

PREMIÈRE PARTIE

**Paragraphes 1 à 7
(97 pages)**

INTRODUCTION

Ce fascicule rassemble les notions fondamentales et les principaux résultats de la théorie des variétés différentielles (sur le corps des nombres réels) et des variétés analytiques (sur un corps valué complet non discret). Il ne contient pas de démonstrations.

Les définitions et les résultats des six premiers livres sont supposés connus.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

(paragraphes 1 à 7)

Corps de base

Dans tout ce fascicule, la lettre K désigne, soit le corps valué \mathbf{R} des nombres réels, soit le corps valué \mathbf{C} des nombres complexes, soit un corps valué complet commutatif non discret à valeur absolue ultramétrique (*Top. Gén.*, ch. IX, 3^{ème} éd., § 3).

Espaces vectoriels topologiques

Lorsque K est différent de \mathbf{R} ou \mathbf{C} , nous appellerons *semi-norme* (resp. *norme*) sur un espace vectoriel F sur K une *ultra-semi-norme* (resp. une ultra-semi-norme qui est une norme) sur F (*Esp. Vect. Top.*, ch. II, 2^e éd., § 1). Si γ est une semi-norme sur F , et si $x \in F$, on écrira parfois $\|x\|_\gamma$ au lieu de $\gamma(x)$.

On appellera *espace normable* un espace vectoriel topologique sur K dont la topologie peut être définie par une seule norme, et *espace de Banach* un espace normable complet¹. On appellera *espace polynormé* un espace vectoriel topologique sur K dont la topologie peut être définie par une famille de semi-normes; lorsque $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , cette notion coïncide avec celle d'espace localement convexe.

Si E et F sont des espaces polynormés, on notera $\mathcal{L}_m(E; F)$ l'espace des applications m -linéaires continues de E^m dans F , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E^m ; c'est un espace polynormé. Si de plus E est normé, et si γ est une semi-norme continue sur F , et si $u \in \mathcal{L}_m(E; F)$, on note $\|u\|_\gamma$ la borne inférieure des nombres réels $a \geq 0$ tels que

$$\|u(x_1, \dots, x_m)\|_\gamma \leq a \|x_1\| \dots \|x_m\|$$

quels que soient x_1, \dots, x_m dans E .

¹ Cette définition diffère de celle donnée dans *Esp. Vect. Top.*, ch. I, § 1, où l'on appelle espace de Banach un espace *normé* complet.

Multi-indices

Soit I un ensemble. Pour $\alpha = (\alpha_i)$ and $\beta = (\beta_i)$ appartenant à $\mathbf{N}^{(I)}$, on pose (cf. *Alg.*, ch. III, 3^e éd., début du chapitre):

$$|\alpha| = \sum_{i \in I} \alpha_i$$

$$\alpha! = \prod_{i \in I} \alpha_i!$$

$$\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i \in I}$$

$$((\alpha, \beta)) = \prod_{i \in I} \frac{(\alpha_i + \beta_i)!}{\alpha_i! \beta_i!}.$$

On pose $\alpha \leq \beta$ lorsque $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i \in I$, ce qui équivaut à l'existence de $\gamma \in \mathbf{N}^{(I)}$ tel que $\beta = \alpha + \gamma$; cet élément γ est alors unique, et se note $\beta - \alpha$.

Si $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments commutant deux à deux dans un anneau A possédant un élément unité 1, on pose:

$$\mathbf{x}^\alpha = \prod_{i \in I} x_i^{\alpha_i} \quad (\text{en convenant que } x^0 = 1).$$

On a $\mathbf{x}^{\alpha+\beta} = \mathbf{x}^\alpha \cdot \mathbf{x}^\beta$.

Pour $i \in I$, on note ε_i l'élément de $\mathbf{N}^{(I)}$ dont toutes les coordonnées sont nulles, à l'exception de celle d'indice i qui est égale à 1. On a $\alpha = \sum_{i \in I} \alpha_i \varepsilon_i$ pour tout élément $\alpha = (\alpha_i)$ de $\mathbf{N}^{(I)}$.

Restriction d'une application

Si f est une application d'un ensemble A dans un ensemble B , et si C est une partie de A , on note $f|C$ la restriction de f à C .

Les éléments ∞ et ω

On adjoint à l'ensemble des entiers deux éléments notés ∞ et ω . La relation d'ordre entre entiers est prolongée par la convention

$$n < \infty < \omega \quad \text{pour tout entier } n.$$

On pose:

$$\infty + n = n + \infty = \infty \quad \text{et} \quad \omega + n = n + \omega = \omega, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

La lettre r désigne soit un entier ≥ 1 , soit l'un des éléments ∞ ou ω . Lorsque $\mathbf{K} \neq \mathbf{R}$, la lettre r désigne toujours l'élément ω . Lorsque $r = \infty$ (resp. $r = \omega$), on pose $r - k = r$ pour tout entier $k \geq 1$.

Fascicule de résultats

§ 1. Fonctions différentiables

Dans ce paragraphe, la lettre E désigne un espace vectoriel topologique normable sur K ; la lettre F désigne un espace polynormé séparé sur K .

1.1 Ordre de contact de deux fonctions en un point

1.1.1. Soient X un espace topologique et θ une fonction numérique positive définie dans un voisinage d'un point x_0 de X . On dit qu'une fonction f , définie dans un voisinage de x_0 et à valeurs dans F , est *négligeable devant θ* en x_0 si la condition suivante est satisfaite :

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute semi-norme γ continue sur F , il existe un voisinage V de x_0 sur lequel f et θ sont définies et tel que

$$\|f(x)\|_\gamma \leq \varepsilon \theta(x) \quad \text{pour tout } x \in V.$$

Pour que f soit négligeable devant θ , il suffit que cette condition soit satisfaite pour une famille de semi-normes γ définissant la topologie de F . Le fait que f soit négligeable ou non devant θ en x_0 ne dépend que des germes de f et de θ en x_0 . On désigne par $o_{x_0}(\theta)$ (ou $o(\theta)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur x_0) l'ensemble des germes en x_0 de fonctions négligeables devant θ en x_0 : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des germes en x_0 d'applications à valeurs dans F . Si f est négligeable devant θ , on écrira par abus de notations, $f \in o_{x_0}(\theta)$ ou encore $f(x) \in o(\theta(x))$ lorsque x tend vers x_0 .

Si f et g sont deux applications d'un voisinage de x_0 dans F , on écrira encore $f \equiv g \bmod o(\theta)$ si $f - g$ est négligeable devant θ .

Supposons que K soit égal à \mathbf{R} ou \mathbf{C} et que x_0 soit adhérent à l'ensemble Y des points de X où θ est définie et non nulle. La relation $f \in o(\theta)$ signifie alors que $f(x)/\theta(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 en restant dans Y , et que $\theta(x) = 0$ entraîne $f(x) = 0$.

1.1.2. Soient f et g deux fonctions à valeurs dans F , définies au voisinage d'un point x_0 de E . Si m est un entier positif, on dit que f et g ont un *contact d'ordre $\geq m$* en x_0 si l'on a :

$$f(x) - g(x) \in o(\|x - x_0\|^m) \quad \text{pour } x \text{ tendant vers } x_0$$

quelle que soit la norme choisie pour définir la topologie de E . Pour cela, il suffit que la relation précédente soit vérifiée pour une norme définissant la topologie de E . S'il en est ainsi, on a $f(x_0) = g(x_0)$.

Si f et g prennent la même valeur en x_0 , on appelle *ordre de contact* de f et g en x_0 la borne supérieure (finie ou égale à $+\infty$) des entiers m tels que f et g aient un contact d'ordre $\geq m$ en x_0 .

1.1.3. L'ordre de contact de f et g en x_0 ne dépend que des germes de ces fonctions au point x_0 . On peut donc parler de l'ordre de contact de deux germes φ et ψ d'applications de E dans F au point x_0 . La relation « φ et ψ ont un contact d'ordre $\geq m$ » est une relation d'équivalence compatible avec la structure vectorielle.

1.2. Fonctions dérivables en un point

1.2.1. Soit f une fonction définie dans un voisinage du point x_0 de E et à valeurs dans F . On dit que f est *dérivable en* x_0 s'il existe une fonction affine continue v de E dans F ayant en x_0 un contact d'ordre ≥ 1 avec f . Cette application v est unique; il existe une application linéaire continue et une seule, notée $Df(x_0)$, de E dans F telle que :

$$v(x) = v(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Si l'on choisit une norme sur E , ceci équivaut à :

$$f(x_0 + h) \equiv f(x_0) + Df(x_0) \cdot h \quad \text{mod } o(\|h\|) \quad \text{pour } h \text{ tendant vers } 0,$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot h\|_\gamma}{\|h\|} = 0$$

pour toute semi-norme γ continue sur F .

L'élément $Df(x_0)$ de $\mathcal{L}(E, F)$ s'appelle la *dérivée* de f en x_0 . On écrit parfois $D_h f(x_0)$ pour $Df(x_0) \cdot h$; c'est un élément de F défini par la relation :

$$D_h f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}.$$

1.2.2. On dit qu'une fonction f est *strictement dérivable en* x_0 si elle est dérivable en x_0 et si l'on a, pour toute norme définissant la topologie de E , la relation :

$$f(y) - f(z) \equiv Df(x_0) \cdot (y - z) \quad \text{mod } o(\|y - z\|)$$

pour (y, z) tendant vers (x_0, x_0) dans $E \times E$. Pour cela, il suffit que cette condition soit satisfaite pour une norme définissant la topologie de E . Supposons de plus E et F normés; pour tout nombre $c > \|Df(x_0)\|$, il

existe alors un voisinage V de x_0 tel que $\|f(y) - f(z)\| \leq c \cdot \|y - z\|$ pour y, z dans V ; ceci entraîne que f est uniformément continue dans V .

1.2.3. Le fait pour une fonction f d'être dérivable ou strictement dérivable en x_0 ne dépend que du germe de f en x_0 . Les germes de fonctions dérivables en x_0 forment un sous-espace vectoriel \mathcal{V} de l'espace de tous les germes et l'application $f \mapsto Df(x_0)$ de \mathcal{V} dans $\mathcal{L}(E; F)$ est linéaire. Les germes de fonctions strictement dérivables en x_0 forment un sous-espace vectoriel de \mathcal{V} .

1.2.4. Une fonction dérivable en x_0 est continue en x_0 .

1.2.5. Lorsque $E = K$, l'application $u \mapsto u(1)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E; F)$ sur F ; si la fonction f est dérivable en x_0 , l'élément

$$f'(x_0) = Df(x_0) \cdot 1$$

n'est autre que la dérivée de f en x_0 au sens donné dans *Fonct. Var. Réelle*, chap. I, § 1, n° 6, remarque 2.

1.3. Composition des fonctions dérivables

1.3.1. Supposons F normable. Soient $x_0 \in E$ et $y_0 \in F$, U un voisinage de x_0 et V un voisinage de y_0 ; enfin soit f une application de U dans V , dérivable en x_0 , avec $f(x_0) = y_0$. Si g est une application de V dans un espace vectoriel polynormé séparé G , dérivable en y_0 , l'application $g \circ f$ de U dans G est dérivable en x_0 , et l'on a :

$$(1) \quad D(g \circ f)(x_0) = Dg(y_0) \circ Df(x_0).$$

Si f et g sont strictement dérivables, il en est de même de $g \circ f$.

1.3.2. Soit f une application définie au voisinage d'un point x_0 de E et à valeurs dans F , dérivable en x_0 ; si u est une application linéaire continue de F dans un espace polynormé séparé G , la fonction $u \circ f$ est dérivable en x_0 et l'on a :

$$(2) \quad D(u \circ f)(x_0) = u \circ Df(x_0).$$

1.3.3. Supposons que F soit produit d'une famille $(F_i)_{i \in I}$ d'espaces vectoriels polynormés séparés; pour tout i dans I , soit f_i une application définie dans un voisinage U d'un point x_0 de E et à valeurs dans F et soit $f = (f_i)_{i \in I}$. Pour que f soit dérivable (resp. strictement dérivable) en x_0 , il faut et il suffit que tous les f_i le soient; on a :

$$(3) \quad D_h f(x_0) = (D_h f_i(x_0))_{i \in I} \quad \text{pour tout } h \text{ dans } E.$$

1.3.4. Si $E = K$, on peut remplacer $Df(x_0)$ par $f'(x_0)$ et $D_h f_i(x_0)$ par $f'_i(x_0)$ dans les formules (1) et (3).

1.4. Produit de fonctions dérivables

1.4.1. Soient F_1, \dots, F_m des espaces polynormés séparés et u une application m -linéaire continue de $F_1 \times \dots \times F_m$ dans F . Soit U un voisinage d'un point x_0 de E , et soit f_i une application de U dans F_i (pour $1 \leq i \leq m$). Si les f_i sont dérivables (resp. strictement dérivables) en x_0 , il en est de même de $u(f_1, \dots, f_m) = g$ et l'on a :

$$(4) \quad D_h g(x_0) = \sum_{j=1}^m u(f_1(x_0), \dots, D_h f_j(x_0), \dots, f_m(x_0)) \quad \text{pour } h \text{ dans } E,$$

ce que l'on écrira plus succinctement :

$$(5) \quad Dg = \sum_{j=1}^m u(f_1, \dots, Df_j, \dots, f_m).$$

En particulier, pour $m = 2$, on a :

$$(6) \quad Du(f_1, f_2) = u(Df_1, f_2) + u(f_1, Df_2).$$

Pour $m = 1$, on retrouve 1.3.2.

1.4.2. Lorsque $E = K$, on peut remplacer Dg par g' et Df_j par f'_j dans les formules (4) à (6).

1.5. Premières variantes du théorème des fonctions implicites

Supposons que E et F sont des espaces de Banach et soient x_0 un point de E , U un voisinage de x_0 et f une application de U dans F . On suppose de plus que f est *strictement dérivable* en x_0 .

1.5.1. Si $Df(x_0)$ est un *isomorphisme* de E sur F , il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 contenu dans U et un voisinage ouvert V_0 de $f(x_0)$ tels que $f|U_0$ soit un homéomorphisme de U_0 sur V_0 . L'application $g : V_0 \rightarrow U_0$ réciproque de $f|U_0$ est strictement dérivable au point $f(x_0)$ et l'on a :

$$Dg(f(x_0)) = Df(x_0)^{-1}.$$

1.5.2. Si $Df(x_0)$ est une application *surjective* de E sur F , il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 contenu dans U , tel que $f|U_0$ soit une application ouverte.

1.5.3. Si $Df(x_0)$ est *injective et d'image fermée*, il existe un voisinage fermé U_0 de x_0 contenu dans U , tel que $f|U_0$ soit un homéomorphisme de U_0 sur une partie fermée de F .

1.6. Dérivées partielles

1.6.1. Soit f une fonction définie dans un voisinage U du point x_0 de E et à valeurs dans F . Soient X un sous-espace vectoriel de E et V l'ensemble des points x de X tels que $x_0 + x \in U$; posons $g(x) = f(x_0 + x)$ pour $x \in V$. On dit que f admet une *dérivée partielle suivant X en x_0* si g admet une dérivée en 0 ; cette dérivée se note $D_X f(x_0)$; c'est une application linéaire continue de X dans F . Si f est dérivable en x_0 , elle admet une dérivée partielle suivant X en x_0 et cette dérivée partielle est la restriction de $Df(x_0)$ à X .

1.6.2. Supposons que E soit produit d'une famille finie d'espaces vectoriels normés E_i ($1 \leq i \leq n$) identifiés canoniquement à des sous-espaces de E ; soit $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ dans E et soit U un voisinage de x_0 dans E ; enfin soit f une application de U dans F . On note $D_i f(x_0)$ la dérivée au point x_0^i , si elle existe, de l'application $z_i \mapsto f(x_0^1, \dots, z_i, \dots, x_0^n)$ définie au voisinage de x_0^i dans E_i et à valeurs dans F . C'est un élément de $\mathcal{L}(E_i; F)$ que l'on appelle la *i-ème dérivée partielle de f en x_0* . Si f est dérivable en x_0 , les n dérivées partielles existent, et déterminent $Df(x_0)$ par la formule:

$$Df(x_0) \cdot h = \sum_{i=1}^n D_i f(x_0) \cdot h_i \quad \text{pour } h = (h_1, \dots, h_n) \text{ dans } E.$$

1.6.3. Plus particulièrement, soit $E = K^n$. Si les dérivées partielles de f en x_0 existent, on note $\partial_i f(x_0)$ l'élément $D_i f(x_0) \cdot 1$ de F . L'écriture suivante est souvent usitée; supposons qu'on ait choisi une notation pour les fonctions coordonnées sur K^n , par exemple u_i désigne la i -ème projection de K^n sur K . On écrit alors:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(x_0) \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial u_i} \right|_{x=x_0}$$

au lieu de $\partial_i f(x_0)$.

1.6.4. Soient $E = K^n$ et $F = K^m$; supposons que la fonction $f = (f_1, \dots, f_m)$ à valeurs dans F soit dérivable au point x_0 de E . Les dérivées partielles $a_{ji} = \partial_i f_j(x_0)$ existent alors (ce sont des éléments de K). La matrice à m lignes et n colonnes formée des a_{ji} (élément de la ligne d'indice j et de la colonne d'indice i) s'appelle la *matrice jacobienne* de f en x_0 ; c'est la matrice de l'application linéaire $Df(x_0)$ de K^n dans K^m par rapport aux bases canoniques de ces espaces.

1.7. Dérivées itérées

1.7.1. Soit f une fonction définie dans un voisinage d'un point x_0 de E , à valeurs dans F . Si f est dérivable au voisinage de x_0 , sa dérivée Df est une application d'un voisinage de x_0 dans l'espace polynormé $\mathcal{L}(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F . Soit p un entier ≥ 2 :

on dit que f est p fois dérivable en x_0 si f est dérivable au voisinage de x_0 et si sa dérivée Df est $(p-1)$ fois dérivable en x_0 . On définit alors la *dérivée p -ième* de f en x_0 : c'est l'application p -linéaire continue $D^p f(x_0)$ de E^p dans F , définie par:

$$D^p f(x_0) \cdot (h_1, \dots, h_p) = (D(D^{p-1}f)(x_0) \cdot h_1) \cdot (h_2, \dots, h_p).$$

On pose aussi $D^0 f = f$ et $D^1 f = Df$. Si f est p fois dérivable en x_0 et si q et s sont deux entiers tels que $q + s = p$, avec $s > 0$, alors f est q fois dérivable au voisinage de x_0 , la fonction $D^q f$ (à valeurs dans $\mathcal{L}_q(E; F)$) est s fois dérivable en x_0 , et on a:

$$D^{q+s} f(x_0) \cdot (h_1, \dots, h_{q+s}) = (D^s(D^q f)(x_0) \cdot (h_1, \dots, h_s)) \cdot (h_{s+1}, \dots, h_{q+s})$$

relation que l'on écrit par abus de notation sous la forme:

$$D^{q+s} f = D^s D^q f.$$

1.7.2. Soient $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ des sous-espaces vectoriels fermés de E , tels que E soit somme directe topologique des E_i . On définit alors, quand elle existe, la *dérivée partielle itérée* $D_{i_1} \dots D_{i_m} f$ d'une application f d'un voisinage de $x_0 \in E$ dans F ; c'est une application multilinéaire continue de

$$E_{i_1} \times \dots \times E_{i_m}$$

dans F , définie par récurrence sur l'entier $m \geq 1$ comme suit: si $D_{i_2} \dots D_{i_m} f(x)$ existe dans un voisinage de x_0 et possède une dérivée partielle suivant E_{i_1} , alors $D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x_0)$ est donnée par:

$$D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x_0) \cdot (h_1, \dots, h_m) = (D_{i_1}(D_{i_2} \dots D_{i_m} f)(x_0) \cdot h_1) \cdot (h_2, \dots, h_m)$$

pour $h_k \in E_{i_k}$.

Si f est m fois dérivable en x_0 , alors la dérivée partielle $D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x_0)$ existe et est égale à la restriction de $D^m f(x_0)$ au sous-espace $E_{i_1} \times \dots \times E_{i_m}$ de E^m . Par suite, $D^m f(x_0)$ est complètement déterminée par les dérivées partielles itérées d'ordre m en x_0 .

1.7.3. Supposons que E soit de dimension finie et soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Posons $E_i = K e_i$ et soit f une application d'un voisinage de x_0 , à valeurs dans F . Si la dérivée partielle $D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x_0)$ (avec les notations de 1.7.2) existe, on pose:

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} f(x_0) = D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x_0) \cdot (e_{i_1}, \dots, e_{i_m}).$$

§ 2. Fonctions différentiables réelles

Dans ce paragraphe, on suppose que $K = \mathbb{R}$. La lettre E désigne un espace vectoriel *normé* sur \mathbb{R} ; la lettre F désigne un espace vectoriel topologique localement convexe *séparé* sur \mathbb{R} .

2.1. Fonctions dérivables en un point

2.1.1. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 de E et à valeurs dans F . Soit u un élément de l'espace $\mathcal{L}(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F . Pour que f soit dérivable en x_0 et u admette u pour dérivée, il faut et suffit que l'on ait

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - u(h)}{\|h\|} = 0.$$

2.1.2. Pour que f soit strictement dérivable en x_0 , il faut et suffit que l'on ait

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ h \neq k}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + k) - Df(x_0) \cdot (h - k)}{\|h - k\|} = 0.$$

2.1.3. Soient F_1 et F_2 deux espaces localement convexes séparés et soit u une application bilinéaire de $F_1 \times F_2$ dans F , satisfaisant à la condition de continuité suivante :

(SC) Si $((a_n, b_n))$ est une suite d'éléments de $F_1 \times F_2$ convergeant vers un élément $(a, b) \in F_1 \times F_2$, alors la suite $(u(a_n, b_n))$ converge vers $u(a, b)$ dans F .

Soit f_i (pour $i = 1, 2$) une application d'un voisinage d'un point x_0 de E dans F_i . Si f_1 et f_2 sont dérivables en x_0 , alors $u(f_1, f_2)$ est dérivable en x_0 et l'on a :

$$D(u(f_1, f_2))(x_0) \cdot h = u(Df_1(x_0) \cdot h, f_2(x_0)) + u(f_1(x_0), Df_2(x_0) \cdot h)$$

pour tout $h \in E$.

2.2. Le théorème des accroissements finis

2.2.1. Soient x, y dans E , et $[x, y]$ le segment fermé joignant ces deux points. Soit de plus f une application d'un voisinage de $[x, y]$ dans l'espace F , dérivable en tout point de $[x, y]$. Alors $f(x) - f(y)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des points $Df(z) \cdot (x - y)$ pour z dans $[x, y]$.

2.2.2. Soient U un ouvert *connexe* de E , et f une application de U dans

F, admettant une dérivée nulle en tout point de U ; alors f est constante dans U .

2.2.3. Soient U un ouvert convexe de E , et f une application de U dans F , dérivable en tout point de U . Etant donné une semi-norme continue γ sur F et un nombre réel $M \geq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout x dans U , on a $\|Df(x)\|_\gamma \leq M$.
- (ii) Pour tout x et tout y dans U , on a $\|f(x) - f(y)\|_\gamma \leq M \cdot \|x - y\|$.

2.2.4. Soit U un voisinage d'un point x_0 de E et soit f une fonction définie dans le complémentaire de x_0 dans U , à valeurs dans F . Supposons que f admet une dérivée $Df(x)$ en tout point x de U , $x \neq x_0$, et que la fonction $x \mapsto Df(x)$ admet une limite D_0 quand x tend vers x_0 . Alors, si $\dim(E) \geq 2$, f a une limite en x_0 et la fonction f prolongée par continuité à U tout entier est dérivable de dérivée D_0 en x_0 ; il en est de même si $\dim(E) = 1$ et qu'on suppose que f a une limite en x_0 .

2.3. Fonctions de classe C^r ($r \neq \omega$)

2.3.1. Soient U un ouvert de E et f une application de U dans F . On définit la relation « f est de classe C^r » (pour $r \in \mathbb{N}$) par récurrence sur r de la manière suivante :

- 1) f est de classe C^0 si et seulement si elle est continue;
- 2) si r est un entier ≥ 1 , la fonction f est de classe C^r si et seulement si elle est dérivable en tout point de U et si l'application dérivée Df de U dans $\mathcal{L}(E; F)$ est de classe C^{r-1} .

Les fonctions de classe C^r sont aussi appelées *fonctions r fois continûment dérivables*.

On dit que f est de classe C^∞ (ou *indéfiniment dérivable*) si elle est de classe C^r pour tout entier r .

Si f est de classe C^r dans U , alors f est p fois dérivable pour tout entier $p \leq r$ et la fonction $D^p f$ est de classe C^{r-p} .

2.3.2. Les applications de classe C^r d'un ouvert U de E dans F forment un sous-espace vectoriel $\mathcal{C}^r(U; F)$ de l'espace de toutes les applications de U dans F . On a $\mathcal{C}^s(U; F) \subset \mathcal{C}^r(U; F)$ pour $s \geq r$.

2.3.3. Pour qu'une fonction f soit de classe C^1 dans un ouvert U de E , il faut et il suffit qu'elle soit strictement dérivable en tout point de U .

Si E est un produit d'espaces normés E_i , une application f d'un ouvert V de E dans F est de classe C^r si et seulement si f possède des dérivées partielles itérées $D_{i_1} \dots D_{i_m} f$ continues pour tout entier $m \leq r$.

2.3.4. Soit G un espace normé et soit U un ouvert de E . Soient V un ouvert de G , $g \in \mathcal{C}^r(U; G)$ et $f \in \mathcal{C}^r(V; F)$. Si $g(U) \subset V$, l'application $f \circ g$ de U dans F est de classe C^r .

Soient F_1 et F_2 deux espaces localement convexes séparés et u une application bilinéaire de $F_1 \times F_2$ dans F , hypocontinue par rapport à l'ensemble des parties bornées de F_1 (resp. F_2) (*Esp. Vect. Top.*, ch. III, § 4, n° 2). Soient U un ouvert de E et $f_i \in \mathcal{C}^r(U; F_i)$ (pour $i = 1, 2$). Alors la fonction $u(f_1, f_2)$ appartient à $\mathcal{C}^r(U; F)$. Si E est de dimension finie, il suffit de supposer que u satisfait à la condition (SC) du n° 2.1.3.

2.3.5. Si E est un produit d'espaces normés E_i ($1 \leq i \leq n$) et si f est une application n -linéaire continue de E dans F , alors f est de classe C^∞ et l'on a $D^p f = 0$ pour $p \geq n + 1$.

2.3.6. Supposons que E et F soient des espaces de Banach. Soit f une fonction de classe C^r (avec $r \geq 1$) définie dans un voisinage d'un point x_0 de E et à valeurs dans F . Soit $y_0 = f(x_0)$ et supposons que $Df(x_0)$ soit un isomorphisme de E sur F . Alors f induit un homéomorphisme g d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0 (1.5) et l'application réciproque de g est de classe C^r au voisinage de y_0 .

2.4. Dérivées des fonctions de classe C^r

2.4.1. Soit f une application de classe C^r d'un ouvert U de E dans F . Pour tout $x \in U$, et tout entier s avec $s \leq r$, l'application multilinéaire $D^s f(x)$ est symétrique.

2.4.2. Supposons de plus E de dimension finie et soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Les dérivées partielles $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_s} f$ dépendent symétriquement des indices i_1, \dots, i_s . Soit α_k le nombre de fois que l'indice k intervient dans la suite i_1, \dots, i_s et soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On pose alors :

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_s} f$$

Lorsque les coordonnées relatives à la base (e_1, \dots, e_n) sont notées x_1, \dots, x_n , on écrit aussi $\partial^\alpha f$ sous la forme :

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

2.5. Formule de Taylor

2.5.1. Soit r un entier ≥ 1 et soit f une application de classe C^r d'un ouvert U de E dans F . Pour $x \in U$, $h \in E$ et $p \leq r$, convenons d'écrire $D^p f(x_0) \cdot h^p$ au lieu de $D^p f(x_0) \cdot (h, \dots, h)$. Si le segment $[x, x + h]$ est

contenu dans U , on a la formule (« formule de Taylor »):

$$f(x+h) = \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{p!} D^p f(x) \cdot h^p + v_r(x;h)$$

où le « reste » $v_r(x;h)$ est donné par:

$$v_r(x;h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!} D^r f(x+th) \cdot h^r dt$$

On a :

$$v_r(x;h) \equiv \frac{1}{r!} D^r f(x) \cdot h^r \quad \text{mod } o(\|h\|^r) \quad \text{quand } h \text{ tend vers } 0$$

et

$$f(x+h) \equiv \sum_{p=0}^r \frac{1}{p!} D^p f(x) \cdot h^p \quad \text{mod } o(\|h\|^r)$$

quand h tend vers zéro.

2.5.2. Soit de plus γ une semi-norme continue sur F ; si l'on a $\|D^r f(z)\|_\gamma \leq M$ pour tout point z du segment $[x, x+h]$, alors on a :

$$\|v_r(x;h)\|_\gamma \leq \frac{M}{r!} \|h\|^r$$

2.5.3. Supposons en outre que $E = \mathbf{R}^n$. On a alors:

$$f(x+h) \equiv \sum_{|\alpha| \leq r} \Delta^\alpha f(x) h^\alpha \quad \text{mod } o(\|h\|^r) \quad \text{quand } h \text{ tend vers } 0$$

en posant:

$$\Delta^\alpha f(x) = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x)$$

2.5.4. Soient f et g deux fonctions de classe C^r sur un ouvert U de E , à valeurs dans F . Pour que f et g aient en un point x de U un contact d'ordre $\geq r$, il faut et il suffit que l'on ait $D^p f(x) = D^p g(x)$ pour tout entier p avec $0 \leq p \leq r$. Lorsque E est de dimension finie, cela revient à dire que les dérivées partielles itérées d'ordre $\leq r$ de f et de g (par rapport à une base de E) sont égales au point x .

2.5.5. Soit U un ouvert de $E \times \mathbf{R}^n$ de la forme $V \times I_1 \times \dots \times I_n$, où V est un ouvert de E et I_1, \dots, I_n des intervalles ouverts de \mathbf{R} contenant 0. Posons $U_0 = V$ et $U_j = V \times I_1 \times \dots \times I_j$ pour $1 \leq j \leq n$. Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^r(U; F)$ (avec $1 \leq r \leq \infty$), il existe une suite et

une seule de fonctions $f_j \in \mathcal{C}^{r-1}(U_j; F)$ (pour $0 \leq j \leq n$) telle que :

$$f(x, t_1, \dots, t_n) = f_0(x) + \sum_{j=1}^n t_j f_j(x, t_1, \dots, t_j)$$

pour $x \in V$ et $t_j \in I_j$. On a :

$$f_0(x) = f(x, 0, \dots, 0)$$

$$f_j(x, t_1, \dots, t_j) = \int_0^1 \partial_j f(x, t_1, \dots, t_{j-1}, t_j u, 0, \dots, 0) du$$

pour $1 \leq j \leq n$. Dans cette dernière formule, $\partial_j f$ désigne la j -ième dérivée partielle de la fonction $(t_1, \dots, t_n) \mapsto f(x, t_1, \dots, t_n)$.

2.6. Critères de dérivabilité

2.6.1. Supposons que F , outre sa topologie \mathcal{T} , soit muni d'une topologie moins fine \mathcal{T}' , qui fait aussi de F un espace localement convexe séparé. Supposons en outre que \mathcal{T} et \mathcal{T}' satisfassent à la condition suivante :

(S) Pour tout voisinage V de 0 pour la topologie \mathcal{T} , il existe un voisinage W de 0 pour \mathcal{T} tel que l'enveloppe convexe \mathcal{T}' -fermée de toute partie \mathcal{T} -compacte de W soit contenue dans V .

Soit f une application d'un ouvert U de E dans F . Supposons que f est de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$) lorsque l'on munit F de la topologie \mathcal{T}' , que $D^m f(x)$ est, pour tout x de U , et tout entier $m \leq r$, une application multilinéaire continue de E^m dans F muni de la topologie \mathcal{T} et que l'application $x \mapsto D^m f(x)$ est continue de U dans $\mathcal{L}_m(E; F)$ (F étant muni de la topologie \mathcal{T}). Alors f est de classe C^r lorsque l'on munit F de la topologie \mathcal{T} et ses dérivées $D^m f$ sont les mêmes pour \mathcal{T} et pour \mathcal{T}' .

La condition (S) est en particulier réalisée s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie \mathcal{T} qui sont fermés pour la topologie \mathcal{T}' : c'est le cas si le dual de F muni de \mathcal{T} est identique au dual de F muni de \mathcal{T}' . La condition (S) est également réalisée si F muni de la topologie \mathcal{T} est *quasi-complet* (*Esp. Vect. Top.*, ch. III, § 2, n° 5).

2.6.2. Soit f une application d'un ouvert U de E dans F . Si f est de classe C^r (avec $0 \leq r \leq \infty$), les fonctions scalaires $u \circ f$ sont de classe C^r pour toute forme linéaire continue u sur F . Réciproquement si F est *quasi-complet* et si les fonctions $u \circ f$ sont de classe C^{r+1} pour tout $u \in F'$, alors f est de classe C^r .

§ 3. Fonctions analytiques réelles ou complexes

Dans ce paragraphe, on suppose que $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On désigne par (E_i) , $1 \leq i \leq n$, une famille finie d'espaces *normés* sur K , par E l'espace produit des E_i , et par F un espace vectoriel topologique localement convexe *séparé* sur K .

3.1. Séries convergentes

3.1.1. Soit $f = \sum f_\alpha$ une série formelle appartenant à $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ (App., n° A.5). Si γ est une semi-norme continue sur F et $R = (R_1, \dots, R_n)$ une suite de n nombres réels strictement positifs, on pose :

$$\|f\|_{\gamma, R} = \sum_{\alpha} R^\alpha \|f_\alpha\|_{\gamma}.$$

Si F est un espace normé et si γ est la norme de F , on écrit $\|f\|_R$ au lieu de $\|f\|_{\gamma, R}$.

L'ensemble $\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$ des $f \in \hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ telles que $\|f\|_{\gamma, R}$ soit fini pour toute semi-norme continue γ sur F est un sous-espace vectoriel de $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$. On a

$$\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{H}_{R'}(E_1, \dots, E_n; F)$$

toutes les fois que $R_i \geq R'_i$ pour $1 \leq i \leq n$. La réunion des

$$\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$$

est un sous-espace vectoriel, noté $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, de $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$, dont les éléments sont appelés *séries convergentes* sur le produit des E_i , à valeurs dans F . Il ne dépend que de la topologie des E_i et non de leurs normes. On peut donc parler de l'espace $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ lorsque les E_i sont des espaces normables, sans avoir à choisir une norme sur chaque E_i .

3.1.2. L'application $f \mapsto \|f\|_{\gamma, R}$ est une semi-norme sur $\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$. La topologie que définissent ces semi-normes lorsque γ décrit l'ensemble des semi-normes continues sur F (ou simplement un ensemble de semi-normes définissant la topologie de F) est séparée. Si F est normable (resp. complet), il en est de même de $\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$. Les semi-normes sur $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ dont la restriction à chaque \mathcal{H}_R est continue définissent une topologie séparée sur $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, qui ne dépend que des topologies des E_i . L'injection de $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ dans $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ est continue.

3.1.3. L'isomorphisme canonique de $\hat{P}(E; F)$ sur $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ donne par restriction un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de $\mathcal{H}(E; F)$ sur $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$.

3.1.4. Soit $f \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ et soit $J(f)$ l'ensemble des $R \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $f \in \mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$. L'intérieur $I(f)$ de $J(f)$ s'appelle l'*indicatrice de convergence stricte* de f . Il se compose de l'ensemble des R pour lesquels il existe un $R' \in J(f)$ avec $0 < R_i < R'_i$ pour $1 \leq i \leq n$. On note $\Omega(f)$ l'ensemble des points $(\log R_1, \dots, \log R_n)$ de \mathbb{R}^n pour $R \in I(f)$: c'est une partie convexe de \mathbb{R}^n .

Lorsque $n = 1$, l'ensemble $I(f)$ est un intervalle $]0, \rho(f)[$ de \mathbb{R} et $\rho(f)$ s'appelle le *rayon de convergence strict* de f . C'est aussi la borne supérieure (finie ou $+\infty$) de l'ensemble des nombres réels $R > 0$ tels que pour toute semi-norme continue γ sur F , il existe une constante M telle que $\|f_m\|_\gamma \leq MR^{-m}$ (avec $f = \sum f_m, f_m \in P_m(E; F)$) pour tout entier $m \geq 0$.

L'ensemble des points $x = (x_i) \in E_1 \times \dots \times E_n$ tels qu'il existe $R \in I(f)$ avec $\|x_i\| \leq R_i$ pour tout i , s'appelle le *domaine de convergence strict* de f et se note $C(f)$. C'est aussi l'intérieur de l'ensemble des points x pour lesquels il existe $R \in J(f)$ avec $\|x_i\| < R_i$ pour tout i .

