Ejercicios varios

Carlos Arturo Murcia Andrade

Abril 2023

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

1 Ejercicios sobre el teorema de la división

Teorema de la división

Teorema. *Suponga que* $a \in \mathbb{Z}$ *y* $n \in \mathbb{Z} > 0$. *Entonces, existen enteros* q *y* r *tales que:* $a = q * n + r$. $0 \leq r < n$
q *es el cociente y* r *es el residuo.*

Algoritmo para encontrar el cociente y el residuo

1. Crear una desigualdad que encierre a por ambos lados por su entero anterior y posterior que sean múltiplos de n.
   Nota: si a es múltiplo de n, entonces $q = \frac{a}{n}$ y $r = 0$.
2. Dividir toda la desigualdad entre n.
3. Tomar el número a la izquierda de la desigualdad (este será el cociente q).
4. Restar a por la multiplicación del cociente (q) por n. Este será el residuo (r, $0 \leq r < n$).
5. Verificar la ecuación $a = q * n + r$.

Ejercicios

Para cada uno de los siguientes a y n, encontrar el cociente y el residuo de dividir a sobre n. También representar la ecuación $a = q * n + r$.

1. $a = 59$ y $n = 7$
2. $a = 84$ y $n = 12$
3. $a = 100$ y $n = 9$
4. $a = -96$ y $n = 12$
5. $a = -4$ y $n = 5$

Para resolver estos ejercicios se hará uso del algoritmo para hallar cocientes y residuos.

Solución

Ejercicio 1: $a = 59$ **y** $n = 7$

1. Sabemos que: $7 * 8 = 56$, $7 * 9 = 63$ y 59 no es múltiplo de 7.
   Entonces: $56 < 59 < 63 \rightarrow 7 * 8 < 59 < 7 * 9$
2. Si dividimos todas las partes de la desigualdad entre 7 tenemos:
   $8 < \frac{59}{7} < 9$

3. Así, $q = 8$

4. Luego, $r = a - (q * n) = 59 - (8 * 7) = 59 - 56 = 3$

5. Entonces, $a = q * n + r = 7 * 8 + 3 = 56 + 3 = 59$

Ejercicio 2: $a = 84$ **y** $n = 12$

1. Sabemos que: $12 * 7 = 84$, es decir, 84 es múltiplo de 12.
   Entonces: $q = \frac{84}{12} = 7$ y $r = 0$.

2. Si verificamos por el teorema del residuo $a = q * n + r = 7 * 12 + 0 = 84 + 0 = 84$

Ejercicio 3: $a = 100$ **y** $n = 9$

1. Sabemos que: $9 * 11 = 99$, $9 * 12 = 108$ y 100 no es múltiplo de 9.
   Entonces: $99 < 100 < 108 \rightarrow 9 * 11 < 100 < 9 * 12$

2. Si dividimos todas las partes de la desigualdad entre 9 tenemos:
   $11 < \frac{100}{9} < 12$

3. Así, $q = 11$

4. Luego, $r = a - (q * n) = 100 - (11 * 9) = 100 - 99 = 1$

5. Entonces, $a = q * n + r = 11 * 9 + 1 = 99 + 1 = 100$

Ejercicio 4: $a = -96$ **y** $n = 12$

1. Sabemos que: $12 * -8 = -96$, es decir, -96 es múltiplo de 12.
   Entonces: $q = \frac{-96}{12} = -8$ y $r = 0$.

2. Si verificamos por el teorema del residuo $a = q * n + r = -8 * 12 + 0 = -96 + 0 = -96$

Ejercicio 5: $a = -4$ **y** $n = 5$

1. Sabemos que: $5 * 0 = 0$, $5 * -1 = -5$ y -4 no es múltiplo de 5.
   Entonces: $-5 < -4 < 0 \rightarrow 5 * -1 < -4 < 5 * 0$

