A **Príklad 2:**
Zostavte postupnosť pokutových funkcií pre nasledujúcu úlohu a pomocou **metódy pokutových funkcií** kombinovanej **s gradientovou metódou s najväčším poklesom.** Nájdite body $\boldsymbol{x}^1$ a $\boldsymbol{x}^2$ minimalizačnej postupnosti v E_2.

<u>Úloha</u>: Nájdite v E_2 bod čo najmenej vzdialený od bodu $\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$ tak, aby vzdialenosť hľadaného bodu od počiatku súradníc nebola väčšia ako 2. Počiatočný bod nech je $\boldsymbol{x}^0 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

Riešenie 2a (*gradientová metóda maximálneho poklesu s metódou pokutových funkcií*)**:**

V E_2 hľadáme bod $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, teda: Min $f(\boldsymbol{x})= \sqrt{x_1^2+(x_2-4)^2}$

Za podm. $\sqrt{x_1^2+x_2^2} \le 2$

Z účelovej funkcie možno odstrániť odmocninu, podmienku upravíme, teda:

Min $f(\boldsymbol{x})= x_1^2+(x_2-4)^2$

Za podm. $x_1^2+x_2^2 \le 2^2$

Postupnosť pokutových funkcií pre podmienku:

$$P_i=\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{4}\right)^i$$

Upravená úloha, ktorú budeme riešiť:
Gradientovou metódou s najväčším poklesom budeme teda minimalizovať postupnosť funkcií f_i, pre i=0, 1, 2, ...

$$\text{Min } f_i(\boldsymbol{x})= x_1^2+(x_2-4)^2+\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{4}\right)^i, \text{ východiskový bod } \boldsymbol{x}^0 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} .$$

Postup riešenia:

$\boldsymbol{x}^{i+1}= \boldsymbol{x}^i + \alpha_i \boldsymbol{h}^i$ iteračná postupnosť pre $i=0, 1, ...$

V gradientovej metóde najväčšieho poklesu je smer minimalizácie rovný antigradientu, t.j. $\boldsymbol{h}^i = - f_i'(\boldsymbol{x}^i)$ a iteračná postupnosť bude:

$\boxed{\boldsymbol{x}^{i+1}= \boldsymbol{x}^i - \alpha_i f_i'(\boldsymbol{x}^i)}$ pre i=0, 1, ...

$i = 0$

$\boldsymbol{x}^1= \boldsymbol{x}^0 - \alpha_0 f_0'(\boldsymbol{x}^0)$, $f_0(\boldsymbol{x})= x_1^2+(x_2-4)^2+\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{4}\right)^0$, gradient: $f_0'(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2-8\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{x}^1= \boldsymbol{x}^0 - \alpha_0 f_0'(\boldsymbol{x}^0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\alpha_0\begin{pmatrix}2*1\\2*1-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\alpha_0\\1+6\alpha_0\end{pmatrix}$$

α_0 volíme tak, aby funkcia f_0 klesla v bode $x^1=\begin{pmatrix}1-2\alpha_0\\1+6\alpha_0\end{pmatrix}$ čo najviac. Dosadíme bod $\boldsymbol{x}^1$ do funkcie a analyticky hľadáme minimum podľa premennej α_0:

$$g_0(\alpha_0) = f_0\left(\begin{pmatrix}1-2\alpha_0\\1+6\alpha_0\end{pmatrix}\right) = (1-2\alpha_0)^2+(1+6\alpha_0-4)^2$$

g_0 zderivujeme podľa α_0 a 1. deriváciu položíme = 0:

$$g_0'(\alpha_0) = -4*(1-2\alpha_0)+2*6*(6\alpha_0-3) = -4+8\alpha_0+72\alpha_0-36 = 80\alpha_0-40$$

$$g_0'(\alpha_0) = 80\alpha_0-40=0 \Leftrightarrow \alpha_0=0.5$$

$$\mathbf{x}^1=\begin{pmatrix}1-2\alpha_0\\1+6\alpha_0\end{pmatrix}_{\alpha_0=0.5}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

$i = 1$

$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1 - \alpha_1 f_1'(\boldsymbol{x}^1)$, $\quad f_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + (x_2-4)^2 + \left(\frac{x_1^2+x_2^2}{4}\right)^1$, gradient: $f_1'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + \frac{x_1}{2} \\ 2x_2 - 8 + \frac{x_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5x_1}{2} \\ \frac{5x_2}{2} - 8 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1 - \alpha_1 f_1'(\boldsymbol{x}^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 - 2\alpha_1 \end{pmatrix}$

