

Kapitola 1

Laplaceova transformace

Autor: RNDr. Marek Lampart, Ph.D.
Poslední aktualizace: 15. prosince 2010

Laplaceova transformace je efektivní metoda k řešení různých praktických úloh oblastí matematické fyziky, elektrotechniky i regulačních systémů.

Tato kapitola je motivována pracemi [1] - [6] a je organizována následujícím způsobem. Nejprve zavedeme nutné pojmy, poté se budeme v podkapitole 1.1 věnovat vlastnostem Laplaceovy transformace. V podkapitole 1.2 se naučíme provádět zpětnou Laplaceovu transformaci a nakonec v podkapitole 1.3 poukážeme na aplikační příklady: řešení diferenciálních rovnic (i systémů), příklady z oblasti elektrotechniky a regulačních systémů.

Budeme uvažovat komplexní funkce f reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a komplexní proměnnou $p = x + iy \in \mathbb{C}$. Předpokládejme, že nevlastní integrál

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (1.1)$$

existuje a má konečnou hodnotu pro alespoň jedno p . Pak integrál (1.1) nazýváme *Laplaceův integrál funkce f* .

Příklad 1 Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$. Podle (1.1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\alpha} \right).$$

Jelikož $\alpha \in \mathbb{R}$, pro $p = x + iy$ platí $|e^{-p\alpha}| = e^{-x\alpha}$. Tedy pro $\operatorname{Re} p > 0$ platí $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-p\alpha} = 0$ a Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$ pro $\operatorname{Re} p > 0$ konverguje a je roven funkci $1/p$. Pro $\operatorname{Re} p \leq 0$ Laplaceův integrál neexistuje.

Příklad 2 Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$. Podle (1.1) máme

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt &= \int_0^\infty e^{at}e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha e^{(a-p)t} dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-p} e^{(a-p)\alpha} - \frac{1}{a-p} \right) = \frac{1}{p-a} \end{aligned}$$

pro $\operatorname{Re}(p-a) > 0$. Tedy Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$ konverguje pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$ k funkci $1/(p-a)$ a jinak diverguje.

Definice 1 *Bud' f komplexní funkce reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$. Bud' $M \subset \mathbb{C}$ množina všech p , pro než je Laplaceův integrál (1.1) konvergentní. Pak komplexní funkci F definovanou vztahem*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \quad (p \in M) \quad (1.2)$$

nazýváme Laplaceův obraz funkce f . Dané zobrazení, které přiřazuje funkci f její Laplaceův obraz F , nazýváme Laplaceova transformace a značíme

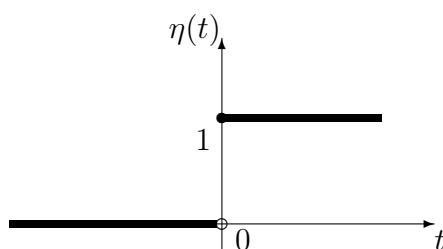
$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p).$$

Definice 2 *Funkci f nazýváme předmět (někdy také vzor, originál), jsou-li splněny následující podmínky:*

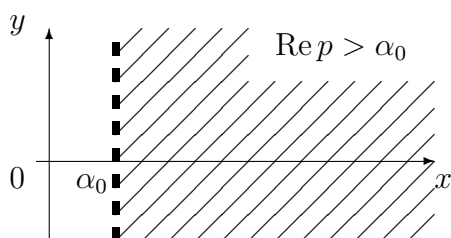
1. f je na $[0, \infty)$ po částech spojitá,
2. $f(t) = 0$ pro každé $t < 0$,
3. existuje reálné číslo $M > 0$ a α takové, že pro každé $t \in [0, \infty)$ platí

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}. \quad (1.3)$$

Definice 3 *Bud' $\alpha_0 = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ vyhovuje (1.3)}\}$. Číslo α_0 nazýváme index růstu předmětu f .*



Obrázek 1.1: Heavisidova funkce

Obrázek 1.2: Polorovina $\operatorname{Re} p > \alpha_0$

Důležitým příkladem předmětu je Heavisidova funkce zobrazená na obrázku 1.1, definovaná vztahem

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0, \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Věta 1 (o existenci Laplaceova obrazu) *Bud' f předmět s indexem růstu α_0 . Pak Laplaceův integrál*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} \, dt$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ (viz obrázek 1.1) absolutně a definuje Laplaceův obraz $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$, který je v té polorovině analytickou funkcí.

Důkaz: Nejprve dokažme absolutní konvergenci integrálu v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Existence integrálu $\int_0^\tau f(t)e^{-pt} \, dt$, pro každé $\tau > 0$, plyne z faktu, že $f(t)$ je

na $[0, \infty)$ po částech spojitá. Je-li $p = x + iy$ a $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, pak $|e^{-pt}| = e^{-xt}$. Z třetí podmínky na předmět pak pro každé α takové, že $x > \alpha > \alpha_0$ plyne

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{\alpha t}e^{-xt} = Me^{(\alpha-x)t}.$$

Tedy

$$\left| \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-pt}| dt \leq M \int_0^\infty e^{(\alpha-x)t} dt = \left[M \frac{e^{(\alpha-x)t}}{\alpha-x} \right]_0^\infty.$$

Jelikož $\alpha - x < 0$, je $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha-x)t} = 0$ a

$$\left| \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \frac{M}{x - \alpha}. \quad (1.5)$$

Tedy máme dokázáno, že Laplaceův integrál konverguje absolutně v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

Ukažme nyní, že F je analytická v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Bud' α_1 takové, že $x \geq \alpha_1 > \alpha > \alpha_0$. Pak z třetí podmínky na předmět máme