2. Si dividimos todas las partes de la desigualdad entre 5 tenemos:
   $-1 < \frac{-4}{5} < 0$

3. Así, $q = -1$

4. Luego, $r = a - (q * n) = -4 - (-1 * 5) = -4 - (-5) = -4 + 5 = 1$

5. Entonces, $a = q * n + r = -1 * 5 + 1 = -5 + 1 = -4$

2 Ejercicios sobre el algoritmo de Euclides

Máximo Común Divisor

Definición 1. *El máximo común divisor de dos enteros a y b es el mayor número entero positivo n que es divisor de a y b.*

Algoritmo de Euclides

El algoritmo de Euclides es usado para encontrar el Máximo Común Divisor y se describe de la siguiente manera. Suponga que a y b son enteros positivos:

1. Aplicar el teorema de la división repetidamente.
   $a = q_1 * b + r_1$
   $b = q_2 * r_1 + r_2$
   $r_1 = q_3 * r_2 + r_3$
   $r_2 = q_4 * r_3 + r_4$

2. Detenerse cuando el residuo sea 0.

3. El M.C.D. es el residuo de la ecuación anterior a la última (por ejemplo, si $r_4 = 0$, entonces, r_3 es el M.C.D.).

Ejercicios

Usar el algoritmo de Euclides para calcular el M.C.D. de:

1. 209 y 78

2. 93 y 27

3. 138 y 61

4. 231 y 49

Solución

Ejercicio 1: $mcd(209, 78)$

1. Se aplica el teorema de la división repetidamente hasta que el residuo sea cero.

   - $a = 209$, $b = 78$
     $209 = q_1 * 78 + r_1 = 2 * 78 + 53 = 156 + 53$
   - $b = 78$, $r_1 = 53$
     $78 = q_2 * 53 + r_2 = 1 * 53 + 25 = 53 + 25$
   - $r_1 = 53$, $r_2 = 25$
     $53 = q_3 * 25 + r_3 = 2 * 25 + 3 = 50 + 3$

- $r_2 = 25$, $r_3 = 3$
  $25 = q_4 * 3 + r_4 = 8 * 3 + 1 = 24 + 1$
- $r_3 = 3$, $r_4 = 1$
  $3 = q_5 * 1 + r_5 = 3 * 1 + 0 = 3 + 0$
- $r_5 = 0$

2. Como $r_5 = 0$, entonces, r_4 es el Máximo Común Divisor.
   Ergo, $mcd(209, 78) = r_4 = 1$

Ejercicio 2: $mcd(93, 27)$

1. Se aplica el teorema de la división repetidamente hasta que el residuo sea cero.
   - $a = 93$, $b = 27$
     $93 = q_1 * 27 + r_1 = 3 * 27 + 12 = 81 + 12$
   - $b = 27$, $r_1 = 12$
     $27 = q_2 * 12 + r_2 = 2 * 12 + 3 = 24 + 3$
   - $r_1 = 12$, $r_2 = 3$
     $12 = q_3 * 3 + r_3 = 4 * 3 + 0 = 12 + 0$
   - $r_3 = 0$
2. Como $r_3 = 0$, entonces, r_2 es el Máximo Común Divisor.
   Ergo, $mcd(93, 27) = r_2 = 3$

Ejercicio 3: $mcd(138, 61)$

1. Se aplica el teorema de la división repetidamente hasta que el residuo sea cero.
   - $a = 138$, $b = 61$
     $138 = q_1 * 61 + r_1 = 2 * 61 + 16 = 122 + 16$
   - $b = 61$, $r_1 = 16$
     $61 = q_2 * 16 + r_2 = 3 * 16 + 13 = 48 + 13$
   - $r_1 = 16$, $r_2 = 13$
     $16 = q_3 * 13 + r_3 = 1 * 13 + 3 = 13 + 3$
   - $r_2 = 13$, $r_3 = 3$
     $13 = q_4 * 3 + r_4 = 3 * 4 + 1 = 12 + 1$
   - $r_3 = 3$, $r_4 = 1$
     $3 = q_5 * 1 + r_5 = 3 * 1 + 0 = 3 + 0$
   - $r_5 = 0$
2. Como $r_5 = 0$, entonces, r_4 es el Máximo Común Divisor.
   Ergo, $mcd(138, 61) = r_4 = 1$

