习题二　1.22

1) 证

1. $\vdash A\to(B\to(A\to B))$.

证明

① $B\to(A\to B)$　　L_1

② $B\to(A\to B)\to(A\to(B\to(A\to B)))$　　L_1

③ $A\to(B\to(A\to B))$.　　MP(1,2)　证毕.

2. $\vdash(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$

根据演绎定理，即证 $\{B\to C\}\vdash(A\to B)\to(A\to C)$

① $B\to C$　　T

② $(B\to C)\to(A\to(B\to C))$　　L_1

③ $A\to(B\to C)$　　MP(1,2)

④ $(A\to B)\to(A\to C)$　　L_2　　证毕

3. $\vdash(A\to(A\to B))\to(A\to B)$.

根据演绎定理，即证 $\{A, A\to(A\to B)\}\vdash B$

① A　　T

② $A\to(A\to B)$　　T

③ $A\to B$　　MP(1,2)

④ B　　MP(1,3)

得证 $(A\to(A\to B))\to(A\to B)$

(2) 试证：

1、证 $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$

根据演绎定理，即证 $\{(A\to(B\to C)), B\}\vdash(A\to C)$

① $B\to(A\to B)$ L_1

② B T

③ $A\to B$ $MP(1,2)$

④ $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$ L_2

⑤ $A\to(B\to C)$ T

⑥ $(A\to B)\to(A\to C)$ $MP(4,5)$

⑦ $A\to C$ $MP(3,6)$

得证 $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$

证 $(B\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$

同理根据演绎定理，即证 $\{(B\to(A\to C)), A\}\vdash(B\to C)$

故 $(A\to(B\to C))\rightleftarrows(B\to(A\to C))$

2. 证 $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

根据演绎定理即证 $\{(A \to (A \to B)), A\} \vdash B$

① A T

② $A \to (A \to B)$ T

③ $A \to B$ MP(1,2)

④ B MP(1,3) 得证.

证 $(A \to B) \to (A \to (A \to B))$

根据 L_1 得证

故 $(A \to (A \to B)) \rightleftarrows (A \to B)$.

P40

1.

(a) $\vdash (\neg A \to A) \to A$

$(\neg A \to A) \to A = (A \vee A) \to A = A \to A$

故 $\vDash (\neg A \to A) \to A$ 根据L的完备性定理,

可得 $\vdash (\neg A \to A) \to A$

(b) $\vdash \neg(A \to B) \to (B \to A)$

$\neg(A \to B) \to (B \to A) = \neg(\neg A \vee B) \to (\neg B \vee A)$

$= \neg(A \wedge (\neg B)) \vee (\neg B \vee A) = \neg A \vee B \vee \neg B \vee A$ 恒真

故根据完备性定理可得 $\vdash \neg(A \to B) \to (B \to A)$

(c) $((A\vee B)\to C)\approx(A\to C)\wedge(B\to C)$

A	B	C	$(A\vee B)\to C$	$(A\to C)\wedge(B\to C)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$\because V((A\vee B)\to C) = V((A\to C)\wedge(B\to C))$

即 $\models((A\vee B)\to C)\to((A\to C)\wedge(B\to C))$

$\models((A\to C)\wedge(B\to C))\to((A\vee B)\to C)$

故 $((A\vee B)\to C)\approx(A\to C)\wedge(B\to C)$

(d) $((A\wedge B)\to C)\approx(A\to C)\vee(B\to C)$

可证等价即 $\vdash((A\wedge B)\to C)\to((A\to C)\vee(B\to C))$ 设为X 且

$\vdash((A\to C)\vee(B\to C))\to((A\wedge B)\to C)$ 设为Y

A	B	C	X	Y
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$\because\ \models X$ 且 $\models Y$

故根据完备性定理

得 $\vdash X$ 且 $\vdash Y$

即得

$((A\wedge B)\to C)\approx(A\to C)\vee(B\to C)$

2. 证明:

①证若 $\Gamma\vdash A$，则 $\Gamma\models A$.

因为 $\Gamma\vdash A$，由演绎定理得 $\vdash\Gamma\to A$

由可靠性得 $\models\Gamma\to A$ 由演绎定理逆定理得

$\Gamma\models A$，得证.

②同上利用演绎定理即完备性定理

可证若 $\Gamma\models A$，则 $\Gamma\vdash A$.

故得证 $\Gamma\vdash A$ 当且仅当 $\Gamma\models A$.