

A_1 非零判断

$$f_1^1(x) : x \neq 1$$

A_2 相等

$$f_1^2(x_1, x_2) : x_1 = x_2$$

A_3 \leq

$$f_1^3(x_1, x_2) : x_1 \leq x_2$$

A_3 $>$

谓词逻辑系统

作业参考答案

1. 设 \mathcal{L} 是一阶语言，它有1个个体常元 a_1 ，1个函数符 f_1^2 和1个谓词符 A_1^2 ，设公式 A 为 $(\forall x_1)(A_1^2(x_1, a_1) \rightarrow A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), a_1))$.

(a) 设 \mathcal{L} 的解释为 I ， D_I 是整数集合 \mathbb{Z} ， $\bar{a}_1 = 0$ ， $\bar{f}_1^2(x, y) = x \times y$ ， $\bar{A}_1^2(x, y)$ 为 $x < y$ ，问公式 A 在此解释下的意义是什么？是真是假？

Solution

$$\nexists (x_1 < 0) \rightarrow (x_1^2 < 0)$$

在解释 I 下， $(\forall x_1)(A_1^2(x_1, a_1) \rightarrow A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), a_1))$ 的意义是：

对于任何整数 x_1 ，如果 $x_1 < 0$ ，则 $(x_1)^2 < 0$ 。

为假。例： $x_1 = -1$ 时， $(-1)^2 = 1 > 0$ 。

(b) 把解释 I 稍作修改, 记为 I' , 设 $\overline{f_1^2}(x, y) = x + y$, 其余不变, 问公式 A 在此解释 I' 下的意义是什么? 是真是假?

Solution

$$\forall x_1 (x_1 < 0) \rightarrow 2x_1 < 0$$

在解释 I' 下, $(\forall x_1)(A_1^2(x_1, a_1) \rightarrow A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), a_1))$ 的意义是:

对于任何整数 x_1 , 如果 $x_1 < 0$, 则 $2x_1 < 0$.

为真.

(c) 把解释 I 稍作修改, 记为 I'' , 设 $\overline{A_1^2}(x, y)$ 表示 $x = y$, 其余不变, 问公式 A 在此解释 I'' 下的意义是什么? 是真是假?

Solution

在解释 I'' 下, $(\forall x_1)(A_1^2(x_1, a_1) \rightarrow A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), a_1))$ 的意义是:

对于任何整数 x_1 , 如果 $x_1 = 0$, 则 $(x_1)^2 = 0$.

为真.

2. 设一阶语言 \mathcal{L} 中的公式 A 为 $(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^1(f_1^1(x_1)))$, 公
式 B 为 $(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^2(x_2, x_1))$, 试分别作出不同的解释, 使 A 与 B 有时为
真, 有时为假. ANB

解: I, D_I 是整数集 \mathbb{Z} .

Solution

例如, 可以令 \mathcal{L} 的解释为 I, D_I 是整数集合 \mathbb{Z} .

1) A 与 B 为真

令 $\overline{A_1^1}(x)$ 为 $x > 0$, $\overline{f_1^1}(x) = x + 1$, $\overline{A_1^2}(x, y)$ 为 $x = y$.

公式 A 表示“对于任意整数 x_1 , 如果 $x_1 > 0$, 则 $x + 1 > 0$.”为真.

公式 B 表示“对于任意整数 x_1 , 如果 $x_1 = x_2$, 则 $x_2 = x_1$.”为真.

2) A 与 B 为假

令 $\overline{A_1^1}(x)$ 为 $x > 0$, $\overline{f_1^1}(x) = x - 1$, $\overline{A_1^2}(x, y)$ 为 $x < y$.

公式 A 表示“对于任意整数 x_1 , 如果 $x_1 > 0$, 则 $x - 1 > 0$.”为假.

例: $x = 1$ 时, $x - 1 = 0$.

公式 B 表示“对于任意整数 x_1 , 如果 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 < x_1$.”为假.

例: 取 $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Domain of Interpretation

3.证明:在任何一阶语言 \mathcal{L} ,公式 $(\forall x_i)A(x_i) \rightarrow A(x_i)$ 在 \mathcal{L} 的任何解释下都为真.

Proof.

(说明: 根据题意, 应理解为 $(\forall x_i A(x_i)) \rightarrow A(x_i)$ 而非 $\forall x_i (A(x_i) \rightarrow A(x_i))$. 下面只对第一种理解方式做出解释, 另一种相似.)

