Resolución

## 1) Teorema de Bolzano

### Ejercicio 1

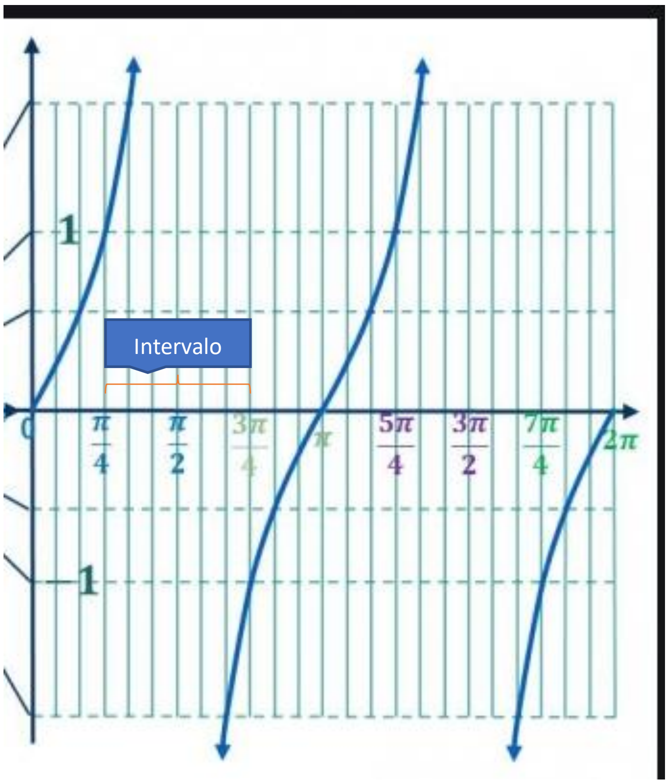
Dada la función y=tan(x) y sabiendo que f(π/ 4)=1 y f(3/4π)=− 1 ,¿se puede asegurar por el teorema de Bolzano que existe x=c perteneciente al intervalo [π/4,3/4π] tal que f(c)=0?

El Teorema de Bolzano dice que: si f(x) es continua en [a,b] y el signo de f(a) es ≠ al signo de f(b), o sea que la imagen toma distinto signo, entonces el teorema asegura que existe un número **c** que pertenece al (a,b) / f(c)= 0.

y= tg(x) en [π/4,3/4π]

y(π/4)= tg (π/4)= 1 > 0

y(3/4π)= tg (3/4π)= -1    Tienen distinto signo




Pero al observar el gráfico de la función observo que no es continua en ese intérvalo, es una función que se hace asintótica; no hay un punto c = 0 en el intervalo [π/4,3/4π], por lo tanto no puedo seguir aplicando el Teorema de Bolzano.

## 2) Derivadas. Resolver los ejercicios

5.- Resolver las derivadas:

a) $y = \frac{1}{(3x^4+x-8)^9}$

b) $y = (3x^4 + x - 8)^{-3}$

c) $f(x) = \frac{2x-3}{(x^2+4)^2}$

d) $y = sen(3x^2 + 11x)$

Resuelto con código en Spyder.

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed Feb 24 22:54:05 2021

@author: Carina Giovine
"""

#2º Parcial de Análisis

#Ej 2 Resolver las derivadas

import sympy as sp
from sympy import *
from sympy.abc import x

# Ej 2 Derivadas a)
m=diff((1/(3*x**4 + x - 8 )**9), x,1)  # x indica la variable y 1 la primera derivada
sp.pprint(m)  # muestra el resultado de manera mas legible
print("-------------------------------------------------")

# Ejercicio 2 b
n=diff(((3*(x**4)+ x -8)**-3), x,1)
sp.pprint(n)
print("-------------------------------------------------")

#Ejercicio 2 c
p=diff(((2*x-3)/(x**2 + 4)**2), x, 1)
sp.pprint(p)
print("-------------------------------------------------")

#Ejercicio 2 d
r=diff(sin(3*x**2 + 11 * x), x, 1)
sp.pprint(r)
print("-------------------------------------------------")
```

Salida:

