Taller Ecuaciones en Diferencias

Carlos Arturo Murcia Andrade

29 de mayo de 2023

Fórmulas e información útil

Progresión geométrica

Una suma como $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$ representa una progresión geométrica cuya solución es

$$S_n = a_1 * \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

donde:

- a_1 es el primer elemento de la suma.
- r es la razón (o el patrón) de la suma.
- n es el número de elementos en la suma.

Formulas generales de ecuaciones en diferencias

Una ecuación en diferencia de la forma $u_n = k * u_{n-1}$ tiene como solución general:

$$u_n = k^n * u_0$$

Una ecuación en diferencia de la forma $u_n = k * u_{n-1} + c$ tiene como solución general:

$$u_n = k^n * u_0 + c * \left(\frac{k^n - 1}{k - 1}\right)$$

con $k \neq 1$.

Una ecuación de la forma $u_n + a * u_{n-1} + b * u_{n-2} = f(n)$ o de la forma $u_n + k * u_{n-a} = f(n)$ son ecuaciones en diferencias no homogéneas. Cuya solución particular puede ser:

$f(n)$	Solución particular
c (constante)	a
n	$a + bn$
n^2	$a + bn + cn^2$
k^n	ank^n o ak^n

La solución general a este tipo de ecuaciones es la solución general de u_n más la solución particular de $f(n)$.

1 Ejercicio 1

1.1 Enunciado

Una bomba de vacío elimina un tercio del aire restante en un cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿después de cuantas acciones hay solamente 1/1000000 de aire inicial?

1.2 Solución

Si se elimina un tercio ($\frac{1}{3}$) del aire restante con cada operación, quiere decir que quedan dos tercios ($\frac{2}{3}$) de aire del aire cada vez que se acciona la bomba de vacío. Entonces, se tiene:

$$u_n = \frac{2}{3} * u_{n-1} \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * u_{n-2} = \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * u_{n-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^n * u_0$$

Además, se tiene que:

$$u_n = 10^{-5} * u_0$$

Si igualamos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n * u_0 = 10^{-5} * u_0$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = 10^{-5}$$
$$\log\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \log(10^{-5})$$
$$n * \log\left(\left(\frac{2}{3}\right)\right) = -5 * \log(10)$$
$$n = \frac{-5}{\log\left(\left(\frac{2}{3}\right)\right)} \approx 28$$

Teniendo esto presente, se puede decir que después de la vigesimoctava acción (aproximadamente) quedará 1/1000000 del aire inicial.

2 Ejercicio 2

2.1 Enunciado

Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada 1000 por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situación. Resuélvala y encuentre la población en 15 años, asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Qué tan largo tomará que la población alcance 750 millones?

2.2 Solución

La tasa de crecimiento puede ser definida como $1 + \frac{25}{1000} = 1 + 0.025 = 1.025$. Entonces se tiene:

$$u_n = 1.025 * u_{n-1} = 1.025 * 1.025 * u_{n-2} = 1.025 * 1.025 * 1.025 * u_{n-3}$$
$$u_n = 1.025^n * u_0$$

Si $u_0 = 200000000$ y $n = 15$, ¿cuál es el valor de U_{15}?

$$u_n = 1.025^{15} * 200000000 \approx 1.448 * 200000000 \approx 289660000$$

La población dentro de 15 años será de aproximadamente 289660000 (un poco más de 289.5 millones).

Si $u_0 = 200000000$ y $u_n = 750000000$, ¿cuál es el valor de n?

$$750000000 = 1.025^n * 200000000$$
$$\frac{75}{20} = 1.025^n$$
$$3.75 = 1.025^n$$
$$\log(3.75) = n * \log(1.025)$$
$$n = \frac{\log(3.75)}{\log(1.025)} \approx 53.5$$

Tomaría aproximadamente unos 53 años y medio para que la población llegue a 750 millones.

3 Ejercicio 3

3.1 Enunciado

Resuelva:

- $u_n = 4 * u_{n-1} - 1$, para $n \geq 2$
- $u_n = 3 * u_{n-1} + 2$, para $n \geq 2$

3.2 Solución

3.2.1 $u_n = 4 * u_{n-1} - 1$, para $n \geq 2$

Para resolver u_n. Primero es preciso definir u_{n-1}, u_{n-2} y u_{n-3}.

$$u_n = 4 * u_{n-1} - 1$$
$$u_{n-1} = 4 * u_{n-2} - 1$$
$$u_{n-2} = 4 * u_{n-3} - 1$$
$$u_{n-3} = 4 * u_{n-4} - 1$$

Una vez hecho esto, se hace una sustitución hacia atrás.

$$u_{n-3} = 4 * u_{n-4} - 1$$
$$u_{n-2} = 4 * u_{n-3} - 1 = 4 * (4 * u_{n-4} - 1) - 1$$
$$u_{n-1} = 4 * u_{n-2} - 1 = 4 * (4 * (4 * u_{n-4} - 1) - 1) - 1$$
$$u_n = 4 * u_{n-1} - 1 = 4 * (4 * (4 * (4 * u_{n-4} - 1) - 1) - 1) - 1$$

Lo que nos lleva a:

$$u_n = 4^{n-1} * u_1 - (4^{n-2} + 4^{n-3} + ... + 4^1 + 4^0)$$

Usando la solución de la progresión geométrica tenemos:

$$u_n = 4^{n-1} * u_1 - \frac{4^{n-1} - 1}{3}$$
$$u_n = 4^{n-1} * u_1 - \frac{1}{3} * (4^{n-1} - 1)$$
$$u_n = 4^{n-1} * \left(u_1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

3.2.2 $u_n = 3 * u_{n-1} + 2$, para $n \geq 2$

Para resolver u_n. Primero es preciso definir u_{n-1}, u_{n-2} y u_{n-3}.

$$u_n = 3 * u_{n-1} + 2$$
$$u_{n-1} = 3 * u_{n-2} + 2$$
$$u_{n-2} = 3 * u_{n-3} + 2$$
$$u_{n-3} = 3 * u_{n-4} + 2$$