对任意解释 I 下的任意赋值 v , 要么有 $v \models \forall x_i A(x_i)$, 要么有 $v \models \neg \forall x_i A(x_i)$.
若 $v \models \neg \forall x_i A(x_i)$, 已经得结论. 若 $v \models \forall x_i A(x_i)$, 则对任意的 $x_i \in D_I$, $A(x_i)$ 成立.
易知对任意的 v 的 x_i 等价 v' , 均满足 $v' \models A(x_i)$, 而 v 是自己的 x_i 等价.

无论如何, 均有: 对任意解释 I 下的任意赋值 v , $v \models \forall x_i A(x_i) \rightarrow A(x_i)$. 所以,
 $I \models \forall x_i A(x_i) \rightarrow A(x_i)$. □

丁

\mathcal{L} -阶语言.

1. 证明: \simeq 是公式集 $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ 的一个同余关系.

代数系统下集合的等价关系

Proof.

1.

根据 ' \simeq ' 的定义, 易知: $A \simeq B \iff B \simeq A$ 并且 $A \simeq A$.

对称

自反

若 $A \simeq B, B \simeq C$, 则有 $\models A \rightarrow B, \models B \rightarrow C$

所以 $\models A \rightarrow C$, 同理有: $\models C \rightarrow A$

传递

所以 $A \simeq C$

综上, ' \simeq ' 是一个等价关系.

2.

1) 证: 若 $A \simeq B$, 则 $\neg A \simeq \neg B$

$\because A \simeq B$

$\therefore \models A \iff \models B$

用反证法易知: $\neg A \simeq \neg B$ ($\forall v$, 若 $v \models \neg A$ 且 $v \models B$. 则 $v \models A$ 与 $v \models A$ 矛盾).

2) 证: 若 $A \simeq B$ 且 $C \simeq D$, 则 $A \rightarrow C \simeq B \rightarrow D$.

若 $\models A \rightarrow C$, 则对任意赋值 v , 若 $v \models A$, 则 $v \models C$.

$\because A \simeq B, C \simeq D$

\therefore 对任意 v , 若 $v \models A$, 则 $v \models B, v \models C, v \models D$.

Proof (Cont.)

\therefore 有 $v \models B \rightarrow D$

若 $v \models \neg A$, 则 $v \models \neg B$,

$\therefore v \models B \rightarrow D$

\therefore 若 $\models A \rightarrow C$, 则 $\models B \rightarrow D$

同理可得: 若 $\models B \rightarrow D$, 则 $\models A \rightarrow C$

$\therefore A \rightarrow C \simeq B \rightarrow D$.

3) 证: $A \simeq B$, 则 $(\forall x_i)A \simeq (\forall x_i)B$.

若 $\models (\forall x_i)A$, 则对任意解释 I , 有 $I \models A$ 当且仅当 $I \models (\forall x_i)A$.

$\therefore \models A$

$\therefore A \simeq B$, $\therefore \models B$, \therefore 同理有 $\models (\forall x_i)B$.

\therefore 若 $\models (\forall x_i)A$, 则 $\models (\forall x_i)B$.

同理有: 若 $\models (\forall x_i)B$, 则 $\models (\forall x_i)A$.

$\therefore (\forall x_i)A \simeq (\forall x_i)B$.

4) 证: 若 $A \simeq B$, 则 $(\exists x_i)A \simeq (\exists x_i)B$

若 $\models (\exists x_i)A$, (**反证法**) 假设存在解释 I 下的赋值 v , 使得 $v \not\models \exists x_i B$.

那么对任意 v 的 i -等价 v' , 有 $v' \not\models B$.

\therefore 有 $v' \models \neg B$.

$\therefore A \simeq B$, $\therefore v' \models \neg A$, $\therefore v' \not\models A$

Proof (Cont.)

但这与 $\models \exists x_i A$ 矛盾(因为 v' 是解释 I 下的任意 i -等价)

$\therefore \models \exists x_i B$

同理可得: 若 $\models \exists x_i B$, 则 $\models \exists x_i A$.

$\therefore (\exists x_i)A \simeq (\exists x_i)B$

综上, \simeq 是一个同余关系.

2. 设 A, B, C 是谓词公式, 则:

(a) $A \vee B \simeq B \vee A$

Proof.

对任意 I 下的任意 v , 若 $v \models A \vee B$, 则 $v \models A$ 或 $v \models B$

$\therefore v \models B$ 或 $v \models A$

$\therefore v \models B \vee A$

反之亦然.