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{(\alpha-\alpha_1)t}.$$

Výraz pravé strany nerovnosti nezávisí na p a jelikož $\alpha - \alpha_1 < 0$, integrál

$$\int_0^\infty Me^{(\alpha-\alpha_1)t} dt$$

konverguje. Tedy Laplaceův integrál konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha_1$ stejnoměrně. Navíc platí

$$\frac{\partial}{\partial p}[f(t)e^{-pt}] = -tf(t)e^{-pt}$$

a

$$|-tf(t)e^{-pt}| \leq Mte^{(\alpha-\alpha_1)t},$$

kde

$$\int_0^\infty Mte^{(\alpha-\alpha_1)t} dt = \frac{M}{(\alpha - \alpha_1)^2}.$$

To znamená, že integrál

$$\int_0^\infty -tf(t)e^{-pt} dt$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha_1$.

Celkově tedy, Laplaceův integrál funkce f můžeme integrovat podle parametru p . To znamená, že funkce F je analytická v polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha_1 > \alpha_0$. Z libovůle α_1 pak plyne, že F je analytická v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. \square

Důsledek 1 Bud' $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $x = \operatorname{Re} p$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Důkaz: Tvzení plyne z formule (1.5) důkazu věty 1. □

Příklad 3 Nelezněme funkci $f(t)$ tak, aby její Laplaceův obraz byl roven funkci \sqrt{p} .

Prvně $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + iy} \neq 0$. Tedy podle předchozího Důsledku 1 funkce \sqrt{p} nemůže být Laplaceovým obrazem žádné funkce $f(t)$.

Důkaz následujícího tvrzení, které nám dává úplnou informaci o chování funkce F v okolí ∞ , překračuje rozsah tohoto textu a je možné ho nalézt například v [3].

Věta 2 (první limitní) Bud' f předmět s indexem růstu α_0 a $\alpha > \alpha_0$. Pak pro Laplaceův obraz F funkce f platí

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re} p \geq \alpha}} F(p) = 0.$$

1.1 Vlastnosti Laplaceovy transformace

V této podkapitole se budeme zabývat základními vlastnostmi Laplaceovy transformace. Formulujeme větu, která bude základním stavebním kamenem pro operátorový počet a uvedeme celou řadu příkladů k její ilustraci. Tyto příklady nám poskytnou velké množství obrazů funkcí, které jsou důležité a používané v praxi. Podkapitolu uzavřeme druhou a třetí limitní větou a Duhamelovým vzorcem.

Věta 3 (pravidla operátorového počtu) Nechť f_k jsou předměty, $\mathcal{L}(f_k(t)) = F_k(p)$ a $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$. Pak

I. linearita

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p),$$

II. podobnost

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0,$$

III. substituce v obrazu

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(p - a),$$

IV. derivace podle parametru

$$\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}, \text{ kde } \mathcal{L}(f(t, \lambda)) = F(p, \lambda),$$

V. posunutí

$$\mathcal{L}(f(t - \tau)\eta(t - \tau)) = e^{-\tau p}F(p),$$

VI. derivace předmětu

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1}f(0_+) - \dots - f^{(n-1)}(0_+),$$

kde f a její derivace až do řádu $n - 1$ jsou spojité a $f^{(i)}(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f^{(i)}(t)$,

VII. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p),$$

VIII. integrace předmětu

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) \, d\tau\right) = \frac{F(p)}{p},$$

IX. integrace obrazu

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^\infty F(z) \, dz = \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} \int_p^q F(z) \, dz,$$

kde $f(t)/t$ je předmět s indexem růstu α_0 , $\int_p^\infty F(z) \, dz$ existuje a graf integrační křivky $\int_p^\infty F(z) \, dz$ leží v $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

Důkaz:I. linearita

Z linearity integrálu máme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) &= \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \int_0^\infty f_k(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p),\end{aligned}$$

kde $\int_0^\infty f_k(t) e^{-pt} dt = F_k(p)$. Poznamenejme, že integrál

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) e^{-pt} dt$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, kde $\alpha_0 = \max_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_0^i\}$ a α_0^i je index růstu funkce f_i pro každé i .

II. podobnost

Podle (1.2) máme

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \int_0^\infty f(\lambda t) e^{-pt} dt.$$

Substituuje v pravé straně $u = \lambda t$, (tj. $dt = 1/\lambda du$), pak

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty f(u) e^{-pu/\lambda} du = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Zřejmě, je-li α_0 index růstu f závisující na t , pak $\lambda\alpha_0$ je index růstu f proměnné u .

III. substituce v obrazu

Podle (1.2) máme

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a),$$

kde $\int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t} dt$ konverguje pro $\operatorname{Re}(p-a) > \alpha_0$, α_0 je index růstu f .

IV. derivace podle parametru

Důkaz této části přesahuje náročnost tohoto textu, je možno jej nalézt v [3].

