计算理论

作业参考答案

1.构造确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

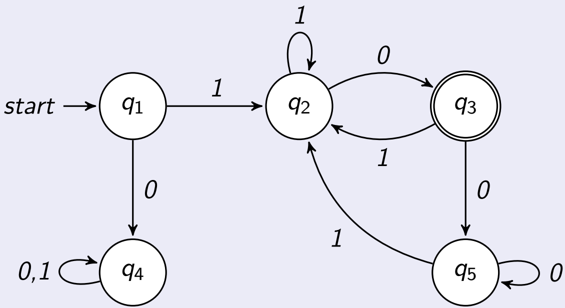
(a) $\{w|w$由1开头，由一个0结尾$\}$

Solution

构造自动机$M=\{Q,\Sigma,\delta,q_1,F\}$，其中：$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$, $\Sigma=\{0,1\}$, $F=\{q_3\}$

	0	1
q_1	q_4	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_5	q_2
q_4	q_4	q_4
q_5	q_5	q_2

Table: δ定义



1.构造确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

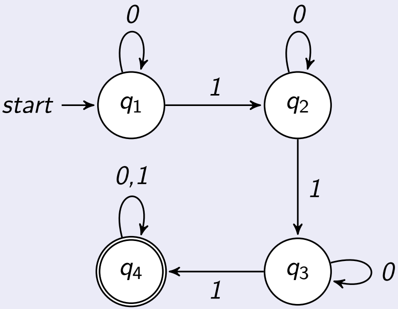
(b) $\{w|w$至少包含3个1$\}$

Solution

构造自动机$M=\{Q,\Sigma,\delta,q_1,F\}$，其中：$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$, $\Sigma=\{0,1\}$, $F=\{q_4\}$

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_3
q_3	q_3	q_4
q_4	q_4	q_4

Table: δ定义



1.构造确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

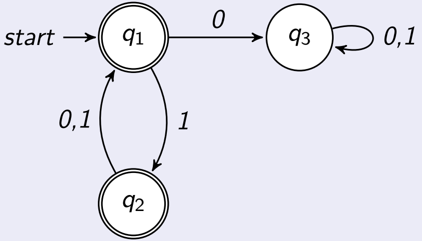
(c) $\{w|w$在奇数位置是1$\}$

Solution

构造自动机$M=\{Q,\Sigma,\delta,q_1,F\}$，其中：$Q=\{q_1,q_2,q_3\}$, $\Sigma=\{0,1\}$, $F=\{q_1,q_2\}$

	0	1
q_1	q_3	q_2
q_2	q_1	q_1
q_3	q_3	q_3

Table: δ定义



1.构造确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

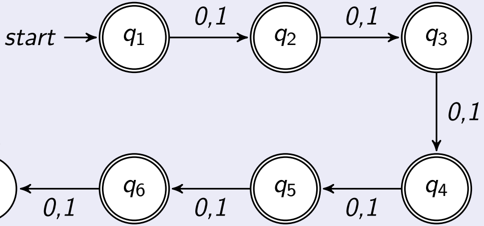
(d) $\{w|w$的长度至多为5$\}$

Solution

构造自动机$M=\{Q,\Sigma,\delta,q_1,F\}$，其中：$Q=\{q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6,q_7\}$，$\Sigma=\{0,1\}$，$F=\{q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6\}$

	0	1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_3	q_3
q_3	q_4	q_4
q_4	q_5	q_5
q_5	q_6	q_6
q_6	q_7	q_7
q_7	q_7	q_7

Table: δ定义



2.构造非确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

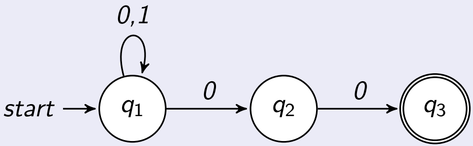
(a) $\{w|w$以00结尾$\}$并且仅有3个状态

Solution

构造自动机$N = \{Q, \Sigma, \delta, q_1, F\}$，其中：$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$,$F = \{q_3\}$

	0	1	ε
q_1	$\{q_1, q_2\}$	q_1	$\emptyset$
q_2	q_3	$\emptyset$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Table: δ定义



2.构造非确定自动机分别能识别下面的语言，其中字母集为{0,1}

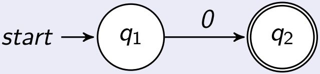
(*b*) {0}仅有2个状态

Solution

构造自动机$N=\{Q,\Sigma,\delta,q_1,F\}$，其中：$Q=\{q_1,q_2\}$, $\Sigma=\{0,1\}$,$F=\{q_2\}$

	0	1	ε
q_1	q_2	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Table: δ定义



3. 证明非确定自动机可以等价地转换为确定自动机.

