Elementárne systémy hromadnej obsluhy

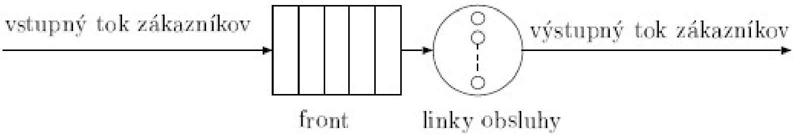
Teória hromadnej obsluhy

doc. RNDr. Štefan Peško, CSc.

Katedra matematických metód, FRI ŽU

28. novembra 2013

Do systému v ktorom sa nachádzajú linky obsluhy (obslužné kanály) prichádza vstupný tok zákazníkov požadujúci obsluhu svojich požiadaviek. Obsluha zákazníka trvá istý čas, počas ktorého blokuje linku, ktorá obsluhuje jeho požiadavky. Zákazníci po ukončení obsluhy uvolńujú linku a vytváraju výstupný tok zákaznkov.



Obr. 1: *Základná štruktúra elementárneho SHO*

Ak v okamihu príchodu zákazníka nie je voľná žiadna linka obsluhy, zákazník môže čakať v rade (na ukončenie obsluhy niektorej linky obsluhy), ktorý sa nazýva front.

Charakteristika prvkov SHO

- Vstupný tok zákazníkov je postupnosť príchodov zákazníkov, ktoré nasledujú jedna za druhou v nejakých časových intervaloch. Zákazníci môžu prichádzať jednotlivo alebo v skupinách. Ich počet môže byť ne/obmedzený. Medzery medzi príchodmi môžu byť pravidelné alebo náhodné - vyžadujúce charakteristiky vstupného toku.
- Front je miesto, kde čakajú zákazníci, ktoré nemohli byť ihneď obsluhovaní. Najznámejšie disciplíny čakania vo fronte sú
  - **FIFO** - prvý vstupuje prvý obslúžený,
  - **LIFO** - posledný vstupuje prvý obslúžený,
  - **SIRO** - výber v náhodnom poradí,
  - **PRI** - výber podľa priority.

  Ak je počet miest frontu obmedzený, potom sú neumiestniteľní zákazníci odmietnutí.

- Linka obsluhy poskytuje obsluhu realizáciou požiadaviek zákazníkov. Môže byť poskytovaná jednou alebo viacerými linkami obsluhy, pričomn iektoré linky múžu by špecializované. Doba obsluhy (čas trvania obsluhy) môže byť rovnaká pre všetkých zákazníkov alebo závislá od typu zákazníka alebo náhodná - vtedy vyžadujúce niektoré pravdepodobnostné charakteristiky.
- Výstupný tok zákazníkov je postupnosť okamihov odchodov zákazníkov zo systému. Vo všeobecnosti sú vlastnosti výstupného toku závislé od vstupného toku a režimu frontu a doby obsluhy. Výstupným tokom je potrebné sa zaoberať najmä ak je vstupným tokom ďalšieho SHO.

Poznámka

Efektívnosť činnosti SHO býva charakterizovaná napr. priemerným počtom (priemernou dobou) čakajúcich zákazníkov vo fronte, pomerom odmietnutých a prichádzajúcich zákazníkov ale i ďalšími nákladovými hľadiskami.

Klasifikácie elementárnych SHO

Podľa možnosti vzniku frontu rozlišujeme systémy

- s odmietnutím - bez čakania zákazníka v rade,
- s konečným frontom - s obmedzeným počtom miest v rade,
- s obmedzeným čakaním - s ohraničenou dobou čakania zákazníka v rade,
- s nespoľahlivými linkami - s prerušovnou dobou obluhy zákazníka,
- s nekonečným frontom - neobmedzenou dobou čakania zákazníka v rade.

Podľa typu modelov rozoznávame systémy

- Markovove - nezávislé exponenciálne medzery medzi príchodmi a pdchodmi zákazníkov,
- semimarkovove - s erlangovskými medzrami prichádzajúcich zákazníkov,
- nemarkovove - so všeobecným vstupným tokom zákaznikov a ich dobou obsluhy.

Podľa zdroja vstupného toku zákazníkov rozlišujeme

- otvorené systémy - s neobmedzeným počtom zákazníkov
- uzavreté systémy - s konečným počtom cirkulujúcich zákazníkov,
- zmiešané systémy - kombinácia otvorených a uzavretých systémov,
- siete - zložené z viacerých prepojených systémov elementárnych hromadnej obsluhy, pričom výstupný tok z jedného systému môže byť vstupným tokom druhého systému.

Poznámka

Uvedené delenie sytémov nie je úplné. Ďalšími špecifickými kritériami sú napr. usporiadanie liniek v obsluhe - sériové systémy alebo rôzne druhy priorít liniek alebo zákazníov - prioritné systémy.

Kendallova klasifikácia (1954)

Písmeno	X	Y
M	elementárny tok	exponenciálne rozdelenie
E_r	Erlangov vstupný tok	Erlangovo rozdelenie
D	konštantné medzery toku	konštantná doba
G	všeobecné rozdelenie medzier	všeobevné rozdelenie

Tabuľka 1: *Základné parametre Kendallovej klasifikácie*

Systémy sú označené kombináciou písmen a číslic

$$\mathbf{X}|\mathbf{Y}|\mathbf{n},$$

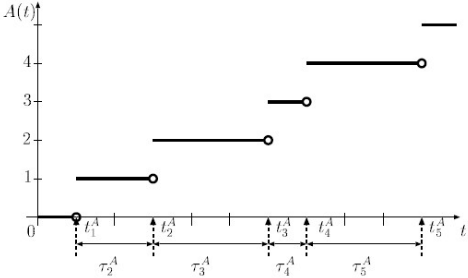
kde **X** popisuje vstupný tok zákazníkov, **Y** popisuje dobu obsluhy a **n** udáva počet paralelných liniek obsluhy. V súčasnosti je zaužívaná v anglosaskej literatúre rozšrená Kendallova klasifikácia

$$\mathbf{X}|\mathbf{Y}|\mathbf{n}|\mathbf{m},$$

kde **m** udáva maximálny počet zákazníkov v systéme.

Markovove SHO

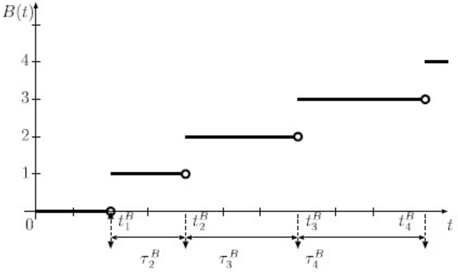
Markovovými systémami budeme rozumieť také SHO, koré možno modelovať homogénnym Markovovým procesom. Nech je S množina stavov homogénneho Markovovho procesu $\{\mathbb{N}(t)\}_{t\in T}$. Stavy procesu tu interpretujeme ako počty zákazníkov v systéme.



Obr. 2: *Realizácia vstupného toku zákazníkov v SHO*

Nech $\{\mathbb{A}(t)\}_{t\in T}$ je náhodný proces, kde n.v. $\mathbb{A}(t)$ udáva počet príchodov zákazníkov do systému za čas t.

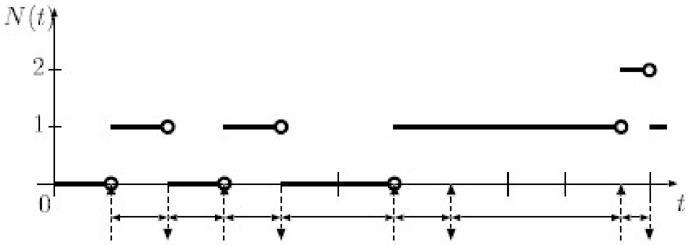
Nech $\{\mathbb{B}(t)\}_{t\in T}$ je náhodný proces, kde n.v. $\mathbb{B}(t)$ udáva počet odchodov zákazníkov zo systému za čas t.