Una vez hecho esto, se hace una sustitución hacia atrás.

$$u_{n-3} = 3 * u_{n-4} + 2$$
$$u_{n-2} = 3 * u_{n-3} + 2 = 3 * (3 * u_{n-4} + 2) + 2$$
$$u_{n-1} = 3 * u_{n-2} + 2 = 3 * (3 * (3 * u_{n-4} + 2) + 2) + 2$$
$$u_n = 3 * u_{n-1} + 2 = 3 * (3 * (3 * (3 * u_{n-4} + 2) + 2) + 2) + 2$$

Lo que nos lleva a:

$$u_n = 3^{n-1} * u_1 + 2 * (3^{n-2} + 3^{n-3} + ... + 3^1 + 3^0)$$

Usando la solución de la progresión geométrica tenemos:

$$u_n = 3^{n-1} * u_1 + 2 * \frac{3^{n-1} - 1}{2}$$
$$u_n = 3^{n-1} * u_1 + 3^{n-1} - 1$$
$$u_n = 3^{n-1} * (u_1 + 1) - 1$$

4 Ejercicio 4

4.1 Enunciado

Encuentre la solución general para las siguientes ecuaciones:

- $u_n + 4 * u_{n-1} + 3 = 0$, para $n \geq 1$
- $u_n + 2 * u_{n-1} - 13 = 0$, para $n \geq 1$

4.2 Solución

4.2.1 $u_n + 4 * u_{n-1} + 3 = 0$, para $n \geq 1$

Si despejamos u_n, tenemos $u_n = -4 * u_{n-1} - 3$. Ahora, es preciso definir u_{n-1}, u_{n-2} y u_{n-3}.

$$\begin{aligned}
u_n &= -(4 * u_{n-1} + 3) \\
u_{n-1} &= -(4 * u_{n-2} + 3) \\
u_{n-2} &= -(4 * u_{n-3} + 3) \\
u_{n-3} &= -(4 * u_{n-4} + 3)
\end{aligned}$$

Una vez hecho esto, se hace una sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned}
u_{n-3} &= -(4 * u_{n-4} + 3) \\
u_{n-2} &= -(4 * -(4 * u_{n-4} + 3) + 3) \\
u_{n-1} &= -(4 * -(4 * -(4 * u_{n-4} + 3) + 3) + 3) \\
u_n &= -(4 * -(4 * -(4 * -(4 * u_{n-4} + 3) + 3) + 3) + 3)
\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a:

$$u_n = -4^n * u_0 - 3 * (4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 4^1 + 4^0)$$

Usando la solución de la progresión geométrica tenemos:

$$\begin{aligned}
u_n &= -4^n * u_0 - 3 * \frac{4^n - 1}{3} \\
u_n &= -4^n * u_0 - 4^n + 1 \\
u_n &= -4^n * (u_0 + 1) + 1
\end{aligned}$$

Entonces, la solución general es $u_n = -4^n * (u_0 + 1) + 1$, para $n \geq 1$.

4.2.2 $u_n + 2 * u_{n-1} - 13 = 0$, para $n \geq 1$

Si despejamos u_n, tenemos $u_n = -2 * u_{n-1} + 13$. Ahora, es preciso definir u_{n-1}, u_{n-2} y u_{n-3}.

$$\begin{aligned}
u_n &= -2 * u_{n-1} + 13 \\
u_{n-1} &= -2 * u_{n-2} + 13 \\
u_{n-2} &= -2 * u_{n-3} + 13 \\
u_{n-3} &= -2 * u_{n-4} + 13
\end{aligned}$$

Una vez hecho esto, se hace una sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned}
u_{n-3} &= -2 * u_{n-4} + 13 \\
u_{n-2} &= -2 * (-2 * u_{n-4} + 13) + 13 \\
u_{n-1} &= -2 * (-2 * (-2 * u_{n-4} + 13) + 13) + 13 \\
u_n &= -2 * (-2 * (-2 * (-2 * u_{n-4} + 13) + 13) + 13) + 13
\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a:

$$u_n = -2^n * u_0 + 13 * (2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^1 + 2^0)$$

Usando la solución de la progresión geométrica tenemos:

$$\begin{aligned}
u_n &= -2^n * u_0 + 13 * (2^n - 1) \\
u_n &= -2^n * u_0 + 13 * 2^n - 13 \\
u_n &= 2^n * (13 - u_0) - 13
\end{aligned}$$

Entonces, la solución general es $u_n = 2^n * (13 - u_0) - 13$, para $n \geq 1$.

5 Ejercicio 5

5.1 Enunciado

Encuentre las soluciones particulares para:

- $u_n = 3 * u_{n-1} + 5$, para $n \geq 1$ y $u_0 = 1$
- $u_n = -2 * u_{n-1} + 6$, para $n \geq 2$ y $u_1 = 3$

5.2 Solución

5.2.1 $u_n = 3 * u_{n-1} + 5$, para $n \geq 1$ y $u_0 = 1$

Teniendo definido u_n, es preciso definir u_{n-1}, u_{n-2} y u_{n-3}.

$$\begin{aligned}
u_n &= 3 * u_{n-1} + 5 \\
u_{n-1} &= 3 * u_{n-2} + 5 \\
u_{n-2} &= 3 * u_{n-3} + 5 \\
u_{n-3} &= 3 * u_{n-4} + 5
\end{aligned}$$

