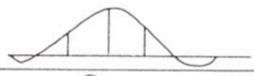
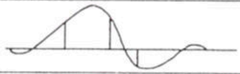
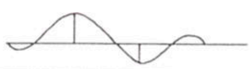
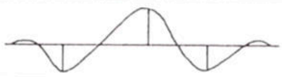
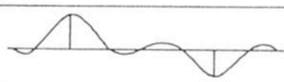
$$y(na) \in \left\{ \sum_{n=0}^{N} b_{-n}\, c_n \,;\; c_n \quad R\,,\; b_{-n} \in (0,\, 1,\, \dots,\, M \right\}$$

ktorá obsahuje nanajvýš M^{N+1} prvkov. Pretože s rastúcim počtom stavov klesá odolnosť signálu voči hluku volíme čo najmenšiu hodnotu N a hodnoty koeficientov c_n volíme tak, aby mohutnosť výstupnej abecedy signálu y(na) bola menšia než M^{N+1}. V tab. č. 1 sú používané signály s čiastočnou odozvou nad dvojkovou abecedou.

Tab. 1

trieda signálu	koeficienty $c_o\ c_1 \dots$	tvar signálu	počet stavov
1	1 1		3
2	1 2 1		5
3	2 1 -1		5
4	1 0 -1		3
5	-1 0 2 0 -1		5
6	1 0 0 0 -1		3

6.4 KOREKCIA FREKVENČNÉHO PRENOSU KANÁLA

Pre príjem dátového signálu vzorkovaním sú rozhodujúce hodnoty prijímaného signálu v charakteristických a vzorkovacích okamihoch. Pretože tieto okamihy sú ekvidištantné, môžeme nahradiť štúdium dátového signálu na vstupe a spojitého signálu na výstupe kanála štúdiom odpovedajúceho diskrétneho signálu. Kvôli jednoduchosti budeme ďalej predpokladať, že vzdialenosť týchto okamihov je jedna časová jednotka a signály sú definované na dostatočne veľkom, ale konečnom intervale. V prípade zmeny časového merítka sa lineárne zmení merítko kruhovej frekvencie.

Nech $\mathbf{u} = (u_o,\, u_1,\, \dots,\, u_{N-1})$ $u_k \in R$, $k = 0,\, 1,\, \dots,\, N-1$ a N nezáporné celé číslo, je vstupný signál do lineárneho časovo invariantného kanála s prenosom $\mathbf{F}_1$, ktorého výstupný signál je $\mathbf{y} = (y_o,\, y_1,\, \dots,\, y_{N-1})$. Signál $\mathbf{y}$ nech je zároveň vstupným signálom kanála s prenosom $\mathbf{F}_2$ a výstupný signál nech je $\mathbf{z} = (z_o,\, z_1,\, \dots,\, z_{N-1})$. Pre spektrá týchto signálov platí

$$\mathbf{c}_y = \mathbf{F}_1\, \mathbf{c}_u \,, \quad \mathbf{c}_z = \mathbf{F}_2\, \mathbf{c}_y$$

takže

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2\ \mathbf{c}_u$$

resp.

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{F}\ \mathbf{c}_u$$

kde

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$$

Prenos kaskádneho zapojenia je teda daný súčinom jednotlivých prenosov. Pri použití bázického systému diskrétnych exponenciálnych signálov, kedy frekvenčné spektrum je dané diskrétnou Fourierovou transformáciou. Potom

$$F(n) = F_1(n)\ .\ F_2(n)\ ,\quad n = 0,\ 1,\ \dots,\ N-1$$

Korektor je lineárny systém s takým frekvenčným prenosom $\mathbf{F}_k = (F_k(o),\ \dots,\ \dots,\ F_k(N-1))$, aby v sériovom s kanálom bol celkový prenos blízky k ideálnemu prenosu $F(n) = 1$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ alebo ak pripustíme zmenu veľkosti a oneskorenie signálu, k prenosu

$$F(n) = K\ e^{j \frac{2\pi}{N} \tau n}\ ,\quad n = 0,\ 1,\ \dots,\ N-1$$

kde $\tau \in \{0,\ 1,\ \dots,\ N-1\}$ je oneskorenie.