```
       3
 - 108·x  - 9
──────────────
             10
⎛   4       ⎞
⎝3·x  + x - 8⎠
-------------------------------------------------
      3
 - 36·x  - 3
─────────────
             4
⎛   4       ⎞
⎝3·x  + x - 8⎠
-------------------------------------------------
  4·x·(2·x - 3)        2
- ───────────── + ─────────
            3             2
    ⎛ 2    ⎞      ⎛ 2    ⎞
    ⎝x  + 4⎠      ⎝x  + 4⎠
-------------------------------------------------
                ⎛   2       ⎞
(6·x + 11)·cos⎝3·x  + 11·x⎠
-------------------------------------------------
```

## Ejercicio 3

La función de ingresos de una empresa es:

$$I(q) = \frac{-6}{10^6}q^3 + \frac{18}{10^3}q^2 - 2q + 100$$

y la función de coste total es:

$$C(q) = \frac{2}{10^2}q^2 - 24q + 11000$$

siendo q el número de unidades vendidas.

Hallar el ingreso marginal y el coste marginal.

Cuando se usan las derivadas en economía para calcular tasas de cambio de unas magnitudes respecto de otras, el procedimiento se llama análisis marginal.

*El costo marginal*: es la tasa de variación del costo C de producción, con respecto al número x de unidades producidas. El valor que se obtiene al calcular la derivada de la función costo es una aproximación al costo verdadero cuando se produce una unidad más de cierto producto.
La afirmación anterior señala que si se desea conocer el costo que genera producir "x" unidades de un artículo más 1 unidad, la manera de estimar el costo de este proceso es haciendo uso de la derivada. Si bien el resultado no es un valor exacto, corresponde a una aproximación muy cercana.

*El ingreso marginal*: es la tasa de variación del ingreso I, con respecto al número "q" de unidades producidas.

Ej: 3

Función Ingresos: $I_{(q)} = \frac{-6}{10^6} q^3 + \frac{18}{10^3} q^2 - 2q + 100$

Busco Ingreso Marginal:

$$I'_{(q)} = \frac{-6}{10^6} \cdot 3q^2 + \frac{18}{10^3} \cdot 2q - 2$$

$$\boxed{I'_{(q)} = -\frac{18}{10^6} q^2 + \frac{36}{10^3} \cdot q - 2}$$

Función de Coste Total: $C_{(q)} = \frac{2}{10^2} q^2 - 24q + 11.000$

Derivo para encontrar Coste Marginal:

$$C'_{(q)} = \frac{2}{10^2} \cdot 2q - 24$$

$$C'_{(q)} = \frac{4}{100} q - 24 \Rightarrow \boxed{C'_{(q)} = \frac{1}{25} q - 24}$$

**Ejercicio 4**

La regla de L'Hôpital nos ayuda a encontrar muchos límites donde la sustitución directa termina en las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{\infty}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Sean $f$ y $g$ dos funciones continuas definidas en el intervalo [a,b], derivables en (a,b) y sea c perteneciente a (a,b) tal que $f(c) = g(c) = 0$ y $g'(x) \neq 0$ si $x \neq c$.

Si existe el límite $L$ de $\frac{f'}{g'}$ en c, entonces existe el límite de $\frac{f}{g}$ (en c) y es igual a $L$.

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Aplicar la regla de L'Hôpital para resolver la indeterminación de:

a)

$$\lim_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x-1}$$

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen(x)}$$

c)

$$lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x+2}$$

Resolución:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{Ln(x)}{x-1} = \frac{0}{0}$ Indeterminación.