V. posunutí

Podle (1.2) máme

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)\eta(t-\tau)) = \int_0^\infty f(t-\tau)\eta(t-\tau)e^{-pt} dt.$$

Navíc $f(t-\tau)\eta(t-\tau) = 0$ pro každé $t \in (0, \tau)$, tedy

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)\eta(t-\tau)) = \int_\tau^\infty f(t-\tau)\eta(t-\tau)e^{-pt} dt.$$

Zavedeme-li substituci $t - \tau = u$, tak dostáváme

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)\eta(t-\tau)) = \int_0^\infty f(u)\eta(u)e^{-p(u+\tau)} du = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(u)e^{-pu} du,$$

celkově tedy

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)\eta(t-\tau)) = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = e^{-p\tau} F(p).$$

VI. derivace předmětuNejprve dokažme případ pro $i = 1$, tj.

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0_+).$$

Podle (1.2) máme

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt,$$

pro $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Poznamenejme, že je-li α_0 index růstu funkce f' , pak je také indexem růstu f . Počítejme nyní integrál na pravé straně metodou per partes, tedy pro $t \in (0, \infty)$ položme

$$\begin{aligned} u(t) &= f(t), & v(t) &= e^{-pt}, \\ u'(t) &= f'(t), & v'(t) &= -pe^{-pt}. \end{aligned}$$

Pak

$$\mathcal{L}(f'(t)) = [f(t)e^{-pt}]_0^\infty + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.6)$$

Jelikož $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ ($\alpha > \alpha_0$) pro každé p takové, že $\operatorname{Re} p > \alpha > \alpha_0$, pak platí

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{(\alpha - \operatorname{Re} p)t}.$$

Navíc $\lim_{t \rightarrow \infty} M e^{(\alpha - \operatorname{Re} p)t} = 0$ a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-pt} = 0. \quad (1.7)$$

Dosadíme-li (1.7) do (1.6) dostáváme

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0_+).$$

Pro libovolné n se důkaz provede matematickou indukcí.

VII. derivace obrazu

Z důkazu Věty 1 plyne, že

$$\int_0^\infty f(t) e^{-pt} \, dt$$

a

$$\int_0^\infty -t f(t) e^{-pt} \, dt$$

jsou rovnoměrně konvergentní v polovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$, kde α_0 je index růstu f . Laplaceův integrál funkce f můžeme derivovat podle parametru p , tedy je-li

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} \, dt = F(p),$$

pak

$$F'(p) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p} (f(t) e^{-pt}) \, dt = \int_0^\infty -t f(t) e^{-pt} \, dt.$$

Konečně, podle (1.2) máme

$$\mathcal{L}(-t f(t)) = F'(p).$$

VIII. integrace předmětu

Označme

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) \, d\tau\right) = G(p).$$

Zřejmě platí

$$g'(t) = f(t), \quad g(0) = 0.$$

Z vlastností derivování předmětu plyne

$$\mathcal{L}(g'(t)) = pG(p) - g(0_+).$$

Tedy

$$\mathcal{L}(f(t)) = pG(p).$$

Celkově tedy

$$G(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

IX. integrace obrazu

Buď $\mathcal{L}(f(t)/t) = G(p)$. Pak dle Věty 1 je funkce G analytická v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Jelikož

$$|G(p)| \leq \int_0^\infty \left| \frac{f(t)}{t} e^{-pt} \right| dt \leq M \int_0^\infty e^{-(\sigma - \alpha_0)t} dt = \frac{M}{\sigma - \alpha_0},$$

kde M je kladná konstanta a $\operatorname{Re} p = \sigma > \alpha_0$, máme

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} |G(p)| = 0. \quad (1.8)$$

Z vlastnosti derivace obrazu máme

$$\mathcal{L}(-f(t)) = G'(p)$$

a

$$F(p) = -G'(p).$$

Pak pro integrály funkcí F a $-G'$ máme

$$G(p) - G(q) = \int_p^q F(z) dz,$$

zde integrujeme po křivce s koncovými body p a q splňující podmínku $\operatorname{Re} q > \operatorname{Re} p > \alpha_0$.

Nyní stačí přejít v předchozím vzorci k limitě $\operatorname{Re} q = \sigma \rightarrow \infty$, uplatníme (1.8) a dostáváme

$$G(p) = \int_p^\infty F(z) dz.$$

□

Následující příklady 4 až 11 ukazují, jak použít vlastnosti z předchozí Věty 3.

Příklad 4 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t)$.

Podle Eulerových vzorců platí

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Položíme-li v Příkladu 2 parametr $a = \pm i\omega$ a navíc užijeme linearitu Věty 3, pak pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm i\omega) = |\operatorname{Im} \omega|$ dostáváme

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Příklad 5 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$. K výpočtu použijeme výsledek Příkladu 4 a vlastnosti substituce v obrazu Věty 3. Tedy pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + |\operatorname{Im} \omega|$ máme

$$\mathcal{L}(e^{at} \sin(\omega t)) = \frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}.$$

Příklad 6 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$. Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p - a}.$$

Využijme nyní vlastnosti derivace podle parametru z Věty 3 a derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p - a)^2}.$$

Další derivace mají tvar

$$\mathcal{L}(t^2 e^{at}) = \frac{2}{(p - a)^3},$$

$$\mathcal{L}(t^3 e^{at}) = \frac{3!}{(p - a)^4},$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(p - a)^{n+1}}.$$

Příklad 7 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \eta(t - \tau)$. Poznamenejme, že funkce f je posunutá Heavisidova funkce o τ , tedy

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < \tau, \\ 1, & \text{pro } t \geq \tau. \end{cases}$$

Z Příkladu 1 víme, že $\mathcal{L}(\eta(t)) = 1/p$. Nyní z vlastnosti posunutí Věty 3 plyne

$$\mathcal{L}(\eta(t - \tau)) = \frac{e^{-\tau p}}{p}.$$

Příklad 8 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$. Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

a z vlastnosti posunutí Věty 3 dostáváme

$$F(p) = \mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = \frac{1}{p^2 + 1} e^{-\varphi p}.$$

Celkově tedy

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{(p/\omega)^2 + 1} e^{-\varphi p/\omega} = \frac{\omega e^{-\varphi p/\omega}}{p^2 + \omega^2}.$$