Tvar frekvenčného prenosu korektora nájdeme riešením rovníc

$$F_1(n)\ F_k(n) = K\ e^{j \frac{2\pi}{N} n\tau}\ ,\quad n = 0,\ 1,\ \dots,\ N-1$$

ktoré pri prepise na amplitúdový a fázový prenos je

$$|F_k(n)| = K\ |F_1(n)|^{-1}$$

$$\varphi_k(n) = \frac{2\pi}{N}\, n\tau - \varphi_1(n)$$

kde

$$F_1(n) = F_1(n)\ e^{j\,\varphi_1(n)}$$

je frekvenčný prenos kanála.

Z hľadiska návrhu korektora je výhodné, ak korektor môžeme rozdeliť na sériové zapojenie dvoch podkorektorov, z ktorých jeden koriguje fázový prenos a druhý amplitúdový prenos. Je však žiadúce, aby po vykorigovaní fázového prenosu sa pri korigovaní amplitúdového prenosu už celkový fázový prenos nemenil, resp. spôsobil len oneskorenie. Túto možnosť poskytujú korektory s konečnou impulznou charakteristikou, ktorá je symetrická podľa stredu.

Nech diferenčná rovnica, ktorá popisuje tento korektor je

$$y(k) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i \, u(k-i)$$

kde M je párne číslo a $b_i = b_{M-i-1}$, $i = 0, 1, \dots, M-1$.

Pre nepárne M prenechávame odvodenie čitateľovi. Potom frekvenčný prenos, ktorý dostaneme aplikovaním diskrétnej Fourierovej transformácie na uvedenú diferenčnú rovnicu, resp. priamo na impulznú charakteristiku $\mathbf{g} = (b_o, b_1, \dots, b_{M-1})$ je

$$F(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \, e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Sumu rozdelíme aby sme využili vlastnosť symetrie koeficientov b_k:

$$F(n) = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} b_k \, e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{k=\frac{M}{2}}^{M-1} b_k \, e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$F(n) = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} b_k \left(e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} + e^{-j \frac{2\pi}{N} n(M-k)} \right)$$

$$F(n) = e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{M}{2} n} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} b_k \left(e^{-j \frac{2\pi}{N} n \left(k - \frac{M}{2}\right)} + e^{-j \frac{2\pi}{N} n \left(\frac{M}{2} - k\right)} \right)$$

a použitím vzťahu

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \left(e^{j\alpha} + o^{-j\alpha} \right)$$

dostávame

$$F(n) = e^{-j \frac{\pi}{N} Mn} \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} 2b_k \cos \left[\frac{2\pi}{N} n \left(\frac{M}{2} - k \right) \right]$$

Amplitúdový prenos korektora je

$$|F(n)| = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} 2b_k \cos \left[\frac{2\pi}{N} n \left(\frac{M}{2} - k \right) \right] \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

a fázový prenos je

$$\varphi(n) = -\frac{\pi M}{N} n \quad , \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Symetria impulznej charakteristiky, t.j. koeficientov korektora teda zabezpečuje lineárny fázový prenos.

Frekvenčný prenos korektora s konečnou impulznou odozvou a lineárnym fázovým prenosom

$$F(n) = \sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} b_k \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n(M-k)} \right)$$

kde M je párne číslo, predstavuje vektor v $M/2$ - rozmernom komplexnom priestore φ. Jeho súradnice v ortogonálnej báze, ktorú tvoria vektory

$$\varphi_k = \left\{ e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n(M-k)} \; ; \; n = 0,1, \ldots, N-1 \right\}, \; k = 0,1,\ldots, \frac{M}{2}-1$$

sú koeficienty b_k. (Presvedčte sa, že vektory φ_k, $k = 0,1, \ldots, \frac{M}{2} - 1$ tvoria ortogonálnu bázu.)

$$F'(n) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

kde $(g_0, g_1, \ldots, g_{N-1})$ je impulzná odozva, predstavuje vektor v N rozmernom priestore φ'. Ak M je deliteľom N, potom φ je podpriestorom priestoru φ'. To môžeme dosiahnuť vždy rozšírením priestoru φ' o ďalšie dimenzie, v ktorých má vektor F' nulové zložky (pozor na realizovateľnosť spektra - rozširujeme symetricky podľa stredu na osi frekvencií).