3.1.5. Pour $f_\alpha \in P_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ et pour toute semi-norme continue γ sur F , posons:

$$\|f_\alpha\|_\gamma = \sup_{\|x_i\| \leq 1} \|f_\alpha(x_1, \dots, x_n)\|_\gamma.$$

On a alors les inégalités:

$$\|f_\alpha\|_\gamma \leq \|f_\alpha\|_\gamma \leq \frac{\alpha^\alpha}{\alpha!} \|f_\alpha\|_\gamma.$$

Pour $f = \sum f_\alpha \in \hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ et $R \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, posons:

$$\|f\|_{\gamma, R} = \sum_\alpha R^\alpha \|f_\alpha\|_\gamma$$

et désignons par $\tilde{\mathcal{H}}_R(E_1, \dots, E_n; F)$ le sous-espace vectoriel de

$$\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$$

formé des f tels que $\|f\|_{\gamma, R}$ soit fini pour tout γ , muni de la topologie définie par les semi-normes $f \mapsto \|f\|_{\gamma, R}$. On a $\mathcal{H}_R \subset \tilde{\mathcal{H}}_R$ et l'injection de \mathcal{H}_R dans $\tilde{\mathcal{H}}_R$ est continue. L'espace $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ est la réunion des $\tilde{\mathcal{H}}_R(E_1, \dots, E_n; F)$ et sa topologie est la topologie localement convexe la plus fine qui rende continues les injections des \mathcal{H}_R dans \mathcal{H} .

Si $f \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, on appelle *indicatrice de convergence l'intérieur* $\tilde{I}(f)$ de l'ensemble $\tilde{J}(f)$ des $R \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $f \in \tilde{\mathcal{H}}_R$. On a:

$$e^{-1}\tilde{I}(f) \subset I(f) \subset \tilde{I}(f)$$

(où e est la base des logarithmes népériens). A partir de $\tilde{I}(f)$, on définit comme en 3.1.4. le *domaine de convergence* $\tilde{C}(f)$ et, lorsque $n = 1$, le *rayon de convergence* $\tilde{\rho}(f)$. On a en particulier:

$$e^{-1}\tilde{\rho}(f) \leq \rho(f) \leq \tilde{\rho}(f).$$

3.1.6. Pour $R \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on appelle *polyboule* (fermée) de centre 0 et de rayon R de E l'ensemble $B(R)$ des $x \in E$ tels que $\|x_i\| \leq R_i$ pour tout i . Si $\dim E_i = 1$, on dit aussi *polydisque*. Si $f \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, le domaine de convergence (resp. strict) de f est la réunion des polyboules $B(R)$ pour $R \in \tilde{I}(f)$ (resp. $R \in I(f)$).

3.1.7. Soit $f \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$. Supposons F *quasi-complet*. Pour tout $x \in \tilde{C}(f)$, la famille des $f_\alpha(x)$ est sommable dans F . Sa somme, notée $\hat{f}(x)$ ou simplement $f(x)$, est une fonction continue sur $\tilde{C}(f)$. Plus précisément, pour tout R tel que $f \in \mathcal{H}_R$, la famille des $f_\alpha(x)$ est uniformément sommable pour $x \in B(R)$. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue injective de $\tilde{\mathcal{H}}_R$ dans l'espace des fonctions continues bornées sur $B(R)$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

3.1.8. Soient F_1, \dots, F_m des espaces polynormés séparés et soit u une application m -linéaire continue de $F_1 \times \dots \times F_m$ dans F . Soient $f_i \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F_i)$ pour $1 \leq i \leq m$. La série formelle $u(f_1, \dots, f_m)$ appartient à $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$. On a :

$$C(u(f_1, \dots, f_m)) \supset \bigcap_i C(f_i)$$

$$\tilde{C}(u(f_1, \dots, f_m)) \supset \bigcap_i \tilde{C}(f_i)$$

et si $x \in \bigcap_i \tilde{C}(f_i)$, F et les F_i étant quasi-complets, on a :

$$u(f_1, \dots, f_m)(x) = u(f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

3.1.9. Soient F_1, \dots, F_m des espaces normés complets et supposons F quasi-complet. Soient $\mathbf{f} = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$ avec $f_i \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F_i)$ et $g \in \mathcal{H}(F_1, \dots, F_m; F)$, tels que $(f_i(0))_{1 \leq i \leq m}$ appartienne au domaine de convergence strict de g . Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$, la série formelle $g_\alpha \circ \mathbf{f}$ appartient à $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ et la famille des $g_\alpha \circ \mathbf{f}$ est sommable dans $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ et *a fortiori* dans $\hat{\mathcal{P}}(E_1, \dots, E_n; F)$. Sa somme sera notée $g \circ \mathbf{f}$.

De manière plus précise, il existe $R \in \bigcap_i I(f_i)$ et $R' \in I(g)$ tels que $\|f_i\|_R < R'_i$ pour $1 \leq i \leq m$. Sous ces conditions, la série formelle $g_\alpha \circ \mathbf{f}$ appartient à $\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$ et la famille des $g_\alpha \circ \mathbf{f}$ est sommable dans $\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$. Enfin, si $x \in B(R)$, alors $\mathbf{f}(x) = (f_i(x))$ appartient à $B(R') \subset F_1 \times \dots \times F_m$ et on a :

$$g(\mathbf{f}(x)) = (g \circ \mathbf{f})(x).$$

3.1.10. Supposons que $E_i = K$ pour $1 \leq i \leq n$. L'espace $\hat{\mathcal{P}}(K^n; F)$ s'identifie alors à l'espace des séries formelles à n indéterminées X_1, \dots, X_n à

coefficients dans F et un élément de $\hat{P}(K^n; F)$ s'écrit :

$$f = \sum_{\alpha} X^{\alpha} c_{\alpha} \quad \text{avec } c_{\alpha} \in F.$$

Si $R \in (R_+^*)^n$ et si γ est une semi-norme continue sur F , on a :

$$\|f\|_{\gamma, R} = \|f\|_{\gamma, R} = \sum_{\alpha} R^{\alpha} \|c_{\alpha}\|_{\gamma}$$

On a $I(f) = \tilde{I}(f)$, $C(f) = \tilde{C}(f)$ et, lorsque $n = 1$, $\rho(f) = \tilde{\rho}(f)$.

L'espace $\mathcal{H}(K^n; K)$ des séries convergentes à coefficients dans K se note aussi $K\{\{X_1, \dots, X_n\}\}$; c'est une sous-algèbre de $K[[X_1, \dots, X_n]]$. L'espace $\mathcal{H}(K^n; F)$ est un module sur $K\{\{X_1, \dots, X_n\}\}$ et si F est de dimension finie, ce module s'identifie à $K\{\{X_1, \dots, X_n\}\} \otimes_K F$.

3.1.11. Soit $f \in \mathcal{H}(K^n; K^m)$, représenté par un système de m séries convergentes $f_j(X_1, \dots, X_n)$, à coefficients dans K . Soit de même $g \in \mathcal{H}(K^m; K^p)$, représenté par un système de p séries convergentes $g_k(Y_1, \dots, Y_m) = \sum g_{k,\beta} Y^{\beta}$. L'élément $h = g \circ f$ de $\mathcal{H}(K^n; K^p)$ (cf. 3.1.9) est représenté par p séries formelles $h_k(X_1, \dots, X_n)$, déterminées comme suit : pour $\alpha \in N^n$ et $\beta \in N^m$, soit $c_{\alpha,\beta}$ le coefficient de X^{α} dans la série formelle $f^{\beta} = \prod f_j^{\beta_j}$; alors la famille $(g_{k,\beta} c_{\alpha,\beta})_{\beta \in N^m}$ est sommable dans K et a pour somme le coefficient de X^{α} dans h_k .

3.1.12. Supposons F quasi-complet et soit \hat{E}_i le complété de E_i . Tout polynôme-continu sur $E_1 \times \dots \times E_n$ à valeurs dans F se prolonge par continuité en un polynôme-continu sur $\hat{E}_1 \times \dots \times \hat{E}_n$, à valeurs dans F . On en déduit une bijection j de $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ sur $\hat{P}(\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n; F)$. Si $f \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, alors $j(f) \in \mathcal{H}(\hat{E}_1, \dots, \hat{E}_n; F)$ et réciproquement. Les indicatrices de convergence strictes de f et de $j(f)$ sont les mêmes.

3.1.13. On suppose que $K = \mathbb{R}$, mais que F est muni d'une structure d'espace vectoriel complexe compatible avec sa structure d'espace vectoriel réel. Soit $E_i^C = E_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Si $y \in E_i^C$, posons

$$y = \inf \sum_k |a_k| \cdot \|x_k\|,$$

la borne inférieure étant étendue à toutes les familles finies de couples $(x_k, a_k) \in E_i \times \mathbb{C}$ telles que $y = \sum_k x_k \otimes a_k$. On obtient ainsi une norme sur l'espace vectoriel complexe E_i^C ; cette norme prolonge la norme donnée sur E_i si l'on convient d'identifier $x \in E_i$ à $x \otimes 1$. Soit h un \mathbb{R} -polynôme-continu sur $E_1 \times \dots \times E_n$, à valeurs dans F , et homogène de multidegré α ; il existe alors un \mathbb{C} -polynôme-continu \tilde{h} sur $E_1^C \times \dots \times E_n^C$, et un seul, à valeurs dans F , prolongeant h , et homogène de multidegré α . On a

$$\|\tilde{h}\|_{\gamma} = \|h\|_{\gamma}$$

pour toute semi-norme continue γ sur l'espace vectoriel complexe F .

Si $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, alors $\tilde{f} = \sum_{\alpha} \tilde{f}_{\alpha} \in \mathcal{H}(E_1^c, \dots, E_n^c; F)$. Les séries f et \tilde{f} ont même indicatrice de convergence stricte (et même rayon de convergence strict lorsque $n = 1$).

Inversement, supposons $K = \mathbb{C}$. Soient E_i^0 et F^0 les espaces sur \mathbb{R} obtenus par restriction des scalaires. Si $f_{\alpha} \in P_{\alpha}(E_1, \dots, E_n; F)$, alors $f_{\alpha} \in P_{\alpha}(E_1^0, \dots, E_n^0; F^0)$. Si $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, alors la série formelle $f^0 = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \in \hat{P}(E_1^0, \dots, E_n^0; F^0)$ est une série convergente. Les indicatrices de convergence (resp. les indicatrices de convergence strictes) de f et f^0 sont identiques et on a $f(x) = f^0(x)$ pour tout $x \in \tilde{C}(f) = \tilde{C}(f^0)$.

3.2. Fonctions analytiques

3.2.1. Soient U un ouvert de E et f une application de U dans F . On dit que f est de classe C^{ω} , ou *K-analytique* (ou simplement *analytique*) dans U si, pour tout point a de U , il existe une série convergente $f_a \in \mathcal{H}(E; F)$ telle que $f(a + x) = f_a(x)$ pour tout x dans E assez voisin de zéro. Si $K = \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}), on dit encore que f est *analytique réelle* (resp. *analytique complexe* ou *holomorphe*). Les applications analytiques de U dans F forment un sous-espace vectoriel, noté $\mathcal{C}^{\omega}(U; F)$, de l'espace de toutes les applications de U dans F .

Pour $a \in U$, la série formelle f_a est unique : on l'appelle le *développement en série entière* de f au point a . Si $f_a = \sum_{\alpha} (f_a)_{\alpha}$ (avec $(f_a)_{\alpha} \in P_{\alpha}(E_1, \dots, E_n; F)$), on pose :

$$\Delta^{\alpha} f(a) = (f_a)_{\alpha}.$$

3.2.2. Si $f \in \mathcal{C}^{\omega}(U; F)$, l'application $\Delta^{\alpha} f : a \mapsto \Delta^{\alpha} f(a)$ de U dans

$$P_{\alpha}(E_1, \dots, E_n; F)$$

est analytique. L'application $\Delta^{\alpha} : f \mapsto \Delta^{\alpha} f$ est une application K -linéaire de $\mathcal{C}^{\omega}(U; F)$ dans $\mathcal{C}^{\omega}(U; P_{\alpha}(E_1, \dots, E_n; F))$. Pour $a \in U$, on a donc, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $\Delta^{\beta}(\Delta^{\alpha} f)(a) \in P_{\beta}(E_1, \dots, E_n; P_{\alpha}(E_1, \dots, E_n; F))$. Si $x = (x_i) \in E$, on a donc $(\Delta^{\beta}(\Delta^{\alpha} f)(a))(x) \in P_{\alpha}(E_1, \dots, E_n; F)$ et $((\Delta^{\beta}(\Delta^{\alpha} f)(a))(x))(x) \in F$. Cet élément de F est égal à $((\alpha, \beta))(\Delta^{\alpha+\beta} f(a))(x)$. On exprime ceci en écrivant :

$$\Delta^{\beta} \circ \Delta^{\alpha} = ((\alpha, \beta)) \Delta^{\alpha+\beta}.$$

3.2.3. Les indicatrices de convergence strictes (et les rayons de convergence stricts lorsque $n = 1$) des développements en série entière de f et de $\Delta^{\alpha} f$ en un même point a de U , sont identiques.

3.2.4. Soit $f \in \mathcal{C}^\omega(U; F)$. Alors f est *strictement dérivable* et indéfiniment dérivable dans U (si $K = \mathbb{R}$, f est de classe C^∞ dans U). Les dérivées itérées de f sont analytiques, et leurs valeurs en un point a sont des applications multilinéaires symétriques. On peut alors introduire la notation $D^\alpha f$ pour les dérivées partielles itérées comme au n° 2.4.2. On a :

$$\alpha! D^\alpha f(a)(h) = D^\alpha f(a) \cdot (h, \dots, h)$$

quels que soient $a \in U$ et $h \in E$, ce qu'on écrit :

$$\alpha! D^\alpha f = D^\alpha f.$$

3.2.5. Soient U un ouvert de E et f, g deux applications analytiques de U dans F . Soit $a \in U$. Pour que f et g aient un contact d'ordre $\geq k$ en a , il faut et il suffit que $D^\alpha f(a) = D^\alpha g(a)$ pour tout α avec $|\alpha| \leq k$. Si f et g ont un contact d'ordre infini en a , elles sont égales dans un voisinage de a . L'ensemble des points de U où f et g ont un contact d'ordre infini est *ouvert et fermé*.

En particulier, si U est *connexe* et s'il existe une partie ouverte non vide de U sur laquelle f et g sont égales, on a $f = g$ (« principe du prolongement analytique »).

3.2.6. Soient U un ouvert de E et f une application analytique de U dans F . Si la dérivée Df de f est nulle, f est localement constante.

3.2.7. Supposons F quasi-complet et soit G un espace normé complet. Soit g une application analytique d'un ouvert U de E dans G et soit f une application analytique d'un ouvert V de G , contenant $g(U)$, dans F . L'application composée $f \circ g$ est analytique dans U . Supposons en outre que $0 \in U$ et que $g(0) = 0$. Le développement de $f \circ g$ en série entière en 0 s'obtient alors en substituant, dans le développement de f en 0 , le développement en série entière de g en 0 (3.1.9).

3.2.8. Soient F_1, \dots, F_m des espaces polynormés séparés et u une application multilinéaire continue de $F_1 \times \dots \times F_m$ dans F . Soient U un ouvert de E et $f_i \in \mathcal{C}^\omega(U; F_i)$. La fonction $u(f_1, \dots, f_m)$ est analytique, et son développement en série entière en un point $a \in U$ est la série $u((f_1)_a, \dots, (f_m)_a)$ (3.1.8).

3.2.9. On suppose F quasi-complet. Soit $f \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$; la fonction $x \mapsto f(x)$ (3.1.7) est analytique dans l'ouvert $C(f)$, domaine de convergence strict de f . Si $n = 1$ et si $\|a\| < \rho(f)$, le rayon de convergence strict du développement de f en série entière en a est au moins égal à $\rho(f) - \|a\|$. Si $\rho(f) = +\infty$, on dit que f est une fonction entière.

3.2.10. Gardons les hypothèses de 3.2.9. Si $K = \mathbb{C}$, les résultats de 3.2.9 restent exacts si l'on remplace $C(f)$ par $\tilde{C}(f)$ et $\rho(f)$ par $\tilde{\rho}(f)$ (pour $n = 1$). Si $K = \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)$ est analytique dans $\tilde{C}(f)$.

3.2.11. Supposons que $E_i = K$ pour $1 \leq i \leq n$. Soient U un ouvert de K^n et $f \in \mathcal{C}^m(K^n; F)$. Si $0 \in U$ et si $f_0 = \sum_{\alpha} X^{\alpha} c_{\alpha}$ est le développement en série entière de f en 0, le développement en série entière de $\Delta^{\alpha} f$ en 0 s'écrit (après identification de $P_{\alpha}(K^n; F)$ avec F):

$$(\Delta^{\alpha} f)_0 = \sum_{\beta} ((\alpha, \beta)) X^{\beta} c_{\alpha + \beta}.$$

On a en particulier pour $1 \leq i \leq n$ et pour $x \in C(f_0)$:

$$\partial_i f(x) = \sum_{\alpha} (\alpha_i + 1) x^{\alpha} c_{\alpha + \varepsilon_i}.$$

3.3 Fonctions holomorphes

Dans ce n^o, on suppose que $K = \mathbb{C}$.

3.3.1. On suppose F quasi-complet. Soient U un ouvert de E et f une application de U dans F . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est holomorphe;
- (ii) f est dérivable;
- (iii) f est localement bornée et quels que soient $a \in U$ et $h \in E$, la fonction $t \mapsto f(a + th)$, définie dans un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{C} , est holomorphe;
- (iv) f est localement bornée et pour toute forme linéaire continue u sur F , la fonction $u \circ f$ à valeurs dans \mathbb{C} est holomorphe;
- (v) f est continue et localement bornée et il existe un ensemble total H du dual de F tel que $u \circ f$ soit holomorphe pour tout $u \in H$.

Lorsque E est de dimension finie (resp. lorsque F est un espace de Banach), ces conditions sont encore équivalentes aux conditions (iii'), (iv') ou (v') (resp. (iv') ou (v')) obtenues à partir de (iii), (iv) ou (v) (resp. (iv) ou (v)) en enlevant l'hypothèse « f est localement bornée ».

3.3.2. Supposons F quasi-complet. Soient U un ouvert de E et (f_n) une suite d'applications holomorphes de U dans F , possédant la propriété suivante :

(W) Tout point de U possède un voisinage dans lequel la suite (f_n) converge uniformément.

Alors la limite f de la suite (f_n) est holomorphe, la suite des dérivées (Df_n) (à valeurs dans l'espace quasi-complet $\mathcal{L}(E; F)$) possède la propriété (W) et Df est la limite de (Df_n) .

3.3.3. Soient U un ouvert de E et f une application holomorphe de U dans F , supposé quasi-complet. Soit $R = (R_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et supposons que la polyboule $B(R)$ est contenue dans U et que f est bornée sur $B(R)$. On a alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $x = (x_i) \in B(R)$:

$$\Delta^\alpha f(0)(x) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(e(\theta_1)x_1, \dots, e(\theta_n)x_n) e(-\alpha_1\theta_1 - \cdots - \alpha_n\theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n$$

(avec $e(\theta) = \exp 2\pi i \theta$).

Soit de plus γ une semi-norme continue sur F et soit M la borne supérieure de $\|f(x)\|_\gamma$ pour $\|x_i\| = R_i$. On a $\|\Delta^\alpha f(0)(x)\|_\gamma \leq M$ pour tout $x \in B(R)$ et $\|\Delta^\alpha f(0)\|_\gamma \leq MR^{-\alpha}$. Enfin, le domaine de convergence du développement en série de f en 0 contient l'intérieur de la polyboule $B(R)$.

3.3.4. Gardons les hypothèses de 3.3.3 et supposons de plus que $E_i = \mathbb{C}$. Soit $\sum_\alpha X^\alpha c_\alpha$ le développement en série de f en 0. On a :

$$c_\alpha = R^{-\alpha} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(e(\theta_1)R_1, \dots, e(\theta_n)R_n) e(-\alpha_1\theta_1 - \cdots - \alpha_n\theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n$$

et :

$$\|c_\alpha\|_\gamma \leq R^{-\alpha} \sup_{x \in B(R)} \|f(x)\|_\gamma$$

(« inégalités de Cauchy »). Le domaine de convergence strict de la série $\sum_\alpha X^\alpha c_\alpha$ contient l'intérieur de $B(R)$.

3.3.5. Supposons E de dimension finie et F quasi-complet. Soit f une application holomorphe de E dans F . Il existe alors dans $\mathcal{H}(E; F)$ une série f_0 et une seule, de rayon de convergence infini (pour toute norme sur E), telle que $f(x) = f_0(x)$ pour tout $x \in E$.

3.3.6. Si f est une application holomorphe de E dans F telle que $f(E)$ soit borné, alors la fonction f est constante (« théorème de Liouville »).

3.3.7. On suppose que $E \neq 0$. Soit f une application holomorphe d'un ouvert U de E dans F . Soient a un point de U et γ une semi-norme continue sur F . Pour tout voisinage V de a , contenu dans U , il existe $x \in V$, $x \neq a$, tel que :

$$\|f(a)\|_\gamma \leq \|f(x)\|_\gamma.$$

Si de plus $F = \mathbb{C}$ et si f n'est pas constante au voisinage de a , on a $|f(a)| < \sup_{x \in V, x \neq a} |f(x)|$ et l'application f est ouverte au voisinage de a . Enfin, soit B un ouvert borné d'adhérence contenue dans U et soit B' sa

frontière. On a :

$$\sup_{x \in \bar{B}} |f(x)| = \sup_{x \in B'} |f(x)|$$

(« principe du maximum »).

3.3.8. Supposons E de dimension finie. Soient U un ouvert de E , S un sous-espace vectoriel de codimension ≥ 2 de E et f une application holomorphe de $U \cap (E - S)$ dans F . Alors f se prolonge par continuité en une application holomorphe de U dans F .

3.3.9. Supposons que $E = \mathbb{C}$ et soit $0 \leq \lambda < \mu \leq +\infty$. Soit f une application holomorphe de l'ouvert $U = \{z \in \mathbb{C} | \lambda < |z| < \mu\}$ dans F . Il existe une famille $(a_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ et une seule d'éléments de F telle que, pour tout compact H de U , la famille $(a_n(f)z^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ soit uniformément sommable de somme $f(z)$ pour z décrivant H (« développement de Laurent »).

Supposons de plus $\lambda = 0$. On appelle *ordre* de f au point $x = 0$ la borne inférieure (finie ou infinie) de l'ensemble des entiers n tels que $a_n(f) \neq 0$. S'il existe un voisinage V de 0 tel que f soit bornée dans $V - \{0\}$, alors f est d'ordre 0 au point $x = 0$ et se prolonge par continuité en une fonction holomorphe sur l'ouvert $|z| < \mu$. Soit p un entier > 0 ; si f est d'ordre $-p$ au point $x = 0$, on dit que 0 est un *pôle d'ordre* p de f .

3.3.10. Supposons que $E = \mathbb{C}$ et que F soit normé. Soit f une application holomorphe du disque unité ouvert U de E dans F , telle que $f(0) = 0$ et soit $M = \sup_{z \in U} \|f(z)\|$. On a alors $\|f(z)\| \leq M \cdot |z|$ pour tout $z \in U$ (« lemme de Schwarz »).

3.4. Fonctions analytiques réelles

Supposons que $K = \mathbb{R}$.

3.4.1. Soient U un ouvert de E et f une application de U dans F , supposé quasi-complet.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est analytique.
- (ii) f est de classe C^∞ et, pour tout $a \in U$, il existe un voisinage V_a de a et un nombre réel M tels que, pour toute semi-norme γ continue sur F , il existe une constante A_γ telle que l'on ait

$$\|\Delta^\alpha f(x)\|_\gamma \leq A_\gamma M^{|\alpha|} \quad \text{pour tout } x \in V_a \text{ et tout } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

3.4.2. Soient U un ouvert de E et f une application de U dans F . Si F est quasi-complet, et si son dual fort F' est un espace de Baire, alors f est analytique si et seulement si $u \circ f$ est analytique pour tout $u \in F'$.

§ 4. Fonctions analytiques (cas ultramétrique)

Dans ce paragraphe, on suppose que la valeur absolue de K est *ultramétrique*. On désigne par $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'espaces *normés* sur K , et par E l'espace produit des E_i , muni de la norme :

$$\|x\| = \sup \|x_i\| \quad \text{si } x = (x_i).$$

On désigne par F un espace polynormé *séparé* sur K .

4.1. Séries convergentes

4.1.1. Soit $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha}$ une série formelle appartenant à $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$, (cf. Appendice). Si γ est une semi-norme continue sur F , et $R = (R_i)$ est un système de n nombres réels > 0 , on pose

$$\|f\|_{\gamma, R} = \sup_{\alpha} \|f_{\alpha}\|_{\gamma} R^{\alpha}.$$

Les définitions et les résultats du n° 3.1.1 (deuxième alinéa) et du n° 3.1.2 s'appliquent sans changement ; on définit en particulier les espaces

$$\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F).$$

4.1.2. L'isomorphisme canonique j de $\hat{P}(E; F)$ sur $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ donne, par restriction, un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de $\mathcal{H}_R(E; F)$ sur $\mathcal{H}_{(R, \dots, R)}(E_1, \dots, E_n; F)$ pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$; il donne également un isomorphisme de $\mathcal{H}(E; F)$ sur $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$. Plus précisément, si $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha}$ et si $j(f) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}$, on a, pour toute semi-norme continue γ sur F :

$$\|f_m\|_{\gamma} = \sup_{|\alpha|=m} \|f_{\alpha}\|_{\gamma}$$

$$\|f\|_{\gamma, R} = \|j(f)\|_{\gamma, (R, \dots, R)}.$$

4.1.3. Soit $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha}$ un élément de $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$; soit $I(f)$ l'ensemble des $R \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que, pour toute semi-norme continue γ sur F , le produit $\|f_{\alpha}\|_{\gamma} R^{\alpha}$ tende vers zéro quand $|\alpha|$ tend vers l'infini. L'ensemble $I(f)$ est non vide ; on l'appelle *l'indicatrice de convergence stricte* de f . L'ensemble $\Omega(f)$ des points

$$(\log R_1, \dots, \log R_n) \quad \text{pour } R \in I(f)$$

est une partie *convexe* de \mathbb{R}^n .

Lorsque $n = 1$, l'ensemble $I(f)$ est un intervalle de \mathbb{R} , ouvert à

gauche et ouvert ou fermé à droite ; sa borne supérieure (finie ou $+\infty$) se note $\rho(f)$ et s'appelle le *rayon de convergence strict* de f .

Avec les notations de 4.1.2, on a $R \in I(f)$ si et seulement si

$$(R, \dots, R) \in I(j(f)).$$

L'ensemble des points $x = (x_i)$ tels qu'il existe $R = (R_i) \in I(f)$ avec $\|x_i\| \leq R_i$ pour $1 \leq i \leq n$ s'appelle le *domaine de convergence strict* de f et se note $C(f)$. C'est un ouvert de E , réunion des polyboules

$$B(R) = \{x \in E \mid \|x_i\| \leq R_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n\},$$

pour $R \in I(f)$.

4.1.4. Les résultats de 3.1.7 et 3.1.8 restent exacts, en y remplaçant partout $\tilde{C}(f)$ par $C(f)$ et $\tilde{\mathcal{H}}_R$ par \mathcal{H}_R .

4.1.5. Soient F_1, \dots, F_m des espaces normés complets et supposons F quasi-complet. Soit $f = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$, avec $f_i \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F_i)$ et soit $g \in \mathcal{H}(F_1, \dots, F_m; F)$, tels que le point $(f_i(0))_{1 \leq i \leq m}$ de E appartienne au domaine de convergence strict de g . Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$, la série formelle $g_\alpha \circ f$ appartient à $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ et la famille des $g_\alpha \circ f$ est sommable dans $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ (donc *a fortiori* dans $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$). Sa somme sera notée $g \circ f$.

De manière plus précise, il existe $R \in \bigcap_i I(f_i)$ et $R' \in I(g)$ tels que $\sup_{|\alpha| > 0} \|f_{i,\alpha}\| R^\alpha < R'_i$ (pour $1 \leq i \leq m$). Sous ces conditions la série formelle $g_\alpha \circ f$ appartient à $\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$ et la famille des $g_\alpha \circ f$ est sommable dans $\mathcal{H}_R(E_1, \dots, E_n; F)$. Enfin, si $x \in B(R)$, alors $f(x) = (f_i(x))$ appartient à $C(g)$ et on a :

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Supposons de plus que, pour chaque i , il existe une famille (e_j^i) d'éléments de E_i tel que tout élément x de E_i soit somme d'une famille sommable $(\lambda_j e_j^i)$ (avec $\lambda_j \in K$) telle que $\|x\| = \sup_j |\lambda_j|$. On peut alors dans l'alinéa précédent, remplacer la condition $\sup_{|\alpha| > 0} \|f_{i,\alpha}\| R^\alpha < R'_i$ par la condition $\|f_i\|_R \leq R'_i$.

4.1.6. Supposons que $E_i = K$ pour $1 \leq i \leq n$. L'espace $\hat{P}(K^n; F)$ s'identifie alors à l'espace des séries formelles à n indéterminées X_1, \dots, X_n à coefficients dans F et un élément f de $\hat{P}(K^n; F)$ s'écrit :

$$f = \sum_{\alpha} X^\alpha c_\alpha \quad \text{avec } c_\alpha \in F.$$

Si $R \in (R_+^*)^n$ et si γ est une semi-norme continue sur F , on a :

$$\|f\|_{\gamma, R} = \sup \|c_\alpha\|_\gamma \cdot R^\alpha.$$

Le dernier alinéa de 3.1.10 reste valable, ainsi que 3.1.11.

4.1.7. Supposons que K soit un sous-corps fermé d'un corps valué complet (nécessairement ultramétrique) L . Pour $y \in E_i \otimes_K L$, posons :

$$\|y\| = \inf_k (\sup_k |a_k| \cdot \|x_k\|)$$

la borne inférieure étant étendue à toutes les familles finies de couples $(x_k, a_k) \in E_i \times L$ telles que $y = \sum_k x_k \otimes a_k$. On obtient ainsi une norme sur le L -espace vectoriel $E_i \otimes_K L$, qui induit sur E_i la norme donnée. On désigne par E_i^L le complété de $E_i \otimes_K L$ pour cette norme.

Soit maintenant F un L -espace vectoriel polynormé séparé complet. Pour tout K -polynome-continu f_α , homogène de multidegré α , sur $E_1 \times \dots \times E_n$, à valeurs dans le K -espace vectoriel polynormé F_K sous-jacent à F , il existe un L -polynome-continu \tilde{f}_α et un seul, homogène de même multidegré, sur $E_1^L \times \dots \times E_n^L$, à valeurs dans F qui prolonge f_α . Pour toute semi-norme continue sur le L -espace vectoriel F , on a

$$\|\tilde{f}_\alpha\|_F = \|f_\alpha\|_{F_K}.$$

Si $f = \sum_\alpha f_\alpha \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F_K)$, alors $\tilde{f} = \sum_\alpha \tilde{f}_\alpha \in \mathcal{H}(E_1^L, \dots, E_n^L; F)$.

Les séries f et \tilde{f} ont même indicatrice de convergence stricte (et même rayon de convergence strict lorsque $n = 1$).

Inversement, soit L un sous-corps fermé non discret de K et soient E_i^0 et F^0 les espaces sur L obtenus par restriction des scalaires à partir des E_i et de F . Si $f = \sum_\alpha f_\alpha \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$, alors $f_\alpha \in P_\alpha(E_1^0, \dots, E_n^0; F^0)$; si l'on pose $f^0 = \sum_\alpha f_\alpha \in \hat{P}(E_1^0, \dots, E_n^0; F^0)$, alors $f^0 \in \mathcal{H}(E_1^0, \dots, E_n^0; F^0)$. On a $C(f) \subset C(f^0)$ et $f(x) = f^0(x)$ pour tout $x \in C(f)$.

4.2. Fonctions analytiques

4.2.1. Les définitions et résultats de 3.2.1 et 3.2.2 restent valables sans changements.

4.2.2. Avec les notations de 3.2.2, l'indicatrice de convergence stricte du développement en série entière de $\Delta^q f$ en un point a de U contient celle du développement en série entière de f en a .

4.2.3. Les résultats de 3.2.4, 3.2.5, 3.2.7, 3.2.8 et 3.2.11 restent exacts. Celui de 3.2.6 aussi, à condition de supposer en plus que K est de caractéristique zéro.

4.2.4. Supposons F quasi-complet et soit $f \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$. La fonction $x \mapsto f(x)$ est analytique dans $C(f)$. Pour tout $a \in C(f)$, l'indicatrice de convergence du développement en série entière de f en a est égale à celle de f .

4.3. Quelques inégalités

4.3.1. On suppose que K satisfait à l'une au moins des conditions suivantes :

- (a) le corps résiduel de K est infini ;
- (b) l'image de K par l'application $a \mapsto |a|$ est dense dans \mathbb{R}_+ . (Autrement dit, on suppose que K n'est pas localement compact).

Soit $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \in \mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ et soit $R \in I(f)$. On a :

$$\sup_{x \in B(R)} \|f(x)\|_{\gamma} = \sup_{\alpha} \sup_{x \in B(R)} \|f_{\alpha}(x)\|_{\gamma}$$

pour toute semi-norme continue γ sur F (« inégalités de Cauchy »).

4.3.2. Il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout polynôme homogène continu $f_{\alpha} \in P_{\alpha}(E_1, \dots, E_n; F)$ et tout $R \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, l'on ait :

$$a^{|\alpha|} R^{\alpha} |\alpha|! \|f_{\alpha}\|_{\gamma} \leq \sup_{x \in B(R)} \|f_{\alpha}(x)\|_{\gamma} \leq \|f_{\alpha}\|_{\gamma} R^{\alpha}$$

pour toute semi-norme continue γ sur F . Si K satisfait à la condition (b) de 4.3.1 ou si l'image de E_i par l'application $x \mapsto \|x\|$ est contenue dans l'image de K par l'application $a \mapsto |a|$ et contient R_i (pour $1 \leq i \leq n$), on peut prendre $a = 1$.

4.3.3. Si K est de caractéristique zéro, la série formelle $f = \sum_{\alpha} f_{\alpha}$ appartient à $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$ si et seulement si il existe $R \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que

$$\sup_{\alpha} \sup_{x \in B(R)} \|f_{\alpha}(x)\|_{\gamma} < +\infty$$

pour toute semi-norme continue γ sur F .

§ 5. Variétés

5.1. Cartes et atlas. Variétés

5.1.1. Soit X un ensemble. On appelle *carte* de X un triplet $c = (U, \varphi, E)$, où U est une partie de X , E un espace de Banach et φ une bijection de U sur un ouvert de E . On dit que U est le *domaine* de la carte c . Si E est de dimension finie n , on dit que c est de dimension n . Sinon, on pose $\dim c = +\infty$.

5.1.2. On dit que deux cartes $c = (U, \varphi, E)$ et $c' = (U', \varphi', E')$ de X sont C^r -compatibles (ou simplement compatibles lorsqu'il ne peut y avoir d'ambiguïté sur r) lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

- (a) $\varphi(U \cap U')$ (resp. $\varphi'(U \cap U')$) est ouvert dans E (resp. E');
- (b) l'application $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ (resp. $\varphi' \circ \varphi^{-1}$) de $\varphi'(U \cap U')$ sur $\varphi(U \cap U')$ (resp. de $\varphi(U \cap U')$ sur $\varphi'(U \cap U')$) est de classe C^r (cf. 2.3.1, 3.2.1 et 4.2.1).

5.1.3. On appelle C^r -atlas (ou simplement atlas) d'un ensemble X un ensemble de cartes de X deux à deux C^r -compatibles et dont les domaines ont pour réunion X tout entier. Deux atlas \mathcal{A} et \mathcal{B} de X sont dits C^r -équivalents si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est un atlas. La relation de C^r -équivalence entre atlas est une relation d'équivalence.

5.1.4. Soit \mathfrak{S} un ensemble d'espaces de Banach. On dit qu'un atlas \mathcal{A} est de *type* \mathfrak{S} si l'on a $E \in \mathfrak{S}$ pour toute carte $c = (U, \varphi, E)$ de \mathcal{A} . D'une manière analogue, on dit qu'un atlas \mathcal{A} est de *type hilbertien* (resp. de *type hilbertien de dimension dénombrable*) si E est un espace hilbertien (resp. hilbertien de type dénombrable) pour toute carte (U, φ, E) de \mathcal{A} .

5.1.5. On appelle *K-variété de classe C^r* (ou variété de classe C^r sur K , ou simplement variété lorsque il ne peut y avoir d'ambiguïté sur K et r) un ensemble X muni d'une classe d'atlas équivalents (*Ens.*, chap. II, § 6, n° 9) pour la relation de C^r -équivalence. Un atlas de cette classe est appelé un atlas de la variété X . Une carte appartenant à un atlas de X est appelée une carte de la variété X . Une carte de X dont le domaine contient un point $a \in X$ est appelée une *carte de X en a* . Une carte *centrée en a* est une carte (U, φ, E) de X en a telle que $\varphi(a) = 0$.

Si X est un ensemble et \mathcal{A} un atlas de X , l'ensemble X muni de la classe d'équivalence de \mathcal{A} est appelé la variété définie par \mathcal{A} .

Lorsque $r \neq \omega$ (donc $K = \mathbf{R}$), une variété de classe C^r est parfois appelée une *variété différentielle*. Une variété de classe C^∞ est encore appelée une *variété analytique sur K* (ou encore variété *K-analytique*).

Lorsque de plus $K = \mathbf{R}$ (resp. \mathbf{C} , \mathbf{Q}_p), on dit encore *variété analytique réelle* (resp. *analytique complexe*, *analytique p-adique*).

5.1.6. Soit X une variété. Les parties de X qui sont réunions de domaines de cartes de X forment l'ensemble des ouverts pour une topologie sur X , dite sous-jacente à la structure de variété de X . Pour toute carte $c = (U, \varphi, E)$ de X , l'application φ est un *homéomorphisme* de l'ouvert U muni de la topologie induite par celle de X sur l'ouvert $\varphi(U)$ de E .

