3 SIGNÁLOVÝ PRIESTOR

Definícia

Signálový (vektorový) priestor φ nad poľom $(F, \oplus, \odot)$ je množina takých signálov (vektorov), že ku každej dvojici signálov $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \varphi$ je jednoznačne priradený signál $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \in \varphi$ a každému signálu $\mathbf{f} \in \varphi$ a skaláru $k \in F$ je jednoznačne priradený signál $k \cdot \mathbf{f} \in \varphi$, pričom platí:

1. pre všetky $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \in \varphi$
   - $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1$ (súčet signálov je komutatívny)
   - $\mathbf{f}_1 + (\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) = (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) + \mathbf{f}_3$ (súčet signálov je asociatívny)
2. existuje signál $\mathbf{0} \in \varphi$, pre ktorý
   - $\mathbf{f} + \mathbf{0} = \mathbf{f}$ pre všetky $\mathbf{f} \in \varphi$
   - ku každému $\mathbf{f}_1 \in \varphi$ existuje $\mathbf{f}_2 \in \varphi$ tak, že $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{0}$
3. pre všetky $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \varphi$ a $k_1, k_2 \in F$
   - $1 \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1$
   - $k_1 \cdot (k_2 \cdot \mathbf{f}_1) = (k_1 \odot k_2) \cdot \mathbf{f}_1$
   - $k_1 \cdot (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) = k_1 \cdot \mathbf{f}_1 + k_1 \cdot \mathbf{f}_2$
   - $(k_1 \oplus k_2) \cdot \mathbf{f}_1 = k_1 \cdot \mathbf{f}_1 + k_2\, \mathbf{f}_1$

Príklad 1 - priestor číslicových signálov

Majme pole $(F_2, \underset{2}{\oplus}, \underset{2}{\odot})$ a množinu n-tíc

$$\varphi = \left\{ \mathbf{f} = (f_o, f_1, \ldots, f_{n-1}) : \ f_i \in F_2, \ i = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

Ak definujeme súčet signálov $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}' \in \varphi$ ako

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}' = g \Longleftrightarrow g_i = f_i \underset{2}{\oplus} f_i' \ ; \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

kde

$$\mathbf{f} = (f_o, f_1, \ldots, f_{n-1}), \ \mathbf{f}' = (f_o', f_1', \ldots, f_{n-1}'), \ \mathbf{g} = (g_o, g_1, \ldots, g_{n-1})$$

a súčin skalára $k \in F_2$ a signálu $\mathbf{f} \in \varphi$ ako

$$k \cdot \mathbf{f} = \mathbf{g} \Longleftrightarrow g_i = k \underset{2}{\odot} f_i \ , \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

potom táto štruktúra tvorí signálový priestor.

Príklad 2 - priestor číslicových signálov

Majme pole $(F_2, \underset{2}{\oplus}, \odot)$ a množinu φ všetkých formálnych polynómov stupňa nanajvýš n-1 $(n \in N)$

$$\varphi = \left\{ \mathbf{f} = f_o + f_1 z^{-1} + \ldots + f_{n-1} z^{n-1} : f_i \in F_2 , i = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

Ak súčet signálov $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in \varphi$ definujeme ako súčet polynómov mod 2, t.j.

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}' = \mathbf{g} \Longleftrightarrow \mathbf{g} = \mathbf{f} \underset{2}{\oplus} \mathbf{f}'$$

a súčin skalára $k \in F_2$ a signálu $\mathbf{f} \in \varphi$

$$k \cdot \mathbf{f} = \mathbf{g} \Longleftrightarrow g_i = k \underset{2}{\odot} f_i , \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

potom táto štruktúra tvorí signálový priestor.

Príklad 3 - priestor spojitých signálov

Majme pole $(R, +, .)$ a množinu všetkých deterministických spojitých signálov $\varphi = \left\{ \mathbf{f} = f(t) : t \in T \right\}$, kde $T \subset R$. Ak pre súčet signálov použijeme operáciu obyčajného sčítania, t.j.

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{g} \in \varphi$, kde $\mathbf{f}_1 = f_1(t)$, $\mathbf{f}_2 = f_2(t)$, $\mathbf{g} = g(t)$ platí

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{g} \Longleftrightarrow g(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

a pre násobenie skalárom $k \in R$ obyčajného násobenia

$$k \cdot \mathbf{f} = \mathbf{g} \Longleftrightarrow \mathbf{g}(t) = k \cdot f(t) \; ; \quad t \in T$$

potom táto štruktúra je signálovým priestorom.