Ejercicio 4: $mcd(231, 49)$

1. Se aplica el teorema de la división repetidamente hasta que el residuo sea cero.

    - $a = 231$, $b = 49$
      $231 = q_1 * 49 + r_1 = 4 * 49 + 35 = 196 + 35$
    - $b = 49$, $r_1 = 35$
      $49 = q_2 * 35 + r_2 = 1 * 35 + 14 = 35 + 14$
    - $r_1 = 35$, $r_2 = 14$
      $35 = q_3 * 14 + r_3 = 2 * 14 + 7 = 28 + 7$
    - $r_2 = 14$, $r_3 = 7$
      $14 = q_4 * 7 + r_4 = 2 * 7 + 0 = 14 + 0$
    - $r_4 = 0$

2. Como $r_4 = 0$, entonces, r_3 es el Máximo Común Divisor.
   Ergo, $mcd(231, 49) = r_3 = 7$

3 Ejercicios sobre la identidad de Bézout

Identidad de Bézout

Definición 2. *Dados dos enteros a y b, ambos diferentes de* 0 *, y siendo d el Máximo Común Divisor. Entonces, existen enteros v y w tales que: $d = av+bw$.*

Algoritmo para hallar las constantes v y w de la identidad de Bézout

1. Aplicar el teorema de la división repetidamente.
   $a = q_1 * b + r_1$
   $b = q_2 * r_1 + r_2$
   $r_1 = q_3 * r_2 + r_3$
   $r_2 = q_4 * r_3 + r_4$

2. Detenerse cuando el residuo sea 0.

3. Aislar todos los residuos (excepto el que es igual a cero) y los números a y b. Es decir, despejarlos de las ecuaciones del teorema del residuo (por ejemplo, r_1 se expresaría como $r_1 = a - q_1 * b$).

4. Hacer una "sustitución hacia atrás" (haciendo operaciones de arriba hacia abajo con las ecuaciones despejadas, es decir, desde r_1 hasta r_n) hasta que se llegue a la ecuación que incluye el penúltimo residuo (el último que es mayor que 0). Esa estará expresada en términos de a y b; las constantes que acompañen esos términos serán v y w.

Nota 1: No se deben operar los residuos, solo se deben operar las constantes y/o términos comunes que los acompañen.
Nota 2: Cuando a o b (o ambos) son negativos, simplemente se hace la "sustitución hacia atrás" como si los números fueran positivos, luego, se reemplazan (v y w) en la identidad de Bézout conforme su signo.

Ejercicios

Encontrar v y w usando el algoritmo para hallar el MCD por medio de la identidad de Bézout.

1. $a = 59$ y $b = 42$

2. $a = 70$ y $b = 29$

3. $a = -112$ y $b = -91$

4. $a = -105$ y $b = 39$

Ejercicio 1: $a = 59$ **y** $b = 42$

1. Se aplica el teorema de la división repetidamente hasta que el residuo sea cero.

   - $a = 59$, $b = 42$
     $59 = q_1 * 42 + r_1 = 1 * 42 + 17 = 42 + 17$
   - $b = 42$, $r_1 = 17$
     $42 = q_2 * 17 + r_2 = 2 * 17 + 8 = 34 + 8$
   - $r_1 = 17$, $r_2 = 8$
     $17 = q_3 * 8 + r_3 = 2 * 8 + 1 = 16 + 1$
   - $r_2 = 8$, $r_3 = 1$
     $8 = q_4 * 1 + r_4 = 8 * 1 + 0 = 8 + 0$
   - $r_4 = 0$

2. $r_4 = 0$, entonces, $mcd(59, 42) = r_3 = d = 1$

3. Luego, se aíslan los residuos:

   - $r_1 = a - q_1 * b$
     $17 = 59 - 1 * 42$ (Ec. 1)
   - $r_2 = b - q_2 * r_1$
     $8 = 42 - 2 * 17$ (Ec. 2)
   - $r_3 = r_1 - q_3 * r_2$
     $1 = 17 - 2 * 8$ (Ec. 3)