L'espace topologique sous-jacent à X est un *espace de Baire*. Lorsque K est égal à \mathbf{R} ou \mathbf{C} , il est localement connexe.

Soit X une variété et soit \mathcal{A} un atlas de X . Pour que l'espace topologique X soit *séparé*, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : quelles que soient les cartes (U, φ, E) et (V, ψ, F) appartenant à l'atlas \mathcal{A} , le graphe de l'application $\psi \circ \varphi^{-1}$ de $\varphi(U \cap V)$ dans $\psi(U \cap V)$ est *fermé* dans $\varphi(U) \times \psi(V)$.

Soit X une variété ; supposons que l'espace topologique X soit *régulier*. Alors pour tout point $a \in X$, il existe une carte (U, φ, E) de X en a possédant la propriété suivante : pour qu'une partie Y de U soit *fermée dans* X , il faut et il suffit que son image $\varphi(Y)$ soit *fermée dans* E . Si l'espace X est paracompact, il existe sur X une distance compatible avec la topologie de X et faisant de X un espace métrique complet.

5.1.7. Soit \mathfrak{S} un ensemble d'espaces de Banach. On dit qu'une variété est *de type* \mathfrak{S} (resp. *de type hilbertien*, resp. *de type hilbertien de dimension dénombrable*) si elle possède un atlas de type \mathfrak{S} (resp. de type hilbertien, resp. de type hilbertien de dimension dénombrable). Si \mathfrak{S} est réduit à un seul élément E , une variété de type \mathfrak{S} est encore appelée une *variété pure* de type E .

On appelle *variété pure de dimension n* une variété pure de type K^n . On dit qu'une variété est *localement de dimension finie* si elle est de type \mathfrak{S} avec $\mathfrak{S} = \{K^n; n \in \mathbf{N}\}$.

5.1.8. Soit X une variété et soit $x \in X$. La dimension (finie ou $+\infty$) d'une carte de X en x ne dépend que de x . On l'appelle *dimension de X en x* et on la note $\dim_x X$. On appelle *dimension* de X et on note $\dim X$ la borne supérieure des $\dim_x X$ pour $x \in X$.

La fonction $x \mapsto \dim_x X$ est localement constante. La variété X est localement de dimension finie (resp. pure de dimension n) si et seulement si on a $\dim_x X < +\infty$ (resp. $\dim_x X = n$) pour tout $x \in X$.

5.1.9. Supposons K localement compact. Soit X une variété séparée. Alors, pour que X soit localement de dimension finie, il faut et il suffit que X soit localement compacte.

5.1.10. Soit X une variété et soient ξ^1, \dots, ξ^n des applications d'une partie U de X dans K . On dit que $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ est un *système de coordonnées* de X dans U si le triplet (U, ξ, K^n) est une carte de X ; cette carte se note aussi $(U; \xi)$ ou $(U; \xi^1, \dots, \xi^n)$. Si $a \in U$, on dit aussi que ξ est un *système de coordonnées de X en a* ; si de plus $\xi^i(a) = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, on dit que le système de coordonnées ξ est *centré en a* .

5.2. Exemples de variétés

5.2.1. Soit X un ensemble; il existe sur X une structure de variété et une seule pour laquelle l'espace topologique sous-jacent soit discret; cette structure est une structure de variété pure de dimension 0.

5.2.2. Soit E un espace de Banach. Le triplet $c = (E, \text{Id}_E, E)$ est une carte de E et $\mathcal{A} = \{c\}$ est un atlas de E , donc définit une structure de variété pure de type E sur E ; la topologie sous-jacente est la topologie donnée sur E . Lorsque l'on parlera par la suite de la structure de variété sur E , ce sera toujours à la structure précédente que l'on se référera.

En particulier, ceci s'applique à tout espace vectoriel de dimension finie sur K , muni de l'unique topologie séparée compatible avec sa structure vectorielle (*Esp. Vect. Top.*, chap. I, § 2, n° 3).

5.2.3. Soient X une variété et U une partie ouverte de X . Il existe sur U une structure de variété dont les cartes sont les cartes de la variété X de domaine contenu dans U . Cette structure est dite *induite* par celle de X (cf. n° 5.3.4); muni de cette structure, U s'appelle une *sous-variété ouverte* de X .

En particulier, tout ouvert d'un espace de Banach E est muni d'une structure canonique de variété pure de type E . Soit X une variété; pour qu'un triplet (U, φ, E) soit une carte de X , il faut et suffit que U soit ouvert dans X et que φ soit un isomorphisme de la sous-variété ouverte U de X sur une sous-variété ouverte de E .

5.2.4. Soient X un ensemble, et $(X_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X . On suppose donnée sur chaque X_i une structure de variété telle que la condition suivante soit remplie:

Quels que soient i et j dans I , l'ensemble $X_i \cap X_j$ est ouvert dans X_i et X_j et les structures de variétés induites sur $X_i \cap X_j$ par celles de X_i et X_j coïncident.

Il existe alors sur X une structure de variété et une seule telle que X_i soit une sous-variété ouverte de X pour tout i dans I . On dit que la variété X s'obtient par *recollement* des variétés X_i .

5.2.5. Soit X une variété. L'ensemble X_n des points x de X tels que

$\dim_x X = n$ (n entier ≥ 0) est une sous-variété ouverte de X , qui est pure de dimension n .

5.2.6. Soit E un espace de Banach. On peut munir l'ensemble $G(E)$ des sous-espaces vectoriels de E admettant un supplémentaire topologique d'une structure de variété analytique de la façon suivante : pour tout couple $(F_0, G_0) \in G(E) \times G(E)$ tel que $E = F_0 \oplus G_0$, on note U_{G_0} l'ensemble des $F \in G(E)$ admettant G_0 comme supplémentaire, et on définit une bijection φ_{F_0, G_0} de U_{G_0} sur l'espace de Banach $\mathcal{L}(F_0; G_0)$ en associant à tout $F \in U_{G_0}$ l'application de F_0 dans G_0 ayant pour graphe le sous-espace F de $E = F_0 \times G_0$. Les cartes $(U_{G_0}, \varphi_{F_0, G_0}, \mathcal{L}(F_0; G_0))$ forment un atlas de $G(E)$. Muni de la structure de variété définie par cet atlas, $G(E)$ s'appelle la *variété grassmannienne* de E .

L'espace topologique $G(E)$ est métrisable. Si K est localement compact et E de dimension finie, $G(E)$ est compact.

Pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble $G_n(E)$ (resp. $G^n(E)$) des $F \in G(E)$ de dimension (resp. codimension) n est ouvert et fermé dans $G(E)$ et est une sous-variété ouverte pure de $G(E)$. Si $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , $G_n(E)$ est connexe pour tout n .

L'application qui à $F \in G(E)$, associe son orthogonal dans le dual E' de E , est un morphisme de $G(E)$ dans $G(E')$ qui induit un isomorphisme de $G^n(E)$ sur $G_n(E')$ pour tout entier n .

Si $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , ou si E est de dimension finie, $G_1(E)$ n'est autre que l'espace projectif déduit de E , qui se trouve ainsi muni d'une structure de variété analytique.

5.3. Fonctions de classe C^r et morphismes de variétés

5.3.1. Soient X une variété de classe C^r , F un espace polynormé séparé et f une application de X dans F . On dit que f est de classe C^r si pour toute carte (V, φ, E) de X , l'application $f \circ \varphi^{-1}$ de $\varphi(V)$ dans F est de classe C^r . Pour cela, il suffit que cette condition soit satisfaite pour les cartes d'un atlas de X . L'ensemble des applications de classe C^r de X dans F forme un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications de X dans F . On le note $\mathcal{C}^r(X; F)$.

Lorsque $F = K$, on pose $\mathcal{C}^r(X; K) = \mathcal{C}^r(X)$; c'est une sous- K -algèbre de l'algèbre des applications de X dans K . Les éléments de $\mathcal{C}^r(X)$ sont encore appelés *fonctions morphiques*.

Lorsque X est un ouvert d'un espace de Banach, cette terminologie est en accord avec celle des nos 2.3.1, 3.2.1 et 4.2.1.

5.3.2. Soient X et Y deux variétés de classe C^r et soit f une application de X dans Y . On dit que f est de classe C^r ou est un *morphisme de variétés* (de classe C^r) si elle est continue et si, pour toute carte (V, ψ, F)

de Y , l'application $\psi \circ f$ de la sous-variété ouverte $f^{-1}(V)$ dans l'espace de Banach F est de classe C^r . Pour cela, il suffit qu'il existe un atlas \mathcal{A} de Y tel que, pour toute carte $(V, \psi, F) \in \mathcal{A}$, l'ensemble $f^{-1}(V)$ soit ouvert dans X et que l'application $\psi \circ f$ de la sous-variété ouverte $f^{-1}(V)$ de X dans F soit de classe C^r . L'ensemble des morphismes de X dans Y est noté $\mathcal{C}^r(X; Y)$. Lorsque Y est un espace de Banach muni de sa structure canonique de variété, les définitions de 5.3.1. et 5.3.2 sont cohérentes. Une application de classe C^ω est aussi appelée *application K-analytique* (ou simplement analytique). Lorsque $K = \mathbb{C}$, on dit aussi application holomorphe.

Soient (U, φ, E) une carte de X et (V, ψ, F) une carte de Y telles que $f(U) \subset V$. L'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de l'ouvert $\varphi(U)$ de E dans l'ouvert $\psi(V)$ de F est appelée *l'expression de f dans les cartes données*.

5.3.3. Supposons X et Y de dimension finie; soient $a \in X$, $b \in Y$ et f une application de X dans Y avec $f(a) = b$. Supposons d'abord que f soit de classe C^r et considérons des systèmes de coordonnées $(U; \xi^1, \dots, \xi^m)$ de X en a et $(V; \eta^1, \dots, \eta^n)$ de Y en b respectivement, avec $f(U) \subset V$. Soit ξ l'application (ξ^1, \dots, ξ^m) de U dans K^m . Il existe alors des fonctions u^j de classe C^r sur l'ouvert $\xi(U)$ de K^m , à valeurs dans K , telles que les coordonnées d'un point $y = f(x)$ de Y , (pour x dans U), soient données par les formules:

$$(1) \quad \eta^j(y) = u^j(\xi^1(x), \dots, \xi^m(x)) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n$$

ce qui équivaut à:

$$(2) \quad \eta^j \circ f = u^j(\xi^1, \dots, \xi^m) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n.$$

On dit que les formules précédentes constituent *l'expression de f au moyen des systèmes de coordonnées choisis*.

Réciproquement, si, pour tout point a de X , on peut trouver un système de coordonnées de X en a et un système de coordonnées de Y en $b = f(a)$ satisfaisant aux conditions précédentes, alors f est de classe C^r .

5.3.4. Les morphismes de variétés satisfont aux axiomes d'Ens., chap. IV, § 2:

a) Le composé de deux morphismes est un morphisme.

b) Pour qu'une bijection $f: X \rightarrow Y$ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que f et f^{-1} soient des morphismes.

5.3.5. Supposons que $r = \omega$. Soient X une variété et f, g deux applications analytiques de X dans un espace polynormé séparé ou dans une variété analytique *séparée*. L'ensemble des points au voisinage desquels f et g sont égales, est *ouvert et fermé* dans X .

5.3.6. Supposons que $K = \mathbf{R}$ et $r \neq \omega$. On dit qu'une variété X admet des partitions de l'unité de classe C' si, pour tout recouvrement ouvert localement fini de X , il existe une partition continue de l'unité (*Top. Gén.*, ch. IX, § 4, n° 3) subordonnée à ce recouvrement et formée de fonctions de classe C' .

Soit E un espace de Banach; considérons la propriété suivante:

(PU) *Quels que soient les sous-ensembles fermés disjoints A et B de E , il existe une fonction f de classe C' sur E , à valeurs dans \mathbf{R} , telle que $f(x) = 0$ pour $x \in A$, $f(x) = 1$ pour $x \in B$ et $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in E$.*

Si \mathfrak{S} est un ensemble d'espaces de Banach possédant la propriété (PU), toute variété paracompacte de type \mathfrak{S} admet des partitions de l'unité de classe C' .

Tout espace de dimension finie, tout espace hilbertien de type dénombrable possède la propriété (PU).

5.3.7. Supposons K ultramétrique. Soit X une variété paracompacte. Pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de X , il existe une partition de X en sous-ensembles ouverts et fermés subordonnée au recouvrement \mathcal{U} .

5.3.8. Supposons K localement compact. Soient X et Y deux variétés pures de dimension finie, et soit f un morphisme de X dans Y . Si $\dim X < \dim Y$ et si la topologie de X admet une base dénombrable d'ouverts, $f(X)$ est maigre dans Y .

5.4. Caractérisation des variétés par leurs faisceaux de fonctions

5.4.1. Soit X un espace topologique, et soit Y un ensemble. Supposons donné, pour tout ouvert U de X , un ensemble $\mathcal{L}(U)$ d'applications de U dans Y . Nous dirons que la famille $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(U)\}$ est un faisceau de fonctions à valeurs dans Y si elle vérifie la condition suivante:

Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X , de réunion U , et soit f une application de U dans Y ; pour que f appartienne à $\mathcal{L}(U)$, il faut et il suffit que $f|U_i$ appartienne à $\mathcal{L}(U_i)$ pour tout i dans I .

5.4.2. Soient X et Y deux variétés; pour tout ouvert $U \subset X$, soit $\mathcal{L}(U)$ l'ensemble des morphismes de U dans Y ; alors \mathcal{L} est un faisceau de fonctions à valeurs dans Y .

Lorsque $Y = K$, on note \mathcal{C}_X le faisceau ainsi défini.

5.4.3. Soit X un espace topologique et soit \mathfrak{S} un ensemble d'espaces de Banach. Pour tout $E \in \mathfrak{S}$, soit \mathcal{F}_E un faisceau de fonctions sur X à valeurs dans E . Supposons que la famille des \mathcal{F}_E , pour $E \in \mathfrak{S}$, vérifie la condition suivante:

Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x , un espace

$E_0 \in \mathfrak{S}$, et un homéomorphisme φ de U sur un ouvert de E_0 , tels que, pour tout ouvert $V \subset U$ et tout $E \in \mathfrak{S}$, l'ensemble $\mathcal{F}_E(V)$ se compose des fonctions $g \circ \varphi$, où g parcourt l'espace $\mathcal{C}^r(\varphi(V); E)$.

Il existe alors sur X une structure de variété de classe C^r et de type \mathfrak{S} et une seule, compatible avec la topologie donnée sur X et pour laquelle \mathcal{F}_E est le faisceau des fonctions de classe C^r sur X à valeurs dans E .

5.4.4. Soit X un espace topologique et soit \mathcal{F} un faisceau de fonctions à valeurs dans K , vérifiant la condition suivante: pour tout point x de X , il existe un entier n , un voisinage ouvert U de x et un homéomorphisme φ de U sur un ouvert de K^n , tels que, pour tout ouvert V de U , l'ensemble $\mathcal{F}(V)$ se compose des fonctions $g \circ \varphi$ où g parcourt l'ensemble des fonctions de classe C^r à valeurs dans K sur l'ouvert $\varphi(V)$ de K^n .

Il existe alors sur X une structure de variété localement de dimension finie et de classe C^r et une seule telle que $\mathcal{F} = \mathcal{C}_X^r$.

5.4.5. Soient X et X' deux variétés de classe C^r , localement de dimension finie, et soit f une application continue de X dans X' . Pour que f soit un morphisme, il faut et il suffit que pour tout ouvert U' de X' et toute fonction $g \in \mathcal{C}^r(U'; K)$, la fonction $g \circ f$ appartienne à $\mathcal{C}^r(U; K)$, avec $U = f^{-1}(U')$.

5.5. *Espaces tangents, applications linéaires tangent*

5.5.1. Soit X une variété et soit $a \in X$. Considérons les couples (c, h) où $c = (U, \varphi, E)$ est une carte de la variété X en a et où h est un élément de E . Deux tels couples (c, h) et (c', h') sont dits équivalents si la dérivée en $\varphi(a)$ de l'application $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ (qui est définie sur un voisinage de $\varphi(a)$) transforme h en h' . On obtient ainsi une relation d'équivalence entre couples (c, h) et on appelle *vecteur tangent en a à X* une classe de couples (c, h) équivalents (*Ens.*, chap. II, § 6, n° 9).

Les vecteurs tangents en a à X forment un ensemble noté $T_a(X)$. Si $c = (U, \varphi, E)$ est une carte de la variété X en a , l'application θ_c de E dans $T_a(X)$ qui associe à un élément h de E le vecteur tangent représenté par le couple (c, h) est une *bijection*. Si l'on transporte à $T_a(X)$, au moyen de θ_c , la structure de K -espace vectoriel topologique de E , la structure ainsi obtenue ne dépend pas du choix de c et fait de $T_a(X)$ un espace de Banach, appelé *espace tangent à X en a* . La dimension (finie ou $+\infty$) de $T_a(X)$ est égale à la dimension de X en a .

5.5.2. Soient X, Y deux variétés, f un morphisme de X dans Y et a un point de X . Considérons une carte $c = (U, \varphi, E)$ de X en a et une carte $c' = (V, \psi, F)$ de Y en b avec $f(U) \subset V$; l'application $\Phi = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de $\varphi(U)$ dans F est de classe C^r , et sa dérivée $D\Phi(\varphi(a))$ au point $\varphi(a)$

est une application linéaire continue de E dans F . L'application linéaire continue $\theta_{c'} \circ D\Phi(\varphi(a)) \circ \theta_c^{-1}$ de $T_a(X)$ dans $T_b(Y)$ ne dépend pas des cartes c et c' choisies; on la note $T_a(f)$ et on l'appelle l'*application linéaire tangente à f en a* . Si g est un morphisme de Y dans une variété Z , on a :

$$T_a(g \circ f) = T_{f(a)}(g) \circ T_a(f).$$

5.5.3. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés. Si f est localement constant, on a $T_a(f) = 0$ pour tout a dans X . Réciproquement, si $T_a(f) = 0$ pour tout $a \in X$ et si le corps K est de *caractéristique* 0, alors f est localement constant.

5.5.4. Soient U un ouvert d'une variété X et f l'injection canonique de U dans X ; pour tout point a de U , l'application $T_a(f)$ de $T_a(U)$ dans $T_a(X)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques, par lequel on *identifera* désormais ces deux espaces.

5.5.5. Soit U un ouvert d'un espace de Banach E ; si ι est l'injection canonique de U dans E , le triplet $c = (U, \iota, E)$ est une carte de U , et l'atlas $\{c\}$ définit la structure de variété de U . Etant donné un point a de U , l'application θ_c est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de E sur $T_a(U)$; l'isomorphisme réciproque sera noté $\zeta_E(a)$.

Soit f une application de classe C^r de U dans un ouvert V d'un espace de Banach F ; pour tout point a de U , on a :

$$Df(a) \circ \zeta_E(a) = \zeta_F(f(a)) \circ T_a(f)$$

où $Df(a)$ est la dérivée de f en a (1.2.1). Autrement dit, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} T_a(U) & \xrightarrow{T_a(f)} & T_{f(a)}(V) \\ \downarrow \zeta_E(a) & & \downarrow \zeta_F(f(a)) \\ E & \xrightarrow{Df(a)} & F \end{array}$$

est commutatif.

5.5.6. On appelle *vecteur cotangent à X en a* , ou encore *covecteur tangent* ou simplement *covecteur en a* , toute forme linéaire continue sur l'espace vectoriel topologique $T_a(X)$; ces covecteurs sont donc les éléments du dual topologique $T_a(X)'$ de l'espace tangent à X en a . On munira cet espace de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $T_a(X)$: muni de cette topologie, $T_a(X)'$ est un espace de Banach qu'on appelle *espace cotangent à X en a* . On le note aussi $T'_a(X)$.

Soit f un morphisme de X dans un espace de Banach E . On appelle *différentielle de f en a* et on note $d_a f$ ou df_a l'application linéaire continue $\zeta_E(f(a)) \circ T_a(f)$ de $T_a(X)$ dans E . Pour $t \in T_a(X)$, on note parfois

$t(f)$ ou $t.f$ la valeur $d_a f(t)$ de l'application linéaire $d_a f$ au point t . L'application $f \mapsto d_a f$ est linéaire.

Si $E = K$, la différentielle $d_a f$ de f en a est un covecteur de X en a .

Soient E, F, G trois espaces de Banach et soit $(u, v) \mapsto u.v$ une application bilinéaire continue de $F \times G$ dans E . Soit f (resp. g) un morphisme de X dans F (resp. G). Alors l'application $f.g : x \mapsto f(x).g(x)$ est un morphisme de X dans E et on a, pour tout $t \in T_a(X)$:

$$d_a(f.g)(t) = f(a).d_a g(t) + d_a f(t).g(a).$$

Prenons en particulier $G = E$ et $F = K$, l'application bilinéaire considérée étant la multiplication. On a alors:

$$d_a(fg) = f(a)d_a g + g(a)d_a f.$$

5.5.7. Soit X une variété localement de dimension finie et soient ξ^1, \dots, ξ^m des fonctions morphiques définies dans un voisinage ouvert U d'un point a de X . Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) il existe un voisinage ouvert V de a contenu dans U , tel que les fonctions $\xi^i|_V$ (pour $1 \leq i \leq m$) forment un système de coordonnées de X dans V ;

(ii) les différentielles $d_a \xi^i$ pour $1 \leq i \leq m$ forment une base de $T_a(X)'$;

(iii) l'application $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$ de U dans K^m est étale en a (voir n° 5.7.6).

Pour que les différentielles $d_a \xi^1, \dots, d_a \xi^m$ soient linéairement indépendantes, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage V de a , contenu dans U , tel que les fonctions $\xi^i|_V$ fassent partie d'un système de coordonnées de X dans V .

5.5.8. Soit X une variété localement de dimension finie et soit $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$ un système de coordonnées de X dans un ouvert U . Soit $a \in U$: on note $(\partial_{1,a}, \dots, \partial_{m,a})$ la base de l'espace tangent $T_a(X)$ duale de la base $(d_a \xi^1, \dots, d_a \xi^m)$ de $T_a(X)'$. On a donc:

$$\partial_{i,a}(\xi^j) = \delta_{i,j} \quad (\text{indice de Kronecker}).$$

Le vecteur tangent $\partial_{i,a}$ se note aussi $(\partial/\partial \xi^i)_a$.

Soit f une fonction de classe C^r sur U , à valeurs dans un espace de Banach E . On note $\partial_i f$ ou $\partial f / \partial \xi^i$ la fonction $a \mapsto \partial_{i,a}(f)$: c'est une fonction de classe C^{r-1} sur U à valeurs dans E (une fonction continue si $r = 1$). Sa valeur en un point a de U est parfois notée $(\partial f / \partial \xi^i)_a$. Pour tout $t \in T_a(X)$, on a:

$$d_a f(t) = \sum_{i=1}^m d_a \xi^i(t) \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(a),$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$d_a f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial \xi^i}(a) d_a \xi^i.$$

Ces notations sont cohérentes avec celles de 1.6.3.

5.5.9. Soient X et Y deux variétés et f un morphisme de X dans Y . On appelle *rang de f* en un point a de X , et on note $\text{rg}_a f$, le rang (fini ou égal à $+\infty$) de l'application linéaire $T_a(f)$. L'application $a \mapsto \text{rg}_a f$ est semi-continue inférieurement.

5.6. Produits de variétés

5.6.1. Soient X et X' deux ensembles et soit $c = (U, \varphi, E)$ (resp. $c' = (U', \varphi', E')$) une carte de X (resp. X'). Le triplet

$$(U \times U', \varphi \times \varphi', E \times E')$$

est une carte de l'ensemble produit $X \times X'$, notée $c \times c'$.

5.6.2. Soient X et X' deux variétés de classe C^r . Il existe sur l'ensemble produit $X \times X'$ une structure de variété de classe C^r et une seule telle que $c \times c'$ soit une carte de $X \times X'$ pour toute carte c de X et toute carte c' de X' . Muni de cette structure, $X \times X'$ s'appelle la *variété produit* des variétés X et X' . On définit de même le produit d'un nombre fini quelconque de variétés. La topologie de la variété $X \times X'$ est la topologie produit des topologies de X et de X' . Pour $a \in X$ et $b \in X'$, on a :

$$\dim_{(a,b)}(X \times X') = \dim_a X + \dim_b X'.$$

5.6.3. Soient X et X' deux variétés, et soit $X \times X'$ leur produit. Soit $a \in X$ et soit $a' \in X'$. Les projections canoniques

$$\text{pr}_1 : X \times X' \rightarrow X \quad \text{et} \quad \text{pr}_2 : X \times X' \rightarrow X'$$

sont des morphismes. Soient π_i ($i = 1, 2$) leurs applications linéaires tangentes au point (a, a') . L'application

$$(\pi_1, \pi_2) : T_{(a,a')}(X \times X') \rightarrow T_a(X) \times T_{a'}(X')$$

est un *isomorphisme*, ce qui permet d'identifier l'espace tangent à $X \times X'$ en (a, a') au produit $T_a(X) \times T_{a'}(X')$.

L'injection de $T_a(X)$ dans $T_{(a,a')}(X \times X')$ résultant de cette identification est l'application linéaire tangente en a au morphisme $x \mapsto (x, a')$ de X dans $X \times X'$; on a un résultat analogue pour l'injection de $T_{a'}(X')$ dans $T_{(a,a')}(X \times X')$.

5.6.4. Soient W , X et X' trois variétés, et soient $f : W \rightarrow X$, $f' : W \rightarrow X'$ deux applications. Pour que l'application

$$(f, f') : W \rightarrow X \times X'$$

soit un morphisme, il faut et il suffit que f et f' soient des morphismes (cela justifie l'emploi du terme « produit », cf. *Ens.*, chap. IV, § 2, n° 4). Dans ce cas, si a est un point de W , on a :

$$T_a(f, f') = (T_a(f), T_a(f')),$$

compte tenu de l'identification faite ci-dessus.

5.6.5. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $f' : X' \rightarrow Y'$ des morphismes de variétés. Alors $f \times f' : X \times X' \rightarrow Y \times Y'$ est un morphisme. Si $a \in X$ et $a' \in X'$, on a :

$$T_{(a,a')}(f \times f') = T_a(f) \times T_{a'}(f')$$

$$\text{rg}_{(a,a')}(f \times f') = \text{rg}_a f + \text{rg}_{a'} f'.$$

5.6.6. Soient X_1 , X_2 et Z trois variétés et f un morphisme de $X_1 \times X_2$ dans Z . Soit $a \in X_1$ et $b \in X_2$. L'application linéaire tangente à l'application partielle $x \mapsto f(x, b)$ (resp. $y \mapsto f(a, y)$) de X_1 (resp. X_2) dans Z se note $T_{(a,b)}^1(f)$ (resp. $T_{(a,b)}^2(f)$). Si l'on identifie $T_{(a,b)}(X_1 \times X_2)$ à $T_a(X_1) \times T_b(X_2)$, on a :

$$T_{(a,b)}(f) \cdot (u, v) = T_{(a,b)}^1(f) \cdot u + T_{(a,b)}^2(f) \cdot v$$

pour tout $u \in T_a(X_1)$ et tout $v \in T_b(X_2)$.

5.6.7. (« Théorème des fonctions implicites »). Les hypothèses et notations étant celles du numéro précédent, supposons de plus que $T_{(a,b)}^2(f)$ soit *bijectif*. Il existe alors un voisinage ouvert U de a dans X_1 et un voisinage ouvert V de b dans X_2 possédant la propriété suivante : pour tout $x \in U$, il existe un point $g(x)$ de V et un seul tel que $f(x, g(x)) = f(a, b)$, et l'application g est un morphisme de U dans V . Pour tout $x \in U$, on a :

$$T_x(g) = -(T_{(x,g(x))}^2(f))^{-1} \circ T_{(x,g(x))}^1(f).$$

5.7. Immersions, morphismes étales

5.7.1. Soient X et Y deux variétés, f un morphisme de X dans Y et a un point de X . Posons $b = f(a)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application linéaire $T_a(f)$ est injective et son image est un sous-

espace vectoriel fermé de $T_b(Y)$ admettant un supplémentaire topologique¹ ;

(ii) Il existe un espace de Banach F , un sous-espace vectoriel fermé E de F admettant un supplémentaire topologique, et des cartes (U, φ, E) de X en a et (V, ψ, F) de Y en b telles que $f(U) \subset V$ et $\varphi = \psi \circ (f|U)$.

(iii) Il existe un voisinage ouvert U de a , un voisinage ouvert V de b contenant $f(U)$, une variété Z , un point c de Z , et un isomorphisme de variétés g de $U \times Z$ sur V tels que $f(x) = g(x, c)$ pour tout $x \in U$.

(iv) Il existe un voisinage ouvert U de a , un voisinage ouvert V de b et un morphisme q de V dans X avec $f(U) \subset V$, et $q(f(x)) = x$ pour tout $x \in U$.

Lorsque X et Y sont de dimension finie, les conditions précédentes sont encore équivalentes à la suivante :

(v) Il existe un voisinage ouvert U de a , un système de coordonnées (η^1, \dots, η^n) de Y dans un voisinage ouvert V de b contenant $f(U)$ et un entier $m \leq n$ tels que $\eta^j \circ f = 0$ pour $m < j \leq n$ et que les fonctions $\eta^1 \circ f, \dots, \eta^m \circ f$ forment un système de coordonnées de X dans U .

Si les propriétés (i) à (iv) sont satisfaites, on dit que f est une *immersion en a* .

L'ensemble des points où f est une immersion est ouvert dans X ; si cet ouvert est X tout entier, on dit que f est une *immersion*.

Pour que f soit une immersion, il faut et il suffit que l'on puisse recouvrir X par des ouverts U_i tels que, pour tout i , $f|U_i$ soit un isomorphisme de U_i sur une sous-variété de Y (cf. n° 5.8.3).

5.7.2. Exemples :

(a) Si X est un ouvert d'une variété Y , l'injection canonique de X dans Y est une immersion.

(b) Soient E et F deux espaces de Banach et u une application linéaire continue de E dans F . Alors u est une immersion si et seulement si u est un isomorphisme de E sur un sous-espace vectoriel fermé de F admettant un supplémentaire topologique.

5.7.3. Soient $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ deux morphismes. Si f et g sont des immersions, $g \circ f$ est une immersion. Réciproquement, si $g \circ f$ est une immersion, alors f est une immersion. Si $f: X \rightarrow Y$ et $f': X' \rightarrow Y'$ sont des immersions, $f \times f'$ est une immersion.

5.7.4 Supposons que X et Y soient des variétés de dimension finie sur un corps K de caractéristique 0. Si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme injectif, l'ensemble des points de X où f est une immersion est un ouvert dense

¹ Tout sous-espace vectoriel fermé de codimension finie d'un espace de Banach admet un supplémentaire topologique ; si $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , il en est de même de tout sous-espace vectoriel (nécessairement fermé) de dimension finie.

dans X . Si $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , ce résultat reste vrai si l'on suppose seulement que X est de dimension finie.

5.7.5. Soit $f : X \rightarrow Y$ une immersion et soit g une application *continue* d'une variété Z dans X . Pour que g soit un morphisme, il faut et il suffit que $f \circ g$ soit un morphisme.

5.7.6. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, et soit a dans X . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $T_a(f)$ est *bijectif*.

(ii) Il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V de $f(a)$ tels que f induise un isomorphisme de U sur V .

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on dit que f est un *isomorphisme local en a* , ou que f est *étale en a* . Si cela a lieu pour tout $a \in X$, on dit que f est *étale*, ou est un *étalement*, ou que X est *étalé dans Y* (au moyen de f). Pour qu'un morphisme soit étale, il faut et il suffit que ce soit à la fois une immersion (n° 5.7.1) et une submersion (n° 5.9.1.).

5.7.7. Soit $f : X \rightarrow Y$ une immersion; supposons la variété X pure de dimension finie. Alors f est étale dans chacun des deux cas suivants :

(i) $\dim Y = \dim X$;

(ii) f est surjective et la topologie de X admet une base dénombrable d'ouverts.

5.7.8. Pour qu'un morphisme f soit un isomorphisme sur une sous-variété ouverte (resp. un isomorphisme), il faut et il suffit que f soit étale et injectif (resp. étale et bijectif).

5.8. Images inverses de structures de variété, sous-variétés

5.8.1. Soient X un espace topologique, Y une variété et f une application de X dans Y . Considérons les conditions suivantes :

(QR) (resp. (R)) Pour tout $a \in X$, il existe un voisinage ouvert U de a dans X et une carte (V, φ, E) de la variété Y en $f(a)$ tels que $f(U) \subset V$ et que $\varphi \circ f$ induise un homéomorphisme de U sur l'intersection de $\varphi(V)$ avec un sous-espace vectoriel fermé (resp. fermé et admettant un supplémentaire topologique) F de E .

Si la condition (QR) est réalisée, il existe sur X une structure de variété et une seule pour laquelle les triplets $(U, \varphi \circ f, F)$ (avec les notations de (QR)) sont des cartes de X . On l'appelle la structure *image inverse* de la structure de variété de Y par f . Sa topologie est celle de X .

Pour qu'il existe sur X une structure de variété compatible avec la topologie donnée et pour laquelle f soit une *immersion*, il faut et il suffit que la

condition (R) soit satisfaite. Cette structure est alors unique : c'est l'image inverse par f de la structure de variété de Y .

5.8.2. La condition (R) ci-dessus est notamment satisfaite lorsque pour tout $a \in X$ il existe un voisinage ouvert U de a tel que $f|U$ soit un homéomorphisme de U sur un ouvert de Y . Dans ce cas, la variété X obtenue est étalée sur Y (5.7.6).

5.8.3. Supposons maintenant que X soit un sous-espace topologique de Y , f étant l'injection canonique. Si f satisfait à la condition (R) (resp. (QR)) du n° 5.8.1, on dit que X , muni de la structure image inverse de la structure de variété de Y par f , est une *sous-variété* (resp. *quasi-sous-variété*) de Y . Une sous-variété est une quasi-sous-variété.

Toute quasi-sous-variété est *localement fermée*; tout ouvert est une sous-variété et sa structure est celle définie au n° 5.2.3.

Lorsque Y est localement de dimension finie, un sous-espace topologique X de Y est une sous-variété de Y si et seulement si, pour tout $a \in X$, il existe un voisinage ouvert U de a dans Y , un système de coordonnées (ξ^1, \dots, ξ^m) de Y dans U , et un entier $k \leq m$ tels que $U \cap X$ soit l'ensemble des points de U où s'annulent simultanément les fonctions ξ^i pour $1 \leq i \leq k$.

Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés. Supposons que f soit une *immersion*, et que f induise un *homéomorphisme* de X sur $f(X)$. Alors $f(X)$ est une sous-variété de Y , et f induit un isomorphisme de X sur $f(X)$; on dit alors que f est un *plongement* de X dans Y .

5.8.4. Soient Y et W deux variétés, soit X une sous-variété de Y et soit f une application de X dans W . Pour que f soit un morphisme, il faut et il suffit que, pour tout $a \in X$, il existe un voisinage U de a dans Y et un morphisme $g: U \rightarrow W$ tels que g coïncide avec f sur $U \cap X$.

5.8.5. Soit X une quasi-sous-variété d'une variété Y , et soit g une application d'une variété Z dans X . Supposons que K soit de caractéristique 0, ou que X soit une sous-variété de Y . Pour que g soit un morphisme de Z dans X , il faut et il suffit que ce soit un morphisme de Z dans Y : autrement dit, la structure de variété de X est *induite* par celle de Y (Ens., ch. IV, § 2, n° 4).

5.8.6. Si X est une sous-variété (resp. quasi-sous-variété) de Y et si Y est une sous-variété d'une variété Z , alors X est une sous-variété (resp. quasi-sous-variété) de Z .

5.8.7. Soit X_i (pour $i = 1, 2$) une variété et soit Y_i une sous-variété (resp. quasi-sous-variété) de X_i (pour $i = 1, 2$). Alors $Y_1 \times Y_2$ est une sous-variété (resp. quasi-sous-variété) de $X_1 \times X_2$.

5.8.8. Soit X une quasi-sous-variété d'une variété Y ; soit x un point de X et notons f l'injection canonique de X dans Y . L'application $T_x(f) : T_x(X) \rightarrow T_x(Y)$ est injective et elle permet d'identifier l'espace $T_x(X)$ à un sous-espace vectoriel fermé de $T_x(Y)$. L'espace vectoriel topologique quotient $T_x(Y)/T_x(X)$ est un espace de Banach, qu'on appelle *espace transversal* en x à X (dans Y). Sa dimension (finie ou $+\infty$) s'appelle la *codimension* de X dans Y au point x .

Si de plus X est une *sous-variété* de Y , alors l'espace $T_x(X)$ admet un supplémentaire topologique dans $T_x(Y)$.

5.8.9. Soit f une application d'une variété X dans une variété Y , et soit Γ son graphe. Pour que f soit un morphisme, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- (i) Γ est une sous-variété de $X \times Y$.
- (ii) Pour tout $(x, y) \in \Gamma$, on a

$$T_{(x,y)}(X \times Y) = T_{(x,y)}(\Gamma) \oplus T_y(Y).$$

S'il en est ainsi, l'application pr_1 induit un *isomorphisme* de Γ sur X , et $T_{(x,y)}(\Gamma)$ s'identifie au graphe de $T_x(f)$.

En particulier, la diagonale de $X \times X$ est une sous-variété de $X \times X$.