Příklad 9 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$. Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$. Dále

$$(\sin^3(t))' = 3 \sin^2(t) \cos(t)$$

a

$$(\sin^3(t))'' = 6 \sin(t) \cos^2(t) - 3 \sin^3(t) = 6 \sin(t) - 9 \sin^3(t),$$

podle Příkladu 4 máme

$$\mathcal{L}((\sin^3(t))'') = \frac{6}{p^2 + 1} - 9 \mathcal{L}(\sin^3(t)) = \frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p). \quad (1.9)$$

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0+} = (\sin^3(t))'|_{t=0+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'' = p^2 F(p) - p \cdot 0 - 0 = p^2 F(p). \quad (1.10)$$

Nyní porovnejme (1.9) a (1.10), dostáváme

$$\frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p) = p^2 F(p),$$

tedy

$$F(p) = \frac{6}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}.$$

Příklad 10 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2}, \\ \mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) &= \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \, d\tau\right) = \frac{1}{p^3}, \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}\right) &= \mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \, d\tau\right) = \frac{1}{p^{n+1}}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Příklad 11 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Pak z vlastnosti integrování obrazu máme

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \int_p^\infty \frac{1}{z^2 + 1} \, dz = [\arctg(z)]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg(p) = \operatorname{arccotg}(p).$$

Věta 4 (druhá limitní) *Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá. Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a α_0 je index růstu funkce f' , pak*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0_+).$$

Důkaz: Z vlastnosti derivování předmětu Věty 3 plyne, že

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0_+).$$

Jelikož $f'(t)$ je předmět s indexem růstu α_0 , pak z Věty 2 vyplývá

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (pF(p) - f(0_+)) = 0$$

v polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$. Tedy

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0_+).$$

□

Věta 5 (třetí limitní) *Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá. Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq \infty$, pak*

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Důkaz: Víme, že

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0_+).$$

Pak podle (1.2) máme

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0_+). \quad (1.11)$$

Navíc platí

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt = \int_0^\infty \lim_{p \rightarrow 0} f'(t)e^{-pt} dt. \quad (1.12)$$

Pak z (1.11) a (1.12) plyne

$$\lim_{p \rightarrow 0} (pF(p) - f(0_+)) = \int_0^\infty f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0_+).$$

My však předpokládáme, že existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq \infty$, tedy

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

□

Definice 4 Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

a značíme

$$h = f * g.$$

Pokud jsou funkce f a g předměty, pak

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau,$$

což plyne z vlastnosti předmětu, tj. $f(\tau) = 0$ pro $\tau < 0$ a $g(t - \tau) = 0$ pro $t < \tau$. Důkaz následujících vlastností konvoluce je jednoduchý a přenecháváme jej čtenáři.

Věta 6 Konvoluce má následující vlastnosti:

1. komutativita: $f * g = g * f$,
2. asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. distributivita na sčítání $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,
4. $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.

Příklad 12 Najděte konvoluci předmětů $f(t) = t$ a $g(t) = \sin(t)$.

Postupujme podle definice, tedy

$$(f * g)(t) = \sin(t) * t = \int_0^t \sin(\tau)(t - \tau) d\tau = t - \sin(t).$$

Poznamenejme, že duhá rovnost platí díky předpokladu, že obě funkce jsou předměty (tj. $f(\tau) = 0$ pro $\tau < 0$ a $g(t - \tau) = 0$ pro $t < \tau$).

Věta 7 (násobení obrazů) Buďte f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$. Pak $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$ je index růstu funkce $h = f * g$. Navíc platí

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(p)G(p).$$

Důsledek 2 (Duhamelův vzorec) *Bud' f a g předměty, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$. Bud' f' předmět a f je spojitá funkce na intervalu $[0, \infty)$. Pak*

$$pF(p)G(p) = \mathcal{L}(f(0_+)g(t) + (f' * g)(t)).$$

Příklad 13 Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Položme

$$F(p) = G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Nyní použijeme Větu 7

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 1)^2} &= F(p)G(p) = \mathcal{L}(\sin(t) * \sin(t)) = \\ &= \int_0^t \sin(\tau) \sin(t - \tau) \, d\tau = 1/2 \sin(t) - 1/2 t \cos(t). \end{aligned}$$

Věta 8 *Bud' f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$. Pak*

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(p-z) \, dz,$$

kde $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a + \alpha_0$ a $\alpha_0 < a$.

Symbolem $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$ rozumíme limitu $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-ib}^{a+ib}$ a v integrálu \int_{a-ib}^{a+ib} integrujeme po integrační křivce $z = a + it$, $t \in [-b, b]$, zde $0 < b \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$ volíme tak, aby $\alpha_0 < a$. Důkaz Vět 7 a 8 vynecháváme, je možné je nalézt v [2].

Příklad 14 Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Z příkladů 4 a 2 víme, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

a

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p-1}.$$

Navíc, $\alpha_0^f = 0$, $\alpha_0^g = 1$ a $\alpha_0 = \max\{0, 1\} = 1$. Pak dle Věty 8

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z^2+1} \frac{1}{(p-z)-1} dz,$$

kde $a > 1$ a $\operatorname{Re} p > a + 1$. Pak dle základní věty o reziduích integrál dopočítáme

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = -\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2+1} \frac{1}{(p-z)-1} \right]_{z=p-1} = \frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

1.2 Zpětná Laplaceova transformace

V předchozí podkapitole jsme se zabývali výpočtem Laplaceova obrazu F k zadanému předmětu f . Laplaceovu transformaci jsme definovali jako zobrazení

$$\mathcal{L} : P \rightarrow O,$$

které přiřadí předmětu množiny P jeho obraz množiny O . Zkoumejme nyní inverzní operaci, inverzní zobrazení, *zpětnou Laplaceovu transformaci*

$$\mathcal{L}^{-1} : O \rightarrow P,$$

která přiřadí dané komplexní funkci komplexní proměnné F předmět f , pro který platí $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$.

