Integrales

En esta sección estudiaremos las técnicas para calcula integrales y su relación con el cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de curvas, predicciones de una población, etc.

En la sección anterior abordamos el problema básico:

Dada una función f encontrar su derivada f'

En esta sección veremos cuán importante es el problema de:

Dada una función f, encontrar una función F cuya derivada sea f

En otras palabras, para una función dada f, ahora pensamos en f como una derivada. Deseamos encontrar una función F cuya derivada sea f; es decir, $F'(x) = f(x)$ para toda x en algún intervalo. Planteado en términos generales, es necesario diferenciar en reversa. Empezamos con una definición.

Antiderivada: Se dice que un función F es una antiderivada de una función f sobre algún intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

Como primera medida se estudiarán las integrales como antiderivadas, para las integrales por tradición se usa la notación $\int f(x)\,dx$ para una antiderivada de f y se llama integral indefinida así,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ significa que } F'(x) = f(x)$$

Por ejemplo:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \text{ porque } \frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3} + C\right] = x^2$$

De este modo, consideramos la integral indefinida como la representante de toda una familia de funciones (es decir, una antiderivada para cada valor de la constante C).

En este orden de ideas presentamos la siguiente lista de antiderivadas

Si $\frac{d}{dx}\, kx = k \quad entonces \ \int kdx = kx + C$
Si $\frac{d}{dx}\, x^2 = 2x \quad entonces \ \int 2xdx = x^2 + C$
Si $\frac{d}{dx}\, e^x = e^x \quad entonces \ \int e^x dx = e^x + C$
Si $\frac{d}{dx}\, \ln(x) = \frac{1}{x} \quad entonces \ \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$
Si $\frac{d}{dx}\, senx = cosx \quad entonces \ \int cosxdx = senx + C$
Si $\frac{d}{dx}\, cosx = -senx \quad entonces \ \int senxdx = -cosx + C$
Si $\frac{d}{dx}\, tanx = \sec^2 x \quad entonces \ \int \sec^2 x\, dx = tanx + C$
Si $\frac{d}{dx}\, ctgx = -\csc^2 x \quad entonces \ \int \csc^2 x\, dx = -ctg\, x + C$

Si $\frac{d}{dx}$ $secx = secx\ tanx$	$entonces\ \int secxtanxdx = secx + C$
Si $\frac{d}{dx}$ $cscx = -cscxctgx$	$entonces\ \int cscx\ ctgxdx = -cscx + C$

Esta lista de antiderivadas sirve como base para el calculo de las integrales en general

Reglas para el cálculo de integrales indefinidas

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$
2. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$
3. $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Ejemplos:

- ✓ $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$
- ✓ $\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$
- ✓ $\int 6x^5 dx = 6\int x^5 dx = 6\frac{x^{5+1}}{5+1} + C = 6\frac{x^6}{6} + C = x^6 + C$
- ✓ $\int(5x^4 + 3x^3 - 5)dx = 5\int x^4 dx + 3\int x^3 dx - \int 5dx$
  $$= \frac{5x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - 5x + C = x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 5x + C$$
- ✓ $\int\left(2\sec^2 x + \frac{4}{x}\right)dx = 2\int \sec^2 x\, dx + 4\int\frac{1}{x}dx = 2tanx + 4lnx + C$

Integración por sustitución u

Si $u = g(x)$es una función derivable cuyo rango es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Observe que si $u = g(x)$ entonces $du = g'(x)dx$.

Ejemplo 1: Encuentre $\int x^3(x^4 + 2)^3 dx$

Hacemos la sustitución $u = x^4 + 2$ su diferencial es $du = 4x^3dx$ al despejar la constante 4 se obtiene $\frac{du}{4} = x^3dx$ retomamos la integral y ordenamos

$$\int x^3(x^4 + 2\int \underbrace{(x^4 + 2)^3}_{u}\underbrace{(x^3dx)}_{\frac{du}{4}}\ )^3(x^3dx)$$