5.8.10. Soit Y une variété, et soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille finie de fonctions morphiques sur Y . Soit X l'ensemble des $x \in Y$ tels que $f_i(x) = 0$ pour tout i . Faisons l'hypothèse suivante :

(J) Pour tout $x \in X$, les différentielles $d_x f_i$ sont linéairement indépendantes dans $T_x(Y)$.

Alors X est une sous-variété fermée de Y , l'espace tangent $T_x(X)$ est le sous-espace de $T_x(Y)$ formé des α tels que $\alpha \cdot f_i = 0$ pour tout i dans I . De plus, la codimension de X dans Y est égale à $\text{Card}(I)$ en chacun de ses points.

5.8.11. (Points simples d'un idéal). Soit \mathfrak{a} un idéal de l'algèbre de polynômes $K[X_1, \dots, X_n]$. Un point $x = (x_1, \dots, x_n)$ de K^n est appelé un *zéro* de \mathfrak{a} si $f(x) = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{a}$. Si $x \in K^n$, notons S_x la sous-algèbre de $K(X_1, \dots, X_n)$ formée des fractions f/g , avec $f, g \in K[X_1, \dots, X_n]$, et $g(x) \neq 0$; notons \mathfrak{a}_x l'idéal de S_x engendré par \mathfrak{a} dans S_x . Un point x est appelé un *zéro simple* de \mathfrak{a} si c'est un zéro de \mathfrak{a} et si la condition suivante est satisfaite :

(S) Il existe une suite finie (f_1, \dots, f_m) d'éléments de \mathfrak{a} qui engendrent l'idéal \mathfrak{a}_x et dont les différentielles en x sont linéairement indépendantes. (Cette condition équivaut à dire que l'anneau local S_x/\mathfrak{a}_x est *régulier* (Alg. Comm., à paraître).)

Soit Z (resp. Z_s) l'ensemble des zéros (resp. des zéros simples) de \mathfrak{a} . L'ensemble Z est fermé dans K^n , Z_s est ouvert dans Z , et Z_s est une

sous-variété de K^n . Si $x \in Z_s$, l'idéal $K[X_1, \dots, X_n] \cap \mathfrak{a}_x$ se compose des polynômes f nuls sur un voisinage de x dans Z_s .

Soit $\bar{\alpha}$ l'idéal des polynômes nuls sur Z . Si K est algébriquement clos, l'ensemble des zéros simples de α est dense dans Z .

5.8.12. Soient X une variété et L l'ensemble des couples (x, Z) où x est un point de X et Z une sous-variété de X contenant x . Étant donnés deux couples $\pi = (x, Z)$ et $\pi' = (x', Z')$, nous noterons $R\{\pi, \pi'\}$ la relation :

« On a $x = x'$ et il existe un voisinage U de x tel que $U \cap Z = U \cap Z'$ ». Alors R est une relation d'équivalence dans L ; on note $\gamma_x(Z)$ la classe d'équivalence du couple $(x, Z) \in L$. Sur l'ensemble $J = L/R$, il existe une structure de variété et une seule qui vérifie la condition suivante :

Pour toute sous-variété Z de X , l'application $x \mapsto \gamma_x(Z)$ de Z dans J est un isomorphisme de Z sur une sous-variété ouverte de J .

On dit que J est la *variété des germes de sous-variétés de X* (cf. *Top. Gén.*, chap. I, 4^e éd., § 6, n° 10).

L'application $\rho : J \rightarrow X$ définie par $\rho(\gamma_x(Z)) = x$ est une immersion; on l'appelle l'immersion canonique de J dans X .

Si X est une variété *analytique séparée* de dimension finie, il en est de même de J .

5.9. Submersions et variétés quotients

5.9.1. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés, a un point de X et posons $b = f(a)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application linéaire $T_a(f)$ est *surjective*, et son noyau admet un supplémentaire topologique dans $T_a(X)$.

(ii) Il existe une carte (U, φ, E) de X en a , une carte (V, ψ, F) de Y en b et une application linéaire continue surjective u de E dans F telles que

$$f(U) \subset V, \quad \psi \circ f = u \circ \varphi$$

et que le noyau de u admette un supplémentaire topologique dans E .

(iii) Il existe un voisinage ouvert U de a , un voisinage ouvert V de b contenant $f(U)$, et un morphisme g de U dans une variété Z tels que l'application (f, g) de U dans $V \times Z$ soit un isomorphisme.

(iv) Il existe un voisinage ouvert V de b et un morphisme s de V dans X tels que $s(b) = a$ et $f(s(y)) = y$ pour tout y dans V (« section locale »).

Lorsque X et Y sont de *dimension finie*, les conditions précédentes sont équivalentes à la condition suivante :

(v) Il existe un voisinage ouvert U de a , un voisinage ouvert V de b contenant $f(U)$, et un système de coordonnées (η^1, \dots, η^n) sur V tels que les fonctions $\eta^i \circ f$ sur U fassent partie d'un système de coordonnées sur U .

Si les propriétés (i) à (iv) sont satisfaites, on dit que f est une *submersion en a* . L'ensemble des points où f est une submersion est ouvert dans X ; si

cet ouvert est X tout entier, on dit que f est une *submersion*.

5.9.2. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux morphismes. Si f et g sont des submersions, il en est de même de $g \circ f$; réciproquement, si $g \circ f$ est une submersion et si f est surjective, alors g est une submersion.

5.9.3. Si $f : X \rightarrow Y$ et $f' : X' \rightarrow Y'$ sont des submersions, $f \times f'$ est une submersion.

5.9.4. Une submersion $f : X \rightarrow Y$ est une application *ouverte* (cf. *Top. gén.*, chap. I, 4^e éd., § 5, n° 1); en particulier, la relation d'équivalence R définie par f est *ouverte*, f définit par passage au quotient un *homéomorphisme* de X/R sur $f(X)$, et $f(X)$ est ouvert dans Y .

5.9.5. Soit R une relation d'équivalence sur une variété X . On dit que R est *régulière* s'il existe sur l'espace quotient X/R une structure de variété telle que la projection canonique $p : X \rightarrow X/R$ soit une submersion; cette structure de variété est alors unique; elle est *quotient* de celle de X (*Ens.*, ch. IV, § 2, n° 6): autrement dit, pour qu'une application g de X/R dans une variété Y soit un morphisme, il faut et il suffit que $g \circ p$ soit un morphisme de X dans Y .

Soit $C \subset X \times X$ le graphe de R . Pour que R soit régulière, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(i) C est une sous-variété de $X \times X$.

(ii) L'application pr_1 de C dans X est une submersion.

La condition (ii) signifie aussi que si a et b sont congrus modulo R , il existe un voisinage ouvert U de a et un morphisme s de U dans X tel que $s(a) = b$ et que $s(x)$ soit congru à x modulo R pour tout $x \in U$.

Supposons R régulière. Pour que la variété quotient X/R soit séparée, il faut et il suffit que le graphe de R soit fermé dans $X \times X$.

5.9.6. Soient X et X' deux variétés, R et R' des relations d'équivalence régulières sur X et X' , et soit $f : X \rightarrow X'$ un morphisme compatible avec les relations R et R' . L'application $\tilde{f} : X/R \rightarrow X'/R'$ déduite de f par passage aux quotients est alors un morphisme.

5.9.7. (« Transitivité des quotients ») Soient R et S deux relations d'équivalence sur une variété X telles que R entraîne S , et soit S/R la relation d'équivalence quotient sur X/R . Supposons que R soit régulière. Alors, pour que S soit régulière, il faut et il suffit que S/R le soit; s'il en est ainsi, la bijection canonique

$$(X/R)/(S/R) \rightarrow X/S$$

est un isomorphisme de variétés.

5.9.8. (« Produits de quotients ») Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie de variétés, munies chacune d'une relation d'équivalence régulière R_i . Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$, et soit R la relation d'équivalence sur X produit des R_i (cf. *Top. Gén.*, chap. I, 4^e éd., § 5, n° 3, cor. de la prop. 8). Alors R est régulière, et la bijection canonique de X/R sur $\prod_{i \in I} (X_i/R_i)$ est un isomorphisme de variétés.

5.10. Subimmersions

5.10.1. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés et soit Γ le graphe de f . L'application $j: x \mapsto (x, f(x))$ est une immersion de X dans $X \times Y$, dont l'image est la sous-variété Γ , et $f = \text{pr}_2 \circ j$ est composé de l'immersion j suivie de la submersion pr_2 .

Soit $a \in X$. On dit que f est une *subimmersion en a* s'il existe un voisinage ouvert U de a , une variété Z , une submersion s de U dans Z et une immersion i de Z dans Y tels que $f|U = i \circ s$. L'ensemble des points de X où f est une subimmersion est un ouvert de X ; si cet ouvert est X tout entier, on dit que f est une *subimmersion*.

5.10.2. Les immersions et les submersions sont des subimmersions. Si $f: X \rightarrow Y$ est une subimmersion, $g: Y \rightarrow Z$ une immersion et $h: W \rightarrow X$ une submersion, alors $g \circ f \circ h$ est une subimmersion.

Si f et f' sont des subimmersions, $f \times f'$ est une subimmersion.

5.10.3. Pour que $f: X \rightarrow Y$ soit une subimmersion en un point a de X , il faut et il suffit qu'il existe une carte (U, φ, E) de X en a , une carte (V, ψ, F) de Y au point $f(a)$ et une application linéaire continue g de E dans F tels que :

(i) $f(U) \subset V$, $g(\varphi(U)) \subset \psi(V)$ et $f|U = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$;

(ii) le noyau (resp. l'image) de g est un sous-espace fermé de E (resp. F) admettant un supplémentaire topologique.

5.10.4. Soient X et Y deux variétés de dimension finie. Pour qu'un morphisme f de X dans Y soit une subimmersion en un point a de X , il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées (ξ^1, \dots, ξ^m) de X en a , un système de coordonnées (η^1, \dots, η^n) de Y en $f(a)$ et un entier $k \leq \inf(m, n)$ tels que

$$\eta^i \circ f = \xi^i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k$$

$$\eta^i \circ f = 0 \quad \text{pour } k < i \leq n.$$

5.10.5. Soit $f: X \rightarrow Y$ une subimmersion. Pour tout $b \in Y$, $f^{-1}(b)$ est une sous-variété de X ; le sous-espace de $T_a(X)$ tangent à la sous-variété $f^{-1}(b)$ au point $a \in f^{-1}(b)$ est le noyau de $T_a(f)$.

5.10.6. (« Théorème du rang constant ») Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés et soit $a \in X$. Si f est une subimmersion en a , on a $\text{rg}_x f = \text{rg}_a f$ pour x voisin de a .

Réciproquement, supposons le corps K de *caractéristique zéro*. Soient (U, φ, E) une carte de X en a et soit (V, ψ, F) une carte de Y en $f(a)$, avec $f(U) \subset V$. Posons $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. S'il existe un sous-espace vectoriel fermé E_1 de E et un sous-espace vectoriel fermé F_1 de F tels que pour tout $x \in U$, le sous-espace E_1 (resp. F_1) soit un supplémentaire topologique du noyau (resp. de l'image) de la dérivée $Dg(\varphi(x))$ de g au point $\varphi(x)$, alors f est une subimmersion en a .

Si K est de *caractéristique zéro* (resp. $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C}) et si Y est de *dimension finie* (resp. $\text{rg}_a f < +\infty$), alors f est une subimmersion en a si et seulement si $\text{rg}_x f = \text{rg}_a f$ pour tout x assez voisin de a .

Si K est de *caractéristique zéro* (resp. $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C}) et Y (resp. X) de *dimension finie*, l'ensemble des points $x \in X$ où f est une subimmersion est un ouvert *dense* dans X .

5.10.7. (« Factorisation canonique d'une subimmersion ») Toute subimmersion est composée d'une submersion et d'une immersion. De façon précise, soit $f : X \rightarrow Y$ une subimmersion, et soit J la variété des germes de sous-variétés de Y (5.8.12). Soient x dans X et $y = f(x)$; il existe des voisinages ouverts U de x tels que $f|_U$ soit une submersion de U sur une sous-variété Z de Y ; l'élément $\gamma_y(Z)$ de J ne dépend que de x mais non du voisinage U choisi, et, si on le note $\lambda(x)$, l'application λ est une submersion de X dans J ; si l'on note ρ l'immersion canonique de J dans Y , on a $f = \rho \circ \lambda$. Si f est une immersion, le morphisme λ de X dans J est étale.

Si g est une submersion surjective de X dans une variété Z et h un morphisme de Z dans Y tels que $f = h \circ g$, il existe une submersion μ et une seule de Z dans J telle que $\lambda = \mu \circ g$.

5.11. Produits fibrés et images réciproques

5.11.1. Soient F un espace de Banach, $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie d'espaces de Banach et $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires continues f_i de E_i dans F . Soient E le produit des E_i et f l'application linéaire continue de E dans F^I produit des f_i . Soit enfin D le sous-espace fermé de F^I formé des $(y_i)_{i \in I}$ tels que y_i soit indépendant de i (« diagonale » de F^I). On dit que la famille \mathbf{f} est *transversale* si l'application linéaire continue composée de f et de la projection canonique de F^I sur le quotient F^I/D est *surjective* et si son noyau $f^{-1}(D)$ admet un supplémentaire topologique.

Si les espaces E_i et F sont tous de dimension finie, la famille \mathbf{f} est

transversale si et seulement si l'on a :

$$\text{codim} \left(\bigcap_i \text{Im } f_i \right) = \sum_i \text{codim} (\text{Im } f_i)$$

Si $I = \{1, 2\}$, le couple (f_1, f_2) est transversal si et seulement si l'application

$$f_1 + f_2 : E_1 \oplus E_2 \rightarrow F$$

est surjective et si son noyau admet un supplémentaire topologique (si E_1 et E_2 sont de dimension finie, il revient au même de dire que

$$\text{Im } f_1 + \text{Im } f_2 = F).$$

5.11.2. Soient S une variété, $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie de variétés et $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in I}$ une famille de morphismes f_i de X_i dans S . Soit P le sous-ensemble du produit X des X_i formé des points $(x_i)_{i \in I}$ tels que $f_i(x_i)$ soit indépendant de i . Soit $x \in P$ et soit $y = f_i(x_i) \in F$. On dit que la famille \mathbf{f} est *transversale* au point x de P si les applications $T_x(f_i)$ forment une famille transversale d'applications linéaires continues à valeurs dans l'espace de Banach $T_y(S)$. On dit que \mathbf{f} est *transversale* si elle est transversale en tout point de P .

Si \mathbf{f} est transversale, alors P est une *sous-variété* de X , que l'on appelle *produit fibré de la famille des X_i au dessus de S* (relativement à la famille \mathbf{f}) et que l'on note $\prod_{i \in I} X_i$ (ou plus simplement $X_1 \times_S X_2$ lorsque $I = \{1, 2\}$ par exemple). Pour tout point $x = (x_i)$ de P , l'espace tangent $T_x(\prod_{i \in I} X_i)$ est le sous-espace de $\prod T_x(X_i)$ formé des vecteurs tangents $t = (t_i)$ tels que $T_{x_i}(f_i) \cdot t_i$ soit indépendant de l'indice i .

Si $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ est une *submersion* et $f_2 : X_2 \rightarrow Y$ un morphisme, le couple (f_1, f_2) est transversal.

5.11.3. (« Propriété universelle des produits fibrés ») Soit $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in I}$ une famille transversale de morphismes $f_i : X_i \rightarrow S$ et soit P le produit fibré des X_i au-dessus de S ; pour tout $i \in I$, on note π_i le morphisme de P dans X_i obtenu par restriction à P de la projection de X sur X_i ; alors $f_i \circ \pi_i$ est un morphisme de P dans S indépendant de i . Soient T une variété, et $g_i : T \rightarrow X_i$ des morphismes de variétés tels que $f_i \circ g_i$ soit un morphisme de T dans S indépendant de $i \in I$; il existe alors un morphisme h de T dans P et un seul tel que $g_i = \pi_i \circ h$ pour tout $i \in I$.

5.11.4. (« Associativité du produit fibré ») Soit $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in I}$ une famille finie de morphismes de variétés $f_i : X_i \rightarrow S$, et soit $(J_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition de I . On suppose que, pour tout λ dans Λ , la famille $\mathbf{f}_\lambda = (f_i)_{i \in J_\lambda}$ est transversale, et l'on note P_λ le produit fibré de cette famille; pour tout point $x = (x_i)_{i \in J_\lambda}$ de P_λ , l'élément $f_i(x_i)$ de S est indépendant de $i \in J_\lambda$ et sera noté $u_\lambda(x)$;

alors u_λ est un morphisme de P_λ dans S . Pour que la famille $u = (u_\lambda)$ soit transversale, il faut et il suffit que la famille f le soit. La bijection canonique de $\prod_{\lambda \in \Lambda} \prod_{i \in I_\lambda} X_i$ sur $\prod_{i \in I} X_i$ donne alors par restriction un isomorphisme du produit fibré $\prod_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ sur le produit fibré $\prod_{i \in I} X_i$.

5.11.5. Soit S une variété. On appelle *variété au dessus de S* une variété X munie d'un morphisme $\lambda : X \rightarrow S$. Soient (X, λ) une variété au dessus de S et $f : S' \rightarrow S$ un morphisme de variétés tel que le couple (f, λ) soit transversal. On notera alors $f^*(X)$ la variété $S' \times_S X$, munie du morphisme $f^*(\lambda) : S' \times_S X$ défini par $f^*(\lambda)(s', x) = s'$. On dit que $f^*(X)$ se déduit de X par changement de base de S à S' suivant f . Si λ est une submersion (resp. une immersion, une subimmersion, un morphisme étale), il en est de même de $f^*(\lambda)$.

5.11.6. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés et soit W une sous-variété de Y ; soit i l'injection canonique de W dans Y . On dit que f est *transversal à W en un point $x \in f^{-1}(W)$* si le couple (f, i) est transversal au point $(x, f(x))$ de $X \times W$. Pour cela, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) l'espace tangent $T_{f(x)}(Y)$ est somme de $T_{f(x)}(W)$ et de l'image de $T_x(f)$;

(ii) l'image réciproque $T_x(f)^{-1}(T_{f(x)}(W))$ de l'espace tangent à W en $f(x)$ admet un supplémentaire topologique.

On dit que f est *transversal à W* s'il est transversal à W en tout point de $f^{-1}(W)$.

Pour qu'un morphisme f de X dans Y soit une submersion, il suffit qu'il soit transversal à tout point de Y et il faut qu'il soit transversal à toute sous-variété de Y . Pour qu'une famille finie de morphismes $f_i : X_i \rightarrow S$ soit transversale, il faut et suffit que le morphisme g de $\prod_{i \in I} X_i$ dans S^I défini par $g((x_i)_{i \in I}) = (f_i(x_i))_{i \in I}$ soit transversal à la diagonale de S^I .

5.11.7. Supposons que le morphisme $f : X \rightarrow Y$ soit transversal à la sous-variété W de Y . Alors $f^{-1}(W)$ est une sous-variété de X , et pour x dans $f^{-1}(W)$ le sous-espace de $T_x(X)$ tangent à $f^{-1}(W)$ est l'image réciproque par $T_x(f)$ du sous-espace $T_{f(x)}(W)$. Par passage au quotient, l'application linéaire $T_x(f)$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de l'espace transversal à $f^{-1}(W)$ en x sur l'espace transversal à W en $y = f(x)$. Si W est de codimension d en y dans Y , la sous-variété $f^{-1}(W)$ de X est de codimension d en tout point de $f^{-1}(W)$. Enfin, l'application $x \mapsto (x, f(x))$ est un isomorphisme de variétés de $f^{-1}(W)$ sur le produit fibré $X \times_Y W$.

5.11.8. Soient Y_1 et Y_2 deux sous-variétés d'une variété X , et soit ι_j l'injection de Y_j dans X . On dit que Y_1 et Y_2 sont transversales si le couple (ι_1, ι_2) est transversal ; il revient au même de supposer que, pour tout point x de $Y_1 \cap Y_2$, les sous-espaces $T_x(Y_1)$ et $T_x(Y_2)$ de $T_x(X)$ ont $T_x(X)$ pour somme, et que leur intersection admet un supplémentaire topologique dans $T_x(X)$. Sous ces conditions, $Y_1 \cap Y_2$ est une sous-variété de X et pour tout x dans $Y_1 \cap Y_2$, on a :

$$T_x(Y_1 \cap Y_2) = T_x(Y_1) \cap T_x(Y_2);$$

si de plus Y_i est de codimension d_i en x , alors $Y_1 \cap Y_2$ est de codimension $d_1 + d_2$ en x .

5.11.9. Soient f et g deux morphismes d'une variété X dans une variété Y . Si le morphisme $(f, g) : X \rightarrow Y \times Y$ est transversal à la diagonale de $Y \times Y$, le sous-ensemble N de X formé des points x tels que $f(x) = g(x)$ est une sous-variété de X ; on l'appelle le *noyau* de la double flèche

$$f, g : X \rightrightarrows Y.$$

5.12. Variétés de groupes

5.12.1. Soit G un groupe. Une structure de variété sur G est dite *compatible* avec la structure de groupe de G si l'application $(x, y) \mapsto xy$ de $G \times G$ dans G est un morphisme. L'application $x \mapsto x^{-1}$ est alors un morphisme de G dans lui-même. L'ensemble G , muni de sa structure de groupe et de sa structure de variété, est appelé une *variété de groupe* (« de classe C^r » si l'on veut préciser), ou encore un *groupe de Lie*. Si $r = \omega$, on dit aussi *groupe analytique*. Si $K = \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p), on dit encore *groupe de Lie réel* (resp. *complexe, p -adique*). Toute variété de groupe est pure. On appelle *homomorphisme de variétés de groupe* (ou simplement *homomorphisme*) toute application d'une variété de groupe dans une autre qui est à la fois un homomorphisme de groupes et un *morphisme* de variétés.

Si G est une variété de groupe, la structure topologique sous-jacente à la structure de variété de G en fait un *groupe topologique métrisable et complet*; il est localement compact si K est localement compact et G de dimension finie.

5.12.2. Exemples :

(i) Si V est un espace de Banach, la structure canonique de variété de V est compatible avec sa structure de groupe commutatif.

(ii) Soit A une K -algèbre normée complète, possédant un élément unité, et soit A^* le groupe des éléments inversibles de A . C'est un sous-espace ouvert de A et la structure de variété induite sur cet ouvert par la structure canonique de variété du K -espace vectoriel A est compatible avec la structure de groupe dans A^* . En particulier, prenons pour A l'algèbre

$\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes continus d'un espace de Banach E ; le groupe A^* se compose des automorphismes de l'espace vectoriel topologique E ; on note $\mathbf{GL}(E)$ la variété de groupe ainsi définie. Lorsque $A = M_n(K)$, on obtient une structure de variété de groupe sur $\mathbf{GL}(n, K)$.

(iii) Si G_1, \dots, G_n sont des variétés de groupes, le groupe produit $G = G_1 \times \dots \times G_n$ est une variété de groupe, lorsqu'on le munit de la structure de variété produit de celles des G_i .

5.12.3. Soit G une variété de groupe, soit H un groupe topologique et soit $f: H \rightarrow G$ un homomorphisme continu vérifiant la condition (QR) du n° 5.8.1. La structure de variété *image inverse* de celle de G par f fait alors de H une variété de groupe. Ceci s'applique notamment lorsque H est un *sous-groupe de G qui est une sous-variété* (resp. quasi-sous-variété); un tel sous-groupe s'appelle une *sous-variété* (resp. quasi-sous-variété) *de groupe* de G ; il est nécessairement *fermé* dans G .

Si $H_i (i = 1, \dots, n)$ est une sous-variété de groupe de G_i , alors $H_1 \times \dots \times H_n$ est une sous-variété de groupe de $G_1 \times \dots \times G_n$.

5.12.4. Soit G une variété de groupe et soit H une sous-variété de groupe de G . La relation d'équivalence $x^{-1}y \in H$ est régulière, ce qui permet de munir l'espace G/H des classes à gauche xH d'une structure de variété dite *quotient* de celle de G . L'application canonique $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de $G \times (G/H)$ dans G/H est un morphisme. On a des résultats analogues pour l'espace homogène $H \backslash G$ des classes à droite Hx . Si H est distingué, la structure de variété de G/H est compatible avec sa structure de groupe.

5.12.5. Soit G une variété de groupe et soit X une variété. On appelle *loi d'opération à gauche du groupe G dans la variété X* tout morphisme $(s, x) \mapsto sx$ de $G \times X$ dans X tel que

$$\begin{aligned} s(tx) &= (st)x & \text{si} & \quad s, t \in G, x \in X \\ ex &= x & \text{si} & \quad x \in X \text{ (} e \text{ étant l'élément neutre de } G \text{).} \end{aligned}$$

On dit aussi que la variété de groupe G *opère à gauche* sur X ; on définit de manière analogue les lois d'opération à droite.

Soit $x \in X$ et soit G_x son stabilisateur dans G . Supposons que l'application $g \mapsto g \cdot x$ soit une *subimmersion* (hypothèse automatiquement vérifiée si la caractéristique de K est 0 et X de dimension finie). Alors G_x est une sous-variété de groupe de G et l'application de G/G_x dans X obtenue par passage au quotient à partir de $g \mapsto g \cdot x$ est une immersion. Si en outre l'orbite $G \cdot x$ de x est localement fermée et si la topologie de G admet une base dénombrable, $G \cdot x$ est une sous-variété de X et l'application $G/G_x \rightarrow G \cdot x$ est un isomorphisme de variétés.

5.13. Affaiblissement de structure

Dans tout ce n°, les lettres r, s, r', s' désignent, soit des entiers ≥ 1 , soit l'un des symboles ∞ et ω . On suppose que $K = \mathbf{R}$.

5.13.1. Soient $r \leq s$, et X une variété de classe C^s . Il existe sur l'espace topologique X une structure de variété de classe C^r et une seule telle que toute carte de X pour la structure donnée soit une carte de X pour cette nouvelle structure. Soit X_r la variété de classe C^r ainsi définie. On dit qu'elle se déduit de X par *affaiblissement* de la structure de variété de X , ou encore que sa structure de variété est *sous-jacente* à celle de X . La notion d'affaiblissement est transitive: si $r' \leq r$, on a $X_{r'} = (X_r)_{r'}$; elle commute aux produits: si Y est de classe C^s , on a $(X \times Y)_r = X_r \times Y_r$; on a un résultat analogue pour $X \times_s Y$ sous les hypothèses du n° 5.11.2.

Soit $a \in X$ et soit c une carte de X en a ; c'est aussi une carte de X_r en a . On en déduit (5.5.1) des isomorphismes

$$\theta_c : E \rightarrow T_a(X), \quad \theta'_c : E \rightarrow T_a(X_r),$$

d'où un isomorphisme $\theta'_c \circ \theta_c^{-1} : T_a(X) \rightarrow T_a(X_r)$. Cet isomorphisme est indépendant du choix de c ; il permet d'identifier les *espaces tangents* à X et à X_r en a .

5.13.2. Soit X (resp. X') une variété de classe C^s (resp. $C^{s'}$) et soit r avec $r \leq \inf(s, s')$. Une application $f : X \rightarrow X'$ est dite de *classe C^r* si c'est un morphisme de X_r dans X'_r ; une telle application est de classe $C^{r'}$ pour tout $r' \leq r$. De plus, l'application linéaire tangente à $f : X_r \rightarrow X'_r$ en un point $a \in X$ coïncide avec l'application linéaire tangente à f considérée comme morphisme de X_r dans X'_r .

On désignera le plus souvent par le même symbole les variétés X et X_r ; ainsi, si X est de classe C^s , l'expression « une sous-variété de X de classe C^r » ($r \leq s$) signifie « une sous-variété de X_r ».

5.14. Restriction du corps de base

Dans ce numéro, on se donne deux corps commutatifs valués complets non discrets K et L , ainsi qu'un *isomorphisme* σ du corps valué K sur un sous-corps de L . Si E est un espace de Banach sur L , on note $\sigma_*(E)$ l'espace vectoriel sur K obtenu par restriction des scalaires (cf. *Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 8); la topologie donnée sur E est compatible avec la structure de K -espace vectoriel, et $\sigma_*(E)$ est un espace de Banach sur K .

5.14.1. Soit X une *variété analytique* sur L et soit $c = (U, \varphi, E)$ une carte de X . L'application φ est une bijection de U sur un ouvert de $\sigma_*(E)$ et le triplet $c_\sigma = (U, \varphi, \sigma_*(E))$ est une carte de X . Il existe sur X

une structure de variété analytique sur K et une seule pour laquelle c_σ est une carte pour toute carte c de la variété L -analytique X . On note X_σ la variété analytique sur K ainsi obtenue et on dit que X_σ est obtenue à partir de X par *restriction des scalaires* (de L à K au moyen de σ). L'espace topologique sous-jacent à X_σ est le même que celui sous-jacent à X .

5.14.2. Exemples :

(a) On prend $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$, σ étant l'injection canonique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Ainsi, toute variété analytique complexe est canoniquement munie d'une structure de variété analytique réelle; cette structure analytique réelle définit elle-même des structures différentielles de classe C^r pour tout r .

(b) On prend $K = \mathbb{C}$, $L = \mathbb{C}$, σ étant la conjugaison $x \mapsto \bar{x}$. On associe ainsi à toute variété analytique complexe X une variété analytique complexe \bar{X} , appelée la *conjuguée* de X . Si f est une fonction à valeurs complexes, définie sur un ouvert U de X , f est analytique pour la structure de \bar{X} si et seulement si la fonction conjuguée \bar{f} est analytique pour la structure de X . Les variétés X et \bar{X} définissent par restriction des scalaires la même variété analytique réelle.

5.14.3. Soient X une variété analytique sur K , Y une variété analytique sur L . Une application $f: X \rightarrow Y$ est dite σ -analytique si c'est un morphisme de X dans Y_σ . Si $K \subset L$, σ est l'injection de K dans L , et X est une variété analytique sur L , on appelle application K -analytique une application σ -analytique de X_σ dans Y .

5.14.4. Soit V un L -espace de Banach. On a $V_\sigma = \sigma_*(V)$: la structure canonique de variété analytique sur K de $\sigma_*(V)$ se déduit par restriction des scalaires de la structure canonique de variété analytique sur L de V .

5.14.5. Soit X une variété analytique sur L , et soit $a \in X$. Soit c une carte de X en a ; alors c_σ est une carte de X_σ en a et l'on en déduit des isomorphismes

$$\theta_c: E \rightarrow T_a(X), \quad \theta_{c_\sigma}: \sigma_*(E) \rightarrow T_a(X_\sigma)$$

d'où un isomorphisme $\theta_{c_\sigma} \circ \sigma_*(\theta_c)^{-1}$ de $\sigma_*(T_a(X))$ sur $T_a(X_\sigma)$; cet isomorphisme ne dépend pas du choix de c ; il permet d'identifier $T_a(X_\sigma)$ à $\sigma_*(T_a(X))$ et même à $T_a(X)$ par abus d'écriture.

Si f est une application analytique sur L de X dans une variété Y , l'application linéaire tangente à f en a (f étant considérée comme un morphisme de X_σ dans Y_σ) est égale à $\sigma_*(T_a(f))$.

5.14.6. Soient X et Y deux variétés analytiques sur L , et soit $f: X_\sigma \rightarrow Y$ une application σ -analytique. Supposons que la caractéristique de K soit 0. Alors, pour que f soit analytique sur L , il faut et il suffit que, pour tout $a \in X$, l'application $T_a(f)$ soit L -linéaire.

Lorsque $K = \mathbf{R}$, $L = \mathbf{C}$ (cas (a) du n° 5.14.2), on a un résultat plus précis : si X et Y sont de dimension finie et si $f : X \rightarrow Y$ est une application de classe C^1 dont l'application tangente en tout point de x est \mathbf{C} -linéaire, alors f est analytique complexe.

5.14.7. Soient X une variété *analytique complexe* et g une application de X dans elle-même satisfaisant aux conditions :

(i) On a $g \circ g = \text{Id}_X$.

(ii) L'application g est un isomorphisme de la variété analytique X sur la variété conjuguée \bar{X} (5.14.2).

L'ensemble X_0 des points x de X tels que $g(x) = x$ est une sous-variété analytique fermée de la variété analytique réelle sous-jacente à X . Pour $x \in X_0$, on a $T_x(X) = T_x(X_0) \oplus iT_x(X_0)$.

Soit U un ouvert *connexe* de X et soient f et g deux applications analytiques complexes de U dans un espace localement convexe séparé complexe ou dans une variété analytique complexe séparée. Si f et g coïncident sur une partie non vide de $U \cap X_0$, ouverte dans X_0 , alors $f = g$.

Supposons X_0 paracompacte. Si f est une application analytique réelle de X_0 dans un espace localement convexe séparé ou dans une variété analytique complexe séparée, il existe un voisinage ouvert U de X_0 dans X et une application analytique complexe de U dans l'espace des valeurs de f , prolongeant f . Deux tels prolongements coïncident sur un voisinage de X_0 dans X .

Supposons X de dimension finie. Pour tout point $a \in X_0$, il existe un système de coordonnées (complexes) ζ^1, \dots, ζ^n dans un voisinage ouvert U de a , telles que $\zeta^i \circ g = \bar{\zeta}^i$ pour $1 \leq i \leq n$; la restriction ξ^i de ζ^i à $U \cap X_0$ est alors à valeurs réelles et (ξ^1, \dots, ξ^n) est un système de coordonnées en a de la variété analytique réelle X_0 .

5.14.8. Pour toute variété analytique réelle Y , *paracompacte*, il existe un couple (X, g) formé d'une variété analytique complexe X et d'une application g de X dans elle-même satisfaisant aux conditions (i) et (ii) de 5.14.7, et un isomorphisme f de Y sur X_0 . On dit que X (munie de f et g) est une *complexification* de Y .

§ 6. Fibrations ¹

6.1. Fibrations

6.1.1. On appelle *fibration de classe C'* , ou simplement *fibration*, un triplet (X, B, π) où B et X sont des variétés de classe C' et π un morphisme de X dans B , jouissant de la propriété suivante :

(F) Pour tout $x \in B$, il existe un voisinage ouvert U de x , une variété F , et un isomorphisme φ de $\pi^{-1}(U)$ sur $U \times F$ tel que $\pi(\varphi^{-1}(x, y)) = x$ pour tout $x \in U$ et tout $y \in F$.

Si $\lambda = (X, B, \pi)$ est une fibration, on appelle X l'*espace* de λ , B la *base* de λ , et π la *projection* de λ . L'application π est une *submersion*; en particulier $\pi(X)$ est ouvert dans B , et si R désigne la relation d'équivalence définie par π dans X , l'application canonique de X/R dans $\pi(X)$ est un isomorphisme. Pour tout $x \in B$, l'image réciproque $\pi^{-1}(x)$ est une sous-variété fermée de X , appelée la *fibres* de x , et notée X_x .

6.1.2. Exemples :

(a) Si B et F sont deux variétés, le triplet $(B \times F, B, \text{pr}_1)$ est une fibration dont les fibres sont canoniquement isomorphes à F .

(b) Si $\lambda = (X, B, \pi)$ et $\lambda' = (X', B', \pi')$ sont des fibrations,

$$\lambda \times \lambda' = (X \times X', B \times B', \pi \times \pi')$$

est une fibration; on l'appelle le *produit* de λ et de λ' .

(c) Si $\lambda = (X, B, \pi)$ et $\lambda' = (X', B, \pi')$ sont des fibrations de même base, $\lambda \times_B \lambda' = (X \times_B X', B, \pi \times_B \pi')$ est une fibration; on l'appelle le *produit* de λ et de λ' au-dessus de B , ou encore le *produit fibré* de λ et de λ' .

6.1.3. Soient $\lambda = (X, B, \pi)$ et $\lambda' = (X', B', \pi')$ deux fibrations. On appelle *morphisme* de λ dans λ' tout couple (f, g) , où f est un morphisme de B dans B' , et g un morphisme de X dans X' , tel que $\pi' \circ g = f \circ \pi$. Lorsque $B = B'$ et $f = \text{Id}_B$, on dit que g est un *B-morphisme* de λ dans λ' ; si g est un isomorphisme de X sur X' , g^{-1} est un *B-morphisme* de λ' dans λ , et l'on dit que g est un *B-isomorphisme* de λ sur λ' ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour tout $x \in B$, l'application $g_x : X_x \rightarrow X'_x$ induite par g soit un isomorphisme.

¹ Les définitions et la plus grande partie des résultats des §§ 6 et 7 s'appliquent aussi à la catégorie des *espaces topologiques*; on doit alors remplacer les mots « variétés », « sous-variétés », « morphismes » et « variétés de groupes » par « espaces topologiques », « sous-espaces topologiques », « applications continues » et « groupes topologiques ». Font exception les résultats concernant les immersions, submersions, et relations d'équivalence régulières, ainsi que ceux des n°s 6.2.3 et 6.2.4 (a).

6.1.4. La fibration $(B \times F, B, \text{pr}_1)$ est appelée la fibration *triviale* de base B et de fibre F . Un isomorphisme d'une fibration λ sur une fibration triviale s'appelle une *trivialisat*ion de λ .

6.1.5. Soit $\lambda = (X, B, \pi)$ une fibration, et soit $f : B' \rightarrow B$ un morphisme. Soit π' le morphisme canonique de $B' \times_B X$ dans B' . Le triplet $(B' \times_B X, B', \pi')$ est une fibration, appelée *l'image réciproque de λ par f* ou la fibration déduite de λ par changement de base de B à B' suivant f , et notée $B' \times_B \lambda$, ou encore $f^* \lambda$. Si f' désigne l'application canonique de $B' \times_B X$ dans X , le couple (f, f') est un *morphisme* de $B' \times_B \lambda$ dans λ ; il jouit de la propriété universelle suivante: si (f, g) est un morphisme d'une fibration λ' de base B' dans la fibration λ , il existe un B' -morphisme unique $\varphi : \lambda' \rightarrow B' \times_B \lambda$ tel que $(f, g) = (f, f') \circ \varphi$.

