Úvod do logiky

Výroky

Výrok je tvrdenie, ktoré možno označiť za pravdivé alebo nepravdivé. Napríklad

- Vonku prší.
- Existujú mimozemské civilizácie.

Obe vety predstavujú výroky, aj keď pravdivosť druhého výroku nie sme schopní posúdiť. Naproti tomu nasledujúca veta:

- Nežer toľko!

nepredstavuje výrok, pretože v tomto prípade nemá zmysel uvažovať o pravdivostnej hodnote.
Vo všeobecnosti, ak výrok označíme p, tak mu môžeme priradiť pravdivostnú hodnotu 0 alebo 1.

Operácie s výrokmi

Negácia

Z každého výroku môžeme vytvoriť nový výrok vložením slova "nie", vsunutím predpony "ne-", alebo iným vyjadrením záporu podľa pravidiel gramatiky.
Výrok: Slovensko je majster sveta vo futbale.
Znegujeme tento (žiaľ) nepravdivý výrok: Slovensko nie je majster sveta vo futbale.
Môžeme však povedať aj: Nie je pravda, že Slovensko je majster sveta vo futbale.
Ak p je výrok, jeho negáciu označíme $\neg p$.

p	$\neg p$
1	0
0	1

Toto sa dá vyjadriť aj nasledovne: ak výrok p nadobúda pravdivostnú hodnotu $a \in \{0, 1\}$, potom jeho negácia $\neg p$ nadobudne pravdivostnú hodnotu $1 - a$.

Konjunkcia

Výroky môžeme spájať spojkou **a**, prípadne **a zároveň**. Napríklad
Jupiter je planéta a Slnko je hviezda.
Tento výrok je pravdivý, pretože obe jeho časti sú pravdivé.
Mars je planéta a Žilina vyhrala Ligu majstrov.
Druhá časť výroku je evidentne nepravdivá, takže celý výrok považujeme za nepravdivý.

Konjunkcia je pravdivá len v prípade, keď sú **obidve jej zložky pravdivé**. V zvyšných prípadoch je nepravdivá.
Ak p, q sú výroky, tak konjunkciu zapisujeme $p \wedge q$. Formálne môžeme pravdivostné hodnoty konjunkcie vyjadriť nasledujúcou tabuľkou.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ak predpokladáme, že výrok p má pravdivostnú hodnotu $a \in \{0, 1\}$ a výrok q pravdivostnú hodnotu $b \in \{0, 1\}$, tak $p \wedge q$ nadobúda pravdivostnú hodnotu $a \cdot b$ - konjunkciu tiež nazývame logický súčin.

Disjunkcia

Výroky môžeme spájať spojkou **alebo**. V bežnom jazyku má táto spojka dva významy. Všimnime si nasledujúce dve vety.

1. Tento človek je slušný alebo gauner.

2. Ja si dám doma čaj alebo moja žena kávu.

V prvom výroku očakávame, že nastane práve jedna z uvedených možností. Spojku alebo chápeme v tomto prípade, ako vylučujúcu spojku. V druhom výroku na túto spojku nemusíme pozerať, ako na vylučujúcu (pokiaľ máme doma aspoň dve šálky). Výrok bude pravdivý, ak nastane aspoň jedna z uvedených možností (ale mohli by aj obe naraz). V matematike (a podobne aj v informatike) sa spojka alebo používa len druhým spôsobom! Napríklad: Číslo $x < 5$ alebo $x > 3$. Ak si za x zvolíme 4, tak sú splnené obe zložky a celý výrok je pravdivý.
Disjunkcia je pravdivá, keď je **aspoň jedna jej zložka pravdivá**.

Ak p, q sú výroky, tak disjunkciu zapisujeme $p \vee q$. Formálne môžeme pravdivostné hodnoty disjunkcie vyjadriť nasledujúcou tabuľkou.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ak predpokladáme, že výrok p má pravdivostnú hodnotu $a \in \{0, 1\}$ a výrok q pravdivostnú hodnotu $b \in \{0, 1\}$, tak $p \vee q$ nadobúda pravdivostnú hodnotu $a+b - a \cdot b$ - disjunkciu tiež nazývame logický súčet.

Implikácia

Implikáciou sa nazýva výrok vytvorený pomocou dvojice **ak ..., tak ...** (prípadne dvojicou ak ..., potom ...).

Ak prší, tak ulice sú mokré.

Pozrime sa, ako to je s pravdivostnými hodnotami implikácie. Vezmime si nasledujúci príklad.

Ak Žilina vyhrá Ligu majstrov, tak zjem kefu.

