Análisis Matemático

Carina Giovine 16/12/2020

1er Parcial (16/12/2020) - Funciones, Límites y Derivadas

Funciones

1.- Dominio, rango y regla, a que hacen referencia. Exprese en una definición. Aplique la misma en simbología matemática.

Función: Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.

y=f(x)

Dominio: llamamos Dominio de f (Dom f) al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. El dominio de una función está formado por todos los elementos que tienen imagen.

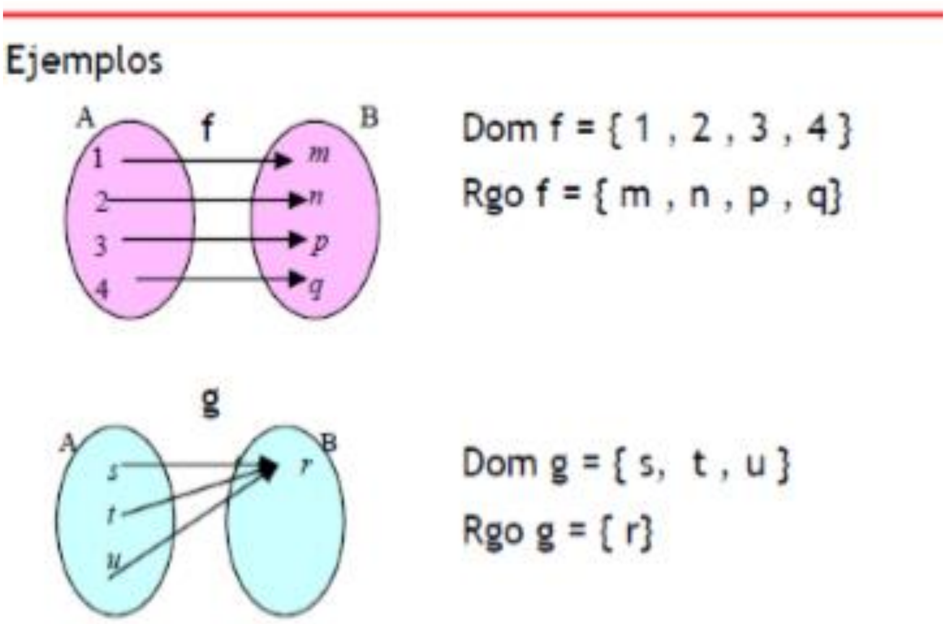
Matemáticamente, podemos expresar:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, f(x)\}$$ ejemplo de notación

que significa que el dominio de una función son aquellos valores de x que pertenecen a los números reales para los cuales existe un valor asociado de la función f(x).

Rango: llamamos Rango de f (Rgo f) al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente.

$$R = (4, \infty)$$ ejemplo de notación



La regla de correspondencia permite vincular cada elemento del Dominio (el conjunto A) a un elemento del conjunto B.

2.- Evalúe el dominio. Expresar en notación simbólica

a) $f(x) = \frac{1}{x-10}$

b) $f(t) = \sqrt{16-t^2}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{2}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$

Evalue $(f+g)(x)$

a) Dom {x/x E ℝ ^ x≠10}

b) Dom {t/t E ℝ ^ 4>= t =<4}

c) Dom {x/x E ℝ ^ x>=0}

3.- Dado el conjunto A y B, indique cuales corresponden a una función y cuales no:

a) $A : \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ – $B : \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

b) $A : \{1,2,2,4,4,4,6,6,6,6\}$ – $B : \{1,1,2,1,2,4,1,2,4,6\}$

c) $A : \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ – $B : \{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

d) $A : \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ – $B : \{0,1,4,9,16,25,32,49,64,81\}$

e) $A : \{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$ – $B : \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

a) Corresponde a una función, ya que a cada punto de A le corresponde un valor de B; se cumplen las condiciones de unicidad y existencia.
b) No es función.
c) Si es función.
d) Si es función.
e) No es función.

