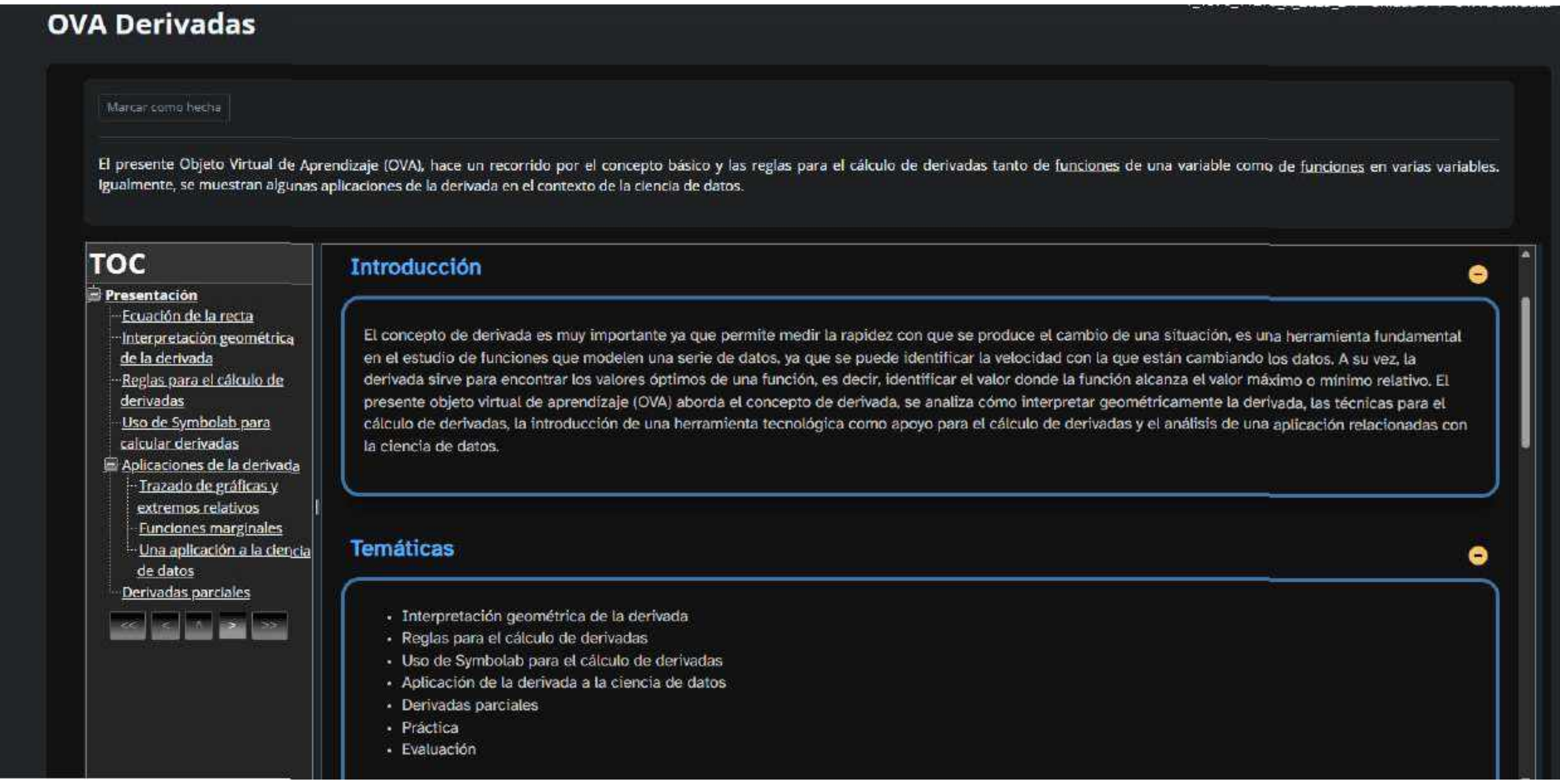

OVA Derivadas
Marcar como hecha
El presente Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), hace un recorrido por el concepto básico y las reglas para el cálculo de derivadas tanto de funciones de una variable como de funciones en varias variables. Igualmente, se muestran algunas aplicaciones de la derivada en el contexto de la ciencia de datos.
TOC
Presentación
Ecuación de la recta
Interpretación geométrica de la derivada
Reglas para el cálculo de derivadas
Uso de Symbolab para calcular derivadas
Aplicaciones de la derivada
Trazado de gráficas y extremos relativos
Funciones marginales
Una aplicación a la ciencia de datos
Derivadas parciales
Introducción
El concepto de derivada es muy importante ya que permite medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación, es una herramienta fundamental en el estudio de funciones que modelen una serie de datos, ya que se puede identificar la velocidad con la que están cambiando los datos. A su vez, la derivada sirve para encontrar los valores óptimos de una función, es decir, identificar el valor donde la función alcanza el valor máximo o mínimo relativo. El presente objeto virtual de aprendizaje (OVA) aborda el concepto de derivada, se analiza cómo interpretar geométricamente la derivada, las técnicas para el cálculo de derivadas, la introducción de una herramienta tecnológica como apoyo para el cálculo de derivadas y el análisis de una aplicación relacionadas con la ciencia de datos.
Temáticas