Una vez hecho esto, se hace una sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned}
u_{n-3} &= 3 * u_{n-4} + 5 \\
u_{n-2} &= 3 * (3 * u_{n-4} + 5) + 5 \\
u_{n-1} &= 3 * (3 * (3 * u_{n-4} + 5) + 5) + 5 \\
u_n &= 3 * (3 * (3 * (3 * u_{n-4} + 5) + 5) + 5) + 5
\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a:

$$u_n = 3^n * u_0 + 5 * (3^{n-1} + 3^{n-2} + ... + 3^1 + 3^0)$$

Usando la solución de la progresión geométrica tenemos:

$$\begin{aligned}
u_n &= 3^n * u_0 + \frac{5}{2} * (3^n - 1) \\
u_n &= 3^n * u_0 + \frac{5}{2} * 3^n - \frac{5}{2} \\
u_n &= 3^n * \left(u_0 + \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Entonces, la solución general es $u_n = 3^n * \left(u_0 + \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2}$, para $n \geq 1$.
Habiendo hallado la solución general, reemplazando u_0 en u_n tenemos la solución particular:

$$u_n = \frac{1}{2}(7 * 3^n - 5)$$

5.2.2 $u_n = -2 * u_{n-1} + 6$, para $n \geq 2$ y $u_1 = 3$

Teniendo definido u_n, es preciso definir u_{n-1}, u_{n-2} y u_{n-3}.

$$\begin{aligned}
u_n &= -2 * u_{n-1} + 6 \\
u_{n-1} &= -2 * u_{n-2} + 6 \\
u_{n-2} &= -2 * u_{n-3} + 6 \\
u_{n-3} &= -2 * u_{n-4} + 6
\end{aligned}$$

Una vez hecho esto, se hace una sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned}
u_{n-3} &= -2 * u_{n-4} + 6 \\
u_{n-2} &= -2 * (-2 * u_{n-4} + 6) + 6 \\
u_{n-1} &= -2 * (-2 * (-2 * u_{n-4} + 6) + 6) + 6 \\
u_n &= -2 * (-2 * (-2 * (-2 * u_{n-4} + 6) + 6) + 6) + 6
\end{aligned}$$

Lo que nos lleva a:

$$u_n = -2^{n-1} * u_1 - 6 * (2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 2^1 + 2^0)$$

Usando la solución de la progresión geométrica tenemos:

$$\begin{aligned}
u_n &= -2^{n-1} * u_1 - 6 * (2^{n-1} - 1) \\
u_n &= -2^{n-1} * u_1 - 6 * 2^{n-1} + 6 \\
u_n &= -2^{n-1} * (u_1 + 6) + 6
\end{aligned}$$

Entonces, la solución general es $u_n = -2^{n-1} * (u_1 + 6) + 6$, para $n \geq 2$.
Habiendo hallado la solución general, reemplazando u_1 en u_n tenemos la solución particular:

$$u_n = -9 * 2^{n-1} + 6 = -3(3 * 2^{n-1} - 2)$$

6 Ejercicio 6

6.1 Enunciado

Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a la siguiente serie: $7, 17, 37, 77, 157...$

6.2 Solución

Para iniciar se identifican los patrones:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 7 = 7 + 10 * 0 \\
u_2 &= 17 = 7 + 10 * 1 = u_1 + 10 * 2^0 \\
u_3 &= 37 = 17 + 10 * 2 = u_2 + 10 * 2^1 \\
u_4 &= 77 = 37 + 10 * 4 = u_3 + 10 * 2^2 \\
u_5 &= 157 = 77 + 10 * 8 = u_4 + 10 * 2^3
\end{aligned}$$

Habiendo identificado los patrones, se puede plantear la ecuación en diferencias como: $u_n = u_{n-1} + 10 * 2^{n-2}$ con $n \geq 1$ y $u_1 = 7$.
Para probar, podemos hallar u_5 y u_6:

$$\begin{aligned}
u_5 &= u_4 + 10 * 2^3 = 77 + 10 * 2^3 = 77 + 80 = 157 \\
u_6 &= u_5 + 10 * 2^4 = 157 + 10 * 2^4 = 157 + 160 = 317
\end{aligned}$$

7 Ejercicio 7

7.1 Enunciado

Encuentre el pago mensual por un préstamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interés del 21% por año.

7.2 Solución

Tenemos el monto inicial $m = u_0 = 400000000$, el interés $i = \frac{0.21}{12} = 0.0175$ (es el 21% anual, esto equivale al 0.21 dividido entre 12 meses) y el número de periodos $n = 36$ (12 meses por 3 años), lo que implica que $u_{36} = 0$. Es preciso encontrar el pago mensual p.
Ahora, se plantea la ecuación en diferencias. Primero, se identifican los patrones:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 * (1 + i) - p \\
u_2 &= u_1 * (1 + i) - p = (u_0 * (1 + i) - p) * (1 + i) - p \\
u_3 &= u_2 * (1 + i) - p = ((u_0 * (1 + i) - p) * (1 + i) - p) * (1 + i) - p
\end{aligned}$$

Con este patrón se puede llegar a:

$$u_n = u_0 * (1+i)^n - p * ((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i)^1 + (1+i)^0)$$
$$u_n = u_0 * (1+i)^n - p * \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = u_0 * (1+i)^n - p * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$u_n = u_0 * (1+i)^n - p * \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ es la fórmula general para pagos recurrentes. Se procede a reemplazar $u_n = u_{36} = 0$, $u_0 = 400000000$, $i = \frac{0.21}{12} = 0.0175$ y $n = 36$ en la fórmula general y se procede a operar:

$$0 = 400000000 * (1+0.0175)^{36} - p * \frac{(1+0.0175)^{36} - 1}{0.0175}$$
$$400000000 * 1.0175^{36} = p * \frac{1.0175^{36} - 1}{0.0175}$$
$$p = 400000000 * 1.0175^{36} * \frac{0.0175}{1.0175^{36} - 1}$$
$$p \approx 15070100$$

El pago mensual que se debe realizar es de aproximadamente 15070100. Si hacemos una simulación en una hoja de cálculo, se puede verificar que la deuda se pagaría en el tiempo estipulado teniendo en cuenta el monto mensual calculado.