Lorsque B' est une sous-variété de B , et f l'injection canonique de B' dans B , $B' \times_B X$ s'identifie à la sous-variété $\pi^{-1}(B')$ de X , et π' s'identifie à la restriction de π à $\pi^{-1}(B')$; l'image réciproque de λ par f est alors appelée la *fibration induite par λ sur B'* .

6.1.6. Si $\lambda = (X, B, \pi)$ est une fibration, on appelle *section morphique* (ou simplement *section*) de λ tout morphisme $s : B \rightarrow X$ tel que $\pi \circ s = \text{Id}_B$.

6.2. Fibrations principales

6.2.1. Soient B une variété et G une variété de groupe. On appelle *fibration principale de base B et de groupe structural G* un quadruplet $\lambda = (P, G, B, \pi)$ où P est une variété sur laquelle G opère à droite par $(x, g) \mapsto x \cdot g$ (cf. n° 5.12.5), et où π est un morphisme de P dans B , ces données étant assujetties à vérifier l'axiome suivant:

(P) Pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert U de b et un isomorphisme $f : U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tels que l'on ait

$$\pi(f(u, g)) = u \text{ et } f(u, gg') = f(u, g) \cdot g' \text{ si } u \in U \text{ et } g, g' \in G.$$

6.2.2. Soit $\lambda = (P, G, B, \pi)$ une fibration principale. Le triplet (P, B, π) est une fibration; on a $\pi(P) = B$. La relation d'équivalence R définie par π dans P coïncide avec celle définie par G ; son graphe n'est autre que le produit $P \times_B P$ (cf. n° 5.11.2); c'est une sous-variété de $P \times P$. L'application $(x, g) \mapsto (x, x \cdot g)$ est un isomorphisme de $P \times G$ sur $P \times_B P$; l'application qui fait correspondre à tout $(x, y) \in P \times_B P$ l'unique élément $g \in G$ tel que $y = x \cdot g$ est un morphisme de $P \times_B P$ dans G .

Le groupe G opère *proprement et librement* sur P (cf. *Top. Gén.*, chap. III, 3^e éd., § 4). Si $x \in P$ et si $b = \pi(x)$, l'application $g \mapsto x \cdot g$ est un *isomorphisme de la variété G sur la fibre de b* .

6.2.3. Inversement, soit G une variété de groupe, et soit P une variété sur laquelle G opère à droite de façon à vérifier les deux conditions suivantes :

(a) G opère proprement et librement sur P .

(b) Pour tout $x \in P$, l'application $g \mapsto x \cdot g$ est une immersion de G dans P .

Alors la relation d'équivalence définie par G dans P est régulière ; si l'on note P/G la variété quotient, et π la projection canonique de P sur P/G , le quadruplet $(P, G, P/G, \pi)$ est une fibration principale.

Lorsque K est de caractéristique 0 et que P est de dimension finie, la condition (b) ci-dessus est conséquence de la condition (a).

6.2.4. Les conditions du n° précédent sont vérifiées dans les deux cas suivants :

(a) P est une variété de groupe et G une sous-variété de groupe opérant sur P par les translations à droite ; la base de la fibration principale ainsi obtenue est l'espace homogène P/G .

(b) G est un groupe discret opérant proprement et librement sur P . La projection $\pi : P \rightarrow P/G$ est alors un morphisme étale (n° 5.7.6).

6.2.5. Exemples :

(a) Soit B une variété et soit G une variété de groupe. Faisons opérer G sur $B \times G$ par $(b, g) \cdot g' = (b, gg')$. Le quadruplet $(B \times G, G, B, \text{pr}_1)$ est une fibration principale.

(b) Soient $\lambda = (P, G, B, \pi)$ et $\lambda' = (P', G', B', \pi')$ deux fibrations principales. Faisons opérer $G \times G'$ sur $P \times P'$ par la formule :

$$(x, x') \cdot (g, g') = (x \cdot g, x' \cdot g'), \quad x \in P, x' \in P', g \in G, g' \in G'.$$

Le quadruplet $\lambda \times \lambda' = (P \times P', G \times G', B \times B', \pi \times \pi')$ est une fibration principale ; on l'appelle le *produit* de λ et de λ' .

(c) Soient $\lambda = (P, G, B, \pi)$ et $\lambda' = (P', G', B, \pi')$ deux fibrations principales de même base. La sous-variété $P \times_B P'$ de $P \times P'$ est stable pour les opérations de $G \times G'$, et le quadruplet

$$\lambda \times_B \lambda' = (P \times_B P', G \times G', B, \pi \times_B \pi')$$

est une fibration principale ; on l'appelle le *produit* de λ et de λ' au-dessus de B , ou encore le *produit fibré* de λ et de λ' .

6.3. Morphismes de fibrations principales

6.3.1. Soient $\lambda = (P, G, B, \pi)$ et $\lambda' = (P', G', B', \pi')$ deux fibrations principales. On appelle *morphisme* de λ dans λ' tout triplet (f, φ, h) , où $f : P \rightarrow P'$ et $h : B \rightarrow B'$ sont des morphismes, $\varphi : G \rightarrow G'$ est un homomorphisme de variétés de groupes, et où $\pi' \circ f = h \circ \pi$ et $f(x \cdot g) = f(x) \cdot \varphi(g)$

pour $x \in P$, $g \in G$. On notera que f détermine h ; on dira souvent que (f, φ) , ou même simplement f , est un morphisme.

Lorsque $B = B'$ et $h = \text{Id}_B$ (resp. lorsque $G = G'$ et $\varphi = \text{Id}_G$), un morphisme est appelé un *B-morphisme* compatible avec φ (resp. un *G-morphisme* compatible avec h). Un morphisme qui est à la fois un *B-morphisme* et un *G-morphisme* est appelé un *G-B-morphisme* (ici encore, on dit souvent « morphisme » lorsqu'il ne peut y avoir de confusion). Tout *G-B-morphisme* $f : P \rightarrow P'$ est un isomorphisme de la variété P sur la variété P' ; l'isomorphisme réciproque f^{-1} est un *G-B-morphisme*: f est un *G-B-isomorphisme de P sur P'* .

Deux espaces fibrés principaux P et P' de même base B et de même groupe structural G sont dits *G-B-isomorphes* (ou simplement *isomorphes*) s'il existe un *G-B-isomorphisme de P sur P'* .

6.3.2. La fibration principale $(B \times G, G, B, \text{pr}_1)$ est appelée la fibration principale *triviale* de base B et de groupe structural G . Un isomorphisme d'une fibration principale $\lambda = (P, G, B, \pi)$ sur la fibration principale triviale de base B et de groupe structural G est appelé une *trivialisat*ion de λ . Toute section s de λ définit une trivialisat

$$f_s^{-1}(b, g) = s(b) \cdot g \quad \text{pour } b \in B \text{ et } g \in G.$$

On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des sections de λ sur l'ensemble des trivialisat

6.3.3. Soit $\lambda = (P, G, B, \pi)$ une fibration principale, et soit $h : B' \rightarrow B$ un morphisme. Soit π' (resp. h') le morphisme canonique de $B' \times_B P$ dans B' (resp. dans P). Faisons opérer G sur $B' \times_B P$ par la formule

$$(b', x) \cdot g = (b', x \cdot g), \quad (b', x) \in B' \times_B P, \quad g \in G.$$

Le quadruplet $(B' \times_B P, G, B', \pi')$ est une fibration principale, appelée l'*image réciproque* de λ par h , et notée $B' \times_B \lambda$ ou encore $h^* \lambda$. L'application $h' : B' \times_B P \rightarrow P$ est un *G-morphisme* compatible avec h ; il jouit de la propriété universelle suivante: si f est un *G-morphisme* compatible avec h d'une fibration principale λ' de base B' dans la fibration λ , il existe un *G-B'-isomorphisme* unique $k : \lambda' \rightarrow B' \times_B \lambda$ tel que $f = h' \circ k$.

Lorsque B' est une sous-variété de B , et h l'injection canonique de B' dans B , $B' \times_B P$ s'identifie à la sous-variété $\pi^{-1}(B')$ de P ; on l'appelle l'*espace fibré principal induit par P au-dessus de B'* , et on le note $\pi^{-1}(B')$, ou encore $P|B'$. Tout $x \in V$ a un voisinage ouvert U tel que $P|U$ soit trivial.

6.4. Construction de fibrations principales au moyen de cocycles

Soient B une variété, G une variété de groupe et soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de B .

6.4.1. On appelle *cocycle* de classe C^r sur B à valeurs dans G , subordonné à \mathcal{U} , une famille $(g_{i,j})_{(i,j) \in I \times I}$ possédant les deux propriétés suivantes:

- (1) pour tout couple $(i,j) \in I \times I$, $g_{i,j}$ est une application de classe C^r de l'ouvert $U_i \cap U_j$ de B dans G ;
- (2) pour tout triplet $(i,j,k) \in I^3$, on a

$$g_{i,k}(x) = g_{i,j}(x) \cdot g_{j,k}(x) \quad \text{pour tout } x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

On dit que deux tels cocycles $(g_{i,j})$ et $(g'_{i,j})$ sont *cohomologues* s'il existe une famille $(h_i)_{i \in I}$ où, pour tout $i \in I$, h_i est une application de classe C^r de U_i dans G , telle que:

$$(3) \quad g'_{i,j}(x) = h_i(x)^{-1} \cdot g_{i,j}(x) \cdot h_j(x) \quad \text{pour tout } x \in U_i \cap U_j.$$

6.4.2. Soit $\lambda = (P, G, B, \pi)$ une fibration principale. Donnons-nous pour tout $i \in I$ une *section* s_i de λ au dessus de U_i (6.3.3). Pour tout couple $(i,j) \in I^2$, il existe alors un morphisme et un seul $g_{i,j}$ de $U_i \cap U_j$ dans G tel que:

$$(4) \quad s_j(b) = s_i(b) \cdot g_{i,j}(b) \quad \text{pour tout } b \in U_i \cap U_j.$$

La famille des $g_{i,j}$ est un cocycle sur B à valeurs dans G , subordonné au recouvrement ouvert \mathcal{U} . Ce cocycle est dit associé à l'objet $(\lambda, \mathcal{U}, (s_i)_{i \in I})$ et les applications $g_{i,j}$ sont appelées les *fonctions de transition* de cet objet.

Pour $i \in I$, soit $x \mapsto (\pi(x), f_i(x))$ la trivialisatation définie par la section s_i de $\lambda|_{U_i}$ (6.3.2). Pour $x \in \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$, on a:

$$(5) \quad f_i(x) = g_{i,j}(\pi(x)) \cdot f_j(x).$$

6.4.3. Inversement, soit $g = (g_{i,j})$ un cocycle sur B à valeurs dans G , subordonné au recouvrement \mathcal{U} . Il existe alors une fibration principale $\lambda = (P, G, B, \pi)$ et une famille de sections $(s_i)_{i \in I}$ de λ au-dessus des U_i , telles que la relation (4) soit satisfaite. Il en est alors de même de (5). Si de plus $(\lambda', (s'_i))$ satisfait aux mêmes conditions, il existe un G - B -isomorphisme unique f de λ sur λ' tel que $s'_i = f \circ s_i$ pour tout $i \in I$. On exprime ce résultat en disant que $(\lambda, (s_i))$ est déterminé à un isomorphisme unique près par le cocycle g .

6.4.4. Soient $\lambda = (P, G, B, \pi)$ et $\lambda' = (P', G, B, \pi')$ deux fibrations principales. Soient (s_i) (resp. (s'_i)) une famille de sections de λ (resp. λ') au dessus des U_i et soit g (resp. g') le cocycle associé à $(\lambda, \mathcal{U}, (s_i))$ (resp. $(\lambda', \mathcal{U}, (s'_i))$). Pour que λ et λ' soient G - B -isomorphes, il faut et il suffit que

les cocycles g et g' soient cohomologues. Plus précisément, pour tout G-B-isomorphisme f de λ sur λ' , il existe une famille $(h_i)_{i \in I}$ de morphismes des U_i dans G et une seule telle que la relation (3) soit satisfaite et que l'on ait $f \circ (s'_i(x)) = s_i(x) \cdot h_i(x)$ pour tout $i \in I$ et tout $x \in U_i$, et l'on obtient ainsi une bijection de l'ensemble des G-B-isomorphismes de λ sur λ' sur l'ensemble des familles $(h_i)_{i \in I}$ satisfaisant à (3).

6.4.5. Reprenons les notations de 6.4.2. et soit $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert plus fin que le recouvrement ouvert \mathcal{U} . Soit $\tau : A \rightarrow I$ une application telle que $V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in A$. Soit s'_α la restriction à V_α de la section $s_{\tau(\alpha)}$ et soit $g' = (g'_{\alpha, \beta})$ le cocycle subordonné au recouvrement ouvert \mathcal{V} associé à $(\lambda, \mathcal{V}, (s'_\alpha))$. La fonction de transition $g'_{\alpha, \beta}$ est alors la restriction à $V_\alpha \cap V_\beta$ de la fonction de transition $g_{\tau(\alpha), \tau(\beta)}$.

6.5. Espaces fibrés associés à une fibration principale

6.5.1. Soit $\lambda = (P, G, B, \pi)$ une fibration principale. Soit F une variété sur laquelle le groupe G opère à gauche; on note $(g, y) \mapsto g \cdot y$ la loi d'opération de G sur F . Le groupe G opère à droite sur $P \times F$ par la formule $(x, f) \cdot g = (x \cdot g, g^{-1} \cdot f)$; la relation d'équivalence définie par G dans $P \times F$ est régulière; le quotient $P \times^G F = (P \times F)/G$ est muni d'une structure de variété.

Soit E une variété. On dit que E est muni d'une structure d'espace fibré associé à λ de fibre type F lorsqu'on s'est donné un morphisme $\rho : P \times F \rightarrow E$ jouissant de la propriété suivante:

(As) On a $\rho(x \cdot g, g^{-1} \cdot f) = \rho(x, f)$ pour $x \in P$, $f \in F$, $g \in G$, et l'application $\bar{\rho} : P \times^G F \rightarrow E$ déduite de ρ par passage au quotient est un isomorphisme de variétés.

Il revient au même de dire que $(P \times F, G, E, \rho)$ est une fibration principale. L'application ρ (ou parfois l'application $\bar{\rho}$) est appelée l'application repère de E , et notée $(x, f) \mapsto x \cdot f$; on a

$$(x \cdot g) \cdot f = x \cdot (g \cdot f), \quad \text{pour } x \in P, g \in G \text{ et } f \in F.$$

La donnée de λ et de F détermine E à un isomorphisme unique près; en particulier, on peut prendre pour E la variété $P \times^G F$ elle-même; on dit que c'est l'espace fibré associé à λ de fibre type F , et on le note $\lambda(F)$.

6.5.2. Soit E un espace fibré associé à λ et de fibre type F . Il existe un morphisme unique π_E de E dans B tel que $\pi_E(x \cdot f) = \pi(x)$ si $x \in P, f \in F$; le triplet (E, B, π_E) est une fibration; si B et F sont séparés, E est séparé.

Soit $b \in B$, et soit $F_b = \pi_E^{-1}(b)$; c'est une sous-variété fermée de E . Si $x \in P$ est tel que $\pi(x) = b$, soit $\theta_x : F \rightarrow F_b$ l'application définie par $\theta_x(f) = x \cdot f$; c'est un isomorphisme de variétés. De plus, pour tout $g \in G$, on a $\theta_{x \cdot g} = \theta_x \circ \rho_g$, où ρ_g désigne l'automorphisme $f \mapsto g \cdot f$ de F . Supposons

F muni d'une structure s d'espèce quelconque Σ (cf. *Ens.*, chap. IV, § 1, n° 4) et supposons que s soit *invariante* par G ; il existe alors sur F_b une structure s_b d'espèce Σ et une seule telle que les $\theta_x : F \rightarrow F_b$ soient des isomorphismes; on l'obtient en transportant s au moyen de l'un des θ_x (*loc. cit.*, n° 5).

Si s est une section de P au-dessus d'un ouvert U de B , l'application $(b, f) \mapsto s(b) \cdot f$ est un isomorphisme de $U \times F$ sur $\pi_E^{-1}(U)$.

6.5.3. Exemples :

(a) Soit $\lambda = (B \times G, B, \text{pr}_1)$, soit $E = B \times F$, et soit

$$\rho : (B \times G) \times F \rightarrow E$$

l'application $(b, g, f) \mapsto (b, g \cdot f)$. On obtient ainsi sur $B \times F$ une structure d'espace fibré associé à λ de fibre type F , qui est dite *triviale*.

(b) Soient $\lambda = (P, G, B, \pi)$ et $\lambda' = (P', G', B', \pi')$ deux fibrations principales. Soit F (resp. F') une variété sur laquelle G (resp. G') opère à gauche; et soit E (resp. E') un espace fibré associé à λ (resp. à λ') de fibre type F (resp. F'). Le groupe $G \times G'$ opère sur $F \times F'$ par $(g \cdot g') \cdot (f, f') = (g \cdot f, g' \cdot f')$. L'application $(P \times P') \times (F \times F') \rightarrow E \times E'$ produit des applications repères $P \times F \rightarrow E$ et $P' \times F' \rightarrow E'$ munit $E \times E'$ d'une structure d'espace fibré associé à $\lambda \times \lambda'$ de fibre type $F \times F'$.

(c) Avec les notations de (b), si l'on suppose que $B' = B$, on définit de même sur $E \times_B E'$ une structure d'espace fibré associé à $\lambda \times_B \lambda'$ de fibre type $F \times F'$.

6.5.4. Les notations étant celles du n° 6.5.1, soit $h : B' \rightarrow B$ un morphisme, soit $\lambda' = B' \times_B \lambda$, et soit $E' = E' \times_B E$. Si $P' = B' \times_B P$, définissons une application $P' \times F \rightarrow E'$ en posant $(b', x) \cdot f = (b', x \cdot f)$; on munit ainsi E' d'une structure d'espace fibré associé à λ' de fibre type F ; on l'appelle l'image réciproque par h de la structure donnée sur E .

6.5.5. Soit $\lambda = (P, G, B, \pi)$ une fibration principale, et soit E (resp. E') un espace fibré associé à λ de fibre type F (resp. F'). Soit $u : F \rightarrow F'$ un morphisme compatible avec les opérations de G (c'est-à-dire tel que $u(g \cdot f) = g \cdot u(f)$ pour $f \in F, g \in G$). Il existe alors un morphisme $\bar{u} : E \rightarrow E'$ et un seul tel que l'on ait $\bar{u}(x \cdot f) = x \cdot u(f)$ pour $x \in P, f \in F$. Si u est une immersion (resp. une submersion, une subimmersion), il en est de même de \bar{u} .

En particulier, supposons qu'une variété de groupe H opère à droite sur F de telle sorte que $g \cdot (f \cdot h) = (g \cdot f) \cdot h$ pour $g \in G, f \in F, h \in H$. Tout $h \in H$ définit alors un automorphisme u_h de F compatible avec les opérations de G , d'où un automorphisme \bar{u}_h de E ; le groupe H opère à droite sur E par $(y, h) \mapsto \bar{u}_h(y)$.

6.5.6. Soit $\lambda = (P, G, B, \pi)$ une fibration principale, et soit E un espace

fibré associé à λ de fibre type F . Soit $s : B \rightarrow E$ une section de E . Pour tout $x \in P$, il existe un élément unique $\sigma(x) \in F$ tel que $s(\pi(x)) = x \cdot \sigma(x)$. L'application $\sigma : P \rightarrow F$ ainsi définie est un morphisme de variétés, et vérifie l'identité:

$$(*) \quad \sigma(x \cdot g) = g^{-1} \cdot \sigma(x).$$

L'application $s \mapsto \sigma$ est une bijection de l'ensemble des sections de E sur l'ensemble des morphismes de P dans F qui vérifient l'identité (*).

6.5.7. Soient $\lambda = (P, G, B, \pi)$ et $\lambda' = (P', G, B, \pi')$ deux fibrations principales de même base B et de même groupe structural G . La fibration principale $\lambda \times_B \lambda' = (P \times_B P', G \times G, B, (\pi, \pi')_B)$ a pour groupe structural $G \times G$. Faisons opérer $G \times G$ à gauche sur G par la formule:

$$(g, g') \cdot g_1 = g \cdot g_1 \cdot g'^{-1},$$

et soit E l'espace fibré associé à $\lambda \times_B \lambda'$ de fibre type G (muni de la loi d'opération définie ci-dessus). Alors les sections de E correspondent bijectivement aux isomorphismes de P sur P' . De façon précise, si s est une section de E correspondant (cf. n° 6.5.6) au morphisme $\sigma : P \times_B P' \rightarrow G$, il existe un G - B -isomorphisme $f_s : P \rightarrow P'$ et un seul tel que $\sigma(x, f_s(x)) = e$ pour tout $x \in P$; l'application $s \mapsto f_s$ est une bijection de l'ensemble des sections de E sur l'ensemble des G - B -isomorphismes de P sur P' .

6.6. Extension et restriction du groupe structural

6.6.1. Soit $\lambda = (P, G, B, \pi)$ une fibration principale, et soit φ un homomorphisme de G dans une variété de groupe H . Faisons opérer G à gauche sur H par $g \cdot h = \varphi(g) \cdot h$ et soit $P \times^G H$ l'espace fibré associé à λ de fibre type H . Comme les translations à droite dans H sont compatibles avec les opérations de G , le groupe H opère à droite sur $P \times^G H$ (cf. n° 6.5.5); si π_H désigne la projection de $P \times^G H$ sur B , le quadruplet $(P \times^G H, H, B, \pi_H)$ est une fibration principale, notée $\varphi(\lambda)$; on dit qu'elle se déduit de λ par l'homomorphisme φ .

L'application f de P dans $P \times^G H$ qui associe à $x \in P$ la classe de (x, e) est un B -morphisme de P dans $P \times^G H$ compatible avec φ (cf. n° 6.3.1). De plus, si f' est un B -morphisme de P dans un espace fibré principal P' de groupe structural H , et si f' est compatible avec φ , il existe un H - B -isomorphisme unique θ de $P \times^G H$ sur P' tel que $f' = \theta \circ f$.

6.6.2. Supposons que λ soit définie au moyen d'un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (U_i)$ de B et d'un cocycle (g_{ij}) (6.4.2). Alors $\varphi(\lambda)$ peut être défini au moyen du même recouvrement et du cocycle (h_{ij}) , avec $h_{ij} = \varphi \circ g_{ij}$.

6.6.3. Soit F une variété sur laquelle le groupe H opère à gauche; on note

$(h, y) \mapsto h \cdot y$ la loi d'opération de H sur F . Le groupe G opère sur F par $(g, y) \mapsto \varphi(g) \cdot y$. Soit E un espace fibré associé à $\varphi(\lambda)$ de fibre type F . L'application $(x, y) \mapsto f(x) \cdot y$ de $P \times F$ dans E (l'application f étant celle définie au n° 6.6.1) munit E d'une structure d'espace fibré associé à λ de fibre type F . En particulier, $(P \times^G H) \times^H F$ s'identifie à $P \times^G F$.

6.6.4. Supposons que G soit une sous-variété de groupe de H , et que $\varphi : G \rightarrow H$ soit l'injection canonique de G dans H . On dit alors que $\varphi(\lambda)$ se déduit de λ par extension à H du groupe structural. Le morphisme $f : P \rightarrow P \times^G H$ du n° 6.6.1 est un isomorphisme de P sur une sous-variété fermée de $P \times^G H$ (égale à $P \times^G H$ si $G = H$); cet isomorphisme est compatible avec les opérations de G (noter que G opère sur $P \times^G H$ comme sous-groupe de H).

6.6.5. Supposons encore que G soit une sous-variété de groupe de H , et soit $\mu = (Q, H, B, \pi)$ une fibration principale de groupe structural H et de base B , et soit E un espace fibré associé à μ de fibre type H/G . Si γ désigne la projection canonique de H sur H/G , posons $\delta(y) = y \cdot \gamma(e)$, pour $y \in Q$ (où e désigne l'élément neutre de H); on obtient ainsi un morphisme $\delta : Q \rightarrow E$ et le quadruplet (Q, G, E, δ) est une fibration principale. En particulier, Q/G s'identifie canoniquement à E , lui-même isomorphe à $Q \times^H H/G$ ¹.

Soit maintenant $s : B \rightarrow E$ une section de E , et soit λ_s l'image réciproque par s de la fibration (Q, G, E, δ) que l'on vient de définir. C'est une fibration principale, de base B et de groupe structural G et son extension à H est isomorphe à μ ; toute fibration jouissant de ces propriétés peut être obtenue ainsi, à un isomorphisme près; deux sections s_1 et s_2 de E définissent des fibrations isomorphes si et seulement si elles sont transformées l'une de l'autre par un H - B -automorphisme de μ .

6.7. Changements de structure

Les structures et opérations décrites dans ce paragraphe sont compatibles avec les changements de structure décrits aux numéros 5.13 et 5.14.

¹ Dans le cas topologique (cf. note ¹, page 61), il est nécessaire de supposer que les translations à droite par les éléments de G font de H un espace fibré principal de groupe structural G , de base H/G ; cela revient à dire qu'il y a un ouvert non vide de H/G au-dessus duquel la projection $H \rightarrow H/G$ admet une section continue. Dans la catégorie des variétés, la condition analogue est toujours satisfaite (cf. n° 6.2.4).

§ 7. Fibrés vectoriels

Dans tout ce paragraphe, la lettre B désigne une variété de classe C^r ($r \geq 1$) et la lettre M désigne un ensemble muni d'une application π de M dans B . On dit que B est la base de M et pour tout $b \in B$, on désigne par M_b et on appelle fibre de M en b le sous-ensemble $\pi^{-1}(b)$ de M .

7.1. Définition des fibrés vectoriels

7.1.1. Une *carte vectorielle* de M est un triplet $t = (U, \varphi, F)$, où U est un ouvert de B , où F est un espace de Banach et φ une bijection de $\pi^{-1}(U)$ sur $U \times F$ telle que $\pi(\varphi^{-1}(b, h)) = b$ pour tout $b \in B$ et tout $h \in F$. On dit que U est le *domaine* de la carte vectorielle t et que t est une carte vectorielle de M en $b \in B$ si $b \in U$. Pour tout $b \in U$, on note t_b la bijection de F sur M_b définie par $t_b(h) = \varphi^{-1}(b, h)$ pour $h \in F$.

7.1.2. On dit que deux cartes vectorielles $t = (U, \varphi, F)$ et $t' = (U', \varphi', F')$ de M sont C^r -compatibles (ou simplement compatibles) s'il existe une application λ de classe C^r de la variété $U \cap U'$ dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(F; F')$ telle que :

$$t_b = t'_b \circ \lambda(b) \quad \text{pour tout } b \in U \cap U'.$$

7.1.3. On dit qu'un ensemble de cartes vectorielles de M est un C^r -atlas vectoriel (ou simplement atlas vectoriel) de M s'il se compose de cartes vectorielles deux à deux C^r -compatibles dont les domaines ont B pour réunion. On dit que deux atlas vectoriels \mathcal{A} et \mathcal{B} de M sont C^r -équivalents (ou équivalents) si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est encore un atlas vectoriel de M . Cette relation est une relation d'équivalence.

7.1.4. Une structure de *fibré vectoriel* de classe C^r (de base B) sur M est la donnée d'une classe d'atlas vectoriels équivalents (*Ens.*, Chap. II, § 6, n° 9). Une carte vectorielle appartenant à un atlas vectoriel de cette classe est appelée une carte vectorielle du fibré vectoriel M .

Soit M un fibré vectoriel de base B . Pour tout $b \in B$, il existe sur la fibre M_b une structure d'espace de Banach et une seule telle que, pour toute carte vectorielle $t = (U, \varphi, F)$ du fibré vectoriel M en b , l'application t_b soit un isomorphisme de F sur M_b .

Soit $c = (U, \psi, E)$ une carte de la variété B et soit $t = (U, \varphi, F)$ une carte vectorielle du fibré vectoriel M , de même domaine U . Pour $x \in \pi^{-1}(U)$, posons :

$$\alpha(x) = (\psi(\pi(x)), t_{\pi(x)}^{-1}(x)).$$

Alors, le triplet $(\pi^{-1}(U), \alpha, E \times F)$ est une carte de l'ensemble M . Il existe sur M une structure de variété de classe C^r et une seule (dite sous-jacente à M) pour laquelle toutes les cartes ainsi obtenues sont des cartes de la variété M . Le triplet (M, B, π) est alors une *fibration* (6.1.1).

7.1.5. Soit F un espace de Banach. Posons $M = B \times F$, l'application étant la première projection. Il existe sur M une structure de fibré vectoriel (de base B) et une seule pour laquelle (B, Id_M, F) est une carte vectorielle. On dit que $B \times F$ muni de cette structure est le *fibré vectoriel trivial* de base B et de fibre F et on le note parfois F_B . La structure de variété de F_B est la structure de variété produit et pour tout $b \in B$, l'application $h \mapsto (b, h)$ est un isomorphisme d'espaces de Banach de F sur la fibre de F_B au point $b \in B$. On note souvent 0 un fibré vectoriel trivial de fibre réduite à 0 .

7.1.6. Soit M un fibré vectoriel de base B . Pour $b \in B$, on appelle *rang* de M en b et on note $\text{rg}_b(M)$, la dimension (finie ou $+\infty$) de l'espace de Banach M_b . On a $\dim_x M = \dim_x B + \text{rg}_b M$ pour $b = \pi(x)$. La fonction $b \mapsto \text{rg}_b M$ est localement constante. On dit que M est de *rang fini* si $\text{rg}_b M < +\infty$ pour tout $b \in B$.

7.2. Morphismes de fibrés vectoriels

7.2.1. Soient B et B' deux variétés et soit f un morphisme de B dans B' . Soient M un fibré vectoriel de base B et M' un fibré vectoriel de base B' . On dit qu'une application g de M dans M' est un *f-morphisme* de fibrés vectoriels si la condition suivante est réalisée :

Pour tout point $b_0 \in B$, il existe une carte vectorielle $t = (U, \varphi, F)$ de M en b_0 , une carte vectorielle $t' = (U', \varphi', F')$ de M' en $f(b_0)$ et une application λ de classe C^r de U dans $\mathcal{L}(F; F')$ telles que $f(U) \subset U'$ et que $g_b \circ t_b = t'_{f(b)} \circ \lambda(b)$ pour tout $b \in U$, où g_b est la restriction de g à M_b .

Sous ces hypothèses, g est un morphisme de variétés et pour tout $b \in B$, g induit une application linéaire continue de M_b dans $M'_{f(b)}$. On appelle *rang vectoriel* de g en $b \in B$ et on note $\text{rg}_b(g)$ le rang (fini ou $+\infty$) de l'application linéaire g_b .

Réciproquement, si $r \geq \infty$ ou si M est de rang fini, un *f-morphisme* de fibrations de (M, B, π) dans (M', B', π') qui induit sur chaque fibre M_b une application linéaire de M_b dans $M'_{f(b)}$ (pour tout $b \in B$), est un *f-morphisme* de fibrés vectoriels.

7.2.2. Soit de plus f' un morphisme de B' dans une variété B'' . Si g est un *f-morphisme* de M dans M' , et si g' est un *f'-morphisme* de M' dans un fibré vectoriel M'' de base B'' , l'application $g' \circ g$ est un $(f' \circ f)$ -morphisme de M dans M'' . On a $(g' \circ g)_b = g'_{f(b)} \circ g_b$ pour tout b dans B .

7.2.3. Soient M et M' deux fibrés vectoriels de même base B . On appelle **B-morphisme**, ou simplement *morphisme* de M dans M' tout Id_B -morphisme. Le composé de deux morphismes est un morphisme.

Soit g un morphisme de fibrés vectoriels de M dans M' ; si g est bijectif, c'est un isomorphisme de la variété M sur la variété M' , l'application réciproque g^{-1} est un morphisme de fibrés vectoriels de M' dans M et l'on a $(g^{-1})_b = g_b^{-1}$ pour tout b dans B . L'application g est alors un *isomorphisme* de fibrés vectoriels.

7.2.4. Soit f un morphisme d'une variété B' dans B et soit M un fibré vectoriel de base B . Posons $M' = B' \times_B M$ et notons π' (resp. g) la restriction à M' de la projection de $B' \times M$ sur B' (resp. M). Il existe sur M' une structure de fibré vectoriel de base B' (relativement à π') et une seule pour laquelle g est un f -morphisme. On dit que M' est le fibré vectoriel de base B' *image réciproque* de M par f et on le note f^*M ; le f -morphisme g est appelé le f -morphisme canonique de f^*M dans M .

La structure de variété de f^*M est celle du produit fibré des variétés B' et M au dessus de B (5.11.2); pour tout $b \in B'$, l'application $x \mapsto (b, x)$ est un isomorphisme d'espaces de Banach de $M_{f(b)}$ sur $(f^*M)_b$.

La formation des images réciproques de fibrés vectoriels est transitive.

Soit N' un fibré vectoriel de base B' et soit h un f -morphisme de N' dans M . Il existe un B' -morphisme \tilde{h} et un seul de N' dans f^*M tel que $h = g \circ \tilde{h}$.

Soient N un fibré vectoriel de base B et v un B -morphisme de N dans M . Il existe un B' -morphisme et un seul, noté f^*v , de f^*N dans f^*M tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f^*N & \xrightarrow{f^*v} & f^*M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{v} & M \end{array}$$

soit commutatif.

7.2.5. Soit B' une *sous-variété* de B et soit i l'injection canonique de B' dans B . Si M est un fibré vectoriel de base B , l'image réciproque i^*M s'appelle le fibré vectoriel *induit* sur B' par M et se note $M|B'$. Si $t = (U, \varphi, F)$ est une carte vectorielle de M , alors $(U \cap B', \varphi|_{\pi^{-1}(U \cap B')}, F)$ est une carte vectorielle de $M|B'$. Le f -morphisme canonique de $M|B'$ dans M est un isomorphisme de variétés de $M|B'$ sur la sous-variété $\pi^{-1}(B')$ de M .

7.2.6. Soit f un morphisme d'une variété B' dans B et soit M (resp. M') un fibré vectoriel de base B (resp. B'). On appelle *f-comorphisme* de M dans M' un B' -morphisme de f^*M dans M' . Lorsque $B = B'$ et $f = \text{Id}_B$,

la donnée d'un f -comorphisme de M dans M' équivaut à la donnée d'un B -morphisme de M dans M' .

Soit g un f -comorphisme de M dans M' . Pour tout $b \in B'$, l'application $g_b : x \mapsto g(b, x)$ de $M_{f(b)}$ dans M'_b est une application linéaire continue.

Soit de plus f' un morphisme d'une variété B'' dans B' et soit h un f' -comorphisme de M' dans un fibré vectoriel M'' de base B'' . L'application $h \circ f^*g$ de $f'^*(f^*M) = (f' \circ f)^*M$ dans M'' est alors un $(f' \circ f)$ -comorphisme de M dans M'' , noté $h \circ g$. Pour $b \in B''$, on a

$$(h \circ g)_b = h_b \circ g_{f'(b)}.$$

7.3. Morphismes multilinéaires

7.3.1. Soient M_1, \dots, M_d et N des fibrés vectoriels de base B , et soit u une application de l'ensemble $M_1 \times_B \dots \times_B M_d$ dans N . On dit que u est un *morphisme multilinéaire* (ou d -linéaire) si la condition suivante est réalisée :

Pour tout $b_0 \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b_0 dans B , des cartes vectorielles $t^j = (U, \varphi^j, F^j)$ de M_j (pour $1 \leq j \leq d$) et $t = (U, \varphi, F)$ de N , et une application λ de classe C^r de U dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(F^1, \dots, F^d; F)$ des applications d -linéaires continues de $F^1 \times \dots \times F^d$ dans F , tels que :

$$(t_b \circ \lambda(b))(x_1, \dots, x_d) = u(t_b^1(x_1), \dots, t_b^d(x_d))$$

pour tout $b \in U$ et tous $x_j \in F^j$.

Tout morphisme multilinéaire u est un morphisme de variétés du produit fibré $M_1 \times_B \dots \times_B M_d$ dans N et induit pour tout $b \in B$ une application d -linéaire continue u_b de $(M_1)_b \times \dots \times (M_d)_b$ dans N_b .

Si f est un morphisme de B dans une variété B' , un morphisme multilinéaire de $M_1 \times_B \dots \times_B M_d$ dans un fibré vectoriel M' de base B' est par définition le composé d'un morphisme multilinéaire de $M_1 \times_B \dots \times_B M_d$ dans f^*M' avec le f -morphisme canonique de f^*M' dans M' .

Un morphisme bilinéaire est encore appelé un *accouplement*. Pour $d = 1$, un morphisme linéaire est un morphisme au sens de 7.2.1. Pour $d = 0$, un morphisme 0-linéaire s'identifie à une section de N (7.4).

7.3.2. On appelle *fibré en algèbres* de base B un fibré vectoriel A de base B , muni d'un accouplement de $A \times_B A$ dans A . Chaque fibre A_b est alors munie d'une structure de K -algèbre. Si pour tout $b \in B$, l'algèbre A_b a un élément unité, noté e_b , l'application $b \mapsto e_b$ est une section de A (cf. 7.4). On dit qu'un fibré en algèbres A est *localement trivial* si, pour tout point b_0 de B , il existe une carte vectorielle $t = (U, \varphi, E)$ de A au point b_0 et une structure de K -algèbre sur E telles que t_b soit un isomorphisme d'algèbres de E sur A_b pour tout $b \in U$.