Interpretación geométrica de la derivada
Reglas para el cálculo de derivadas
Uso de Symbolab para el cálculo de derivadas
Aplicación de la derivada a la ciencia de datos
Derivadas parciales
Práctica
Evaluación

El presente Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), hace un recorrido por el concepto básico y las reglas para el cálculo de derivadas tanto de funciones de una variable como de funciones en varias variables. Igualmente, se muestran algunas aplicaciones de la derivada en el contexto de la ciencia de datos.

TOC

Competencias

Saber hacer

Aplica las técnicas de derivación en la solución de problemas relacionados con la ciencia de datos

Metodología:

Exploración: en esta etapa de debe revisar todo el material.

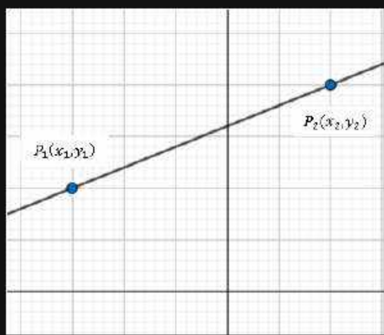
Apropiación: leer y entender cada uno de los conceptos relacionados con la derivada.

Aplicación: el estudiante debe reconocer las técnicas para calcular derivadas, para aplicarla en la solución de problemas relacionados con la ciencia de datos.

Práctica: El estudiante debe aplicar el concepto de derivada en la solución de problemas relacionados con la ciencia de datos haciendo uso de herramientas tecnológicas.

Ecuación de la recta

A continuación se mostrará cómo encontrar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$



Primero se halla la pendiente haciendo uso de

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Luego de halla la ecuación de la recta haciendo uso de la ecuación:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Donde