4. Una vez se hayan aislado los residuos, se procede a hacer la "sustitución hacia atrás":

   - $1 = 17 - 2 * 8$
   - $1 = 17 - 2 * (42 - 2 * 17)$
     (reemplazo de Ec. 2 en Ec. 3)
   - $1 = 17 - 2 * 42 + 4 * 17$
     (se distribuye el paréntesis)
   - $1 = 5 * 17 - 2 * 42$
     (se agrupan términos comunes, ya se "encontró" el término $b = 42$)
   - $1 = 5 * (59 - 1 * 42) - 2 * 42$
     (reemplazo de Ec. 1 en Ec. 3)
   - $1 = 5 * 59 - 5 * 42 - 2 * 42$
     (se distribuye el paréntesis)
   - $1 = 5 * 59 - 7 * 42$
     (se agrupan términos comunes, ya se "encontró" el término $a = 59$)

   Ahora, se tiene que $av + bw = d$. Es decir, $59v + 42w = 1$. Entonces $v = 5$ y $w = -7$. Por lo que $1 = 5 * 59 + (-7) * 42 = 295 - 294$

Ejercicio 2: $a = 70$ **y** $b = 29$

1. Se aplica el teorema de la división repetidamente hasta que el residuo sea cero.
   - $a = 70$, $b = 29$
     $70 = q_1 * 29 + r_1 = 2 * 29 + 12 = 58 + 12$
   - $b = 29$, $r_1 = 12$
     $29 = q_2 * 12 + r_2 = 2 * 12 + 5 = 24 + 5$
   - $r_1 = 12$, $r_2 = 5$
     $12 = q_3 * 5 + r_3 = 2 * 5 + 2 = 10 + 2$
   - $r_2 = 5$, $r_3 = 2$
     $5 = q_4 * 2 + r_4 = 2 * 2 + 1 = 4 + 1$
   - $r_3 = 2$, $r_4 = 1$
     $2 = q_5 * 1 + r_5 = 2 * 1 + 0 = 2 + 0$
   - $r_5 = 0$
2. $r_5 = 0$, entonces, $mcd(70, 29) = r_4 = d = 1$
3. Luego, se aíslan los residuos:
   - $r_1 = a - q_1 * b$
     $12 = 70 - 2 * 29$ (Ec. 1)
   - $r_2 = b - q_2 * r_1$
     $5 = 29 - 2 * 12$ (Ec. 2)
   - $r_3 = r_1 - q_3 * r_2$
     $2 = 12 - 2 * 5$ (Ec. 3)
   - $r_4 = r_2 - q_4 * r_3$
     $1 = 5 - 2 * 2$ (Ec. 4)
4. Una vez se hayan aislado los residuos, se procede a hacer la "sustitución hacia atrás":
   - $1 = 5 - 2 * 2$
   - $1 = 5 - 2 * (12 - 2 * 5)$
     (reemplazo de Ec. 3 en Ec. 4)
   - $1 = 5 - 2 * 12 + 4 * 5$
     (se distribuye el paréntesis)
   - $1 = 5 * 5 - 2 * 12$
     (se agrupan términos comunes)
   - $1 = 5 * (29 - 2 * 12) - 2 * 12$
     (reemplazo de Ec. 2 en Ec. 4)
   - $1 = 5 * 29 - 10 * 12 - 2 * 12$
     (se distribuye el paréntesis)

- $1 = 5 * 29 - 12 * 12$
  (se agrupan términos comunes, ya se "encontró" el término $b = 29$)
- $1 = 5 * 29 - 12 * (70 - 2 * 29)$
  (reemplazo de Ec. 1 en Ec. 4)
- $1 = 5 * 29 - 12 * 70 + 24 * 29$
  (se distribuye el paréntesis)
- $1 = 29 * 29 - 12 * 70$
  (se agrupan términos comunes, ya se "encontró" el término $a = 70$)