Obr. 3: *Realizácia výstupného toku zákazníkov v SHO*

Vidme, že n.v. $\mathbb{A}(t)$ resp. $\mathbb{B}(t)$ zväčšujú svoju hodnotu o 1 v práve v čase $\mathbf{t}_i^A$ príchodu / $\mathbf{t}_i^B$ odchodu i-teho zákazníka do/zo systému a platí $\mathbf{t}_i^A \leq \mathbf{t}_i^B$. Ak $\mathbf{t}_i^A = \mathbf{t}_i^B$ potom je i-ty zákazník odmietnutý.

Počet zákazníkov v systéme je tak v čase $t \in T$ modelovaný n.v. $\mathbb{N}(t) = \mathbb{A}(t) - \mathbb{B}(t)$. Tento vzťah sa výhodne využíva pri simulácii SHO, keď vieme základné charakteristiky systému vypočítať len numericky a nie analyticky.



Obr. 4: *Vývoj počtu zákazníkov v SHO*

Pri analytickom riešení chápeme $p_j(t) = \mathcal{P}(\mathbb{N}(t)) = j)$ ako pp. že je v systéme v čase $t \in T$ práve $j \in S$ čakajúcich a obsluhovaných zákazníkov.

Systém považujeme za stabilizovaný ak od istého okamihu je ďalší vývoj systému nezávislý na čase.

Veta 3.1 (Littlova)

Majme stabilizovaný SHO. Nech je λ stredný počet zákazníkov prijatých do systému, $E(\mathbb{N})$ je stredný počet zákazníkov v systéme a $E(\mathbb{T})$ je stredná doba strávená zákazníkom v systéme. Potom platí

$$\lambda = \frac{E(\mathbb{N})}{E(\mathbb{T})}. \tag{1}$$

•

Poznámka

Parameter λ v Littlovej formule je intenzitou vstupného toku prijatých zákazníkov.

Príklad 3.1 pokračovanie 2.8

Majiteľ potravín zistil, že v rannej špičke prichádzajú priemerne do predajne 4 zákazníci za minútu. Majiteľova manželka odhaduje, že priemerný počet zákazníkov v tomto čase je 30 zákazníkov. Aká je priemerná doba strávená zákazníkom v predajni?

Systém budeme považovať v rannej špičke za stabiliovaný. Ak predpokladáme, že všetci zákazníci prichádzajúci do predajne budú obslúžení, potom môžeme modelovať vstupný tok zákazníkov elementárnym tokom s parametrom $\lambda = 4$ zák./min.
Podľa vety 2.9 však možeme modelovať tento proces ako Poissonov proces s parametrom λ a tak stredný počet zákazníkov v predajni je $E(\mathbb{N}) = 30$ zák. Strednú dobu strávenú zákazníkom v predajni $E(\mathbb{T})$ vypočítame podľa (1)

$$E(\mathbb{T}) = \frac{E(\mathbb{N})}{\lambda} = \frac{30\ [zak.]}{4\ [zak./min.]} = 7.5\ [min.]$$

Čo však v prípade keď 5% zákazníkov odchádza znechutených vidiac dlhý rad čakajúcich zákazníkov pri pokladni?

Do jednolinkového SHO prichádzajú zákazníci modelovaní Poissonovým vstupným tokom s parametrom λ a požadujú obsluhu. Doba obsluhy linky má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ. Zákazníci, ktorí nájdu linku obsadenú sa postavia do radu na ktorý sa nekladú žiadne obmedzenia. Predpokladá sa, že zákaznici budú obsluhovaní v poradí prichodov t.j. podľa disciplíny čakania **FIFO**. Tento systém je príkladom systémov s neohraničeným frontom čo tiež znamená, že doba čakania v takomto systéme je neobmedzená.

Systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbb{N}(t)\}_{t\in T}$ s nekonečnou množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Stavy systému interprujeme takto

- 0 - v systéme nie je žiaden zákazník, je prázdny,
- 1 - v systéme je jeden zákazník obsluhovaný linkou obsluhy,
- i - v systéme je 1 obsluhovaný zákazník a $i - 1$ zákazníkov čaká v rade na obsluhu.

V Poissonovom vstupnom toku majú dĺžky medzier $\boldsymbol{\tau}_1$ medzi príchodmi to isté exponenciálne rozdelenie s parametrom λ. Doba obluhy $\boldsymbol{\tau}_2$ má tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ a je nezávislá od dĺžok medzier $\boldsymbol{\tau}_1$ elementárneho toku. Spolu s bezpamäťovou vlastnosťou exponenciálneho rozdelenia nám zaručujú Markovovu vlastnosť systému.

Zvyšková doba obsluhy od nejakej udalosti (odchod/príchod zákazníka) má tiež exponenciálne rozdelenie s parametrom μ.
Prečkaná doba na začatie obluhy nemá vplyv na dobu čakania!
A tak $\boldsymbol{\tau}_1 \sim Exp(\lambda)$ a $\boldsymbol{\tau}_2 \sim Exp(\mu)$.

$M|M|1|\infty$ - výpočet $p_{ij}(\Delta t)$

Vypočítame pp. prechodu za nejaký dostatočne malý časový interval Δt. Vstupný tok zákazníkov je Poissonovým procesom a tak pp. príchodu k zákazníkov je

$$\mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = k) = \begin{cases} e^{-\lambda \Delta t} & = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad \text{ak } k = 0 \\ \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} & = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad \text{ak } k = 1 \\ \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t} & = o(\Delta t) \quad \text{ak } k > 1. \end{cases}$$

Pravdepodobnosť ukončenia obsluhy zákazníka je rovná pp., že doba obsluhy resp. zvyškovej obsluhy $\boldsymbol{\tau}$ je nanajvýš rovná Δt t.j.

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \Delta t) = 1 - e^{-\mu \Delta t} = \mu \Delta t + o(\Delta t).$$

Ďalej sa sústredíme len na zmeny stavu vyvolané príchodom alebo odchodom zákazníka. Zmeny stavu vyvolané viac než jednou takouto udalosťou nastávajú s pp.

$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t), |i - j| > 1, i, j \in S.$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a nepríde zákazník je rovná pp. že v priebehu Δt nepríde žiaden zákazník

$$p_{00}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a príde jeden zákazník je rovná pp. že v priebehu Δt príde jeden zákazník

$$p_{01}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov a obsluhovaný zákazník opustí systém je rovná pp. že v priebehu Δt žiaden zákazník nepríde a jeden odíde

$$p_{i,i-1}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\tau \leq \Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov a práve jeden príde je rovná pp.

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 1)\mathcal{P}(\tau > \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

$M|M|1|\infty$ - matica intenzít

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov a žiaden nepríde ani neodíde je rovná pp.

$$p_{ii}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t) = 1 - (\lambda + \mu)\Delta t + o(\Delta t).$$

Dostávame špeciálnu maticu intenzít $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ procesu vzniku a zániku, kde

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{ak } j = i + 1, i \geq 0 \\ \mu & \text{ak } j = i - 1, i > 0 \\ -\lambda & \text{ak } j = i = 0 \\ -(\lambda + \mu) & \text{ak } j = i, i > 0 \\ 0 & \text{ak } |i - j| > 1. \end{cases}$$

$M|M|1|\infty$ - Erlangove vzorce (1909)

Z praktického hľadiska je zaujímavý prípad, keď sa SHO stabilizuje t.j. proces je regulárny, čo podľa vety 2.12 nastáva keď je splnená podmienka (15)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \tag{2}$$

a stacinárne rozdelenie π stavov procesu vypočítame z (16) a (17) v tvare

$$\pi_j = \rho^j(1-\rho). \tag{3}$$

$M|M|1|\infty$ - charakteristiky I.

