

Teória informačných sietí

Martin Klimo

Jana Uramová
Juraj Smieško

November 2010

Obsah

Úvod	iii
1 Effective Bandwidth - Efektívna šírka pásma	1
1.1 Vytvárajúce funkcie	2
1.1.1 Základné vlastnosti konvexných funkcií	2
1.1.2 Momentová vytvárajúca funkcia	3
1.1.3 Kumulatívna vytvárajúca funkcia	5
1.2 Princíp veľkých odchýliek	8
1.3 Použitie princípu veľkých odchýlok	16
1.3.1 Systém s konštantnou kapacitou	16
1.3.2 Dimenzovanie $Geo/D/1/\infty$	20
1.3.3 $M/D/1/\infty$	20
1.3.4 Systém s variabilnou kapacitou	23
1.3.5 $M/M/1/\infty$	25
1.3.6 Markovove systémy s MMPP vstupom	28
1.3.7 $M-M/M/1/\infty$	29
1.4 Použitie princípu veľkých odchýlok	31
1.4.1 Popis pomocou efektívnej šírky pásma	31
1.4.2 Regulárny proces	34
1.4.3 Bernoulliho proces	34
1.4.4 Poissonov proces	35
1.4.5 Markovove modulované procesy	36
1.4.6 Markovov modulovaný proces s diskretným časom	37
1.4.7 2-stavový MMP s diskretným časom	38
1.4.8 Markovov modulovaný proces so spojitým časom	40
1.4.9 Markovov modulovaný Poissonov proces	42
Záver	45
Slovník termínov a skratiek	47

Úvod

Zoznam obrázkov

1.1	MGF pre binomické a Poissonovo rozdelenie	4
1.2	MGF pre binomické a Poissonovo rozdelenie	8
1.3	Geometrický vzťah medzi $\lambda(\theta)$ a $I(x)$	12
1.4	Rate function pre binomické a Poissonovo rozdelenie	13
1.5	Ohraničenie $P(X > x)$ pre $X \sim Po(6)$ a $X \sim Po(10)$	15
1.6	Jednolinkový systém s konštantnou kapacitou	16
1.7	$f(\theta) = \lambda(e^\theta - 1)$ s $\lambda = 50p/s$ a s $c = 100p/s$ a $c = 60p/s$. .	21
1.8	Kapacita c pre $p = 0.01, 0.05$ a $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. . .	22
1.9	$f(\theta) = \lambda(e^\theta - 1)$ s $\lambda = 50$, $g(\theta) = \mu(1 - e^{-\theta})$ s $\mu = 100, 60$	26
1.10	Kapacita μ pre $p = 0.01, 0.05$ a $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. . .	27
1.11	EB pre Poissonov tok a M-M s $\lambda = 50$ p/s	30
1.12	Kapacita μ pre $p = 0.01, 0.05$ a $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. . .	31
1.13	EB: $\alpha(\theta) = \ln [0.729 + 0.243e^\theta + 0.027e^{2\theta} + 0.001e^{3\theta}] / \theta$. .	33
1.14	porovnanie EB pre IPTV a Bernoulliho proces $Bi(11t, 0.2048)$	35
1.15	Efektívna šírka pásma pre tok 6 kanálov IPTV	36
1.16	EB pre Poissonov tok a M-M s $\lambda = 50$ p/s	43

Zoznam tabuliek

1.1	Kapacita c pre $M/D/1/\infty$ pomocou LDP	22
1.2	Kapacita μ pre $M/M/1/\infty$ pomocou LDP	27
1.3	Intenzita μ pre $M-M/M/1/\infty$ pomocou LDP	30

Kapitola 1

Effective Bandwidth - Efektívna šírka pásma

1.1 Vytvárajúce funkcie

1.1.1 Základné vlastnosti konvexných funkcií

Najprv zhrnieme niektoré základné vlastnosti konvexných funkcií, ktoré budú mať veľký význam v nasledujúcej teórii.

Definícia 1.1.1 Funkcia $f(t) : R \rightarrow R$ je konvexná, ak pre $\forall t, s \in R$ a pre ľubovoľné $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$, $p + q = 1$ platí

$$f(p \cdot s + q \cdot t) \leq p \cdot f(s) + q \cdot f(t) \quad (1.1.1)$$

Ak zvolíme $p = \frac{t - \tau}{t - s}$ a $q = \frac{\tau - s}{t - s}$, pričom platí $s < \tau < t$, dostaneme:

$$f(\tau) \leq \frac{t - \tau}{t - s} \cdot f(s) + \frac{\tau - s}{t - s} \cdot f(t) \quad (1.1.2)$$

Upravením vzťahu (1.1.2) môžeme napísať

$$\frac{f(\tau) - f(s)}{\tau - s} \leq \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} \quad (1.1.3)$$

Ak je $f(t)$ diferencovateľná, podľa (1.1.3) je konvexná vtedy a len vtedy, ak je jej derivácia $f'(t)$ rastúca. Navyše, ak je dvojnásobne diferencovateľná, potom je konvexná vtedy a len vtedy, ak je druhá derivácia nezáporná, $f''(t) \geq 0$. Z Taylorovho rozvoja $f(t)$ vyplýva:

$$f(t) > f(s) + (t - s) \cdot f'(s) \quad \text{ak platí} \quad f'(t) \neq f'(s) \quad (1.1.4)$$

Ak použijeme opakovane (1.1.1), môžeme ľahko ukázať, že

$$\forall t_i, p_i, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1; \quad f\left(\sum_{i=1}^n p_i t_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(t_i) \quad (1.1.5)$$

Ak postupnosť t_i predstavuje hodnoty nejakej diskkrétnej náhodnej premennej X a postupnosť p_i je jej pravdepodobnostné rozdelenie, $P(X = x_i) = p_i$, potom pre ľubovoľnú konvexnú funkciu $f(\cdot)$ platí

$$f(EX) \leq E(f(X)) \quad (1.1.6)$$

Vzťah (1.1.6) sa nazýva **Jensenova nerovnosť**.

1.1.2 Momentová vytvárajúca funkcia

Oboznámime sa s niektorými funkcionálnymi charakteristikami náhodnej premennej. Naším úmyslom nie je podať vyčerpávajúci popis, ktorý je ostatne predmetom Teórie pravdepodobnosti, ale uvedieme iba tie fakty, ktoré sú potrebné pre pochopenie problematiky dimenzovania pomocou efektívnej šírky pásma. Pre názornosť uvádzané charakteristiky vypočítame pre rozdelenia pravdepodobnosti náhodných premenných, ktoré priamo súvisia s modelovaním dátových tokov (Bernoulliho a Poissonov proces).

Náhodná premenná X má momentovú vytvárajúcu funkciu MGF (*Moment Generation Function*) definovanú nasledovne:

$$\varphi(\theta) = E[e^{\theta X}] \quad (1.1.7)$$

MGF premennej X pomocou derivácií v nule vytvára k -te počiatkové momenty EX^k :

$$\varphi^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k \varphi(\theta)}{d\theta^k} \right|_{\theta=0} = \frac{d^k}{d\theta^k} E[e^{\theta X}] \Big|_{\theta=0} = E[X^k e^{\theta X}] \Big|_{\theta=0} = EX^k$$

Momentová vytvárajúca funkcia predstavuje plnohodnotný popis náhodnej premennej a je ekvivalentom pre popis pomocou distribučnej funkcie (resp. hustoty pre spojité premenné a rozdelenia pravdepodobnosti pre diskrétné premenné). V prípade, že poznáme MGF pre dve nezávislé n.pr. X a Y , vieme jednoducho určiť MGF ich súčtu $Z = X + Y$:

$$\varphi_Z(\theta) = E[e^{\theta(X+Y)}] = E[e^{\theta X} e^{\theta Y}] = E[e^{\theta X}] E[e^{\theta Y}] = \varphi_X(\theta) \varphi_Y(\theta)$$

Momentová vytvárajúca funkcia súčtu dvoch nezávislých náhodných premenných sa rovná súčinu MGF pre jednotlivé premenné. Tento fakt môžeme rozšíriť na konečný súčet nezávislých náhodných premenných.

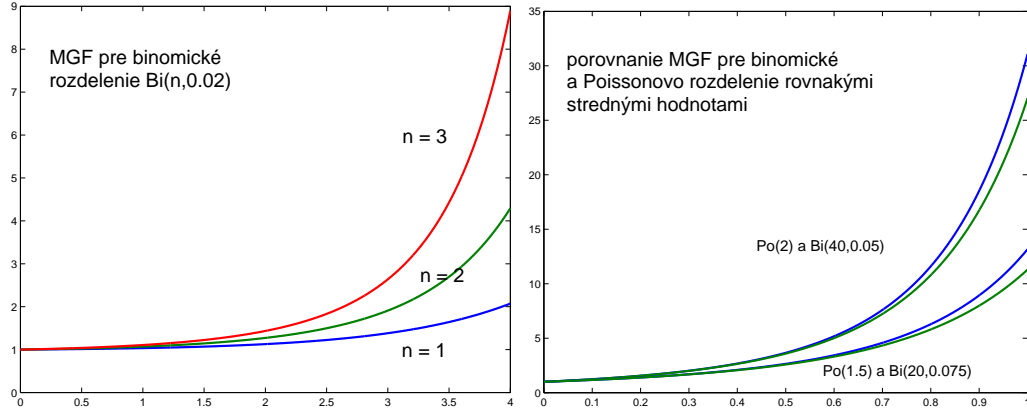
Príklad 1.1.1 Vypočítame MGF pre niektoré významné rozdelenia:

alternatívne $X \sim \text{alt}(p)$:

$$\varphi(\theta) = e^{\theta \cdot 0} P(X=0) + e^{\theta \cdot 1} P(X=1) = 1 - p + pe^{\theta}$$

binomicke $X \sim \text{Bi}(n, p)$:

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{\theta k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{\theta} p)^k (1-p)^{n-k} = (1 - p + pe^{\theta})^n$$



Obr. 1.1: MGF pre binomické a Poissonovo rozdelenie

Poissonovo $X \sim Po(\lambda)$:

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{\theta k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^n \frac{(e^{\theta} \lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{\theta}} = e^{\lambda(e^{\theta}-1)}$$

Z elementárnej pravdepodobnosti vieme, že náhodná premenná, ktorá má binomické rozdelenie predstavuje súčet n -nezávislých náhodných premenných s alternatívnym rozdelením. Tomu odpovedá fakt, že MGF binomického rozdelenia je n -tou mocninou MGF alternatívneho rozdelenia.

Tak isto je známy fakt, že binomické rozdelenie $Bi(n, p)$ môžeme aproximovať rozdelením Poissonovým $Po(\lambda)$ s rovnakými strednými hodnotami $\lambda = n \cdot p$, ak platí $n \rightarrow \infty$ a $p \rightarrow 0$. Napríklad medzi MGF pre $Po(2)$ a $Bi(400, 0.005)$ nie je v podstate rozdiel.

Príklad 1.1.2 Určíme momentovú vytvárajúcu funkciu pre súčet nezávislých premenných s Poissonovým rozdelením, $X_1 \sim Po(\lambda_1)$, $X_2 \sim Po(\lambda_2)$:

$$\varphi(\theta) = \varphi_1(\theta) \cdot \varphi_2(\theta) = e^{\lambda_1(e^{\theta}-1)} e^{\lambda_2(e^{\theta}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{\theta}-1)}$$

MGF súčtu dvoch náhodných premenných s rozdelením $Po(\lambda_1)$ a $Po(\lambda_2)$ je opäť MGF Poissonovho rozdelenia $Po(\lambda_1 + \lambda_2)$. Dokázali sme, že súčet dvoch nezávislých náhodných premenných s Poissonovým rozdelením je opäť Poissonova náhodná premenná.

1.1.3 Kumulatívna vytvárajúca funkcia

Nech náhodná premenná X má MGF $\varphi(\theta) = E[e^{\theta X}]$. Potom kumulatívnu vytvárajúcu funkciu CGF (*Cummulant Generation Function*) definujeme:

$$\lambda(\theta) = \ln \varphi(\theta) = \ln E[e^{\theta X}] \quad (1.1.8)$$

Vieme, že MGF premennej X pomocou derivácií v nule vytvára k -te počiatkové momenty EX^k . Vypočítame niekoľko derivácií CGF:

$$\begin{aligned} \lambda'(0) &= \ln E[e^{\theta X}] \Big|_{\theta=0} = \frac{E[Xe^{\theta X}]}{E[e^{\theta X}]} \Big|_{\theta=0} = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = EX \\ \lambda''(0) &= \frac{E[X^2e^{\theta X}] E[e^{\theta X}] - E[Xe^{\theta X}]^2}{E[e^{\theta X}]^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{\varphi''(0)\varphi(0) - \varphi'(0)^2}{\varphi(0)^2} = \\ &= EX^2 - (EX)^2 = E(X - EX)^2 = DX \end{aligned}$$

$$\lambda'''(0) = EX^3 - 3EX^2EX + 2(EX)^3 = E(X - EX)^3$$

Derivácie CGF v nule vytvárajú resp. "kumulujú" kombinácie počiatkových momentov, pričom ich stupeň odpovedá stupňu derivácie.

Vypočítame CGF súčtu dvoch nezávislých n.pr. X a Y , $Z = X + Y$:

$$\lambda_Z(\theta) = \ln \varphi_Z(\theta) = \ln [\varphi_X(\theta)\varphi_Y(\theta)] = \ln \varphi_X(\theta) + \ln \varphi_Y(\theta) = \lambda_X(\theta) + \lambda_Y(\theta)$$

Kumulatívna vytvárajúca funkcia súčtu dvoch nezávislých premenných sa rovná súčtu MGF jednotlivých premenných.

Nech X je nezáporná náhodná premenná. Pre jej kumulatívnu vytvárajúcu funkciu CGF $\lambda(\theta)$ platia nasledujúce vlastnosti:

- $\lambda(\theta)$ je k -násobne diferencovateľná
- $\lambda(\theta)$ je konvexná
- $\lambda(\theta)$ je rastúca pre $\theta > 0$ a $\lambda(0) = 0$
- $\lambda'(\theta)$ je rastúca pre $\theta > 0$ a $\lambda'(0) = EX$
- k obidvom $\lambda(\theta)$ a $\lambda'(\theta)$ existujú inverzné funkcie

Všetky uvedené vlastnosti odvodíme v nasledujúcich lemach:

Lema 1.1.1 *CGF $\lambda(\theta)$ nezápornej n.pr. X je k -násobne diferencovateľná.*

Dôkaz:

Ak je X nezáporná náhodná premenná, potom pre jej MGF platí

$$\varphi(\theta) = E(e^{\theta X}) = \int_0^{\infty} e^{\theta x} dF(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(\theta)^k > 0$$

Menovatele k -tych derivácií CGF, $\lambda^{(k)}(\theta)$, tvoria k -te mocniny MGF, $\varphi(\theta)^k$. Keďže tieto mocniny sú kladné, $\lambda(\theta)$ je k -násobne diferencovateľná. \square

Lema 1.1.2 *CGF $\lambda(\theta)$ nezápornej n.pr. X je konvexná.*

Dôkaz:

Využije Schwartzovu nerovnosť. Nech $Y_1 = Xe^{\frac{\theta}{2}X}$, $Y_2 = e^{\frac{\theta}{2}X}$, potom

$$\begin{aligned} E[Xe^{\theta X}] &= E[Xe^{\frac{\theta}{2}X} \cdot e^{\frac{\theta}{2}X}] = E[Y_1 Y_2] \leq [E(Y_1^2)]^{\frac{1}{2}} [E(Y_2^2)]^{\frac{1}{2}} = \\ &= [E(X^2 e^{\theta X})]^{\frac{1}{2}} [E(e^{\theta X})]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Keďže je $Xe^{\theta X}$ nezáporná, môžeme predchádzajúcu nerovnosť umocniť:

$$[E(Xe^{\theta X})]^2 \leq E(X^2 e^{\theta X}) E(e^{\theta X}) \Rightarrow \lambda''(\theta) = \frac{E(X^2 e^{\theta X}) E(e^{\theta X}) - [E(Xe^{\theta X})]^2}{[E(e^{\theta X})]^2} \geq 0$$

Keďže sme ukázali, že $\forall \theta \in R$, $\lambda''(\theta) \geq 0$, CGF je konvexná. \square

Lema 1.1.3 *CGF $\lambda(\theta)$ nezáp. n.pr. X je rastúca pre $\theta > 0$ a $\lambda(0) = 0$.*

Dôkaz:

Keďže X je nezáporná, platí $\forall \theta > 0$, $\varphi'(\theta) = E[Xe^{\theta X}] = \int_0^{\infty} x e^{\theta x} dF(x) > 0$.