Monto incial	$ 400.000.000,00
Tasa de interes (mensual)	1,75%
Numero de periodos (meses)	36
Pago (mensual)	$ 15.070.100,00

Periodo	**Saldo**	**Periodo**	**Saldo**
0	$ 400.000.000,00	18	$ 230.974.703,69
1	$ 391.929.900,00	19	$ 219.946.661,00
2	$ 383.718.573,25	20	$ 208.725.627,57
3	$ 375.363.548,28	21	$ 197.308.226,05
4	$ 366.862.310,38	22	$ 185.691.020,01
5	$ 358.212.300,81	23	$ 173.870.512,86
6	$ 349.410.916,07	24	$ 161.843.146,83
7	$ 340.455.507,10	25	$ 149.605.301,90
8	$ 331.343.378,48	26	$ 137.153.294,68
9	$ 322.071.787,60	27	$ 124.483.377,34
10	$ 312.637.943,88	28	$ 111.591.736,44
11	$ 303.039.007,90	29	$ 98.474.491,83
12	$ 293.272.090,54	30	$ 85.127.695,44
13	$ 283.334.252,13	31	$ 71.547.330,11
14	$ 273.222.501,54	32	$ 57.729.308,39
15	$ 262.933.795,31	33	$ 43.669.471,28
16	$ 252.465.036,73	34	$ 29.363.587,03
17	$ 241.813.074,88	35	$ 14.807.349,80
		36	**-$ 3.621,58**

8 Ejercicio 8

8.1 Enunciado

Una plantación de café incrementa su producción un 1% por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. Las órdenes (uso de café) permanecen en 1600 toneladas por mes. ¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 12 meses? ¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 2 años?

8.2 Solución

Sean:

- P_n: la producción de café mensual. Siendo $P_0 = 200$
- O_n: las órdenes (el consumo) de café por mes. Ahora, ya que el consumo es constante, este puede definirse como $O = 1600$.
- $t = 0.01$ la tasa de incremento mensual.
- C_n: la cantidad apilada de café por mes.

Naturalmente, la producción de café puede ser definida por la siguiente ecuación en diferencias: $P_n = P_{n-1} * t + P_{n-1} = (1+t) * P_{n-1} = 1.01 * P_{n-1}$, para $n \geq 1$. Ahora, la cantidad de café apilado puede definirse como:

$$\begin{aligned} C_n &= P_n - O \\ C_n &= 1.01 * P_{n-1} - O \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} C_n &= 1.01 * P_{n-1} - O \\ C_{n-1} &= 1.01 * P_{n-2} - O \\ C_{n-2} &= 1.01 * P_{n-3} - O \end{aligned}$$

Realizando una substitución hacia atrás se tiene:

$$\begin{aligned} C_{n-2} &= 1.01 * P_{n-3} - O \\ C_{n-1} &= 1.01 * (1.01 * P_{n-3} - O) - O \\ C_n &= 1.01 * (1.01 * (1.01 * P_{n-3} - O) - O) - O \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} C_n &= 1.01^n * P_0 - 1600 * (1.01^{n-1} * 1.01^{n-2} + ... + 1.01^1 + 1.01^0) \\ C_n &= 1.01^n * P_0 - 1600 \left(\frac{1.01^n - 1}{1.01 - 1} \right) = 1.01^n * P_0 - 1600 \left(\frac{1.01^n - 1}{0.01} \right) \\ C_n &= 1.01^n * (P_0 - 160000) + 160000 \end{aligned}$$

Entonces, si $n = 12$ y $n = 24$:

$$\begin{aligned} C_{12} &= 1.01^{12} * (200 - 160000) + 160000 \approx -20000 \\ C_{24} &= 1.01^{24} * (200 - 160000) + 160000 \approx -42900 \end{aligned}$$

Dadas las condiciones, no es posible apilar café. Es necesario aumentar la producción para cumplir siquiera con la demanda

9 Ejercicio 9

9.1 Enunciado

La productividad en una plantación de 2000 árboles se incrementa 5% cada año por la implementación de mejores técnicas de agricultura. El granjero también planta además 100 árboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.

9.2 Solución

Sean:

- $P_0 = 2000$ la cantidad de árboles al inicio.
- $t = 5\% = 0.05$ el incremento anual de la productividad en la plantación.
- $a = 100$ la cantidad de árboles que planta el granjero cada mes.

Entonces, se comienza a identificar los patrones:

$$P_0 = 2000$$
$$P_1 = P_0 + P_0 * t + a = P_0 * (1 + t) + a$$
$$P_2 = P_1 * (1 + t) + a = (P_0 * (1 + t) + a) * (1 + t) + a$$
$$P_3 = P_2 * (1 + t) + a = ((P_0 * (1 + t) + a) * (1 + t) + a) * (1 + t) + a$$

Con los patrones identificados, se procede a definir la ecuación en diferencias:

$$P_n = P_0 * (1 + t)^n + a * [(1 + t)^{n-1} + (1 + t)^{n-2} + ... + (1 + t)^1 + (1 + t)^0]$$
$$P_n = P_0 * (1 + t)^n + a * \left(\frac{(1 + t)^n - 1}{(1 + t) - 1}\right) = P_0 * (1 + t)^n + a * \left(\frac{(1 + t)^n - 1}{t}\right)$$

Reemplazando:

$$P_n = 200 * (1 + 0.05)^n + 100 * \left(\frac{(1 + 0.05)^n - 1}{0.05}\right)$$
$$P_n = 200 * 1.05^n + 100 * \left(\frac{1.05^n - 1}{0.05}\right) = 1.05^n * (200 + 2000) - 200$$
$$P_n = 2200 * 1.05^n - 200$$

Se calcula la cantidad de árboles plantados en 10 años:

$$P_{10} = 2200 * 1.05^{10} - 200 \approx 3380$$

Se plantaron aproximadamente 3380 árboles. Entonces el incremento de la productividad puede calcularse así:

$$AumentoProductividad = \frac{P_{10}}{P_0} = \frac{3380}{2000} = 1.69 = 169\%$$

Esto quiere decir que hubo un aumento en la plantación del 169% aproximadamente.

10 Ejercicio 10

10.1 Enunciado

Resuelva $u_n = 3 * u_{n-1} + n$, para $u_1 = 5$.