K tomu je zapotřebí zodpovědět otázky:

OT1: existence zpětné Laplaceovy transformace,

OT2: identifikovat definiční obor \mathcal{L}^{-1} .

Částečnou odpověď na otázku OT1 dává následující věta:

Věta 9 (Lerch) *Bud'te $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f = g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.*

Poznamenejme, že podmínka na izolované body z Lerchovy věty není nikterak omezující, v praxi nám na hodnotách v izolovaných bodech nezáleží.

K řešení otázky OT2 je zřejmé, že F musí splňovat nutné podmínky Laplaceova obrazu F předmětu f . Tj.

1. existuje $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ takové, že F je v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ analytická,
2. v libovolné polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$ platí $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Věta 10 *Bud' F analytická v \mathbb{C} s výjimkou konečného počtu singulárních bodů $a_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Nechť pro každé $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a > \max_{i=1,2,\dots,n} \{|a_i|\}$, platí:*

1. *existuje posloupnost kružnic k_i se středem v 0 a poloměry R_i , pro které platí $|a| < R_1 < \dots < R_n < \dots$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ tak, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p \in k_n} \{|F(p)|\} = 0,$$

2. *integrál $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} |F(p)| \, dp$ má konečnou hodnotu.*

Pak na \mathbb{R} existuje spojitý předmět f , který je určen předpisem

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} & \text{pro } t > 0, \\ 0 & \text{pro } t \leq 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Poznámka 1 Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (1.13) počítají v singularitách funkce $F(p)e^{pt}$. Funkce e^{pt} je však analytická v \mathbb{C} , tedy rozhodující jsou pro výpočet rezidua funkce $F(p)$.

Pokud je například a_i jednoduchý pól, pak podle pravidel pro počítání reziduí je

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} = e^{a_i t} \operatorname{Res}[F(p)]_{p=a_i}.$$

Pokud je a_i pól násobnosti 2, dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} &= \lim_{p \rightarrow a_i} \frac{d}{dp} [(p - a_i)^2 F(p)e^{pt}] = \\ &= \operatorname{Res}[F(p)]_{p=a_i} e^{a_i t} + \lim_{p \rightarrow a_i} [(p - a_i)^2 F(p)] t e^{a_i t}. \end{aligned}$$

Všimli jsme si, že podstatnou roli hrají obrazy F , jež mají racionální tvar, viz Příklady 4 - 11. Zabývejme se tedy nyní zpětnou Laplaceovou transformací funkcí tvaru

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad (1.14)$$

kde $P(p)$ a $Q(p)$ jsou polynomy nad oborem komplexních čísel.

Věta 11 Funkce (1.14) je Laplaceův obraz nějakého předmětu právě tehdy, pokud $\text{st}(P(p)) < \text{st}(Q(p))$.

Důkaz: Prvně, v polorovině $\text{Re } p \leq \alpha$ platí

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{P(p)}{Q(p)} = 0.$$

Což nastává jedině v případě $\text{st}(P(p)) < \text{st}(Q(p))$ (st označuje stupeň polynomu).

Na druhou stranu, nechť $\text{st}(P(p)) < \text{st}(Q(p))$. To znamená, že existuje rozklad pravé strany (1.14) na parciální zlomky nad polem komplexních čísel

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{r_k} \frac{P_{kl}}{(p - a_k)^l}, \quad (1.15)$$

kde $P_{kl} \in \mathbb{C}$, r_k je násobnost kořenu a_k polynomu $Q(p)$ a m je počet různých nulových bodů polynomu $Q(p)$.

Z Příkladu 6 víme, že

$$\mathcal{L} \left(\frac{t^{l-1}}{(l-1)!} e^{a_k t} \right) = \frac{1}{(p - a_k)^l}.$$

Díky linearitě Laplaceovy transformace a (1.15) máme pro $t > 0$

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \mathcal{L} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{r_k} \frac{P_{kl} t^{l-1}}{(l-1)!} e^{a_k t} \right).$$

Pak z Věty 9 plyne

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{r_k} \frac{P_{kl} t^{l-1}}{(l-1)!} e^{a_k t} & \text{pro } t > 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

□

Z důkazu předchozí věty plyne

Věta 12 (druhá věta o rozkladu) Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 15 Určete předmět funkce $F(p) = \frac{p+1}{p^2-p}$.

K výpočtu použijeme úvah Poznámky 1. Funkce F má dva jednoduché póly 0 a 1. Máme tedy

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=0} = -1, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = 2e^t.$$

Pak podle vzorce (1.13) Věty 10 máme pro $t > 0$

$$f(t) = -1 + 2e^t.$$

Příklad 16 Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu, tedy použijeme úvah Poznámky 1. Funkce F má tři jednoduché póly $-1, \pm i$ a pól třetího řádu 1. Máme tedy

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-1} = -1/16 e^{-t}, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=i} = 1/8 e^{it}$$

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-i} = -1/8 e^{-it}, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = \frac{2t^2 - 6t + 5}{2} e^t.$$

Pak podle vzorce (1.13) Věty 10 máme pro $t > 0$

$$f(t) = -1/16 e^{-t} + 1/8 e^{it} - 1/8 e^{-it} + \frac{2t^2 - 6t + 5}{2} e^t.$$