Proof.

设非确定自动机$N=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$识别语言$A$, 即$N|\!\!\rightarrowtail A$. 构造确定自动机$M=(Q',\Sigma,\delta',q_0',F')$如下:

1) $Q'=2^Q$
2) $\delta':Q'\times\Sigma\rightarrow Q'$, $\delta'(R,a)=\{q\in Q\mid q\in E(\delta(r,a))$ 对某个$r\in R\}$
3) $q_0'=E(\{q_0\})$
4) $F'=\{R\in Q'\mid R$至少包含N的一个终止状态$\}$

下面运用数学归纳法证明$M|\!\!\rightarrowtail A$:
对任意$\omega\in A$, 设存在一个序列$y_1y_2...y_m=\omega$能被N识别, 即$N|\!\!\rightarrowtail y_1y_2...y_m$.

* 先考虑y_1, 设$f=q_0'$. 若$y_1=\epsilon$, 则$\emptyset\neq\delta(q_0,y_1)=\delta(q_0,\epsilon)\subseteq E(\{q_0\})=q_0'=g$.
若$y_1\neq\epsilon$, 则根据M的定义有$\emptyset\neq\delta(q_0,y_1)\subseteq\delta'(q_0',y_1)$
$=\{q\in Q\mid q\in E(\delta(r,y_1))$对某个$r\in q_0'\}=g$.

所以存在这样的$f,g\in Q'$, 满足$\delta'(f,y_1)=g$ 或$f=g=q_0'$, 并且$\{q\in Q\mid\delta(q,y_1)\neq\emptyset\}=\{q_0\}\subseteq f$.

若$q_0\in F$, 则$q_0'\in F'$ 因为$q_0\in E(q_0)=q_0'$.

Proof(Cont.)

* 现假设对于y_{k-1}，存在$f_{k-1}, g_{k-1} \in Q'$ 使得$\delta'(f_{k-1}, y_{k-1}) = g_{k-1}$ 或$f_{k-1} = g_{k-1}$，并且$\{q \in Q \mid \ \delta(q, y_{k-1}) \neq \emptyset\} \subseteq f_{k-1}$.
  设$Q_k = \bigcup_{q \in f_{k-1}} \delta(q, y_{k-1})$. 易知$Q_k \subseteq g_{k-1}$. 设$f_k = g_{k-1}$.

  若$y_k \neq \epsilon$ 根据M的定义，有$\emptyset \neq \bigcup_{q_k \in Q_k} \delta(q_k, y_k) \subseteq \delta'(g_{k-1}, y_k)$
  $= \{q \in Q \mid q \in E(\delta(r, y_k))$对某个$r \in g_{k-1}\} = g_k$.
  若$y_k = \epsilon$，令$g_k = g_{k-1}$. 根据M的定义，有$\emptyset \neq \bigcup_{q_k \in Q_k} \delta(q_k, \epsilon) \subseteq g_{k-1}$.

  事实上，对于上述y_k的两种情况，易知$\{q \mid \delta(q, y_k) \neq \emptyset\} \subseteq f_k = g_{k-1}$. 因为对于任意$q \in \{q \mid \delta(q, y_k) \neq \emptyset\}$，由于$N$接受$\ldots y_{k-1} y_k \ldots$，所以必存在$q' \in \{q \in Q \mid \delta(q, y_{k-1}) \neq \emptyset\} \subseteq f_{k-1}$ 使得$q \in \delta(q', y_{k-1})$. 所以$q \in g_{k-1}$.

  所以无论如何,存在这样的$f_k, g_k \in Q'$，使得$\delta(f_k, y_k) = g_k$ 或$f_k = g_k$，并且有$\{q \in Q \mid \delta(q, y_k) \neq \emptyset\} \subseteq f_k$.

  由上述的证明过程易知若$\delta(q_k, y_k) \subseteq F$ $(q_k \in Q_k)$，我们有$g_k \in F'$.

Proof(Cont.)