10.2 Solución

Para empezar, se encuentra la solución general de u_n. Se sabe que la solución de una ecuación de la forma $u_n = k^{n-1} * u_1$ es $k^{n-1} * u_1$. Entonces reemplazando $k = 3$ en u_n:

$$u_n = 3^{n-1} * u_1$$

Luego, se procede a encontrar la solución particular de $f(n) = n$. Esta es $a + b * n$, si se reemplaza en $u_n - 3 * u_{n-1} = n$ tenemos:

$$\begin{aligned}
n &= a + bn - 3 * (a + b * (n - 1) \\
n &= a + bn - 3a - 3bn + 3b \\
n &= -2a + 3b - 2bn \\
n * (1 + 2b) &= -2a + 3b \\
n &= \frac{-2a + 3b}{1 + 2b}
\end{aligned}$$

Ahora, la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$u_n = 3^{n-1} * u_1 + \frac{-2a + 3b}{1 + 2b}$$

Si se reemplaza $u_1 = 5$ en u_n se tiene:

$$u_n = 5 * 3^{n-1} + \frac{-2a + 3b}{1 + 2b}$$

11 Ejercicio 11

11.1 Enunciado

Encuentre la solución general para $u_n = u_{n-1} + 2^n$ y $u_n = 2 * u_{n-1} + n$

11.2 Solución

11.2.1 $u_n = u_{n-1} + 2^n$

Para empezar, se encuentra la solución general de u_n. Se sabe que la solución de una ecuación de la forma $u_n = k^{n-1} * u_1$ es $k^{n-1} * u_1$. Entonces reemplazando $k = 1$ en u_n:

$$u_n = 1^{n-1} * u_1$$

Luego, se procede a encontrar la solución particular de $f(n) = q^n$. Esta es $a * n * q^n$ o $a * q^n$, si se reemplaza $a * q^n$ con $q = 2$ en $u_n - u_{n-1} = 2^n$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
2^n &= a * 2^n - a * 2^{n-1} \\
2^n &= a * 2^n * (1 - 2^{-1}) \\
a^{-1} &= 1 - 2^{-1} \\
a &= 2
\end{aligned}
$$

Ahora, la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$u_n = 1^{n-1} * u_1 + 2 * 2^n = 1^{n-1} * u_1 + 2^{n+1}$$

11.2.2 $u_n = 2 * u_{n-1} + n$

Para empezar, se encuentra la solución general de u_n. Se sabe que la solución de una ecuación de la forma $u_n = k^{n-1} * u_1$ es $k^{n-1} * u_1$. Entonces reemplazando $k = 2$ en u_n:

$$u_n = 2^{n-1} * u_1$$

Luego, se procede a encontrar la solución particular de $f(n) = n$. Esta es $a + b * n$, si se reemplaza en $u_n - 2 * u_{n-1} = n$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
n &= a + bn - 2 * (a + b * (n - 1) \\
n &= a + bn - 2a - 2bn + 2b \\
n &= -a + 2b - bn \\
n * (1 + b) &= -a + 2b \\
n &= \frac{-a + 2b}{1 + b}
\end{aligned}
$$

Ahora, la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$u_n = 3^{n-1} * u_1 + \frac{-a + 2b}{1 + b}$$

12 Ejercicio 12

12.1 Enunciado

Si $u_n = k * u_{n-1} + 5$ y $u_1 = 4$ y $u_2 = 17$ encuentre los valores de k y u_6.

12.2 Solución

Para hallar la constante k se procede a usar los datos ya conocidos, entonces:

$$\begin{aligned} u_2 &= k * u_1 + 5 \\ 17 &= k * 4 + 5 \\ 12 &= k * 4 \\ k &= \frac{12}{4} \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Se sabe que una ecuación en diferencia de la forma $u_n = k * u_{n-1} + c$ tiene como solución general:

$$u_n = k^n * u_0 + c * \left(\frac{k^n - 1}{k - 1}\right)$$

Que también puede escribirse como:

$$u_n = k^{n-1} * u_1 + c * \left(\frac{k^{n-1} - 1}{k - 1}\right)$$

con $k \neq 1$.
Por lo tanto, usando la solución general, se tiene:

$$u_n = 4 * 3^{n-1} + 5 * \left(\frac{3^{n-1} - 1}{2}\right) = 3^{n-1} * \left(4 + \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2} = \frac{13}{2} * 3^{n-1} - \frac{5}{2}$$

Con esto, se puede hallar u_6:

$$u_6 = \frac{13}{2} * 3^{6-1} - \frac{5}{2} = \frac{13}{2} * 3^5 - \frac{5}{2} = \frac{3154}{2} = 1577$$

13 Ejercicio 13

13.1 Enunciado

Use iteración para resolver la siguiente relación de recurrencia $u_n = \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$, para $n \geq 2$, sujeto a la condición inicial $u_1 = \frac{1}{6}$.

13.2 Solución

Para solucionar este problema, comenzamos por identificar los patrones:

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = \frac{u_{n-2} * u_{n-3}^{-1}}{u_{n-2}} = \frac{1}{u_{n-3}} \\
u_{n-1} &= \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} = \frac{u_{n-3} * u_{n-4}^{-1}}{u_{n-3}} = \frac{1}{u_{n-4}} \\
u_{n-2} &= \frac{u_{n-3}}{u_{n-4}} = \frac{u_{n-4} * u_{n-5}^{-1}}{u_{n-4}} = \frac{1}{u_{n-5}} \\
u_{n-3} &= \frac{u_{n-4}}{u_{n-5}}
\end{aligned}$$

Se puede observar que el patrón sigue la siguiente forma:

$$u_n = \frac{1}{u_{n-3}}$$

Bajo esa lógica, se puede manipular u_n así:

$$u_n = \frac{1}{u_{n-3}} = \frac{1}{u_{n-6}^{-1}} = u_{n-6} = \frac{1}{u_{n-9}} = \frac{1}{u_{n-12}^{-1}} = u_{n-12}$$