7.3.3. Soit A un fibré en algèbres associatives avec élément unité de base B . On appelle *fibré en A -modules* de base B un fibré vectoriel M de base B muni d'un accouplement $m : A \times_B M \rightarrow M$ tel que l'application $m_b : A_b \times M_b \rightarrow M_b$ définisse, pour tout $b \in B$, une structure de A_b -module sur la fibre M_b .

Soient M et M' deux fibrés en A -modules. On appelle *A -homomorphisme* de M dans M' tout morphisme $g : M \rightarrow M'$ de fibrés vectoriels de base B qui induit pour tout b dans B une application A_b -linéaire de M_b dans M'_b .

Supposons A localement trivial. On dit qu'un fibré M en A -modules est *localement trivial* si pour tout point b_0 de B , il existe une carte vectorielle $t = (U, \varphi, E)$ de A en b_0 comme dans 7.3.2, une carte vectorielle $t' = (U, \varphi', L)$ de M en b_0 , et une structure de E -module sur L telles que, pour tout $b \in U$, t'_b soit un t_b -isomorphisme du A_b -module M_b sur le E -module L .

7.3.4. Soit A une algèbre de Banach sur K (par exemple un corps muni d'une structure de K -algèbre de dimension finie). Le fibré trivial A_B est alors un fibré en algèbres, localement trivial. Un fibré en A_B -modules M localement trivial est encore appelé un fibré vectoriel sur A (de base B). Les fibres M_b sont alors des A -modules topologiques. Un f -morphisme u de M dans un autre fibré vectoriel sur A est dit A -linéaire si les applications u_b sont A -linéaires pour tout $b \in B$.

7.4. Sections

7.4.1. Soit M un fibré vectoriel de base B . Pour tout ouvert U de B , on note $\mathcal{S}_M^r(U)$ l'ensemble des sections de classe C^r de M sur U , c'est-à-dire des morphismes s de classe C^r de U dans M tels que $s(b) \in M_b$ pour tout $b \in U$. Cet ensemble est muni d'une structure de module sur l'anneau $\mathcal{C}^r(U)$ des fonctions morphiques par les règles:

$$(1) \quad (s + s')(b) = s(b) + s'(b)$$

$$(2) \quad (\varphi \cdot s)(b) = \varphi(b) \cdot s(b)$$

pour s, s' dans $\mathcal{S}_M^r(U)$ et φ dans $\mathcal{C}^r(U)$. Lorsque l'ouvert U varie, on obtient un faisceau \mathcal{S}_M^r d'applications de B dans M (cf. n° 5.4.1), appelé *faisceau des sections* de M .

7.4.2. Soient M_1, \dots, M_d et N des fibrés vectoriels de base B et u un morphisme multilinéaire de $M_1 \times_B \dots \times_B M_d$ dans N . Pour $1 \leq j \leq d$, donnons-nous une section s_j de M_j sur un ouvert U de B ; on définit une section $u(s_1, \dots, s_d)$ de N sur U par la formule:

$$u(s_1, \dots, s_d)(b) = u_b(s_1(b), \dots, s_d(b)) \quad \text{pour } b \in U.$$

L'application $(s_1, \dots, s_d) \mapsto u(s_1, \dots, s_d)$ est $\mathcal{C}^r(U)$ -multilinéaire. On la note parfois $\mathcal{S}(u)$.

7.4.3. Soit f un morphisme d'une variété B' dans B et soit M un fibré vectoriel de base B . Pour tout ouvert U de B et tout $s \in \mathcal{S}_M^r(U)$, l'application $x \mapsto (x, s(f(x)))$ est une section de classe C^r de f^*M sur l'ouvert $f^{-1}(U)$, notée f^*s et appelée image réciproque de s par f . L'application $s \mapsto f^*s$ de $\mathcal{S}_M^r(U)$ dans $\mathcal{S}_{f^*M}^r(f^{-1}(U))$ est semi-linéaire par rapport à l'homomorphisme $g \mapsto g \circ (f|_{f^{-1}(U)})$ de $\mathcal{C}^r(U)$ dans $\mathcal{C}^r(f^{-1}(U))$.

Si de plus N est un fibré vectoriel de base B' et g un f -comorphisme de M dans N , on note parfois $\mathcal{S}(g)$ l'application $s \mapsto g \circ f^*s$ de $\mathcal{S}_M^r(U)$ dans $\mathcal{S}_N^r(f^{-1}(U))$.

7.4.4. Soit M un fibré vectoriel de base B , de rang fini. On appelle *repère* de M sur un ouvert U de B une suite finie (s_1, \dots, s_n) de sections de M sur U telle que $(s_1(b), \dots, s_n(b))$ soit une base de l'espace vectoriel M_b pour tout $b \in B$. La suite (s_1, \dots, s_n) est alors une base du $\mathcal{C}^r(U)$ -module $\mathcal{S}_M^r(U)$. Si f est un morphisme d'une variété B' dans B , les sections f^*s_j forment un repère de f^*M sur $f^{-1}(U)$.

7.4.5. Soit L un corps, muni d'une structure de K -algèbre de dimension finie et soit (M, B, π) une fibration. Supposons donnée sur chaque fibre M_b une structure d'espace vectoriel sur L , de dimension finie. Il existe alors au plus une structure de fibré vectoriel sur L de base B sur M , compatible avec l'application π , la structure de variété de M et les structures L -vectorielles sur les fibres (7.3.4). Pour qu'il en existe une, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée :

(FV) Pour tout $b_0 \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b_0 dans B et un isomorphisme de variétés φ de $\pi^{-1}(U)$ sur le produit $U \times F$ de U par un espace vectoriel F sur L de dimension finie, tel que pour tout $b \in U$, la bijection φ_b de M_b sur F induite par φ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels sur le corps L .

Les triplets (U, φ, F) satisfaisant à (FV) sont alors des cartes vectorielles du fibré vectoriel M .

La condition (FV) est équivalente à :

(FV') Pour tout $b_0 \in B$, il existe un entier n et n sections s_1, \dots, s_n de M sur un voisinage ouvert U de b_0 tels que l'application

$$(b, a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 s_1(b) + \dots + a_n s_n(b)$$

soit un isomorphisme de la variété $U \times L^n$ sur la variété $\pi^{-1}(U)$.

7.4.6. Soient M_1, \dots, M_d et N des fibrés vectoriels de base B , les M_j étant de rang fini. Supposons donnée pour tout ouvert U de B une application φ_U de $\mathcal{S}_{M_1}^r(U) \times \dots \times \mathcal{S}_{M_d}^r(U)$ dans $\mathcal{S}_N^r(U)$, $\mathcal{C}^r(U)$ -multi-

linéaire, telles que pour $V \subset U$ l'on ait :

$$\varphi_U(s_1, \dots, s_d)|V = \varphi_V(s_1|V, \dots, s_d|V).$$

Il existe alors un morphisme multilinéaire u de $M_1 \times_B \dots \times_B M_d$ dans N et un seul tel que $\varphi_U(s_1, \dots, s_d) = u(s_1, \dots, s_d)$ quelles que soient les sections s_j de M sur l'ouvert U de B .

7.4.7. Soit f un morphisme d'une variété B' dans B et soit M (resp. M') un fibré vectoriel de base B (resp. B') et de rang fini. Supposons donnée pour tout ouvert U de B une application φ_U de $\mathcal{S}_M^r(U)$ dans $\mathcal{S}_{M'}^r(f^{-1}(U))$, $\mathcal{C}^r(U)$ -semi-linéaire, telles que

$$\varphi_U(s)|f^{-1}(V) = \varphi_V(s|V)$$

pour tout ouvert $V \subset U$. Il existe alors un f -comorphisme g et un seul de M dans M' tel que $\varphi_U(s) = \mathcal{S}(g)(s)$ pour tout $s \in \mathcal{S}_M^r(U)$.

*7.4.8. Soit \mathcal{F} un faisceau de modules sur le faisceau d'anneaux \mathcal{C}_B^r . On dit que \mathcal{F} est *localement libre* si pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b et un entier n tels que $\mathcal{F}|U$ soit isomorphe (comme faisceau de \mathcal{C}_U^r -modules) au faisceau $(\mathcal{C}_U^r)^n$.

Si M est un fibré vectoriel de base B de rang fini, le faisceau \mathcal{S}_M^r est localement libre. Réciproquement, pour tout faisceau localement libre \mathcal{F} sur B , il existe un fibré vectoriel M et un isomorphisme de faisceaux de \mathcal{S}_M^r sur \mathcal{F} . Si M' est un autre fibré vectoriel de base B de rang fini, l'application $g \mapsto \mathcal{S}(g)$ est une bijection de l'ensemble des B -morphisms de M dans M' sur l'ensemble des morphismes de faisceaux de \mathcal{C}^r -modules de \mathcal{S}_M^r dans $\mathcal{S}_{M'}^r$.

7.5. Sous-fibrés vectoriels, fibrés vectoriels quotients, suites exactes

Dans ce numéro, on appelle fibré vectoriel un fibré vectoriel de base B et morphisme de fibré vectoriels un Id_B -morphisme.

7.5.1. Soit M un fibré vectoriel. Un sous-ensemble M' de M est appelé *un sous-fibré vectoriel* de M si, pour tout point $b \in B$, il existe une carte vectorielle $t = (U, \varphi, E)$ de M en b et un sous-espace vectoriel fermé F de E admettant un supplémentaire topologique, tels que

$$\varphi(\pi^{-1}(U) \cap M') = U \times F.$$

Dans ces conditions, il existe sur M' une structure de fibré vectoriel et une seule pour laquelle l'injection canonique de M' dans M est un morphisme. Pour chaque $b \in B$, la fibre M'_b de M' est le sous-espace vectoriel fermé $M' \cap M_b$ de M_b ; M' est une sous-variété fermée de M et la structure de

variété sous-jacente à la structure de fibré vectoriel de M' coïncide avec celle induite par la structure de variété de M .

7.5.2. Soit M' un sous-fibré vectoriel de M . Notons $R\{x, y\}$ la relation suivante entre points x, y de M :

« il existe un élément b de B tel que $x \in M_b, y \in M_b$ et $x - y \in M'_b$ ». Alors R est une relation d'équivalence régulière sur M (cf. n° 5.9.7). Sur l'ensemble M/R , il existe une structure de fibré vectoriel et une seule telle que l'application canonique de M sur M/R soit un morphisme. On note M/M' et l'on appelle quotient de M par M' le fibré vectoriel ainsi défini; pour chaque point b de B , le fibré $(M/M')_b$ est l'espace vectoriel topologique quotient M_b/M'_b et la structure de variété sur M/M' est quotient de celle de M .

7.5.3. Conservons les hypothèses de 7.5.2. Pour tout point b_0 de B , on peut trouver un voisinage ouvert U de b_0 , un espace de Banach F , somme directe de deux sous-espaces fermés F' et F'' , et un isomorphisme de fibrés vectoriels ι de F_U sur $M|U$ avec les propriétés suivantes:

(i) La restriction ι' de ι à $U \times F'$ est un isomorphisme de F'_U sur $M'|U$.

(ii) Si ρ est l'application canonique de M sur $M'' = M/M'$, et si ι'' est la restriction de ι à $U \times F''$, l'application $\rho \circ \iota''$ est un isomorphisme de F''_U sur $M''|U$.

7.5.4. Si un morphisme de fibrés vectoriels $g : L \rightarrow M$ a son image contenue dans M' , c'est un morphisme de fibrés vectoriels de L dans M' .

Considérons maintenant un morphisme de fibrés vectoriels $h : M \rightarrow N$ et supposons que, pour tout b dans B , la restriction de h_b à M'_b soit nulle. Si ρ est le morphisme canonique de M sur M/M' , il existe un morphisme \bar{h} de M/M' dans N et un seul tel que $h = \bar{h} \circ \rho$.

7.5.5. Soient P et Q deux fibrés vectoriels, et g un morphisme de P dans Q ; pour tout point b de B , notons N_b et I_b respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire $g_b : P_b \rightarrow Q_b$. Posons $N = \bigcup_{b \in B} N_b$ et

$I = \bigcup_{b \in B} I_b$. On dit que le morphisme g est *localement direct* si N est un sous-fibré vectoriel de P et I un sous-fibré vectoriel de Q . Le morphisme g définit alors par passage au quotient un isomorphisme de P/N sur I . On dit que N est le *noyau* de g et on le note $\text{Ker } g$. De même, le sous-fibré I est appelé *l'image* de g et est noté $\text{Im } g$.

Si $r \geq \infty$, le morphisme g est localement direct si et seulement si g est une subimmersion. Si P est de *rang fini*, le morphisme g est localement direct si et seulement si le rang vectoriel de g est localement constant ou encore si et seulement si g est une subimmersion.

7.5.6. Soient $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M''$ deux morphismes de fibrés vectoriels. On dit que la suite (f, g) est *exacte localement directe* si les deux morphismes f et g sont localement directs et si $\text{Im } f = \text{Ker } g$. Si $g \circ f = 0$, l'ensemble D des points $b \in B$ tels que la suite $M_b \xrightarrow{f_b} M'_b \xrightarrow{g_b} M''_b$ soit exacte directe (c'est-à-dire tels que $\text{Ker } f_b$ et $\text{Im } g_b$ admettent des supplémentaires topologiques et que $\text{Im } f_b = \text{Ker } g_b$) est *ouvert* et la suite $M|D \xrightarrow{f} M'|D \xrightarrow{g} M''|D$ est exacte localement directe.

On définit de même les suites exactes localement directes de longueur quelconque. Par abus de langage, on dit parfois suite exacte directe au lieu de suite exacte localement directe.

7.5.7. Soit $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ une suite de morphismes de fibrés vectoriels. Pour que cette suite soit exacte localement directe, il faut et il suffit que f soit un isomorphisme de M sur un sous-fibré vectoriel $f(M)$ de M' et que g définisse par passage au quotient un isomorphisme du fibré vectoriel quotient $M'/f(M)$ sur M'' .

7.6. Foncteurs vectoriels

Dans ce n° et dans les trois n°s suivants 7.7 à 7.9, la lettre I désigne un ensemble fini, réunion de deux sous-ensembles disjoints I_+ et I_- . On désigne par $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ (et de manière analogue par $\mathcal{V}', \mathcal{V}'', \dots$) une famille d'espaces de Banach indexée par I . On désigne par $\text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ l'espace de Banach $\prod_{i \in I_+} \mathcal{L}(V_i; V'_i) \times \prod_{i \in I_-} \mathcal{L}(V'_i; V_i)$ et par $\mathbf{f} = (f_i)$ un élément de $\text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$. On note $\text{Id}_{\mathcal{V}}$ l'élément $(\text{Id}_{V_i})_{i \in I}$ de $\text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Pour $\mathbf{f} \in \text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ et $\mathbf{f}' \in \text{Hom}(\mathcal{V}', \mathcal{V}'')$, on note $\mathbf{f}' \circ \mathbf{f}$ l'élément de $\text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'')$ dont les composantes sont données par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}' \circ \mathbf{f})_i &= f'_i \circ f_i & \text{si } i \in I_+ \\ (\mathbf{f}' \circ \mathbf{f})_i &= f_i \circ f'_i & \text{si } i \in I_- . \end{aligned}$$

7.6.1. On appelle *foncteur vectoriel* (resp. *foncteur vectoriel en dimension finie*) de type I et de classe C^r la donnée pour toute famille $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ d'espaces de Banach (resp. d'espaces vectoriels de dimension finie sur K) d'un espace de Banach $\tau(\mathcal{V})$ et pour tout $\mathbf{f} \in \text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ d'un élément $\tau(\mathbf{f}) \in \mathcal{L}(\tau(\mathcal{V}); \tau(\mathcal{V}'))$, ces données étant assujetties aux deux conditions suivantes :

- (a) On a $\tau(\text{Id}_{\mathcal{V}}) = \text{Id}_{\tau(\mathcal{V})}$ et $\tau(\mathbf{f}' \circ \mathbf{f}) = \tau(\mathbf{f}') \circ \tau(\mathbf{f})$.
- (b) L'application $\tau : \text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \rightarrow \mathcal{L}(\tau(\mathcal{V}); \tau(\mathcal{V}'))$ est de classe C^r .

7.6.2. Soit $\mathcal{M} = (M^i)_{i \in I}$ une famille de fibrés vectoriels de base B . Pour $b \in B$, posons $\mathcal{M}_b = (M^i_b)_{i \in I}$. Soit τ un foncteur vectoriel et soit $\tau(\mathcal{M})$

l'ensemble somme des $\tau(\mathcal{M}_b)$ pour $b \in B$; il existe sur $\tau(\mathcal{M})$ une structure de fibré vectoriel et une seule (de base B relativement à l'application π de $\tau(\mathcal{M})$ dans B telle que pour tout $b \in B$, on ait $\tau(\mathcal{M}_b) = \{b\}$) possédant la propriété suivante:

Soit U un ouvert de B et, pour tout i , soit $t^i = (U, \varphi_i, F_i)$ une carte vectorielle de M^i , de domaine U ; posons $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ et soit ψ_b l'élément de $\text{Hom}(\mathcal{M}_b, \mathcal{F})$ défini par $(\psi_b)_i = (t_b^i)^{-1}$ pour $i \in I_+$ et $(\psi_b)_i = t_b^i$ pour $i \in I_-$; pour $x \in \pi^{-1}(U)$, posons $\psi(x) = (\pi(x), \tau(\psi_{\pi(x)})(x))$. Alors le triplet $(U, \psi, \tau(\mathcal{F}))$ est une carte vectorielle du fibré vectoriel $\tau(\mathcal{M})$.

Muni de cette structure, $\tau(\mathcal{M})$ s'appelle le *fibré vectoriel déduit de la famille \mathcal{M} par le foncteur vectoriel τ* .

7.6.3. Soit f un morphisme de B dans une variété B' . Soit $\mathcal{M} = (M^i)$ (resp. $\mathcal{M}' = (M'^i)$) une famille indexée par I de fibrés vectoriels de base B (resp. B'). Pour tout $i \in I_+$, soit g_i un f -morphisme de M^i dans M'^i et pour tout $i \in I_-$, soit g_i un f -comorphisme de M'^i dans M^i . Posons $\mathbf{g} = (g_i)_{i \in I}$ et pour $b \in B$, posons $\mathbf{g}_b = ((g_i)_b)_{i \in I}$ (cf. 7.2.1 et 7.2.6). Il existe un f -morphisme et un seul, noté $\tau(\mathbf{g})$, de $\tau(\mathcal{M})$ dans $\tau(\mathcal{M}')$ tel que $\tau(\mathbf{g})_b = \tau(\mathbf{g}_b)$ pour tout $b \in B$.

Si en particulier $M^i = f^*M'^i$, les g_i étant les morphismes ou comorphismes canoniques, alors le B -morphisme de $\tau(\mathcal{M})$ dans $f^*\tau(\mathcal{M}')$ défini par $\tau(\mathbf{g})$ (7.2.4) est un isomorphisme: on exprime ce fait en disant que τ commute aux images réciproques.

En particulier soit B' une sous-variété de B et posons $\mathcal{M}|B' = (M^i|B')_{i \in I}$. Les fibrés vectoriels $\tau(\mathcal{M})|B'$ et $\tau(\mathcal{M}|B')$ sont alors canoniquement B' -isomorphes.

7.6.4. Soient $\tau, \tau_1, \dots, \tau_d$ des foncteurs vectoriels (de type I et de classe C'). Un morphisme d -linéaire θ de (τ_1, \dots, τ_d) dans τ est la donnée pour toute famille \mathcal{V} d'espaces de Banach indexée par I d'une application d -linéaire continue $\theta_{\mathcal{V}}$ de $\tau_1(\mathcal{V}) \times \dots \times \tau_d(\mathcal{V})$ dans $\tau(\mathcal{V})$, cette donnée satisfaisant à la condition suivante: pour tout $f \in \text{Hom}(\mathcal{V}', \mathcal{V}'')$ on a

$$\tau(f) \circ \theta_{\mathcal{V}} = \theta_{\mathcal{V}'} \circ (\tau_1(f) \times \dots \times \tau_d(f)).$$

Pour $d = 1$, on dit simplement un *morphisme* de τ_1 dans τ .

Soit alors \mathcal{M} une famille indexée par I de fibrés vectoriels de base B . Il existe un B -morphisme d -linéaire $\theta_{\mathcal{M}}$ et un seul de $\tau_1(\mathcal{M}) \times_B \dots \times_B \tau_d(\mathcal{M})$ dans $\tau(\mathcal{M})$ tel que $(\theta_{\mathcal{M}})_b = \theta_{\mathcal{M}_b}$ pour tout $b \in B$.

Avec les notations de 7.6.3., on a

$$\tau(\mathbf{g}) \circ \theta_{\mathcal{M}} = \theta_{\mathcal{M}'} \circ (\tau_1(\mathbf{g}) \times \dots \times \tau_d(\mathbf{g})).$$

Si $d = 1$, et si θ est un isomorphisme (ce qui veut dire que $\theta_{\mathcal{V}}$ est un isomorphisme pour toute famille \mathcal{V}), alors $\theta_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme.

7.6.5. Les définitions et résultats des n^{os} 7.6.2 à 7.6.4 s'étendent au cas des foncteurs vectoriels en dimension finie, à condition de supposer partout les fibrés vectoriels donnés de rang fini.

Ils s'étendent également au cas suivant: soit L un corps muni d'une structure de K -algèbre de dimension finie; on prend pour τ un foncteur vectoriel sur L (i.e. satisfaisant aux hypothèses de 7.6.1 où l'on a remplacé K par L), et on ne considère que des fibrés vectoriels sur L au sens de 7.3.4.

7.6.6. On appelle *foncteur vectoriel* (resp. *en dimension finie*) pour les isomorphismes la donnée pour tout espace de Banach V (resp. tout espace vectoriel de dimension finie sur K) d'un espace de Banach $\tau(V)$ et pour tout isomorphisme f de V sur un espace de Banach V' d'un isomorphisme $\tau(f)$ de $\tau(V)$ sur $\tau(V')$, ces données étant assujetties à la condition (a) de 7.6.1 et à la condition suivante:

(b') L'application $f \mapsto \tau(f)$ du sous-ensemble ouvert de $\mathcal{L}(V; V')$ constitué par les isomorphismes de V sur V' , dans $\mathcal{L}(\tau(V); \tau(V'))$, est de classe C^r .

Les définitions et résultats des n^{os} précédents s'étendent au cas des foncteurs vectoriels pour les isomorphismes (en faisant $I_+ = \{1\}$ et $I_- = \emptyset$), à l'exception de ceux du premier alinéa du n^o 7.6.3.

7.7. Sommes directes, fibrés d'applications multilinéaires, dual

7.7.1. On suppose que $I_- = \emptyset$. On définit un foncteur vectoriel σ appelé *foncteur somme directe* en posant $\sigma(\mathcal{V}) = \bigoplus_{i \in I} V_i$ et $\sigma(f) = \bigoplus_{i \in I} f_i$. Si

$\mathcal{M} = (M^i)_{i \in I}$ est une famille de fibrés vectoriels de base B , le fibré vectoriel $\sigma(\mathcal{M})$ est appelé la *somme directe* des M^i et est noté $\bigoplus_{i \in I} M^i$. Pour tout $b \in B$, la fibre en b de $\bigoplus_{i \in I} M^i$ est la somme directe des fibres des M^i en b .

Soit U un ouvert de B et soit $s_i \in \mathcal{S}_{M^i}^r(U)$ (pour $i \in I$). L'application $b \mapsto \sum_{i \in I} s_i(b)$ est alors une section, notée $\sum_i s_i$, de classe C^r de $M = \bigoplus_{i \in I} M^i$ et l'application $(s_i)_{i \in I} \mapsto \sum_i s_i$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}^r(U)$ -modules de $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{S}_{M^i}^r(U)$ sur $\mathcal{S}_M^r(U)$.

La variété sous-jacente à $\bigoplus_{i \in I} M^i$ s'identifie au produit fibré $\prod_B M^i$.

On désigne par pr_i le morphisme de fibrés vectoriels de $\bigoplus_{i \in I} M^i$ dans M^i qui sur chaque fibre $\bigoplus_{i \in I} M_b^i$ est la i -ème projection. On définit de même l'injection canonique j_i de M^i dans $\bigoplus_{i \in I} M^i$.

Soit f un morphisme de B dans une variété B' ; soit H un second

ensemble fini et soit $\mathcal{N} = (N^h)_{h \in H}$ une famille de fibrés vectoriels de base B' . L'application $u \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (\text{pr}_h \circ u \circ j_i)_{(h,i) \in H \times I}$ est une bijection de l'ensemble des f -morphisms de $\bigoplus_{i \in I} M^i$ dans $\bigoplus_{h \in I} N^h$ sur l'ensemble des matrices $(u_{h,i})_{(h,i) \in H \times I}$, où $u_{h,i}$ est un f -morphisme de M^i dans N^h .

Si $I = \{1, 2\}$, la suite

$$0 \rightarrow M^1 \xrightarrow{j_1} M^1 \oplus M^2 \xrightarrow{\text{pr}_2} M^2 \rightarrow 0$$

est exacte directe.

Inversement, soit M un fibré vectoriel de base B et soit M' un sous-fibré vectoriel de M . Supposons que la variété B soit paracompacte et que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

- (i) K est différent de \mathbf{R} ou \mathbf{C} ;
- (ii) $K = \mathbf{R}$, $r \neq \omega$ et la variété B admet des partitions de l'unité de classe C^r (5.3.6).

Il existe alors un sous-fibré vectoriel M'' de M tel que M s'identifie à la somme directe $M' \oplus M''$.

7.7.2. Supposons que $I_+ = \{0\}$ et que $I_- = \{1, 2, \dots, d\}$. On définit un foncteur vectoriel η_d de type I et de classe C^r en posant $\eta_d(\mathcal{V}) = \mathcal{L}(V_1, \dots, V_d; V_0)$ et $\eta_d(f)(u) = f_0 \circ u \circ (f_1 \times \dots \times f_d)$ pour $u \in \eta_d(\mathcal{V})$. Si $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$ est une famille de fibrés vectoriels de base B , le fibre vectoriel $\eta_d(\mathcal{M})$ se note $\mathcal{L}(M_1, \dots, M_d; M_0)$.

Soit u un morphisme multilinéaire de $M_1 \times_B \dots \times_B M_d$ dans M_0 . L'application $\hat{u} : b \mapsto u_b$ est alors une section de $\mathcal{L}(M_1, \dots, M_d; M_0)$ et l'application $u \mapsto \hat{u}$ est bijective.

7.7.3. Gardons les notations de 7.7.2 et supposons de plus que $d = 1$. Le fibré vectoriel $\mathcal{L}(M_1; M_0)$ s'appelle alors le *fibré des homomorphismes* de M_1 dans M_0 . Ses sections correspondent aux B -morphisms de M_1 dans M_0 .

Si de plus M_0 est le fibré trivial K_B , le fibré vectoriel $\mathcal{L}(M_1; K_B)$ s'appelle le *dual* de $M = M_1$ et se note M' : la fibre $(M')_b$ est l'espace des formes linéaires continues sur la fibre M_b de M au point $b \in B$.

Si s (resp. t) est une section de M (resp. M') sur un ouvert U de B , l'application $b \mapsto (b, \langle s(b), t(b) \rangle)$ est une section, notée $\langle s, t \rangle$ du fibré trivial K_B .¹

7.8. Fibrés d'applications multilinéaires alternées

Dans les nos 7.8.1 à 7.8.5, on suppose que K est de caractéristique 0 ou que les fibrés vectoriels considérés sont de rang fini. On ignore si la définition du foncteur α_d donnée dans 7.8.1 peut se faire sans aucune restriction.

7.8.1. Prenons $I_+ = \{0\}$, $I_- = \{1\}$ et soit d un entier ≥ 1 . On définit un

¹ Lorsque M est de rang fini, on écrit M^* au lieu de M' .

foncteur vectoriel α_d en désignant par $\alpha_d(\mathcal{V})$ l'espace de Banach des applications d -linéaires continues alternées de V_1^d dans V_0 et en posant $\alpha_d(f)(u) = f_0 \circ u \circ f_1^d$ pour $u \in \alpha_d(\mathcal{V})$. Le fibré vectoriel $\alpha_d(M_1, M_0)$ se note $\text{Alt}^d(M_1; M_0)$ et s'appelle le *fibré vectoriel des applications d -linéaires alternées de M_1 dans M_0* .

L'injection canonique de $\text{Alt}^d(M_1; M_0)$ dans $\mathcal{L}(M_1, \dots, M_1; M_0)$ est un morphisme de fibrés vectoriels; $\text{Alt}^d(M_1; M_0)$ est un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{L}(M_1, \dots, M_1; M_0)$.

On a $\text{Alt}^1(M_1; M_0) = \mathcal{L}(M_1; M_0)$. On pose $\text{Alt}^0(M_1; M_0) = M_0$.

Si ω est une section¹ de $\text{Alt}^d(M_1; M_0)$ et si s_1, \dots, s_d sont des sections de M_1 , il existe une section et une seule de M_0 , notée $\omega(s_1, \dots, s_d)$, telle que

$$\omega(s_1, \dots, s_d)(b) = \omega(b)(s_1(b), \dots, s_d(b)) \quad \text{pour tout } b \in B.$$

7.8.2 Soit φ un accouplement de $N \times_B N'$ dans N'' (cf. n° 7.3.1); pour chaque b , on a une application bilinéaire φ_b de $N_b \times N'_b$ dans N''_b qui définit (cf. A, III, p. 142) une application bilinéaire de

$$\text{Alt}^d(M; N)_b \times \text{Alt}^e(M; N')_b$$

dans $\text{Alt}^{d+e}(M; N'')_b$. La collection de ces applications bilinéaires définit un accouplement u de

$$\text{Alt}^d(M; N) \times_B \text{Alt}^e(M; N')$$

dans $\text{Alt}^{d+e}(M; N'')$; si ω et ω' sont respectivement des sections de $\text{Alt}^d(M; N)$ et $\text{Alt}^e(M; N')$ sur un ouvert U , la section $u(\omega, \omega')$ de $\text{Alt}^{d+e}(M; N'')$ sur U sera notée $\omega \wedge_\varphi \omega'$, et appelée le *produit extérieur* de ω et ω' .

On a la formule:

$$(1) \quad (\omega \wedge_\varphi \omega')(s_1, \dots, s_{d+e}) = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \varphi(\omega(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(d)}), \omega'(s_{\sigma(d+1)}, \dots, s_{\sigma(d+e)}))$$

où les s_i sont des sections de M sur U , et où la sommation est étendue aux permutations σ de $\{1, 2, \dots, d+e\}$ telles que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(d) \quad \text{et} \quad \sigma(d+1) < \dots < \sigma(d+e).$$

7.8.3. Soient M un fibré vectoriel et A un fibré en algèbres, de base B . Supposons que les fibres A_b de A soient des algèbres associatives et commutatives, possédant un élément unité, noté e_b . Pour tout ouvert U de B , nous noterons $\Omega^d(U)$ le $\mathcal{C}^r(U)$ -module formé des sections du fibré $\text{Alt}^d(M; A)$ et $\Omega^*(U)$ la somme directe des $\Omega^d(U)$ pour $d \geq 0$. Les multiplications sur chaque fibre définissent un accouplement de $A \times_B A$ dans A , d'où (7.8.2) une structure d'algèbre graduée sur $\Omega^*(U)$, qui est *associative et anticommutative*. La sous-algèbre $\Omega^0(U)$ est l'algèbre des

¹ Le lecteur aura soin de ne pas confondre cet emploi de la lettre ω avec celui défini p. 10.

sections de A . Un élément ω de $\Omega^1(U)$ s'identifie à un U -morphisme de $M|U$ dans $A|U$ (7.7.3): si $s \in \mathcal{S}_M^r(U)$, nous noterons $\langle \omega, s \rangle$ la section $\omega(s)$ de A (7.4.2). Soient $s_j \in \mathcal{S}_M^r(U)$ et $\omega_j \in \Omega^1(U)$ (pour $1 \leq j \leq d$); on a :

$$(2) \quad \omega(s_1, \dots, s_d) = \det(\langle \omega_i, s_j \rangle) \quad \text{pour } \omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_d.$$

7.8.4. Soit $d \geq 1$. Il existe un accouplement i de $M \times_B \text{Alt}^d(M; A)$ dans $\text{Alt}^{d-1}(M; A)$ dont la restriction à chaque fibre est donnée par le produit intérieur droit (cf. A, III, p. 156). Si s est une section de M sur l'ouvert U et si $\omega \in \Omega^d(U)$, on note $i(s)\omega$ la section $i(s, \omega)$ de $\text{Alt}^{d-1}(M; A)$ sur U ; on pose $i(s)\omega = 0$ pour ω dans $\Omega^0(U)$.

On associe ainsi à toute section s de M sur U un endomorphisme du $\mathcal{C}^r(U)$ -module $\Omega^*(U)$. On a le formulaire :

$$(3) \quad (i(s)\omega)(s_1, \dots, s_{d-1}) = \omega(s, s_1, \dots, s_{d-1}) \quad \text{pour } \omega \in \Omega^d(U), d \geq 1$$

$$(4) \quad i(s) \circ i(s) = 0$$

$$(5) \quad i(s)\omega = \langle \omega, s \rangle \quad \text{pour } \omega \in \Omega^1(U)$$

$$(6) \quad i(s) \cdot (\omega \wedge \omega') = i(s)\omega \wedge \omega' + (-1)^d \omega \wedge i(s)\omega' \quad \text{pour } \omega \in \Omega^d(U)$$

$$(7) \quad i(s)(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \langle \omega_i, s \rangle \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_p.$$

Dans la dernière formule, les ω_i sont dans $\Omega^1(U)$ et le signe $\hat{}$ indique que le symbole qu'il surmonte doit être omis.

Toutes les opérations décrites ci-dessus sur les sections sont multilinéaires sur l'anneau $\mathcal{C}^r(U; K)$.

7.8.5. Soit L une algèbre de Banach sur K . Les définitions et résultats des n° 7.7 et 7.8 s'étendent au cas des fibrés vectoriels sur L : on définit de manière analogue les fibrés d'applications L -multilinéaires ou L -multilinéaires alternées.

7.9. Produits tensoriels, espaces tensoriels, algèbre extérieure

On garde les notations de 7.6. De plus, on désigne par L un corps commutatif muni d'une structure de K -algèbre de dimension finie et on appelle fibré vectoriel un fibré vectoriel sur L , de base B et de rang localement fini.

7.9.1. Supposons que $I_- = \emptyset$. Si \mathcal{V} et \mathcal{V}' sont deux familles indexées par I d'espaces vectoriels de dimension finie sur L , on désigne par $\tau(\mathcal{V})$ le produit tensoriel des V_i pour $i \in I$ (A, II, p. 71) et si $f \in \text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$, on pose $\tau(f) = \otimes f_i$. On définit ainsi un *foncteur vectoriel sur L en dimension finie*.

sion finie et si $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$ est une famille de fibrés vectoriels, on désigne par $\bigotimes_{i \in I} M_i$ et on appelle *produit tensoriel* (sur L) des M_i le fibré vectoriel $\tau(\mathcal{M})$.

Si s_i est une section de M_i sur l'ouvert U de B (pour $i \in I$), l'application $b \mapsto \bigotimes_{i \in I} s_i(b)$ est une section de $\bigotimes_{i \in I} M_i$, notée $\bigotimes_{i \in I} s_i$. L'application $(s_i)_{i \in I} \mapsto \bigotimes_{i \in I} s_i$ est multilinéaire sur l'anneau $\mathcal{C}^r(U; L)$.

7.9.2. Les isomorphismes canoniques définis dans *Alg.*, chap. II fournissent des isomorphismes de foncteurs vectoriels. Il en résulte d'après 7.6.4 des isomorphismes de fibrés vectoriels. Par exemple, on a des isomorphismes canoniques :

$$(M_1 \oplus M_2) \otimes M_3 \longrightarrow (M_1 \otimes M_3) \oplus (M_2 \otimes M_3)$$

$$M_1^* \otimes M_2 \longrightarrow \mathcal{L}(M_1; M_2)$$

etc.

7.9.3. Soit M un fibré vectoriel et soient I et J deux ensembles finis disjoints. Le *fibré tensoriel* $T_I^I(M)$ est défini comme le produit tensoriel $\bigotimes_{\alpha \in I \cup J} M_\alpha$, où $M_\alpha = M$ si $\alpha \in I$, et $M_\alpha = M^*$ si $\alpha \in J$, M^* désignant le dual de M (A, III, p. 63). La fibre $T_I^I(M)_b$ de ce fibré en un point b est égale à l'espace tensoriel $T_I^I(M_b)$ défini en *Alg.*, loc. cit. Lorsque $I = \{1, \dots, p\}$ et $J = \{p+1, \dots, p+q\}$, on écrit $T_q^p(M)$ au lieu de $T_I^I(M)$; on a

$$T_q^p(M) = (\bigotimes^p M) \otimes (\bigotimes^q M^*).$$

La donnée d'un *ordre total* sur I et sur J définit un isomorphisme canonique de $T_I^I(M)$ sur $T_q^p(M)$.