Al realizar la sustitución obtenemos

$$\int u^3\left(\frac{du}{4}\right) = \frac{1}{4}\int u^3 du$$

Ahora realizamos la integral en términos de u y obtenemos

$$\frac{1}{4}\int u^3 du = \frac{1}{4}\frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{16}u^4 + C$$

Por último, remplazamos la variable $u = x^4 + 2$

$$= \frac{1}{16}(x^4 + 2)^4 + C$$

Ejemplo 2: calcule la integral $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

$$u = 1 - 4x^2 \qquad du = -8xdx$$
$$-\frac{du}{8} = xdx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\, xdx$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{du}{8}\right) = -\frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= -\frac{1}{8}\int u^{-1/2}du = -\frac{1}{8}\frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$
$$= -\frac{1}{4}u^{1/2} + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

Ejemplo 3: calcule la integral $\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$

$$u = 2x + 1 \qquad du = 2dx$$
$$\frac{u-1}{2} = x \qquad \frac{du}{2} = dx$$
$$\frac{(u-1)^2}{4} = x^2$$

Al hacer la sustitución se obtiene:

$$\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx = \int \frac{(u-1)^2}{4}u^{1/2}\frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{8}\int (u^2 - 2u + 1)u^{1/2}du$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\right) du$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{28}(2x+1)^{7/2} - \frac{1}{10}(2x+1)^{5/2} + \frac{1}{12}(2x+1)^{3/2} + C$$

Integración por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Esta formula se llama formula de integración por partes donde es más fácil recordarla escogiendo

$$u = f(x) \qquad dv = g'(x)dx$$

$$du = f'(x)\,dx \qquad v = g(x)$$

Entonces

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Ejemplo 1: Calcular la integral $\int xsenxdx$

Debemos escoger u y dv , u se escoge como lo más fácil de derivar y dv se escoge como lo más fácil de integrar ya que u de deriva para sacar du y dv se integra para obtener v

$$u = x \qquad dv = senxdx$$

Al derivar u y al integrar dv respectivamente se obtiene:

$$du = dx \qquad v = -cosx$$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{senxdx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{(-cosx)}_{v} - \int \underbrace{(-cosx)}_{v}\underbrace{dx}_{du}$$

$$= -xcosx + \int cosxdx$$

Por último, integramos $cosx$ y obtenemos:

$$= -xcosx + senx + C$$

Ejemplo 2: calcule la integral $\int x^3 \ln x\,dx$

$$u = lnx \qquad dv = x^3dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^4}{4}$$

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{x^4}{4}lnx - \int \frac{x^4}{4}\left(\frac{1}{x}dx\right)$$

$$= \frac{x^4}{4} lnx - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{x^4}{4} lnx - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 lnx - \frac{1}{16}x^4 + C$$

En general las técnicas para evaluar las integrales se limitan a un número reducido de funciones, razón por la cual en el cálculo de integrales definidas se utilizan métodos numéricos o recurrimos al uso de un software.

Integral definida:

Teorema fundamental del cálculo forma de antiderivada: Si f es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$y F es una antiderivada de f sobre el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo $\int_2^3 (x^3 + 2x^2)dx$

Se calcula la integral y se evalúan los límites de integración primero el superior menos el inferior

$$\int_1^2 (x^3 + 2x^2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \left(\frac{(2)^4}{4} + \frac{2(2)^3}{3}\right) - \left(\frac{(1)^4}{4} + \frac{2(1)^3}{3}\right) = \frac{101}{12}$$

Integrales dobles

En esta sección se ve cómo expresar una integral doble como una integral iterada, que se puede evaluar calculando dos integrales simples. Suponga que f es una función de dos variables que es integrable sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Se usa la notación $\int_c^d f(x, y)dy$ para indicar que x se mantiene fja y $f(x, y)$ se integra respecto a y a partir de $y = c$ hasta $y ! = d$. Este procedimiento se llama integración parcial respecto a y. (Observe su similitud con la derivación parcial.) Ahora es un número que depende del valor de x, así que defne una función de x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

Si ahora se integra la función A respecto a x a partir de $x = a$ hasta $x = b$, se obtiene

$$\int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx$$

La integral del lado derecho se llama integral iterada. Por lo común, se omiten los corchetes. Así,

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\ dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

indica que primero se integra respecto a y a partir de c hasta d, y luego respecto a x desde a hasta b.