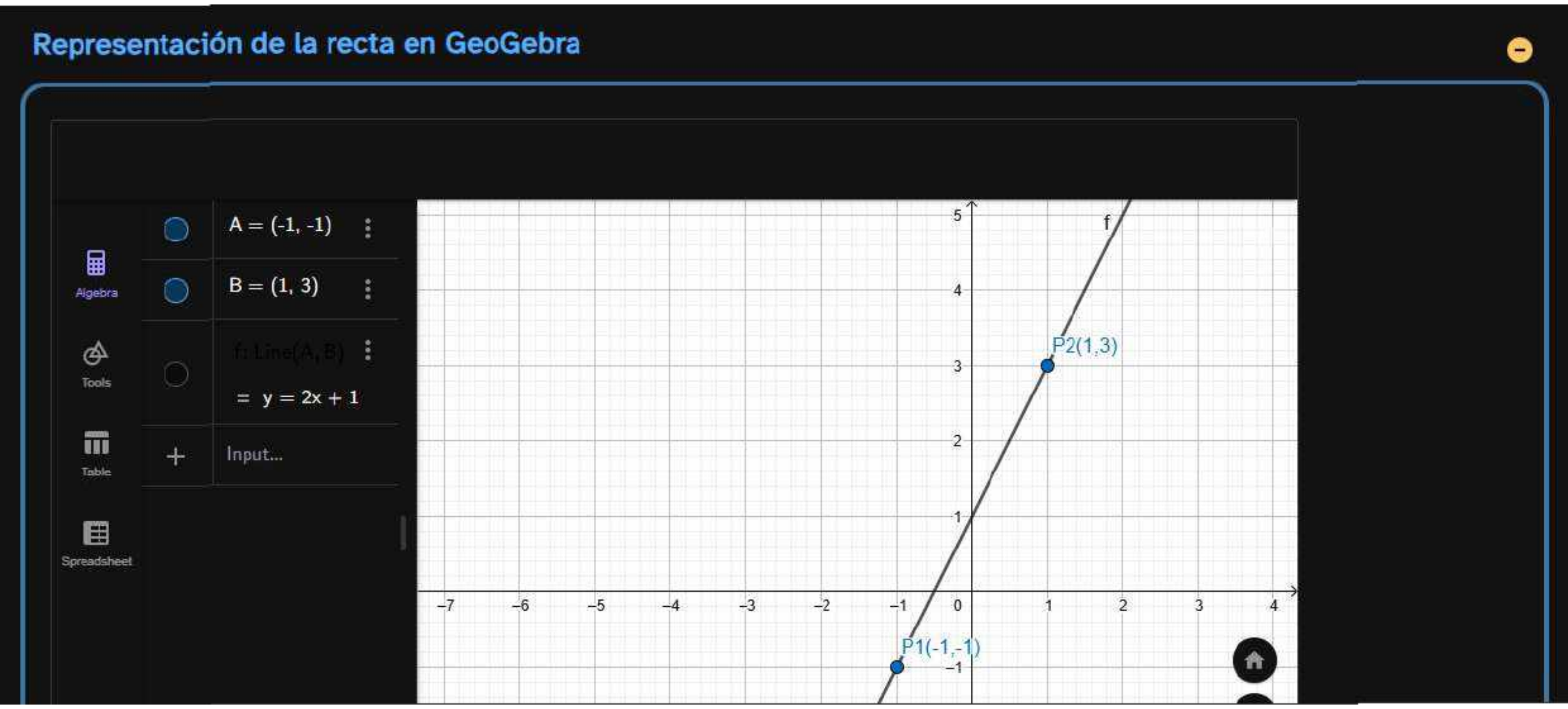
(x_0, y_0): es un punto por donde pasa la recta

m: es la pendiente de la recta

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1,-1)$ y $P_2(1,3)$

Solución



Representación de la recta en GeoGebra
Algebra
Tools
Table
Spreadsheet
A = (-1, -1)
B = (1, 3)
f: Line(A, B)
= y = 2x + 1
Input...
f
P2(1,3)
P1(-1,-1)

Pregunta de Elección Múltiple

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (-4,3) y (2,-3) es

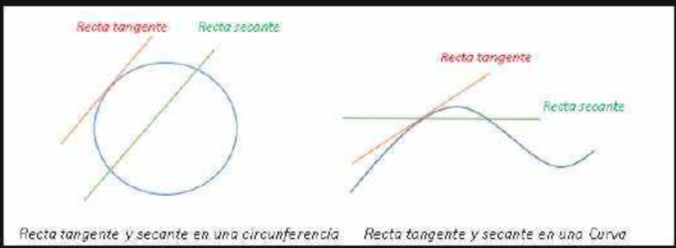
Haga uso de GeoGebra para encontrar la ecuación

- $y=x+1$
- $y=-x-1$
- $y=2x-3$
- $y=4x+1$

TOC

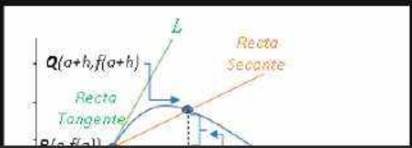
Recta tangente: es la recta que pasa por un único punto en la circunferencia, igualmente la recta tangente en una curva es aquella que corta a la curva en un único punto alrededor de ese punto.

Recta secante: Es la recta que corta la circunferencia en dos puntos. De la misma manera se define en una curva.