- $E(\mathbb{N})$ – stredný počet zákazníkov v systéme

$$E(\mathbb{N}) = \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j = \sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{j=1}^{\infty} j\rho^{j-1} =$$
$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) =$$
$$= \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}. \tag{4}$$

- $E(\mathbb{W})$ – stredná doba čakania zákazníkov v systéme, z Littlovej formule máme

$$E(\mathbb{W}) = \frac{E(\mathbb{N})}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}. \tag{5}$$

$M|M|1|\infty$ - charakteristiky II.

- $E(\mathbb{W}_S)$ – stredná doba obsluhy, z definície systému

$$E(\mathbb{W}_S) = \frac{1}{\mu}. \tag{6}$$

- $E(\mathbb{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte

$$E(\mathbb{W}_Q) = E(\mathbb{W}) - E(\mathbb{W}_S) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{E(\mathbb{N})}{\mu}. \tag{7}$$

- $E(\mathbb{N}_Q)$ – stredný počet čakajúcich vo fronte, z Littlovej formuly

$$E(\mathbb{N}_Q) = \lambda E(\mathbb{W}_Q) = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \rho E(\mathbb{N}). \tag{8}$$

- p_S – pp., že zákazník najde voľnú linku

$$p_S = \pi_0 = 1 - \rho. \tag{9}$$

- p_Q – pp., že zákazník bude čakať vo fronte

$$p_Q = 1 - \pi_0 = \rho. \tag{10}$$

- $E(\mathbb{N}_S)$ – stredný počet obsluhovaných zákazníkov

$$E(\mathbb{N}_S) = E(\mathbb{N}) - E(\mathbb{N}_Q) = \rho. \tag{11}$$

- κ – využitie systému

$$\kappa = \rho. \tag{12}$$

Príklad 3.2 – u lekára

K ortopédovi prichádza priemerne 16 pacientov za 8 hodín jeho pracovnej doby. Stredná doba ošetrenia pacienta je 20 minút. Predpokladajme, že pacienti trpezlivo čakajú na ošetrenie a predčasne neodchádzajú. Zistite, či sa takýto systém môže stabilizovať ak je vstupný tok elementárny a doba obsluhy má exponenciálne rozdelenie. Vypočítajte využitie lekára, strednú dobu strávenú u lekára a srednú dobu čakania v čakárni.

Vstupný tok pacientov je elementárny to s parametrom $\lambda = \frac{16}{8} = 2$ pacienti za hodinu. Stredná doba obsluhy má exponeciálne rozdelenie a tak je rovná $\frac{1}{\mu} = 20$ [min.] $= \frac{1}{3}$ [hod.]. Nakoľko je $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} < 1$, systém sa po istom čase stabilizuje. Lekár je využitý na $\kappa = \rho = 0.67 = 67\%$. Pacient strávi u lekára priemerne $E(\mathbb{W}) == \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{3-2} = 1$ [hod.] pričom v čakárni čaká priemerne $E(\mathbb{W}_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3}$ [hod.] $= 40$ minút.

Optimalizačná úloha I.

Nech sú známe tieto náklady na prevádzku obslužného systému za isté obdobie

- c_0 – náklady na údržbu prázdneho systému,
- c_1 – náklady na chod linky obsluhy,
- c_2 – náklady na reklamné akcie na udržanie zákazníka.

Cieľom je nájsť také využitie systému, pri ktoro sú celkové priemerné naklady minimálne.

Kriteriálna funkcia $C(\kappa)$ je funkciou využitia systému κ

$$C(\kappa) = c_0 \cdot \pi_0 + c_1 \cdot (1 - \pi_0) + c_2 \cdot E(\mathbb{N}), \tag{13}$$

ktorá je zložená z priemerných nákladov na údržbu prázdneho systému a chod linky a priemerných nákladov na reklamu. Po dosadení dostávame

$$C(\kappa) = c_0 \cdot (1 - \kappa) + c_1 \cdot \kappa + c.\frac{\kappa}{1 - \kappa}.$$

Optimalizačná úloha I.

Ďalej postupujeme ako je bežné pri hľadaní voľného extrému funkcie jednej premennej

$$\frac{dC(\kappa)}{d\kappa} = -c_0 + c_1 + \frac{c_3}{(1-\kappa)^2} = 0,$$

odkiaľ dostaneme

$$\kappa = 1 - \sqrt{\frac{c_2}{c_0 - c_1}}. \tag{14}$$

Pomocou znamienka druhej derivácie $\frac{d^2C(\kappa)}{d^2\kappa} > 0$ sa môžeme presvedčiť, že sme našli minimum kriteriálnej funkcie. Z prirodzenej podmienky $0 < \kappa < 1$ dostaneme obmedzenie

$$0 < \frac{c_2}{c_0 - c_1} < 1$$

na parametre úlohy c_0, c_1, c_2.

Príklad 3.3 – stavebná firma

Malá stavebná firma, ktorá sa špecializuje na prestavbu bytových jadier, očakáva nasledujúce náklady na svoju prevádzku. Penalizácia úverovou bankou za nečinnosť je 150 tis.Eur, náklady na mzdy zamestnancov sú 50 tis.Eur a náklady na reklamu sú 10 tis.Eur. Za akých podmienok môže firma očakávať minimálne priemerné náklady?

Ak modelujeme firmu ako SHO typu $M|M|1|\infty$, potom môžeme riešiť optimaizačnú úlohu s kriteriálnou funkciou (13) pri nákladoch

$$c_0 = 150\ 000, c_1 = 50\ 000, c_2 = 10\ 000.$$

Po dosadení do (14) dostaneme $\kappa = 0.683 = 68.3\%$ pri ktorých má firma minimálne náklady vo výške $C(\kappa) = 103\ 245.55$ Eur.

Do viaclinkového SHO prichádzajú zákazníci modelovaní Poissonovým vstupným tokom s parametrom λ a požadujú obsluhu na jednej z n liniek obsluhy. Doba obsluhy každej linky má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ. Zákazníci, ktorí nájdu všetky linky obsadené sa postavia do radu. V opačnom prípade začne ich obsluha na niektorej z voľných liniek. Predpokladá sa, že zákazníci budú obsluhovaní podľa disciplíny čakania **FIFO**.

Systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbb{N}(t)\}_{t\in T}$ s nekonečnou množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Stavy systému interprujeme takto

- 0 - v systéme nie je žiaden zákazník, je prázdny,
- $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ - v systéme je obsluhovaných i zákazníkov,
- $i \in \{n+1, n+2, \ldots, \infty\}$ - v systéme je obsluhovaných n zákazníkov a $i - n$ zákazníkov čaká v rade na obsluhu.

$M|M|n|\infty$ - výpočet $p_{ij}(\Delta t)$

Viaclinkový systém $M|M|n|\infty$ sa líši od jednolinkového $M|M|1|\infty$ len počtom nezávislých paralelných liniek a tak rozdelenie medzier medzi príchodmi $\boldsymbol{\tau}_1 \sim Exp(\lambda)$ a doby obsluhy resp zvyškovej obsluhy $\boldsymbol{\tau} \sim Exp(\mu)$.

Pri výpočte postupujeme rovnako ako pri jednolinkovom systéme, opäť sústredíme len na prechody vyvolané príchodom alebo odchodom zákazníkov.

