习题四 10.24

一、P26 .2

证明：$\phi U \psi \equiv \psi R(\phi \vee \psi) \wedge F\psi$

设 $A=\{\pi \mid \exists i \geq 1, \pi^i \models \psi, \forall j=1,2,\dots,i-1, \pi^j \models \phi\}$,

$B=\{\pi \mid ((\exists i \geq 1, \pi^i \models \psi, \forall j=1,2,\cdots,i, \pi^j \models \phi \vee \psi) \vee$

$(\forall k \geq 1, \pi^k \models \phi \vee \psi)) \wedge \cancel{(\exists i \geq 1, \pi^i} (\exists s \geq 1, \pi^s \models \psi)\}$

①证 $A \subseteq B$

若 $\pi \in A$，则 $\exists i \geq 1, \pi^i \models \psi, \forall j=1,2,\dots,i-1, \pi^j \models \phi$.

则 $\pi^i \models \phi \vee \psi$ 且 $\forall j=1,2,\dots i-1$，有 $\pi^j \models \phi \vee \psi$

即 $\pi \in B$，故 $A \subseteq B$.

②证 $B \subseteq A$

若 $\pi \in B$，则 $\exists s \geq 1, \pi^s \models \psi$

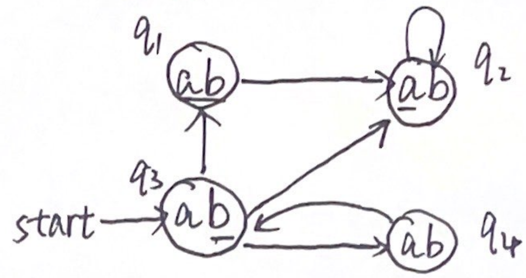
(1) 若 $\forall p, \pi^p \models \phi \vee \psi$，令 p_0 是使 $\pi^{p_0} \models \psi$ 最小数，故令 $i=\min(p_0, s)$，则 $\pi \in A$.

(2) 若 $\exists k_0, \pi^{k_0} \models \psi, \forall j=1,2,\cdots,k_0, \pi^j \models \phi \vee \psi$ 则 $\pi \in A$.

综上 $A=B$，故 $\phi U \psi \equiv \psi R(\phi \vee \psi) \wedge F\psi$.

二、P26 3.

依据下图系统，考虑如下 LTL 公式



(a) 找到一条从 q_3 出发的路，满足全部公式

1. $G a$ 2. $a U b$ 3. $a U X(a \wedge \neg b)$ 4. $X \neg b \wedge G(\neg a \vee \neg b)$

5. $X(a \wedge b) \wedge F(\neg a \wedge \neg b)$

(1) $q_3 q_4 q_3 q_4 \cdots$ （q_3、q_4 总是满足 a）

(2) $q_3 q_2 q_2 q_2 \cdots$ （q_3 满足 a，直到 q_2 满足 b）

(3) $q_3 q_4 q_3 q_2 q_2 \cdots$ （q_3 满足 $(a \wedge \neg b)$ 之后要满足 $\neg a$，故 q_3 后为 q_2 循环，开始 q_3 到 q_4 再回到 q_3 满足下一个状态 $(a \wedge \neg b)$）.

(4) $q_3 q_1 q_2 q_2 \cdots$ （下一个状态满足 $\neg b$，故是 $q_3 \to q_1$，之后一直 $(\neg a \wedge \neg b)$ 故进入 q_2 循环）

(5) $q_3 q_4 q_3 q_1 q_2 \cdots$ （下一个状态 $(a \wedge b)$ 故是 $q_3 \to q_4$，将来存在 $(\neg a \wedge \neg b)$ 故是 $q_3 \to q_1$，最后进入 q_2 循环）

(b) 确定是否有 $M, q_3 \vDash \phi$

(1) 没有

(2) 没有

(3) 没有

(4) 没有

(5) 没有

(c) 若将 $\underline{a}$ 和 $\underline{b}$ 解释为 a 和 b 的非，并表示通信协议中的发射信息，而 a, b 为接受信息，解释这些公式的具体含义。

(1) 任何状态下都接收 a.

(2) 一直接收 a，直到接收 b，

(3) 一直接收 a，直到某状态的下个状态接收a且发射b

(4) 下个状态发射b且对任何状态不是发射a就是发射b.

(5) 某个状态下个状态接收 a 和b，并在将来某个状态发射a和b.