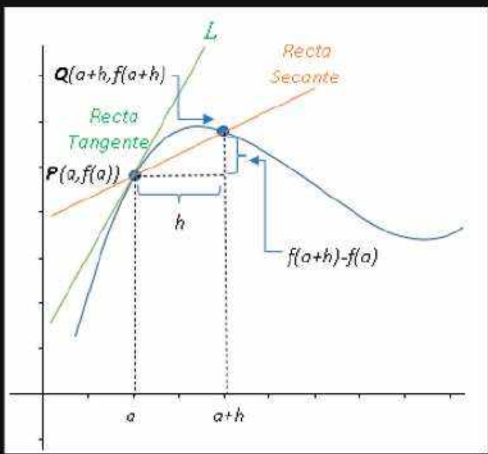


Recta tangente y secante en una circunferencia   Recta tangente y secante en una Curva

El problema consiste en encontrar la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $P(a,f(a))$.



El problema consiste en encontrar la pendiente de la recta tangente L a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $P(a,f(a))$.



Para ello se define una distancia h y el punto $Q(a+h,f(a+h))$, se traza la recta secante que pase por los puntos P y Q, somo se conocen dos puntos se halla la pendiente de la recta secante,

Pendiente de la recta secante

$$m_{sec} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

Para ello se define una distancia h y el punto $Q(a+h,f(a+h))$, se traza la recta secante que pase por los puntos P y Q, somo se conocen dos puntos se halla la pendiente de la recta secante,

Pendiente de la recta secante

$$m_{sec} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

$$m_{sec} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Cuando la distancia h se reduce, haciéndola tender a cero, la recta secante se aproxima a la recta tangente, por lo tanto

la pendiente de la recta tangente está dada por:

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lo anterior es lo que se conoce como el concepto de derivada en un punto a.

A continuación, se muestra la definición de derivada.

Definición Derivada

Definición Derivada

Dado cualquier número x para el cual este límite exista, asignamos a x el número $f(x)$. De modo que consideramos a $f'(x)$ como una nueva función, llamada derivada de f y definida por medio de la ecuación

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

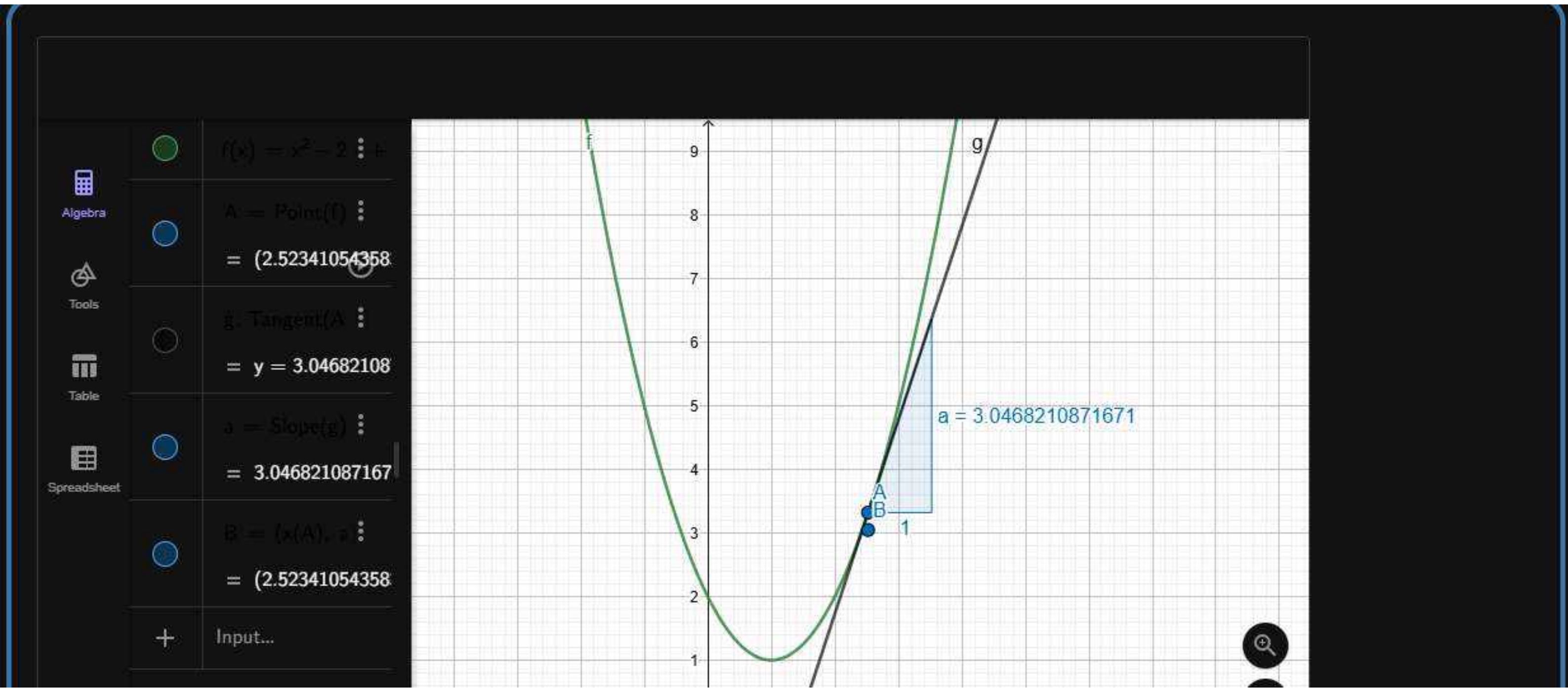
Sabemos que el valor de f en x, $f'(x)$ puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x,f(x))$.