V leme 1.1.1 sme ukázali, že $\varphi(\theta) > 0$. Potom platí $\lambda'(\theta) = \frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} > 0$ a preto $\lambda(\theta)$ je rastúca pre $\theta > 0$. Dosadíme $\lambda(0) = \ln E[e^{0 \cdot X}] = \ln 1 = 0$ \square

Lema 1.1.4 *$\lambda'(\theta)$, nezápornej n.pr. X je rastúca pre $\theta > 0$ a $\lambda'(0) = EX$.*

Dôkaz:

V leme 1.1.2 sme dokázali, že derivácia $\lambda'(\theta)$ je nezáporná, $\lambda''(\theta) \geq 0$. Rozoberieme situáciu, keď je druhá derivácia rovná nule:

$$\lambda''(\theta_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad E[Y_1 Y_2]^2 = E[Y_1^2] \cdot E[Y_2^2] \quad \text{kde} \quad Y_1 = X e^{\frac{\theta_0}{2} X}, \quad Y_2 = e^{\frac{\theta_0}{2} X}$$

Vieme, že Schwartzova nerovnosť je odvodená z nerovnosti:

$$\forall X, Y, \forall t \in R, \quad h(t) = E[(X - t \cdot Y)^2] = t^2 E[Y^2] - 2t E[XY] + E[X^2] \geq 0$$

pričom diskriminant rovnice $h(t) = 0$ je $D = (2E[XY])^2 - 4E[X^2] \cdot E[Y^2]$. Ak do rovnice $h(t) = 0$ dosadíme premenné Y_1 a Y_2 , diskriminant rovnice bude $D = 0$ a preto existuje reálny dvojnásobný koreň t_0 pre ktorý platí:

$$t_0 = \frac{E[Y_1 Y_2]}{E[Y_2^2]} = \frac{E[X e^{\theta_0 X}]}{E[e^{\theta_0 X}]} = \lambda'(\theta_0), \quad E[(Y_1 - t_0 Y_2)^2] = E[e^{\theta_0 X} (X - t_0)^2] = 0$$

Z rovnosti podľa kvadrat. stredy vyplýva rovnosť podľa pravdepodobnosti,

$$\forall \delta \in R^+, \quad P(e^{\theta_0 X} |X - t_0| > \delta) = 0$$

Keďže δ môže byť ľubovoľne malé a náhodná premenná $e^{\theta_0 X}$ nadobúda iba kladné hodnoty, X je degenerovaná s $EX = t_0$ a $DX = 0$. Takéto premenné sme ale z úvah vylúčili. Preto pre CGF $\lambda(\theta)$ nezápornej n.pr. X platí

$$\forall \theta > 0, \quad \lambda''(\theta) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda'(\theta) \text{ je rastúca}$$

$$\text{Dosadíme } \theta = 0: \quad \lambda'(0) = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = \frac{E[X e^{0 \cdot X}]}{E[e^{0 \cdot X}]} = \frac{E[X]}{E[1]} = EX \quad \square$$

Poznámka: V predchádzajúcich lemach sme dokázali, že funkcie $\lambda(\theta)$ a $\lambda'(\theta)$ sú rastúce, preto k obidvom funkciám existujú inverzné funkcie.

Lema 1.1.5 *Nech Z_k sú nezávislé rovnako rozdelené náhodne premenné (i.i.d. - independent identical distribution) s MGF $\varphi(\theta)$ a CGF $\lambda(\theta)$. Potom pre CGF $\lambda_t(\theta)$ ich súčtu W_t platí*

$$W_t = Z_1 + \dots + Z_t \quad \Rightarrow \quad \lambda_t(\theta) = t \cdot \lambda(\theta) \quad (1.1.9)$$

Dôkaz:

Vďaka nezávislosti premenných Z_k dostávame:

$$\lambda_t(\theta) = \ln E [e^{\theta(Z_1 + \dots + Z_t)}] = \ln E [e^{\theta Z_1} \dots e^{\theta Z_t}] = \ln \varphi(\theta)^t = t \cdot \lambda(\theta) \quad \square$$

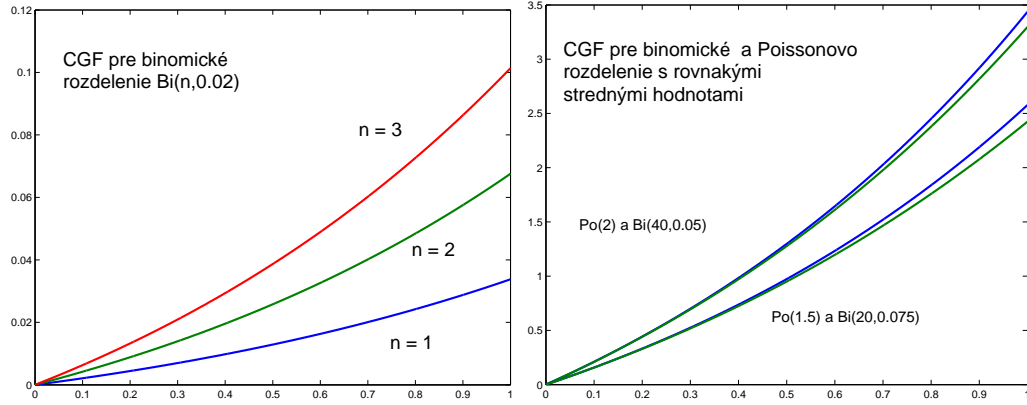
Príklad 1.1.3 *Vypočítame CGF pre binomické a Poissonovo rozdelenie:*

binomicke $X \sim Bi(n, p)$:

$$\lambda(\theta) = \ln \varphi(\theta) = \ln (1 - p + pe^\theta)^n = n \cdot \ln (1 - p + pe^\theta)$$

Poissonovo $X \sim Po(\lambda)$:

$$\lambda(\theta) = \ln \varphi(\theta) = \ln [e^{\lambda(e^\theta - 1)}] = \lambda(e^\theta - 1)$$



Obr. 1.2: MGF pre binomické a Poissonovo rozdelenie

1.2 Princíp veľkých odchýliek

Definícia 1.2.1 *Nech $\lambda(\theta)$ je ľubovoľná reálna funkcia. Potom funkcia*

$$I(x) = \sup_{\theta} \{\theta x - \lambda(\theta)\} \quad (1.2.1)$$

sa nazýva Legendrova transformácia (Legendre transform) funkcie $\lambda(\theta)$. Ak $\lambda(\theta)$ je kumulatívna vytvárajúca funkcia nejakej náhodnej premennej X , potom jej Legendrovú transformáciu $I(x)$ nazývame rýchlostná funkcia (Rate-function) premennej X .

Motiváciu k označeniu "rýchlostná funkcia" nájdeme v nasledujúcej kapitole, konkrétne vo vete 1.2.1. Zatiaľ budeme rýchlostnú funkciu považovať iba ako ďalšiu charakteristiku náhodnej premennej X .

Rýchlostná funkcia $I(x)$ nezápornej náhodnej premennej X má vlastnosti:

- (1) $I(x)$ je konvexná
- (2) $I(\lambda'(\theta)) = \theta \cdot \lambda'(\theta) - \lambda(\theta)$
- (3) $\lambda(\theta)$ je Legendrovou transformáciou $I(x)$
- (4) $\forall x \neq EX, I(x) > 0$ a $I(EX) = 0$
- (5) $I(x)$ je rýdzo rastúca na $\langle EX, \infty \rangle$ a rýdzo klesajúca na $(-\infty, EX)$

Z vlastností (1) a (4) vyplýva, že rýchlostná funkcia $I(x)$ má jediné minimum, ktoré nadobúda v strednej hodnote EX , pričom jeho hodnota je nulová, $I(EX) = 0$. V ostatných bodoch je táto funkcia kladná.

Vlastnosť (2) je využitá v dôkazoch niektorých Liemmm v Appendixe, ale hlavne nám pomôže pochopiť geometrický vzťah medzi $I(x)$ a $\lambda(\theta)$

Vlastnosť (3) hovorí, že CGF je Legendrovou transformáciou $I(x)$ odpovedajúcej náhodnej premennej. Hovoríme, že funkcie $I(x)$ a $\lambda(\theta)$ sú navzájom konvexne konjugované alebo tiež, že tvoria Legendrov pár:

$$I(x) = \sup_{\theta} \{\theta x - \lambda(\theta)\} \iff \lambda(\theta) = \sup_x \{\theta x - I(x)\} \quad (1.2.2)$$

Uvedené vlastnosti rýchlostnej funkcie odvodíme v nasledujúcich lemmách:

Lema 1.2.1 *Rýchlostná funkcia $I(x)$ je konvexná.*

Dôkaz:

Pre všetky $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$, $p + q = 1$ a ľubovoľné $x_1 < x_2$ platí

$$\begin{aligned} I(px_1 + qx_2) &= \sup_{\theta} \{\theta px_1 + \theta qx_2 - \lambda(\theta)\} = \sup_{\theta} \{p(\theta x_1 - \lambda(\theta)) + q(\theta x_2 - \lambda(\theta))\} \leq \\ &\leq p \cdot \sup_{\theta} \{\theta x_1 - \lambda(\theta)\} + q \cdot \sup_{\theta} \{\theta x_2 - \lambda(\theta)\} = p \cdot I(x_1) + q \cdot I(x_2) \quad \square \end{aligned}$$

Dokázali sme konvexnosť funkcie $I(x)$ podľa definície 1.1.1.

Lema 1.2.2 Pre rýchlostnú funkciu $I(x)$ platí:

$$I(\lambda'(\theta)) = \theta \cdot \lambda'(\theta) - \lambda(\theta)$$

Dôkaz:

CGF $\lambda(\theta)$ je konvexná a diferencovateľná (lema 1.1.2), potom funkcia $f(\theta) = \theta x - \lambda(\theta)$ je konkávna a jej supréum získame pomocou derivácie

$$\begin{aligned} f'(\theta) = 0 &\Rightarrow x - \lambda'(\theta) = 0 \Rightarrow \lambda'(\theta) = x \\ I(x) = \sup_{\theta} \{\theta x - \lambda(\theta)\} &= \theta_0 x - \lambda(\theta_0) \text{ kde } \lambda'(\theta_0) = x \Rightarrow \\ &\Rightarrow I(\lambda'(\theta)) = \theta \lambda'(\theta) - \lambda(\theta) \quad \square \end{aligned}$$

Lema 1.2.3 Kumulatívna vytvárajúca funkcia $\lambda(\theta)$ je Legendrovou transformáciou rýchlostnej funkcie $I(x)$:

$$\lambda(\theta) = \sup_x \{\theta x - I(x)\} \quad (1.2.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Dôkaz: } (\leq) \quad \sup_x \{\theta x - I(x)\} &= \sup_x \{\theta x - \sup_{\gamma} \{x\gamma - \lambda(\gamma)\}\} \\ &\leq \sup_x \{\theta x - \theta x + \lambda(\theta)\} = \lambda(\theta) \\ (\geq) \quad \sup_x \{\theta x - I(x)\} &\geq \theta \lambda'(\theta) - I(\lambda'(\theta)) = \lambda(\theta) \quad \square \end{aligned}$$

Lema 1.2.4 Rýchlostná funkcia je nezáporná: $\forall x, I(x) \geq 0$.

Dôkaz:

$$\lambda(0) = 0 \Rightarrow I(x) = \sup_{\theta} \{\theta x - \lambda(\theta)\} \geq 0 \cdot x - \lambda(0) = 0 \quad \square$$

Lema 1.2.5 Rýchlostná funkcia $I(x)$ dosahuje svoje minimum v strednej hodnote EX a v ostatných bodoch je kladná

$$\forall x \neq EX, I(x) > 0 \quad \text{a} \quad I(EX) = 0$$

Dôkaz:

Platí $EX = \lambda'(0)$. Z lemy 1.2.2 dostávame

$$I(EX) = I(\lambda'(0)) = 0 \cdot \lambda'(0) - \lambda(0) = 0 \cdot EX - 0 = 0$$

Funkcia $\lambda(\theta)$ je konvexná, podľa vzťahu (1.1.4) platí: $\forall \theta, \lambda'(\theta) \neq \lambda'(0)$

$$\begin{aligned} 0 = \lambda(0) &> \lambda(\theta) + (0 - \theta) \cdot \lambda'(\theta) = \lambda(\theta) - \theta \cdot \lambda'(\theta) = -I(\lambda'(\theta)) \\ &\Rightarrow I(\lambda'(\theta)) > 0 \quad \text{pre } \lambda'(\theta) \neq \lambda'(0) \end{aligned}$$

Ak označíme $x = \lambda'(\theta)$, potom $I(x) > 0$ pre $x \neq \lambda'(0) = EX$. \square

Lema 1.2.6 *Rýchlostná funkcia $I(x)$ je rýdzo rastúca na intervale $EX < x < \infty$ a rýdzo klesajúca na intervale $-\infty < x < EX$*

Dôkaz:

Keďže rýchlostná funkcia $I(x)$ je konvexná, môžeme použiť vzťah (1.1.2).

$EX < x < b$:

$$I(x) \leq \frac{b-x}{b-EX} \cdot I(EX) + \frac{x-EX}{b-EX} \cdot I(b) = \frac{x-EX}{b-EX} \cdot I(b) < I(b)$$

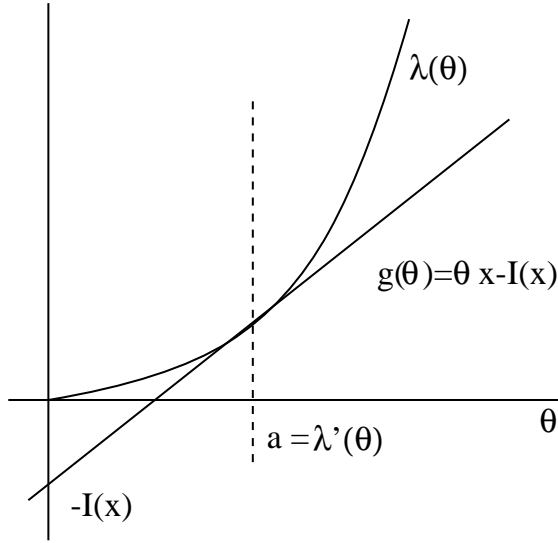
$a < x < EX$:

$$I(x) \leq \frac{EX-x}{EX-a} \cdot I(a) + \frac{x-a}{EX-a} \cdot I(EX) \frac{EX-x}{EX-a} \cdot I(a) < I(a)$$

Geometrická interpretácia:

Ukážeme si geometrickú súvislosť medzi kumulatívnou vytvárajúcou funkciou $\lambda(\theta)$ a rýchlostnou funkciou $I(x)$, resp. medzi Legendrovým obrazom a vzorom. Zostrojíme dotyčnicu $g(\theta) = k\theta + l$ k funkcii $\lambda(\theta)$ v bode a . Smernica dotyčnice je deriváciou danej funkcie v bode a , preto $k = \lambda'(a)$, a dotyčnica prechádza bodom $[a, \lambda(a)]$, preto $l = \lambda(a) - \lambda'(a) \cdot a$:

$$k = \lambda'(a), \quad l = \lambda(a) - \lambda'(a) \cdot a \quad \Rightarrow \quad g(\theta) = \lambda'(a) \cdot \theta + \lambda(a) - \lambda'(a) \cdot a$$



Ak za a zvolíme bod, pre ktorý $\lambda'(a) = x$, z vlastnosti (2) máme

$$\lambda(a) - \lambda'(a) \cdot a = -I(\lambda'(a))$$

a teda tvar dotýčnice v tomto bode je

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \lambda'(a) \cdot \theta - I(\lambda'(a)) = \\ &= \theta x - I(x) \end{aligned}$$

Ak dosadíme $\theta = 0$, dostaneme

$$g(0) = -I(x)$$

Obr. 1.3: Geometrický vzťah medzi $\lambda(\theta)$ a $I(x)$

Dotýčnica $g(\theta)$ ku kumulatívnej vytvárajúcej funkcii $\lambda(\theta)$ v bode a pretína y -ovú os v bode $-I(x)$, pričom platí $x = \lambda'(a)$