Resuelvo con L'Hopital

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{1}}{1} = 1 \checkmark$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Resuelvo con L'Hopital

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 \checkmark$$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2} = \frac{4-14+10}{-2+2} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

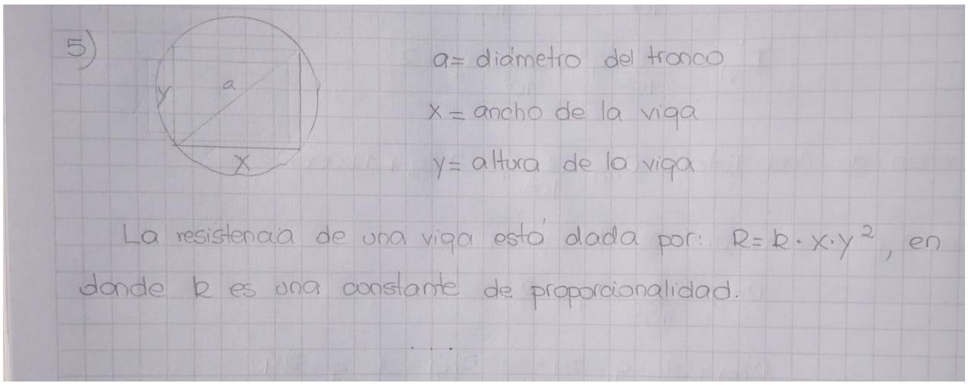
Resuelvo con L'Hopital

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+7x+10}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+5)}{(x+2)} = \lim_{x \to -2} x+5 = 3 \checkmark$$

Puntos de inflexión, máximos y mínimos

## Ejercicio 5

Se va a cortar una viga rectangular de un tronco de sección transversal circular. Si la resistencia de una viga es proporcional a su anchura y al cuadrado de su altura, encuentre las dimensiones de la sección transversal que da a la viga la mayor resistencia.




$a=$ diámetro del tronco

$x=$ ancho de la viga

$y=$ altura de la viga

La resistencia de una viga está dada por: $R=k\cdot x\cdot y^2$, en donde $k$ es una constante de proporcionalidad.

. . .

Profe..no sé como terminar de resolver el ejercicio. No logro terminarlo.

## Ejercicio 6

Descomponer el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

Si $x+y=25 \longrightarrow y=25-x$ ①

La función que quiero minimizar es:

$f(x)= 2x^2+3y^2$ ②

reemplazo y $= 2x^2+3(25-x)^2$

$= 2x^2+3(x^2-50x+2500)$

$= \boxed{5x^2-150x+7500}$ Función a minimizar

· Derivamos:

$f'(x)= 10x-150$

$x=\frac{15\cancel{0}}{1\cancel{0}}=15$

Saco derivada segunda:

$f''(x)=10$

$f''(15)=10 > 0$ es un mínimo

Reemplazo en ① $y=25-15$

$y=10$

$x+y=25 \Rightarrow \underbrace{15+10}_{\text{los dos sumandos}}=25$

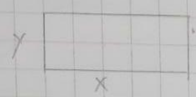
Entonces reemplazo en ② y obtengo el valor mínimo

$2\cdot15^2+3\cdot10^2=750.$

## Ejercicio 7

Un agricultor quiere alambrar una porción de campo de forma rectangular y que tenga 3600m2 de superficie. ¿Cómo le indicaríamos las dimensiones para que el coste sea mínimo?

7) Dato: superficie del rectángulo




① $x\cdot y=3600m^2 \Rightarrow y=\frac{3600}{x}$

Perímetro $=2x+2y$ $\Rightarrow P(x)=2x+2\cdot\frac{3600}{x}$

$\Rightarrow P(x)=2x+\frac{7200}{x}$

Derivo:

$P'(x)=2-\frac{7200}{x^2}=0 \quad -\frac{7200}{x^2}=2 \Rightarrow \frac{7200}{2}=x^2 \rightarrow x=\sqrt{3600}$ $\boxed{x=60}$ base

Reemplazo en ①

$60\cdot y=3600 \longrightarrow \frac{3600}{60}=\boxed{y=60}$ altura

para alambrar una porción de campo de 60x60 m.

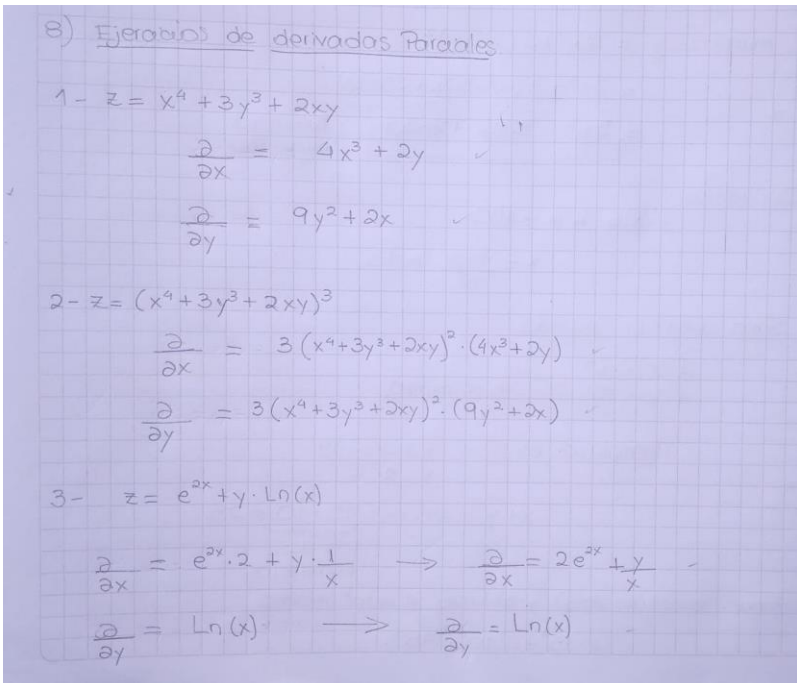
## Ejercicio 8

Evaluar las siguientes derivadas parciales de primer orden.

1- $z = x^4 + 3y^3 + 2xy$

2- $z = (x^4 + 3y^3 + 2xy)^3$

3- $z = e^{2x} + yln(x)$



8) Ejercicios de derivadas Parciales

1- $z = x^4 + 3y^3 + 2xy$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 4x^3 + 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 9y^2 + 2x$$

2- $z = (x^4 + 3y^3 + 2xy)^3$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 3(x^4+3y^3+2xy)^2 \cdot (4x^3+2y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 3(x^4+3y^3+2xy)^2 \cdot (9y^2+2x)$$