Ahora, se tiene que $av + bw = d$. Es decir, $70v + 29w = 1$. Entonces $v = -12$ y $w = 29$. Por lo que $1 = 70 * (-12) + 29 * 29 = (-840) + 841$

Ejercicio 3: $a = -112$ **y** $b = -91$

1. Se aplica el teorema de la división repetidamente hasta que el residuo sea cero.
   - $a = 112$, $b = 91$
     $112 = q_1 * 91 + r_1 = 1 * 91 + 21 = 91 + 21$
   - $b = 91$, $r_1 = 21$
     $91 = q_2 * 21 + r_2 = 4 * 21 + 7 = 84 + 7$
   - $r_1 = 21$, $r_2 = 7$
     $21 = q_3 * 7 + r_3 = 3 * 7 + 0 = 21 + 0$
   - $r_3 = 0$
2. $r_3 = 0$, entonces, $mcd(-112, -91) = r_2 = d = 7$
3. Luego, se aíslan los residuos:
   - $r_1 = a - q_1 * b$
     $21 = 112 - 1 * 91$ (Ec. 1)
   - $r_2 = b - q_2 * r_1$
     $7 = 91 - 4 * 21$ (Ec. 2)
4. Una vez se hayan aislado los residuos, se procede a hacer la "sustitución hacia atrás":
   - $7 = 91 - 4 * 21$
     (en la ecuación inicial ya está presente el término $b = 91$)
   - $7 = 91 - 4 * (112 - 1 * 91)$
     (reemplazo de Ec. 2 en Ec. 1)
   - $7 = 91 - 4 * 112 + 4 * 91$
     (se distribuye el paréntesis)
   - $7 = 5 * 91 - 4 * 112$
     (se agrupan términos comunes, ya se "encontró" el término $a = 112$)

   Ahora, se tiene que $av + bw = d$. Es decir, $112v + 91w = 7$. Entonces $v = -4$ y $w = 5$. Por lo que $7 = 112 * (-4) + 91 * 5 = -448 + 455$

Ejercicio 4: $a = -105$ **y** $b = 39$

1. Se aplica el teorema de la división repetidamente hasta que el residuo sea cero.

   - $a = 105$, $b = 39$
     $105 = q_1 * 39 + r_1 = 2 * 39 + 27 = 78 + 27$
   - $b = 39$, $r_1 = 27$
     $39 = q_2 * 27 + r_2 = 1 * 27 + 12 = 27 + 12$
   - $r_1 = 27$, $r_2 = 12$
     $27 = q_3 * 12 + r_3 = 2 * 12 + 3 = 24 + 3$
   - $r_2 = 12$, $r_3 = 3$
     $12 = q_4 * 3 + r_4 = 4 * 3 + 0 = 12 + 0$
   - $r_4 = 0$

2. $r_4 = 0$, entonces, $mcd(-105, 39) = r_3 = d = 3$

3. Luego, se aíslan los residuos:

   - $r_1 = a - q_1 * b$
     $27 = 105 - 2 * 39$ (Ec. 1)
   - $r_2 = b - q_2 * r_1$
     $12 = 39 - 1 * 27$ (Ec. 2)
   - $r_3 = r_1 - q_3 * r_2$
     $3 = 27 - 2 * 12$ (Ec. 3)

4. Una vez se hayan aislado los residuos, se procede a hacer la "sustitución hacia atrás":

   - $3 = 27 - 2 * 12$
   - $3 = 27 - 2 * (39 - 1 * 27)$
     (reemplazo de Ec. 2 en Ec. 3)
   - $3 = 27 - 2 * 39 + 2 * 27$
     (se distribuye el paréntesis)
   - $3 = 3 * 27 - 2 * 39$
     (se agrupan términos comunes, ya se "encontró" el término $b = 39$)
   - $3 = 3 * (105 - 2 * 39) - 2 * 39$
     (reemplazo de Ec. 1 en Ec. 3)
   - $3 = 3 * 105 - 6 * 39 - 2 * 39$
     (se distribuye el paréntesis)
   - $3 = 3 * 105 - 8 * 39$
     (se agrupan términos comunes, ya se "encontró" el término $a = 105$)

   Ahora, se tiene que $av + bw = d$. Es decir, $105v + 39w = 3$. Entonces $v = 3$ y $w = -8$. Por lo que $3 = 105 * 3 + 39 * (-8) = 315 - 312$

4 Ejercicios sobre residuos mínimos

Congruencia

Definición 3. *Sea n un entero positivo, los enteros a y b son congruentes modn si cada uno tiene el mismo residuo en la división por n. Si es así, se escribe:* $a \equiv b \ (mod\ n)$.