Tabulka 1.1: Laplaceovy transformace některých funkcí

| Předmět | Obraz |
|----------|-----------------|
| 1 | $\frac{1}{p}$ |
| e^{at} | $\frac{1}{p-a}$ |

Tabulka 1.1: Laplaceovy transformace některých funkcí

| Předmět | Obraz |
|--------------------------------|---|
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ |
| $\sinh(\omega t)$ | $\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$ |
| $\cosh(\omega t)$ | $\frac{p}{p^2 - \omega^2}$ |
| $e^{at} \sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}$ |
| $e^{at} \cos(\omega t)$ | $\frac{p - a}{(p - a)^2 + \omega^2}$ |
| $t^n, n \in \mathbb{N}$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ |
| $t^n e^{at}, n \in \mathbb{N}$ | $\frac{n!}{(p - a)^{n+1}}$ |
| $t \sin(\omega t)$ | $\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$ |
| $t \cos(\omega t)$ | $\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$ |

1.3 Aplikace Laplaceovy transformace

Řešení diferenciálních rovnic

Uvažujme Cauchyho úlohu pro lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) a počátečními podmínkami

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f, \quad (1.16)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (1.17)$$

Dále předpokládejme, že pravá strana rovnice f a řešení x včetně jejich derivací až do řádu n jsou předměty. Za těchto podmínek můžeme danou úlohu řešit Laplaceovou transformací.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že počáteční podmínky jsou dány v bodě $t_0 = 0$, tedy

$$x(0_+) = x_0, \quad x'(0_+) = x'_0, \dots, \quad x^{(n-1)}(0_+) = x_0^{(n-1)}. \quad (1.18)$$

Označme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$ a $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$. Pak rovnici (1.16) můžeme přepsat do tvaru (Věta 3)

$$\begin{aligned} & [p^n X(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x'_0 \dots - x_0^{(n-1)}] + \\ & a_1 [p^{n-1} X(p) - p^{n-2} x_0 - p^{n-3} x'_0 \dots - x_0^{(n-2)}] + \\ & \vdots \\ & a_{n-1} [p X(p) - x_0] + \\ & a_n X(p) = F(p). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Po úpravách dostáváme

$$X(p) = \frac{F(p) - P(p)}{Q(p)}, \quad (1.20)$$

kde $Q(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ je charakteristický polynom rovnice (1.16) a stupeň polynomu P je nejvýše $(n-1)$.

Nyní stačí najít k funkci X předmět x . Takovýto předmět je pak podle jednoznačnosti zpětné Laplaceovy transformace (Věta 9) řešením diferenciální rovnice (1.16) na intervalu $(0, \infty)$.

Poznámka 2

1. Výše popsaný postup se nazývá *operátorová metoda*.
2. Rovnice (1.19) se nazývá *operátorová*.
3. Výhodou operátorové metody je jednoduchost operací při řešení.
4. Řešením dostáváme rovnou partikulární řešení (pokud nejsou počáteční podmínky známy, dostáváme řešení obecné).

Příklad 17 Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' - 2x' + x = 4, \\ x(0_+) = 0, \quad x'(0_+) = 1. \end{cases} \quad (1.21)$$

Budeme postupovat výše popsanou operátorovou metodou. Tedy položíme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$, pak

$$\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p),$$

$$\mathcal{L}(x''(t)) = p^2X(p) - 1.$$

Dále $\mathcal{L}(4) = 4/p$, $\operatorname{Re} p > 0$. Odpovídající operátorová rovnice má tvar

$$p^2X(p) - 1 - 2pX(p) + X(p) = 4/p.$$

Vyjádříme $X(p)$

$$X(p) = \frac{p+4}{p(p-1)^2}, \quad \operatorname{Re} p > 1.$$

Po rozkladu na parciální zlomky dostáváme

$$X(p) = \frac{4}{p} - \frac{4}{p-1} + \frac{5}{(p-1)^2}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací získáme pro $t \geq 0$ řešení

$$x(t) = 4 - 4e^t + 5te^t.$$

Ve výše popsaném postupu je možno se vyhnout rozkladu na parciální zlomky. Stačí si všimnout, že funkce

$$X(p) = \frac{p+4}{p(p-1)^2}$$

má v bodě 0 jednoduchý pól a v bodě 1 dvojnásobný pól a použít postup popsany v Kapitole 1.2 (viz Věta 10 a Příklad 16). Pak podle známých vzorců pro výpočet reziduí dostáváme

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[X(p)e^{pt}]_{p=0} &= 4, \\ \operatorname{Res}[X(p)e^{pt}]_{p=1} &= 5te^t - 4e^t.\end{aligned}$$

Na základě zpětné Laplaceovy transformace dostáváme řešení

$$x(t) = 4 - 4e^t + 5te^t.$$

Příklad 18 Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' + 4x = 2 \cos(2t), \\ x(0_+) = 0, \quad x'(0_+) = 4. \end{cases} \quad (1.22)$$

Budeme postupovat výše popsanou operátorovou metodou. Tedy položíme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$, pak

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x'(t)) &= pX(p), \\ \mathcal{L}(x''(t)) &= p^2X(p) - 4.\end{aligned}$$

Dále $\mathcal{L}(2 \cos(2t)) = 2p/(p^2 + 4)$. Odpovídající operátorová rovnice má tvar

$$(p^2 + 4)X(p) - 4 = \frac{2p}{p^2 + 4}.$$

Vyjádríme $X(p)$, po rozkladu na parciální zlomky

$$X(p) = \frac{4}{p^2 + 4} + \frac{2p}{(p^2 + 4)^2}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$x(t) = 1/2 (4 + t) \sin(2t).$$