7.9.4. Si I (resp. J) est réunion de deux sous-ensembles disjoints I' et I'' (resp. J' et J''), $T_I^I(M)$ s'identifie canoniquement au produit tensoriel $T_{I'}^{I'}(M) \otimes T_{I''}^{I''}(M)$. En particulier, si s' (resp. s'') est une section de $T_{I'}^{I'}(M)$ (resp. de $T_{I''}^{I''}(M)$), le produit tensoriel $s' \otimes s''$ s'identifie à une section de $T_I^I(M)$.

7.9.5. Le *dual* de $T_I^I(M)$ s'identifie à $T_I^I(M)$.

7.9.6. Soient $i \in I$ et $j \in J$. Pour tout $b \in B$, l'homomorphisme de *contraction* des indices i et j est défini (cf. *Alg.*, loc. cit.); c'est un homomorphisme $(c_j^i)_b : T_I^I(M_b) \rightarrow T_I^I \setminus \{j\}^{\{i\}}(M_b)$. La collection des $(c_j^i)_b$ définit un morphisme d'espaces fibrés vectoriels

$$c_j^i : T_I^I(M) \rightarrow T_I^I \setminus \{j\}^{\{i\}}(M),$$

appelé encore *contraction* des indices i et j . On définit de même la contraction des indices i_1, \dots, i_k de I avec les indices j_1, \dots, j_k de J .

7.9.7. Soit d un entier ≥ 0 ; soient V et V' deux espaces vectoriels de dimension finie sur L et $f \in \text{Hom}_L(V, V')$; posons $\lambda_d(V) = \bigwedge^d(V)$ et $\lambda_d(f) = \bigwedge^d(f)$. On définit ainsi un foncteur vectoriel sur L en dimension finie et, si M est un fibré vectoriel, on note $\bigwedge^d(M)$ et on appelle *puissance extérieure d -ème de M* (sur L) le fibré vectoriel $\lambda_d(M)$.

L'application canonique de $\bigotimes^d V$ sur $\bigwedge^d(V)$ définit un morphisme de foncteurs vectoriels, d'où un morphisme, dit canonique, de $\bigotimes^d M$ dans $\bigwedge^d(M)$. Ce morphisme est *surjectif*.

Les isomorphismes canoniques de l'espace des applications d -multilinéaires alternées sur l'espace $\bigwedge^d(V^*)$ ou sur $(\bigwedge^d(V))^*$ fournissent des isomorphismes, dits canoniques, du fibré vectoriel $\text{Alt}^d(M; L)$ des applications d -multilinéaires alternées sur L , sur le fibré vectoriel $\bigwedge^d(M^*)$ ou sur $(\bigwedge^d(M))^*$.

7.9.8. Posons maintenant $\lambda(V) = \bigwedge(V)$ et $\lambda(f) = \bigwedge(f)$; on définit encore ainsi un foncteur vectoriel sur L en dimension finie. Le fibré vectoriel $\lambda(M)$ se note $\bigwedge(M)$. Sa fibre $\bigwedge(M)_b$ en $b \in B$ est l'algèbre extérieure (sur L) de la fibre M_b . Le fibré vectoriel $\bigwedge(M)$ est un fibré vectoriel en algèbres localement trivial.

Les définitions et propriétés des produits intérieurs données en *Alg.*, chap. III, 3^e éd., § 10 s'étendent immédiatement aux sections des fibrés vectoriels $\bigwedge(M)$ et $\bigwedge(M^*)$ (cf. aussi les formules (1) à (7) des n° 7.8.2 à 7.8.4).

7.9.9. Soit M un fibré vectoriel. Pour tout entier n , soit B_n l'ensemble (ouvert) des points $b \in B$ tels que la dimension (sur L) de M_b soit égale à n . Pour $b \in B_n$, posons $N_b = \bigwedge^n(M_b)$ et soit N l'ensemble somme des N_b pour $b \in B$. Il existe sur N une structure de fibré vectoriel et une seule telle que l'application évidente de $N|B_n$ dans $\bigwedge^n(M)|B_n$ soit un isomorphisme pour tout n . Muni de cette structure, le fibré vectoriel N de rang un en chaque point se note $\det(M)$.

7.10. Fibrés vectoriels et fibrés principaux

7.10.1. Soit F un espace de Banach. On dit qu'un fibré vectoriel M de base B est *pur de type F* si toutes les fibres M_b de M (pour $b \in B$) sont isomorphes (comme espaces de Banach) à F .

Soit M un fibré vectoriel de base B pur de type F et soit P la sous-variété ouverte du fibré vectoriel $\mathcal{L}(F_B; M)$ composée des couples (b, u) où $b \in B$ et où u est un *isomorphisme* de $F_b = F$ sur M_b . Le groupe $\text{GL}(F)$ des automorphismes de F opère à droite sur P en posant $(b, u) \cdot g = (b, u \circ g)$ pour $(b, u) \in P$ et $g \in \text{GL}(F)$. Notons π_P l'application

$(b, u) \mapsto b$ de P dans B . Le quadruplet $\lambda = (P, \text{GL}(F), B, \pi_P)$ (où $\text{GL}(F)$ est muni de sa structure canonique de variété de groupe (5.12.2)) est une *fibration principale* (6.2.1): on l'appelle la *fibration des repères* de M . L'application $((b, u), h) \mapsto u(h)$ de $P \times F$ dans M munit M d'une structure de *fibré associé à λ , de fibre type F* (6.5.1).

Lorsque $F = K^n$, on peut identifier un isomorphisme u de F sur M_b à la base de M_b image par u de la base canonique de K^n . L'espace fibré des repères de M s'identifie alors à la sous-variété ouverte de $M \times_B \dots \times_B M$ formée des bases (e_1, \dots, e_n) des différentes fibres M_b .

Soit U un ouvert de B et soit $t = (U, \varphi, E)$ une carte vectorielle de M de domaine U , avec $E = F$. L'application $b \mapsto (b, t_b)$ est alors une *section* de P , notée \tilde{t} , et l'application $t \mapsto \tilde{t}$ est une bijection de l'ensemble des cartes vectorielles de M de la forme (U, φ, F) sur l'ensemble des sections de P sur U .

7.10.2. Réciproquement, soit $\lambda = (Q, G, B, \pi_Q)$ une fibration principale et soit φ un homomorphisme de variétés de groupe de G dans le groupe $\text{GL}(F)$ des automorphismes d'un espace de Banach F . Faisons opérer G à gauche sur F en posant $g \cdot h = \varphi(g)(h)$ ($h \in F, g \in G$). Soit M un espace fibré associé à λ , de fibre type F , et soit $\rho : Q \times F \rightarrow M$ son application repère (6.5.1). Soit π l'application de M dans B définie par

$$\pi(\rho(q, h)) = \pi_Q(q) \quad (q \in Q \text{ et } h \in F).$$

Soit s une section de Q sur un ouvert U de B ; l'application

$$\tilde{s} : (b, h) \mapsto (s(b), h)$$

est alors une bijection de $U \times F$ sur $\pi^{-1}(U)$. Il existe sur le couple (M, π) une structure de *fibré vectoriel de base B* et une seule pour laquelle les triplets $t_s = (U, \tilde{s}^{-1}, F)$ sont des cartes vectorielles (pour toute section s de Q). La structure de variété sous-jacente à cette structure est celle de l'espace fibré associé à λ .

Soit $q \in Q$; posons $b = \pi_Q(q)$ et soit u l'isomorphisme de F sur M_b défini par $u(h) = \rho(q, h)$ (pour $h \in F$). L'application $f : q \mapsto (b, u)$ est un B -morphisme de fibrations principales, compatible avec φ , de (Q, G, B, π_Q) dans le fibré des repères $(P, \text{GL}(F), B, \pi_P)$ du fibré vectoriel M .

7.10.3. Reprenons les notations du n° 7.6. Pour tout $i \in I$, soit

$$\lambda_i = (P_i, G_i, B, \pi_i)$$

une fibration principale de base B et supposons que G_i opère à gauche sur un espace de Banach V_i au moyen d'un homomorphisme

$$\varphi_i : G_i \rightarrow \text{GL}(V_i).$$

Soit M_i un espace fibré associé à λ_i de fibre type V_i . Posons $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$

et $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ et soit λ la fibration principale produit des λ_i au dessus de B (6.2.5). Posons $\lambda = (P, G, B, \pi_P)$, avec $G = \prod_{i \in I} G_i$.

Soit maintenant τ un foncteur vectoriel. Pour $g = (g_i) \in G$, soit $\varphi(g)$ l'élément de $\text{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ défini par :

$$\begin{aligned} \varphi(g)_i &= \varphi_i(g_i) & \text{si } i \in I_+ \\ \varphi(g)_i &= \varphi_i(g_i)^{-1} & \text{si } i \in I_- \end{aligned}$$

Le groupe G opère alors sur $\tau(\mathcal{V})$ au moyen du morphisme $g \mapsto \tau(\varphi(g))$ de G dans $\text{GL}(\tau(\mathcal{V}))$.

Soit d'autre part $x = (x_i)$ un point de P et soit $b = \pi_P(x)$. Pour chaque i , l'application θ_{x_i} définie au n° 6.5.2 est un isomorphisme de V_i sur $(M_i)_b$. Soit θ_x l'élément de $\text{Hom}(\mathcal{V}, ((M_i)_b)_{i \in I})$ défini par :

$$\begin{aligned} (\theta_x)_i &= \theta_{x_i} & \text{si } i \in I_+ \\ (\theta_x)_i &= \theta_{x_i}^{-1} & \text{si } i \in I_- \end{aligned}$$

Soit ρ l'application $(x, h) \mapsto (b, \tau(\theta_x)(h))$ de $P \times \tau(\mathcal{V})$ dans le fibré vectoriel $\tau(\mathcal{M})$; l'application ρ munit $\tau(\mathcal{M})$ d'une structure d'espace fibré associé à λ de fibre type $\tau(\mathcal{V})$.

Ces considérations se généralisent au cas de foncteurs vectoriels en dimension finie, ou de foncteurs vectoriels sur un corps L muni d'une structure de K -algèbre de dimension finie.

7.11. Changement de structure

Les structures et opérations décrits dans ce paragraphe sont compatibles avec les changements de structure décrits aux numéros 5.13 et 5.14.

APPENDICE

Polynômes-continus et séries formelles

Dans cet Appendice, on désigne par F un espace polynormé séparé sur K , par E_i (pour $1 \leq i \leq n$) un espace normé sur K et par E l'espace vectoriel topologique produit des E_i .

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, et $1 \leq j \leq |\alpha|$, on pose :

$$\alpha(j) = \inf \{ k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ et } j > \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} \}$$

(la suite des $\alpha(j)$ s'obtient donc en écrivant α_1 fois 1, ..., α_n fois n).

On désigne par E_α l'espace vectoriel topologique produit de la famille des $E_{\alpha(j)}$ pour $1 \leq j \leq |\alpha|$. On désigne par $\text{Hom}_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ l'espace des applications $|\alpha|$ -multilinéaires de E_α dans F et par $\mathcal{L}_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ le sous-espace de $\text{Hom}_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ formé des applications multilinéaires *continues* muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E_α ; c'est un espace polynormé séparé, dont la topologie peut être définie par la famille de semi-normes $\|u\|_\gamma$ où, pour une semi-norme γ continue sur F , on note $\|u\|_\gamma$ la borne inférieure des nombres $a \geq 0$ tels que

$$\|u(x_1, \dots, x_{|\alpha|})\|_\gamma \leq a \|x_1\| \dots \|x_{|\alpha|}\|$$

où chaque x_j parcourt $E_{\alpha(j)}$.

On désigne par p_i la projection canonique de E sur E_i . Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $\alpha \neq 0$, on note p_α l'application $x \mapsto (p_{\alpha(j)}(x))$ de E dans E_α .

A.1. Une application f de E dans F est appelée un *polynôme multihomogène de multidegré α* (avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$) sur E à valeurs dans F s'il existe un élément

$$u \in \text{Hom}_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$$

tel que $f = u \circ p_\alpha$.

A.2. On désigne par $P_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ l'image de $\mathcal{L}_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ par l'application linéaire $u \mapsto u \circ p_\alpha$ de $\text{Hom}_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ dans l'espace des applications de E dans F , munie de la topologie quotient de celle de $\mathcal{L}_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$. Un élément de $P_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ est appelé un *polynôme-continu multihomogène de multidegré α* sur E à valeurs dans F . La topologie de $P_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ est définie par la famille de semi-normes :

$$\|f\|_\gamma = \inf_{u \in \mathcal{L}_\alpha(E_1, \dots, E_n; F), f = u \circ p_\alpha} \|u\|_\gamma$$

pour γ décrivant l'ensemble des semi-normes continues sur F . Si F est un espace normé, de norme γ , on écrit $\|f\|$ au lieu de $\|f\|_\gamma$. L'espace $P_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ et sa topologie ne changent pas si l'on substitue aux normes données sur chaque E_i des normes équivalentes. On peut donc les définir lorsque les E_i sont des espaces vectoriels topologiques normables.

En particulier, un élément de $P_k(E; F)$ est appelé un *polynôme-continu homogène de degré total k* sur E à valeurs dans F . L'espace $P_k(E; F)$ est somme directe topologique des espaces $P_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ pour $|\alpha| = k$. L'espace $P_0(E; F)$ est l'espace des applications constantes de E dans F et on l'identifie à F .

A.3. On désigne par $P(E; F)$ ou $P(E_1, \dots, E_n; F)$ le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications de E dans F engendré par les sous-espaces $P_k(E; F)$.

Il est somme directe des sous-espaces $P_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, et aussi des sous-espaces $P_k(E; F)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Un élément de $P(E; F)$ est appelé un *polynôme-continu* sur E à valeurs dans F .

A.4. Soient G_j des espaces normés (pour $1 \leq j \leq m$). Soient $f_j \in P(E_1, \dots, E_n; G_j)$ (pour $1 \leq j \leq m$) et soit $g \in P(G_1, \dots, G_m; F)$. L'application

$$h : x \mapsto g(f_1(x), \dots, f_m(x))$$

appartient à $P(E_1, \dots, E_n; F)$. Si de plus $f_j \in P_\alpha(E_1, \dots, E_n; G_j)$ pour $1 \leq j \leq m$ (avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$) et $g \in P_\beta(G_1, \dots, G_m; F)$, (avec $\beta \in \mathbb{N}^m$), on a $h \in P_{|\beta|_\alpha}(E_1, \dots, E_n; F)$ et

$$\|h\|_\gamma \leq \|g\|_\gamma \cdot \|f\|^\beta$$

pour toute semi-norme continue γ sur F (en posant $\|f\|^\beta = \prod_{1 \leq j \leq m} \|f_j\|^{\beta_j}$).

A.5. On désigne par $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ l'espace vectoriel produit des $P_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, muni de la topologie produit des topologies *discrètes* sur chacun des facteurs. Cette topologie fait de $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ un groupe topologique *séparé et complet*. L'application linéaire de $P(E_1, \dots, E_n; F)$ dans $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ prolongeant les injections canoniques des $P_\alpha(E_1, \dots, E_n; F)$ est injective et son image est dense dans $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$: on identifie en général un polynôme-continu sur E à valeurs dans F avec son image dans $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$.

L'application identique de $P(E_1, \dots, E_n; F) = P(E; F)$ se prolonge par continuité en un isomorphisme de $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ sur $\hat{P}(E; F)$.

Un élément de $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ est appelé une *série formelle à composantes continues* (ou par abus de langage une *série formelle*) sur le produit des E_i à valeurs dans F .

A.6. Soient G_j (pour $1 \leq j \leq m$) des espaces normés et soit $g \in P(G_1, \dots, G_m; F)$. L'application $f \mapsto g \circ f$ de $\prod_{1 \leq j \leq m} P(E_1, \dots, E_n; G_j)$ dans $P(E_1, \dots, E_n; F)$ se prolonge par continuité en une application (notée encore $f \mapsto g \circ f$) de $\prod_{1 \leq j \leq m} \hat{P}(E_1, \dots, E_n; G_j)$ dans $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Soient $f_j = (f_{j,\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \in \hat{P}(E_1, \dots, E_n; G_j)$, avec $f_{j,0} = 0$. Posons $f = (f_j)$: l'application $g \mapsto g \circ f$ de $P(G_1, \dots, G_m; F)$ dans $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$ se prolonge par continuité en une application (notée encore $g \mapsto g \circ f$) de $\hat{P}(G_1, \dots, G_m; F)$ dans $\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F)$.

INDEX DES NOTATIONS

$\| \cdot \|_r$: Notations et conventions
 $\alpha!, |\alpha|$: Notations et conventions
 $((\alpha, \beta))$: Notations et conventions
 \mathbf{x}^α : Notations et conventions
 r, ∞, ω : Notations et conventions
 o, o_{x_0} : 1.1.1
 $Df(x_0)$: 1.2.1
 $D_h f(x_0)$: 1.2.1
 $D_i f(x_0)$: 1.6.2
 $\partial f / \partial u_i$: 1.6.2
 $\partial_i f(x_0)$: 1.6.3 et 5.5.8
 $D^p f(x_0)$: 1.7.1
 $D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x_0)$: 1.7.2
 $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} f(x_0)$: 1.7.3
 $\mathcal{C}^r(U; F)$: 2.3.2
 $\partial^\alpha f$: 2.4.2
 $\Delta^\alpha f(x_0)$: 2.5.3 et 3.2.1
 $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}(E_1, \dots, E_n; F)$: 3.1.1 et 4.1.1
 $\|f\|_{r, \mathbf{R}}$: 3.1.1 et 4.1.1
 $\mathcal{H}(E_1, \dots, E_n; F)$: 3.1.2 et 4.1.2
 $J(f)$: 3.1.4
 $I(f), \rho(f), C(f)$: 3.1.4 et 4.1.3
 $\tilde{I}(f), \tilde{\rho}(f), \tilde{C}(f)$: 3.1.5
 $\|f\|_{\alpha, \mathbf{R}}, \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{R}}(E_1, \dots, E_n; F)$: 3.1.5
 $\mathcal{C}^r(X)$: 5.4.2
 $T_a(X)$: 5.5.1
 $T_a(f)$: 5.5.2
 $\zeta_E(a)$: 5.5.5
 $d_a f, T'_a(X)$: 5.5.6
 $\partial_{i,a}$: 5.5.8
 $\partial f / \partial \xi^i$: 5.5.8
 $c \times c'$: 5.6.1
 $T_{a,b}^1, T_{a,b}^2$: 5.6.6
 $\prod_{i \in I} X_i$: 5.11.2

$$X_1 \times_S X_2: 5.11.2$$

$$P \times^G F: 6.5.1$$

$$\lambda \times_B \lambda': 6.1.2$$

$$\mathcal{S}_M^r(U): 7.4.1$$

$$\tau(\mathcal{M}): 7.6.2$$

$$\tau(\mathfrak{g}): 7.6.3$$

$$\bigoplus_{i \in I} M: 7.7.1$$

$$\mathcal{L}(M_1, \dots, M_d; M_0): 7.7.2$$

$$M^*: 7.7.3$$

$$\text{Alt}^d(M_1; M_0): 7.8.1$$

$$\omega \wedge_{\varphi} \omega': 7.8.2$$

$$\Omega^d, \Omega^*: 7.8.3$$

$$i(s): 7.8.4$$

$$\bigotimes_{i \in I} M_i: 7.9.1$$

$$T_j^1(M): 7.9.3$$

$$\bigwedge^d(M): 7.9.7$$

$$\det(M): 7.9.9$$

$$\|f\|_7, P_{\alpha}(E_1, \dots, E_n; F): A.2$$

$$P(E_1, \dots, E_n; F): A.3$$

$$\hat{P}(E_1, \dots, E_n; F): A.5$$

INDEX TERMINOLOGIQUE

accouplement : 7.3.1
affaiblissement de structure : 5.13.1
analytique (application) : 3.2.1, 4.2.1 et 5.3.1
analytique (variété) : 5.1.5
analytique complexe, analytique réelle, analytique p -adique (variété) : 5.1.5
application linéaire tangente : 5.5.2
atlas : 5.1.3
atlas vectoriel : 7.1.3
Banach (espace de) : Notations et conventions
B-morphisme de fibrations : 6.1.3
B-morphisme de fibrations principales : 6.3.1
B-morphisme de fibrés vectoriels : 7.2.3
carte : 5.1.1
carte vectorielle : 7.1.1
Cauchy (inégalités de) : 3.3.4 et 4.3.1
classe C^r (application de) : 2.3.1, 3.2.1, 4.2.1 et 5.3.1
classe C^r (variété de) : 5.1.5
cocycle : 6.4.1
codimension d'une quasi-sous-variété : 5.8.7
cohomologues (cocycles) : 6.4.1
comorphisme : 7.2.6
compatibles (cartes) : 5.1.2
compatibles (cartes vectorielles) : 7.1.2
complexification : 5.14.8
conjuguée (variété) : 5.14.2
contact (ordre de) : 1.1.2
convergentes (séries) : 3.1.1 et 4.1.1
coordonnées (système de) : 5.1.10
corps de base : Notations et conventions
cotangent (espace) : 5.5.6
cotangent (vecteur) : 5.5.6
covecteur : 5.5.6
dérivable (fonction) : 1.2.1
dérivable (fonction strictement) : 1.2.2
dérivable (fonction indéfiniment) : 2.3.1
dérivée : 1.6.1
dérivée partielle : 1.6.1
dérivée $p^{\text{ième}}$: 1.7.1

dérivée partielle itérée : 1.7.2
 différentielle : 5.5.6
 dimension d'une variété en un point : 5.1.8
 dimension d'une variété : 5.1.8
 direct (morphisme localement) : 7.5.5
 directe (suite exacte localement) : 7.5.6
 domaine de convergence strict : 3.1.4 et 4.1.3
 domaine de convergence : 3.1.5
 domaine d'une carte : 5.1.1, 7.1.1
 dual d'un fibré vectoriel : 7.7.3
 entière (fonction) : 3.2.9
 équivalents (atlas) : 5.1.3
 équivalents (atlas vectoriels) : 7.1.3
 espace de Banach : Notations et conventions
 espace cotangent : 5.5.6
 espace fibré associé : 6.5.1
 espace normable : Notations et conventions
 espace polynormé : Notations et conventions
 espace tangent : 5.5.1
 espace transversal : 5.8.7
 étale (morphisme) : 5.7.6
 étalée (variété) : 5.7.6.
 étalement : 5.7.6
 exacte (suite localement) : 7.5.6
 expression d'un morphisme : 5.3.2
 extension du groupe structural : 6.6.4
 faisceau de fonctions : 5.4.1
 faisceau localement libre : 7.4.8
 f -comorphisme : 7.2.6
 fibration : 6.1.1
 fibration des repères : 7.10.1
 fibration principale : 6.2.1
 fibre : 6.1.1
 fibré associé à une fibration principale (espace) : 6.5.1
 fibré en algèbres : 7.3.2
 fibré en A -modules : 7.3.3
 fibré tensoriel : 7.9.3
 fibré vectoriel : 7.1.4
 fibré vectoriel quotient : 7.5.2
 fibré vectoriel des applications multilinéaires alternées : 7.8.1
 fibré vectoriel des homomorphismes : 7.7.3
 foncteur vectoriel : 7.6.1
 foncteur vectoriel pour les isomorphismes : 7.6.6
 fonctions de transition : 6.4.2
 G - B -morphisme : 6.3.1
 germe de sous-variété : 5.8.12
 grassmannienne (variété) : 5.2.6
 groupe (variété de) : 5.12.1
 groupe analytique : 5.12.1
 groupe de Lie : 5.12.1
 groupe structural : 6.2.1
 holomorphe (application) : 3.2.1

homomorphisme de variété de groupe : 5.12.1
image d'un morphisme de fibrés vectoriels : 7.5.5
image inverse d'une structure de variété : 5.8.1
image réciproque d'une fibration : 6.1.5
image réciproque d'une fibration principale : 6.3.3
image réciproque d'un fibré vectoriel : 7.2.4
immersion : 5.7.1
implicites (théorème des fonctions) : 1.5, 5.6.7
indicatrice de convergence stricte : 3.1.4 et 4.1.3
indicatrice de convergence : 3.1.5
induite (fibration) : 6.1.5
induit (fibré vectoriel) : 7.2.5
inégalités de Cauchy : 3.3.4 et 4.3.1
isomorphisme local : 5.7.6
jacobienne (matrice) : 1.6.4
K-analytique (application) : 3.2.1 et 4.2.1
K-analytique (variété) : 5.1.5
K-variété : 5.1.5
libre (faisceau localement) : 7.4.8
loi d'opération : 5.12.5
maximum (principe du) : 3.3.7
morphisme de fibrations : 6.1.3
morphisme de fibrations principales : 6.3.1
morphisme de fibrés vectoriels : 7.2.1
morphisme multilinéaire : 7.3.1
morphisme de variétés : 5.3.2
négligeable (fonction) : 1.1.1
normable (espace) : Notations et conventions
norme : Notations et conventions
noyau d'une double flèche : 5.11.9
noyau d'un morphisme de fibrés vectoriels : 7.5.5
partition de l'unité de classe C^r : 5.3.6
plongement : 5.8.3
polyboule, polydisque : 3.1.6
polynôme multihomogène : A.1
polynôme-continu : A.3
polynôme-continu multihomogène : A.2
polynormé (espace) : Notations et conventions
principale (fibration) : 6.2.1
produit extérieur de sections : 7.8.2
produit de fibrations : 6.1.2
produit de fibrations principales : 6.2.5
produit de variétés : 5.6.2
produit fibré de fibrations : 6.1.2
produit fibré de fibrations principales : 6.2.5
produit fibré de variétés : 5.11.2
produit tensoriel de fibrés vectoriels : 7.9.1
puissance extérieure d'un fibré vectoriel : 7.9.7
pure (variété) : 5.1.7
quasi-sous-variété : 5.8.3
quasi-sous-variété de groupe : 5.12.3
quotient (fibré vectoriel) : 7.5.2

quotient (variété): 5.9.5
rang d'un fibré vectoriel: 7.1.6
rang d'un morphisme de variétés: 5.5.9
rang vectoriel: 7.2.1
rayon de convergence: 3.1.5
rayon de convergence strict: 3.1.4 et 4.1.3
recollement de variétés: 5.2.4
régulière (relation d'équivalence): 5.9.5
repère (application): 6.5.1
repères (fibration des): 7.10.1
repère d'un fibré vectoriel: 7.4.4
restriction des scalaires: 5.14.1
Schwarz (lemme de): 3.3.10
section d'une fibration: 6.1.6
section d'un fibré vectoriel: 7.4.2
semi-norme: Notations et conventions
série convergente: 3.1.1 et 4.1.1
série entière (développement en): 3.2.1
série formelle: A.5
simple (zéro): 5.8.11
somme directe de fibrés vectoriels: 7.7.1
sous-fibré vectoriel: 7.5.1
sous-variété: 5.8.3
sous-variété de groupe: 5.12.3
sous-variété ouverte: 5.2.3
structural (groupe): 6.2.1
subimmersion: 5.10.1
submersion: 5.9.1
tangent (espace): 5.5.1
tangent (vecteur): 5.5.1
Taylor (formule de): 2.5.1
transversal (espace): 5.8.7
transversal (morphisme): 5.11.6
transversale (famille): 5.11.1, 5.11.2
trivial (fibré vectoriel): 7.1.5
trivial (fibré en algèbres localement): 7.3.2
trivial (fibré en modules localement): 7.3.3
triviale (fibration): 6.1.4
triviale (fibration principale): 6.3.2
trivialisation d'une fibration: 6.1.4
trivialisation d'une fibration principale: 6.3.2
type \mathfrak{S} (atlas de): 5.1.4
type \mathfrak{S} (variété de): 5.1.5
ultra-semi-norme: Notations et conventions
variété: 5.1.5
variété de groupe: 5.12.1
vecteur cotangent: 5.5.6
vecteur tangent: 5.5.1

TABLE DES MATIÈRES

(paragraphes 1 à 7)

Introduction	7
Notations et conventions	9
§ 1. <i>Fonctions différentiables</i>	11
1.1 Ordre de contact de deux fonctions en un point	11
1.2. Fonctions dérivables en un point	12
1.3. Composition des fonctions dérivables	13
1.4. Produit de fonctions dérivables	14
1.5. Théorème des fonctions implicites	14
1.6. Dérivées partielles	15
1.7. Dérivées itérées	15
§ 2. <i>Fonctions différentiables réelles</i>	17
2.1. Fonctions dérivables en un point	17
2.2. Le théorème des accroissements finis	17
2.3. Fonctions de classe C^r	18
2.4. Dérivées des fonctions de classe C^r	19
2.5. Formule de Taylor	19
2.6. Critères de dérivabilité	21
§ 3. <i>Fonctions analytiques réelles ou complexes</i>	22
3.1. Séries convergentes	22
3.2. Fonctions analytiques	26
3.3. Fonctions holomorphes	28
3.4. Fonctions analytiques réelles	30
§ 4. <i>Fonctions analytiques (cas non archimédien)</i>	31
4.1. Séries convergentes	31
4.2. Fonctions analytiques	33
4.3. Quelques inégalités	34
§ 5. <i>Variétés</i>	35
5.1. Cartes et atlas. Variétés	35
5.2. Exemples de variétés	37
5.3. Fonctions de classe C^r et morphismes de variétés	38
5.4. Caractérisation des variétés par leurs faisceaux de fonctions	40
5.5. Espaces tangents, applications linéaires tangentes	41
5.6. Produits de variétés	44
5.7. Immersions, morphismes étales	45
5.8. Images inverses de structures de variétés, sous-variétés	47
5.9. Submersions et variétés quotients	50

5.10. Subimmersions.....	52
5.11. Produits fibrés et images réciproques.....	53
5.12. Variétés de groupe.....	56
5.13. Affaiblissement de structure.....	58
5.14. Restriction du corps de base.....	58
§ 6. <i>Fibrations</i>	61
6.1. Fibrations.....	61
6.2. Fibrations principales.....	62
6.3. Morphismes de fibrations principales.....	63
6.4. Construction de fibrations principales au moyen de cocycles.....	65
6.5. Espaces fibrés associés à une fibration principale.....	66
6.6. Extension et restriction du groupe structural.....	68
6.7. Changement de structure.....	69
§ 7. <i>Fibrés vectoriels</i>	70
7.1. Définition des fibrés vectoriels.....	70
7.2. Morphismes de fibrés vectoriels.....	71
7.3. Morphismes multilinéaires.....	73
7.4. Sections.....	74
7.5. Sous-fibrés vectoriels, fibrés vectoriels quotients, suites exactes.....	76
7.6. Foncteurs vectoriels.....	78
7.7. Sommes directes, fibrés d'applications multilinéaires, dual.....	80
7.8. Fibrés d'applications multilinéaires alternées.....	81
7.9. Produits tensoriels, espaces tensoriels, algèbre extérieure.....	83
7.10. Fibrés vectoriels et fibrés principaux.....	85
7.11. Changement de structure.....	87
<i>Appendice — Polynômes-continus et séries formelles</i>	88
Index des notations.....	90
Index terminologique.....	92

DEUXIÈME PARTIE

**Paragraphe 8 à 15
(99 pages)**

NOTATIONS ET CONVENTIONS

(paragraphes 8 à 15)

Les notations et conventions des paragraphes 1 à 7 restent en vigueur. En particulier, la lettre K désigne \mathbf{R} , \mathbf{C} , ou un corps valué complet commutatif non discret à valeur absolue ultramétrique. Sauf mention expresse du contraire, tous les espaces de Banach, toutes les variétés, tous les morphismes, toutes les fibrations . . . sont relatifs à K .

Les conventions spéciales à chaque paragraphe sont indiquées en tête de celui-ci.

Exposants

Rappelons que si $K = \mathbf{R}$, on considère, soit des variétés *différentielles* de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$), soit des variétés *analytiques*, c'est-à-dire de classe C^ω . Si $K \neq \mathbf{R}$, les variétés sont analytiques. Autrement dit, on ne considère que des variétés de classe C^r , où l'exposant r appartient à l'ensemble N_K suivant :

- a) Si $K = \mathbf{R}$, N_K est formé des entiers ≥ 1 et des symboles ∞ et ω .
- b) Si $K \neq \mathbf{R}$, N_K est réduit au seul élément ω .

Dans toute la suite, une expression telle que « Soit X une variété de classe C^r » sous-entend que r appartient à N_K ; elle est équivalente à « Soit $r \in N_K$ et soit X une K -variété de classe C^r ».

Variétés de classe C^0

On convient d'appeler *variété de classe C^0* (ou *variété topologique*) tout espace topologique X jouissant de la propriété suivante: pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert de x qui est homéomorphe à un ouvert d'un espace de Banach réel; on emploie le terme de « morphisme de classe C^0 » comme synonyme d'« application continue »; on fait des conventions analogues pour les sections, fibrations, fibrés vectoriels, etc. (cf. § 6, note de bas de page).

Sections

Soit $\lambda = (X, B, \pi)$ une fibration (6.1.1) de classe C^r . Généralisant la terminologie introduite en 6.1.6, on appelle *section de λ* (ou de X si aucune ambiguïté ne peut en

résulter) *au-dessus d'une partie U de B* une application $s: U \rightarrow X$ telle que $\pi(s(x)) = x$ pour tout $x \in U$. Lorsque U est ouvert dans B, on dit que s est une *section de classe C^k* ($0 \leq k \leq r$) si de plus s est une application de classe C^k de U dans X. Aux paragraphes 6 et 7, le mot de section désignait donc ce que nous appellerons désormais section de classe C^r .

§ 8. Le calcul différentiel d'ordre 1

A partir du n° 8.3, on suppose

- soit que K est de caractéristique zéro,
- soit que les variétés considérées sont localement de dimension finie.

Dans ce dernier cas, les expressions « espace de Banach, fibré vectoriel, foncteur vectoriel » signifient respectivement « espace vectoriel de dimension finie, fibré vectoriel de rang fini, foncteur vectoriel en dimension finie à valeurs de dimension finie ».

8.1. Fibré tangent

8.1.1. Soit $r \in \mathbb{N}_K$ et soit X une K -variété de classe C^r . On note $T(X)$ l'ensemble somme des espaces tangents $T_x(X)$ (5.5.1) pour $x \in X$, et π l'application canonique de $T(X)$ sur X . Soit $c = (U, \varphi, E)$ une carte de la variété X ; pour $x \in U$ et $t \in T_x(X)$, posons $\zeta_c(x, t) = (x, \theta_c^{-1}(t))$, l'application θ_c étant celle définie en 5.5.1. Le triplet $c' = (U, \zeta_c, E)$ est une carte vectorielle (7.1.1) de $T(X)$ (muni de l'application $\pi: T(X) \rightarrow X$). Il existe sur $T(X)$ une structure de fibré vectoriel de base X et de classe C^{r-1} et une seule, telle que, pour toute carte c de X , la carte vectorielle c' correspondante soit une carte vectorielle de $T(X)$ ⁽¹⁾. Muni de cette structure, $T(X)$ est appelé le *fibré tangent* de X . En particulier, $T(X)$ est muni d'une structure de *variété* de classe C^{r-1} et le triplet $(T(X), X, \pi)$ est une *fibration* (7.1.4).

Soit U un ouvert d'un espace de Banach E et soit i l'injection canonique de U dans E . La carte vectorielle $c' = (U, \zeta_c, E)$ associée à la carte $c = (U, i, E)$ de U définit un isomorphisme de $T(U)$ sur le *fibré trivial* E_U (7.1.5); on identifie ces deux fibrés au moyen de cet isomorphisme.

Si X est une variété pure de type E (5.1.7), $T(X)$ est une variété pure de type $E \times E$.

8.1.2. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés de classe C^r . On définit un f -morphisme $T(f): T(X) \rightarrow T(Y)$ de fibrés vectoriels de classe C^{r-1} par $T(f)(x, t) = (f(x), T_x(f)(t))$ pour $x \in X$ et $t \in T_x(X)$.

Si $f = \text{Id}_X$, on a $T(f) = \text{Id}_{T(X)}$. Pour $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$, on a $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

8.1.3. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés de classe C^r , et soit $f': T(X) \rightarrow f^*T(Y)$

¹ Lorsque $K = \mathbb{R}$ et $r = 1$, $T(X)$ est un *fibré vectoriel topologique* (cf. Notations et conventions).

l'unique X -morphisme tel que $T(f) = g \circ f'$, où g est le morphisme canonique $f^*T(Y) \rightarrow T(Y)$ (cf. 7.2.4).

Pour que f soit une immersion (resp. une submersion), il faut et il suffit que $0 \rightarrow T(X) \xrightarrow{f'} f^*T(Y)$ (resp. $T(X) \xrightarrow{f'} f^*T(Y) \rightarrow 0$) soit une suite exacte localement directe (7.5.6). Si f est une immersion, le fibré conoyau de f' est appelé fibré *normal* ou *transverse* de f . Si f est une submersion, le fibré noyau de f est appelé fibré *tangent aux fibres* de f , ou fibré *tangent relatif* de X sur Y , et noté $T(X/Y)$. Sa fibre $T_x(X/Y)$ en $x \in X$ est l'espace tangent en x à la sous-variété $f^{-1}(f(x))$ de X . La suite

$$0 \longrightarrow T_x(X/Y) \xrightarrow{i} T_x(X) \xrightarrow{T_x(f)} T_{f(x)}(Y) \longrightarrow 0$$

où i est l'injection canonique, est exacte.

Pour que f soit *étale*, il faut et il suffit que f' soit un isomorphisme.

Lorsque K est de caractéristique 0, pour que f soit une *subimmersion*, il faut et il suffit que f' soit localement direct.

8.1.4. Soient X_1 et X_2 deux variétés. On a $T(X_1 \times X_2) = p_1^*T(X_1) \oplus p_2^*T(X_2)$, où p_1 et p_2 sont les projections canoniques (5.6.3).