Opäť sa sústredíme len na zmeny stavu vyvolané príchodom alebo odchodom zákazníka. Zmeny stavu vyvolané viac než jednou takouto udalosťou nastávajú s pp.

$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t), |i - j| > 1, i, j \in S.$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a nepríde zákazník je rovná pp. že v priebehu Δt nepríde žiaden zákazník

$$p_{00}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je systém prázdny a príde jeden zákazník je rovná pp. že v priebehu Δt príde jeden zákazník

$$p_{01}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov obsluhovaných $i, 0 < i \leq n$ linkami obsluhy a jeden z nich opustí systém je rovná pp. že v priebehu Δt žiaden zákazník nepríde a jeden odíde

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\Delta t) &= i\mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \Delta t)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t)^{i-1} = \\ &= i(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(\mu\Delta t + o(\Delta t))(1 - (i-1)\mu\Delta t + \dots) \\ &= i\mu\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov $i > n$ obsluhovaných n linkami obsluhy a jeden z nich opustí systém je rovná pp.

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\Delta t) &= n\mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} \leq \Delta t)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t)^{i-1} = \\ &= n\mu\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov a práve jeden príde je rovná pp.

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 1)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Pravdepodobnosť, že je v systéme i zákazníkov a žíaden zákazník nepríde ani neodíde je rovná pp.

$$p_{ii}(\Delta t) = \mathcal{P}(\mathbb{A}(\Delta t) = 0)\mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t)^n = 1 - (\lambda + i\mu)\Delta t + o(\Delta t)$$

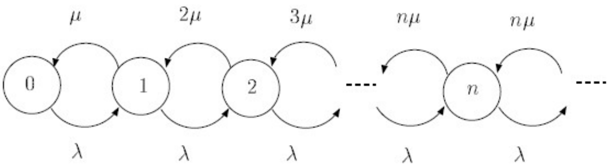
pre $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ a

$p_{ii}(\Delta t) = p_{nn}(\Delta t)$ pre $i \in \{n+1, n+2, \ldots\}$.

$M|M|n|\infty$ - matica intenzít

Dostávame špeciálnu maticu intenzít $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in S}$ procesu vzniku a zániku, kde

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{ak } j = i + 1, i \geq 0 \\ i\mu & \text{ak } j = i - 1, 0 < i \leq n \\ n\mu & \text{ak } j = i - 1, i > n \\ -\lambda & \text{ak } j = i = 0 \\ -(\lambda + i\mu) & \text{ak } j = i, 0 < i \leq n \\ -(\lambda + n\mu) & \text{ak } j = i, i > n \\ 0 & \text{ak } |i - j| > 1. \end{cases}$$



Obr. 5: *Prechodový graf systému $M|M|n|\infty$*

$M|M|n|\infty$ - Erlangove vzorce I.

Z praktického hľadiska je zaujímavý prípad, keď sa SHO stabilizuje t.j. proces je regulárny, čo podľa vety 2.12 nastáva keď je splnená podmienka

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1 \tag{15}$$

a stacinárne rozdelenie π stavov procesu vypočítame z (16) a (17) v tvare

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{(n\rho)^j}{j!}\pi_0, & \text{ak } 0 < j < n, \\ \frac{n^n}{n!}\rho^j \pi_0, & \text{ak } j \geq n, \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}\right)^{-1}, & \text{ak } j = 0. \end{cases} \tag{16}$$

$M|M|n|\infty$ - charakteristiky I.

- P_Q – pp. že prichádzajúci zákazník bude čakať v rade

$$P_Q = \sum_{j=n}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \rho^j \pi_0 = \pi_0 \frac{n^n}{n!} \frac{\rho^n}{1-\rho} = \frac{\pi_n}{1-\rho}. \qquad (17)$$

- $E(\mathbb{N}_Q)$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov v rade

$$E(\mathbb{N}_Q) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{n^n}{n!} \rho^{n+k} \pi_0 = \frac{n^n}{n!} \rho^n \pi_0 \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k =$$

$$= \frac{n^n}{n!} \pi_0 \rho^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{n^n \rho^{n+1} \pi_0}{n!(1-\rho)^2} =$$

$$= P_Q \frac{\rho}{1-\rho}. \qquad (18)$$

$M|M|n|\infty$ - charakteristiky II.

- α – zaťaženie systému

$$\alpha = n\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{19}$$

- $E(\mathbb{N}_S)$ – stredný počet obsadených liniek

$$\begin{aligned} E(\mathbb{N}_S) &= \sum_{k=1}^{n} j\pi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} n\pi_k = 1\frac{\alpha}{1!}\pi_0 + 2\frac{\alpha^2}{2!}\pi_0 + \dots \\ &+ n\frac{\alpha^n}{n!}\pi_0 + n\frac{\alpha^n}{n!}\rho\pi_0 + n\frac{\alpha^n}{n!}\rho^2\pi_0 + n\frac{\alpha^n}{n!}\rho^3\pi_0 + \dots = \\ &= \alpha(\pi_0 + \pi_2 + \dots \pi_n + \pi_{n+1} + \pi_{n+2} + \pi_{n+3} + \dots) = \\ &= \alpha. \end{aligned} \tag{20}$$

- κ – využitie systému

$$\kappa = \frac{E(\mathbb{N}_S)}{n} = \frac{\alpha}{n} = \rho. \tag{21}$$

Vzorce (16) sú aj pre numerický výpočet nepohodlné, preto sa výhodne zavedie substitúcia

$$q_j = \frac{\pi_j}{\pi_0}$$

po ktorej

$$q_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } j = 0, \\ \frac{\alpha^j}{j!} & \text{ak } 0 < j \leq n, \\ \frac{\alpha^n}{n!}\rho^{j-n} & \text{ak } j > n. \end{cases} \tag{22}$$

a tak

$$\pi_j = \begin{cases} (q_0 + q_1 + q_2 + \dots)^{-1} & \text{ak } j = 0, \\ q_j \pi_0 & \text{ak } j > n. \end{cases} \tag{23}$$

$M|M|n|\infty$ - charakteristiky III.

Pomocou Littlovej formule

- $E(\mathbb{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte

$$E(\mathbb{W}_Q) = \frac{E(\mathbb{N}_Q)}{\lambda} = \frac{P_Q\rho}{\lambda(1-\rho)}. \tag{24}$$

- $E(\mathbb{W}_S)$ – stredná doba obsluhy v systéme

$$E(\mathbb{W}_S) = \frac{1}{\mu}. \tag{25}$$

- $E(\mathbb{T})$ – stredná doba pobytu v systéme

$$E(\mathbb{T}) = E(\mathbb{W}_Q) + E(\mathbb{W}_S) = \frac{P_Q\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}. \tag{26}$$

- $E(\mathbb{N})$ – stredná počet zákazníkov v systéme

$$E(\mathbb{N}) = \lambda E(\mathbb{T}) = E(\mathbb{N}_Q) + E(\mathbb{N}_S). \tag{27}$$

Príklad 3.4

Dvojlinkový stabilizovaný systému $M|M|2|\infty$ je využívaný na 50%. Aká je očakávaná dĺžka frontu?
Poznáme počet liniek $n = 2$ a využitie systému $\kappa = \rho = \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{2}$ odkiaľ zaťaženie systému $\alpha = 1$. Hľadáme očakávanú dĺžku frontu podľa

$$E(\mathbb{N}_Q) = \frac{\pi_2 \rho}{(1-\rho)^2}.$$

Potrebujeme teda vypočítať π_2 na čo použijeme tabuľku

j	q_j	π_j
0	1	$\frac{1}{3}$
1	$\alpha = 1$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{\alpha^2}{2!} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\sum_{j=3}^{\infty}$	$\frac{\alpha^3}{2(2-\alpha)} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\sum$	3	1

kde $\sum_{j=3}^{\infty} q_j = q_2 \left(\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \dots \right)$. A tak $E(\mathbb{N}_Q) = \frac{1}{3}$.