3- $z = e^{2x} + y \cdot Ln(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x} = e^{2x} \cdot 2 + y \cdot \frac{1}{x} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} = 2e^{2x} + \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = Ln(x) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} = Ln(x)$$

## Ejercicio 9

**Funcion de demanda:**

Suponga que dos productos se venden a los precios p1 y p2, la cantidad demanda de cada uno de los productos depende de los precios de ambos productos en el mercado. Si q1 representa la demanda del primer producto entonces $q1 = f(p1, p2)$ es la función demanda de dicho producto y si q2 representa la demanda del segundo producto entonces $q2 = g(p1, p2)$, por lo tanto las derivadas parciales de q1 y q2 se conocen como **funciones de demanda marginal**

La función demanda par dos productos están dadas por:

$$q_1 = 300 - 8p_1 - 4p_2$$
$$q_2 = 400 - 5p_1 - 10p_2$$

1) Hallar la demanda para cada uno de ellos si el precio del primero es p1= 10y del segundo p2=8.

2) Encuentre la demanda marginal de q1 respecto al precio p1

3) Encuentre la demanda marginal de q2 respecto al precio p2

4) Encuentre la demanda marginal de q1 respecto al precio p2

5) Encuentre la demanda marginal de q2 respecto al precio p1

9) La función demanda para dos productos están dada por:

$$q_1 = 300 - 8p_1 - 4p_2$$

$$q_2 = 400 - 5p_1 - 10p_2$$

1) Hallar la demanda p/ c/u si $p_1 = 10$ y $p_2 = 8$.

$$q_1 = 300 - 8 \cdot 10 - 4 \cdot 8 \implies q_1 = 188$$

$$q_2 = 400 - 5 \cdot 10 - 10 \cdot 8 \implies q_2 = 270.$$

2) Encuentre la demanda marginal de $q_1$ respecto al precio $p_1$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -8$$

3) Encuentre la demanda marginal de $q_2$ respecto al precio $p_2$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -10$$

4) Encuentre la demanda marginal de $q_1$ respecto al precio $p_2$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = -4$$

5) Encuentre la demanda marginal de $q_2$ respecto al precio $p_1$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = -5.$$

## Ejercicio 10

**Ejercicio 10**

Dada las siguiente expresión matemática, explique brevemente su aplicación en el contexto de los algoritmos de aprendizaje

Cost Function – "One Half Mean Squared Error":

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)^2$$

Objective:

$$\min_{\theta_0, \theta_1} J(\theta_0, \theta_1)$$

Update rules:

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_0} J(\theta_0, \theta_1)$$

$$\theta_1 := \theta_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_1} J(\theta_0, \theta_1)$$

Derivatives:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_0} J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right) \cdot x^{(i)}$$

El modelo del "***Error Cuadrático Medio o MSE***" mide la cantidad promedio en la que las predicciones del modelo varían de los valores correctos.

En la fórmula vemos que ***J*** es una función de coste, en dónde Θ es el parámetro. El objetivo del algoritmo de aprendizaje es encontrar los parámetros que dan el mínimo coste posible.

En la fórmula notamos que se calcula el error al cuadrado, para que el error sea siempre positivo.