Lema 1.2.7 *Nech Z_k sú nezávislé a identické náhodné premenné s rýchlostnou funkciou $I(x)$. Pre rýchlostnú funkciu $I_t(x)$ premennej W_t platí:*

$$W_t = Z_1 + \dots + Z_t \quad \Rightarrow \quad I_t(x) = t \cdot I(x/t) \quad (1.2.4)$$

Dôkaz:

Využijeme lemu 1.1.5:

$$\begin{aligned} I_t(x) &= \sup_{\theta} \{\theta x - \lambda_t(\theta)\} = \sup_{\theta} \{\theta x - t \cdot \lambda(\theta)\} \\ &= t \cdot \sup_{\theta} \{\theta \frac{x}{t} - \lambda(\theta)\} = t \cdot I(x/t) \quad \square \end{aligned}$$

Príklad 1.2.1 *Vypočítame rýchlostné funkcie pre binomické a Poissonovo rozdelenie:*

binomicke $X \sim Bi(n, p)$

$$\lambda(\theta) = n \cdot \ln(1 - p + pe^{\theta}) \quad \Rightarrow \quad I(x) = \sup_{\theta} \{\theta x - n \ln(1 - p + pe^{\theta})\}$$

Na výpočet suprema použijeme deriváciu $I(x)$ podľa θ :

$$x - n \frac{pe^{\theta}}{1 - p + pe^{\theta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{npe^{\theta}}{1 - p + pe^{\theta}} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \ln \frac{x(1 - p)}{p(n - x)}$$

Argument logaritmu musí byť kladné číslo: Vidíme, že musí platiť

$$\frac{x(1-p)}{(n-x)p} > 0 \Rightarrow x(1-p) > 0 \quad \& \quad (n-x)p > 0 \Rightarrow 0 < x < n$$

Rýchlostná funkcia $I(x)$ pre binomické rozdelenie existuje len pre $x \in (0, n)$.

$$\begin{aligned} I(x) &= x \cdot \ln \frac{x(1-p)}{(n-x)p} - n \cdot \ln \left[1 - p + p \cdot \frac{x(1-p)}{(n-x)p} \right] = \\ &= x \cdot \ln \frac{x(1-p)}{(n-x)p} - n \cdot \ln \frac{n(1-p)}{(n-x)} = \Rightarrow \\ \Rightarrow I(x) &= x \cdot \ln \frac{x}{p} + (n-x) \cdot \ln \frac{n-x}{1-p} - n \cdot \ln n \end{aligned}$$

Poissonovo $X \sim Po(\lambda)$

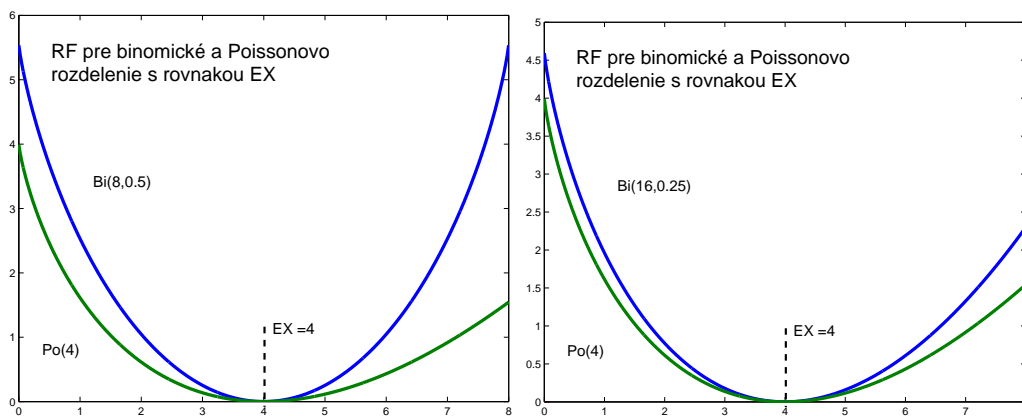
$$\lambda(\theta) = \lambda(e^\theta - 1) \Rightarrow I(x) = \sup_{\theta} \{ \theta x - \lambda(e^\theta - 1) \}$$

Na výpočet supréma použijeme deriváciu $I(x)$ podľa θ :

$$x - \lambda e^\theta = 0 \Rightarrow x = \lambda e^\theta \Rightarrow \theta_0 = \ln(x/\lambda)$$

Musí platiť $(x/\lambda) > 0$, preto $I(x)$ existuje len pre $x > 0$,

$$I(x) = x \cdot \ln(x/\lambda) - x + \lambda$$



Obr. 1.4: Rate function pre binomické a Poissonovo rozdelenie

Markova nerovnosť:

Pre nezápornú náhodnú premennú X a reálne číslo $x > 0$ platí

$$P(X > x) \leq \frac{1}{x} \cdot EX \quad (1.2.5)$$

Dôkaz:

Zavedieme novú náhodnú premennú $Y = \begin{cases} x & \text{ak } X > x \\ 0 & \text{ak } X \leq x \end{cases}$. Pre náhodné premenné preto platí

$Y \leq X \Rightarrow EY \leq EX$. Vypočítame strednú hodnotu EY :

$$EY = x \cdot P(X > x) + 0 \cdot P(X \leq x) \Rightarrow P(X > x) = \frac{EY}{x} \leq \frac{1}{x} \cdot EX \quad \square$$

Nerovnosť $X > x$ exponujeme pomocou $e^{\theta(\cdot)}$ a použijeme Markovovú vlastnosť. Dostaneme **Chernoffove ohraničenie** pre nezápornú premennú:

$$\forall \theta > 0, \quad P(X > x) = P(e^{\theta X} > e^{\theta x}) \leq e^{-\theta x} \cdot E[e^{\theta X}] \quad (1.2.6)$$

Veta 1.2.1 *Nech nezáporná n.pr. X má CGF $\lambda(\theta)$ a rýchlostnú funkciu $I(x)$. Pre pravdepodobnosť javu $X > x$ platí vzťah:*

$$\forall x > EX; \quad P(X > x) \leq e^{-I(x)} \quad \text{resp.} \quad \ln P(X > x) \leq -I(x) \quad (1.2.7)$$

Dôkaz:

Použijeme Chernoffové ohraničenie:

$$P(X > x) \leq e^{-\theta x} \cdot E[e^{\theta X}] = e^{-\theta x} \cdot e^{\ln E[e^{\theta X}]} = e^{-\theta x} \cdot e^{\lambda(\theta)} = e^{-(\theta x - \lambda(\theta))}$$

Nerovnosť platí pre všetky θ , preto platí aj pre také, v ktorom exponenciálny výraz $e^{-(\theta x - \lambda(\theta))}$ dosahuje infimum:

$$P(X > x) \leq \inf_{\theta} e^{-(\theta x - \lambda(\theta))} = e^{-\sup_{\theta} \{\theta x - \lambda(\theta)\}} = e^{-I(x)}$$

Derivácia $\lambda'(\theta)$, je rastúca a preto má inverznú funkciu (lema 1.1.4). Preto hodnotu θ_0 , ktorá maximalizuje $\sup_{\theta} \{\theta x - \lambda(\theta)\}$, získame nasledujúco:

$$x = \lambda'(\theta) \Rightarrow \theta_0 = \lambda'^{-1}(x)$$

Podľa Chernoffovho ohraničenia musí platiť $\theta_0 > 0$, preto nerovnosť (1.2.7) platí pre také x , pre ktoré $\lambda'^{-1}(x) > 0$. Keďže $\lambda'(\theta)$ je rastúca, je rastúca aj funkcia $\lambda'^{-1}(x)$. Budeme hľadať hodnotu x_0 takú, že $\lambda'^{-1}(x_0) = 0$:

$$\lambda'(0) = EX \Rightarrow \lambda'^{-1}(EX) = 0 \quad \text{a} \quad x_0 = EX$$

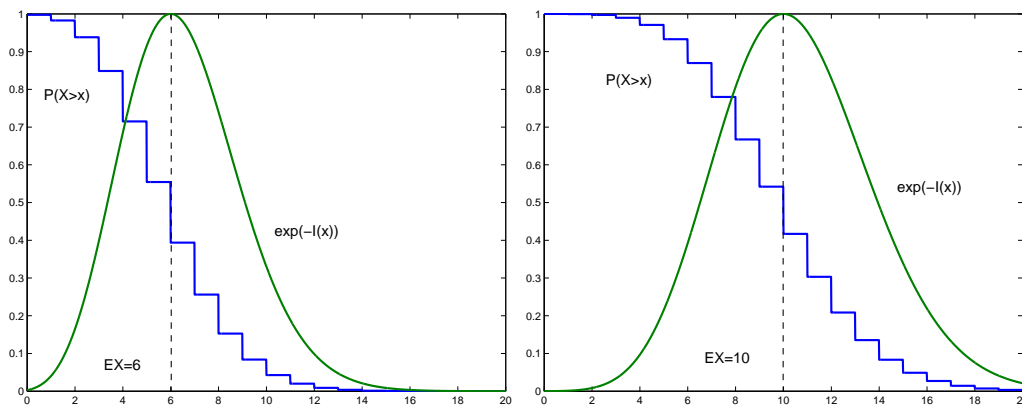
Preto pre všetky hodnoty $x > EX$ platí $\lambda'^{-1}(x) > 0$ a pre tieto hodnoty je platná dokazovaná nerovnosť (1.2.7). \square

Príklad 1.2.2 *Nech X má Poissonovo rozdelenie, $X \sim Po(\lambda)$. Jeho rýchlostná funkcia je $I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda$, pričom supréum nadobúda v $\theta_0 = \ln(x/\lambda)$. Keďže $\theta_0 > 0$, dostávame $(x/\lambda) > 1 \Rightarrow x > \lambda = EX$ a platí*

$$\forall x > \lambda; \quad P(X > x) = \sum_{k=[x]+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-x \ln(x/\lambda) + x - \lambda} \leq e^{-\lambda} \cdot e^x \cdot \left(\frac{\lambda}{x}\right)^x$$

Okrem horného ohraničenia pre "chvost" Poissonovho rozdelenia pomocou rýchlostnej funkcie sme získali aj zaujímavé horné ohraničenie pre čiastočný rozvoj exponenciálnej funkcie e^λ :

$$\forall x > \lambda; \quad \sum_{k=[x]+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \leq e^x \left(\frac{\lambda}{x}\right)^x$$



Obr. 1.5: Ohraničenie $P(X > x)$ pre $X \sim Po(6)$ a $X \sim Po(10)$

Veta 1.2.2 (*LDP - Princíp veľkých odchýlok*)

Majme postupnosť nezávislých a identických náhodných (i.i.d) premenných $\{Z_k\}$ s MGF $\varphi(\theta)$, CGF $\lambda(\theta)$, s rýchlostnou funkciou $I(x)$ a so strednou hodnotou $EZ_k = m$. Potom pre n.pr. $W_t = Z_1 + \dots + Z_t$ a pre $x > m$ platí

$$P(W_t/t > x) \leq e^{-tI(x)} \quad \text{resp.} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln P(W_t/t > x) = -I(x) \quad (1.2.8)$$

a hovoríme, že náhodná premenná W_t , resp. postupnosť náhodných premenných $\{Z_k\}$ spĺňa princíp veľkých odchýlok s rýchlostnou funkciou $I(x)$.

Dôkaz:

Tvrdenie je priamym dôsledkom vety 1.2.1. Označme rýchlostnú funkciu náhodnej premennej X_t ako $I_t(\cdot)$. Vďaka nezávislosti platí (lema 1.2.7):

$$I_t(z) = t \cdot I(z/t)$$

$$\text{Vetu 1.2.1: } \Rightarrow \quad \forall z > EW_t = t \cdot m, \quad P(W_t > z) \leq e^{-I_t(z)} = e^{-tI(z/t)}$$

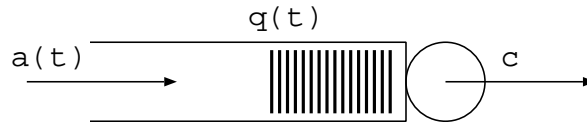
Po zavedení substitúcie $z = tx$ dostávame tvrdenie vety. Množstvo sčítancov v premennej W_t je ľubovoľný, môžeme rásť limitne nad všetky medze.

$$\forall x > m, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln P(W_t/t > x) = -I(x) \quad \square$$

1.3 Použitie princípu veľkých odchýlok

1.3.1 Systém s konštantnou kapacitou

Princíp veľkých odchýlok použijeme na určenie distribúcie (rozdelenia pravdepodobnosti) náhodnej premennej q , ktorá popisuje stav fronty v jednolinkovom systéme s konštantnou kapacitou c (*Single Server Queue*, *Work Conserving Link*, *CBR - Constant Bit Rate*, *Shaper*). V časovom slotu t do systému vstúpi $a(t)$ paketov (rámcov, ATM buniek, kilobitov, ...) a systém je schopný v tom istom slotu vyslať c paketov.



Obr. 1.6: Jednolinkový systém s konštantnou kapacitou

Náhodná premenná $q(t)$ popisuje počet čakajúcich paketov vo fronte v čase t . Predpokladáme, že prevádzka systému spĺňa **Lindleyho rovnicu**:

$$q(t) = \max\{0, q(t-1) + a(t) - c\} = (q(t-1) + a(t) - c)^+ \quad (1.3.1)$$

Vstupným procesom (*Arrival process*) nazveme náhodný proces $A(t)$, ktorý popisuje kumulatívny počet vstúpiivších paketov za časový interval $\langle 0, t \rangle$:

$$A(t) = \sum_{i=1}^t a(i), \quad \text{resp.} \quad a(t) = A(t) - A(t-1), \quad A(0) = 0 \quad (1.3.2)$$

Ak náhodné premenné $a(t)$ sú nezávislé a rovnako rozdelené (*i.i.d - independent identical distribution*), hovoríme, že vstupný proces má stacionárne a nezávislé prírastky.

Prevedieme niekoľko iterácii Lindleyho rovnice:

$$\begin{aligned} q(t) &= \max\{0, q(t-1) + a(t) - c\} = \\ &= \max\{0, \max\{0, q(t-2) + a(t-1) - c\} + a(t) - c\} = \\ &= \max\{0, a(t) - c, q(t-2) + a(t) + a(t-1) - 2c\} = \\ &= \max\{0, a(t) - c, a(t) + a(t-1) - 2c, \\ &\quad q(t-3) + a(t) + a(t-1) + a(t-2) - 3c\} \end{aligned}$$

Za predpokladu $q(0) = 0$ môžeme napísať:

$$q(t) = \max_{0 \leq s < t} \{0, \sum_{i=s+1}^t (a(i) - c)\} = \max_{0 \leq s \leq t} \{A(t) - A(s) - (t-s)c\} \quad (1.3.3)$$

Korektný dôkaz môžeme previesť pomocou Matematickej Indukcie:

$$\begin{aligned} t = 1 : \quad q(1) &= \max\{0, q(0) + a(1) - c\} = \max\{0, a(1) - c\} = \\ &= \max_{0 \leq s \leq 1} \{A(1) - A(s) - (1-s)c\} \\ t + 1 : \quad q(t+1) &= \max\{0, q(t) + a(t+1) - c\} = \\ &= \max\{0, \max_{0 \leq s \leq t} \{A(t) - A(s) - (t-s)c\} + a(t+1) - c\} = \\ &= \max\{0, \max_{0 \leq s \leq t} \{A(t+1) - A(s) - (t+1-s)c\}\} = \\ &= \max_{0 \leq s \leq t+1} \{A(t+1) - A(s) - (t+1-s)c\} \quad \square \end{aligned}$$

Dĺžka frontu, resp. počet paketov ktoré zostali v systéme v čase t závisí od rozdielov $a(i) - c$. Hodnota tohto rozdielu predstavuje istú záťaž pre systém. Zavedieme nové náhodné premenné $Z_{t-i+1} = a(i) - c$. Náhodný proces $\{W_t\}_{t \geq 0}$ nazveme záťažový proces (*Workload process*), ak platí

$$W_t = Z_1 + \dots + Z_t \quad \text{pre } t > 0, \quad \text{a } W_0 = 0 \quad (1.3.4)$$

Pre dĺžku frontu v čase t dostávame vzťah:

$$q(t) = \max\{0, Z_1, Z_1 + Z_2, \dots, Z_1 + \dots + Z_t\} \quad \Rightarrow \quad q(t) = \max_{0 \leq i \leq t} \{W_i\}$$

Predpokladali sme, že náhodné premenné $a(i)$ sú stacionárne a nezávislé (i.i.d.). Potom aj Z_i sú stacionárne a nezávislé. Ak navyše platí $\forall t, E a(t) < c$ ($\forall i, Z_i < 0$), potom dĺžka frontu v čase t konverguje podľa rozdelenia ku konečnej náhodnej premennej q (pozri [21]).