$\therefore \models A \vee B \Leftrightarrow \models B \vee A$

$\therefore A \vee B \simeq B \vee A.$



2. 设 A, B, C 是谓词公式, 则:

(b) $A \wedge B \simeq B \wedge A$

Proof.

对任意 I 下的任意 v , 若 $v \models A \wedge B$, 则 $v \models A$ 且 $v \models B$

$\therefore v \models B$ 且 $v \models A$

$\therefore v \models B \wedge A$

反之亦然.

$\therefore \models A \wedge B \Leftrightarrow \models B \wedge A$

$\therefore A \wedge B \simeq B \wedge A.$



2. 设 A, B, C 是谓词公式, 则:

(c) $A \rightarrow B \simeq \neg A \vee B$

Proof.

对任意 I 下的任意 v , 若 $v \models A \rightarrow B$,

1 若 $v \models A$, 则 $v \models B$

$\therefore v \models \neg A \vee B$.

2 若 $v \models \neg A$, 则 $v \models \neg A \vee B$.

反之亦然.

$\therefore \models A \rightarrow B \Leftrightarrow \models \neg A \vee B$

$\therefore A \rightarrow B \simeq \neg A \vee B$.



2. 设 A, B, C 是谓词公式, 则:

(d) $(\forall x_i)A \simeq \neg(\exists x_i)\neg A$

Proof.

对任意 I 下的任意 v , 若 $v \models (\forall x_i)A$, 则 $v \models \neg(\exists x_i)\neg A$

若 $v \not\models \neg(\exists x_i)\neg A$, 则 $v \models (\exists x_i)\neg A$

\therefore 存在一个 v 的 x_i 等价 v' , $v' \models \neg A$, 即 $v \not\models A$, 与 $v \models (\forall x_i)A$ 矛盾.

$\therefore v \models \neg(\exists x_i)\neg A$

反之亦然.

$\therefore v \models (\forall x_i)A \leftrightarrow v \models \neg(\exists x_i)\neg A$

$\therefore (\forall x_i)A \simeq \neg(\exists x_i)\neg A$.



MP 规则: $\models A \rightarrow B$ 且 $\models A$ 可以推出 $\models B$

HS 规则: $\models A \rightarrow B$ 且 $\models B \rightarrow C$ 可以推出 $\models A \rightarrow C$

1. 证明: 设 x_i 不在 A 中自由出现, 则 $\vdash (\exists x_i)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\exists x_i)B)$.

Proof.

$$[\vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)]$$

1. $\{A, A \rightarrow B\} \vdash B$
 2. $B \vdash (\exists x_i)B$
 3. $\{A, A \rightarrow B\} \vdash (\exists x_i)B$
 4. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\exists x_i)B)$
 5. $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\exists x_i)B)) \rightarrow$
 $(\neg(A \rightarrow (\exists x_i)B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$
 6. $\neg(A \rightarrow (\exists x_i)B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$
 7. $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x_i)\neg(A \rightarrow B)$
 8. $\neg(A \rightarrow (\exists x_i)B) \rightarrow (\forall x_i)\neg(A \rightarrow B)$
 9. $\neg(A \rightarrow (\exists x_i)B) \rightarrow (\forall x_i)\neg(A \rightarrow B)$
 $\rightarrow (\neg(\forall x_i)\neg(A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow (\exists x_i)B)$
 10. $(\exists x_i)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\exists x_i)B)$
- $\therefore \vdash (\exists x_i)(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (\exists x_i)B)$.

HS(1,2)

演绎定理 (未使用过Gen规则)

K3

MP(4,5)

~~Gen规则~~

HS(6,7)

K3

MP(8,9)

$$\frac{A}{(\forall x_i)A}$$

$$\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$



2.化下列各式为和它们可证等价的前束范式:

$$(a) (\exists x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$$

Solution

$$\begin{aligned} & (\exists x_1)A_1^1(x_1) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \\ \sim & (\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

$$(b) (\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$$

Solution

$$\begin{aligned} & (\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2) \\ \sim & (\forall x_2)(\exists x_1)(A_1^2(x_1, x_3) \rightarrow A_1^2(x_4, x_2)) \end{aligned}$$

$$(c) (\exists x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow ((\forall x_2)A_1^1(x_2) \rightarrow (\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$$

Solution

$$\begin{aligned} & (\exists x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow ((\forall x_2)A_1^1(x_2) \rightarrow (\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3)) \\ \sim & (\forall x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((A_1^1(x_1) \rightarrow A_1^2(x_1, x_4)) \rightarrow (A_1^1(x_2) \rightarrow A_1^2(x_4, x_3))) \end{aligned}$$