Príklad 3.5

Do stabilizovaného viaclinkového systému $M|M|n|\infty$ prichádzajú priemerne 4 zák./hod. pričom každá linka obsluhy obslúži priemerne 2 zák./hod. Pri akom minimálnom počte liniek bude stredný počet zákazníkov rovný nanajvýš dvom zákazníkom?

Poznáme $\lambda = 4, \mu = 2$ a tak máme $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 2$. Ak by $n = 1$ potom $\rho = \alpha = 2$ a systém sa nestabilizuje. Ak $n = 2$ potom $\rho = \frac{\alpha}{2} = 1$ a systém sa ešte stále nestabilizuje. Pre $n = 3$ je $\rho = \frac{2}{3} < 1$ a systém sa už stabilizuje. Ako v príklade 3.4 potrebujeme pre výpočet $E(\mathbb{N}_Q) = \frac{\pi_3 \rho}{(1-\rho)^2} = \frac{8}{9} < 2$ najskôr vypočítať $\pi_3 = \frac{4}{27}$ z tabuľky

j	q_j	π_j
0	1	$\frac{1}{9}$
1	$\alpha = 2$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{\alpha^2}{2!} = 2$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{\alpha^3}{3!} = \frac{4}{3}$	$\frac{4}{27}$
$\sum_{j=4}^{\infty}$	$\frac{\alpha^4}{6(3-\alpha)} = \frac{8}{3}$	$\frac{8}{27}$
$\sum$	9	1

Optimalizácia počtu liniek I.

Nech sú známe za isté obdobie tieto náklady na prevádzku stabilizovaného systému

- c_1 – náklady na čakajúceho zákazníka,
- c_2 – náklady na nevyužitú linku obsluhy.

Cieľom je nájsť taký počet liniek n pri ktorom budú celkové priemerné náklady minimálne. Kriteriálna funkcia $C(n)$ je zložená z dvoch častí

$$C(n) = c_1 E(\mathbb{N}_Q) + c_2(n - E(\mathbb{N}_S)). \tag{28}$$

Priemerné náklady na čakajúcich zákazníkov $c_1 E(\mathbb{N}_Q)$ sú úmerné priemernému počtu čakajúcich zákazníkov. Priemerné náklady za nevyužité linky $c_2(n - E(\mathbb{N}_S))$ sú úmerné priemernému počtu nevyužitých liniek.

Optimalizácia počtu liniek II.

Po dosadení príslušných charakteristík dostaneme

$$C(n) = c_1 \frac{\pi_n \rho}{(1-\rho)^2} + c_2(n-\rho)). \tag{29}$$

Ďalší postup závisí od toho, ktorý z prípadov nastane

- Sú dané intenzity λ, μ. Hľadá sa n^* také, že

$$C(n^*) = \min\{C(n) : n > \frac{\lambda}{\mu}, n \in \mathcal{N}\}. \tag{30}$$

- Sú dané intenzity $\lambda, \mu_{\max}$. Hľadá sa n^*, μ^* také, že

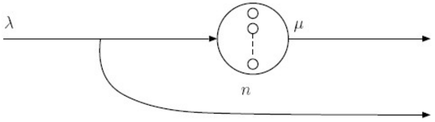
$$C(n^*, \mu^*) = \min\{C(n, \mu) : n\mu > \lambda, \mu < \mu_{\max}, n \in \mathcal{N}\}. \tag{31}$$

Príklad 3.6 – Cvičenie

Výsledkom prieskumu začínajúcej sofvérovej firmy bolo, že môže za mesiac očakávať 4 objednávky. Charakter úloh predpokladá, že programátor je schopný za mesiac vybaviť 2 objednávky. Mesačné náklady na provizórne riešenie, kým bude objednávka vybavená, sa pohybuje priemerne okolo 5 tis. Eur. Základný plat programátora je 2 tis. Eur z rezervného fondu firmy. V prípade objednávky je základný plat plus výkonnostný príplatok v cene objednávky.

Pri akom počte programátorov možno očakávať minimálne priemerné náklady firmy?

Predpoklady o vstupnom toku zákazníkov a dobe obsluhy liniek sú ako v systéme $M|M|n|\infty$. V tomto systéme sú ale prichádzajúci zákazníci odmietnutí ak nájdu v čase príchodu všetky linky aktívne, už obsluhujú skorších zákazníkov.



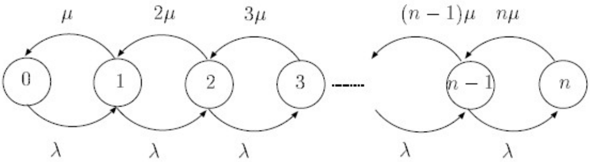
Obr. 6: *Systém s odmietaním*

Systém možno opäť modelovať ako proces vzniku a zániku $\{\mathbb{N}(t)\}_{t\in T}$ s nekonečnou množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Stavy systému interpretujeme takto

- 0 - v systéme nie je žiaden zákazník, je prázdny,
- $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ - v systéme je obsluhovaných i zákazníkov.

$M|M|n|n$ – prechodový graf a Erlangove vzorce

Pri odvodzovaní pp. prechodu medzi stavmi postupujeme ako v nekonečnom systéme a dostaneme prechodový graf



Obr. 7: *Prechodový graf pre $M|M|n|n$*

Proces $\{\mathbb{N}(t)\}_{t\in T}$ je regulárny a tak podľa vety 2.11 vypočítame stacionárne rozdelenie stavov π v tvare

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{\alpha^j}{j!}\pi_0, & \text{ak } 0 < j \le n, \\ \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\right)^{-1}, & \text{ak } j = 0. \end{cases} \tag{32}$$

$M|G|n|n$ – Erlangove vzorce

Chinčin (1914) dokázal, že Erlangove vzorce pre $M|M|n|n$ platia aj pre systém $M|G|n|n$, kde má doba obsluhy všeobecné rozdelenie pp. s konečnou strednou hodnotou. Ak má doba obsluhy hustotu $g(t)$ potom

$$\frac{1}{\mu} = \int_0^\infty x g(x) dx.$$

$M|M|n|n$ - charakteristiky I.

- P_Z – pp. že prichádzajúci zákazník bude odmietnutý

$$P_Z = \pi_n. \tag{33}$$

- $E(\mathbb{N})$ – stredný počet zákazníkov systéme, ktorý je aj stredným počtom obsadench liniek $E(\mathbb{N}_S)$

$$E(\mathbb{N}) = E(\mathbb{N}_S) = \sum_{j=0}^{n} j\pi_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{j\alpha^j}{j!}\pi_0 =$$

$$= \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha^j}{j!}\pi_0 = \alpha(1-\pi_n). \tag{34}$$

- κ – využitie systému (linky obsluhy)

$$\kappa = \frac{E(\mathbb{N}_S)}{n} = \frac{\alpha}{n}(1-\pi_n) = \rho(1-\pi_n). \tag{35}$$

- $E(\mathbb{T})$ – stredná doba pobytu v systéme je rovná strednej dobe obsluhy
$$E(\mathbb{T}) = \frac{1}{\mu}. \tag{36}$$
- λ_Z – stredný počet odmietnutých zákazníkov za časovú jednotku, z Littlovej formuly
$$\lambda_Z = \lambda - \frac{E(\mathbb{N})}{E(\mathbb{T})} = \lambda(1 - \pi_n). \tag{37}$$

Príklad 3.7 – parkovisko

Na parkovisko s kapacitou 40 vozidiel prichádza v čase ustálenej prevádzky 20 voz./hod. Nech je stredná doba pobytu vozidla na parkovisku je 2.5 hod. Aké je využitie parkoviska, priemerný počet voľných parkovacích miest a pravdepodobnosť že vodič nemôže zaparkovať?