Príklad 4 - priestor diskrétnych signálov

Majme pole $(R, +, .)$ a množinu všetkých n-tíc

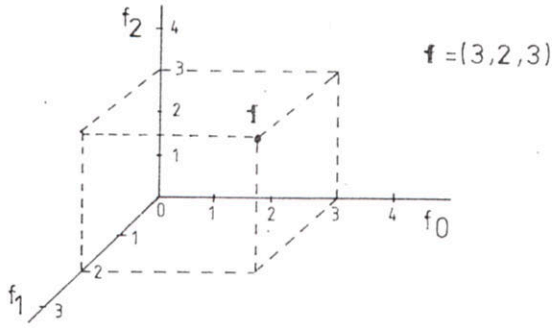
$$\varphi = \left\{ \mathbf{f} = (f_o, f_1, \ldots, f_{n-1}) : f_i \in R , \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

Nech pre všetky $\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{g} \in \varphi$ a $k \in R$ platí

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}' = \mathbf{g} \Longleftrightarrow g_i = f_i + f_i' , \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$k \cdot \mathbf{f} = \mathbf{g} \Longleftrightarrow g_i = k \cdot f_i , \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

potom štruktúra je signálovým priestorom a voláme ju súradnicový priestor. Súradnicový priestor umožňuje geometrickú interpretáciu diskrétneho signálu ako bodu v n-rozmernom priestore.



Obr. 5
Geometrická interpretácia diskrétneho signálu

Príklad 5 - priestor náhodných signálov

V predchádzajúcich príkladoch, aj keď sme to zvlášť neuviedli, išlo o deterministické signály. V tomto príklade sú vektormi spojité náhodné signály.

Majme pole (R, +, .) a množinu φ spojitých náhodných signálov s nulovou strednou hodnotou a konečným rozptylom

$$\varphi = \left\{ f(\omega, t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in T \right\}$$

Ak súčet signálov $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}'$ a násobenie reálnym číslom definujeme v zmysle kap. 2.5, potom štruktúra, v ktorej sú signály náhodné a skalármi sú reálne čísla je signálovým priestorom.

Pretože pojem signálového priestoru je totožný s pojmom lineárneho vektorového priestoru, s ktorým je čitateľ oboznámený, uvedieme len niektoré základné pojmy a vlastnosti signálového priestoru.

Definícia:

Nech je daný signálový priestor φ nad poľom (F, $\oplus$, $\odot$), signály $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n \in \varphi$ a skaláre $k_1, k_2, \dots, k_n \in F$. Výraz

$$k_1 \cdot \mathbf{f}_1 + k_2 \cdot \mathbf{f}_2 + \dots + k_n \mathbf{f}_n$$

nazývame lineárnou kombináciou signálov $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ s koeficientami $k_1, k_2, \dots, k_n$ a signál

$$\mathbf{f} = k_1 \cdot \mathbf{f}_1 + k_2 \cdot \mathbf{f}_2 + \dots + k_n \mathbf{f}_n$$

nazývame hodnotou tejto lineárnej kombinácie.

Definícia:

Signály $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ signálového priestoru φ voláme lineárne závislými, ak aspoň jeden signál je hodnotou lineárnej kombinácie niektorých iných uvedených signálov. V opačnom prípade signály voláme lineárne nezávislými.

Poznámka:

Miesto obratu "signál je hodnotou lineárnej kombinácie signálov", budeme používať zjednodušený obrat "signál je lineárnou kombináciou signálov", aj keď jeho doslovné chápanie nie je presné, pretože jeden signál môže byť hodnotou rôznych lineárnych kombinácií.

Veta:

Systém $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ signálov signálového priestoru je lineárne závislý práve vtedy, ak existuje netriviálna lineárna kombinácia signálov tohoto systému, ktorej hodnotou je nulový vektor $\mathbf{0}$.

Dôkaz je čitateľovi zrejme známy z predmetu Matematika.

Definícia:

Nech φ je signálový priestor nad poľom $(F, \oplus, \odot)$ a nech $\varphi_1 \subset \varphi$. Hovoríme, že φ_1 je lineárnym podpriestorom priestoru φ, ak φ_1 je tiež signálovým priestorom nad poľom $(F, \oplus, \odot)$ s operáciami, ktoré sú zadané v priestore φ.

