Skupina A

1. V každej z dvoch škatúľ je práve jedna guľôčka, ktorá môže byť buď biela alebo čierna. Na prvej škatuli je nápis *„V prvej škatuli alebo v druhej škatuli je biela guľôčka"* a na druhej škatuli je nápis *„V oboch škatuliach je biela guľôčka"*. Vieme, že oba nápisy majú rovnakú pravdivostnú hodnotu. Určite pravdivostnú hodnotu nápisov a to, v ktorej škatuli je aká guľôčka. Riešenie zdôvodnite.

   (2 body)

   Riešenie:

   1. spôsob *Oba výroky majú byť buď pravdivé alebo nepravdivé.*

   (a) *Nech sú oba výroky pravdivé. Potom podľa prvého výroku musí byť aspoň jedna gulička biela a podľa druhého výroku musia byť obe guličky biele. To nastane vtedy, ak sú obe guličky biele.*

   (b) *Nech sú oba výroky nepravdivé, potom negácia prvého výroku hovorí, že sú obe guličky čierne a negácia druhého, že je aspoň jedna čierna. To nastane vtedy, ak sú obe guličky čierne.*

   Máme teda dve riešenia, jedno je že sú obe guličky biele a druhé, že sú obe čierne.

   2. spôsob *Máme spolu 4 možnosti ako budú umiestnené guličky a vyberieme z nich tie, kedy sú oba výroky pravdivé alebo nepravdivé.*

   (a) *Nech je v prvej krabici biela gulička a v druhej tiež biela gulička. Potom je prvý výrok pravdivý a druhý výrok tiež pravdivý. Máme riešenie.*

   (b) *Nech je v prvej krabici biela gulička a v druhej čierna gulička. Potom je prvý výrok pravdivý ale druhý výrok nepravdivý. Toto nie je riešenie.*

   (c) *Nech je v prvej krabici čierna gulička a v druhej biela gulička. Potom je prvý výrok pravdivý ale druhý výrok nepravdivý. Toto nie je riešenie.*

   (d) *Nech je v prvej krabici čierna gulička a v druhej tiež čierna gulička. Potom je prvý výrok nepravdivý a druhý výrok tiež nepravdivý. Máme druhé riešenie.*

   ■

2. Označme C množinu chlapcov a D množinu dievčat. Potom $c \in C$ znamená, že c je chlapec a $d \in D$ znamená, že d je dievča. Výrazom $c \heartsuit d$ vyjadríme skutočnosť, že chlapec c sa páči dievčaťu d a výrazom $d \heartsuit c$ skutočnosť, že dievča d sa páči chlapcovi c. Pre tvrdenie

   $$(\exists d \in D)(\forall c \in C)(d \heartsuit c \wedge \neg c \heartsuit d)$$

   - popíšte čo najjednoduchším a neformálnym jazykom jeho obsah,

     (3 body)

     Riešenie: *Existuje dievča, že pre toto dievča a pre každého chlapca platí, že sa dievča páči chlapcovi a zároveň sa chlapec nepáči dievčaťu.*

     Inak povedané. Existuje také dievča, ktoré sa páči každému chlapcovi, ale jej sa nepáči ani jeden chlapec. ■

   - napíšte jeho negáciu (formálne).

     (2 body)

Riešenie:

$$(\forall d \in D)(\exists c \in C)\neg(d\heartsuit c \wedge \neg c\heartsuit d) \Leftrightarrow (\forall d \in D)(\exists c \in C)(\neg d\heartsuit c \vee c\heartsuit d)$$

■

3. V triede je 22 žiakov, z nich 18 sa učí po anglicky a 6 sa učí po anglicky aj nemecky. Koľko žiakov z triedy sa učí po nemecky (bez ohľadu na iné jazyky), ak:

- sa každý učí aspoň jeden z týchto dvoch jazykov?

(2 body)

Riešenie: *Máme dve množiny, A a B. Nech do množiny A patria žiaci, ktorý sa učia po anglicky a do množiny B žiaci, ktorý sa učia po nemecky. Pre počty žiakov podľa zadania platí:*

$$|A \cup B| = 22,\ |A| = 18,\ |A \cap B| = 6.$$

Počet prvkov zjednotenia môžeme vypočítať pomocou vzorca

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

po úprave

$$|B| = |A \cup B| - |A| + |A \cap B| = 22 - 18 + 6 = 10.$$

■

- sa aspoň 1 žiak neučí ani po anglicky ani po nemecky?

