

3 Kombinatorický dôkaz. Vytvárajúce funkcie.

3.1 Kombinatorický dôkaz

Príklad 3.1 Do súťažného tímu máme vybrať k ľudí z n . Všetkých možností je $\binom{n}{k}$. Máme ale informáciu o problematickom Hugovi, ktorý síce všetko vyhráva, ale mimo súťaž je nezvládnuteľný.

- Ak by sme Huga vybrali, potom možností, ako zostaviť tím je $\binom{n-1}{k-1}$.

- Ak by sme Huga nevybrali, možností je $\binom{n-1}{k}$.

Počet tímov s Hugom a bez Huga predstavuje počet všetkých možností, preto platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Príklad 3.2 Balíček kariet obsahuje n červených a $2n$ čiernych kariet. Na ruku si z balíčka vytiahnem n kariet. Všetkých možností je $\binom{3n}{n}$. Počet možností, aby som mal na ruke práve r červených je $\binom{n}{r} \binom{2n}{n-r}$. Preto platí

$$\binom{3n}{n} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \binom{2n}{n-r}$$

Príklad 3.3 Pri kontrole kvality žiaroviek neodskúšajú každú žiarovku, či svieti. Namiesto toho sa používa test, pri ktorom sa vyberie nejaký menší počet m spomedzi všetkých M žiaroviek. Medzi všetkými M žiarovkami je N chybných. Označme n počet chybných žiaroviek v skupine vybratých m žiaroviek. Pre počet možností, ako medzi všetkými M žiarovkami môžeme rozmiestniť N chybných platí

$$\binom{M}{N} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \binom{M-n}{m-n}$$

Postup pri kombinatorickom dôkaze:

a) Definujeme množinu S .

b) Vyjadríme počet prvkov množiny S nejakým výrazom, vzorcom, alebo formulou $F1$:

$$|S| = F1$$

c) Vyjadríme počet prvkov množiny S iným výrazom, vzorcom, alebo formulou $F2$:

$$|S| = F2$$

d) Pretože sme formulami $F1$ a $F2$ vyjadrili počet prvkov tej istej množiny S , musí platiť:

$$F1 = F2$$

Iný pohľad na Binomickú vetu:

V nasledujúcom texte budeme všetky n -bitové slová reprezentovať pomocou mocnín x nasledujúcim spôsobom. Na mieste nuly napíšeme x^0 ($x^0 = 1$) a namiesto 1 píšeme x^1 ($x^1 = x$). Teda n -tici priradíme mocninu x :

$$101001 \rightarrow x^1 x^0 x^1 x^0 x^0 x^1 \rightarrow x^3$$

Výraz x^0 teda znamená, že v danom bite sa nachádza 0, výraz x^1 znamená, že sa v danom bite nachádza 1.

Výraz $(1+x)^1 = \binom{1}{0} \cdot x^0 + \binom{1}{1} \cdot x^1$ predstavuje všetky možnosti, ako zapísať do 1-bitového slova hodnotu 0 alebo 1. Obdobne výraz $(1+x)^2$ môže reprezentovať všetky možnosti, ako zapísať do 2-bitového slova hodnoty 0 alebo 1:

$$(x^0 + x^1)^2 = (1+x)^2 = x^0 x^0 + x^0 x^1 + x^1 x^0 + x^1 x^1 = 1 + 2x + x^2$$

Výraz $(1+x)^n$ môže reprezentovať spôsob ako zapisovať jednotky a nuly do n -bitového slova. Binomický rozvoj výrazu $(1+x)^n$ postupne obsahuje výrazy, v ktorých je kombinačným číslom vyjadrený počet slov s jednou jednotkou, počet slov s dvoma jednotkami, až s n jednotkami. Počet jednotiek zodpovedajúci určitej mocnine x^n určí pri nej napísané kombinačné číslo.

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

Z iného pohľadu počet všetkých n -bitových slov je počet všetkých n -tíc vytvorených z núl a z jednotiek, ich počet je $|\{0,1\}^n| = 2^n$. Tým sme pomocou kombinatorického dôkazu dokázali rovnosť

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

3.2 Vytvárajúce (generujúce) funkcie

Vytvárajúce funkcie tvoria prechod medzi diskretnou matematikou a spojitou matematikou resp. matematickou analýzou. Hlavnou myšlienkou je zobrazenie (mapovanie) postupnosti čísel na polynóm, respektíve zovšeobecnený polynóm. Táto technika umožňuje riešiť rôzne komplikované problémy v diskretnéj matematike tak, že ich prevedieme do pojmov spojitej matematiky a tam ich vyriešime a prevedieme naspäť. Analogické prepojenie môžeme nájsť napríklad v geometrii medzi klasickou a analytickou geometriou.