Definícia:

Systém vektorov $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ z lineárneho podpriestoru φ_1 signálového priestoru φ voláme úplným, ak každý signál z φ_1 je hodnotou nejakej lineárnej kombinácie vektorov daného systému.

Definícia:

Systém $\beta : \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ vektorov signálového priestoru φ nazývame bázou v φ, ak je lineárne nezávislý a úplný v φ.

Definícia:

Nech φ je signálový priestor nad poľom $(F, \oplus, \odot)$ a $\beta = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ je ľubovoľná báza signálového priestoru φ. Nech $\mathbf{f} \in \varphi$ a nech platí

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{b}_i \quad ; \qquad c_i \in F\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Potom skaláre $c_1, c_2, \ldots, c_n$ voláme súradnicami signálu vzhľadom na bázu β a píšeme

$$\langle \mathbf{f} \rangle_\beta = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$$

Veta:

Nech $\beta = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ je ľubovoľná báza signálového priestoru φ. Potom sú súradnice každého signálu $\mathbf{f} \in \varphi$ vzhľadom na bázu β určené jednoznačne.

Dôkaz:

Z úplnosti bázy β v φ vyplýva, že každý signál $\mathbf{f} \in \varphi$ sa dá napísať v tvare

$$\mathbf{f} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \dots + c_n\mathbf{b}_n ; \quad c_i \in F , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Dokážeme, že takýto tvar je jediný. Nech

$$\mathbf{f} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \dots + c_n\mathbf{b}_n = c_1'\mathbf{b}_1 + c_2'\mathbf{b}_2 + \dots + c_n'\mathbf{b}_n$$

Potom

$$(c_1 - c_1')\mathbf{b}_1 + (c_2 - c_2')\mathbf{b}_2 + \dots + (c_n - c_n')\mathbf{b}_n = 0 .$$

Pretože vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ sú lineárne nezávislé, musí platiť $c_i - c_i' = 0$, t.j. $c_i = c_i'$ pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Ak kvôli stručnosti použijeme maticový zápis s pravidlami pre sčítanie a násobenie matíc, môžeme označiť

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Potom výraz $\mathbf{f} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \dots + c_n\mathbf{b}_n$ môžeme zapísať

$$\mathbf{f} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$$

Ak označíme $\mathcal{T}$ jednotkovú maticu, pre ktorú

$$\mathcal{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{T} = \mathbf{A}$$

potom $\mathbf{B}^{-1}$, pre ktorú platí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathcal{T}$, označuje inverznú maticu k matici $\mathbf{B}$.

Pre súradnice vektora $\mathbf{f}$ v báze β platí

$$\mathbf{c} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

Nakoľko vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ tvoria bázu, matica $\mathbf{B}$ je regulárna. Inverznú maticu $\mathbf{B}^{-1}$ zistíme prevodom matice sústavy

$$(B \;\vdots\; \mathcal{T})$$

na tvar $(\mathcal{J} \vdots \mathbf{B}^{-1})$ pomocou Gauss-Jordanovej eliminačnej metódy.

Nech v signálovom priestore φ nad poľom $(F, \oplus, \odot)$ sú dané dve vektorové bázy $\beta = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ a $\beta' = \{\mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2', \ldots, \mathbf{b}_n'\}$.
Určíme súradnice signálu $\mathbf{f}$ vzhľadom na bázu β, ak vzhľadom na bázu β má súradnice

$$\langle \mathbf{f} \rangle_\beta = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\} = \mathbf{C}$$

Označme súradnice signálu $\mathbf{f}$ vzhľadom na bázu β'

$$\langle \mathbf{f} \rangle_{\beta'} = \{c_1', c_2', \ldots, c_n'\} = \mathbf{C}'$$

a použime maticový zápis

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1' \\ \mathbf{b}_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}_n' \end{pmatrix}$$

Potom platí

$$\mathbf{f} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$$
$$\mathbf{f} = \mathbf{C}' \ \mathbf{B}'$$

odkiaľ

$$\mathbf{c}' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B}')^{-1}$$

3.1 VZDIALENOSŤ SIGNÁLOV

Pre spracovanie signálov je okrem algebraických vlastností signálov potrebné zaviesť aj kvantitatívnu mieru hodnotenia signálu. Preto zavedieme pojem vzdialenosti. Nakoľko sme definovali viac druhov signálov, nie je možné definovať jeden spôsob merania vzdialenosti, takže vzdialenosť zavedieme pomocou vlastností, ktoré musia spĺňať.