(3 body)

Riešenie: *V tomto prípade zjednotenie množín A a B nie sú všetci žiaci v triede, lebo aspoň jeden žiak nepatrí ani do množiny A a ani do množiny B. Zadanie sa teda zmení:*

$$|A \cup B| < 22,\ |A| = 18,\ |A \cap B| = 6.$$

Vzorec pre počet prvkov prvkov zjednotenia sa nezmení, ale už vieme len že to bude menej ako 22:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| < 22,$$

po úprave

$$|B| < 22 - |A| + |A \cap B|,\ |B| < 22 - 18 + 6, |B| < 10.$$

Zároveň vieme, že po nemecky sa učí aspoň šesť žiakov (ktorí sa učia aj po anglicky). Takže po nemecky sa môže učiť 6, 7, 8 alebo 9 žiakov. ■

4. Nech γ je binárna relácia definovaná na množine $M = \{a, b, c, d\}$ tabuľkou:

γ	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	1	1	1	1
d	1	0	0	1

Zistite (a dokážte), či je relácia γ reláciou ekvivalencie alebo čiastočného usporiadania.

(4 body)

Riešenie: *Najskôr potrebujeme zistiť (a dokázať), či je relácia reflexívna, symetrická, antisymetrická a tranzitívna.*

(a) *Relácia je reflexívna ak platí:*
$$\forall x \in M : x\gamma x.$$
Podľa diagonály tabuľky naozaj pre všetky prvky množiny platí:
$$a\gamma a,\ b\gamma b,\ c\gamma c,\ d\gamma d.$$
Teda relácia ***je reflexívna.***

(b) *Relácia je symetrická ak platí:*
$$\forall x, y \in M : (x\gamma y) \Rightarrow (y\gamma x).$$
Napríklad nech $x = c$ *a* $y = b$. *Platí* $c\gamma b$, *ale neplatí* $b\gamma c$. *Implikácia neplatí pre všetky dvojice prvkov množiny, resp. platí jej negácia:*
$$\exists x, y \in M : \neg[(x\gamma y) \Rightarrow (y\gamma x)] \Leftrightarrow \exists x, y \in M : (x\gamma y) \wedge \neg(y\gamma x).$$
Relácia teda ***nie je symetrická.***

(c) *Relácia je antisymetrická ak platí:*
$$\forall x, y \in M : (x\gamma y) \wedge (y\gamma x) \Rightarrow (x = y).$$
Toto môžeme prepísať (implikáciu prevedieme na logický výraz):
$$\forall x, y \in M : \neg[(x\gamma y) \wedge (y\gamma x)] \vee (x = y) \Leftrightarrow \forall x, y \in M : \neg(x\gamma y) \vee \neg(y\gamma x) \vee (x = y).$$
Ak by sme chceli ukázať, že relácia nie je antisymetrická, chceli by sme ukázať že platí negácia posledného výroku, t.j.:
$$\exists x, y \in M : \neg[\neg(x\gamma y) \vee \neg(y\gamma x)] \vee (x = y)] \Leftrightarrow \exists x, y \in M : (x\gamma y) \wedge (y\gamma x)] \wedge (x \neq y).$$
Hľadáme teda takú dvojicu $x, y \in M, x \neq y$, *aby platilo* $x\gamma y$ *a súčasne* $y\gamma x$. *Vyskúšaním všetkých možností zistíme, že taká dvojica neexistuje.*

x	y	$x\gamma y$	$y\gamma x$
a	b	0	0
a	c	0	1
a	d	0	1
b	a	0	0
b	c	0	1
b	d	0	1

x	y	$x\gamma y$	$y\gamma x$
c	a	1	0
c	b	1	0
c	d	1	0
d	a	1	0
d	b	0	0
d	c	0	1

Teda nie je pravda, že relácia nie je antisymetrická $\Rightarrow$ *relácia* ***je antisymetrická***.

