Demostraciones sobre subgrupos (y un par de cosas más)

Carlos Arturo Murcia Andrade

Abril 2023

Definiciones

Definición 1. *Una operación binaria se dice* ***asociativa*** *si* $\forall a, b, c \in G$ *tiene* $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Definición 2. *Un* ***grupo*** *es un conjunto de elementos* G *cuya operación binaria* ”$*$” *es cerrada* ($a, b \in G \rightarrow a * b \in G$) *con un elemento especial* ”e” *(conocido como neutro) que:*

1. $\exists a^{-1} \forall a$, *tal que* $a * a^{-1} = e$
2. $b * e = e * b = b$

Además, la operación binaria es asociativa.

Definición 3. *Un subconjunto* S *no vacío de un grupo* G *es un* ***subgrupo*** *de* G *si es un grupo bajo la operación binaria de* G.

Definición 4. *Dos* ***grupos*** G *y* H *son* ***isomorfos*** *si existe una correspondencia* $1-1$ $\theta : G \rightarrow H$ *tal que* $\theta(g_1 \times g_2) = \theta(g1) \diamond \theta(g2)$ $\forall g_1, g_2 \in G$.
Nota*: Si las operaciones* $\times$ *y* $\diamond$ *son diferentes (por ejemplo, una es multiplicación y la otra es suma), entonces,* $\times$ *hace referencia a la operación definida en* G *y* $\diamond$ *hace referencia a la operación definida en* H.

Definición 5. *Si* θ *satisface que* $\theta(g_1 \times g_2) = \theta(g1) \diamond \theta(g2)$ $\forall g_1, g_2 \in G$, *pero, no existe una correspondencia* $1-1$, *entonces,* G *y* H *forman un* ***homomorfismo***.

Definición 6. *El **kernel** o **núcleo de un homomorfismo** mide el grado en el que un homomorfismo no es inyectivo (es decir, el grado en el que un homomorfismo no sea* $1-1$*).*
$Kernel(\theta) = \{x \in G : \theta x = 1\}$

Definición 7. *La **imagen de un homomorfismo** es el conjunto de todos los elementos de* H *que son la imagen de algún elemento de* G*.*
$Img(\theta) = \{y \in H,\ \theta x = y\ \forall x \in G\}$

Se puede mostrar una imagen que permita aclarar de manera más precisa tanto el kernel como la imagen de un homomorfismo.

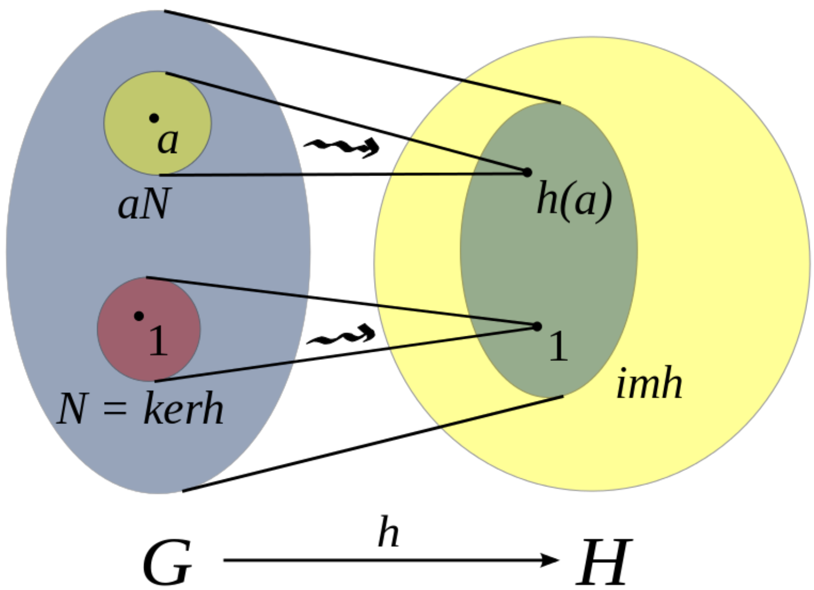

Figura 1: El óvalo verde dentro de H representa la **imagen del homomorfismo** y el círculo rojo dentro de G representa el **kernel del homomorfismo**.

1 Probar que el kernel y la imagen de un homomorfismo son subgrupos

Solución. Para determinar que el kernel y la imagen del homomorfismo son subgrupos, es preciso verificar que cumplan con las siguientes propiedades:

1. Operación cerrada.

2. Existencia del elemento identidad.

3. Existencia de una inversa.

Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo entre los grupos G y H.

Para demostrar que $\ker(\phi)$, es un subgrupo de G, es necesario demostrar:

1. $\ker(\phi)$ no sea vacío:
   Es preciso notar que habrá elementos presentes en G que "mapearan" al elemento identidad de H. Entonces, el kernel, será un conjunto no vacío.

2. Si $a, b \in \ker\phi$, entonces, $a * b \in \ker\phi$:
   Suponga que $a, b \in \ker\phi$. Entonces $\phi(a * b) = \phi(a)\phi(b) = 1_H * 1_H = 1_H$ (por la definición de kernel), ya que a y b están en el kernel. Por lo tanto, $a * b \in \ker\phi$.

3. Si $a \in \ker\phi$, entonces $a^{-1} \in \ker\phi$:
   Suponga que $a \in \ker\phi$. Entonces $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1} = 1_H^{-1} = 1_H$, ya que ϕ es un homomorfismo y a está en el kernel. Por lo tanto, $a^{-1} \in \ker\phi$.

Entonces, el kernel del homomorfismo es un subgrupo de G.

Para demostrar que la $img(\phi)$, es un subgrupo de H, es necesario demostrar:

1. $img(\phi)$ no sea vacío:
   Es preciso notar todos los elementos de G se "mapearan" a H, por lo tanto, $img(\phi)$ no es vacío.

2. Si $a, b \in img(\phi)$, entonces $a * b \in img(\phi)$:
   Suponga que $a, b \in img(\phi)$. Entonces existen $x, y \in G$ tales que $a = \phi(x)$ y $b = \phi(y)$. Entonces $a * b = \phi(x) * \phi(y) = \phi(x * y)$, ya que ϕ es un homomorfismo. Por lo tanto, $a * b \in img(\phi)$.

3. Si $a \in img(\phi)$, entonces $a^{-1} \in img(\phi)$:
   Suponga que $a \in \operatorname{im}\phi$. Entonces existe $x \in G$ tal que $a = \phi(x)$. Como ϕ es un homomorfismo, $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} = a^{-1}$, por lo que $a^{-1} \in img(\phi)$.

Entonces, la imagen del homomorfismo es un subgrupo de H.

Por lo tanto, el kernel y la imagen de un homomorfismo son subgrupos. $\square$