Nech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť celých čísel, potom polynóm $A(x)$ nazveme vytvrajúcou funkciou postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, ak platí:

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle \quad \leftrightarrow \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A(x)$$

$$\langle 3, 2, 1, 0, 0, 0, \dots \rangle \quad \leftrightarrow \quad 3 + 2x + x^2$$

$$\langle 1, 4, 6, 4, 1, 0, \dots \rangle \quad \leftrightarrow \quad 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 = (1+x)^4$$

geometrická postupnosť:

$$\langle 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

$$\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots \rangle \leftrightarrow 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + \dots = \frac{1}{1-2x}$$

$$\langle 1, q, q^2, q^3, \dots \rangle \leftrightarrow \frac{1}{1-qx}$$

násobenie konštantou:

$$\langle 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots \rangle \leftrightarrow 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + \dots = \frac{2}{1-x}$$

$$\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle \leftrightarrow A(x) \Rightarrow \langle ca_0, ca_1, ca_2, ca_3, \dots \rangle \leftrightarrow cA(x)$$

posun o m -pozícií doprava:

$$\langle 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \leftrightarrow x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \frac{x}{1-x}$$

$$\langle 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \leftrightarrow x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \frac{x^2}{1-x}$$

$$\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle \leftrightarrow A(x) \Rightarrow \langle 0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle \leftrightarrow x^m A(x)$$

súčet postupností:

$$\langle 0, 1, 2, 2, 2, 2, \dots \rangle = \langle 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots \rangle + \langle 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \leftrightarrow \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} = \frac{x(1+x)}{1-x}$$

$$\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle \leftrightarrow A(x)$$

$$\langle b_0, b_1, b_2, b_3, \dots \rangle \leftrightarrow B(x)$$

$$\langle a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots \rangle \leftrightarrow C(x) = A(x) + B(x)$$

opačný postup:

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x} &= \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) + (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) = \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots \leftrightarrow \langle 1, 2, 2, 2, 2, \dots \rangle \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \left(\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots \right) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots \leftrightarrow \langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots \rangle$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \dots \leftrightarrow \langle 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots \rangle$$

Súvislosť medzi výsledkami kombinatorických úloh a koeficientami vytvárajúcich postupností

Koľkými spôsobmi sa dá usporiadať n -ľudí do radu na obed?

$$\langle 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots, n!, \dots \rangle \leftrightarrow F(x)$$

Koľkými spôsobmi sa dajú vybrať traja medailisti z n -ľudí?

$$\langle 0, 0, 0, 1, 4, 10, \dots \rangle = \langle 0, 0, 0, \binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \dots, \binom{n}{3}, \dots \rangle \leftrightarrow F(x)$$

Vo vytvárajúcej funkcii $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ koeficient a_n pri mocnine x^n zodpovedá riešeniu kombinatorickej úlohy pre počet n .

Princíp konvolúcie

Nech $A = \{a_1, a_2\}$. Možnosti výberu n -prvkových podmnožín sú $\{\emptyset\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$ odpovedajú postupnosti $\langle 1, 2, 1, 0, 0, 0, \dots \rangle$ resp. vytvárajúcej funkcií $A(x) = (1+x)^2$.

Nech $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Možnosti výberu n -prvkových podmnožín odpovedajú postupnosti $\langle 1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, \dots \rangle$ resp. vytvárajúcej funkcií $B(x) = (1+x)^4$.

Pre možnosti výberu n -prvkových podmnožín zo 6-prvkovej množiny platí:

$$\begin{aligned}(1+x)^6 &= (1+x)^2(1+x)^4 = (1+2x+x^2)(1+4x+6x^2+4x^3+x^4) = \\ &= 1 + (1 \cdot 4 + 2 \cdot 1) \cdot x + (1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1) \cdot x^2 + \dots\end{aligned}$$

Koeficient pri x^2 môžeme interpretovať ako spôsoby vyberania 6 prvkov z 2-prvkovej a 4-prvkovej množiny:

$1 \cdot 6$ - 1 možnosť výberu 0 prvkov z A , $\binom{2}{0} = 1$, a 6 možností výberu 2 prvkov z B , $\binom{4}{2} = 6$

$2 \cdot 4$ - 2 možnosti výberu 1 prvku z A , $\binom{2}{1} = 2$, a 4 možnosti výberu 1 prvku z B , $\binom{4}{1} = 4$

$1 \cdot 1$ - 1 možnosť výberu 2 prvkov z A , $\binom{2}{2} = 1$, a 0 možností výberu 0 prvku z B , $\binom{4}{0} = 1$

$$\binom{6}{2} = \binom{2}{0} \binom{4}{2} + \binom{2}{1} \binom{4}{1} + \binom{2}{2} \binom{4}{0} \Rightarrow c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

Konvolučné pravidlo:

Nech z množiny A vyberáme $0, 1, 2, 3, \dots$ prvkov podľa určitého pravidla. Nech $A(x)$ je vytvárajúca funkcia k postupnosti počtu týchto výberov z A .

Nech z množiny B vyberáme $0, 1, 2, 3, \dots$ prvkov podľa toho istého pravidla a $B(x)$ je vytvárajúca funkcia k postupnosti počtu týchto výberov z B . Nech $A \cap B = \emptyset$ a $C = A \cup B$.

Potom $C(x) = A(x) \cdot B(x)$ je vytvárajúca funkcia k postupnosti počtu výberov $0, 1, 2, 3, \dots$ prvkov podľa toho istého pravidla z množiny C .