De manera similar, la integral iterada

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\ dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

Significa que primero se integra respecto a x (manteniendo fja y) desde $x = a$ a $x = b$ y después se integra la función resultante de y respecto a y de $y = c$ hasta $y = d$. Observe que se trabaja de dentro hacia fuera.

Ejemplo: Evalúe las integrales iteradas

- ✓ $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\ dx$

Se considera x constante entonces:

- ✓ $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\ dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y\,dy\right]\ dx = \int_0^3 \left[x^2\left(\frac{y^2}{2}\right)\right]_1^2\ dx$

$$= \int_0^3 \left[\left(\frac{1}{2}x^2(2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}x^2(1)^2\right)\right] dx$$

$$= \int_0^3 \left[2x^2 - \frac{1}{2}x^2\right] dx$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{3}{2}x^2\right] dx$$

Ahora integramos con respecto a x de 0 a 4

$$= \left[\frac{3}{2} * \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \left[\frac{x^3}{2}\right]_0^3 = \frac{(3)^3}{2} - \frac{(0)^3}{2} = \frac{27}{2}$$

- ✓ $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\ dy$

Se considera x constante entonces:

- ✓ $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\ dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y\,dx\right]\ dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} * y\right]_0^3\ dy$

$$= \int_1^2 \left[\left(\frac{(3)^3}{3}y\right) - \left(\frac{(0)^3}{3}y\right)\right] dy$$

$$= \int_0^3 [9y]\,dy$$

Ahora integramos con respecto a y de 1 a 2

$$= \left[\frac{9y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{9(2)^2}{2} - \frac{9(1)^2}{2} = \frac{27}{2}$$

En el documento ese muestra un resumen obtenido de los libros de cálculo trascendentes tempranas de una y varias variables de Stewart, la idea fundamental es tener el concepto básico sobre cómo se calculan las derivadas integrales y hacer uso de un software para hacer el cálculo de ellas, para enforcar el curso en la solución de problemas.

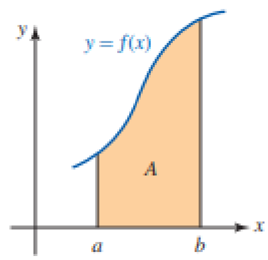
Aplicaciones de la integral

El problema de área

El problema histórico que conduce a la definición de integral definida es el problema de encontrar un área. En específico, tenemos interés en la siguiente versión de este problema:

• Encontrar el área A de una región acotada por el eje x y la gráfica de una función no negativa continua $y = f(x)$ definida sobre un intervalo $[a, b]$.

El área de esta región se denomina área bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$. El requerimiento de que f sea no negativa sobre $[a, b]$ significa que ninguna parte de esta gráfica sobre el intervalo está por abajo del eje x. Vea la figura.



Área bajo la gráfica de f sobre $[a, b]$

La integral definida: Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la integral definida de f de a a b, que se denota $\int_a^b f(x)dx$ por se define como:

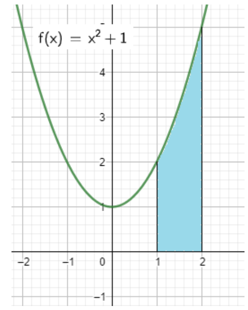
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x_i$$

El área como una integral definida: Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo, entonces el área A bajo la gráfica sobre $[a, b]$ es:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo:

Calcule el área de la región dada:

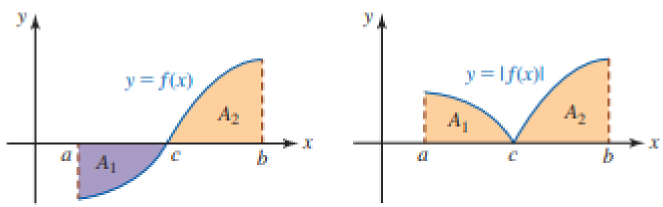


$$A = \int_1^2 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)_1^2 = \left(\frac{(2)^3}{3} + (2)\right) - \left(\frac{(1)^3}{3} + (1)\right)$$

$$= \frac{14}{3} - \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

El área de la región dada es $\frac{10}{3}$

Si f es una función que asume valores tanto positivos como negativos sobre $[a, b]$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ no representa el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. el valor de puede interpretarse como al área neta con signo entre la gráfica de f y el eje x sobre el intervalo [a,b].



