok náhodného pokusu poznáme až po jeho realizácii. Náhodný pokus je napriklad hod kockou, možnými náhodnými javmi sú 1, 2, ..., 6.
Pravdepodobnosť náhodného javu A je číslo, ktoré udáva mieru možnosti výskytu náhodného javu. Ozn. P(A)
Jedným zo základných pojmov pravdepodobnosti je náhodná premenná (NP). Jednoducho povedané, **náhodná premenná** je premenná, ktorej hodnotu určuje výsledok náhodného pokusu. Náhodné premenné označujeme písmenami X, Y, ... a ich hodnoty $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ Pripomeňme si, že náhodné premenné delíme na diskrétne a spojité.
Diskrétna náhodná premenná môže nadobúdať nanajvýš spočítateľne veľa hodnôt, napr. výsledok po hode kockou. Ak náhodná npremenná nadobúda všetky hodnoty z nejakého (otvoreného alebo uzavretého) intervalu, tak hovoríme o **spojitej náhodnej premennej**.
Na to, aby sme náhodnú premennú úplne charakterizovali, musíme určiť množinu všetkých možných hodnôt a pravdepodobností, s ktorými tieto hodnoty môžu nastať. Takýto úplný popis náhodnej premennej, kde každej možnej hodnote náhodnej premennej je priradená pravdepodobnosť jej nastatia, sa nazýva **rozdelenie pravdepodobnosti**. Rozdelenie pravdepodobnosti môže byť charakterizované :

1. tabuľkou – len u diskrétnych náhodných premenných,
2. funkciou – u diskrétnych i spojitých náhodných premenných,
3. grafom

Pre diskrétnu náhodnú premennú sa používa **pravdepodobnostná funkcia**: $P(X = x_i) = p(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$, kde n je počet všetkých možných diskrétnych hodnôt, ktoré náhodná premenná X nadobúda. Musí platiť:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

Pre spojitú náhodnú premennú sa používa pojem **hustota pravdepodobnosti**, ktorú budeme označovať $f(x), g(x), \ldots$

Hustota pravdepodobnosti f(x) je reálna funkcia reálnej premennej, ktorá spĺňa podmienky:

a) $f(x)$ je definovaná pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$,

b) $f(x) \geq 0$,

c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = 1$.

Hustota pravdepodobnosti (na rozdiel od pravdepodobnostnej funkcie pre diskrétnu náhodnú premennú) nevyjadruje pravdepodobnosť nastatia hodnoty x. Ako to vlastne je?

$P(X = x)$ je pravdepodobnosť, nastatia nejakého elementárneho javu. Ak diskrétna náhodná premenná nadobudla hodnotu x, musel nejaký jav nastať pravdepodobnosť jeho nastatia je priamo pravdepodobnosť, že náhodná premenná X nadobudla hodnotu x. Náhodná premenná X však sama o sebe nie je náhodný jav – je to zobrazenie z množiny elementárnych javov do množiny reálnych čísel. Preto v prípade spojitých náhodných premenných si treba náhodné javy vytvoriť pomocou náhodných premenných a to takto: Náhodným javom bude: "$X \in (a, b)$". Pravdepodobnosť, že náhodná premenná X leží v intervale od a po b je $P(a < X < b)$ a je to veľkosť plochy pod grafom funkcie $f(x)$ a plochu vypočítame:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{dx}$$

Uvedomme si, že $P(X = c) = P(c < X < c) = \int_c^c f(x)\,\mathrm{dx} = 0$, takže pre náhodný jav "X patrí do nejakého intervalu" nie je dôležité, či je inteval otvorený alebo uzavretý. A pretože $f(x)$ nie je pravdepodobnosť, môže byť $f(x) > 1$.

Hustota pravdepodobnosti $f(x)$, resp. pravdepodobnostná funkcia $P(X = x)$ nie je jediná funkcia, pomocou ktorej charakterizujeme náhodné premenné. Náhodná premenná X je úplne popísaná / charakterizovaná, ak poznáme jej distribučnú funkciu.

Distribučnou fukciou náhodnej premennej X budeme nazývať funkciu $F(x)$ definovanú vzťahom

$$F(x) = P(X < x) \text{ pre ľubovolné } x \in R$$

.

Hodnota distribučnej funkcie udáva pravdepodobnosť, že náhodná premenná X nadobúda hodnoty menšie ako reálne číslo x bez ohľadu na typ náhodnej premennej X. Špeciálne pre spojitú náhodnú premennú

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{dt}, \quad \mathrm{x} \in \mathrm{R}.$$

Vlastnosti distribučnej funkcie:

a) pre každé $x \in R$ platí: $0 \leq F(x) \leq 1$,

b) pre každé $x_1, x_2 \in R$ plati: ak $x_1 < x_2$ tak $F(x_1) \leq F(x_2)$

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$
(v prípade, že $x \in (a, b)$ je $\lim_{x \to a} F(x) = 0, \ \lim_{x \to b} F(x) = 1$)

d) $F(x)$ je zľava spojitá

Vzťah medzi distribučnou funkciou a hustotou pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej vyplýva z definície hustoty pravdepodobnosti, čiže

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{dt},$$

a naopak

$$f(x) = \frac{\mathrm{d\,F(x)}}{\mathrm{d\,x}} = F'(x).$$

Integrovaním, resp. derivovaním je možné previesť jednu formu vyjadrenia zákona rozdelenia spojitej náhodnej premennej na druhú.