模态逻辑系统

作业参考答案

W：集合、元素的世界

R：Relationship

L：标签函数：2^{AP}

1.考察Kripke模型$M = (W, R, L)$，其中:

$W = \{a, b, c, d, e\}, R = \{(a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (d, e), (e, a)\}$,

以及$L(a) = \{p\}, L(b) = \{p, q\}, L(c) = \{p, q\}, L(d) = \{q\}, L(e) = \emptyset$.

1) 画出M的图

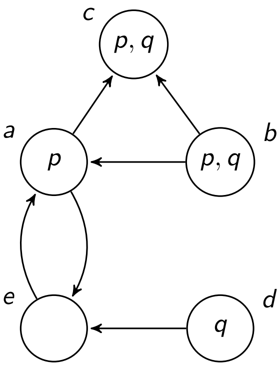

Figure: M的图

2) 确定下面的公式那些世界是真的

		Solution
(a)	$\Box\neg p \wedge \Box\Box\neg p$	$\{c\}$
(b)	$\Diamond q \wedge \neg\Box q$	$\{a, b\}$
(c)	$\Diamond p \vee \Diamond q$	$\{a, b, e\}$
(d)	$\Box p \vee \Box\neg p$	$\{b, c, d, e\}$
(e)	$\Box(p \vee \neg p)$	$\{a, b, c, d, e\}$

$\Box$ — 必然

$\Diamond$ — 可能

2.表明下面公式是逻辑有效的

(a) $\Box(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\phi \wedge \Box\psi)$

Solution

对任意模型$\mathcal{M} = \langle W, R, L\rangle$的任意世界$x \in W$, 若$x \Vdash \Box(\phi \wedge \psi)$
当且仅当$\forall y$, 若$(x, y) \in R$, 则$y \Vdash \phi \wedge \psi$
当且仅当$\forall y$, 若$(x, y) \in R$, 则$y \Vdash \phi$ 且$y \Vdash \psi$
当且仅当$\forall y$, 若$(x, y) \in R$, 则$y \Vdash \phi$ 并且
$\forall y$, 若$(x, y) \in R$, 则$y \Vdash \psi$
当且仅当$x \Vdash \Box\phi$ 且$x \Vdash \Box\psi$
当且仅当$x \Vdash \Box\phi \wedge \Box\psi$

2.表明下面公式是逻辑有效的

(b) $\Diamond(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi)$

Solution

对任意模型$\mathcal{M} = \langle W, R, L\rangle$的任意世界$x \in W$, 若$x \Vdash \Diamond(\phi \vee \psi)$
当且仅当$\exists y, (x, y) \in R$ 且$y \Vdash \phi \vee \psi$
当且仅当$\exists y, (x, y) \in R$ 且
$y \Vdash \phi$ 或$y \Vdash \psi$
当且仅当$\exists y, (x, y) \in R$ 且$y \Vdash \phi$
或者
$\exists y, (x, y) \in R$ 且$y \Vdash \psi$
当且仅当$x \Vdash \Diamond\phi$ 或者$x \Vdash \Diamond\psi$
当且仅当$x \Vdash (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi)$

2.表明下面公式是逻辑有效的

(c) $\Box\top \leftrightarrow \top$

Solution

对任意模型$\mathcal{M} = \langle W, R, L\rangle$的任意世界$x \in W$,

1) 若$x \Vdash \Box\top$

$\because x \Vdash \top$永远成立

$\therefore x \Vdash \top$

2) 若$x \Vdash \top$

$\because \forall y$, 若$(x, y) \in R$, 则$y \Vdash \top$

$\therefore x \Vdash \Box\top$

综上, $\Box\top \leftrightarrow \top$成立

2.表明下面公式是逻辑有效的

(d) $\Diamond\top \to (\Box\phi \to \Diamond\phi)$

Solution

对任意模型$\mathcal{M} = \langle W, R, L\rangle$的任意世界$x \in W$,
若$x \Vdash \Diamond\top$
$\therefore \exists y, (x, y) \in R$ 且$y \Vdash \top$
又若$x \Vdash \Box\phi$
$\therefore \forall y,$ 若$(x, y) \in R$ 则$y \Vdash \phi$
$\therefore \exists y, (x, y) \in R$ 且$y \Vdash \phi$
$\therefore x \Vdash \Diamond\phi$
$\therefore x \Vdash \Box\phi \to \Diamond\phi$
$\therefore x \Vdash \Diamond\top \to (\Box\phi \to \Diamond\phi)$

1.证明公理B和公理5。

Proof.

1) 公理B:

若$x \Vdash \phi$

$\forall y \in W$, 若$(x, y) \in R$

$\because R$ 对称

$\therefore (y, x) \in R$

$\therefore \exists z, (y, z) \in R$ 且$z \Vdash \phi$ (z 就是x)

$\therefore y \Vdash \Diamond\phi$

$\therefore x \Vdash \Box\Diamond\phi$

2) 公理5:

$\forall x \in W$, 若$x \Vdash \Diamond\phi$

$\therefore y, (x, y) \in R$ 且$y \Vdash \phi$

$\because R$ 是欧式的

$\therefore (z, y) \in R$

$\therefore z \Vdash \Diamond\phi$

$\therefore x \Vdash \Box\Diamond\phi$

$\Box$

2.定义可达关系R使得下面公式成立：

(a) $\phi \to \Box\phi$
R 是自反的且函数的.

Proof.

若$x \Vdash \phi$
$\because x$ 是自反的
$\therefore (x, x) \in R$
又$\because R$ 是函数的
$\therefore x$ 是唯一满足$(x, x) \in R$ 的世界
$\therefore x \Vdash \Box\phi$

$\Box$

(b) $\Box\bot$
R必为空集. 若不, 设$(x, y) \in R$, 因为$y \nVdash \bot$, 所以$x \nVdash \Box\bot$.

(c) $\Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$

1) R可以是函数的

Proof.

若$x \vDash \Diamond\Box\phi$

$\therefore \exists y, (x, y) \in R$ 且$y \vDash \Box\phi$ (1)

$\therefore \forall z$, 若$(y, z) \in R$, 则$z \vDash \phi$ (2)

$\because R$是函数的

$\therefore$ (1) 中的y是唯一的, (2)中的z必然存在

$\therefore y \vDash \Diamond\phi$

$\therefore x \vDash \Box\Diamond\phi$

$\Box$

(c) $\Diamond\Box\phi \to \Box\Diamond\phi$

2) R可以是对称的

Proof.

若$x \vDash \Diamond\Box\phi$

$\therefore \exists y, (x, y) \in R$ 且$y \vDash \Box\phi$

$\because R$ 对称

$\therefore (y, x) \in R$

$\forall z$, 若$(y, z) \in R$ 则$z \vDash \phi$, 所以$x \vDash \phi$ (令$z = x$)

$\forall p$, 若$(x, p) \in R$, 则$(p, x) \in R$, 则$p \vDash \Diamond\phi$

$\therefore x \vDash \Box\Diamond\phi$

$\square$

3.从自己的研究中，找到（特殊）模态逻辑可以表达（描述）的例子。

略.