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq t} \{W_i\} \Rightarrow q = \max_{t \geq 0} \{W_t\} \quad (1.3.5)$$

Z vety 1.2.2 vieme, že pre $\forall n > EW_t$ platí $P(W_t > n) \leq e^{-tI(n/t)}$. Keďže $EZ_i < 0$, potom aj $EW_t < 0$ a tento vzťah môžeme využiť pre všetky $n \in N$. Ďalej sme definovali $W_0 = 0$ a preto $P(W_0 > n) = 0$ pre $n > 0$:

$$P(q > n) = P(\max_{t \geq 0} \{W_t\} > n) \leq \sum_{t \geq 1} P(W_t > n) \leq \sum_{t \geq 1} e^{-tI(n/t)} \quad (1.3.6)$$

Výraz $-tI(n/t)$ upravíme na $-n \frac{I(n/t)}{n/t}$. Ak je n dostatočne "veľké", člen ktorý "prevládne" nad ostatnými členmi súčtu je ten, pre ktorý je výraz $\frac{I(n/t)}{n/t}$ najmenší (pozri [21]), preto pravdepodobnosť prekročenia danej dĺžky frontu n zaniká exponenciálne v závislosti od n a s tzv. spádovou konštantou δ :

$$P(q > n) \asymp e^{-n\delta}, \quad \delta = \min_x \frac{I(x)}{x} \quad (1.3.7)$$

Vyjadríme spádovú konštantu δ pomocou CGF. Nech $\theta \leq \delta$, potom

$$\begin{aligned} \theta \leq \min_x \frac{I(x)}{x} &\iff \forall x; \theta \leq \frac{I(x)}{x} \iff \forall x; \theta x - I(x) \leq 0 \iff \\ &\iff \sup_x \{\theta x - I(x)\} \leq 0 \iff \lambda(\theta) \leq 0 \end{aligned}$$

Dostali sme ekvivalenciu $\theta \leq \delta \iff \lambda(\theta) \leq 0$ a druhý spôsob výpočtu δ :

$$P(q > n) \asymp e^{-n\delta}, \quad \delta = \max\{\theta; \lambda(\theta) \leq 0\} \quad (1.3.8)$$

Funkciu $\lambda(\theta)$ (CGF premenných Z_j) budeme tiež nazývať **škálová kumulatívna vytvárajúca funkcia** (*SCGF - Scaled Cumulant Generation function*) záťažového procesu W_t , pretože platí

$$\begin{aligned} E[e^{\theta W_t}] &= E[e^{\theta(Z_1 + \dots + Z_t)}] = \prod_{k=1}^t E[e^{\theta Z_k}] = e^{t\lambda(\theta)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda(\theta) = \frac{1}{t} \ln E[e^{\theta W_t}] \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Získali sme dva spôsoby výpočtu spádovej konštanty, pomocou rýchlostnej funkcie $I(x)$ náhodných premenných Z_j , vzťah (1.3.7), alebo pomocou SCGF

$\lambda(\theta)$ záťažového procesu W_t , vzťah (1.3.8). Ak má vstupný proces $A(t)$ i.i.d. prírastky, výpočet spádovej konštanty môžeme zjednodušiť. CGF prírastkov $a(i)$ označíme $\lambda_a(\theta)$. Vieme, že $Z_{t-i+1} = a(i) - c$. Bez straty na všeobecnosti preznačíme $j = t - i + 1$ a využijeme stacionárnosť:

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) &= E[e^{\theta Z_j}] = E[e^{\theta(a(i)-c)}] = e^{-\theta c} E[e^{\theta a(i)}] = e^{-\theta c} \varphi_a(\theta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \lambda(\theta) &= \ln \varphi(\theta) = \ln e^{-\theta c} + \ln \varphi_a(\theta) = \lambda_a(\theta) - \theta c\end{aligned}$$

Preto pre spádovú konštantu δ podľa vzťahu (1.3.8) platí:

$$\delta = \max\{ \theta ; \lambda(\theta) \leq 0 \} \Rightarrow \delta = \max\{ \theta ; \lambda_a(\theta) \leq \theta c \}$$

Funkcia $\lambda_a(\theta)$ je konvexná a $\lambda_a(0) = 0$. Pre $\theta > 0$ sú obidve funkcie $\lambda_a(\theta)$ a θc rastúce a $\theta = 0$ je nulovým riešením rovnice $\lambda_a(\theta) = \theta c$. To znamená, že existuje nenulové riešenie δ , ktoré je zároveň maximom hodnôt θ , pre ktoré platí že funkcia θc je väčšia nanajvýš rovná funkcii $\lambda_a(\theta)$. Práve sme dokázali tvrdenie nasledujúcej vety:

Veta 1.3.1 *Nech jednolinkový systém má konštantnú kapacitu c a vstupný proces $A(t)$ s i.i.d. prírastkami $a(t)$. Nech funkcia $\lambda_a(\theta)$ je CGF prírastkov $a(t)$. Spádová konštantá δ je nenulovým riešením rovnice*

$$\lambda_a(\theta) = \theta c \tag{1.3.10}$$

Poznámka: Tvrdenie vety 1.3.1. hovorí, že ak vstupný proces $A(t)$ do jednolinkového systému má stacionárne a i.i.d. prírastky $a(i)$ s CGF $\lambda_a(\theta)$ a kapacita systému spĺňa podmienku $c = \lambda_a(\delta)/\delta$, potom pravdepodobnosť, že veľkosť fronty prekročí nejakú hodnotu n , $P(q > n)$, zaniká exponenciálne vzhľadom na n so spádovou konštantou δ :

$$P(q > n) \leq e^{-n\delta} \iff c = \frac{\lambda_a(\delta)}{\delta} = \frac{1}{\delta} E[e^{\delta a(i)}] \tag{1.3.11}$$

Nerovnosť $P(q > n) \leq e^{-n\delta}$ nazveme δ -kritérium QoS. Všetky predchádzajúce tvrdenia vedú k definícii veľmi dôležitého pojmu, **efektívna šírka pásma** (*Effective Bandwidth*), ktorú sformulujeme v nasledujúcej kapitole.

Veta 1.3.2 ($GI/D/1/\infty$)

Nech vstupný proces $A(t) = \sum_{i=1}^t a(i)$ do jednolinkového systému s konštantnou kapacitou c a s dĺžkou frontu q má stacionárne, ergodické a i.i.d. prírastky. Nech jeho efektívna šírka pásma je $\alpha(\theta, t)$. Potom platí

$$\alpha(\delta, t) = c \iff \forall n \in N, \quad P(q > n) \asymp e^{-n\delta} \quad (1.3.12)$$

Dôkaz:

Z vlastnosti (ii) efektívnej šírky pásma dostávame

$$\alpha(\theta, t) = c \iff \frac{\lambda_a(\theta)}{\theta} = c \iff \lambda_a(\theta) = \theta c$$

Z vety 1.3.1 vyplýva:

$$P(q > n) \asymp e^{-n\delta} \quad \text{kde } \delta \text{ je riešením rovnice } \lambda_a(\theta) = \theta c \quad \square$$

1.3.2 Dimenzovanie $Geo/D/1/\infty$

Model $Geo/D/1/\infty$ popisuje podľa Kendallovej klasifikácie systém s jednou linkou a nekonečným frontom, pričom doba vysielania τ , resp. kapacita c , je konštantná (D), a do systému vstupuje Bernoulliho proces (Geo) s pravdepodobnosťou výskytu paketu v časovom slotu p . Intenzita toku za časový interval dĺžky t je potom pt .

Na dimenzovanie systému použijeme vzťah (1.3.11):

$$P(q > n) = e^{-n\delta} \iff c = \alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} \ln [1 + p(e^\theta - 1)] \quad (1.3.13)$$

1.3.3 $M/D/1/\infty$

Nech do LBS vstupuje Poissonov tok rečových paketov s intenzitou $\lambda = 50$ p/s a doba vysielania paketov je konštantná, τ . Takýto systém sa označuje $M/D/1/\infty$. Aby sme mohli porovnať prístup pomocou klasickej teórie hromadnej obsluhy a prístup založený na princípe veľkých odchýlok, budeme za dĺžku frontu považovať celkový počet paketov v systéme. Určíme kapacitu tohto systému $c = 1/\tau$ pre danú pravdepodobnosť prekročenia určitej kritickej hodnoty $p = P(q > n)$.

Vstupný proces $A(t)$ do $M/D/1/\infty$ je Poissonov, $A(t) \sim Po(\lambda t)$, so stacionárnymi a i.i.d. prírastkami, $a(t) \sim Po(\lambda)$. Kapacitu servera sme označili c .

Vypočítame SCGF $\lambda(\theta)$ pracovného procesu:

$$\lambda(\theta) = \lambda_a(\theta) - \theta c = \lambda(e^\theta - 1) - \theta c = \lambda e^\theta - (\lambda + \theta c)$$

Určíme rýchlostnú funkciu $I(x)$:

$$I(x) = \sup_{\theta} \{ \theta x - \lambda(e^\theta - 1) + \theta c \}, \quad x = \lambda e^\theta - c \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \ln \frac{x+c}{\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I(x) = (x+c) \cdot \left[\ln \frac{x+c}{\lambda} - 1 \right] + \lambda \quad \text{pre} \quad x > -c$$

Ak použijeme na výpočet spádovej konštanty δ rýchlostnú funkciu $I(x)$, musíme minimalizovať nasledujúci výraz

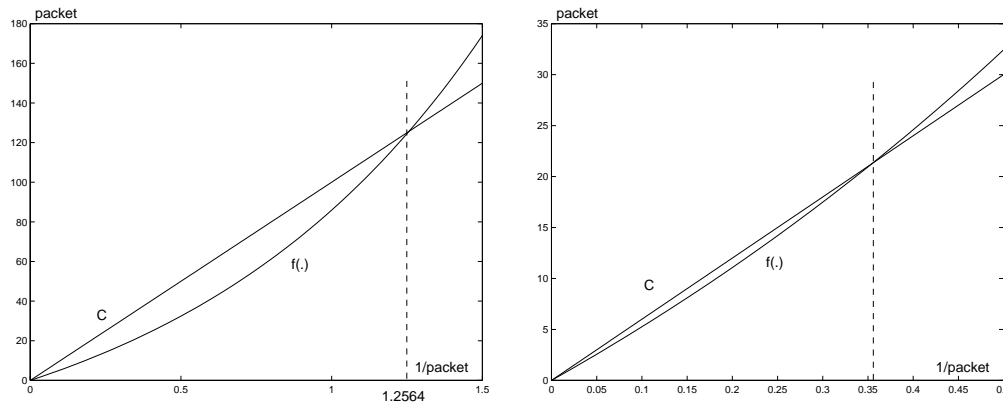
$$\delta = \min_x \frac{I(x)}{x} = \min_x \left[\frac{x+c}{x} \cdot [\ln(x+c) - \ln \lambda - 1] + \frac{\lambda}{x} \right]$$

čo znamená riešiť rovnicu $\frac{d}{dx} \frac{I(x)}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x+c(\ln \lambda + 1) = c \ln(x+c) + \lambda$

Vidíme, že rovnica nemá analytické riešenie. Preto použijeme vetu 1.3.1:

$$\lambda_a(\theta) = \theta c \quad \Rightarrow \quad \lambda(e^\theta - 1) = \theta c$$

Na zistenie spádovej konštanty δ pomocou danej intenzity λ a kapacity c musíme použiť numerické metódy.



Obr. 1.7: $f(\theta) = \lambda(e^\theta - 1)$ s $\lambda = 50p/s$ a s $c = 100p/s$ a $c = 60p/s$

Pomocou numerických metód sme pre kapacitu $c = 100p/s$ získali hodnotu $\delta = 1.256p^{-1}$ a pre $c = 60p/s$ hodnotu $\delta = 0.354p^{-1}$.

Teraz bude našou úlohou navrhnúť minimálnu kapacitu servera c pre danú pravdepodobnosť prekročenia nejakej dĺžky frontu $P(q > n)$. Vieme, že podmienkou pre stabilizáciu v čase systému $M/D/1/\infty$ je $\lambda < c$. Aby navyše pravdepodobnosť pretečenia klesala exponenciálne, musí podľa LDP platiť:

$$\lambda_a(\theta) = \theta c \quad \Rightarrow \quad \lambda(e^\theta - 1) = \theta c \quad \Rightarrow \quad c = \lambda \frac{e^\theta - 1}{\theta} \quad (1.3.14)$$

V takomto prípade hovoríme, že systém spĺňa θ -kritérium QoS.

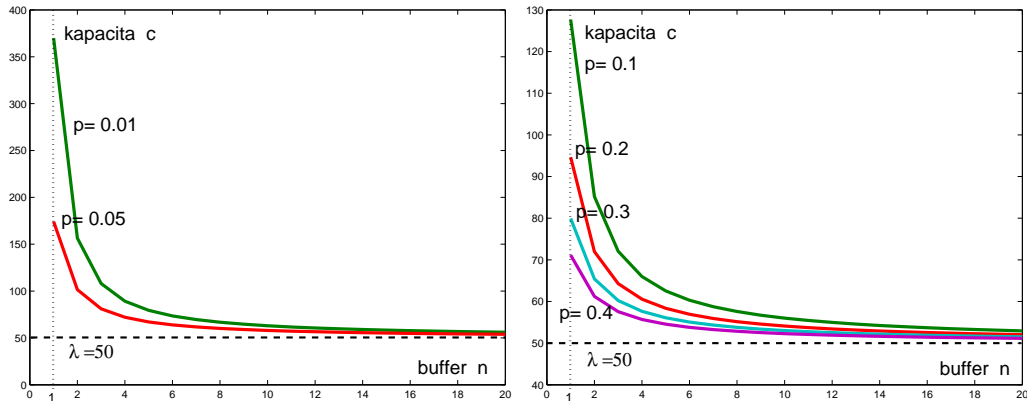
Určiť minimálnu kapacitu serveru c pre danú pravdepodobnosť prekročenia nejakej medznej hodnoty n , pričom systém bude spĺňať QoS, je jednoduché:

$$p = P(q > n) \leq e^{-n\delta} = p \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{-\ln p}{n} \quad \Rightarrow \quad c = \lambda \cdot \frac{n(1 - p^{-1/n})}{\ln p}$$

Dostali sme explicitné vyjadrenie kapacity c pre dané n a p .

$n \setminus p$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
1	1074.88	317.12	195.43	124.27	96.90	81.85
2	195.43	115.90	93.91	76.80	68.58	63.42
3	118.61	85.84	75.20	66.17	61.52	58.48
4	93.91	74.42	67.60	61.56	58.34	56.19
5	82.08	68.48	63.50	58.98	56.53	54.87
6	75.20	64.85	60.95	57.35	55.37	54.02
7	70.73	62.40	59.20	56.22	54.56	53.42
8	67.60	60.65	57.94	55.38	53.96	52.98
9	65.28	59.33	56.99	54.75	53.50	52.63
10	63.50	58.30	56.22	54.25	53.13	52.36

Tab. 1.1: Kapacita c pre $M/D/1/\infty$ pomocou LDP



Obr. 1.8: Kapacita c pre $p = 0.01, 0.05$ a $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

Príklad 1.3.1 *Nech je tok rečových paketov Poissonov s $\lambda = 50$ p/s a maximálna veľkosť buffera je $n = 10$. Máme určiť kapacitu c tak, aby pravdepodobnosť straty paketu bola menšia než 0.05. Použijeme vzťah (1.3.14):*

$$c = \lambda \frac{e^\delta - 1}{\delta} = \lambda \cdot \frac{n(1 - p^{-1/n})}{\ln p} = 50 \cdot \frac{10(1 - 0.05^{-1/10})}{\ln 0.05} = 58.3 \text{ p/s}$$

Ak by sme mali k dispozícii buffer s polovičnou veľkosťou, potrebná kapacita linky by sa zvýšila:

$$c = 50 \cdot \frac{5(1 - 0.05^{-1/5})}{\ln 0.05} = 68.5 \text{ p/s}$$

1.3.4 Systém s variabilnou kapacitou

Budeme sa zaoberať jednolinkovým systémom hromadnej obsluhy (*single server queue*) s variabilnou kapacitou $c(t)$ a s neohraničenou dĺžkou frontu (*buffer*). Predpokladáme diskretný čas $t = 0, 1, 2, \dots$. **Výstupný proces** (*Output process*) výchádzajúci zo systému popíšeme postupnosťou náhodných premenných $C(\cdot) \equiv \{C(t), t = 0, 1, 2, \dots\}$, pričom $C(t)$ je kumulatívny počet výstupov za čas t . Ďalej predpokladáme

$$C(0) = 0, \quad \forall s \leq t; \quad C(s) \leq C(t)$$

Označíme $c(t)$ počet paketov vystupujúcich zo systému za čas t . Náhodné premenné $c(t)$ predstavujú variabilnú kapacitu kanála. Budeme predpokladať, že $c(t)$ sú stacionárne, nezávislé a rovnako rozdelené (i.i.d) náhodné premenné s $Ea(t) < Ec(t)$. V takom prípade hovoríme o **výstupnom procese so stacionárnymi a nezávislými prírastkami**. Platí

$$c(t) = C(t) - C(t-1) \quad , \text{ resp. } \quad C(t) = \sum_{i=1}^t c(i)$$

Jednolinkový systém s kapacitou $c(t)$ spĺňa **Lindleyho rovnicu**:

$$q(t) = \max\{0, q(t-1) + a(t) - c(t)\} = (q(t-1) + a(t) - c(t))^+$$

Lema 1.3.1 *Nech náhodný proces s diskretným časom $A(t)$ je vstupný proces vstupujúci do práce zachovávajúceho jednolinkového systému a $C(t)$ je jeho výstupný proces. Nech $q(t)$ je dĺžka frontu v čase t . Ak v čase $t = 0$ je front prázdny, $q(0) = 0$, potom platí*

$$q(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{A(t) - A(s) - (C(t) - C(s))\}$$

Dôkaz:

Dôkaz je identický s dôkazom lemy ??