Môžme predpokladať, že vstupný tok vozidiel na parkovisku je elementárny s parametrom $\lambda = 20$ voz./hod. Stredná doba pobytu vozidla na parkovisku exponenciálna so strednou hodnotou $\frac{1}{\mu} = \frac{5}{2}$ hod. Pri kapacite parkoviska $n = 40$ voz. je zaťaženie systému $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 50$ a $\rho = \frac{5}{4}$. Pravdepodobnosť plného parkoviska je

$$P_Z = \pi_n = \frac{\alpha^n}{n!\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}\right)} = \frac{50^{40}}{40!\left(\sum\limits_{k=0}^{40} \frac{50^k}{k!}\right)} = 0.25.$$

Využitie parkoviska je $\kappa = \rho(2 - \pi_n) = 0.938$ s priemerným počtom voľných miest $n - E(\mathbb{N}_S) = n - \alpha(1 - \pi_n) = 2.5$ voz.

V stabilizovanom systéme $M|G|n|n$ má doba obsluhy τ takéto pp. rozdelenie

$$\mathcal{P}(\tau = 10\ min.) = \frac{1}{5}, \quad \mathcal{P}(\tau = 5\ min.) = \frac{4}{5}.$$

Predpokladá sa, že je intenzita vstupného toku prinajmenšom rovná dvojnásobku intenzity obsluhy. Pri akom minimálnom počte liniek nebude viac než 10% zákazníkov odmietnutých?

Vďaka Chinčinovmu zisteniu môžme použiť Erlandove vzorce pre systém $M|M|n|n$. Najskôr vypočítame strednú dobu obsluhy

$$\frac{1}{\mu} = E(\tau) = 10\frac{1}{5} + 5\frac{4}{5} = 6\ min.$$

Ďalej potrebujeme postupne vypočítať pre $n = 1, 2...$ parameter $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \geq 2$ tak, aby $P_Z = \pi_n \leq 0.1$ t.j

$$\frac{\alpha^n}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{(1-\alpha/n)}} \leq \frac{n!}{10}.$$

je zmysluplný, ak je počet liniek n v $M|M|n|n$ veľmi veľký. V tomto systéme k odmietaniu zákazníka nikdy nedochádza, zákazník vždy nájde voľnú linku. Proces vzniku a zániku s nasledujúcim prechodovým grafom je tu vždy ergodický a má stacionárne rozdelenie stavov

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{\alpha^j}{j!}\pi_0, & \text{ak } j > 0, \\ e^{-\alpha}, & \text{ak } j = 0. \end{cases} \tag{38}$$

Z charakteristík má význan stredná doba pobytu rovná strednému počtu obsadených liniek v systéme

$$E(\mathbb{N}) = E(\mathbb{N}_S) = \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j = \alpha e^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} = \alpha. \tag{39}$$

Príklad 3.9 – sledovanosť TV seriálu

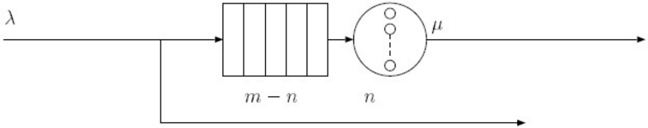
Súkromnú TV zaujíma sledovanosť jedného jeho seriálu. Prieskumom bolo zistené, že v priebehu hodiny sleduje tento kanál 30 tis. divákov, pričom doba, ktorú divák venuje jeho sledovaniu je cca 100 minút. Aký je odhad počtu divákov sledujúcich tento seriál?

Predpladájme, že vstupný tok divákov možno modelovať elemetárnym tokom s parametrom $\lambda = 30\ 000$ divákov/hod. a priemerná doba obsluhy je $\frac{1}{\mu} = \frac{5}{3}$ hod.

Potom priemerný počet divákov sledujúcich seriál môžeme odhadnúť charakteristikou $E(\mathbb{N}_S) = \alpha = \frac{\lambda}{\mu} = 5\ 000$ divákov.

$M|M|n|m$

V tomto systéme sa pripúšťa čakanie v obmedzenom rade $m - n$ miest frontu. Ostatné predpoklady zostávajú ako v systéme $M|M|n|\infty$.



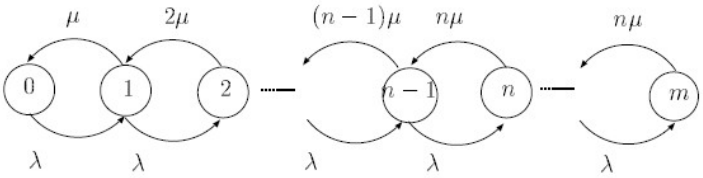
Obr. 8: *Schéma konečného elementárneho systému s čakaním*

Jeho chovanie modelujeme procesom vzniku a zániku s množinou stavov $S = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, m\}$.

$M|M|n|m$ – prechodový graf

Jediná zmena sa týka výpočtu pravdepodobnosti zotrvania systému v stave m

$$p_{mm}(\Delta t) = \mathcal{P}(\boldsymbol{\tau} > \Delta t)^n = e^{-n\mu\Delta t} = 1 - n\mu\Delta t + o(\Delta t).$$



Obr. 9: *Prechodový graf systému $M|M|n|m$*

Systém má jediné stacionárne rozdelenie stavov v tvare

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{\alpha^j}{j!}\pi_0, & \text{ak } 0 < j < n, \\ \frac{n^n}{n!}\rho^j\pi_0, & \text{ak } n \leq j \leq m, \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{(1-\rho^{m-n+1})}{1-\rho}\right)^{-1}, & \text{ak } j = 0, \end{cases} \tag{40}$$

kde $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ a $\rho = \frac{\alpha}{n}$.

Cvičenie:

Overte platnosť Erlangových vzorcov $M|M|n|m$ pre systémy

$$M|M|1|\infty, \quad M|M|n|\infty, \quad M|M|n|n, \quad M|M|\infty.$$

- P_Z – pp. že prichádzajúci zákazník bude odmietnutý

$$P_Z = \pi_m. \tag{41}$$

- P_Q – pp. že prichádzajúci zákazníci budú čakať vo fronte

$$P_Q = \sum_{j=n}^{m-1} \pi_j = \frac{n^n \pi_0}{n!} \sum_{j=n}^{m-1} \rho^j = \begin{cases} \pi_n \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho}, & \text{ak } \rho \neq 1, \\ \pi_n (m-n), & \text{ak } \rho = 1. \end{cases} \tag{42}$$

- $E(\mathbb{N}_Q)$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov

$$E(\mathbb{N}_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n)\pi_j = \frac{n^n \pi_0}{n!} \sum_{j=n+1}^{m} (j-n)\rho^j =$$
$$= \pi_n \sum_{k=1}^{m-n} k\rho^k. \tag{43}$$

- $E(\mathbb{N}_S)$ – stredný počet obsadených liniek

$$E(\mathbb{N}_S) = \sum_{j=0}^{n} j\pi_j + n\sum_{j=n+1}^{m}\pi_j = \sum_{j=1}^{n}\alpha\pi_{j-1} + n\sum_{j=n+1}^{m}\rho\pi_{j-1} =$$
$$= \alpha\sum_{k=0}^{m-1}\pi_k = \alpha(1-\pi_m). \qquad (44)$$

- κ – využitie systému

$$\kappa = \frac{E(\mathbb{N}_S)}{n} = \rho(1-\pi_m). \qquad (45)$$

$M|M|n|m$ – charakteristiky III.