(d) *Relácia je tranzitívna ak platí:*
$$\forall x, y, z \in M : (x\gamma y) \wedge (y\gamma z) \Rightarrow (x\gamma z).$$
Musíme to overiť pre všetky trojice prvkov $x, y, z \in M$, *pre ktoré je splnená ľavá strana implikácie (ak neplatí ľavá strana, implikácia je určite pravdivá a teda ju nemusíme overovať):*

- $x = a$
  Jediný prvok, ktorý je v relácii s prvkom a *je on sám, teda aby platila prvá časť logického súčinu, musí byť* $y = a$. *Podobne aby platila aj druhá časť súčinu, musí aj* $z = a$. *Keďže platí* $a\gamma a$, *je splnená aj pravá strana implikácie.*

- $x = b$
  Jediný prvok, ktorý je v relácii s prvkom b je on sám, teda aby platila prvá časť logického súčinu, musí byť $y = b$. Podobne aby platila aj druhá časť súčinu, musí aj $z = b$. Keďže platí $b\gamma b$, je splnená aj pravá strana implikácie.
- $x = c$
  Prvok c je v relácii so všetkými prvkami, pre y teda máme tieto možnosti:
  - $y = a$
    Ostáva jediná možnosť $z = a$, platí $c\gamma a$ a teda implikácia platí.
  - $y = b$
    Ostáva jediná možnosť $z = b$, platí $c\gamma b$ a teda implikácia platí.
  - $y = c$
    Prvok c je v relácii so všetkými prvkami, pre z teda máme tieto možnosti:
    * $z = a$
      Platí $c\gamma a$ a teda implikácia platí.
    * $z = b$
      Platí $c\gamma b$ a teda implikácia platí.
    * $z = c$
      Platí $c\gamma c$ a teda implikácia platí.
    * $z = d$
      Platí $c\gamma d$ a teda implikácia platí.
  - $y = d$
    Prvok d je v relácii s prvkami a a d, pre z teda máme možnosti:
    * $z = a$
      Platí $c\gamma a$ a teda implikácia platí.
    * $z = d$
      Platí $c\gamma d$ a teda implikácia platí.
- $x = d$
  Prvok d je v relácii s prvkami a a d, pre y teda máme možnosti:
  - $y = a$
    Ostáva jediná možnosť $z = a$, platí $d\gamma a$ a teda implikácia platí.
  - $y = d$
    Prvok d je v relácii s prvkami a a d, pre z teda máme možnosti:
    * $z = a$
      Platí $d\gamma a$ a teda implikácia platí.
    * $z = d$
      Platí $d\gamma d$ a teda implikácia platí.

Prehľadnejšie to môžeme zapísať do tabuľky:

x	y	z	$(x\gamma y) \wedge (y\gamma z)$	$(x\gamma z)$
a	a	a	1	1
b	b	b	1	1
c	a	a	1	1
c	b	b	1	1
c	c	a	1	1
c	c	b	1	1
c	c	c	1	1

x	y	z	$(x\gamma y) \wedge (y\gamma z)$	$(x\gamma z)$
c	c	d	1	1
c	d	a	1	1
c	d	d	1	1
d	a	a	1	1
d	d	a	1	1
d	d	d	1	1

Tým sme ukázali, že relácia ***je tranzitívna****.*

Relácia je nie je symetrická, takže relácia ***nie je reláciou ekvivalencie****.*

Relácia je reflexívna, antisymetrická aj tranzitívna, takže relácia ***je reláciou čiastočného usporiadania****.* ■

5. Nech θ je binárna relácia definovaná na množine všetkých usporiadaných dvojíc celých čísel $M = \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$:

$$\forall \mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2) \in M : \mathbf{a}\theta\mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 + b_2 = a_2 + b_1.$$

Zistite (a dokážte), či je relácia θ reláciou ekvivalencie alebo čiastočného usporiadania.

(4 body)

Riešenie: *Opäť najskôr chceme zistiť (a dokázať), či je relácia reflexívna, symetrická, antisymetrická a tranzitívna.*

(a) Relácia je reflexívna ak platí:

$$\forall \mathbf{x} \in M : \mathbf{x}\theta\mathbf{x}.$$

Podľa definície relácie

$$\mathbf{x}\theta\mathbf{x} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = x_2 + x_1,$$

čo očividne platí (komutatívny zákon) pre všetky usporiadané dvojice $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. *Teda relácia* ***je reflexívna.***

(b) Relácia je symetrická ak platí:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M : (\mathbf{x}\theta\mathbf{y}) \Rightarrow (\mathbf{y}\theta\mathbf{x}).$$

Podľa definície relácie

$$\mathbf{x}\theta\mathbf{y} \Leftrightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1 \Leftrightarrow x_2 + y_1 = x_1 + y_2 \Leftrightarrow y_1 + x_2 = y_2 + x_1 \Leftrightarrow \mathbf{y}\theta\mathbf{x}.$$