Residuo mínimo

Definición 4. *Un residuo mínimo es r, en la siguiente expresión:* $a \equiv r \ (mod\, n)$. *Puede decirse que es el residuo de dividir a entre n. Es decir, $r = a \ mod\ n$.* ***Nota****: Hallar un residuo mínimo puede involucrar el usar congruencias o el hacer el cálculo directo. Todo es cuestión de encontrar patrones y desarrollar un "ojo clínico".*

Normas de congruencia

Si $a \equiv b \ (mod\ n)$ y $c \equiv d \ (mod\ n)$

- $a + c \equiv b + d \ (mod\ n)$
- $a - c \equiv b - d \ (mod\ n)$
- $a * c \equiv b * d \ (mod\ n)$
- $a^m \equiv b^m \ (mod\ n)$

Ejercicios

Calcular los residuos mínimos:

1. $(7 + 3)\ mod\ 6$
2. $(23 - 24)\ mod\ 6$
3. $(601 + 6001)\ mod\ 6$
4. $(7 - 3)\ mod\ 6$
5. $(67 + 68)\ mod\ 6$
6. $(-3 - 19)\ mod\ 6$
7. $(6 + 4)\ mod\ 10$
8. $(14 - 7)\ mod\ 10$
9. $(13 - 15)\ mod\ 10$
10. $(-21 - 17)\ mod\ 10$

11. $(101 + 11 + 1)\ mod\ 10$
12. $(101 - 11 - 1)\ mod\ 10$
13. $17\ mod\ 10$
14. $50\ mod\ 10$
15. $6\ mod\ 10$
16. $-1\ mod\ 10$
17. $-38\ mod\ 10$
18. $17\ mod\ 3$
19. $9\ mod\ 3$
20. $-2\ mod\ 3$
21. $-10\ mod\ 3$
22. $3\ mod\ 3$
23. ¿Qué día de la semana será dentro de 1000 días si el día de hoy es JUEVES?

Ejercicio 1: $7 + 3\ mod\ 6$

- $7 \equiv 1\ (mod\ 6)$
- $3 \equiv 3\ (mod\ 6)$
- $7 + 3 \equiv 1 + 3\ (mod\ 6)$
- $10 \equiv 4\ (mod\ 6)$

Si hacemos el cálculo, $(7 + 3)\ mod\ 6 = 10\ mod\ 6 = 4$

Ejercicio 2: $(23 - 24)\ mod\ 6$

- $24 \equiv 0\ (mod\ 6)$. Nota: como es equivalente con $0\ mod\ 6$, entonces, no necesario incluirlo en cálculos posteriores.
- $23 \equiv 5\ (mod\ 6)$, también, $23 \equiv -1\ (mod\ 6)$
- $23 - 24 \equiv 5 + 0\ (mod\ 6)$
- $-1 \equiv 5\ (mod\ 6)$

Si hacemos el cálculo, $(23 - 24)\ mod\ 6 = -1\ mod\ 6 = 5$

Ejercicio 3: $(601 + 6001)\ mod\ 6$

- $601+6001 = 600+1+6000+1$. Podemos descartar 600 y 6000 del cálculo porque son múltiplos de 6.
- $601 + 6001 \equiv 1 + 1\ (mod\ 6)$
- $6602 \equiv 2\ (mod\ 6)$