Nota:La pendiente de la recta tangente en el punto $x=a$ está dada por $m=f'(a)$.

Ejemplo

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^2+2x+2$ en $x=2$.

Solución



Algebra
Tools
Table
Spreadsheet
= (2.52341054358
= y = 3.04682108
= 3.046821087167
= (2.52341054358
Input...
a = 3.0468210871671
A
B
1
g
f

Reglas para el cálculo de derivadas

Como al calcular la derivada de una función haciendo uso de la definición de derivada, se hace bastante largo el procedimiento para llegar al resultado final , entonces, se presentan a continuación las reglas para calcular la derivada de una función de una forma más sencilla. Ahora se muestran las diferentes notaciones que se pueden utilizar para representar la derivada de una función $y=f(x)$.

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{d(x)} = \frac{d}{d(x)}$$

Derivada de una función constante:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Ejemplos

Derivada de una función potencia

si n es cualquier número real entonces:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Ejemplos

Regla del múltiplo constante

Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

Ejemplos

Regla de la suma

Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

Ejemplos

Derivada de funciones trascendentales

Derivada de una función exponencial:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Derivada de una función logarítmica:

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Derivada de funciones trascendentales

Derivada de una función exponencial:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Derivada de una función logarítmica:

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Derivada de las funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}(senx) = cosx \qquad \frac{d}{dx}(ctgx) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(cosx) = -senx \qquad \frac{d}{dx}(secx) = secx\ tangx$$

$$\frac{d}{dx}(tanx) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(cscx) = -cscx\ ctgx$$

Regla del producto

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) + f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

Ejemplos

Regla del cociente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) - f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]}{[g(x)]^2}$$

Ejemplos

Regla de la cadena

Si g es derivable en *x* y *f* es derivable en g(x), entonces la función compuesta *F=fog* definida mediante *F(x)=f(g(x))* es derivable en *x*, y *F´* está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Ejemplos

Derivada de función exponencial y logarítmica haciendo uso de la regla de la cadena

Exponencial

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)} * f'(x)$$

Logarítmica

Derivada de función exponencial y logarítmica haciendo uso de la regla de la cadena

Exponencial

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)} * f'(x)$$

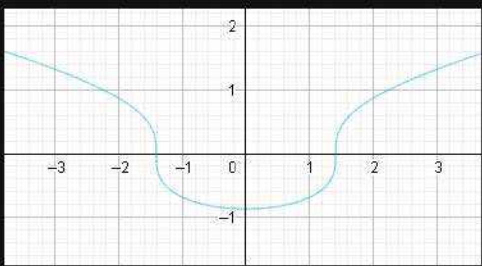
Logarítmica

$$\frac{d}{dx}\ln\,[f(x)] = \frac{1}{f(x)} * f'(x)$$

Ejemplos

Derivada implicita

Las gráficas de las diversas ecuaciones que se estudian en matemáticas no son las gráficas de funciones. Por ejemplo, la ecuación $x^2-3y^3=2$ cuya gráfica está dada por la figura que se muestra a continuación.