由归纳法我们证明了对于一切y_n $(n \leq m)$, 存在$f_n, g_n \in Q'$, 满足$\delta'(f_n, y_n) = g_n$或$f_n = g_n$, 且$g_m \in F'$. 由以上证明易知所有的令$f_n = g_n$成立的y_n恰好都是ϵ. 在原序列$y_1 y_2 \ldots y_m$中去掉那些$y_n = \epsilon$, 我们得到序列$z_1 z_2 \ldots z_p$, 显然M中有这样的一个状态序列$q_0 q_1 \ldots q_l$接受它(若$g_m \neq q_l$, 不影响$q_l \in F$, 因为我们去掉的那些状态q_{i+1}都满足$q_i = q_{i+1}$, $i \geq 0$). 所以$M \models\!\!\!\to z_1 z_2 \ldots z_p$且$z_1 z_2 \ldots z_p = y_1 y_2 \ldots y_m = \omega$. 所以$M \models\!\!\!\to \omega$.

因为$\omega \in A$是任意的, 所以$M \models\!\!\!\to A$.

1. 证明: 上下文无关语言在语言的并运算、链接运算以及Kleene星运算是封闭的.

Proof.

设$G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ 和$G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$为任意两个上下文无关文法.

1) 并运算:

构造$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R, S)$, 其中$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}$. 下面证明: $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)$.
设$w \in \mathcal{L}(G_1)$, 则G_1中存在一个序列$S_1 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow ... \Rightarrow P_n = w$ 生成w, 记作:
$S_1 \stackrel{*}{\Rightarrow} w$.
显然G中存在一个序列$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow ... \Rightarrow P_n = w$ 生成w, 即$S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$, 所以$w \in \mathcal{L}(G)$.
G_2同理.

反之, 对于任意$w \in \mathcal{L}(G)$, 设其生成序列为$S \Rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_2 \Rightarrow ... \Rightarrow Q_n = w$. 易知$Q_1 = S_1$ 或$Q_1 = S_2$. 所以w 也能被G_1 或G_2 接受, 即$w \in \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)$.

综上, $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)$.

Cont.

2) 链接运算:

构造$G=(V_1\cup V_2\cup\{S\},\Sigma_1\cup\Sigma_2,R,S)$, 其中$R=R_1\cup R_2\cup\{S\to S_1S_2\}$. 下面证明: $\mathcal{L}(G)=\mathcal{L}(G_1)\mathcal{L}(G_2)$.
设$w_1\in\mathcal{L}(G_1)$, $w_2\in\mathcal{L}(G_2)$, 则G_1中存在一个序列$S_1\Rightarrow P_1\Rightarrow P_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow P_n=w_1$ 生成w_1, 记作: $S_1\overset{*}{\Rightarrow}w_1$. G_2 中同理, 设$S_2\Rightarrow Q_1\Rightarrow Q_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow Q_n=w_2$ 生成w_2, 记作: $S_2\overset{*}{\Rightarrow}w_2$.
显然G中存在一个序列$S\Rightarrow S_1S_2\Rightarrow P_1S_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow w_1S_2\Rightarrow w_1Q_1\Rightarrow\ldots\Rightarrow w_1w_2$ 生成w_1w_2, 即$S\overset{*}{\Rightarrow}w_1w_2$, 所以$w_1w_2\in\mathcal{L}(G)$.

反之, 对于任意$w\in\mathcal{L}(G)$, 设其生成序列为$S\Rightarrow(Q_1=S_1S_2)\Rightarrow Q_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow Q_n=w$. 根据$R$ 的定义, 该序列接下来必然仅按照R_1 和R_2 中的规则演化, 所以w 必为w_1w_2 的形式, 其中$S_1\overset{*}{\Rightarrow}w_1$, $S_2\overset{*}{\Rightarrow}w_2$. 即$w\in\mathcal{L}(G_1)\mathcal{L}(G_2)$.

综上, $\mathcal{L}(G)=\mathcal{L}(G_1)\mathcal{L}(G_2)$.

Cont.

2) Kleen运算:

构造$G=(V_1\cup\{S\},\Sigma_1,R,S)$, 其中$R=R_1\cup\{S\to\epsilon,S\to SS_1\}$. 下面证明: $\mathcal{L}(G)=\mathcal{L}(G_1)^*$.
设$w=w_1w_2...w_n\in\mathcal{L}(G_1)^*$, 其中$w_i\in\mathcal{L}(G_1), i\ge 0$. 则$G_1$中存在一个序列$S_1\Rightarrow P_1^i\Rightarrow P_2^i\Rightarrow ...\Rightarrow P_n^i=w_i$ 生成w_i, 记作: $S_1\overset{*}{\Rightarrow}w_i$, 对某个$i\ge 0$.
显然G中存在一个序列$S\Rightarrow SS_1\Rightarrow SS_1S_1\Rightarrow ...\Rightarrow SS_1...S_1\Rightarrow ...\Rightarrow SS_1...w_n\Rightarrow ...\Rightarrow Sw_1...w_n\Rightarrow\epsilon w_1...w_n=w_1w_2...w_n$ 生成w, 即$S\overset{*}{\Rightarrow}w$, 所以$w=w_1w_2...w_n\in\mathcal{L}(G)$.