- λ_P – stredný počet prijatých zákazníkov za jednotku času je rovný strednému počtu obslužených zákazníkov za jednotku času. Z Littlovej formuly aplikovanej na výstupný tok zákazníkov dostávame

$$\lambda_P = \frac{E(\mathbb{N}_S)}{\frac{1}{\mu}} = \lambda(1 - \pi_m). \tag{46}$$

- λ_Z – stredný počet zamietnutých zákazníkov za jednotku času

$$\lambda_Z = \lambda - \lambda_P = \lambda\pi_m. \tag{47}$$

$M|M|n|m$ – charakteristiky IV.

- $E(\mathbb{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte, z Littlovej formuly

$$E(\mathbb{W}_Q) = \frac{E(\mathbb{N}_Q)}{\lambda_P}. \tag{48}$$

- $E(\mathbb{T})$ – stredná doba pobytu v systéme

$$E(\mathbb{T}) = E(\mathbb{W}_Q) + \frac{1}{\mu}. \tag{49}$$

- $E(\mathbb{N})$ – stredná počet zákazníkov v systéme

$$E(\mathbb{N}) = \lambda_P(E(\mathbb{W}_Q) + E(\mathbb{W}_S)) = E(\mathbb{N}_Q) + E(\mathbb{N}_S). \tag{50}$$

Príklad 3.10 – cvičenie

Dvojlinkový stabilizovaný systém $M|M|2|5$ je využívaný na 68%.

- Aký je priemerný počet čakajúcich zákazníkov?
- Koľko % z prichádzajúcich zákazníkov bude odmietnutých?
- Ako sa zmenia vyššie uvedenené charakteristiky systému po pridaní jedného čakajúceho miesta vo fronte?
- Môže byť niekedy výhodné nahradiť dvojlinkový systém $M|M|2|5$ dvoma jednolinkovými systémami $M|M|1|2$ a $M|M|1|3$ ak si zákazníci pri príchode náhodne vyberajú jednolinkový systém v pomere $r_1 : r_2$?

Optimalizácia počtu liniek II.

Nech sú známe jednotkové prevádzkové náklady a parametre stabilizovaného systému

- c_1 – priemerný príjem z obsluhy zákazníka,
- c_2 – priemerná zľava na čakajúceho zákazníka,
- c_3 – fixné náklady na prevádzku linky,
- K – prípustný počet čakajúcich zákazníkov.

Cieľom je nájsť taký počet liniek n s nanajvýš K čakajúcimi zákazníkmi pri ktorom je celkový zisk vyprodukovaný systémom $M|M|n|n+K$ maximálny

$$Z(n) = c_1 \lambda_P - c_2 E(\mathbb{N}_Q) - c_3 n. \tag{51}$$

Príklad 3.11 – opravovňa autobusov I.

Do opravovne autobusov prichádza týždenne priemerne 3.5 vozidiel. Opravár priemerne potrebuje na opravu vozidla 4 dni. Priemerná cena opravy autobusu je cca 13 000 eur. Ak nemožno začať s opravou po prebratí vozidla, zákazník dostavá 5% zľavu. Hrubá mzda opravára je 1 800 eur. Opravovňa má parkovisko s kapacitou 6 vozidiel. Pri akom počte opravárov dosiahne opravovňa maximálny priemerný zisk za týždeň?

Budeme predpokladať, že vstupný tok vozidiel je elementárny s parametrom $\lambda = \frac{3.5}{5} = 0.61$ voz./den. (týždeň má 5 pracovných dní). Intenzita obsluhy opravárom je $\mu = \frac{1}{4}$ voz./deň. Z každým prebratým vozidlom vzraste hrubý príjem opravovne priemerne o $c_1 = 13\ 000$ eur. 5% zľava pri prebratí vozidla spôsobí priemerné zníženie zisku o $c_2 = 0.05 \cdot c_1$ za vozidlo.
Prevádzkové náklady sú tu reprezentované len priemernou mzdou opravárom vo výške $c_3 = 1\ 800$ eur. Opravovňa disponuje parkoviskom s $K = 6$ vozidlami a tak hľadáme optimálny počet opravárov n systéme $M|M|n|n+6$, ktorý maximalizuje $Z(n)$.

Príklad 3.11 – opravovňa autobusov II.

Po dosadení príslušných charakteristík systému $M|M|n|n+K$ a úprave dostaneme kriteríálnu

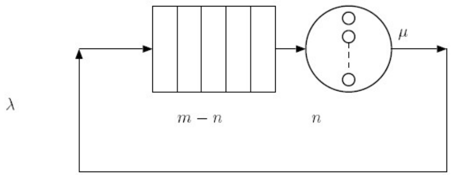
$$Z(n) = c_1\lambda\left(1 - \frac{\alpha^{n+K}}{n!n^K}\pi_0^n\right) - c_2\frac{\alpha^n}{n!}\pi_0^n\sum_{k=1}^{m-n} k\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k - c_3 n,$$

kde

$$\pi_0^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{(1-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{K+1}}{1-\frac{\alpha}{n}}\right)^{-1}.$$

Pravdepodobnosť π_0^n udáva pravdepodobnosťou prázdneho systému pri danom počte liniek n. Výpočet optimálneho počtu n^* opravárov, kde $Z(n^*) = \max\{Z(n), n \geq 1\}$, už ponechávame na Excel.

V tomto n-linkovom systéme cirkuluje m zákazníkov, ktorí môžu čakať vo fronte dĺžky $m - n \geq 0$ na uvplnenie niektorej linky. Zákazníci po ukončení obsluhy opúšťajú systém, ale sa do neho po istom čase vracajú a požadujú obsluhu.



Obr. 10: *Uzavretý systém*

Prípad $n = m$ je pomerne jednoduchý pretože každému zákazníkovi môžeme priradiť 1 linku obsluhy a tým previesť na n jednolinkových uzavretých systémov $M|M|1|1$.

Uzavretý systém $M|M|n|m$ – predpoklady

Doba pobytu každého zákazníka tu má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou $\frac{1}{\lambda} > 0$. Doba obsluhy kždej z liniek má tiež exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou $\frac{1}{\mu} > 0$. Zákazník, ktorý nájde v čase príchodu aspoň jednu linku voľnú začne byť obsluhovaný niektorou z nich, inak sa postaví do radu. Ak nie je uvedené ináč, predpokladá sa režim frontu FIFO.

Systém možno modelovať ako proces vzniku a zániku s množinou stavov $S = \{0, 1, \ldots, n, \ldots, m\}$ Stavy systému interpretujeme takto

- 0 - v systéme nie je žiaden zákazník, všetci zákazníci sú mimo systému,
- $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ - v systéme je obsluhovaných i zákazníkov a $m - i$ zákazníkov je mimo systému,
- $i \in \{n + 1, n + 2, \ldots, m\}$ - v systéme je obsluhovaných n zákazníkov, $i - n$ čaká a $m - i$ sú mimo systému.

Využijeme bezpamäťovú vlastnosť exponencionálneho rozdelenia.

Doba pobytu aj zvyšková doba mimo systém majú exponeciálne rozdelenia s parametrom λ a tak pp., že jeden zákazník príde do systému za čas Δt je rovná $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Pravdepodobnosť, že zotrvá mimo systému je potom rovná $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$.

Doba obsluhy má exponenciálne rozdelenie s parametrom μ a tak pp., že bude obslúžený jeden zákazník za čas Δt je rovná $\mu\Delta t + o(\Delta t)$. Pravdepodobnosť, že zotrvá v systému je potom rovná $1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)$.