4.- Dadas las siguientes expresiones matemáticas, indique cuales corresponden a funciones y cuales no:

a) $f(x) = 2\pi\frac{3x^3+10x}{x-2}$

b) $2x + 3y^2 - \sqrt{x+10} = 21$

c) $|\,x\,| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$

d) $G(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq 0 \\ t+1 & \text{if } 0 < t < 2 \\ t^2-1 & \text{if } t > 2 \end{cases}$

a) Corresponde a una función.
b) Despejo y, y encuentro la función:

b) $3x + 3y^2 - \sqrt{x+10} = 21$

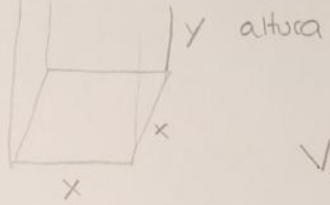
$$3y^2 = 21 + \sqrt{x+10} - 2x$$

Función $$y = \sqrt{\frac{21 + \sqrt{x+10} - 2x}{3}}$$

c) No es función, es el concepto de valor absoluto de un número real x.
d) Si es una función.

5.- Se fabrica un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para optimizar el area de almacenamiento lo mejor posible? No se tiene problema en altura. Escribir las expresiones matematicas. Son funciones o ecuaciones?

5)



$V = 4000 \rightarrow 4\,000 \text{ cm}^3$

$V = x^2 \cdot y \longrightarrow$ despejo y

área total $\rightarrow$ $A = x^2 + 4xy$

$y = \dfrac{4000}{x^2}$ ⊛

reemplazo en la fórmula de área.

$$A(x) = x^2 + 4\cancel{x} \cdot \frac{4000}{x^{\cancel{2}}}$$

$$A(x) = x^2 + \frac{16.000}{x}$$

$$\boxed{A'(x) = 2x - \frac{16.000}{x^2}}$$

$$2x - \frac{16.000}{x^2} = 0$$

$$2x^3 - 16.000 = 0$$

$$x^3 = \frac{16.000}{2} = 8000$$

$$x = \sqrt[3]{8.000}$$

$\boxed{x=20}$ base

reemplazo en ⊛

$$y = \frac{4000}{x^2} \qquad y = \frac{4.0\cancel{00}}{4\cancel{00}} = 10$$

$\boxed{y=10}$ altura

Son funciones.
Las dimensiones que debe tener para optimizar el área de almacenamiento son: 20 dm de base y 10 dm de altura

Límites

1.- Encontrar la relación $\delta(\epsilon)$ que nos permite probar que $lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x-3} = -\frac{3}{2}$

Dar la definición de límite.

2.- Defina continuidad de una función. Exprese en simbolos.

3.- Pruebe que el límte de $lim_{x\to 4}(3x-7)$ es 5

4.- Pruebe que el límite de $lim_{x\to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2}$ es 10

5.- De dos (2) ejemplos de discontinuidad.

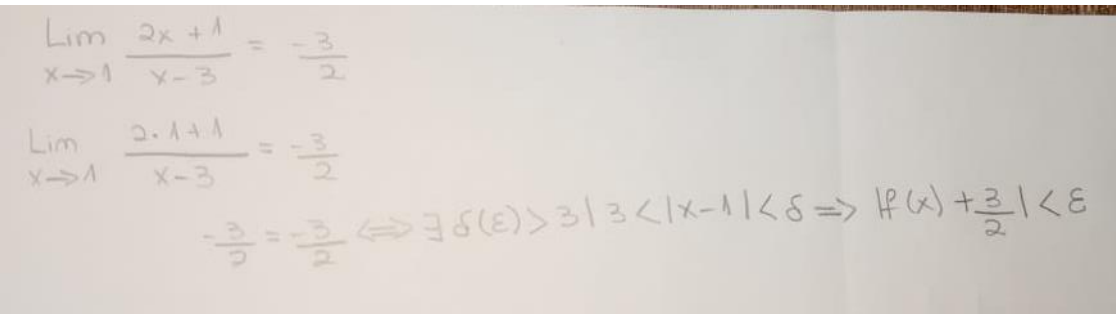
1) Definición de límite de una función en un punto por épsilon y delta

Se dice que la función $f(x)$ tiene como límite el número $L \in \mathbb{R}$, cuando x tiende a x_0, si fijado un número real positivo ε, mayor que cero, existe un numero positivo δ dependiente de ε, tal que, para todos los valores de x distintos de x_0 que cumplen la condición $|x - x_0| < \delta$, se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esto es,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad | \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

En nuestro ejemplo: $\lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x-3} = -\frac{3}{2}$



Definición de Límite:

El límite de la función $f(x)$ en el punto x_0, es el valor al que se acercan las imágenes (las $f(x) = y$, puntos del codominio) cuando los puntos del dominio (las x) se acercan al valor x_0. Es decir, diremos que L es el límite de $f(x)$ cuando los puntos del dominio x tienden a $f(x)$ es L.