Esto da a ver que:

$$u_n = \frac{1}{u_{n-3}} = u_{n-6}$$

Es decir:

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_6 = u_{12} = u_{6k+1} \\
u_1 &= u_7 = u_{13} = u_{6k+2} \\
u_2 &= u_8 = u_{14} = u_{6k+3} \\
u_3 &= u_9 = u_{15} = u_{6k+4} \\
u_4 &= u_{10} = u_{16} = u_{6k+5} \\
u_5 &= u_{11} = u_{17} = u_{6k+6}
\end{aligned}$$

con $k \geq 0$.
Con esto presente, procedamos a calcular de u_1 a u_{12}, considerando que $u_1 = \frac{1}{6}$:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{6} = 6^{-1} \\
u_2 &= \frac{u_1}{u_0} = \frac{6^{-1}}{u_0} = 6^{-1}u_0^{-1} \\
u_3 &= \frac{u_2}{u_1} = \frac{6^{-1}u_0^{-1}}{6^{-1}} = u_0^{-1} \\
u_4 &= \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_0^{-1}}{6^{-1}u_0^{-1}} = 6 \\
u_5 &= \frac{u_4}{u_3} = \frac{6}{u_0^{-1}} = 6u_0 \\
u_6 &= \frac{u_5}{u_4} = \frac{6u_0}{6} = u_0 \\
u_7 &= \frac{u_6}{u_5} = \frac{u_0}{6u_0} = 6^{-1} \\
u_8 &= \frac{u_7}{u_6} = \frac{6^{-1}}{u_0} = 6^{-1}u_0^{-1} \\
u_9 &= \frac{u_8}{u_7} = \frac{6^{-1}u_0^{-1}}{6^{-1}} = u_0^{-1} \\
u_{10} &= \frac{u_9}{u_8} = \frac{u_0^{-1}}{6^{-1}u_0^{-1}} = 6 \\
u_{11} &= \frac{u_{10}}{u_9} = \frac{6}{u_0^{-1}} = 6u_0 \\
u_{12} &= \frac{u_{11}}{u_{10}} = \frac{6u_0}{6} = u_0
\end{aligned}
$$

Con estos cálculos tenemos:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u_6 = u_{12} = u_{6k+1} = \frac{6u_0}{6} = u_0 \\
u_1 &= u_7 = u_{13} = u_{6k+2} = 6^{-1} = u_1 \\
u_2 &= u_8 = u_{14} = u_{6k+3} = 6^{-1}u_0^{-1} = \frac{u_1}{u_0} \\
u_3 &= u_9 = u_{15} = u_{6k+4} = u_0^{-1} = \frac{1}{u_0} \\
u_4 &= u_{10} = u_{16} = u_{6k+5} = 6 = \frac{1}{u_1} \\
u_5 &= u_{11} = u_{17} = u_{6k+6} = 6u_0 = \frac{u_0}{u_1}
\end{aligned}
$$

Lo que confirma que el patrón se repite cada 6 saltos:

$$u_n = \left\{ u_0, u_1, \frac{u_1}{u_0}, \frac{1}{u_0}, \frac{1}{u_1}, \frac{u_0}{u_1}, ... \right\}$$

Por lo que se puede definir la fórmula general así:

$$f(x) = \begin{cases} u_0 & \text{para } n = 6k+1 \\ u_1 & \text{para } n = 6k+2 \\ \frac{u_1}{u_0} & \text{para } n = 6k+3 \\ \frac{1}{u_0} & \text{para } n = 6k+4 \\ \frac{1}{u_1} & \text{para } n = 6k+5 \\ \frac{u_0}{u_1} & \text{para } n = 6k+6 \end{cases}$$

con $n \geq 2$, $k \geq 0$ y $u_1 = \frac{1}{6}$. Nótese que si u_0 estuviese definido, todos los valores de u_n tendrían un equivalente numérico.

14 Ejercicio 14

14.1 Enunciado

Investigue el límite de $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ si $u_n = u_{n-1} + 2 * u_{n-2}$

14.2 Solución

Para encontrar más información sobre el límite de u_n es necesario encontrar la fórmula general.
Primero, se define el polinomio característico basándonos en $u_n - u_{n-1} - 2 = 0$:

$$m^2 - m - 2 = 0$$
$$(m-2)(m+1) = 0$$

Esto nos da dos soluciones posibles: $m = 2$ o $m = -1$. Esto quiere decir que la formula general puede escribirse como:

$$u_n = A * 2^n - B * 1^n$$

A y B no están definidas dadas las condiciones iniciales. Dicho esto, se puede calcular tanto el límite cuando n tiende a cero y cuando n tiende a infinito.
Comencemos calculando:

$$\lim_{n \to 0} \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

Desarrollando tenemos:

$$\lim_{n \to 0} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n \to 0} \frac{u_0}{u_1} = \frac{A * 2^0 - B * 1^0}{A * 2^1 - B * 1^1} = \frac{A - B}{2A - B}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to 0} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{A - B}{2A - B}$$

Es preciso mencionar que no hay un valor definido de A y B, entonces, no es posible darle un valor numérico exacto. Sin embargo, es importante detallar que $2A - B \neq 0$ para que el límite tenga sentido.
Ahora calculemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

Desarrollando tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{A * 2^n - B * 1^n}{A * 2^{n+1} - B * 1^{n+1}}$$

Se divide el numerador y el denominador por $A * 2^n$, entonces se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{B}{A} * 1^n * 2^{-n}}{2 - \frac{B}{A} * 1^n * 2^{-n}}$$

Como 2^{-n} cuando tiende al infinito se acerca a 0 más rápido que 1^n tiende a infinito, se puede decir que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 0}{2 - 0}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2}$$

15 Ejercicio 15

15.1 Enunciado

Encuentre el n-esimo término de la siguiente secuencia: $-3, 21, 3, 129, 147, ...$

15.2 Solución

Sea $u_0 = -3$ y $u_1 = 21$. Desarrollando:

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_1 + 6 * u_0 = 21 + 6 * (-3) = 21 - 18 = 3 \\
u_3 &= u_2 + 6 * u_1 = 3 + 6 * 21 = 3 + 126 = 129 \\
u_4 &= u_3 + 6 * u_2 = 129 + 6 * 3 = 129 + 18 = 147 \\
u_5 &= u_4 + 6 * u_3 = 147 + 6 * 129 = 147 + 774 = 921
\end{aligned}$$

Entonces, el n-esimo término de la secuencia puede definirse con la siguiente ecuación en diferencias:

$$u_n = u_{n-1} + 6 * u_{n-2}$$

para $n \geq 2$.