反之, 用数学归纳法易证$w\in\mathcal{L}(G)\subseteq\mathcal{L}(G_1)^*$:

当$|w|=1$时, 显然必有$w\in\mathcal{L}(G_1)$ (因为w要么是ϵ, 要么必为S_1生成的字符), 因此结论成立.

Cont.

假设对于任意满足$|p| \le k$的$p \in \mathcal{L}(G)$, 都有$p \in \mathcal{L}(G_1)^*$成立. 现设$w \in \mathcal{L}(G)$且$|w| = k+1$. 设存在一个G中的序列生成w, 在这个序列生成的过程中, 必会出现这种形式: $S \Rightarrow ... \Rightarrow a_1a_2...a_nS'b_1b_2...b_m \Rightarrow ... \Rightarrow w$, 其中$n \ge 0$, $m \ge 0$, 且$a_1, ..., a_n, b_1, ...b_m$均为字符. S'是变量. 根据R的定义, S'只能是ϵ, S, S_1, 或者满足$S_1 \overset{*}{\Rightarrow} S'$. 无论如何, 终有$S' \overset{*}{\Rightarrow} w' \in \mathcal{L}(G_1)$. 又由归纳假设知$a_1a_2...a_n \in \mathcal{L}(G_1)^*$, 且$b_1b_2...b_m \in \mathcal{L}(G_1)^*$. 所以$S \overset{*}{\Rightarrow} a_1a_2...a_nw'b_1b_2...b_m = w \in \mathcal{L}(G_1)^*$.

综上, $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1)^*$.

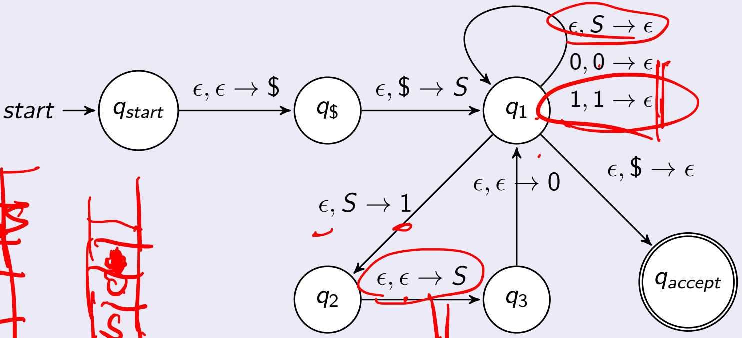
2. 构造一个上下文无关文法G和一个下推自动机P都生成$\{0,1\}$上的语言$\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$.

0^n1^n $(n \geq 0)$

Solution

$G: S \to 0S1 \mid \epsilon$

P如下图所示:

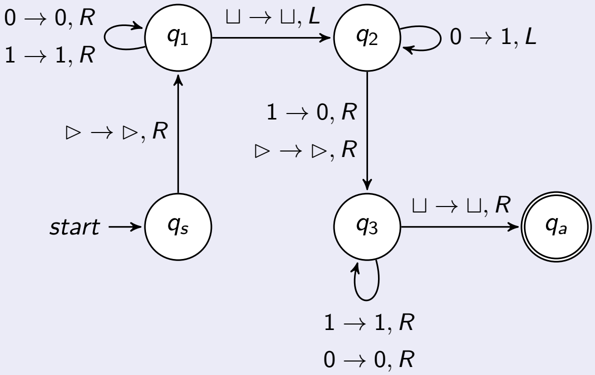


Input without replace

1. 构造TM计算n-1函数.