A la proposición L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0, la denotamos así:

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

2) Continuidad de una función en un punto:

Se dice que una **función f(x) es continua en un punto x = a** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. Que el punto x= a tenga imagen.

$$\exists f(a)$$

2. Que exista el límite de la función en el punto x = a.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

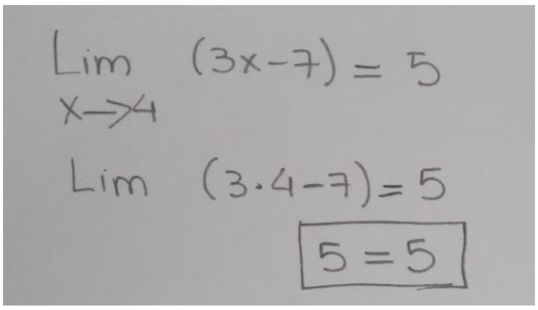
3. Que la imagen el punto coincida con el límite de la función en el punto.

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Sino se cumplen algunas de éstas condiciones, la función es discontinua en ese punto.

3) Probar el límite de:

$$lim_{x\to 4}(3x-7) \qquad \text{es 5}$$



4) Probar el límite de :

$$lim_{x\to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2} \qquad \text{es 10}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2} = 10$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(-2)^2+7\cdot(-2)+10}{-2+2} = \frac{28}{0} \quad \text{indeterminada.}$$

Resuelvo por Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$a=1$
$b=7$
$c=10$

$$x^2+7x+10 \rightarrow \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm 3}{2} \quad \boxed{x_1=-2} \quad \boxed{x_2=-5}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+5)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}$$

$$\lim_{x \to -2} x+5 = 10$$

$$-2+5 = 10$$

$$3 \neq 10 \quad \text{no se verifica.}$$

5) Ejemplos de discontinuidad

Primer ejemplo:

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{5x}{x-5}$ en $x = 5$

1ª $\exists$ f(a)

El valor x = 5 no forma parte del dominio luego no existe f(5).

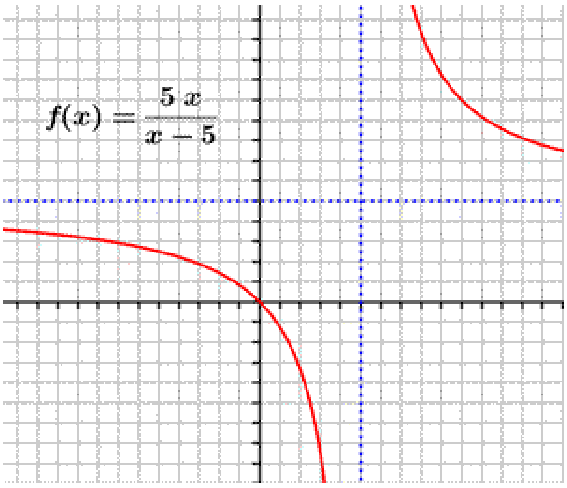
Función discontinua.

Calculamos el límite

$$\lim_{x \to 5} \frac{5x}{x-5} = \frac{25}{0} = \frac{k}{0}$$ Indeterminación.

En x = 5 hay una asíntota vertical.

La función en x = 5 presenta una discontinuidad de salto infinito.