La ecuación que aparece en términos de x y y se puede derivar haciendo uso de la derivada implícita. Para derivar implícitamente se tiene en cuenta lo siguiente:

x	$derivada\ de\ x$	1
y	$derivada\ de\ y$	$\frac{dy}{dx}$

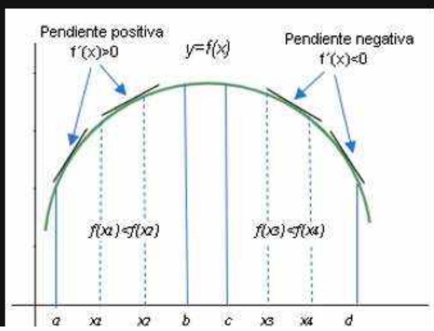
Aplicaciones de la derivada

A continuación mostramos las aplicaciones de la derivada, comenzando por definir los conceptos y axiomas relacionados con la derivada para identificar los intervalos donde una función es creciente o decreciente, los extremos relativos de la función, los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo, una vez identificados éstos aspectos se puede hacer un esbozo de la gráfica de la función. Luego mostramos unas aplicaciones a la economía relacionada con las funciones marginales.

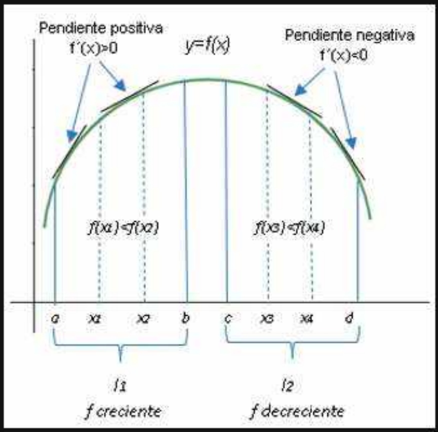
En esta sección estudiaremos las gráficas de las funciones, el objetivo es encontrar cuándo una función es creciente o decreciente, determinar los valores críticos, localizar máximos y mínimos relativos y establecer la prueba de la primera derivada. También, calcular los puntos de inflexión, determinar cuándo la función es cóncava hacia arriba y hacer el bosquejo de la gráfica de una función por medio del uso de la información obtenida de la primera y segunda derivada.

Definición

Se dice que una función f es creciente en el intervalo I cuando, para cualesquiera dos números x_1, x_2, en I, si $x_1<x_2$, entonces $f(x_1)<f(x_2)$. Una función f es decreciente en el intervalo I cuando, para cualesquiera dos números x_1, x_2, en I, si $x_1<x_2$, entonces $f(x_1)>f(x_2)$.



Se dice que una función f es creciente en el intervalo I cuando, para cualesquiera dos números x_1, x_2, en I, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Una función f es decreciente en el intervalo I cuando, para cualesquiera dos números x_1, x_2, en I, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.



Criterio para funciones crecientes o decrecientes

Sea f diferenciable en el intervalo (a,b)

a) Si $f'(x)>0$ para toda x en (a,b) entonces f es creciente en (a,b).

b) Si $f'(x)<0$, para toda x en (a,b) entonces f es decreciente en (a,b) .

Definición

Una función f tiene un máximo relativo en a si existe un intervalo abierto que contenga a a sobre el cual $f(a) \geq f(x)$ para toda x en el intervalo. El valor máximo relativo es $f(a)$. Una función f tiene un mínimo relativo en a si existe un intervalo abierto que contenga a a sobre el cual $f(a) \leq f(x)$ para toda x en el intervalo. El valor mínimo relativo es $f(a)$

Definición

Una función f tiene un máximo absoluto en a si $f(a) \geq f(x)$ para toda x en el dominio de f. El máximo absoluto es $f(a)$. Una función f tiene un mínimo absoluto en a, si $f(a) \leq f(x)$, para toda x en el dominio de f. El mínimo absoluto es $f(a)$.