Rovnako, ako v predchádzajúcej kapitole zavedieme záťažový proces $\{W_t\}_{t \geq 0}$, $W_t = Z_1 + \dots + Z_t$ pre $t > 0$ a $W_0 = 0$ pričom $Z_{t-i+1} = a(i) - c(i)$. Keďže náhodné premenné $a(i)$ a $c(i)$ sú stacionárne a i.i.d. s $Ea(t) < Ec(t)$, potom aj Z_i sú stacionárne a i.i.d s $EZ_i < 0$. V takom prípade dĺžka frontu v čase t konverguje podľa rozdelenia ku konečnej náhodnej premennej q (pozri [21]).

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq t} \{W_i\} \Rightarrow q = \max_{t \geq 0} \{W_t\}$$

Veta 1.3.3 *Nech jednolinkový systém má variabilnú kapacitu $c(t)$ a vstupný proces $A(t)$ má stacionárne a i.i.d. prírastky $a(t)$. Označíme CGF náhodných premenných $a(t)$ ako $\lambda_a(\theta)$ a CGF náhodných premenných $c(t)$ ako $\lambda_c(\theta)$. Potom spádová konštanta δ je nenulovým riešením rovnice*

$$\lambda_a(\theta) = -\lambda_c(-\theta) \quad (1.3.15)$$

Dôkaz:

Vieme, že $Z_{t-i+1} = a(i) - c(i)$. Pre zjednodušenie preznačíme $j = t - i + 1$ a využijeme stacionárnosť:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= E[e^{\theta Z_j}] = E[e^{\theta(a(i)-c(i))}] = E[e^{\theta a(i)} e^{-\theta c(i)}] = \varphi_a(\theta) \varphi_c(-\theta) \Rightarrow \\ \lambda(\theta) &= \lambda_a(\theta) + \lambda_c(-\theta) \end{aligned}$$

Preto pre spádovú konštantu δ platí (pozri vetu ??):

$$\delta = \max\{\theta ; \lambda(\theta) \leq 0\} \Rightarrow \delta = \max\{\theta ; \lambda_a(\theta) \leq -\lambda_c(-\theta)\}$$

Vieme, že funkcia $f(\theta) = \lambda_a(\theta)$ je konvexná a $g(\theta) = -\lambda_c(-\theta)$ je konkávna. Pre $\theta > 0$ sú obidve funkcie rastúce a pre $\theta = 0$ platí $f(0) = g(0) = 0$. To znamená, že existuje nenulové riešenie rovnice $f(\theta) = g(\theta)$, ktoré je zároveň maximom hodnôt θ a pre ktoré platí, že rýdzo konkávna funkcia $g(\theta)$ je väčšia nanajvýš rovná rýdzo konvexnej $f(\theta)$. Riešením je spádová konštanta δ .

Veta 1.3.4 *(GI/G/1/ ∞)*

Nech vstupný proces $A(t) = \sum_{i=1}^t a(i)$ a výstupný proces $C(t) = \sum_{i=1}^t c(i)$ jednolinkového systému s dĺžkou frontu q majú stacionárne, ergodické a i.i.d. prírastky. Nech ich efektívne šírky pásma sú $\alpha_1(\theta, t)$ a $\alpha_2(\theta, t)$. Potom platí

$$\alpha_1(\delta, t) = \alpha_2(-\delta, t) \iff P(Q > n) \asymp e^{-n\delta} \quad (1.3.16)$$

Dôkaz:

Z vlastnosti (ii) efektívnej šírky pásma dostávame

$$\alpha_1(\theta, t) = \alpha_2(-\theta, t) \Rightarrow \frac{\lambda_a(\theta)}{\theta} = \frac{\lambda_c(-\theta)}{-\theta} \Rightarrow \lambda_a(\theta) = -\lambda_c(-\theta) = 0$$

Z vety ?? a vety 1.3.3 vyplýva:

$$P(q > n) \asymp e^{-n\delta} \quad \text{kde } \delta \text{ je riešením rovnice } \lambda_a(\theta) = -\lambda_c(-\theta)$$

1.3.5 M/M/1/∞

Do Markovovho systému M/M/1/∞ vstupuje Poissonov tok paketov s intenzitou $\lambda = 50$ p/s a doba vysielania paketov je exponenciálna s intenzitou μ . Vo fronte sa môže hromadiť neobmedzený počet paketov, pričom za dĺžku frontu považujeme celkový počet paketov v systéme. Na určenie kapacity μ najprv využijeme klasickú THO a výsledky porovnáme s použitím LDP. Nech vstupný a výstupný proces v M/M/1/∞ je Poissonov, $A(t) \sim Po(\lambda t)$ a $C(t) \sim Po(\mu t)$, so stacionárnymi a i.i.d. prírastkami $a(t)$ a $c(t)$. Určíme SCGF záťažového procesu:

$$\lambda(\theta) = \lambda(e^\theta - 1) + \mu(e^{-\theta} - 1) = \lambda e^\theta + \mu e^{-\theta} - (\lambda + \mu)$$

Rýchlostná funkcia $I(x)$ má tvar:

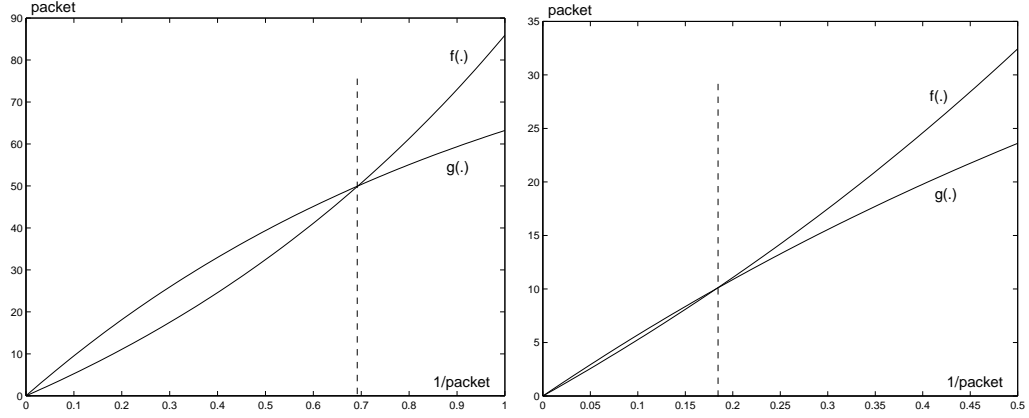
$$I(x) = \sup_{\theta} \{ \theta x - \lambda e^\theta - \mu e^{-\theta} + \lambda + \mu \}, \quad x - \lambda e^\theta + \mu e^{-\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(x) = x \cdot \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4\lambda\mu}}{2\lambda} - \sqrt{x^2 + 4\lambda\mu} + \lambda + \mu$$

Ak by sme chceli na výpočet spádovej konštanty δ použiť rýchlostnú funkciu $I(x)$, museli by sme minimalizovať výraz

$$\delta = \min_x \frac{I(x)}{x} = \min_x \left[\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4\lambda\mu}}{2\lambda} - \frac{\sqrt{x^2 + 4\lambda\mu} + \lambda + \mu}{x} \right]$$

My však zvolíme jednoduchšiu cestu a na výpočet δ použijeme funkciu CGF:



Obr. 1.9: $f(\theta) = \lambda(e^\theta - 1)$ s $\lambda = 50$, $g(\theta) = \mu(1 - e^{-\theta})$ s $\mu = 100, 60$

$$\begin{aligned} \lambda_a(\theta) = -\lambda_c(-\theta) &\Rightarrow \lambda(e^\theta - 1) = \mu(1 - e^{-\theta}) \Rightarrow \lambda(e^\theta - 1)e^\theta = \mu(e^\theta - 1) \\ &\Rightarrow \lambda e^\theta = \mu \Rightarrow \delta = \theta = \ln \lambda - \ln \mu \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Jednoduchým výpočtom sme pre $\mu = 100$ p/s získali hodnotu spádovej konštanty $\delta = 0.693$ p⁻¹ a pre $\mu = 60$ p/s hodnotu $\delta = 0.182$ p⁻¹.

Pomocou LDP sme ukázali, že podmienka pre intenzity vstupu a výstupu s ohľadom na splnenie θ -kritéria QoS je $\lambda e^\delta = \mu$, resp. $\lambda/\mu = e^{-\delta}$. Overíme či tento poznatok korešponduje s klasickou teóriou hromadnej obsluhy:

$$P(q > n) = (\lambda/\mu)^{n+1} = \varrho^{n+1} = (e^{-\delta})^{n+1} = e^{-(n+1)\delta} \leq e^{-n\delta}$$

Ak je splnená podmienka $\lambda/\mu = e^{-\delta}$, aj podľa klasickej teórie hromadnej obsluhy pravdepodobnosť pretečenia buffera klesá exponenciálne.

Vieme navrhnúť minimálnu kapacitu kanála tak, aby sme zaručili, že pravdepodobnosť pretečenia bucketu bude menšia ako nejaká daná hodnota p :

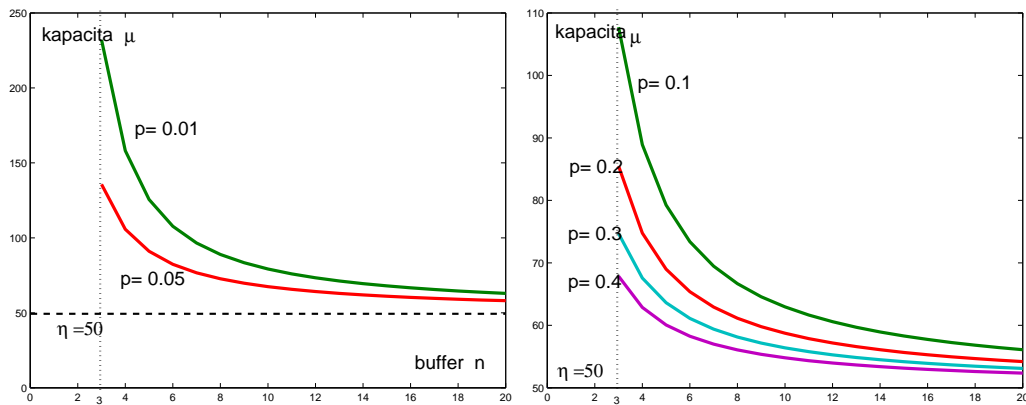
$$p = P(q > n) \leq e^{-n\delta} \Rightarrow \delta = \frac{-\ln p}{n} \Rightarrow \mu = \lambda e^\delta = \lambda p^{-(1/n)}$$

Dostali sme explicitné vyjadrenie kapacity c pre dané n a p .

Príklad 1.3.2 *Nech $\lambda = 50$ p/s a veľkosť buffera je $n = 10$. Treba určiť intenzitu vysielania μ tak, aby pravdepodobnosť straty paketu bola menšia než 0.05.*

$$THO : \mu = 50 \cdot 0.05^{-1/11} = 65.5 \text{ p/s} \quad LDP : \mu = 50 \cdot 0.05^{-1/10} = 67.5 \text{ p/s}$$

$n \setminus p$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
1	5000.00	1000.00	500.00	250.00	166.67	125.00
2	500.00	223.61	158.11	111.80	91.29	79.06
3	232.08	135.72	107.72	85.50	74.69	67.86
4	158.11	105.74	88.91	74.77	67.56	62.87
5	125.59	91.03	79.24	68.99	63.61	60.06
6	107.72	82.38	73.39	65.38	61.11	58.25
7	96.53	76.71	69.47	62.92	59.38	56.99
8	88.91	72.71	66.68	61.14	58.12	56.07
9	83.40	69.75	64.58	59.79	57.16	55.36
10	79.24	67.46	62.95	58.73	56.40	54.80

Tab. 1.2: Kapacita μ pre M/M/1/ ∞ pomocou LDPObr. 1.10: Kapacita μ pre $p = 0.01, 0.05$ a $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

Príklad 1.3.3 *Nech intenzita vstupu je $\lambda = 50p/s$ a intenzita vysielania $\mu = 60p/s$. Určte veľkosť buffera tak, aby server odmietal maximálne 5% paketov.*

$$\lambda e^{\delta} = \mu \Rightarrow \delta = \ln \frac{60}{50} = 0.182 \Rightarrow n = \frac{-\ln 0.05}{0.182} = 16.4 \Rightarrow n = 17$$

Príklad 1.3.4 *Ako sa zmení potrebná veľkosť buffera, ak sa intenzita vysielania paketov zvýši na $\mu = 100p/s$?*

$$\delta = \ln \frac{100}{50} = 0.693 \Rightarrow n = \frac{-\ln 0.05}{0.693} = 6.64 \Rightarrow n = 7$$

Príklad 1.3.5 *Intenzita vstupného toku paketov je $\lambda = 50p/s$, intenzita vysielania $\mu = 60p/s$. veľkosť buffera $n = 10$. Určte pravdepodobnosť straty*

paketu v takomto systéme:

$$\theta = \ln \frac{\mu}{\lambda} = \ln \frac{60}{50} = 0.18232 \quad \Rightarrow \quad p = e^{-0.18232 \cdot 10} = 0.1615$$

1.3.6 Markovove systémy s MMPP vstupom

V tejto kapitole budeme pomocou LDP určovať minimálnu kapacitu servera pre modely MMPP/M/1/ ∞ , čo znamená, že doba vysielania paketu je exponenciálna s intenzitou μ a vstupný tok rečových paketov je Poissonov s intenzitou $\lambda = 50$ p/s, ktorý je generovaný nejakým Markovovým On-Off zdrojom reči. Takýto tok sa v literatúre označuje aj ako Markovov odulovaný Poissonov proces (MMPP). Vstupný a výstupný proces má stacionárne a i.i.d. prírastky, preto podľa vety 1.3.4 pre spádovú konštantu δ platí:

$$\alpha_1(\delta, t) = \alpha_2(-\delta, t) \quad \Longleftrightarrow \quad P(Q > n) \asymp e^{-n\delta}$$

Efektívna šírka pásma (EB) pre výstupný tok je: $\alpha_2(\theta, t) = \mu \frac{e^\theta - 1}{\theta}$

Určíme efektívnu šírku pásma pre Markovov On-Off zdroj. Nech \mathbf{Q}_0 je matica intenzít prechodov medzi stavmi zdroja, a nech $\mathbf{\Lambda}$ je diagonálna matica s intenzitami Poissonových tokov prislúchajúcich k stavom Markovovho zdroja. Podľa [18] platí:

$$\alpha_1(\theta, t) = \frac{1}{\theta t} \ln E [e^{\theta A(t)}] = \frac{1}{\theta} sp [\mathbf{Q}_0 + (\mathbf{e}^\theta - \mathbf{1})\mathbf{\Lambda}] := \frac{h(\theta)}{\theta} \quad (1.3.18)$$

pričom $sp(\mathbf{F})$ je spektrálny rádius, resp. najväčšie vlastné číslo matice \mathbf{F} .