Segundo ejemplo $f(x) = \dfrac{5}{x^4 - 16}$

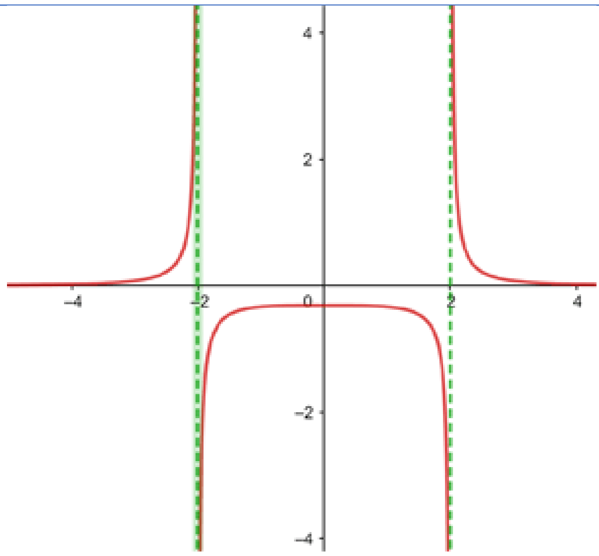
La función es continua en todos los puntos de su dominio menos en los valores que anulan el denominador.

$$x^4 - 16 = 0$$

$$x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$$

$$D = R - \{-2, 2\}$$

La función tiene dos puntos de discontinuidad en $x = -2$ y $x = 2$.



Derivadas

1.- Indicar si c/u de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar toda respuesta, si es V demostrarla y si es Falsa dar un contraejemplo adecuado.

a) Toda función continua en un punto es derivable en ese punto.

b) Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.

a) La proposición es Falsa, ya que si una función es derivable en un punto, entonces es continua en él. Sin embargo, una función puede ser continua en un punto pero no derivable en él.
b) Verdadero.

2.- Expresar el concepto de derivada de una función. Escribir la definición simbólicamente.

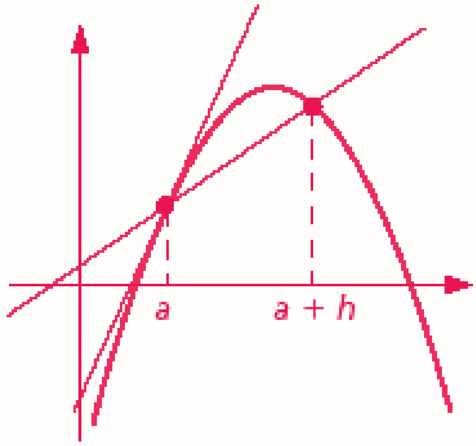
DERIVADA DE LA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Dada una función f (x), y considerado un punto a de su dominio, se llama derivada de la función en ese punto, denotada como f (a), al siguiente límite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Este límite también puede:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



3.- Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 pesos la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada peso que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 pesos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cual será ese beneficio? Resolver y dejar las fórmulas utilizadas.

Ejercicio heladero

$x \rightarrow$ \$ a aumentar

$b(x) \rightarrow$ beneficio \$

Calculamos la función

Beneficios = Ingresos - costos $\rightarrow b(x) = I(x) - C(x)$

Ingresos $\rightarrow I(x) = (50+x)\cdot(200-2x)$

costos $\rightarrow C(x) = 40\cdot(200-2x)$

$$b(x) = I(x) - C(x) = (50+x)\cdot(200-2x) - 40\cdot(200-2x)$$

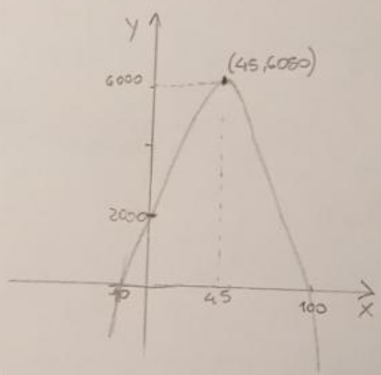
$$= 10.000 + 200x - 100x - 2x^2 - 8000 + 80$$

$$\boxed{bx = -2x^2 + 180x + 2000}$$

$$b'(x) = -4x + 180$$

$$-4x + 180 = 0$$

$$x = \frac{-180}{-4} = \boxed{x = 45}$$



Ahora reemplazo en la función

$$bx = -2\cdot(45)^2 + 180x + 2000$$

$$= -2\cdot 2025 + 8100 + 2000$$

$$= -4050 + 8100 + 2000$$

$\boxed{bx = 6050}$ beneficio máximo

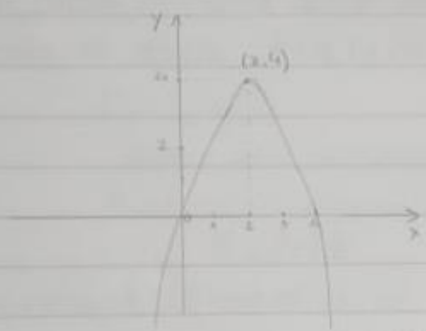
Obtiene el máximo beneficio para \$50 + \$45 = \$95 cada helado, y el beneficio es de \$6.050.