α_1 volíme tak, aby funkcia f_1 klesla v bode $x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 - 2\alpha_1 \end{pmatrix}$ čo najviac. Dosadíme bod $\boldsymbol{x}^2$ do funkcie a analyticky

hľadáme minimum podľa premennej α_1:

$$g_1(\alpha_1) = f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 - 2\alpha_1 \end{pmatrix}\right) = 0^2 + (4 - 2\alpha_1 - 4)^2 + \frac{0^2 + (4-2\alpha_1)^2}{4} = 4\alpha_1^2 + (2-\alpha_1)^2$$

g_1 zderivujeme podľa α_0 a 1. deriváciu položíme = 0:

$$g_1'(\alpha_1) = 8\alpha_1 + 2 * (-1) * (2 - \alpha_1) = 8\alpha_1 - 4 + 2\alpha_1 = 10\alpha_1 - 4$$

$$g_1'(\alpha_1) = 10\alpha_1 - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0.4$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 - 2\alpha_1 \end{pmatrix}_{\alpha_0 = 0.4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

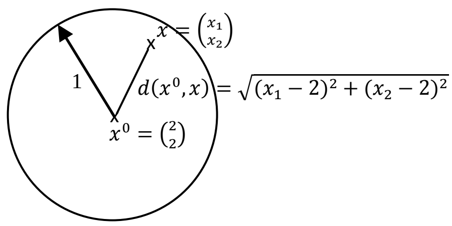
C **Príklad 3:**

Nájdite body $\boldsymbol{x}^1$ a $\boldsymbol{x}^2$ minimalizačnej postupnosti v E_2 pre danú úlohu pomocou metódy **projekcie** kombinovanej s **Powellovou** metódou. Za zásobník smerov považujte množinu $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

<u>Úloha</u>: Nájdite bod v E_2 bod s minimálnou hodnotou funkcie $2x_1^2 + x_2^2$, ktorý nie je od bodu $\boldsymbol{x}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ vzdialený viac ako 1! Uveďte model úlohy.

Riešenie 3c (*Powellova metóda s projekciou*)**:**

V E_2 hľadáme bod $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, teda:



Min $f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2$

Za podm. $\sqrt{(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2} \leq 1$

Podmienku upravíme, teda:

Min $f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2$

Za podm. $(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 \leq 1$

Východiskový bod je $x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Postup riešenia:

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^i + \alpha_i \boldsymbol{h}^i$ iteračná postupnosť pre $i = 0, 1, \ldots$ $\boldsymbol{x}^{i+1}$ bude projekcia bodu $\boldsymbol{x}$ do množiny danej podmienkou (kruh s polomerom 1 a so stredom v bode $(2, 2)^T$).

V Powellovej metóde smer minimalizácie odhadujeme pomocou smerov z množiny S.

i = 0

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{0} + \alpha_0\, \boldsymbol{h}^{0}$, $\quad f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2$

$\boldsymbol{x} = \binom{2}{2} + \alpha_0 \binom{-2}{-2} = \binom{2-2\alpha_0}{2-2\alpha_0}$

α_0 volíme tak, aby funkcia f klesla v bode $x = \binom{2-2\alpha_0}{2-2\alpha_0}$ čo najviac. Dosadíme bod $\boldsymbol{x}$ do funkcie a analyticky hľadáme minimum podľa premennej α_0:

$g_0(\alpha_0) = f\left(\binom{2-2\alpha_0}{2-2\alpha_0}\right) = 2(2-2\alpha_0)^2 + (2-2\alpha_0)^2$

g_0 zderivujeme podľa α_0 a 1. Deriváciu položíme = 0:

$g_0'(\alpha_0) = (-8)(2-2\alpha_0) + (-4)(2-2\alpha_0) = (-12)(2-2\alpha_0)$

$g_0'(\alpha_0) = 0$ práve vtedy, keď α_0=1

$\boldsymbol{x} = \binom{2-2\alpha_0}{2-2\alpha_0} = \binom{0}{0}$

Bod $\boldsymbol{x}$ nevyhovuje podmienke $(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 \le 1$, pretože neplatí 4+4 ≤ 1. Musíme preto urobiť projekciu bodu $\boldsymbol{x}$ do množiny $(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 \le 1$ a tú získame ako priesečník kružnice $(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 = 1$ a priamky, ktorá precjádza bodom $\boldsymbol{x} = \binom{0}{0}$ a stredom kružnice v bode $x^0 = \binom{2}{2}$.