Pre kapacitu servera μ dostávame vzťah:

$$\alpha_1(\theta, t) = \alpha_2(-\theta, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{h(\theta)}{\theta} = \mu \frac{1 - e^{-\theta}}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{e^\theta}{e^\theta - 1} h(\theta)$$

Pre danú pravdepodobnosť pretečenia $P(q > n)$ vieme určiť minimálnu kapacitu μ :

$$p = P(q > n) \leq e^{-n\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\ln p}{-n} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{p^{-1/n}}{p^{-1/n} - 1} h\left(\frac{\ln p}{-n}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{1 - p^{1/n}} sp \left[\mathbf{Q}_0 + \frac{1 - \mathbf{p}^{1/n}}{\mathbf{p}^{1/n}} \mathbf{\Lambda} \right] \quad (1.3.19)$$

Dostali sme síce explicitné vyjadrenie pre kapacitu μ v závislosti od pravdepodobnosti pretečenia p a kritickej hodnoty n , ale na určenie spektrálneho rádiusu viacstavových zdrojov (viac než 2) budeme musieť riešiť polynomicke rovnice vyšších rádov.

1.3.7 M-M/M/1/ ∞

Vypočítame efektívnu šírku pásma (EB) pre exponenciálny M-M zdroj reči s parametrami $\alpha = 4.41 \text{ p}^{-1}$ a $\beta = 1.68 \text{ p}^{-1}$. Zdroj generuje Poissonov tok rečových paketov s intenzitou $\lambda = 50 \text{ p/s}$ a stredný počet paketov vychádzajúcich zo zdroja je $\eta = 13.793 \text{ p/s}$. Matice v (1.3.18) majú tvar:

$$\mathbf{Q}_0 + (\mathbf{e}^\theta - \mathbf{1})\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} + (\mathbf{e}^\theta - \mathbf{1}) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(e^\theta - 1) - \alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

Spektrálny rádius $h(\theta) = sp[\mathbf{Q}_0 + \theta\mathbf{\Lambda}]$ označíme x :

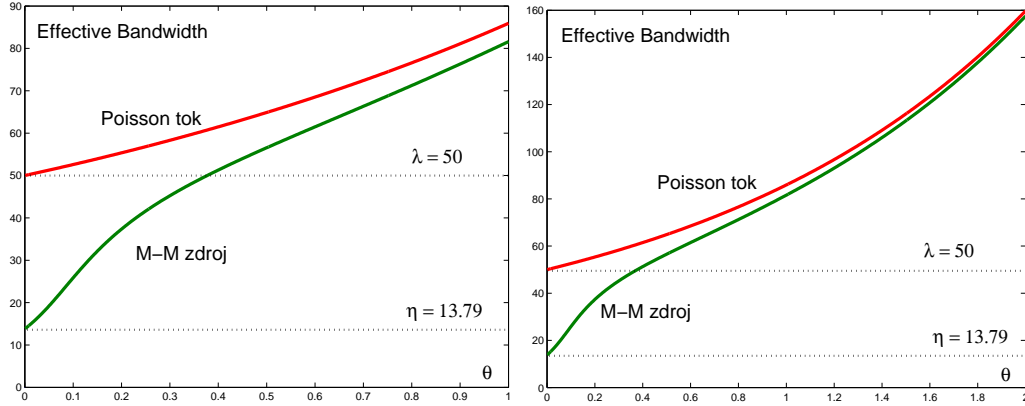
$$(\alpha - (e^\theta - 1)\lambda + x)(\beta + x) - \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 + x(\alpha + \beta - \lambda(e^\theta - 1)) - \lambda(e^\theta - 1)\beta = 0$$

Efektívna šírka pásma pre M-M zdroj má tvar:

$$\alpha_1(\theta, t) = \frac{\lambda(e^\theta - 1) - \alpha - \beta + \sqrt{(\alpha + \beta - \lambda(e^\theta - 1))^2 + 4\lambda(e^\theta - 1)\beta}}{2\theta}$$

Na obrázku vidíme, že pri zväčšujúcom sa parametre θ hodnota EB pre M-M zdroj konverguje zdola k EB pre Poissonov zdroj. Je to prirodzené, keby boli intenzity α a β nulové, M-M zdroj by sa zmenil na Poissonov zdroj:

$$\alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow \alpha_1(\theta, t) = \frac{\lambda(e^\theta - 1) + \sqrt{(-\lambda(e^\theta - 1))^2}}{2\theta} = \frac{\lambda(e^\theta - 1)}{\theta}$$

Obr. 1.11: EB pre Poissonov tok a M-M s $\lambda = 50$ p/s

Učíme minimálnu kapacitu μ pre pravdepodobnosť pretečenia buffera p :

$$\mu = \frac{\lambda(p^{-\frac{1}{n}} - 1) - \alpha - \beta + \sqrt{(\alpha + \beta - \lambda(p^{-\frac{1}{n}} - 1))^2 + 4\lambda(p^{-\frac{1}{n}} - 1)\beta}}{2(1 - p^{\frac{1}{n}})}$$

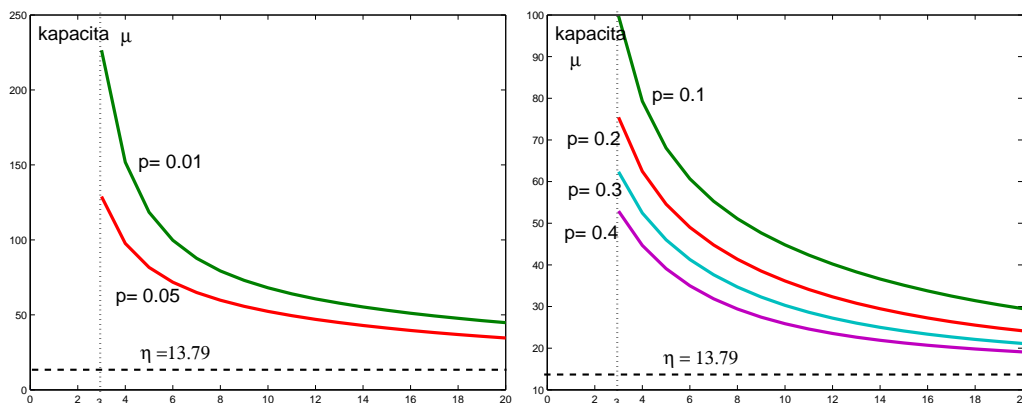
Dostali sme explicitné vyjadrenie pre kapacitu μ v závislosti od p a n .

$\alpha = 4.41 \text{ s}^{-1}$ $\beta = 1.68 \text{ s}^{-1}$ $\eta = 13.79 \text{ p/s}$	$n \setminus p$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
	1	4995.55	995.37	495.12	244.53	160.46	117.82
	2	495.12	217.98	151.77	104.05	81.96	67.82
	3	226.51	128.88	99.74	75.42	62.35	52.91
	4	151.77	97.64	79.30	62.45	52.45	44.67
	5	118.44	81.67	68.04	54.57	46.01	39.10
	6	99.74	71.79	60.66	49.02	41.29	34.99
	7	87.74	64.92	55.28	44.77	37.62	31.85
	8	79.30	59.76	51.09	41.35	34.68	29.40
	9	72.99	55.67	47.68	38.52	32.28	27.45
	10	68.04	52.31	44.81	36.13	30.29	25.88

Tab. 1.3: Intenzita μ pre M-M/M/1/ ∞ pomocou LDP

Príklad 1.3.6 Našou úlohou bude určiť minimálnu veľkosť buffera tak, aby pri intenzite vysielania $\mu = 60$ p/s server odmietal maximálne 5% paketov. Na rozdiel od príkladu 1.3.3 bude zdroj rečových paketov predstavovať exponenciálny M-M model s odporúčanými parametrami.

Získať explicitné vyjadrenie veľkosti frontu n je komplikované, preto na riešenie použiť predchádzajúcu tabuľku. V stĺpci pre pravdepodobnosť $p = 0.05$ zadanej intenzite $\mu = 60$ p/s zhruba zodpovedá hodnota 59.76. V takom prípade je veľkosť frontu $n = 8$. Je to skoro polovica oproti prípadu, keď sme tok

Obr. 1.12: Kapacita μ pre $p = 0.01, 0.05$ a $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

rečových paketov modelovali Poissonovým tokom (pozri príklad 1.3.3). Je to prirodzené, exponenciálny zdroj generuje v priemere len $13.8p/s$.

1.4 Použitie princípu veľkých odchýlok

1.4.1 Popis pomocou efektívnej šírky pásma

Priame využitie princípu veľkých odchýlok (LDP) pre jednolinkové systémy s konštantnou kapacitou vedie k definícii dôležitého pojmu: efektívna šírka pásma (*Effective Bandwidth* - EB). Tento pojem definoval Kelly v [17] pre ľubovoľný kumulatívny náhodný proces $A(t)$ nasledovne:

$$\alpha(\theta, t) = \frac{1}{\theta t} \sup_{s \geq 0} \ln E \left[e^{\theta(A(s+t) - A(s))} \right] \quad 0 < \theta, t < \infty \quad (1.4.1)$$

V predchádzajúcej kapitole sme EB zaviedli pre pre stacionárny proces s nezávislými prírastkami. Zavedenie pre ľubovoľný proces vyžaduje podstatne náročnejší matematický aparát, než je použitý v tejto publikácii.

Stacionárny proces

:

Ak má proces $A(t)$ **stacionárne** prírastky $a(i)$, rozdelenie pravdepodobnosti rozdielu $A(s+t) - A(s) = \sum_{i=s+1}^{s+t} a(i)$ je rovnaké ako rozdelenie pravdepodob-

nosti $A(t) = \sum_{i=1}^t a(i)$ a pre EB $\alpha(\theta, t)$ platí:

$$\alpha(\theta, t) = \frac{1}{\theta t} \sup_{s \geq 0} \ln E [e^{\theta(A(s+t) - A(s))}] = \frac{1}{\theta t} \ln E [e^{\theta A(t)}] \quad (1.4.2)$$

Určíme hodnotu EB v bode $\theta = 0$:

$$\alpha(0, t) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta t} \ln E [e^{\theta A(t)}] = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{E [A(t) e^{\theta A(t)}]}{E [e^{\theta A(t)}]} = \frac{E [A(t)]}{t} \quad (1.4.3)$$

Pri určení limity sme použili L'Hospitalove pravidlo. Hodnota EB v $\theta = 0$ sa dá chápať ako intenzita toku. Ďalej určíme hodnotu derivácie EB v nule:

$$\alpha'(0, t) = \left. \frac{\frac{E [A(t) e^{\theta A(t)}]}{E [e^{\theta A(t)}]} \theta - \ln E [e^{\theta A(t)}]}{t \theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{E [A(t)^2] - E^2 [A(t)]}{2t} \quad (1.4.4)$$

Na určenie derivácie sme použili L'Hospitalove pravidlo:

$$\dots = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2t\theta} \frac{E [A(t)^2 e^{\theta A(t)}] E [e^{\theta A(t)}] - E^2 [A(t) e^{\theta A(t)}]}{E [e^{\theta A(t)}]^2} \cdot \theta = \dots$$

Hodnota prvej derivácie EB v bode $\theta = 0$ predstavuje polovicu variancie procesu $A(t)$ za čas t .

Stacionárny proces s ohraňenými prírastkami

Nech má stacionárny proces $A(t)$ zhora ohraňené prírastky $a(i)$

$$\exists c \in R, \forall i, a(i) \leq c \quad (1.4.5)$$

potom efektívna šírka pásma procesu $A(t)$ sa nachádza medzi strednou hodnotou $m = E a(i)$ a horným ohraňením c , ktoré nazveme pík (*peak*) procesu:

$$\forall \theta > 0, \forall t > 0, m \leq \alpha(\theta, t) \leq c \quad (1.4.6)$$

Pre proces $A(t)$ sa dajú ľahko ukázať nasledujúce vzťahy:

$$E A(t) = \sum_{i=1}^t E a(i) = t \cdot m, \quad A(t) \leq \sum_{i=1}^t a(i) \leq t \cdot c$$

Jensenová nerovnosť tvrdí (pozri vzťah (1.1.6)) že pre ľubovoľnú konvexnú funkciu $f(\cdot)$, napr. $f(x) = e^{\theta x}$, a diskretnú náhodnú premennú X platí:

$$f(EX) \leq E[f(X)] \quad \text{napr.} \quad e^{\theta EA(t)} \leq E[e^{\theta A(t)}]$$

Postupne môžeme písať nerovnosti:

$$\begin{aligned} e^{\theta EA(t)} &\leq E[e^{\theta A(t)}] \leq e^{\theta tc} \Rightarrow \theta t Ea(i) \leq \ln E[e^{\theta A(t)}] \leq \theta tc \Rightarrow \\ \Rightarrow m &\leq \frac{1}{\theta t} \ln E[e^{\theta A(t)}] \leq c \Rightarrow m \leq \alpha(\theta, t) \leq c \end{aligned}$$

Efektívna šírka pásma v závislosti od θ a t leží niekde v "páse" medzi strednou hodnotou prírastkov a maximálnou hodnotou (píkom) procesu.

Príklad 1.4.1 *Nech v časovom slote (napr. 1ms) sa môžu vyskytnúť najviac 3 pakety s danými pravdepodobnosťami:*

$$P(a(i) = 0) = 0.729$$

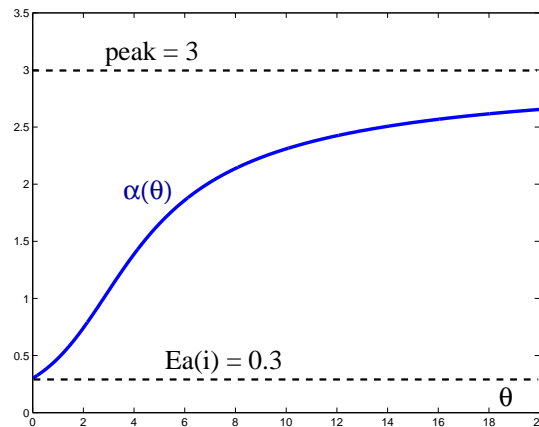
$$P(a(i) = 1) = 0.243$$

$$P(a(i) = 2) = 0.027$$

$$P(a(i) = 3) = 0.001$$

Stredný počet paketov v slote:

$$\begin{aligned} Ea(i) &= \\ &= 0.243 + 0.054 + 0.003 = 0.3 \end{aligned}$$



Obr. 1.13: EB: $\alpha(\theta) = \ln [0.729 + 0.243e^{\theta} + 0.027e^{2\theta} + 0.001e^{3\theta}] / \theta$

Efektívna šírka pásma procesu je zdola ohraničená strednou hodnotou počtu paketov (0.3) a zhora maximálnym počtom paketov v časovom slote (3).