16 Ejercicio 16

16.1 Enunciado

Resuelva $u_n - 6u_{n-1} + 8u_{n-2} = 0$, para $n \geq 3$ dado $u_1 = 10$ y $u_2 = 28$. Evalúe u_6.

16.2 Solución

Para resolver u_n, primero es necesario hallar el polinomio característico. Sea $u_n = Cm^n$.

$$\begin{aligned} Cm^n - 6Cm^{n-1} + 8Cm^{n-2} &= 0 \\ Cm^{n-2} * (m^2 - 6m + 8) &= 0 \end{aligned}$$

Usamos la fórmula cuadrática para resolver m:

$$m = \frac{6 + \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 + \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Entonces $m_1 = \frac{8}{2} = 4$ y $m_2 = \frac{4}{2} = 2$. Lo que quiere decir que la formula general es:

$$u_n = Am_1^n + Bm_2^n = A * 4^n + B * 2^n$$

Si se reemplaza u_1 y u_2 en la solución general, se tiene:

$$\begin{aligned} u_1 = A * 4^1 + B * 2^1 &= 10 \\ 4A + 2B &= 10 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_2 = A * 4^2 + B * 2^2 &= 28 \\ 16A + 4B &= 28 \\ 4(4A + B) &= 4 * 7 \\ 4A + B &= 7 \\ A &= \frac{7 - B}{4} \end{aligned}$$

Se reemplaza $A = \frac{7-B}{4}$ en $4A + 2B = 10$, tenemos:

$$\begin{aligned} 4A + 2B &= 10 \\ 4(\frac{7-B}{4}) + 2B &= 10 \\ 7 - B + 2B &= 10 \\ B &= 3 \end{aligned}$$

Se reemplaza $B = 3$ en $4A + B = 7$, tenemos:

$$\begin{aligned} 4A + B &= 7 \\ 4A + 3 &= 7 \\ 4A &= 4 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Entonces $A = 1$ y $B = 3$. Si se reemplazan en $u_n = A * 4^n + B * 2^n$ se tiene:

$$u_n = A * 4^n + B * 2^n = 4^n + 3 * 2^n$$

Luego:

$$u_6 = 4^6 + 3 * 2^6 = 4096 + 192 = 4288$$

17 Ejercicio 17

17.1 Enunciado

Encuentre la solución particular para $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$, para $n \geq 1$, cuando $u_1 = -1$, $u_2 = -2$.

17.2 Solución

Para resolver u_n, primero es necesario hallar el polinomio característico. Sea $u_n = Cm^n$.

$$\begin{aligned} Cm^n + 2Cm^{n-1} + Cm^{n-2} &= 0 \\ Cm^{n-2} * (m^2 + 2m + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Factorizando $m^2 + 2m + 1 = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} m^2 + 2m + 1 &= 0 \\ (m + 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Las raíces son $m_1 = m_2 = -1$. Lo que quiere decir que la formula general es:

$$u_n = Am_1^n + Bnm_2^n = -(A * 1^n + B * 1^n) = -1^n(A + Bn)$$

Si se reemplaza u_1 y u_2 en la solución general, se tiene:

$$\begin{aligned} u_1 = -1^1(A + B * 1) &= -1 \\ A - B &= 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_2 = -1^2(A + B * 2) &= -2 \\ A + 2B &= -2 \end{aligned}$$

Tenemos un sistema de ecuaciones definido como $A - B = 1$ y $A + 2B = -2$. Si restamos la primera con la segunda ecuación, tenemos $-3B = 3$ o $B = -1$. Y reemplazando $B = -1$ en $A - B = 1$, tenemos $A + 1 = 1$ o $A = 0$.
Entonces, reemplazando $A = 0$ y $B = -1$ en $u_n = -1^n(A + Bn)$, la solución particular es:

$$u_n = -1^n(A + Bn) = -1^n(-n) = n * 1^n$$

18 Ejercicio 18

18.1 Enunciado

Encuentre la solución general de la siguiente ecuación $u_n - 5 * u_{n-1} + 6 * u_{n-2} = f(n)$, cuando $f(n) = 2$, $f(n) = n$, $f(n) = 5^n$ y $f(n) = 1 + n^2$.

18.2 Solución

Primero, es necesario encontrar la solución a la ecuación homogénea (sin la función $f(n)$. Sea $u_n = Cm^n$.

$$\begin{aligned} Cm^n - 5Cm^{n-1} + 6Cm^{n-2} &= 0 \\ Cm^{n-2} * (m^2 - 5m + 6) &= 0 \end{aligned}$$

Factorizando $m^2 - 5m + 6 = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} m^2 - 5m + 6 &= 0 \\ (m - 2)(m - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Las raíces son $m_1 = 2$ y $m_2 = 3$. Lo que quiere decir que la formula general es:

$$u_n = A * 2^n + B * 3^n$$

Luego, se debe encontrar la solución particular de cada caso.

