Bitácora Ejercicios Matemáticas Discretas II

Carlos Arturo Murcia Andrade

2023-1

1 Definiciones

Definicion 1. *Una operación binaria se dice* ***asociativa*** *si* $\forall a, b, c \in G$ *tiene* $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Definicion 2. *Un* ***grupo*** *es un conjunto de elementos* G *cuya operación binaria "$*$" es cerrada* ($a, b \in G \to a * b \in G$) *con un elemento especial "e" (conocido como neutro) que:*
$\exists a^{-1} \forall a$, *tal que* $a * a^{-1} = e$
$b * e = e * b = b$
Además, la operación binaria es asociativa.

2 Ejercicio #1

Sea $G = \{a, b, c, d\}$ con la siguiente tabla de multiplicación:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	d

Table 1: Definición de G

Demostrar si la operación "$*$" definida en G es asociativa o no.

Proof. Sea $p = (b * b) * c$, $p \in G$ y sea $q = b * (b * c)$, $q \in G$. Ahora, ¿es $p = q$?

$$\begin{aligned}(b * b) * c &= b * (b * c)\\ d * c &= b * d\\ c &\neq d\end{aligned}$$

Si $c \neq d$, entonces, $(b * b) * c \neq b * (b * c)$. Ergo, $p \neq q$. Y, por lo tanto, la operación "$*$" definida en G **no es asociativa**. $\square$

3 Ejercicio #2

Demostrar que la multiplicación de matrices cuadradas 2x2 es asociativa.

Proof. Sean $A, B, C \in \mathbb{R}_{2x2}$. ¿$(A * B) * C = A * (B * C)$?

$$\left(\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\\ = &\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}B_{11}C_{11} + B_{12}C_{21} & B_{11}C_{12} + B_{12}C_{22}\\ B_{21}C_{11} + B_{22}C_{21} & B_{21}C_{12} + B_{22}C_{22}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
X_{11} &= A_{11}B_{11}C_{11} + A_{12}B_{21}C_{11} + A_{11}B_{12}C_{21} + A_{12}B_{22}C_{21} \\
X_{12} &= A_{11}B_{11}C_{12} + A_{12}B_{21}C_{12} + A_{11}B_{12}C_{22} + A_{12}B_{22}C_{22} \\
X_{21} &= A_{21}B_{11}C_{11} + A_{22}B_{21}C_{11} + A_{21}B_{12}C_{21} + A_{22}B_{22}C_{21} \\
X_{22} &= A_{21}B_{11}C_{12} + A_{22}B_{21}C_{12} + A_{21}B_{12}C_{22} + A_{22}B_{22}C_{22}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(A * B) * C = A * (B * C)$. Es decir, **la multiplicación de matrices cuadradas 2x2 es asociativa**. □

4 Ejercicio #3

Demostrar que los números complejos ($\mathbb{C}$) bajo la multiplicación forman un grupo.

Proof. Sean $p = a + bi \in C$ y $q = c + di \in C$.

Sea $r = p*q = (a+bi)*(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$. Sean $e = ac - bd \in \mathbb{R}$ y $f = ad + bc \in \mathbb{R}$, entonces, $r = p * q = e + fi \in \mathbb{C}$. Ergo, el producto de complejos es una **operación cerrada**.

Ahora, sea $s = p^{-1} = (a + bi)^{-1} \in \mathbb{C}$. Luego, $s * p = p^{-1} * p = (a + bi)^{-1} * (a + bi) = 1 + 0i \in \mathbb{C}$. Entonces, $\forall p \in \mathbb{C}$, $\exists s \in \mathbb{C}$, tal que $s + p = 1$.

Sea $t = 1 + 0i \in \mathbb{C}$. Luego, $t * p = (1 + 0i) * (a + bi) = a + bi \in \mathbb{C}$. Entonces, $\forall p \in \mathbb{C}$, $\exists t \in \mathbb{C}$, tal que $t * p = p$.

Sabemos que $p = a + bi \in \mathbb{C}$, $q = c + di \in \mathbb{C}$, $r = e + fi \in \mathbb{C}$. Ahora

$$\begin{aligned}
(p * q) * r &= ((a + bi) * (c + di)) * (e + fi) = ((ac - bd) + (ad + bc)i) * (e + fi) \\
&= (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p * (q * r) &= (a + bi) * ((c + di) * (e + fi)) = (a * bi) * ((ce - df) + (cf + de)i) \\
&= (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)i
\end{aligned}$$

De esto podemos decir que $(p * q) * r = p * (q * r)$, entonces, la operación de multiplicación es **asociativa**.

Por último, ya que la operación de multiplicación es cerrada y asociativa y existe elemento neutro e inverso, quiere decir que **los números complejos ($\mathbb{C}$) bajo la multiplicación forman un grupo**.

$\square$