Definición

Para una a en el dominio de f, si $f'(a)=0$ o bien $f'(a)$ no existe, entonces a se denomina un valor crítico para f. Si a es un valor crítico, entonces el punto $(a,f(a))$ se denomina un punto crítico para f.

Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x=a$, entonces a es un número crítico de f.

Criterios para extremos relativos

Suponga que f es continua en un intervalo abierto I que contiene el valor crítico a y f es diferenciable en I excepto posiblemente en a.

a) Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $x=a$, entonces f tiene un máximo relativo en a.

b) Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en $x=a$, entonces f tiene un mínimo relativo en a

c) Si $f'(x)$ no cambia de signo en $x=a$, si f' es positiva por ambos lados de a o negativa por ambos lados, entonces f no tiene ningún máximo o mínimo relativo en a

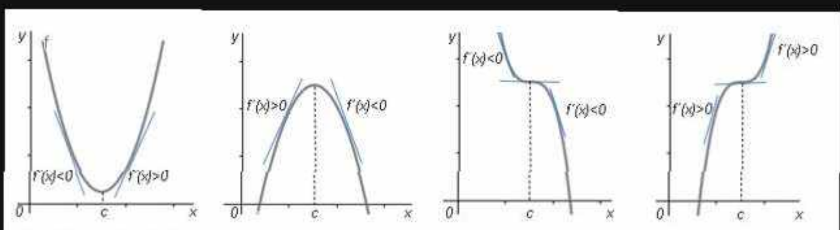
Criterios para extremos relativos

Suponga que f es continua en un intervalo abierto I que contiene el valor crítico a y f es diferenciable en I excepto posiblemente en a.

a) Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $x=a$, entonces f tiene un máximo relativo en a.

b) Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en $x=a$, entonces f tiene un mínimo relativo en a

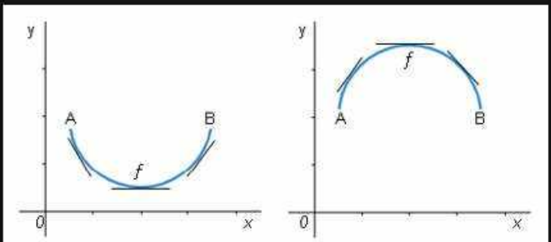
c) Si $f'(x)$ no cambia de signo en $x=a$, si f' es positiva por ambos lados de a o negativa por ambos lados, entonces f no tiene ningún máximo o mínimo relativo en a



a) Mínimo relativo o local b) Mínimo relativo o local c) Sin máximos ni mínimos d) Sin máximos ni mínimos

Definición

Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus rectas tangentes sobre un intervalo I , entonces se dice que es cóncava hacia arriba sobre I . Si la gráfica de f queda por abajo de todas sus rectas tangentes, se dice que es cóncava hacia abajo sobre I.



a) Cóncava hacia arriba b) Cóncava hacia abajo

Criterio para la concavidad

Sea f una función continua en un intervalo I y dos veces diferenciable

a) Si $f''(x)>0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.

b) Si $f''(x)<0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I

Definición

Un punto P sobre una curva $y=f(x)$ se llama punto de inflexión si f es allí continua y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

Para una a en el dominio de f, si $f''(a)=0$ o bien $f''(a)$ no existe, entonces a se denomina un punto de inflexión para f.

Prueba de la segunda derivada

Supongamos que f'' es continua cerca de $x=a$

a) Si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x=a$

b) Si $f'(a)=0$ y $f''(a)<0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x=a$

Ejemplo

Encuentre los puntos críticos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión, intervalos de concavidad, extremos relativos y realice el bosquejo de la gráfica de la función $f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3$

Solución

Razones de cambio: La razón de cambio es la proporción en la que una variable cambia con respecto a otra, de manera más explícita hablamos de la pendiente de una curva en una gráfica, es decir el cambio en el eje "y" entre el cambio del eje "x". A esto se le conoce también como la primera derivada.

A continuación, analizamos unos ejemplos de funciones marginales que corresponden a la razón de cambio de funciones económicas como, costo ingreso, utilidad, etc.