Kedy bude táto veta v mojom podaní klamstvom? Ak Žilina vyhrá Ligu majstrov a ja odmietnem zjesť tú kefu. Ak by naozaj vyhrali a ja nechcem byť považovaný za klamára, tak budem musieť tú kefu zjesť.
Čo v prípade, že Ligu majstrov nevyhrajú? V takom prípade nie je splnený predpoklad a ja sa nedopúšťam klamstva bez ohľadu na to, či mávam kefu na večeru, alebo ju zo zásady jesť odmietam. Implikácia je nepravdivá len v prípade, keď je **prvá jej zložka (podmienka) pravdivá a druhá nie**.
Ak p, q sú výroky, tak implikáciu zapisujeme $p \Rightarrow q$. Formálne môžeme pravdivostné hodnoty implikácie vyjadriť nasledujúcou tabuľkou.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ak predpokladáme, že výrok p má pravdivostnú hodnotu $a \in \{0, 1\}$ a výrok q pravdivostnú hodnotu $b \in \{0, 1\}$, tak $p \Rightarrow q$ nadobúda pravdivostnú hodnotu $1 - a + a \cdot b$.

Ekvivalencia

Ekvivalencia je výrok, ktorý je vytvorený pomocou slovných spojení **... práve vtedy, keď ...** alebo **... vtedy a len vtedy, keď ...**. Príklad:

Sociálny štát vybudujeme práve vtedy, keď zdvojnásobíme platy.

Pozrime sa bližšie na pravdivostné hodnoty ekvivalencie. Využijeme výrok, ktorý je podobný tomu predchádzajúcemu.

Toto tvrdenie je hlúposť práve vtedy, keď je to blbosť.

Tento typ výrokov funguje, ako spojenie dvoch implikácií. Aby bol celý výrok pravdivý, musia byť pravdivé obe implikácie. Ak je toto tvrdenie hlúposť, potom je aj blbosťou. Podobne opačná implikácia. Ak je toto tvrdenie blbosť, potom je to aj hlúposť. Aby bol celý výrok pravdivý, musia byť pravdivé obe implikácie. Ak je prvá zložka výroku pravdivá, potom je pravdivá aj druhá zložka výroku. Ak je prvá zložka nepravdivá, tak nemôže byť pravdivá ani druhá zložka, pretože by to spôsobilo nepravdivosť druhej implikácie. Ekvivalencia je pravdivá, keď majú **obidve jej zložky rovnakú pravdivostnú hodnotu**. V opačnom prípade je nepravdivá.
Ak p, q sú výroky, tak ekvivalenciu zapisujeme $p \Leftrightarrow q$. Formálne môžeme pravdivostné hodnoty ekvivalencie vyjadriť nasledujúcou tabuľkou.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ak predpokladáme, že výrok p má pravdivostnú hodnotu $a \in \{0, 1\}$ a výrok q pravdivostnú hodnotu $b \in \{0, 1\}$, tak $p \Leftrightarrow q$ nadobúda pravdivostnú hodnotu $1 - a - b + 2a{\cdot}b$.

Niekoľko ďalších logických spojok

Spomeňme si na spojku alebo. Niekedy ju chápeme vylučovacím spôsobom. Vylučovacie alebo, označované aj XOR. Ak p, q sú výroky, tak túto spojku zapisujeme napríklad $p \vee\!\vee q$. Formálne môžeme pravdivostné hodnoty spojky XOR vyjadriť nasledujúcou tabuľkou.

p	q	$p \vee\!\vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

V tabuľke vidíme, že táto spojka je vlastne negáciou ekvivalencie.

Negácie zložených výrokov

Negácia konjunkcie a disjunkcie

Ako sme spomenuli vyššie, konjunkcia je pravdivá, keď *oba* výroky p a q sú pravdivé. Negácia bude teda pravdivá, ak *aspoň jeden* z nich nie je pravdivý - *aspoň pre jeden* z nich je pravdivá jeho negácia. Slovné spojenie *aspoň jeden* sa však spája s disjunkciou a logickou spojkou *alebo*. Negácia je teda pravdivá, ak je pravdivá negácia prvého výroku, *alebo* je pravdivá negácia druhého výroku. Formálne to môžeme vyjadriť v nasledujúcej tabuľke.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

Podobne negujeme disjunkciu. Tá je pravdivá, keď je pravdivý *aspoň jeden* z výrokov, ktoré v nej vystupujú. Negácia bude teda pravdivá, keď sú pravdivé negácie *oboch* výrokov, ktoré v disjunkcii vystupujú. Ako sme mali možnosť sa presvedčiť, slovíčko *oboch* sa spája s konjunkciou a spojkou *a zároveň*. Negácia je pravdivá, ak je pravdivá negácia prvého výroku *a zároveň* je pravdivá negácia druhého výroku. Formálne to môžeme vyjadriť v nasledujúcej tabuľke.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1

Negácia implikácie

Vráťme sa k výroku o Žilinských futbalistoch a mojom stravovaní.

Ak Žilina vyhrá Ligu majstrov, tak zjem kefu.

Tento výrok bude nepravdivý len v prípade, že

Žilina Ligu majstrov vyhrá *a* ja kefu nezjem

Vidíme, že sme obe zložky spojili spojkou *a*. Prvá zložka implikácie je nezmenená, druhú zložku sme negovali. Negáciu implikácie dostaneme, ak prvú jej zložku necháme nezmenenú, druhú zložku znegujeme a zložky spojíme spojkou *a zároveň*, respektíve *a*. Formálne to môžeme vyjadriť v nasledujúcej tabuľke.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

Negáciu implikácie teda môžeme vyjadriť v tvare $p \wedge \neg q$. Častou chybou pri negovaní implikácie je jej prevod na tvar $p \Rightarrow \neg q$ alebo $\neg p \Rightarrow \neg q$. Napríklad

Ak Žilina vyhrá Ligu majstrov, tak nezjem kefu.