18.2.1 $u_n - 5 * u_{n-1} + 6 * u_{n-2} = f(n)$ cuando $f(n) = 2$

Para encontrar la solución particular de $f(n) = 2$, suponga que la solución particular tiene la forma $u_n = C$. Si se reemplaza en la ecuación original se tiene:

$$\begin{aligned} C - 5C + 6C &= 2 \\ 2C &= 2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

La solución particular es $C = 1$. Por último, La solución general de la ecuación completa es la suma de la solución homogénea y la solución particular:

$$u_n = A * 2^n + B * 3^n + 1$$

18.2.2 $u_n - 5 * u_{n-1} + 6 * u_{n-2} = f(n)$ cuando $f(n) = n$

Para encontrar la solución particular de $f(n) = n$, suponga que la solución particular tiene la forma $u_n = Cn + D$. Si se reemplaza en la ecuación original se tiene:

$$\begin{aligned} Cn + D - 5 * (C * (n-1) + D) + 6 * (C * (n-2) + D) &= n \\ (C - 5C + 6C) * n + (D - 5D + 12C - 10C + 2D) &= n \\ 2Cn + (D + 2C) &= n \end{aligned}$$

Para que las dos expresiones sean iguales, necesitamos que los coeficientes de n sean iguales y las constantes sean iguales. Esto nos da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2C &= 1 \text{ (coeficientes de } n \text{ iguales)} \\ D + 2C &= 0 \text{ (constantes iguales)} \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones $C = \frac{1}{2}$ y $D = -C = -\frac{1}{2}$. Es decir, la solución particular es $u_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$.
Por último, La solución general de la ecuación completa es la suma de la solución homogénea y la solución particular:

$$u_n = A * 2^n + B * 3^n + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

18.2.3 $u_n - 5 * u_{n-1} + 6 * u_{n-2} = f(n)$ cuando $f(n) = 5^n$

Para encontrar la solución particular de $f(n) = n$, suponga que la solución particular tiene la forma $u_n = C * 5^n$. Si se reemplaza en la ecuación original se tiene:

$$\begin{aligned}
C * 5^n - 5(C * 5^{n-1}) + 6(C * 5^{n-2}) &= 5^n \\
C * 5^n - 5 * C * 5^{n-1} + 6 * C * 5^{n-2} &= 5^n \\
C * 5^2 - 5 * C * 5 + 6C &= 5^2 \\
20C - 25C + 6C &= 25 \\
C &= 25
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución particular es $u_n = 25 * 5^n$. Por último, La solución general de la ecuación completa es la suma de la solución homogénea y la solución particular:

$$u_n = A * 2^n + B * 3^n + 25 * 5^n$$

18.2.4 $u_n - 5 * u_{n-1} + 6 * u_{n-2} = f(n)$ cuando $f(n) = 1 + n^2$

Para encontrar la solución particular de $f(n) = n$, suponga que la solución particular tiene la forma $u_n = C + Dn + En^2$. Si se reemplaza en la ecuación original se tiene:

$$\begin{aligned}
C + Dn + En^2 - 5(C + D(n-1) \\
+E(n-1)^2) + 6(C + D(n-2) + E(n-2)^2) &= 1 + n^2 \\
C + Dn + En^2 - 5C - 5Dn + 5D- \\
5E(n-1)^2 + 6C + 6D(n-2) + 6E(n-2)^2 &= 1 + n^2 \\
(-5E + 6E)n^2 + (6D - 10D + D + 2E - 5E)n + (6E - 5E) &= 1 \\
E - 4Dn &= 1
\end{aligned}$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-4D &= 0 \\
E &= 1
\end{aligned}$$

Entonces $C = 0$, $D = 0$ y $E = 1$.
Por último, La solución general de la ecuación completa es la suma de la solución homogénea y la solución particular:

$$u_n = A * 2^n + B * 3^n + 1$$

19 Ejercicio 19

19.1 Enunciado

Resuelva la siguiente ecuación en diferencias utilizando la función generatriz $u_n - 3u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$, dado $u_0 = 0$, y $u_1 = 20$, $n \geq 2$.

19.2 Solución

Sea:

$$G(X) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + ...$$
$$G(X) = 0 + 20x + u_2x^2 + ...$$

Sustituyendo u_2, u_3, u_4... en $G(x)$:

$$\begin{aligned}
G(x) &= 0 + 20x + (3u_1 - 4u_0)x^2 + (3u_2 - 4u_1)x^3 + ... \\
G(x) &= 20x + (3u_1x^2 + 3u_2x^3 + ...) - (4u_0x^2 + 4u_1x^3 + ...) \\
G(x) &= 20x + 3x(u_1x + u_2x^2 + ...) - 4x^2(u_0 + u_1x + ...) \\
G(x) &= 20x + 3x(G(x) - u_0) - 4x^2(G(x)) \\
G(x) &= 20x + G(x)(3x - 4x^2) \\
G(x)(1 - 3x + 4x^2) &= 20x \\
G(x) &= \frac{20x}{1 - 3x + 4x^2}
\end{aligned}$$

Se llega a un polinomio irreducible, por lo que no es posible continuar.

20 Ejercicio 20

20.1 Enunciado

Encuentre la función generatriz de la secuencia de Fibonacci.

20.2 Solución

Sea la secuencia de Fibonacci definida por la siguiente ecuación en diferencias:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

con $n \geq 2$, $u_0 = 1$ y $u_1 = 1$. Consecuentemente, se tiene:

$$u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 1 = 2$$
$$u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3$$
$$u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5$$

y así sucesivamente.
Entonces, sea:

$$G(X) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + ...$$
$$G(X) = 1 + x + u_2x^2 + ...$$

Sustituyendo u_2, u_3, u_4... en $G(x)$:

$$G(x) = 1 + x + (u_1 + u_0)x^2 + (u_2 + u_1)x^3 + ...$$
$$G(x) = 1 + x + (u_1x^2 + u_2x^3 + u_3x^4 + ...) + (u_0x^2 + u_1x^3 + u_2x^4 + ...)$$
$$G(x) = 1 + x + x(u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + ...) + x^2(u_0x + u_1x^2 + u_2x^3 + ...)$$
$$G(x) = 1 + x + x(G(x) - u_0) + x^2(G(x))$$
$$G(x) = 1 + x - x + G(x)(x + x^2)$$
$$G(x)(1 - x - x^2) = 1$$
$$G(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Se llega a un polinomio irreducible, por lo que no es posible continuar.