Si hacemos el cálculo, $(601 + 6001)\ mod\ 6 = 6602\ mod\ 6 = 2$

Ejercicio 4: $(7 - 3)\ mod\ 6$

- $7 \equiv 1\ (mod\ 6)$
- $-3 \equiv 3\ (mod\ 6)$
- $7 - 3 \equiv 1 + 3\ (mod\ 6)$
- $4 \equiv 4\ (mod\ 6)$

Si hacemos el cálculo, $(7 - 3)\ mod\ 6 = 4\ mod\ 6 = 4$

Ejercicio 5: $(67 + 68)\ mod\ 6$

- 67 y 68 están 1 y 2 pasos "por encima" de 66. Por lo que $67 + 68 = 66 + 66 + 1 + 2$. Entonces, se pueden descartar los dos 66, debido a que son múltiplos de 6. Ergo:
- $67 + 68 \equiv 1 + 2\ (mod\ 6)$
- $135 \equiv 3\ (mod\ 6)$

Si hacemos el cálculo, $(67 + 68)\ mod\ 6 = 135\ mod\ 6 = 3$

Ejercicio 6: $(-3 + -19)\ mod\ 6$

- $-19 = -18 - 1$. Podemos descartar -18 del cálculo porque es múltiplo de 6
- Esto quiere decir que $-19 \equiv -1 \equiv 5 (mod\ 6)$
- También se sabe que $-3 \equiv 3 (mod\ 6)$
- Por lo tanto, $-3 + -19 \equiv 5 + 3 (mod\ 6)$
- Desarrollando $-22 \equiv 8 \equiv 2 (mod\ 6)$

Si hacemos el cálculo, $(-3 + -19)\ mod\ 6 = -22\ mod\ 6 = 2$

Ejercicio 7: $(6+4)\ mod\ 10$

Este ejercicio se puede realizar simplemente haciendo el cálculo directo: $(6+4)\ mod\ 10 = 10\ mod\ 10 = 0$. 10 es múltiplo de 10, por eso el residuo mínimo es 0.

Ejercicio 8: $(14-7)\ mod\ 10$

Este ejercicio se puede realizar simplemente haciendo el cálculo directo: $(14-7)\ mod\ 10 = 7\ mod\ 10 = 7$.

Ejercicio 9: $(13-15)\ mod\ 10$

- $13 = 10+3$ y $15 = 10+5$. Podemos descartar 10 de ambos cálculos porque es múltiplo de 10
- Esto quiere decir que $13 \equiv 3(mod\ 10)$ y $15 \equiv 5(mod\ 10)$
- Por lo tanto, $13-15 \equiv 3-5 \equiv -2(mod\ 10)$
- -2 está a "8 pasos" del siguiente múltiplo de 10 (es decir, -10)

Si hacemos el cálculo, $(13-15)\ mod\ 10 = -2\ mod\ 10 = 8$

Ejercicio 10: $(-21-17)\ mod\ 10$

- $21 = 20+1$ y $17 = 10+7$. Podemos descartar 20 Y 10 de ambos cálculos son múltiplos de 10
- Esto quiere decir que $21 \equiv 1(mod\ 10)$ y $17 \equiv 7(mod\ 10)$
- Por lo tanto, $-21-17 \equiv -1-7 \equiv -8(mod\ 10)$
- -8 está a "2 pasos" del siguiente múltiplo de 10 (es decir, -10)

Si hacemos el cálculo, $(-21-17)\ mod\ 10 = -38\ mod\ 10 = 2$

Ejercicio 11: $(101+11+1)\ mod\ 10$

- $101 = 100+1$ y $11 = 10+1$. Podemos descartar 100 Y 10 de ambos cálculos son múltiplos de 10
- Esto quiere decir que $101 \equiv 11 \equiv 1(mod\ 10)$
- Por lo tanto, $101+11+1 \equiv 1+1+1 \equiv 3(mod\ 10)$