Příklad 19 Nespojité pravé strany

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0_+) = 1, \quad x'(0_+) = -1, \end{cases} \quad (1.23)$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{pro } t > 1. \end{cases} \quad (1.24)$$

Postupujeme podobně jako u předchozích příkladů. Položme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$, pak

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x'(t)) &= pX(p) - 1, \\ \mathcal{L}(x''(t)) &= p^2X(p) - p + 1.\end{aligned}$$

Dále $\mathcal{L}(f(t))$ je možno počítat přímo z definice (1.2):

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = \int_0^1 e^{-pt} dt = \frac{1}{p}(1 - e^{-p}). \quad (1.25)$$

Nebo si stačí všimnout, že $f(t) = \eta(t) - \eta(t-1)$ a podle vlastnosti posunutí Věty 3 opět dostáváme (1.25). Odpovídající operátorová rovnice má tvar

$$(p^2 + 1)X(p) - p + 1 = \frac{1}{p}(1 - e^{-p}).$$

Vyjádříme $X(p)$, po rozkladu na parciální zlomky

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{(p^2 + 1)} - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) e^{-p}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$x(t) = (1 - \sin(t))\eta(t) - (1 - \cos(t))\eta(t-1)$$

nebo bez užití $\eta(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \sin(t), & t \in [0, 1), \\ \cos(t) - \sin(t), & t \geq 1. \end{cases}$$

Příklad 20 Posunuté počáteční podmínky

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' + 3x' + 5x = e^t, \\ x(1_+) = 1, x'(1_+) = 1. \end{cases} \quad (1.26)$$

Protože počáteční podmínky nejsou dány v bodě $t_0 = 0$, musíme provést substituci $t = \tau + 1$ a $x(t) = x(\tau + 1) = y(\tau)$. Nová rovnice má tvar

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 5y = e^{\tau+1}, \\ y(0_+) = 1, y'(0_+) = 1. \end{cases} \quad (1.27)$$

Tedy polořme $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$, pak

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y'(\tau)) &= pY(p) - 1, \\ \mathcal{L}(y''(t)) &= p^2Y(p) - p - 1.\end{aligned}$$

Dále

$$\mathcal{L}(e^{\tau+1}) = e \mathcal{L}(e^\tau) = e \frac{1}{p-1}.$$

Vyjádříme $Y(p)$ po rozkladu na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{1}{6} \frac{e}{p-1} + \frac{-1+e/2}{p+1} + \frac{2+e/3}{p+2}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme pro $\tau \geq 0$ řešení

$$y(\tau) = e/6 e^\tau + (-1+e/2) e^{-\tau} + (2+e/3) e^{-2\tau}.$$

Zpětnou substitucí $\tau = t-1$ a $y(\tau) = x(t)$ dostáváme pro $t \geq 1$ řešení

$$x(t) = e/6 e^{t-1} + (-1+e/2) e^{1-t} + (2+e/3) e^{2-2t}.$$

Příklad 21 Řeřme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{cases} x' - x + y = 2, \\ x - y' - y = e^t, \\ x(0_+) = 1, \quad x'(0_+) = 1. \end{cases} \quad (1.28)$$

Polořme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$ a $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$, pak $\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - 1$ a $\mathcal{L}(y'(t)) = pY(p) - 1$. Odpovídající operátorový systém má tvar

$$\begin{cases} (p-1)X(p) + Y(p) = \frac{p+2}{p}, \\ X(p) - (p+1)Y(p) = -\frac{p}{p-1}. \end{cases} \quad (1.29)$$

Po úpravě a rozkladu na parciální zlomky

$$\begin{cases} X(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}, \\ Y(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}. \end{cases} \quad (1.30)$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t + e^t, \\ y(t) = t^2 - t + 1. \end{cases} \quad (1.31)$$

Úlohy z elektrotechniky

Uvažujme nejprve jednoduchý oscilační obvod znázorněný na obrázku 1.3 popsaný integro-diferenciální rovnicí

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = u(t), \quad (1.32)$$

kde L , R , C jsou po řadě konstanty indukce, odporu a kapacity. Dále u je elektromotorické napětí a i je proud.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že celým obvodem na počátku neprochází proud. Tato počáteční podmínka odpovídá situaci zapínání. Tedy, obvodem neprochází proud a $i(0_+) = 0$. Dále poslední člen levé strany (1.32) představuje napětí na deskách kondenzátoru, na počátku je nulové.

Označme $\mathcal{L}(i(t)) = I(p)$ a $\mathcal{L}(u(t)) = U(p)$, funkce $I(p)$ a $U(p)$ se nazývají *operátorový proud* resp. *operátorové napětí*. Potom z vlastnosti derivování předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}\left(\frac{di(t)}{dt}\right) = pI(p),$$

z vlastnosti integrování předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t i(\tau) d\tau\right) = \frac{I(p)}{p}.$$

Přepíšeme rovnici (1.32) do operátorového tvaru

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{I(p)}{Cp} = U(p),$$

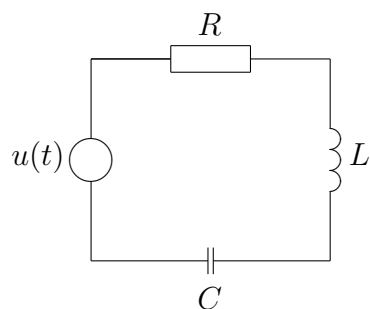
po úpravě

$$I(p) = \frac{U(p)}{Lp + R + \frac{1}{Cp}} = \frac{U(p)}{Z(p)}, \quad (1.33)$$

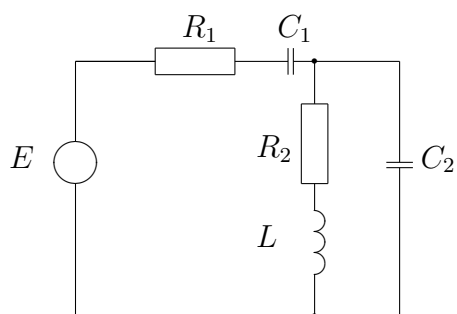
kde $Z(p)$ je operátorová impedance okruhu. Vzorec (1.33) nazýváme *operátorový tvar Ohmova zákona*.