Keby náhodou Žilinčania neuspeli, tak tento výrok bude pravdivý, ale v tom prípade bude pravdivý aj pôvodný výrok, z ktorého sme vychádzali, takže toto nemôže byť negácia nášho výroku. Podobne sa dá zdôvodniť, že $\neg p \Rightarrow \neg q$ tiež nie je negáciou tejto implikácie. Vidieť to aj v nasledujúcej tabuľke, že spomenuté konštrukcie výrokov nemajú opačné pravdivostné hodnoty, ako pôvodná implikácia.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1

Kvantifikátory

Existenčný kvantifikátor

Vezmime výrok

Jano je opilec.

Toto tvrdenie vyjadruje vlastnosť istého konkrétneho objektu - nejakého konkrétneho Jana. Ak chceme vyjadriť, že túto vlastnosť môžu mať objekty z nejakého vymedzeného súboru objektov (z nejakej množiny), tak môžeme povedať

Niektorí Slováci sú opilci.

Čiže tvrdíme, že existujú objekty medzi Slovákmi, ktoré majú danú vlastnosť. Toto tvrdenie je pravdivé, ak aspoň jeden Slovák túto vlastnosť má. Slová *niektorí*, *existujú*, *aspoň jeden* sa používajú v existenčných tvrdeniach a nazývame ich pri tomto použití aj existenčné kvantifikátory. V matematickom zápise používame na vyjadrenie existenčného kvantifikátora znak $\exists$. Napríklad

$$\exists x \in N \;\; x < 3 \ .$$

Po slovensky to povieme

Existuje také prirodzené číslo, ktoré je menšie, ako tri.

Ak máme množinu A a chceme vyjadriť tvrdenie, že niektoré prvky x tejto množiny majú vlastnosť $P(x)$, formálne to môžeme zapisovať:

$$\exists x{\in}A \;\; P(x) \ .$$

Pravdivosť existenčného tvrdenia dokážeme, ak nájdeme prvok s touto vlastnosťou, alebo nepriamo ukážeme, že tento prvok musí existovať.

Všeobecný kvantifikátor

Iným typom je všeobecné tvrdenie, ktoré hovorí, že všetky objekty z nejakého vymedzeného súboru objektov (z nejakej množiny) majú danú vlastnosť.

Každý človek má v sebe niečo dobré.

Vo všeobecných tvrdeniach sa na vyjadrenie množstva používajú najčastejšie slová *každý*, *všetci*. Hovoríme im aj všeobecné kvantifikátory. V matematickom zápise používame na vyjadrenie všeobecného kvantifikátora znak $\forall$. Napríklad

$$\forall x \in R \;\; x^2 \geq 0 \ .$$

Preložené do nášho jazyka

Všetky reálne čísla majú druhú mocninu väčšiu alebo rovnú nule.

Ak chceme vyjadriť tvrdenie, že každý prvok x množiny A má vlastnosť $P(x)$, formálne to zapisujeme

$$\forall x \in A \;\; P(x) \ .$$

Ak chceme dokázať pravdivosť všeobecného tvrdenia, musíme dokázať, že všetky prvky spĺňajú danú vlastnosť.

Negácie

Pozrime sa na všeobecné tvrdenie

Všetky jablká sú červené.

Ak chceme dokázať, že nie je pravdivé (čiže platí jeho negácia), stačí nájsť aspoň jedno jablko, ktoré túto vlastnosť nesplĺňa. Negácia tohto výroku teda bude

Niektoré jablká nie sú červené.

Čo sme pri negovaní urobili? Zmenili sme všeobecný kvantifikátor na existenčný a negovali sme vlastnosť. Formálne to môžeme zapísať

$$\neg(\forall x{\in}A \quad P(x)) \Leftrightarrow (\exists x{\in}A \quad \neg P(x)) \ .$$

Čiže negácia všeobecného tvrdenia je ekvivalentná s tvrdením, že existuje v A prvok, ktorý nemá vlastnosť $P(x)$.

Vezmime si existenčné tvrdenie

Niektorí profesori sú holohlaví.

Ak by sme chceli dokázať, že nie je pravdivé, museli by sme dokázať, že

Všetci profesori majú vlasy.

Čiže sme zmenili existenčný kvantifikátor na všeobecný a vlastnosť sme negovali. Formálne to môžeme zapísať

$$\neg(\exists x{\in}A \quad P(x)) \Leftrightarrow (\forall x{\in}A \quad \neg P(x)) \ .$$

Referencie

[1] Gahér, F.:*Logika pre každého*, IRIS, Bratislava, ISBN 80-89018-54-8, 2003

[2] Kluvánek, I.:*Prípravka na diferenciálny a integrálny počet*, VŠDS, Žilina, ISBN 80-7100-058-2, 1991