Teda ak platí $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, pričom $A \cap B = \emptyset$, potom pre

$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, ktorá popisuje výber prvkov z $C = A \cup B$ platí: $C(x) = A(x) \cdot B(x)$, resp.

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$, kde postupnosť $\{c_n\}$ sa nazýva konvolúciou postupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$.

Príklad 3.4 Do batohu môžeme dať 6 kusov ovocia podľa daných pravidiel:

- jablká J len párny počet
- banány B násobky 5
- pomaranče P najviac 4
- hrušky H najviac 1

Kolko je možností, ako naplniť batoh n kusmi ovocia? Kolko je možností, ako naplniť batoh 20 kusmi ovocia?

Určíme všetky možnosti ako naplniť batoh o veľkosti 6:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| J | 0 | 0 | 6 | 4 | 4 | 2 | 2 |
| B | 5 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| P | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 4 | 3 |
| H | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Batoh o veľkosti $n = 6$ môžeme naplniť siedmimi spôsobmi. Pomocou vytvárajúcich funkcií môžeme nájsť riešenie pre batoh o veľkosti n :

$$J: \langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \rangle \leftrightarrow J(x) = \frac{1}{1 - x^4}$$

$$B: \langle 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots \rangle \leftrightarrow B(x) = \frac{1}{1 - x^5}$$

$$P: \langle 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots \rangle \leftrightarrow P(x) = \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

$$H: \langle 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots \rangle \leftrightarrow H(x) = 1 + x$$

Použijeme konvolučné pravidlo pre výber n kusov ovocia, množinu $F = J \cup B \cup P \cup H$, pričom ostávajú v platnosti pravidlá pre výbery z množín J, B, P, H .

Vytvárajúca funkcia pre počet výberov ovocia z množiny F má tvar:

$$F(x) = J(x) \cdot B(x) \cdot P(x) \cdot H(x) = \frac{1}{1 - x^4} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} (1 + x) = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - x} = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) =$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n + 1)x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)x^n$$

Pre veľkosť batohu n existuje $n + 1$ možností ako batoh naplniť. Pre veľkosť batohu 20 existuje 21 možností ako batoh naplniť.

Vytvárajúca funkcia pre postupnosť 1, 2, 3, 4, ...:

Postupom použitým v predchádzajúcej úlohe (konvolúcia) dostaneme vytvárajúce funkcie pre postupnosti:

$$\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \rangle \leftrightarrow 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \dots = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

$$\langle 1, 3, 6, 10, 15, \dots \rangle \leftrightarrow x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + 15x^5 + \dots = \frac{1}{(1 - x)^3}$$

Príklad 3.5 Do krabice o veľkosti n dávame šišky podľa daných pravidiel:

- čokoládové H sú aspoň 3
- citrónové C sú najviac 2
- kokosové K sú 2 alebo žiadna
- banánové B sú násobky 4

Kolko je možností ako si objednať n šišiek? Kolko je možností, ako si objednať 11 šišiek?

Nájďme vytvárajúce funkcie pre jednotlivé pravidlá a k nim prislúchajúce množiny:

$$\text{- čokoládové } H \text{ sú aspoň 3:} \quad \langle 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots \rangle \leftrightarrow H(x) = \frac{x^3}{1-x}$$

$$\text{- citrónové } C \text{ sú najviac 2:} \quad \langle 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots \rangle \leftrightarrow C(x) = 1 + x + x^2$$

$$\text{- kokosové } K \text{ sú 2 alebo žiadna:} \quad \langle 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots \rangle \leftrightarrow K(x) = 1 + x^2$$

$$\text{- banánové } B \text{ sú násobky 4:} \quad \langle 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots \rangle \leftrightarrow B(x) = \frac{1}{1-x^4}$$

Použijeme konvolučné pravidlo na vyjadrenie vytvárajúcej funkcie $F(x)$ a následne jej rozklad na parciálne zlomky, kvôli opačnému postupu na získanie postupnosti, prislúchajúcej k $F(x)$:

$$F(x) = \frac{x^3}{1-x}(1+x+x^2)(1+x^2)\frac{1}{1-x^4} = \frac{x^3(1+x+x^2)}{(1-x)^2(1+x)}$$

$$\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (A + (n+1)B + (-1)^n C) x^n$$

$$1+x+x^2 = A(1-x)(1+x) + B(1+x) + C(1-x)^2 \Rightarrow$$

$$x=1: B=\frac{3}{2}, \quad x=-1: C=\frac{1}{4}, \quad x=0: 1=A+B+C \Rightarrow A=-\frac{3}{4}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{1-x}(1+x+x^2)(1+x^2)\frac{1}{1-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (A + (n+1)B + (-1)^n C) x^{n+3} =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} (A + (n-2)B + (-1)^{n-3} C) x^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{6n-15+(-1)^{n-1}}{4} x^n$$

Krabicu o veľkosti n môžeme naplniť $\frac{6n-15+(-1)^{n-1}}{4}$ spôsobmi.

Krabicu o veľkosti $n=11$ môžeme naplniť $a_{11}=13$ spôsobmi.