<u>Definícia:</u>

Nech φ je signálový priestor a pre každé $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \varphi$ je daná reálna funkcia $d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. Ak pre každé $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \in \varphi$ platí:

- $d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \geq 0$, (nezápornosť)
- $d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2$ (kladnosť)
- $d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = d(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1)$ (symetria)
- $d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \leq d(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3) + d(\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_2)$ (trojuholníková nerovnosť)

potom $d(f_1, f_2)$ nazývame vzdialenosťou vektorov f_1, f_2 a usporiadanú dvojicu (φ, d) metrickým signálovým priestorom.

Definícia:

Nech φ je signálový priestor, taký, že pre každú dvojicu signálov $f, f' \in \varphi$ je definovaná vzdialenosť $d(f, f')$. Číslo $\|f\| = d(f, 0)$ nazývame veľkosťou signálu f (resp. normou).
Pojem vzdialenosti sme definovali tak, aby odpovedal našim skúsenostiam z Euklidovského priestoru. Euklidovským priestorom je signálový priestor diskrétnych deterministických signálov.

Poznámka:

Pojem normy je možné definovať všeobecnejšie vymenovaním jej vlastností. Pre potreby štúdia vlastností signálu je odvodenie normy z pojmu vzdialenosti postačujúce.

Príklad 1 - signálový priestor diskrétnych signálov

Nech φ je signálový priestor diskrétnych deterministických signálov a $f, f' \in \varphi$,

$$f = (f_o, f_1, \ldots, f_n)$$

$$f' = (f'_o, f'_1, \ldots, f'_n)$$

Ak vzdialenosť definujeme

$$d(f, f') = +\sqrt{\sum_{i=0}^{n} (f_i - f'_i)^2}$$

potom (φ, d) je metrickým signálovým priestorom.

Príklad 2 - signálový priestor spojitých signálov

Nech φ je signálový priestor spojitých deterministických signálov a $f, f' \in \varphi$

$$f = f(t), \quad f' = f'(t) \; ; \quad t \in T$$

Ak vzdialenosť definujeme

$$d(f, f') = + \left[\int_0^T (f(t) - f'(t))^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

potom (φ, d) je metrickým signálovým priestorom.

Príklad 3 - signálový priestor číslicových signálov

Nech φ je signálový priestor deterministických číslicových signálov a $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in \varphi$

$$\mathbf{f} = f_o + f_1 x + \dots + f_n x^n$$

$$\mathbf{f}' = f_o' + f_1' x + \dots + f_n' x^n$$

Definujme $h_i(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \begin{cases} 0, & f_i \neq f_i' \\ 1, & f_i = f_i' \end{cases}$

Potom funkciu

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = \sum_{i=0}^{n} h_i(\mathbf{f}, \mathbf{f}')$$

voláme Hammingovou vzdialenosťou signálov $\mathbf{f}, \mathbf{f}'$.
Platí, že (φ, d) je metrickým priestorom.

Príklad 4 - signálový priestor náhodných signálov

Nech φ je signálový priestor náhodných spojitých signálov a $\mathbf{f}, \mathbf{f}' \in \varphi$

$$\mathbf{f} = f(\omega, t) \qquad \omega \in \Omega, \quad t \in T$$

$$\mathbf{f}' = f'(\omega, t)$$

Definujme vzdialenosť

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = + \sqrt{\mathcal{E} \left\{ \int_o^T \left[f(\omega, t) - f'(\omega, t) \right]^2 dt \right\}}$$

Štruktúra (φ, d) je metrickým signálovým priestorom.

Pri voľbe pojmu vzdialenosti musíme dbať na to, aby operácie v signálovom priestore boli matematicky zvládnuteľné, ale aj na to, aby pojem vzdialenosti dvoch signálov mal fyzikálnu interpretáciu, ktorá je prijateľná v danej aplikácii.

Poznámka:

Pri náhodných signáloch môžu existovať signály fyzikálne rôzneho pôvodu, medzi ktorými je nulová vzdialenosť podľa príkladu 4. Kvôli podmienke kladnosti v definícii vzdialenosti budeme považovať takéto signály za ekvivalentné. Pod pojmom náhodný signál budeme mať teda ďalej na mysli triedu ekvivalentných signálov v uvedenom zmysle.
K pojmu vzdialenosti signálov sa vrátime pri štúdiu vlastností jednotlivých signálových priestorov.