a) La integral definida de f sobre $[a, b]$ no es área

b) La integral definida de $|f|$ sobre $[a, b]$ es área

El área total es $A = A_1 + A_2$

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx$$

$$= \int_a^c (-f(x)dx) + \int_c^b f(x)dx$$

$$= A_1 + A_2$$

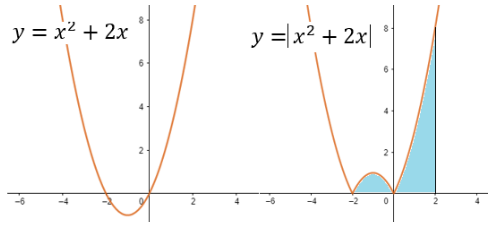
Área total: Si $y = f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, entonces el área total A acotada por su gráfica y el eje x sobre el intervalo está dada por

$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$

Ejemplo 1. Encuentre el área total acotada por la gráfica de $y = x^2 + 2x$ el eje x sobre [-2,2].

A continuación, se muestran las gráficas de $y = f(x)$ y de $y = |f(x)|$

Donde $|f(x)| = \begin{cases} -(x^2 + 2x) & -2 \le x < 0 \\ x^2 + 2x & 0 \le x \le 2 \end{cases}$ en [-2,2].



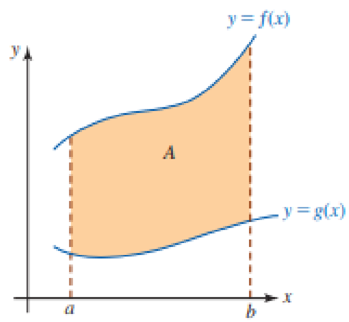
En consecuencia, el área total acotada por la gráfica de f sobre el intervalo $[-2{,}2]$ y el eje x

Está dada por:

$$A = \int_{-2}^{2} |x^2 + 2x| dx = \int_{-2}^{0} -(x^2 + 2x) dx + \int_{0}^{2} (x^2 + 2x) dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - x^2\right)_{-2}^{0} + \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)_{0}^{2} = \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = 8$$

Área entre curvas

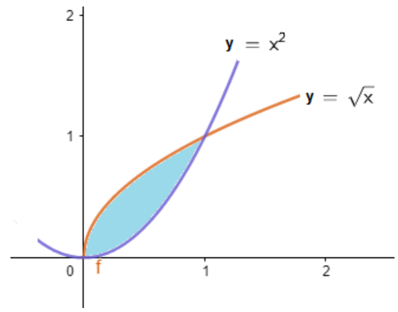


a) $f(x) \geq g(x)$ sobre $[a, b]$

Definición: Si f y g son funciones continuas sobre un intervalo [a, b], entonces el área A de la región acotada por sus gráficas sobre el intervalo está dada por

$$\boldsymbol{A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)] dx}$$

Ejemplo: encuentre el área acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$



las gráficas se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. En otras palabras, la región se encuentra entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$. Puesto que $y = \sqrt{x}$ es la gráfica superior sobre el intervalo $(0, 1)$, se concluye que

$$\boldsymbol{A} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Referencias bibliográficas

[1] Stewart, James, (2012) Cálculo de una variable trascendentes tempranas, 7 edición, editorial CENGAGE, learning: México.

[2] Stewart, James, (2012) Cálculo de varias variables trascendentes tempranas, 7 edición, editorial CENGAGE, learning; México.

[3] Zill, Dennis, Wright Warren, Cálculo de una variable trascendentes tempranas, 4 edición, editorial McGraw Hill, México.

[4] Haeussler, Ernest, Paul, Richard, Matemáticas para administración y economía, 12 edición, editorial PEARSON Prentice Hall, Mexico.