Stacionárny proces a nezávislými prírastkami

:

Ak je proces stacionárny s nezávislými prírastkami (i.i.d.), tvar EB sa podstatne zjednoduší. Nech $\lambda_a(\theta)$ a $\varphi_a(\theta)$ sú CGF a MGF náhodných premenných $a(i)$. Pre zjednodušenie označíme $a(i)$ premennými X . Pre EB platí:

$$\alpha(\theta, t) = \frac{1}{\theta t} \ln E \left[e^{\theta \sum_{i=1}^t X} \right] = \frac{1}{\theta t} \ln E \left[\prod_{i=1}^t e^{\theta X} \right] = \frac{1}{\theta t} \ln \varphi_a(\theta)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\theta, t) = \alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} \ln \varphi_a(\theta) = \frac{\lambda_a(\theta)}{\theta} \quad (1.4.7)$$

Pre proces s i.i.d. prírastkami je EB rovná vyškálovanej CGF. Budeme ju označovať $\alpha(\theta)$. Výpočet derivácii v $\theta = 0$ sa podstatne zjednoduší. Použijeme už odvodené vzťahy pre CGF: $\lambda'_a(0) = EX$, $\lambda''_a(0) = DX$. Pri výpočte použijeme L'Hospitalove pravidlo:

$$\alpha(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\lambda_a(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\lambda'_a(\theta)}{1} = \lambda'_a(0) = EX$$

$$\alpha'(0) = \left. \frac{\lambda'_a(\theta)\theta - \lambda_a(\theta)}{\theta^2} \right|_{\theta=0} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\lambda''_a(\theta) \cdot \theta - \lambda'_a(\theta) + \lambda'_a(\theta)}{2\theta} = \frac{\lambda''_a(0)}{2} = \frac{DX}{2}$$

1.4.2 Regulárny proces

Budeme sa zaoberať konkrétnymi procesmi, ktoré sa najčastejšie používajú na modelovanie datových prenosov na sieti. Samozrejme najjednoduchším modelom je **Regulárny proces** s konštantnou intenzitou toku dát r . Efektívna šírka pásme takéhoto toku je Samozrejme najjednoduchším modelom je **Regulárny proces** s konštantnou intenzitou toku dát r . Efektívna šírka pásme takéhoto toku je

$$\alpha(\theta, t) = \frac{1}{\theta t} \sup_{s \geq 0} \ln E [e^{\theta(r \cdot (s+t) - r \cdot (s))}] = \frac{1}{\theta t} \ln [e^{\theta r t}] = \frac{\theta r t}{\theta t} = r \quad (1.4.8)$$

Tento proces je síce jednoduchý, ale ani zďaleka neodpovedá reálnej situácii v IP sieti. Preto sa ďalej budeme zaoberať stochastickými procesmi, ktoré poskytujú široké možnosti modelovania reálnych tokov. Obmedzíme sa na stacionárne toky $A(t)$ s nezávislými prírastkami $a(i)$, $A(t) = \sum_{i=1}^t a(i)$, ktoré považujeme pre reálne použitie za postačujúce. Efektívnu šírku pásma pre takého procesy budeme označovať zjednodušene $\alpha(\theta)$.

1.4.3 Bernoulliho proces

Efektívna šírka pásma pre Bernoulliho proces $Bi(nt, p)$ má tvar:

$$\alpha(\theta) = \frac{\lambda_a(\theta)}{\theta} = \frac{n}{\theta} \ln (1 + p(e^\theta - 1)) \quad (1.4.9)$$

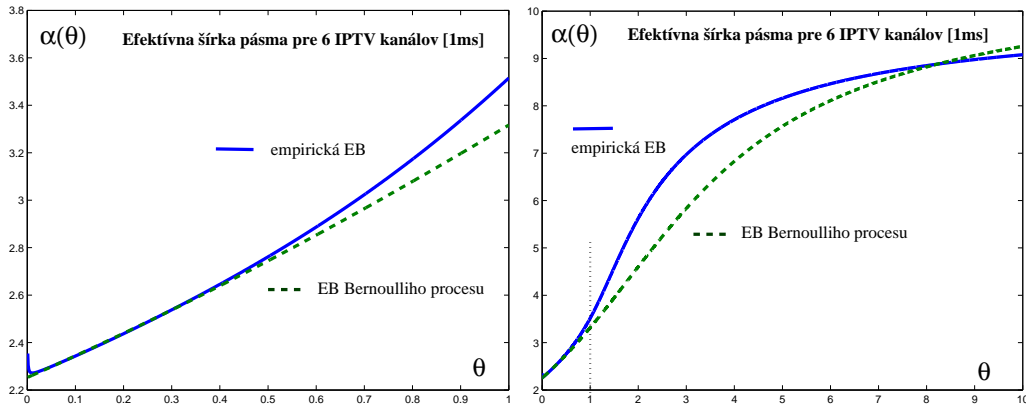
Určíme hodnotu šírky pásma v nule (L'Hospital):

$$\alpha(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{n \cdot \ln(1 - p + p \cdot e^\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{np \cdot e^\theta}{1 - p + p \cdot e^\theta} = np \quad (1.4.10)$$

Efektívna šírka pásma Bernoulliho procesu $Bi(nt, p)$ je zhora ohraničená. V jednom časovom slot, ktorý predstavuje súčet n elementárnych slotov, sa môže vyskytnúť najviac n paketov (s pravdepodobnosťou p^n). Preto pre prírastky procesu platí $\forall i; a(i) \leq n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha(\theta) = \frac{1}{\theta t} \ln E[e^{\theta A(t)}] \leq \frac{1}{\theta t} \ln E[e^{\theta nt}] = \frac{\ln[e^{\theta nt}]}{\theta t} = n \quad (1.4.11)$$

Vrátime sa k príkladu modelovania toku dát 6 IPTV kanálov, pričom sa budeme zaoberať len prípadom, keď je časový slot 1ms. Na nasledujúcich obrázkoch je porovnanie priebehu empiricky získanej efektívnej šírky pásma priamo z nameraných dát, a jej aproximácie pomocou šírky pásma Bernoulliho procesu $A(t) \sim Bi(11t, 0.2048)$.



Obr. 1.14: porovnanie EB pre IPTV a Bernoulliho proces $Bi(11t, 0.2048)$

Na prvom obrázku je porovnanie EB pre tok 6 IPTV kanálov a Bernoulliho proces v rozpätí $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$, na druhom $\theta \in \langle 0, 10 \rangle$. Pre potreby dimenzovania kapacity linky (vid. nasledujúca kapitola) nám väčšinou stačí rozsah priestorového parametra $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$. Na tomto intervale môžeme považovať obidve šírky pásma za zhodné.

1.4.4 Poissonov proces

Efektívna šírka pásma pre Poissonov proces $A(t) \sim Po(\lambda t)$ má tvar:

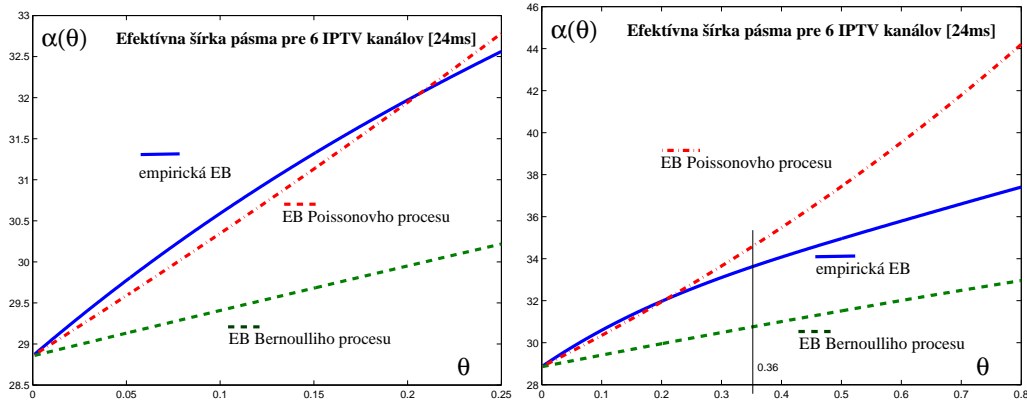
$$\alpha(\theta) = \frac{\lambda_a(\theta)}{\theta} = \lambda \frac{e^\theta - 1}{\theta} \quad (1.4.12)$$

Určíme hodnotu EB v bode $\theta = 0$ pomocou L'Hospitalového pravidla:

$$\alpha(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \lambda \frac{e^\theta - 1}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \lambda \frac{e^\theta}{1} = \lambda = Ea(i)$$

Prírastky procesu nie sú ohraňované, a preto neexistuje peak procesu.

V predchádzajúcej kapitole sme videli, že pri aproximácii rozdelenia pravdepodobnosti výskytu paketov v toku 6 kanálov IPTV dosahuje Poissonov proces podstatne lepšie výsledky než proces Bernoulliho. Táto skutočnosť sa samozrejme prejaví aj na tvare odpovedajúcich efektívnych šíriek pásma:



Obr. 1.15: Efektívna šírka pásma pre tok 6 kanálov IPTV

Podľa priebehu grafov EB vidíme, že aproximáciu pomocou Poissonovho procesu môžeme použiť až po veľkosť rozmerového parametra $\theta = 0.36$ (odchýlka od empirickej EB je menej než jeden paket).

1.4.5 Markovove modulované procesy

Podstatne komplikovanejší popis IP tokov predstavuje Markovov modulovaný proces (MMP). V predchádzajúcich prípadoch sme uvažovali procesy, pri ktorých sa nemenila intenzita toku. V MMP procese pripúšťame zmenu intenzít, a vo všeobecnosti aj zmenu pravdepodobnostného charakteru toku, podľa istých pravidiel. Tieto pravidla predstavuje Markovov reťazec X_l . Podľa realizácii Markovovho reťazca sa MMP proces $A(t)$ "prepína" medzi rôznymi i.i.d. procesmi. Pre každý stav i Markovovho reťazca je definovaný i.i.d. proces, ktorý je popísaný momentovou vytvárajúcou funkciou $\varphi_i(\theta)$:

$$\varphi_i(\theta) = E[e^{\theta a(\tau)} | X_l = i] \quad (1.4.13)$$

Keďže proces $A(t)$ je stacionárny, jeho prírastky sme označili $a(\tau)$, pričom τ predstavuje ľubovoľný čas (resp. index).

V praxi sú najčastejšie používané 2-stavové MMP procesy, pretože pre tieto procesy existuje analytické vyjadrenie Efektívnej šírky pásma. Proces sa môže prepínať medzi:

- dvoma regulárnymi procesmi - popis pre rôzne prevádzky
- dvoma Poissonovými procesmi s rozdielnymi intenzitami - Markovov modulovaný Poissonov proces (MMPP)
- stavom On a stavom Off, v ktorom je nulová intenzita (model VoIP)

Vo všeobecnosti môžu byť pre stavy Markovovho reťazca X definované ľubovoľné procesy s i.i.d. prírastkami.

1.4.6 Markovov modulovaný proces s diskretným časom

Budeme uvažovať o Markovovom reťazci X_t s diskretným časom, s konečnou množinou stavov $S = \{1, 2, \dots, m\}$ a maticou pravdepodobností prechodov medzi stavmi $\mathbf{P} = \{p_{i,j}\}$. Jeho stacionárne rozdelenie označíme $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$. Našou snahou bude určiť MGF $\varphi(\theta, t)$ procesu $A(t)$. Na výpočet použijeme tzv. "backward" rovnice:

$$\varphi(\theta, t) = E[e^{\theta A(t)}] = \sum_{i=1}^m E[e^{\theta A(t)} | X_t = i] \cdot P(X_t = i)$$

Ak označíme vektor $\boldsymbol{\psi}(\theta, t) = (E[e^{\theta A(t)} | X_t = 1], \dots, E[e^{\theta A(t)} | X_t = m])$, dostávame maticový zápis:

$$\varphi(\theta, t) = \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\psi}(\theta, t)^T \quad (1.4.14)$$

Určíme podmienené stredné hodnoty:

$$E[e^{\theta A(t)} | X_t = i] =$$

$$\begin{aligned}
&= E [e^{\theta a(1)} | X_l = i] \cdot E [e^{\theta(A(t)-A(1))} | X_l = i] = \\
&= \varphi_i(\theta) \sum_{j=1}^m E [e^{\theta(A(t)-A(1))} | X_{l+1} = j, X_l = i] \cdot P(X_{l+1} = j | X_l = i) = \\
&= \varphi_i(\theta) \sum_{j=1}^m E [e^{\theta(A(t)-A(1))} | X_{l+1} = j] \cdot p_{i,j} = \\
&= \varphi_i(\theta) \sum_{j=1}^m E [e^{\theta(A(t-1))} | X_l = j] \cdot p_{i,j}
\end{aligned}$$

V prvom kroku sme použili vzťah $a(1) = A(1)$ resp. $a(1) = A(t) - A(1)$, v druhom kroku Vetu o úplnej pravdepodobnosti, v treťom kroku Markovovu vlastnosť a vo štvrtom kroku fakt, že proces $A(t)$ je stacionárny, preto platí $A(t-1) - A(1) = A(t-1)$, a Markovovu vetu, preto sa zhoduje podmienka $X_{l+1} = j$ s podmienkou $X_l = j$.

Nech $\phi(\theta)$ je diagonálna matica MGF funkcií, $\text{diag}(\varphi_1(\theta), \dots, \varphi_m(\theta))$. Uvažovaný vzťah pre podmienenú strednú hodnotu prepíšeme do maticového tvaru:

$$\psi(\theta, t)^T = \phi(\theta) \mathbf{P} \psi(\theta, t-1)^T = \dots = (\phi(\theta) \mathbf{P})^{t-1} \psi(\theta, 1)^T \quad (1.4.15)$$

Nech $\mathbf{1}^T$ je jednotkový vektor $(1, \dots, 1)^T$. Dostávame počiatočnú podmienku $\psi(\theta, 1)^T = \phi(\theta) \mathbf{1}^T$ Potom vzťah (1.4.14) má tvar:

$$\varphi(\theta, t) = E [e^{\theta A(t)}] = \boldsymbol{\pi} (\phi(\theta) \mathbf{P})^{t-1} \phi(\theta) \mathbf{1}^T \quad (1.4.16)$$

Z Perron-Frobeniusovej vety vyplýva (pozri Chang [4]), že momentová vytvárajúca funkcia $\varphi(\theta, t)$ je rovná spektrálnemu rádiusu $sp(\cdot)$ (maximálne vlastné číslo) matice $\phi(\theta) \mathbf{P}$. EB pre MMP proces $A(t)$ má tvar

$$\alpha(\theta) = \frac{\ln sp(\phi(\theta) \mathbf{P})}{\theta} \quad (1.4.17)$$

1.4.7 2-stavový MMP s diskretným časom

Nech Markovov reťazec X_l je daný maticou pravdepodobností prechodov

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \text{ a procesy sú popísané maticou } \phi(\theta) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\theta) & 0 \\ 0 & \varphi_2(\theta) \end{pmatrix}$$

Na určenie EB musíme vypočítať najväčšie vlastné číslo matice $\phi(\theta) \mathbf{P}$:

$$\det |\phi(\theta)\mathbf{P} - x\mathbf{E}| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \varphi_1(\theta)p_{11} - x & \varphi_1(\theta)p_{12} \\ \varphi_2(\theta)p_{21} & \varphi_2(\theta)p_{22} - x \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - x[\varphi_1(\theta)p_{11} + \varphi_2(\theta)p_{22}] + \varphi_1(\theta)\varphi_2(\theta)[p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12}] = 0$$

Najväčší koreň polynómu je spektrálny rádius $sp(\phi(\theta)\mathbf{P})$:

$$x = \frac{\varphi_1(\theta)p_{11} + \varphi_2(\theta)p_{22} + \sqrt{[\varphi_1(\theta)p_{11} + \varphi_2(\theta)p_{22}]^2 - 4\varphi_1(\theta)\varphi_2(\theta)[p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12}]}}{2}$$

Po úpravách dostávame EB pre 2-stavový Markovov Modulovaný proces:

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} \ln \left[\frac{\varphi_1(\theta)p_{11} + \varphi_2(\theta)p_{22} + \sqrt{[\varphi_1(\theta)p_{11} - \varphi_2(\theta)p_{22}]^2 + 4\varphi_1(\theta)\varphi_2(\theta)p_{21}p_{12}}}{2} \right]$$

2-stavový Markovov Modulovaný Regulárny proces - MMRP

Pre stavy Markovovho reťazca 1 a 2 definujeme regulárne procesy s prírastkami $a_1(\tau) = r_1$ a $a_2(\tau) = r_2$. Pre MGF regulárnych procesov platí

$$\varphi_i(\theta) = E[e^{\theta a_i(\tau)}] = E[e^{\theta r_i}] = e^{\theta r_i}$$

Efektívna šírka pásma pre MMRP má tvar:

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} \ln \left[\frac{e^{\theta r_1}p_{11} + e^{\theta r_2}p_{22} + \sqrt{[e^{\theta r_1}p_{11} - e^{\theta r_2}p_{22}]^2 + 4e^{\theta(r_1+r_2)}p_{21}p_{12}}}{2} \right] \quad (1.4.18)$$

MMRP On/Off zdroj

Stav 1 Markovovho reťazca bude predstavovať periódu On (zdroj je zapnutý), stav 2 periódu Off (zdroj je vypnutý). Prírastky procesu pre stav 1 sa rovnajú $a_1(\tau) = r$, prírastky procesu pre stav 2 sú nulové $a_0(\tau) = 0$. Jednotlivým procesom odpovedajú MGF funkcie:

$$\varphi_1(\theta) = E[e^{\theta a_1(\tau)}] = e^{\theta r} \quad \varphi_2(\theta) = E[e^{\theta a_2(\tau)}] = e^{0\theta} = 1$$

Efektívna šírka pásma pre On/Off zdroj má tvar:

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} \ln \left[\frac{e^{\theta r}p_{11} + p_{22} + \sqrt{[e^{\theta r}p_{11} - p_{22}]^2 + 4e^{\theta r}p_{21}p_{12}}}{2} \right] \quad (1.4.19)$$

Markovov Modulovaný Bernoulliho proces - MMBP

Pomocou rôznych kombinácií momentových generujúcich funkcií môžeme podľa potreby vytvárať rôzne modulované procesy. Markovov Modulovaný Bernoulliho proces nazveme proces, ktorý má pre každý stav Markovovho reťazca i definovaný Bernoulliho proces s rôznou pravdepodobnosťou výskytu paketu v časovom slot. Odpovedajúca MGF má tvar

$$\varphi_i(\theta) = q_i + p_i e^\theta, \quad q_i = 1 - p_i$$

Jednoduchým spôsobom môžeme určiť Efektívnu šírku pásma pre MMBP On/Off zdroj. V stave 1 definujeme Bernoulliho proces s pravdepodobnosťou výskytu paketu p , v stave 2 je zdroj vypnutý:

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{\theta} \ln \left[\frac{(q+pe^\theta)p_{11} + p_{22} + \sqrt{[(q+pe^\theta)p_{11} - p_{22}]^2 + 4(q+pe^\theta)p_{21}p_{12}}}{2} \right] \quad (1.4.20)$$

MMP On/Off zdroje sa používajú ako modely VoIP prevádzky.