Relácia teda ***je symetrická.***

(c) Relácia je antisymetrická ak platí:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M : (\mathbf{x}\theta\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{y}\theta\mathbf{x}) \Rightarrow (\mathbf{x} = \mathbf{y}).$$

Vezmime si napríklad $\mathbf{x} = (1, 2)$ *a* $\mathbf{y} = (2, 3)$. $x_1 + y_2 = 1 + 3 = 4 = 2 + 2 = x_2 + y_1$, *teda platí* $\mathbf{x}\theta\mathbf{y}$. *Keďže relácia je symetrická, platí aj* $\mathbf{y}\theta\mathbf{x}$, *ale zároveň platí aj* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. *Tým sme ukázali, že platí negácia definície antisymetrie:*

$$\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M : (\mathbf{x}\theta\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{y}\theta\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}).$$

Relácia teda ***nie je antisymetrická.***

(d) Relácia je tranzitívna ak platí:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in M : (\mathbf{x}\theta\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{y}\theta\mathbf{z}) \Rightarrow (\mathbf{x}\theta\mathbf{z}).$$

Nech platí predpoklad implikácie, t.j. $\mathbf{x}\theta\mathbf{y} \Leftrightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ *a súčasne* $\mathbf{y}\theta\mathbf{z} \Leftrightarrow y_1 + z_2 = y_2 + z_1$. *Potom úpravou druhej rovnice dostaneme*

$$y_2 = y_1 + z_2 - z_1$$

.

No a dosadením do prvej rovnice:

$$x_1 + y_1 + z_2 - z_1 = x_2 + y_1 \Rightarrow x_1 + y_1 + z_2 = x_2 + y_1 + z_1 \Rightarrow x_1 + z_2 = x_2 + z_1 \Rightarrow \mathbf{x}\theta\mathbf{z}$$

Tým sme ukázali, že relácia ***je tranzitívna.***

Relácia je reflexívna, symetrická aj tranzitívna, takže relácia ***je reláciou ekvivalencie.***

Relácia je nie je antisymetrická, takže relácia ***nie je reláciou čiastočného usporiadania.***

■

Skupina B

1. V každej z dvoch škatúľ je práve jedna guľôčka, ktorá môže byť buď biela alebo čierna. Na prvej škatuli je nápis „*V prvej škatuli je biela guľôčka alebo je v druhej škatuli čierna guľôčka*" a na druhej škatuli je nápis „*V prvej škatuli je čierna guľôčka*". Vieme, že oba nápisy majú rovnakú pravdivostnú hodnotu. Určite pravdivostnú hodnotu nápisov a to, v ktorej škatuli je aká guľôčka. Riešenie zdôvodnite.

   (2 body)

2. Označme C množinu chlapcov a D množinu dievčat. Potom $c \in C$ znamená, že c je chlapec a $d \in D$ znamená, že d je dievča. Výrazom $c\heartsuit d$ vyjadríme skutočnosť, že chlapec c sa páči dievčaťu d a výrazom $d\heartsuit c$ skutočnosť, že dievča d sa páči chlapcovi c. Pre tvrdenie

$$(\forall d \in D)(\exists c \in C)(d\heartsuit c \wedge \neg c\heartsuit d)$$

   - popíšte čo najjednoduchším a neformálnym jazykom jeho obsah,

     (3 body)

   - napíšte jeho negáciu (formálne).

     (2 body)

3. V triede je 23 žiakov, z nich 19 sa učí po anglicky a 6 sa učí po anglicky ale nie po nemecky. Koľko žiakov z triedy sa učí po nemecky (bez ohľadu na iné jazyky), ak:

   - sa každý učí aspoň jeden z týchto dvoch jazykov?

     (2 body)

   - sa aspoň 1 žiak neučí ani po anglicky ani po nemecky?

     (3 body)

4. Nech γ je binárna relácia definovaná na množine $M = \{a, b, c, d\}$ tabuľkou:

γ	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	1
c	1	0	1	0
d	0	1	0	1

   Zistite (a dokážte), či je relácia γ reláciou ekvivalencie alebo čiastočného usporiadania.

   (4 body)

5. Nech θ je binárna relácia definovaná na množine všetkých usporiadaných dvojíc celých čísel $M = \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$:

$$\forall \mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2) \in M : \mathbf{a}\theta\mathbf{a} \iff a_1 \geq b_1 \wedge a_2 \geq b_2.$$

   Zistite (a dokážte), či je relácia θ reláciou ekvivalencie alebo čiastočného usporiadania.

   (4 body)