Úlohu aproximácie frekvenčného prenosu $\mathbf{F}'$ frekvenčným prenosom $\mathbf{F}$ korektora s lineárnou fázovou charakteristikou a impulznou odozvou $\mathbf{b}$ potom môžeme interpretovať ako úlohu hľadania koeficientov rozkladu $\mathbf{b}$ do vektorovej bázy $\left\{ \varphi_k, \; k = 0, 1, \ldots, (M-1)/2 \right\}$ z podpriestoru φ, ktorý bude mať najmenšiu vzdialenosť k vektoru $\mathbf{F}' \in \varphi'$. Pripomíname, že vzdialenosť v komplexnom vektorovom priestore sme definovali odmocninou skalárneho súčinu,

$$d^2(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = (\mathbf{F}-\mathbf{F}', \mathbf{F}-\mathbf{F}') = \sum_{n=0}^{N-1} \left| F(n) - F'(n) \right|^2$$

Pri uvedenej interpretácii minimalizujeme kvadratickú chybu aproximácie.

Uvedenú úlohu sme už riešili a odvodili sme riešenie

$$b_k = \frac{(\mathbf{F}', \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{M}{2} - 1$$

Štvorec veľkosti bázických vektorov je

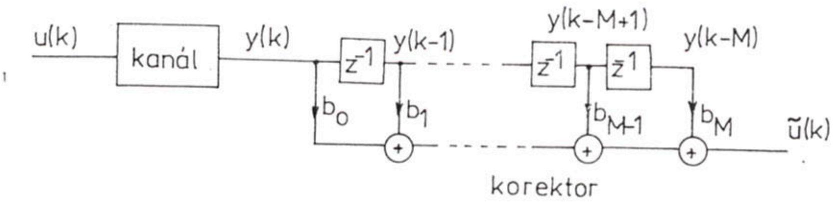
$$(\varphi_k, \varphi_k) = M , \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1$$

takže po dosadení za skalárny súčin v čitateli dostávame

$$b_k = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{N-1} F'(n) \left[e^{j \frac{2\pi}{N} kn} + e^{j \frac{2\pi}{N} n(M-k)} \right], \quad k = 0,1,\dots, \frac{M}{2} - 1$$

6.5 KOREKCIA IMPULZNEJ ODOZVY KANÁLA

Úlohu návrhu korektora tak, aby signál na jeho výstupe mal najmenšiu vzdialenosť od signálu na vstupe môžeme riešiť aj v časovej oblasti.



Obr. 18
Korektor impulznej odozvy kanála

Ak označíme

$$\mathbf{y}_k = (y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-M})$$

potom hodnotu na výstupe korektora

$$\tilde{u}(k) = \sum_{i=0}^{M} b_k \, y_{(k-M)}$$

môžeme napísať v tvare

$$\tilde{u}(k) = \mathbf{b} \, \mathbf{y}_k^T$$

kde $\mathbf{b} = (b_o, b_1, \dots, b_M)$ je impulzná charakteristika korektora. Korektor bude úplne korigovať vplyv kanála na prenášaný signál, ak

$$\tilde{u}(k) = u(k)$$

Impulznú charakteristiku, ktorá koriguje kanál v čase k označme $\mathbf{b}_k$. Potom $\mathbf{b}_k$ musí splňovať rovnicu

$$u(k) = \mathbf{b}_k \, \mathbf{y}_k^T$$

Odkiaľ

$$\mathbf{b}_k = u(k) \, (\mathbf{y}_k \, \mathbf{y}_k^T)^{-1} \mathbf{y}$$

Prepočítavanie impulznej odozvy $\mathbf{b}_k$ v každom časovom kroku je výpočtovo náročné, pretože je potrebné počítať inverznú maticu. Výpočet sa zjednoduší, ak na priblíženie k presnej hodnote $\mathbf{b}_k$ použijeme gradientovú metódu

$$\tilde{\mathbf{b}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{b}}_k - \alpha \text{ grad } \mathbf{b}_k$$