4.- Hay dos (2) tangentes a la curva $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto (2,5). Encuentre las ecuaciones de ambas. Sugerencia: Sea (x_0, y_0) el punto de tangencia, encuentre las dos condiciones que debe satisfacer dicho punto.

$y = 4x - x^2$ que pasa por el punto $(2,5)$

En este caso el punto no pertenece a la curva, lo compruebo evaluando $y(2) = 4 \cdot 2 - 2^2 = \underbrace{4 \neq 5}$

Así que debemos determinar los puntos de la curva que corresponden con los puntos de tangencia de las rectas.



$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \circledast$$

$$y_0 = f(x_0) = 4x_0 - x_0^2$$

reemplazo en $\circledast$

$$y - (4x_0 - x_0^2) = (4 - (2 \cdot x_0)) \cdot (x - x_0) \leftarrow (2,5)$$

$$y - 4x_0 + x_0^2 = 4 \cdot 2 - 4x_0 - 2x_0 \cdot 2 + 2x_0^2$$

$$5 - 4x_0 + x_0^2 = 8 - 8x_0 + 2x_0^2$$

$$-4x_0 + x_0^2 + 8x_0 - 2x_0^2 = 8 - 5$$

$$-1x_0^2 + 4x_0 - 3 = 0$$

Resuelvo $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = -1$

$b = 4$

$c = -3$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-2} \qquad x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} \qquad x = \frac{-4 \pm 2}{-2}$$

$$\boxed{x_1 = 1} \qquad \boxed{x_2 = 3}$$

Ahora reemplazo

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$f(1) = 4 \cdot (1) - (1)^2$ $\qquad f'(1) = 4 - 2 \cdot 1$

$f(1) = 3$ $\qquad f'(1) = 2$

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$
$$y - 3 = 2(x-1)$$
$$y = 2x - 2 + 3$$
$\boxed{y = 2x+1}$ Recta tangente.

$$f(3) = 4\cdot(3) - (3)^2 \qquad f'(3) = 4 - 2(3)$$
$$f(3) = 12 - 9 \qquad f'(3) = 4 - 6$$
$$f(3) = 3 \qquad f'(3) = -2$$

$$y - f(3) = f'(3)(x-3)$$
$$y - 3 = -2(x-3)$$
$$y = -2x + 6 + 3 \rightarrow \boxed{y = -2x+9}$$

Las dos ecuaciones tangentes a la curva son:

$y = 2x+1 \qquad y = -2x+9$

5.- Resolver las derivadas:

a) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

b) $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{if } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$

d) $y = x^2 sen(x)$

a) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

$$y = 2 \cdot x^{-1} - 1 \cdot x^{-2}$$

$$y' = -2x^{-2} + 2x^{-3} \rightarrow \boxed{y' = \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$$

b) $y = (x^2+17)(x^3-3x+1)$

$$\boxed{y' = 2x \cdot (x^3-3x+1) + (x^2+17)\cdot(3x^2-3)}$$

Luego se puede operar matemáticamente.

c)

$$f(x) \begin{cases} 2x^2+1 & \text{if } x \leq 1 \\ x+2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

Estudio la continuidad:

Las dos funciones son continuas en sus dominios, la primera por ser un polinomio y la segunda por ser una recta. El único punto donde tengo que estudiar la continuidad es en el punto donde se empalman las dos funciones, es decir $x=1$.

$$\lim_{x \to 1^-} (2x^2+1) = 3$$

$$f(1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} (x+2) = 3$$

por lo tanto la función es continua

Ahora estudio la derivabilidad en $x=1$

$$f'(x) = 4x$$

$$f'(x) = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(1^-) = 4 \\ f'(1^+) = 1 \end{array}}$$

Las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x=1$

d)

d) $y = x^2 \cdot \operatorname{sen}(x)$

$$\boxed{y' = 2x \cdot \operatorname{sen}(x) + x^2 \cdot \cos(x)}$$