Costo marginal

La función de costo total de un fabricante, $c=f(q)$, proporciona el costo total c de producir y comercializar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama costo marginal. Así,

$$\text{costo marginal}=\frac{dc}{dq}$$

Ejemplo

Ingreso marginal

Suponga que $r=f(q)$ es la función de ingreso total para un fabricante. La ecuación $r=f(q)$ establece que el valor total de un dólar recibido al vender q unidades de un producto, es r. El ingreso marginal se define como la razón de cambio del valor total recibido, con respecto al número total de unidades vendidas. Por consiguiente, el ingreso marginal es solamente la derivada de r con respecto a q:

$$\text{ingreso marginal } \frac{dr}{dq}$$

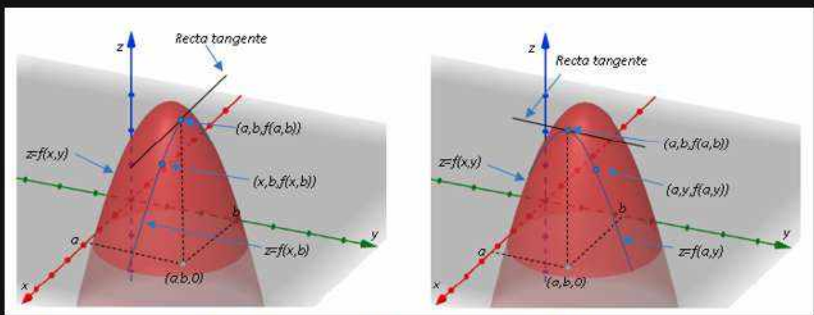
El ingreso marginal indica la rapidez a la que el ingreso cambia con respecto a las unidades vendidas. Se interpreta como el ingreso aproximado recibido al vender una unidad adicional de producción.

En una comercializadora se realiza un estudio para determinar cómo se comportan las ventas con relación a lo que se invierte en publicidad, para ello deciden cada mes invertir un millón más con relación al mes anterior en pautas publicitarias, para observar el comportamiento del ingreso por ventas en el año 2021. Los datos de los gastos en publicidad versus el ingreso por ventas en millones de pesos durante el año se registran a continuación.

Mes	Gastos en publicidad en el mes	Ventas en el mes
Enero	10	380
Febrero	11	450
Marzo	12	510
Abril	13	500
Mayo	14	520
Junio	15	490
Julio	16	500
Agosto	17	450
Septiembre	18	470
Octubre	19	490
Noviembre	20	540
Diciembre	21	620

a. Hacer uso de Excel para encontrar la función que modele el ingreso por ventas en términos de los gastos en publicidad.
b. Haga uso de la función del ingreso por ventas para determinar la variación de las ventas entre julio y agosto.

Si f es una función de dos variables x y y, supongamos que sólo hacemos variar x mientras mantenemos fija a y, digamos $y=b$ donde b es una constante. Entonces estamos considerando en realidad una función de una sola variable x, a saber, $g(x)=f(x,b)$ Si g tiene derivada en a, entonces se denomina derivada parcial de f con respecto a x en (a, b) y la denotamos con $f_x(a,b)$ De igual manera, la derivada parcial de f con respecto a y en (a,b) denotada por $f_y(a,b)$.



Definición: Si f es una función de dos variables, sus derivadas parciales son las funciones f_x y f_y, definidas por

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Si $z=f(x,y)$ entonces se usa la siguiente notación para denotar la derivada parcial de z con respecto a x y con respecto y

Si $z=f(x,y)$ entonces se usa la siguiente notación para denotar la derivada parcial de z con respecto a x y con respecto y

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Ejemplos

Una aplicación de derivadas parciales a la ciencia de datos

Cobb y Douglas usaron la ecuación de producción $P(L,K)=1.01L^{0.75}K^{0.25}$ para modelar la economía americana de 1899 a 1922, donde L es la cantidad de mano de obra y K es la cantidad de capital (ver ejemplo sección de funciones del material de lectura).

a. Calcule P_L y P_K
b. Encuentre la productividad marginal de la mano de obra y la productividad marginal del capital en el año 1920, cuando L=194 y K=407 (comparado con los valores asignados L=100 y K=100 y en 1899). Interprete los resultados.
c. En el año 1920, ¿qué producción tendría más beneficio, un incremento de inversión de capital o un incremento en el gasto en mano de obra?