Ak namiesto gradientu použijeme jeho odhad

$$\text{grad } \tilde{\mathbf{b}}_k = \left(\frac{\partial e^2_k}{\partial b_k(o)} , \frac{\partial e^2_k}{\partial b_k(1)} , \ldots , \frac{\partial e^2_k}{\partial b_k(M)} \right)$$

kde $e_k = u_{(k)} - \tilde{u}_{(k)}$ je chyba korekcie

$$\frac{\partial e^2_k}{\partial b_k(i)} = 2e_k \frac{\partial ek}{\partial b_k(i)} = 2e_k \frac{\partial}{\partial b_k(i)} (u_{(k)} - \tilde{u}_{(k)}) =$$

$$= 2e_k \frac{\partial}{\partial b_k(i)} \left(u(k) - \sum_{j=0}^{M} b_k(j) \, y(k-j) \right)$$

Pretože

$$\frac{\partial u(k)}{\partial b_k(i)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b_k(i)} b_k(j) \, y(k-j) = \begin{cases} 0 , & i \neq j \\ y(k-i) , & i = j \end{cases}$$

dostávame

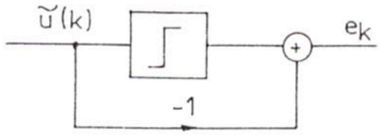
$$\text{grad } \tilde{\mathbf{b}}_k = (-2e_k \, y(k), -2e_k \, y(k-1), \ldots, -2e_k \, y(k-M))$$

$$\text{grad } \tilde{\mathbf{b}}_k = -2e_k \, \mathbf{y}_k$$

Algoritmus zmeny koeficientov korektora potom je

$$\tilde{\mathbf{b}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{b}}_k + 2\alpha \, e_k \, \mathbf{y}_k$$

Realizáciu korektora s takto meniacimi sa koeficientami voláme adaptívny korektor. Pre určenie chyby e_k v dekódere predpokladáme, že je menšia, než je polovica rozdielu susedných úrovní vysielaného signálu. Potom na výstupe prahového obvodu dostaneme hodnotu zhodnú s vyslaným signálom.



Obr. 19
Odhad chyby prahovým obvodom

6.6 MODULÁCIE A OPTIMÁLNY PRÍJEM DÁTOVÉHO SIGNÁLU

Moduláciou signálu voláme zmenu bázy signálu $u(t)$ v tom istom signálovom priestore φ_u alebo jeho transformáciu do iného signálového priestoru φ_y nie menšej dimenzie. Ďalej budeme študovať moduláciu dátového signálu v rámci jedného charakteristického intervalu

$$u(t) = k , \quad k \in \{0, 1, \dots, M-1\} , \quad t \in \langle 0,a \rangle$$

Je to prvok jednorozmerného signálového priestoru n s bázickým signálom

$$b_o(t) = 1 , \quad t \in \langle 0,a \rangle$$

Transformáciu dátového signálu do jednorozmerného priestoru

$$\varphi_y = \{ y_k(t) = k \cos \omega_o t ; \quad k = 0,1, \dots, M-1; \quad t \in \langle 0,a \rangle \}$$

kde ω_o je násobkom kruhovej frekvencie $2\pi/a$ voláme amplitúdovou moduláciou. Bázickým signálom v tomto priestore je

$$b_o(t) = \cos \omega_o t$$

Transformáciu dátového signálu $u(t) = k$, do M rozmerného signálového priestoru

$$\varphi_y = \{ y_k(t) = \cos \omega_k t ; \quad k = 0,1, \dots, M-1; \quad t \in \langle 0,a \rangle \}$$

kde ω_i je násobkom $2\pi/a$ voláme frekvenčnou moduláciou. V tomto M rozmernom priestore sa vyskytujú len bázické signály. (Čitateľovi by určite nerobilo ťažkosti vytvoriť priestor, ktorý pri tejto báze obsahoval viac signálov.)

Transformácia dátového signálu do signálového priestoru

$$\varphi_y = \{ y_k(t) = \cos(\omega_o t - \frac{2\pi}{M} k), \quad k = 0,1, \dots, M-1, \quad t \in \langle 0,a \rangle \}$$

a ω_o je násobkom $2\pi/a$ sa nazýva fázová modulácia. Tento priestor je dvojrozmerný a jeho bázickými signálmi sú