Si hacemos el cálculo, $(101+11+1)\ mod\ 10 = 113\ mod\ 10 = 3$

Ejercicio 12: $(101 - 11 - 1)\ mod\ 10$

- $101 = 100 + 1$ y $11 = 10 + 1$. Podemos descartar 100 Y 10 de ambos cálculos son múltiplos de 10
- Esto quiere decir que $101 \equiv 11 \equiv 1(mod\ 10)$
- Por lo tanto, $101 - 11 - 1 \equiv 1 - 1 - 1 \equiv -1(mod\ 10)$
- -1 está a "9 pasos" del siguiente múltiplo de 10 (es decir, -10)

Si hacemos el cálculo, $(101 - 11 - 1)\ mod\ 10 = 99\ mod\ 10 = 9$

Ejercicio 13: $17\ mod\ 10$

- $17 = 10 + 7$. Podemos descartar 10, ya que es múltiplo de 10
- Esto quiere decir que $17 \equiv 7(mod\ 10)$

Entonces, el residuo mínimo es 7

Ejercicio 14: $50\ mod\ 10$

50 es múltiplo de 10, por lo que el residuo mínimo es 0. Es decir $50 \equiv 10 \equiv 0(mod\ 10)$.

Ejercicio 15: $6\ mod\ 10$

6 no es divisible directamente por 10, ni puede ser descompuesto en sumas que contengan múltiplos de 10 . Esto quiere decir que el residuo mínimo es 6.

Ejercicio 16: $-1\ mod\ 10$

-1 está a "9 pasos" del siguiente múltiplo de 10 (es decir, -10). Por lo que el residuo mínimo es 9. Es decir $-1 \equiv 9(mod\ 10)$.

Ejercicio 17: $-38\ mod\ 10$

- $38 = 30 + 8$. Podemos descartar 30, ya que es múltiplo de 10
- Esto quiere decir que $-38 \equiv -8(mod\ 10)$
- -8 está a "2 pasos" del siguiente múltiplo de 10 (es decir, -10)
- Esto quiere decir que $-38 \equiv -8 \equiv 2(mod\ 10)$

Entonces, el residuo mínimo es 2

Ejercicio 18: $17\ mod\ 3$

- $17 = 15 + 2$. Podemos descartar 15, ya que es múltiplo de 3
- Esto quiere decir que $17 \equiv 2(mod\ 10)$

Entonces, el residuo mínimo es 2

Ejercicio 19: $9\ mod\ 3$

9 es múltiplo de 3, por lo que el residuo mínimo es 0. Es decir $9 \equiv 0(mod\ 3)$.

Ejercicio 20: $-2\ mod\ 3$

-2 está a "1 paso" del siguiente múltiplo de 3 (es decir, -3). Por lo que el residuo mínimo es 1. Es decir $-2 \equiv 1(mod\ 3)$.

Ejercicio 21: $-10\ mod\ 3$

- $10 = 9 + 1$. Podemos descartar 9, ya que es múltiplo de 3
- Esto quiere decir que $-10 \equiv -1(mod\ 10)$
- -1 está a "2 pasos" del siguiente múltiplo de 3 (es decir, -3)
- Esto quiere decir que $-10 \equiv -1 \equiv 2(mod\ 10)$

Entonces, el residuo mínimo es 2

Ejercicio 22: $3\ mod\ 3$

3 es múltiplo de 3, por lo que el residuo mínimo es 0. Es decir $3 \equiv 0(mod\ 3)$.

Ejercicio 23: ¿Qué día de la semana será dentro de 1000 días si el día de hoy es JUEVES?

- Jueves es el día 4 de la semana. La semana tiene 7 días. Y la cantidad de días que pasan son 1000
- Esto puede definirse como $1000 + 4(mod\ 7) = 1004(mod\ 7)$. Hallar el residuo mínimo permitirá identificar el día de la semana
- $1004 = 700 + 304 = 700 + 280 + 24 = 700 + 280 + 21 + 3$
- Podemos descartar 700, 280 y 21, ya que son múltiplos de 7
- Esto quiere decir que $1004 \equiv 3(mod\ 7)$

Entonces, el residuo mínimo es 3. Es decir, el tercer día de la semana. Ergo, si hoy fuese jueves, dentro de 1000 días sería miercoles.