1.4.8 Markovov modulovaný proces so spojitým časom

Budeme uvažovať o Markovovom reťazci X_l so spojitým časom, s konečnou množinou stavov $S = \{1, 2, \dots, m\}$ a maticou intenzít prechodov medzi stavmi $\mathbf{Q} = \{q_{i,j}\}$. Stacionárne rozdelenie reťazca označíme $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$. Našou snahou bude určiť MGF $\varphi(\theta, t)$ procesu $A(t)$. Na výpočet použijeme tzv. "backward" rovnice:

$$\varphi(\theta, t) = E[e^{\theta A(t)}] = \sum_{i=1}^m E[e^{\theta A(t)} | X_t = i] P(X_t = i) = \sum_{i=1}^m \psi_i(\theta, t) \pi_i$$

Odvodíme vzťah pre podmienené stredné hodnoty $\psi_j(\theta, t)$:

$$\psi_j(\theta, t) = E[E[e^{\theta A(t)} | X_\epsilon] | X_0 = j] = \sum_{i=1}^m \psi_i(\theta, t-\epsilon) e^{\epsilon \mathbf{Q}_{j,i}} \varphi_j(\epsilon \theta) + o(\epsilon) \quad (1.4.21)$$

Markovov modulovaný regulárny proces so spojitým časom

Pre každý stav j Markovovho reťazca máme definovaný regulárny proces s intenzitou λ_j a označíme maticu $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonálnu maticu $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Vo vzťahu (1.4.21) použijeme Taylorove rozvoje:

$$e^{\epsilon \mathbf{Q}_{j,i}} = (\mathbf{E} + \epsilon \mathbf{Q})_{j,i} + o(\epsilon) \quad \varphi_j(\epsilon \theta) = e^{\epsilon \theta \lambda_j} = 1 + \epsilon \theta \lambda_j + o(\epsilon)$$

Po úpravách dostávame:

$$\frac{\psi_j(\theta, t) - \psi_j(\theta, t-\epsilon)}{\epsilon} = \psi_j(\theta, t-\epsilon)(q_{j,j} + \theta\lambda_j) + \sum_{i \neq j} \psi_i(\theta, t-\epsilon)q_{j,i} + \frac{o(\epsilon)}{\epsilon}$$

Nech $\epsilon \rightarrow 0$. Dostávame systém diferenciálnych rovníc:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_j(\theta, t) = \psi_j(\theta, t-\epsilon)(q_{j,j} + \theta\lambda_j) + \sum_{i \neq j} \psi_i(\theta, t-\epsilon)q_{j,i}$$

Riešenie pre maticový zapis má tvar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\psi}(\theta, t)^T = (\mathbf{Q} + \theta\mathbf{\Lambda})\boldsymbol{\psi}(\theta, t)^T \Rightarrow \boldsymbol{\psi}(\theta, t)^T = e^{(\mathbf{Q} + \theta\mathbf{\Lambda})t} \mathbf{1}^T$$

Získali sme momentovú vytvárajúcu funkciu pre MMP proces:

$$\varphi(\theta, t) = E[e^{\theta A(t)}] = \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{\psi}(\theta, t)^T = \boldsymbol{\pi} e^{(\mathbf{Q} + \theta\mathbf{\Lambda})t} \mathbf{1}^T \quad (1.4.22)$$

Z Perron-Frobeniovej vety vyplýva ([4]), že momentová vytvárajúca funkcia $\varphi(\theta, t)$ je rovná spektrálnemu rádiusu $sp(\cdot)$ (maximálne vlastné číslo) matice $e^{\mathbf{Q} + \theta\mathbf{\Lambda}}$. Pomocou vlastnosti spektrálneho rádiusu, $sp(\exp(\mathbf{F})) = \exp(sp(\mathbf{F}))$, dostávame Efektívnu šírku pásma pre MMP proces $A(t)$ so spojitým časom:

$$\alpha(\theta) = \frac{\ln sp(e^{\mathbf{Q} + \theta\mathbf{\Lambda}})}{\theta} \Rightarrow \alpha(\theta) = \frac{sp(\mathbf{Q} + \theta\mathbf{\Lambda})}{\theta} \quad (1.4.23)$$

2-stavový MMRP so spojitým časom

Nech Markovov reťazec X_t je daný maticou intenzít prechodov medzi stavmi

$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q_{12} & q_{12} \\ -q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$. Vypočítame najväčšie vlastné číslo matice $\mathbf{Q} + \theta\mathbf{\Lambda}$:

$$\det |\mathbf{Q} + \theta\mathbf{\Lambda} - x\mathbf{E}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \theta\lambda_1 - q_{12} - x & q_{12} \\ q_{21} & \theta\lambda_2 - q_{21} - x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x[\theta(\lambda_1 + \lambda_2) - (q_{12} + q_{21})] + \theta^2\lambda_1\lambda_2 - \theta[\lambda_1q_{21} + \lambda_2q_{1,2}] = 0$$

Vypočítame najväčší koreň polynómu a dostaneme Efektívnu šírku pásma pre 2-stavový Markovov Modulovaný proces so spojitým časom:

$$\alpha(\theta) = \frac{\theta(\lambda_1 + \lambda_2) - q_{12} - q_{21} + \sqrt{[\theta(\lambda_1 + \lambda_2) - q_{12} - q_{21}]^2 - 4\theta[\theta\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1q_{21} - \lambda_2q_{1,2}]}}{2\theta} \quad (1.4.24)$$

MMRP On/Off zdroj

Stav 1 Markovovho reťazca bude predstavovať periódu On (zdroj je zapnutý), stav 2 periódu Off (zdroj je vypnutý). V stave 1 proces generuje deterministický tok s intenzitou λ , v stave 2 tok s intenzitou 0. Intenzity dosadíme do vzťahu (1.4.24) a získame šírku pásma pre On/Off zdroj:

$$\alpha(\theta) = \frac{\theta\lambda - q_{12} - q_{21} + \sqrt{[\theta\lambda - q_{12} - q_{21}]^2 - 4\theta\lambda_1 q_{21}}}{2\theta} \quad (1.4.25)$$

1.4.9 Markovov modulovaný Poissonov proces

Pre každý stav Markovovho reťazca X_l definujeme Poissonov proces s intenzitou λ_l . MGF funkcia Poissonovho procesu je $\varphi_j(\theta) = \lambda_j(e^\theta - 1)$. Efektívna šírka pásma pre MMPP porces preto má tvar:

$$\alpha(\theta) = \frac{sp(\mathbf{Q} + (e^\theta - 1)\mathbf{\Lambda})}{\theta} \quad (1.4.26)$$

Analytické vyjadrenie Efektívnej šírky pásma môžeme dostať len pre 2 stavový MMPP proces. Pre viacstavové procesy je potrebné numericky riešiť polynomicke rovnice odpovedajúceho stupňa.

Nech intenzity prechodov $q_{i,j}$ v 2 stavovom MMPP sú $q_{1,2} = \alpha$ a $q_{2,1} = \beta$, intenzita Poissonovho procesu v prvom stave je λ_1 a v druhom λ_2 . Matice vo vzťahu (??) majú tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 + (e^\theta - 1)\mathbf{\Lambda} &= \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} + (e^\theta - 1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(e^\theta - 1) - \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda_2(e^\theta - 1) - \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

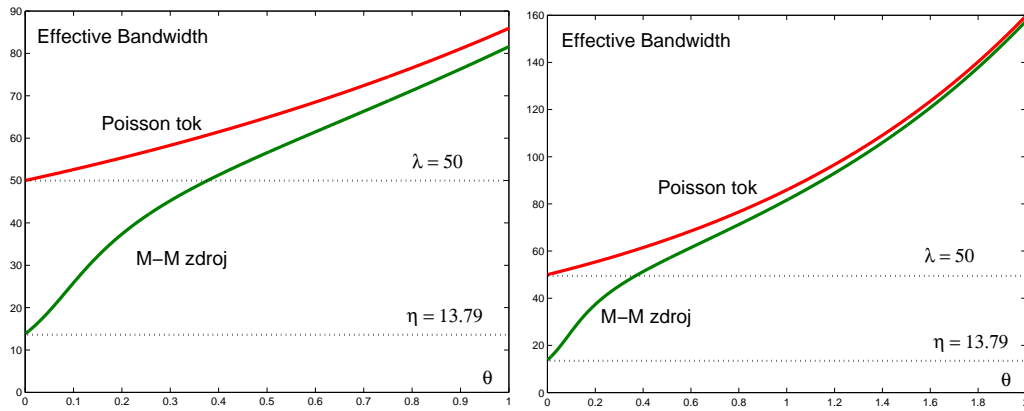
Spektrálny rádius $h(\theta) = sp[\mathbf{Q}_0 + \theta\mathbf{\Lambda}]$ označíme x :

$$(\lambda_1(e^\theta - 1) - \alpha)(\lambda_2(e^\theta - 1) - \beta) - \alpha\beta = 0$$

$$(\alpha - (e^\theta - 1)\lambda_1 + x)(\beta + x) - \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 + x(\alpha + \beta - \lambda_1(e^\theta - 1)) - \lambda_1(e^\theta - 1)\beta = 0$$

Efektívna šírka pásma pre M-M zdroj má tvar:

$$\alpha_1(\theta, t) = \frac{\lambda(e^\theta - 1) - \alpha - \beta + \sqrt{(\alpha + \beta - \lambda(e^\theta - 1))^2 + 4\lambda(e^\theta - 1)\beta}}{2\theta}$$

Obr. 1.16: EB pre Poissonov tok a M-M s $\lambda = 50$ p/s

Na obrázku vidíme, že pri zväčšujúcom sa parametre θ hodnota EB pre M-M zdroj konverguje zdola k EB pre Poissonov zdroj. Je to prirodzené, keby boli intenzity α a β nulové, M-M zdroj by sa zmenil na Poissonov zdroj:

$$\alpha = 0, \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1(\theta, t) = \frac{\lambda(e^\theta - 1) + \sqrt{(-\lambda(e^\theta - 1))^2}}{2\theta} = \frac{\lambda(e^\theta - 1)}{\theta}$$

Záver

Slovník termínov a skratiek

CSMA/CD Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection

KP Komunikačné prostredie

SHO Systémy hromadnej obsluhy

Literatúra

- [1] F. Baccelli a P. Bremaund: *Palm Probabilities and Stationary Queues*, New York: Springer-Verlag, 1987
- [2] D.Bertsekas, R. Gallager: *Data Networks*, Prentice-Hall, Inc., 0-13-196825-4, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987
- [3] A. Brandt, M. Brandt: *A Birth-Death Approximation for a Fluid Source in Token Bucket Model* Institut for Operation Research, Humboldt University, Berlin, 2004
- [4] Cheng Shang Chang, *Performance Guarantees in Communication Networks*, Springer Verlag, 2000
- [5] A. J. Chinčin: *Raboty po matematičeskoj teorii massovovo obsluživanja*, Gosudarstvennoje izdavateustvo fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva 1963
- [6] R. S. Ellis, K. Haven, B. Turkington, *Large Deviation Principles and Complete Equivalence and Nonequivalence Results for Pure and Mixed Ensembles*, Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts, USA, 2003
- [7] ETSI TC-NA, *Network Aspect (NA); General Aspect of Quality of Service and Network Performance*, ETSI Technical Report 003, Ref.: RTR/NA-142101, October 1994
- [8] EURESCOM Project P806-GI *EQoS - A Common Framework for QoS/Network Performance in a multi-Provider Environment*, Deliverable 2, Heidelberg, February 1999
- [9] FITCE Study Commission: *The Study of the Network Performance Considering Customer Requirements*, Final Report 1991-1993
- [10] J. Glyn: *Advanced Modern Engineering Mathematics*,

- [11] V. Guffens, G. Bastin, *Hop-by-hop congestion control with token buckets in feedback*, CESAME, Universite Catholique de Louvain, Belgium, 2003
- [12] W. Chen, S. Itoh, J. Shiki: *On sampling in shift invariant spaces*, IEEE Trans. Information Theory, vol. 48, no. 10, pp. 2802-2810, 2002.
- [13] P.F. Chimento, *Standard Token Bucket Terminology*, "qbone.internet2.edu/bb/Traffic.pdf", 2000
- [14] T. Chiotis, B. Maglaris, *The Effective Bandwidth Approach: Configuration of ATM Virtual Connection*, NETMODE, National Technical University of Athens f Denmark, "www.tele.dtu.dk/teletraffic", 2001
- [15] V. B. Iversen, *Fundamentals of Teletraffic Engineering*, Technical University
- [16] J. Kalas, *Markovove re»azce - skriptum*, Polygrafické. stredisko UK v Bratislave 1993
- [17] F. P. Kelly, *Notes on Effective Bandwidth*, "Stochastic Networks: Theory and Application", pages 141-168, Oxford University Press, 1996
- [18] G. Kesidis, J. Walrand, C.S. Chang, *Effective Bandwidths for Multiclass Markov Fluids and Other ATM Sources*, IEEE/ACM Tran. Networking, Vol. 1, pp 424-428, 1993
- [19] M. Klimo: *Voice over IP: Packet Loss and Jitter in E-model*, QoS Summit99, Paris, November 1999
- [20] P. Kluvánek, F. Brandalík, *Operačná Analýza I - skriptum*, ALFA - Bratislava 1981 Žilinská Univerzita v Žiline 1999
- [21] J. T. Lewis a R. Russell, *An Introduction to Large Deviations for Teletraffic Engineers*, October 24, 1996
- [22] R. M. Loynes: *The stability of a queue with non-independent interarrival and service time*, Proc. Camb. Fil. Soc., Vol. 58, pp. 497-520
- [23] I. Maravic and M. Vetterli: *Exact Sampling Results for Some Classes of Parametric Nonbandlimited 2-D Signals*, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 52, no. 1, Jan. 2004, pp. 175-189
- [24] NEW DIMENSIONS - P1112 EURESCOM Project, *QoS and performance models for streaming traffic*, 2002

-
- [25] Š. Peško, J. Smieško: *Stochastické modely operačnej analýzy*, Fakulta riadenia a informatiky, Žilinská univerzita v Žiline, ISBN 80-7100-570-3, Žilina, 2000
- [26] M. Schwartz: *Telecommunication Networks: Protocols, Modeling and Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, ISBN 0-201-16423-X, 1987
- [27] J. Smieško: *Exponential Model of Token Bucket System*, Communications, Scientific letters of the University of Žilina, 4/2003
- [28] J. Smieško: *Exponential Model of Modified Human Speech: On-Off Sources*, Journal of Information, Control and Management Systems, Faculty of Management Science and Informatics, University of Žilina, vol.2, no.2, 2004
- [29] R. Syski: *Intorduction to Congestion Theory in Telephone Systems*, Elsevier Science Publishers B.V., Netherlands, 1986
- [30] S. Ubik, *IP telefonie se SIP signalizaci*, CESNET, z.s.p.o., Sdělovací technika 2001/9, 2001/11, 2001 1993
- [31] T. Vala: *Úvod do VoIP*, atm.felk.cvut.cz/mps/referaty/2004/valat1/, ČVUT Praha, 2004