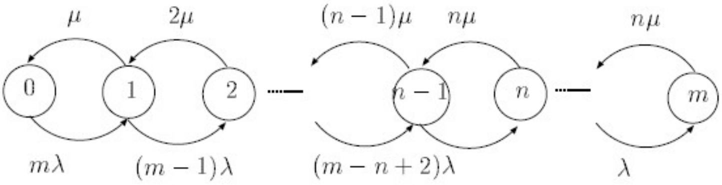
Ak je systém v stave $i, (0 \leq i < m)$ potom i udáva počet obsluhovaných a čakajúcich zákazníkov, z toho $\min(i, n)$ je obsluhovaných, a $m - i$ je mimo systému. Pravdepodobnosť, že práve jeden z nich príde a ostatní ani neprídu ani neodídu je

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(\Delta t) =& (m-i)(\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))^{m-i-1} \\ & (1 - \mu\Delta t + o(\Delta t))^{\min(i,n)} = (m-i)\lambda\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \tag{52}$$

Ak je systém v stave $i, (1 \leq i \leq m)$ potom pp, že práve jeden z $\min(i, n)$ odíde a ostatní ani neprídu ani neodídu je

$$\begin{aligned} p_{i,i-1}(\Delta t) =& \min(i,n)(\mu\Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t + o(\Delta t))^{\min(i,n)-1} \\ & (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))^{m-i} = \min(i,n)\mu\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \tag{53}$$

Uzavretý systém $M|M|n|m$ – prechodový graf



Obr. 11: *Prechodový graf uzavretého systému*

Systém má jediné stacionárne rozdelenie stavov v tvare

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{m-j+1}{j}\alpha\pi_{j-1}, & \text{ak } 0 < j < n, \\ (m-j+1)\rho\pi_{j-1}, & \text{ak } n \leq j \leq m, \\ 1 - \sum_{k=1}^{m} \pi_k, & \text{ak } j = 0, \end{cases} \tag{54}$$

kde $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ a $\rho = \frac{\alpha}{n}$.

Je výhodné využívať pre výpočet stacionárnych pravdepodbností substitúciu $\pi_j = q_j \pi_0$, kde

$$q_j = \begin{cases} \frac{m-j+1}{j} \alpha q_{j-1}, & \text{ak } 0 < j < n, \\ (m-j+1)\rho q_{j-1}, & \text{ak } n \le j \le m, \\ 1. & \text{ak } j = 0, \end{cases} \tag{55}$$

- $E(\mathbb{N})$ – stredný počet zákazníkov v systéme

$$E(\mathbb{N}) = \sum_{j=1}^{m} j\pi_j = \frac{\sum_{j=1}^{m} jq_j}{\sum_{j=0}^{m} q_j}. \tag{56}$$

- $E(\mathbb{N}_S)$ – stredný počet obsadených liniek

$$E(\mathbb{N}_S) = \sum_{j=1}^{n-1} j\pi_j + n\sum_{j=n}^{m} \pi_j = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} jq_j + n\sum_{j=n}^{m} q_j}{\sum_{j=0}^{m} q_j}. \tag{57}$$

- $E(\mathbb{N}_Q)$ – stredný počet čakajúcich zákazníkov v systéme

$$E(\mathbb{N}_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n)\pi_j = \frac{\sum_{j=n+1}^{m} (j-n)q_j}{\sum_{j=0}^{m} q_j} = E(\mathbb{N}) - E(\mathbb{N}_S). \tag{58}$$

- $E(\mathbb{N}_R)$ – stredný počet zákazníkov mimo systému

$$E(\mathbb{N}_R) = \sum_{j=1}^{m} j\pi_{m-j} = \frac{\sum_{j=1}^{m} jq_{m-j}}{\sum_{j=0}^{m} q_j} = m - E(\mathbb{N}_Q) - E(\mathbb{N}_S). \tag{59}$$

- λ_R – stredný počet prichádzajúcich zákazníkov za časovú jednotku je strednému počtu odchádzajúcich zákazníkov, a tak z Littlovej formule máme

$$\begin{aligned}
\lambda_R =& \frac{E(\mathbb{N}_S)}{\frac{1}{\mu}} = \mu\Big(\sum_{j=1}^{n-1} j\pi_j + n\sum_{j=n}^{m}\pi_j\Big) = \\
=& \mu\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(m-j+1)\pi_{j-1} + n\rho\sum_{j=n}^{m}(m-j+1)\pi_{j-1}\Big) = \\
=& \mu\alpha\sum_{j=1}^{m}(m-j+1)\pi_{j-1} = \lambda E(\mathbb{N}_R).
\end{aligned} \tag{60}$$

- κ – využitie systému, z $\mu E(\mathbb{N}_S) = \lambda E(\mathbb{N}_R)$ dostaneme

$$\kappa = \frac{E(\mathbb{N}_S)}{n} = \rho E(\mathbb{N}_R). \tag{61}$$

Uzavretý systém $M|M|n|m$ – charakteristiky IV.

- $E(\mathbb{W}_Q)$ – stredná doba čakania vo fronte, z Littlovej formule

$$E(\mathbb{W}_Q) = \frac{E(\mathbb{N}_Q)}{\lambda_R} = \frac{E(\mathbb{N}_Q)}{\lambda E(\mathbb{N}_R)}. \tag{62}$$

- $E(\mathbb{W}_O)$ – stredná doba obehu zákazníka je zložená zo stednej doby čakania, strednej doby obsluhy a slednej doby pobytu mimo systému

$$E(\mathbb{W}_O) = E(\mathbb{W}_Q) + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}. \tag{63}$$

Príklad 3.12 – v kameňolome Ladce (1991–1992)

V kameňolome cirkulujú vodiči nákladných vozidiel TATRA medzi drvičkom a bagroviskom. Doba nakládky kamenia na bagrovisku má exponecionálne rozdelenie so strednou hodnotou $\frac{1}{\mu}$. Doba jazdy vozidla jazdou vozdila ku drtičke, vykládkou a návratom na bagrovisko má exponenciálne rozdelenie so stednou hodnotou $\frac{1}{\lambda}$. Priemerný mesačný výkon vozidla je m_V obehov. Drvička vyžaduje na svoju efektívnu prevádzku priemerne m_D vykládok. Mesačná mzda bagristu je c_B eur a vodiča vozidla je c_V eur. Treba urči optimálny počet vodičov a bagristov tak aby priemerné straty z prestoja bagristov a vodičov boli minimálne.

Úlohu možno modelovať ako Markovov uzavretý systém $M|M|n|m$, kde n je počet bágristou a m je počet vodičov vozidiel. Dolný odhad počtu vodičov m je daný minimálnou potrebou priemerného počtu vykládok t.j. $m \geq \frac{m_D}{m_V}$.

Priemerný počet nevyužitých bagristov je $n - E(\mathbb{N}_S)$. Pri mesačnej mzde bágristu vo výške c_B eur môžeme priemerné straty z prestojov odhadnúť vo výške $c_B(n - E(\mathbb{N}_S))$. Vodiči vozidiel stoja, ak báger nakladá. Priemerné straty z prestojov vodičov môžeme odhadnúť vo výške $c_V E(\mathbb{N}_Q)$.

Celkové straty kameňolomu na mzdách n bágristov a m vodičov pri zaťažení bágrov $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ sú

$$C(n, m) = c_B\big(n - E(\mathbb{N}_S)\big) + c_V E(\mathbb{N}_Q).$$

Cieľom je nájsť také počty n^*, m^* zamestnancov, pri ktorých je

$$C(n^*, m^*) = \min\left\{C(n, m) : n, m \in \mathcal{N}, m \geq \frac{m_D}{m_V}\right\}.$$