Teda vyriešime sústavu rovníc:

$(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 = 1$

$x_1 = x_2$

Riešenie sústavy je: $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $x_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, a teda

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Aktualizujeme zásobník smerov: $S = \left\{\binom{0}{1}, \binom{-2}{-2}\right\}$

Odhad smeru $\boldsymbol{h}^0$: $\boldsymbol{h}^0 = \boldsymbol{y}^{02} - \boldsymbol{y}^{00}$

$\boldsymbol{y}^{00} = \boldsymbol{x}^0 = \binom{2}{2}$

$\boldsymbol{y}^{01} = \boldsymbol{y}^{00} + \beta_0 \binom{1}{0} = \binom{2+\beta_0}{2}$

β_0 volíme tak, aby funkcia f klesla v bode $\boldsymbol{y}^{01} = \binom{2+\beta_0}{2}$ čo najviac. Dosadíme bod $\boldsymbol{y}^{01}$ do f a analyticky hľadáme minimum podľa premennej β_0:

$g_0(\beta_0) = f\left(\binom{2+\beta_0}{2}\right) = 2(2+\beta_0)^2 + 2^2$

g_0 zderivujeme podľa β_0 a 1. deriváciu položíme = 0:

$g_0'(\beta_0) = 2 * 2 * (2+\beta_0)$

$g_0'(\beta_0) = 0$ práve vtedy, keď $\beta_0 = -2$, teda $\boldsymbol{y}^{01} = \binom{2-2}{2} = \binom{0}{2}$.

Keďže druhá deriv. $g_0''(\beta_0) = 4 > 0$, tak v $\beta_0 = -2$ má funkcia g minimum.

Pozn.: $\boldsymbol{y}^{01}$ je minimum funkcie g. Nachádza sa na priamke, ktorá prechádza bodom $\boldsymbol{y}^{00} = \boldsymbol{x}^0 = \binom{2}{2}$ v smere $\binom{1}{0}$ (t.j. v našom príklade $\boldsymbol{y}^{01}$ leží na priamke, ktorá prechádza bodom $\boldsymbol{y}^{00} = \boldsymbol{x}^0$ a je rovnobežná s osou x_1.)

$\boldsymbol{y}^{02} = \boldsymbol{y}^{01} + \beta_1 \binom{0}{1} = \binom{0}{2} + \binom{0}{\beta_1} = \binom{0}{2+\beta_1}$

β_1 volíme tak, aby funkcia f klesla v bode $\boldsymbol{y}^{02} = \binom{0}{2+\beta_1}$ čo najviac. Dosadíme bod $\boldsymbol{y}^{02}$ do f a analyticky hľadáme minimum podľa premennej β_1:

$g_1(\beta_1) = f\left(\binom{0}{2+\beta_1}\right) = 2 * 0^2 + (2+\beta_1)^2 = (2+\beta_1)^2$

g_1 zderivujeme podľa β_1 a 1. deriváciu položíme = 0:

$g_1'(\beta_1) = 2 * (2+\beta_1)$

$g_1'(\beta_1) = 0$ práve vtedy, keď $\beta_1 = -2$, teda $\boldsymbol{y}^{02} = \binom{0}{2-2} = \binom{0}{0}$.

Pozn.: $\boldsymbol{y}^{02}$ je minimum funkcie f také, že sa nachádza na priamke, ktorá prechádza bodom $\boldsymbol{y}^{01} = \binom{0}{2}$ v smere $\binom{0}{1}$ (t.j. v našom príklade $\boldsymbol{y}^{02}$ leží na priamke, ktorá prechádza bodom $\boldsymbol{y}^{01}$ a je rovnobežná s osou x_2.)

i = 1

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{1} + \alpha_1\, \boldsymbol{h}^{1}$, $\quad f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2$

$$x = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \alpha_1 h^1$$

atď

Odhad smeru $\boldsymbol{h}^1$: $\boldsymbol{h}^1 = \boldsymbol{y}^{12} - \boldsymbol{y}^{10}$

$$\boldsymbol{Y}^{10} = x^1 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}^{11} = \boldsymbol{y}^{10} + \beta_0 \binom{0}{1} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \beta_0 \binom{0}{1} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta_0 \end{pmatrix}$$

atď