Solution

如下图所示:



2.依据下面的图灵机构造格局演算序列，表明图灵机能接受输入11001♯11001.
TM能识别语言$B=\{\omega\sharp\omega|\omega\in\{0,1\}*\}$.
设$\Sigma=\{0,1,\sharp\},\Gamma=\{0,1,\sharp,X,\sqcup,\triangleright\}$,转移函数$\delta$定义如下表:

	Symbol					
state	$\triangleright$	0	1	$\sharp$	X	$\sqcup$
q_0	$(q_1,\triangleright,R)$					
q_1		(q_2,X,R)	(q_3,X,R)	$(q_8,\sharp,R)$		
q_2		$(q_2,0,R)$	$(q_2,1,R)$	$(q_4,\sharp,R)$		
q_3		$(q_3,0,R)$	$(q_3,1,R)$	$(q_5,\sharp,R)$		
q_4		(q_6,X,L)			(q_4,X,R)	
q_5			(q_6,X,L)		(q_5,X,R)	
q_6		$(q_6,0,L)$	$(q_6,1,L)$	$(q_7,\sharp,L)$	(q_6,X,L)	
q_7		$(q_7,0,L)$	$(q_7,1,L)$		(q_1,X,R)	
q_8					(q_8,X,R)	$(q_a,\sqcup,R)$

Solution

格局演算序列为: $q_0 \triangleright 11001\sharp 11001\sqcup$, $\triangleright q_1 11001\sharp 11001\sqcup$, $\triangleright X q_3 1001\sharp 11001\sqcup$, $\triangleright X1001\sharp q_5 11001\sqcup$, $\triangleright X1001 q_6 \sharp X1001\sqcup$, $\triangleright X100 q_7 1\sharp X1001\sqcup$, $\triangleright X q_1 1001\sharp X1001\sqcup$, $\triangleright XX q_3 001\sharp X1001\sqcup$, $\triangleright XX001\sharp q_5 X1001\sqcup$, $\triangleright XX001\sharp XX q_6 001\sqcup$, $\triangleright XX00 q_7 1\sharp XX001\sqcup$, $\triangleright XX q_1 001\sharp XX001\sqcup$, $\triangleright XXX q_2 01\sharp XX001\sqcup$, $\triangleright XXX01\sharp q_4 XX001\sqcup$, $\triangleright XXX01\sharp X q_6 XX01\sqcup$, $\triangleright XXX0 q_7 1\sharp XXX01\sqcup$, $\triangleright XXX q_1 01\sharp XXX01\sqcup$, $\triangleright XXXX q_2 1\sharp XXX01\sqcup$, $\triangleright XXXX1\sharp q_4 XXX01\sqcup$, $\triangleright XXXX1\sharp XX q_6 XX1\sqcup$, $\triangleright XXXX q_7 1\sharp XXXX1\sqcup$, $\triangleright XXXX q_1 1\sharp XXXX1\sqcup$, $\triangleright XXXXX q_3 \sharp XXXX1\sqcup$, $\triangleright XXXXX\sharp q_5 XXXX1\sqcup$, $\triangleright XXXXX\sharp XXX q_6 XX\sqcup$, $\triangleright XXXX q_7 X\sharp XXXXX\sqcup$, $\triangleright XXXXX q_1 \sharp XXXXX\sqcup$, $\triangleright XXXXX\sharp q_8 XXXXX\sqcup$, $\triangleright XXXXX\sharp XXXXX q_8 \sqcup$, $\triangleright XXXXX\sharp XXXXX \sqcup q_a$.

3.修改图灵机TM$M_0 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_a, q_r\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, \triangleright, \sqcup\}, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$,使之能判定语言:$\{0^n1^n | n \geq 1\}$.

	Symbol					
state	$\triangleright$	0	1	X	Y	$\sqcup$
q_0	$(q_1, \triangleright, R)$					
q_1		(q_2, X, R)			(q_4, Y, R)	
q_2		$(q_2, 0, R)$	(q_3, Y, L)		(q_2, Y, R)	
q_3		$(q_3, 0, L)$		(q_1, X, R)	(q_3, Y, L)	
q_4					(q_4, Y, R)	$(q_a, \sqcup, R)$

Solution

	Symbol					
state	$\triangleright$	*0*	*1*	X	Y	$\sqcup$
q_0	$(q_1, \triangleright, R)$					
q_1		(q_2, X, R)	$\boldsymbol{(q_r, 1, R)}$		(q_4, Y, R)	$\boldsymbol{(q_r, \sqcup, R)}$
q_2		$(q_2, 0, R)$	(q_3, Y, L)		(q_2, Y, R)	$\boldsymbol{(q_r, \sqcup, R)}$
q_3		$(q_3, 0, L)$		(q_1, X, R)	(q_3, Y, L)	
q_4		$\boldsymbol{(q_r, 0, R)}$	$\boldsymbol{(q_r, 1, R)}$		(q_4, Y, R)	$(q_a, \sqcup, R)$