Závěrem, zpětnou Laplaceovou transformací pak z (1.33) určíme proud okruhu i .

Příklad 22 Nalezněme operátorovou impedanci a operátorový proud protékající sítí znázorněné na obrázku 1.4.



Obrázek 1.3: Oscilační okruh



Obrázek 1.4: Oscilační okruh

Nejprve, pro operátorové impedance platí:

větev I. se skládá z odporu R_1 a kapacity C_1 , a platí $Z_1 = R_1 + \frac{1}{C_1 p}$,

větev II. se skládá z odporu R_2 a indukčnosti L , a platí $Z_2 = R_2 + Lp$,

větev III. se skládá z kapacity C_2 , a platí $Z_3 = \frac{1}{C_2 p}$.

Větve II a III jsou zapojeny paralelně, tedy jejich výsledná impedance má tvar

$$\frac{1}{Z_4} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}.$$

Dále můžeme uvažovat obvod jako sériově zapojené operátorové impedance Z_1 a Z_4 . Tedy

$$Z = Z_1 + Z_4 = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Po dosazení a užití druhého Kirchhova zákona $U(p) = E/p$ dostáváme

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{E}{p} \frac{R_2 + Lp + \frac{1}{C_2 p}}{\left(R_1 + \frac{1}{C_1 p}\right) \left(R_2 + Lp + \frac{1}{C_2 p}\right) + (R_2 + Lp) \frac{1}{C_2 p}},$$

zde v uvažovaném oscilačním okruhu uvažujeme zapojené konstantní elektromotorické napětí $u = E$.

Úlohy z regulačních systémů

Regulační systém si lze představit jako černou skříňku (viz Obrázek 1.5) a jeho vlastnosti lze popsat pomocí reakcí výstupů na vstupní signály. Dynamické vlastnosti regulačních systémů jsou určeny vztahy mezi výstupními a vstupními veličinami. Dynamické vlastnosti takovýchto systémů budeme popisovat v časové závislosti pomocí lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t),$$

kde $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ a $m \leq n$ je podmínka realizovatelnosti systému.

Časové posunutí signálu lze popsat jako dopravní zpoždění

$$y(t) = u(t - T_d).$$



Obrázek 1.5: Regulační systém jako černá skříňka

Přenosovou funkci daného systému určíme jako poměr obrazu výstupní veličiny k obrazu vstupní veličiny vzhledem k Laplaceově transformaci za předpokladu nulových počátečních podmínek

$$y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0.$$

Přenosová funkce pak má tvar racionální lomenné funkce

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{b_m(p - n_1)(p - n_2) \dots (p - n_m)}{a_n(p - k_1)(p - k_2) \dots (p - k_n)},$$

kde k_i jsou póly přenosu a n_j jsou nuly přenosu.

Impulsní charakteristiku používáme pro popis časové závislosti daného regulačního systému, kterou lze získat jako odezvu na vstupní signál tvaru Diracova impulsu při nulových počátečních podmínkách. Impulsní charakteristiku $f(t)$ dostáváme po zpětné Laplaceově transformaci

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t).$$

Příklad 23 Nalezněme impulsní charakteristiku přenosové funkce

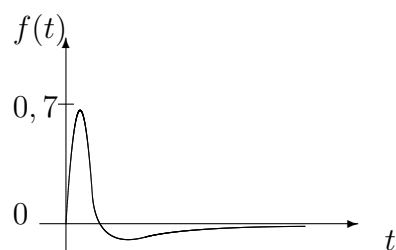
$$F(p) = \frac{5p + 3}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}.$$

Danou funkci rozložíme na parciální zlomky

$$F(p) = \frac{-1}{p+1} + \frac{7}{p+2} - \frac{6}{p+3}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme impulsní charakteristiku (viz Obrázek 1.6) pro $t > 0$

$$f(t) = -e^{-t} + e^{-2t} - 6e^{-3t}.$$



Obrázek 1.6: Impulsní charakteristika systému

Literatura

- [1] Galajda, P. - Schrötter, Š. - *Funkcie komplexnej premennej a operátorový počet*. Vydavateľstvo Alfa, Bratislava, 1991.
- [2] Jevgarov, M., A., - *Funkce komplexní proměnné*. SNTL Nakladatelství technické literatury, Praha, 1981.
- [3] Pírko, Z. - Veit, J. - *Lamplaceova transformace*. SNTL Nakladatelství technické literatury, Praha, Bratislava, 1970.
- [4] Rektorys, K. a spolupracovníci - *Přehled užití matematiky*. SNTL Nakladatelství technické literatury, 1981.
- [5] Srovnal, V. - *Analýza regulačních systémů*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2004.
- [6] Srovnal, V. - *Regulační systémy II*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2005.
- [7] Stein, E., M. - Shakarchi, R. - *Complex analysis*. Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2003.