8.1.5. Soit n un entier ≥ 0 ; le fibré tangent $T(K^n)$ de K^n s'identifie au fibré trivial de fibre K^n (8.1.1). Les sections constantes définies par les éléments de la base canonique de K^n forment un repère de $T(K^n)$.

Si X est une variété et (u^1, \dots, u^n) un système de coordonnées de X dans un ouvert U de X (5.1.10), le repère précédent définit par transport de structure un repère de $T(X)$ sur U ; on l'appelle le *repère tangent* défini par (u^1, \dots, u^n) et on le note $(\partial/\partial u^1, \dots, \partial/\partial u^n)$ (cf. 5.5.8).

8.2. Champs de vecteurs

Soit X une variété de classe C^r , et soit U un ouvert de X .

8.2.1. Une section (non nécessairement continue, cf. *Notations et Conventions*) du fibré tangent $T(X)$ au-dessus de U s'appelle un *champ de vecteurs* sur U .

8.2.2. Le fibré dual $T'(X)$ (7.7.3) de $T(X)$ s'appelle le *fibré cotangent* de X . Ses sections s'appellent *champs de covecteurs*. Si f est une fonction de classe C^k sur X (avec $1 \leq k \leq r$), à valeurs dans K , sa *différentielle* $df: x \mapsto d_x f$ (5.5.6) est un champ de covecteurs de classe C^{k-1} . Plus généralement, si f est une fonction de classe C^k sur X ($1 \leq k \leq r$), à valeurs dans un espace de Banach E , sa différentielle df est une section de classe C^{k-1} du fibré $\mathcal{L}(T(X); E_X)$.

8.2.3. Soit ξ un champ de vecteurs de classe C^{r-1} sur X , et soit $f \in \mathcal{C}^r(X; F)$ une fonction de classe C^r à valeurs dans un espace de Banach F . On note $\langle \xi, df \rangle$, ou $D_\xi(f)$, ou encore $\xi(f)$ la fonction $x \mapsto d_x f(\xi(x))$; c'est un élément de $\mathcal{C}^{r-1}(X; F)$. Pour f fixée, l'application $\xi \mapsto D_\xi(f)$ est $\mathcal{C}^{r-1}(X)$ -linéaire. Si $D_\xi f = 0$ pour toute fonction f de classe C^r à valeurs dans un espace de Banach, définie dans un ouvert de X , on a $\xi = 0$.

Soient E, F, G des espaces de Banach et soit $(u, v) \mapsto u.v$ une application bilinéaire

continue de $E \times F$ dans G . Soient $f \in \mathcal{C}^r(X; E)$, $g \in \mathcal{C}^r(X; F)$ et soit $f.g \in \mathcal{C}^r(X; G)$ leur produit. Si ξ est un champ de vecteurs de classe C^{r-1} sur X , on a

$$D_\xi(f.g) = D_\xi(f).g + f.D_\xi(g).$$

En particulier, l'application $D_\xi: \mathcal{C}^r(X) \rightarrow \mathcal{C}^{r-1}(X)$ est une dérivation de l'algèbre $\mathcal{C}^r(X)$ dans le $\mathcal{C}^r(X)$ -module $\mathcal{C}^{r-1}(X)$.

8.2.4. Supposons que X soit localement de *dimension finie* et que l'une des deux hypothèses suivantes soit vérifiée:

- (i) $r = \infty$ et X est séparée;
- (ii) $r = \omega$ et X est isomorphe à un polydisque ouvert de K^n .

Alors, pour toute dérivation D de l'algèbre $\mathcal{C}^r(X)$, il existe un champ de vecteurs ξ de classe C^r et un seul tel que $D = D_\xi$.

8.2.5. Soient (u^1, \dots, u^n) un système de coordonnées de X dans U , et ξ un champ de vecteurs sur U . La i -ième coordonnée de ξ dans le repère tangent (8.1.5) défini par (u^1, \dots, u^n) est $D_\xi(u^i)$. Autrement dit, on a

$$\xi = \sum_{1 \leq i \leq n} D_\xi(u^i) \cdot \partial / \partial u^i.$$

8.2.6. Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés de classe C^r , ξ un champ de vecteurs sur X et η un champ de vecteurs sur Y . On dit que ξ est φ -lié à η si, pour tout $x \in X$, on a $\eta(\varphi(x)) = T_x(\varphi)(\xi(x))$. Supposons qu'il en soit ainsi, et que ξ et η soient de classe C^{r-1} . Alors, pour tout espace de Banach E , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^r(Y; E) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{C}^r(X; E) \\ D_\eta \downarrow & & \downarrow D_\xi \\ \mathcal{C}^{r-1}(Y; E) & \xrightarrow{\varphi^*} & \mathcal{C}^{r-1}(X; E) \end{array}$$

où $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, est commutatif.

Lorsque φ est étale, pour tout champ de vecteurs η sur Y , il existe un champ de vecteurs et un seul sur X qui est φ -lié à η ; on le note $\varphi^*\eta$.

8.2.7. Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés de classe C^r . Si ω est un champ de covecteurs⁽¹⁾ sur Y , on définit un champ de covecteurs $\varphi^*\omega$ sur X par

$$(\varphi^*\omega)(x) = {}^t(T_x(\varphi))(\omega(\varphi(x))) \quad (x \in X).$$

Plus généralement, soit τ un foncteur vectoriel (7.6) de classe C^{r-1} , de type (I_+, I_-) avec $I_+ = \emptyset$ et I_- réduit à un élément (un tel foncteur est dit *contravariant*). Si ω est une section de classe C^{r-1} du fibré vectoriel $\tau(T(Y))$ de base Y , on définit une section $\varphi^*\omega$ de $\tau(T(X))$ par $(\varphi^*\omega)(x) = \tau(T_x(\varphi))(\omega(\varphi(x)))$ ($x \in X$).

¹ Le lecteur aura soin de ne pas confondre cet emploi de la lettre ω avec celui défini dans les Notations et Conventions.

8.3. Formes différentielles, différentiation extérieure

Rappelons que, dans ce numéro et les suivants, on suppose, ou bien que K est de caractéristique 0, ou bien que les variétés considérées sont localement de dimension finie.

8.3.1. Soient X une variété de classe C^r et F un fibré vectoriel de classe C^k de base X , avec $k + 1 \in \mathbb{N}_K$ et $k + 1 \leq r$. Soit p un entier ≥ 0 et soit $\text{Alt}^p(T(X); F)$ le fibré vectoriel de classe C^k des applications p -linéaires alternées de $T(X)$ dans F (7.8.1 et *Errata* au n° 7.8). Une section de ce fibré au-dessus d'un ouvert U de X s'appelle une *forme différentielle alternée* (ou simplement *forme différentielle*) de degré p sur U , à valeurs dans F . Celles de ces sections qui sont de classe C^k forment un $\mathcal{C}^k(U)$ -module, noté ${}^k\Omega^p(U; F)$. Si E est un espace de Banach, on écrit ${}^k\Omega^p(U; E)$ au lieu de ${}^k\Omega^p(U; E_X)$ et on parle de formes différentielles à valeurs dans E . Dans ces notations, on omet parfois k (resp. E) lorsqu'il est égal à $r - 1$ (resp. K).

Une forme différentielle de degré 0 (resp. 1) à valeurs scalaires est une fonction (resp. un champ de covecteurs).

Soit $\varphi: Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés de classe C^r , et soit $\omega \in {}^k\Omega^p(X; F)$. Il existe alors une forme $\varphi^*\omega \in {}^k\Omega^p(Y; \varphi^*F)$ et une seule telle que

$$(1) \quad (\varphi^*\omega)_y(v_1, \dots, v_p) = \omega_{\varphi(y)}(T_y(\varphi) \cdot v_1, \dots, T_y(\varphi) \cdot v_p)$$

pour tout $y \in Y$ et toute famille v_1, \dots, v_p d'éléments de $T_y(Y)$.

Si $\psi: Z \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés de classe C^r , on a

$$(2) \quad (\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega).$$

Lorsque Y est une sous-variété de X et que φ est l'injection canonique, on écrit parfois $\omega|_Y$ au lieu de $\varphi^*\omega$ et l'on dit que $\omega|_Y$ est *induite* sur Y par ω .

8.3.2. Les définitions et résultats du n° 7.8 s'appliquent aux formes différentielles. En particulier, un accouplement de fibrés vectoriels $F' \times_X F'' \rightarrow F$ donne naissance à un *produit extérieur* ${}^k\Omega^{p'}(U; F') \times {}^k\Omega^{p''}(U; F'') \rightarrow {}^k\Omega^p(U; F)$, où $p = p' + p''$ (7.8.2); on le note $(\omega', \omega'') \mapsto \omega' \wedge \omega''$. La somme directe des ${}^k\Omega^p(U; K)$ pour $p \geq 0$ est ainsi munie d'une structure d'algèbre graduée associative et alternée (A, III, p. 53).

Soient ξ un champ de vecteurs sur X et ω une forme différentielle de degré $p \geq 1$ sur X , à valeurs dans un fibré vectoriel F ; le *produit intérieur* de ξ et ω est la forme différentielle $i(\xi, \omega)$ de degré $p - 1$ sur X , à valeurs dans F , définie par

$$(3) \quad i(\xi, \omega)_x(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega_x(\xi(x), v_1, \dots, v_{p-1})$$

pour tout $x \in X$ et toute famille v_1, \dots, v_{p-1} d'éléments de $T_x(X)$. Si ω est une forme différentielle de degré 0, on pose $i(\xi, \omega) = 0$. On écrit également $i(\xi)\omega$ ou $i_\xi\omega$ à la place de $i(\xi, \omega)$. Lorsque $F = K_X$, la définition donnée ci-dessus coïncide avec celle de 7.8.4.

Soit $F' \times_X F'' \rightarrow F$ un accouplement de fibrés vectoriels. Pour $\omega' \in {}^k\Omega^{p'}(U; F')$ et $\omega'' \in {}^k\Omega^{p''}(U; F'')$, on a

$$(4) \quad i(\xi)(\omega' \wedge \omega'') = (i(\xi)\omega') \wedge \omega'' + (-1)^{p'}\omega' \wedge i(\xi)\omega''.$$

8.3.3. Soit (u^1, \dots, u^n) un système de coordonnées dans l'ouvert U de X . Tout élément ω de ${}^k\Omega^p(U; F)$ s'écrit de façon unique

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1, \dots, i_p} \cdot du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}$$

où les f_{i_1, \dots, i_p} sont des sections de classe C^k de F sur U ; dans cette formule, le signe \wedge est relatif à l'accouplement canonique $K_X \times_X K_X \rightarrow K_X$ et le point désignant le produit est relatif à l'accouplement canonique $F \times_X K_X \rightarrow F$.

8.3.4. Soient p un entier ≥ 0 et r un élément de N_K . Soient E et F des espaces de Banach, U un ouvert de E et $\alpha \in {}^r\Omega^p(U; F)$. Soit $\tilde{\alpha} \in \mathcal{C}^r(U; \text{Alt}^p(E; F))$ l'élément correspondant à α . Si $x \in U$, la différentielle $d_x \tilde{\alpha}$ de $\tilde{\alpha}$ en x (5.5.6) est un élément de $\mathcal{L}(E; \text{Alt}^p(E; F))$; si $t \in E$, on a $(d_x \tilde{\alpha})(t) \in \text{Alt}^p(E; F)$, et, si t_1, \dots, t_p sont dans E , on a $(d_x \tilde{\alpha})(t)(t_1, \dots, t_p) \in F$. Il existe un élément $d\alpha$ de ${}^{r-1}\Omega^{p+1}(U; F)$ et un seul tel que l'on ait

$$(5) \quad (d\alpha)_x(t_0, \dots, t_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (d_x \tilde{\alpha})(t_i)(t_0, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_p) \quad (1)$$

quels que soient $x \in U$ et t_0, \dots, t_p dans E .

8.3.5. Soient p un entier ≥ 0 et r un élément de N_K . Soient X une variété de classe C^{r+1} , F un espace de Banach, et $\omega \in {}^r\Omega^p(X; F)$. Il existe une forme différentielle $\pi \in {}^{r-1}\Omega^{p+1}(X; F)$ et une seule telle que, pour toute carte $c = (U, \varphi, E)$ de X , si ω_c est la forme différentielle sur $\varphi(U)$ telle que $\omega|_U = \varphi^*(\omega_c)$, on ait $\pi_c = d\omega_c$, où $d\omega_c$ est définie par la formule (5) de 8.3.4.

La forme différentielle π s'appelle la *différentielle extérieure* de ω ; on la note $d\omega$. Elle jouit des propriétés suivantes:

- (6) Si $\psi: Y \rightarrow X$ est un morphisme de variétés de classe C^{r+1} , et si $\omega \in {}^r\Omega^p(X; F)$, on a $\psi^*(d\omega) = d(\psi^*\omega)$; en particulier, d commute à l'opération de restriction à une sous-variété.
- (7) Pour $p = 0$, l'application $d: {}^r\Omega^0(X; F) \rightarrow {}^{r-1}\Omega^1(X; F)$ coïncide avec celle définie en 8.2.2.
- (8) Si $r \geq 2$ et si $\omega \in {}^r\Omega^p(X; F)$, on a $d(d\omega) = 0$.⁽²⁾
- (9) Pour toute application linéaire continue $u: F \rightarrow F'$ d'espaces de Banach, on a $d(u(\omega)) = u(d(\omega))$ pour $\omega \in {}^r\Omega^p(U; F)$.
- (10) Pour toute application bilinéaire continue $F' \times F'' \rightarrow F$ d'espaces de Banach, on a

$$d(\omega' \wedge \omega'') = (d\omega') \wedge \omega'' + (-1)^p \omega' \wedge d\omega''$$

pour $\omega' \in {}^r\Omega^{p'}(X; F')$ et $\omega'' \in {}^r\Omega^{p''}(X; F'')$.

8.3.6. Soit (u^1, \dots, u^n) un système de coordonnées de X dans U . Soit

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1, \dots, i_p} \cdot du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}$$

¹ Le signe \wedge indique que le symbole qu'il surmonte doit être omis (cf. 7.8.4).

² Si $\omega \in {}^1\Omega^p(X; F)$ et si $d\omega \in {}^1\Omega^{p+1}(X; F)$, on a encore $d(d\omega) = 0$.

une forme différentielle sur U (avec $f_{i_1}, \dots, i_p \in \mathcal{C}^r(U; F)$). On a alors

$$(11) \quad d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} df_{i_1, \dots, i_p} \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}.$$

8.3.7. Supposons K de *caractéristique zéro*. Soit $\omega \in {}^r\Omega^p(X; F)$ une forme différentielle de degré $p \geq 1$ telle que $d\omega = 0$. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x et une forme différentielle $\pi \in {}^r\Omega^{p-1}(U; F)$ tel que $d\pi = \omega$ sur U .

8.4. Transformations infinitésimales

Soient $r \in \mathbb{N}_K$ et X une variété de classe C^{r+1} .

8.4.1. Soit τ un foncteur vectoriel pour les isomorphismes (7.6.6), de classe C^r . Si E est un espace de Banach, on note $\mathbf{GL}(E)$ l'ouvert de $\mathcal{L}(E; E)$ constitué par les automorphismes de E . On note τ'_E l'application linéaire tangente à l'élément neutre Id_E du morphisme $\tau: \mathbf{GL}(E) \rightarrow \mathbf{GL}(\tau(E))$; c'est une application linéaire continue de $\mathcal{L}(E; E)$ dans $\mathcal{L}(\tau(E); \tau(E))$.

8.4.2. Soit E un espace de Banach et posons $F = \tau(E)$. Soient U un ouvert de E , ξ un champ de vecteurs sur U de classe C^r , $\tilde{\xi}: U \rightarrow E$ l'application correspondante (obtenue en identifiant $T(U)$ et $U \times E$ (8.1.1)), et $f: U \rightarrow F$ une application de classe C^r . Pour $x \in U$, on définit un élément $(\theta_{\xi}.f)(x)$ de F par la formule

$$(1) \quad (\theta_{\xi}.f)(x) = d_x f(\tilde{\xi}(x)) - \tau'_E(d_x \tilde{\xi})(f(x)).$$

(Remarquons que l'on a d'une part $\tilde{\xi}(x) \in E$ et $d_x f \in \mathcal{L}(E; F)$, d'où $d_x f(\tilde{\xi}(x)) \in F$, d'autre part, $d_x \tilde{\xi} \in \mathcal{L}(E; E)$, $\tau'_E(d_x \tilde{\xi}) \in \mathcal{L}(F; F)$ et $f(x) \in F$, d'où $\tau'_E(d_x \tilde{\xi})(f(x)) \in F$).

La fonction $\theta_{\xi}.f: x \mapsto (\theta_{\xi}.f)(x)$ est de classe C^{r-1} dans U .

8.4.3. Notons F le fibré vectoriel $\tau(T(X))$ (7.6.2 et 7.6.6). Soient ξ un champ de vecteurs sur X et f une section de F , tous deux de classe C^r . Soient x un point de X et $c = (U, \varphi, E)$ une carte de X en x . Soient $c' = (U, \zeta_c, E)$ la carte vectorielle correspondante de $T(X)$ (8.1.1) et $\tau(c') = (U, \psi_c, \tau(E))$ la carte vectorielle correspondante de F (7.6.2). Posons $x_c = \varphi(x)$; soient ξ_c l'application de $\varphi(U)$ dans E telle que $\zeta_c(\xi(u)) = (u, \xi_c(\varphi(u)))$ et f_c l'application de $\varphi(U)$ dans $\tau(E)$ telle que $\psi_c(f(u)) = (u, f_c(\varphi(u)))$ pour tout $u \in U$. Notons a_c l'élément $(\theta_{\xi_c}.f_c)(x_c)$ de $\tau(E)$ défini en 8.4.2. Il existe un élément a de F_x et un seul tel que $\psi_c(a) = (x, a_c)$ pour toute carte c de X en x . On le note $(\theta_{\xi}.f)(x)$. Il ne dépend que des germes de ξ et f en x (et même seulement de leur jet d'ordre 1 (12.1.2)).

L'application $\theta_{\xi}.f: x \mapsto (\theta_{\xi}.f)(x)$ est une section de classe C^{r-1} de F ; elle dépend de façon K -bilinéaire du couple (ξ, f) .

8.4.4. Conservons les hypothèses et notations précédentes. Il existe (7.6.4) un morphisme de fibrés vectoriels τ' et un seul de $\mathcal{L}(T(X); T(X))$ dans $\mathcal{L}(F; F)$ tel que, pour

tout $x \in X$, la restriction de τ' à la fibre $\mathcal{L}(T(X); T(X))_x = \mathcal{L}(T_x(X); T_x(X))$ soit égale à $\tau'_{T(X)}$ (8.4.1). Si g est une fonction de classe C^r dans X , à valeurs dans K , on a

$$\theta_{g\xi} \cdot f = g\theta_\xi \cdot f - \tau'(dg \otimes \xi)(f)$$

(dans cette formule, on identifie $dg \otimes \xi$, qui est une section de $T'(X) \otimes T(X)$, à une section de $\mathcal{L}(T(X); T(X))$; son image $\tau'(dg \otimes \xi)$ est une section de $\mathcal{L}(F; F)$ et transforme f en une section de F).

8.4.5. Soient I un ouvert de K contenant 0 , U un ouvert de X et φ une application de classe C^r de $I \times U$ dans X . Pour $(t, x) \in I \times U$, on note $\varepsilon_{t,x}$ le vecteur $(1, 0) \in K \times T_x(X) = T_{(t,x)}(I \times U)$. Pour $t \in I$, on note φ_t l'application de U dans X définie par $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ ($x \in U$). On suppose que les trois conditions suivantes sont vérifiées:

- a) φ_0 est l'injection canonique de U dans X ;
 - b) pour tout $t \in I$, l'application φ_t est un isomorphisme de variétés de classe C^r de U sur un ouvert de X ;
 - c) la section $(t, x) \mapsto T_{(t,x)}(\varphi)(\varepsilon_{t,x})$ du fibré $\varphi^*T(X)$ est de classe C^r .
- De plus, on pose:
- d) $\xi(x) = T_{(0,x)}(\varphi)(\varepsilon_{0,x})$ pour tout $x \in U$.

L'application $\xi: x \mapsto \xi(x)$ est un champ de vecteurs de classe C^r sur U . On dit que c'est le *champ initial* (ou de *départ*) de φ .

Soit τ un foncteur vectoriel pour les isomorphismes, de classe C^r ; posons $F = \tau(T(X))$ et soit f une section de classe C^r de F sur X . Pour $x \in U$ et $t \in I$, posons $\varphi_t^* f(x) = \tau(T_x(\varphi_t)^{-1})(f(\varphi_t(x)))$; c'est un élément de F_x . L'application $t \mapsto \varphi_t^* f(x)$ de I dans F_x est de classe C^{r-1} pour tout $x \in U$ et l'on a

$$(2) \quad \frac{d}{dt}(\varphi_t^* f(x))_{t=0} = (\theta_\xi \cdot f)(x) \quad \text{pour tout } x \in U.$$

8.4.6. Etant donné un champ de vecteurs ξ de classe C^r sur X et un point x_0 de X , il existe un ouvert I de K , contenant 0 , un ouvert U de X contenant x_0 et une application $\varphi: I \times U \rightarrow X$ de classe C^r satisfaisant aux conditions a), b) et c) de 8.4.5 et telle que le champ initial de φ soit la restriction $\xi|_U$ de ξ à U .

8.4.7. *Exemple.* — Soient F un espace de Banach et p un entier ≥ 0 . Si V est un espace de Banach, posons $\alpha_p(V) = \text{Alt}^p(V; F)$; si u est un isomorphisme de V sur un espace de Banach V' , désignons par $\alpha_p(u)$ l'isomorphisme de $\alpha_p(V)$ sur $\alpha_p(V')$ déduit de u par transport de structure. On obtient ainsi un foncteur vectoriel pour les isomorphismes, que l'on note α_p (7.8.1 et *Errata* au n° 7.8). On peut lui appliquer ce qui précède; on a

$$\alpha_p(T(X)) = \text{Alt}^p(T(X); F).$$

Les sections de $\alpha_p(T(X))$ sont les formes différentielles de degré p sur X , à valeurs dans F ; si ω est une telle forme et si ξ est un champ de vecteurs sur X , tous deux de classe C^r , $\theta_\xi \cdot \omega$ est une forme différentielle de degré p sur X , à valeurs dans F et de classe C^{r-1} . On a

$$(3) \quad \theta_\xi \cdot \omega = d(i(\xi) \omega) + i(\xi) d\omega$$

et, lorsque $r \geq 2$,

$$(4) \quad \theta_{\xi}.d\omega = d(\theta_{\xi}.\omega).$$

Lorsque $p = 0$, le foncteur α_p est le foncteur vectoriel constant défini par F ; le fibré $\alpha_0(T(X))$ s'identifie au fibré trivial F_X , et les sections de ce fibré s'identifient aux fonctions sur X à valeurs dans F . Si ξ est un champ de vecteurs de classe C^r sur X et si $f \in \mathcal{C}^r(X; F)$, on a

$$(5) \quad \theta_{\xi}.f = \langle \xi, df \rangle = D_{\xi}(f) \quad (8.2.3);$$

c'est un élément de $\mathcal{C}^{r-1}(X; F)$.

8.4.8. Soient τ et τ_1 deux foncteurs vectoriels pour les isomorphismes. Un morphisme de foncteurs vectoriels $h: \tau_1 \rightarrow \tau$ définit un morphisme de fibrés vectoriels, noté encore h , de $\tau_1(T(X))$ dans $\tau(T(X))$ (7.6.4), et fait correspondre à une section f de $\tau_1(T(X))$ une section $h(f)$ de $\tau(T(X))$. Si ξ est un champ de vecteurs sur X , et si f et ξ sont de classe C^r , on a $\theta_{\xi}.h(f) = h(\theta_{\xi}.f)$.

Plus généralement, soient $\tau, \tau_1, \dots, \tau_d$ des foncteurs vectoriels pour les isomorphismes et soit $h: (\tau_1, \dots, \tau_d) \rightarrow \tau$ un morphisme d -linéaire (7.6.4). Soit $f_i \in \mathcal{S}_{\tau_i(T(X))}^r(X)$ (pour $i = 1, \dots, d$), et soit ξ un champ de vecteurs de classe C^r sur X . On a

$$(6) \quad \theta_{\xi}.h(f_1, \dots, f_d) = \sum_{1 \leq i \leq d} h(f_1, \dots, f_{i-1}, \theta_{\xi}.f_i, f_{i+1}, \dots, f_d).$$

Par exemple, si f est une section de $\tau(T(X))$ et g une fonction sur X , à valeurs dans K , toutes deux de classe C^r , on a

$$(7) \quad \theta_{\xi}.(gf) = (\theta_{\xi}.g)f + g(\theta_{\xi}.f).$$

Si ω_1 et ω_2 sont deux formes différentielles de classe C^r , à valeurs dans des espaces de Banach F_1 et F_2 respectivement, on a

$$(8) \quad \theta_{\xi} . (\omega_1 \wedge \omega_2) = (\theta_{\xi} . \omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (\theta_{\xi} . \omega_2),$$

le produit extérieur étant pris par rapport à une application bilinéaire continue de $F_1 \times F_2$ dans un espace de Banach F .

8.4.9. Soient τ un foncteur vectoriel pour les isomorphismes, contravariant (8.2.7), de classe C^r , $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés de classe C^{r+1} , ξ (resp. η) un champ de vecteurs de classe C^r sur X (resp. Y) tels que ξ soit φ -lié à η (8.2.6). Pour toute section f de $\tau(T(Y))$, de classe C^r , on a

$$\varphi^*(\theta_{\eta}.f) = \theta_{\xi}.\varphi^*f.$$

8.5. Le crochet

Soit $r \in \mathbb{N}_K$ et soit X une variété de classe C^{r+1} .

8.5.1. Appliquons les définitions du n° 8.4 en prenant pour τ le foncteur identique: $\tau(V) = V$ pour tout espace de Banach V et $\tau(u) = u$ pour tout isomorphisme u

d'espaces de Banach. On a alors $\tau(T(X)) = T(X)$. Si ξ et η sont deux champs de vecteurs de classe C^r sur X , on pose

$$(1) \quad [\xi, \eta] = \theta_\xi \cdot \eta;$$

c'est un champ de vecteurs de classe C^{r-1} sur X , appelé le *crochet* de ξ et de η .

8.5.2. L'application $(\xi, \eta) \mapsto [\xi, \eta]$ est K -bilinéaire et alternée. Si f et g sont des fonctions de classe C^r sur X , à valeurs dans K , on a :

$$(2) \quad [f\xi, g\eta] = fg[\xi, \eta] + (fD_\xi g)\eta - (gD_\eta f)\xi.$$

8.5.3. Soit F un espace de Banach. On a

$$(3) \quad D_{[\xi, \eta]} = D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi$$

dans l'espace des applications de $\mathcal{C}^{r+1}(X; F)$ dans $\mathcal{C}^{r-1}(X; F)$.

Si $r \geq 2$ et si ζ est un troisième champ de vecteurs de classe C^r sur X , on a

$$(4) \quad [[\xi, \eta], \zeta] = [\xi, [\eta, \zeta]] - [\eta, [\xi, \zeta]]^{(1)}$$

ou encore

$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0.$$

Plus généralement, si $r \geq 2$ et si τ est un foncteur vectoriel pour les isomorphismes, on a

$$(5) \quad \theta_{[\xi, \eta]} = \theta_\xi \circ \theta_\eta - \theta_\eta \circ \theta_\xi$$

dans l'espace des applications de $\mathcal{S}_F^r(X)$ dans $\mathcal{S}_F^{r-2}(X)$ (avec $F = \tau(T(X))$).

Si $r \geq \infty$, les champs de vecteurs de classe C^r sur X forment une *K-algèbre de Lie* pour le crochet (LIE, I, § 1, n° 2).

8.5.4. Soient E un espace de Banach, U un ouvert de E , ξ et η deux champs de vecteurs de classe C^r sur U , identifiés à des éléments de $\mathcal{C}^r(U; E)$. Leur crochet est donné par la formule :

$$(6) \quad [\xi, \eta] = D_\xi \eta - D_\eta \xi.$$

8.5.5. Soit (u^1, \dots, u^n) un système de coordonnées de X dans un ouvert U . Soient

$\xi = \sum a^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ et $\eta = \sum b^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ deux champs de vecteurs de classe C^r sur U . Posons

$[\xi, \eta] = \sum c^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. On a

$$(7) \quad c^i = \sum_{1 \leq j \leq n} \left(a^j \frac{\partial b^i}{\partial u^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial u^j} \right).$$

8.5.6. Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés de classe C^{r+1} , ξ_1 et ξ_2 deux champs

¹ La formule (4) est encore exacte si l'on suppose seulement que les champs de vecteurs $\xi, \eta, \zeta, [\xi, \eta], [\eta, \zeta], [\zeta, \xi]$ sont tous de classe C^1 .

de vecteurs sur X , η_1 et η_2 deux champs de vecteurs sur Y , tous de classe C^r . Si ξ_1 et ξ_2 sont φ -liés à η_1 et η_2 respectivement, $[\xi_1, \xi_2]$ est φ -lié à $[\eta_1, \eta_2]$.

8.5.7. Soit ω une forme différentielle de degré p sur X , à valeurs dans un espace de Banach F et de classe C^r , et soient ξ_0, \dots, ξ_p des champs de vecteurs de classe C^r sur X . On a

$$(8) \quad (\theta_{\xi_0} \cdot \omega)(\xi_1, \dots, \xi_p) = D_{\xi_0} \omega(\xi_1, \dots, \xi_p) - \sum_{i=1}^p \omega(\xi_1, \dots, [\xi_0, \xi_i], \dots, \xi_p)$$

et

$$(9) \quad d\omega(\xi_0, \dots, \xi_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i D_{\xi_i} \omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_p) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_p).$$

Si ξ et η sont des champs de vecteurs de classe C^r , on a

$$(10) \quad \theta_{\xi} \circ i(\eta) - i(\eta) \circ \theta_{\xi} = i([\xi, \eta])$$

dans l'espace des applications de ${}^r\Omega^p(X; F)$ dans ${}^{r-1}\Omega^{p-1}(X; F)$.

Pour $p = 1$, la formule (9) s'écrit:

$$(11) \quad d\omega(\xi, \eta) = D_{\xi} \langle \eta, \omega \rangle - D_{\eta} \langle \xi, \omega \rangle - \langle [\xi, \eta], \omega \rangle.$$

8.6. Relèvements

Soit $r \in \mathbb{N}_K$ et soit $g: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés de classe C^{r+1} .

8.6.1. Un *relèvement* de g dans $T(Y)$ est une application $\psi: X \rightarrow T(Y)$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & T(Y) \\ & \nearrow \psi & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

soit commutatif, π désignant la projection canonique de $T(Y)$ sur Y . La donnée de ψ équivaut à celle d'une section du fibré vectoriel $g^*T(Y)$ image réciproque par g de $T(Y)$.

La notion de relèvement généralise celle de champ de vecteurs (à laquelle elle se réduit lorsque $g = \text{Id}_X$); une partie importante des définitions et résultats relatifs aux θ_{ξ} et $i(\xi)$ s'étendent aux relèvements; nous nous bornerons à en indiquer brièvement quelques-uns.

8.6.2. Soit $\psi: X \rightarrow T(Y)$ un relèvement de $g: X \rightarrow Y$, et soit ω une forme différentielle de degré p sur Y , à valeurs dans un fibré vectoriel F de base Y . Lorsque $p \geq 1$, on

note $i(\psi, \omega)$ ou $i(\psi)\omega$ ou $i_\psi(\omega)$ la forme différentielle sur X , de degré $p - 1$, à valeurs dans g^*F , telle que

$$(1) \quad i(\psi, \omega)_x(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega_{g(x)}(\psi(x), T_x(g).v_1, \dots, T_x(g).v_{p-1})$$

pour tout $x \in X$ et toute famille v_1, \dots, v_{p-1} d'éléments de $T_x(X)$. Lorsque $p = 0$, on pose $i(\psi, \omega) = 0$. On dit que $i(\psi, \omega)$ est le *produit intérieur* de ψ et de ω ; si ψ et ω sont de classe C^r , il en est de même de $i(\psi, \omega)$. Soit $F' \times_Y F'' \rightarrow F$ un accouplement de fibrés vectoriels de base Y . Pour $\omega' \in {}^r\Omega^{p'}(Y; F')$ et $\omega'' \in {}^r\Omega^{p''}(Y; F'')$, on a

$$(2) \quad i(\psi)(\omega' \wedge \omega'') = (i(\psi)\omega') \wedge g^*\omega'' + (-1)^{p'}g^*\omega' \wedge i(\psi)\omega''.$$

8.6.3. Exemples

a) Un champ de vecteurs ξ sur X définit un relèvement $T(g) \circ \xi$ de g dans $T(Y)$, et l'on a :

$$(3) \quad i(T(g) \circ \xi) = i(\xi) \circ g^*.$$

b) Un champ de vecteurs η sur Y définit un relèvement $\eta \circ g$ de g dans $T(Y)$, et l'on a :

$$(4) \quad i(\eta \circ g) = g^* \circ i(\eta).$$

c) Plus généralement, soit $h: Y \rightarrow Z$ un morphisme de variétés de classe C^{r+1} . Si ψ est un relèvement de g dans $T(Y)$, alors $T(h) \circ \psi$ est un relèvement de $h \circ g$ dans $T(Z)$ et l'on a :

$$(5) \quad i(T(h) \circ \psi) = i(\psi) \circ h^*.$$

Si φ est un relèvement de h dans $T(Z)$, alors $\varphi \circ g$ est un relèvement de $h \circ g$ dans $T(Z)$ et l'on a :

$$(6) \quad i(\varphi \circ g) = g^* \circ i(\varphi).$$

8.6.4 (« Transformations infinitésimales »). Soit ψ un relèvement de classe C^r de g et soit ω une forme différentielle de degré p sur Y , à valeurs dans un espace de Banach F , et de classe C^r . La forme différentielle sur X

$$(7) \quad d(i(\psi)\omega) + i(\psi)d\omega$$

est de degré p et de classe C^{r-1} ; on la note $\theta_\psi.\omega$.

Si f est une fonction de classe C^r sur X , on a

$$(8) \quad \theta_{f\psi}.\omega = df \wedge i(\psi)\omega + f\theta_\psi.\omega.$$

8.6.5 (« Caractérisation de $\theta_\psi.\omega$ comme dérivée »). Conservons les hypothèses de 8.6.4. Soit $x \in X$. Il existe alors un voisinage ouvert U de x , un voisinage ouvert I de 0 dans K , et un morphisme $G: I \times U \rightarrow Y$, de classe C^r , ayant les deux propriétés suivantes :

a) Pour tout $x \in U$, on a $G(0, x) = g(x)$.

b) Pour tout $x \in U$, l'image par $T_{(0, x)}(G)$ du vecteur tangent $(1, 0)$ est égale à $\psi(x)$.

Supposons que (U, I, G) vérifie ces conditions; pour tout $t \in I$, notons G_t l'application $x \mapsto G(t, x)$ de X dans Y ; posons $\omega_t = G_t^*(\omega)$. Pour tout $x \in X$, l'application $t \mapsto \omega_t(x)$ de I dans $\text{Alt}^p(T_x(X), F)$ est de classe C^r , et sa dérivée à l'origine est donnée par la formule

$$(9) \quad \frac{d}{dt} (\omega_t(x))_{t=0} = (\theta_\psi \cdot \omega)(x).$$

8.7. Affaiblissement de structure

Dans ce n°, on suppose $K = \mathbf{R}$.

8.7.1. Soit X une variété de classe C^s , et soit F un fibré vectoriel sur X , de classe C^k , avec $0 \leq k \leq s$. Si $0 \leq k' \leq k$, il existe sur F une structure $F_{k'}$ et une seule de fibré vectoriel de base X et de classe $C^{k'}$ telle que toute carte vectorielle de F soit une carte vectorielle de $F_{k'}$. On dit que $F_{k'}$ se déduit de F par *affaiblissement* de la structure de fibré de F .

8.7.2. Soit $r \in \mathbf{N}_\mathbf{R}$ avec $r \leq s$, et soit X_r la variété de classe C^r sous-jacente à X (5.13.1). Le fibré tangent $T(X_r)$ est de classe C^{r-1} ; c'est le fibré obtenu par affaiblissement de structure à partir du fibré tangent $T(X)$, qui est de classe C^{s-1} .

Soit F un fibré vectoriel sur X , de classe C^k , pour $0 \leq k \leq r - 1$. Les formes différentielles de classe C^k sur X à valeurs dans F s'identifient canoniquement aux formes différentielles correspondantes sur X_r . Les diverses opérations sur ces formes décrites dans le reste de ce paragraphe sont compatibles avec cette identification.

Dans la suite de ce fascicule, nous laisserons souvent au lecteur le soin d'explicitier les autres résultats de ce genre.

8.8. Variétés presque complexes et variétés complexes

Dans ce n°, on suppose $K = \mathbf{R}$ et on désigne par X une variété (réelle) de classe C^r , avec $r \in \mathbf{N}_\mathbf{R}$.

8.8.1 (« Fibrés vectoriels complexes »). Un fibré vectoriel sur \mathbf{C} de base X (7.3.4) est aussi appelé un *fibré vectoriel complexe* de base X . Si M est un tel fibré vectoriel, on appelle *carte vectorielle complexe* de M un triplet (U, φ, E) , où U est un ouvert de X , E un espace de Banach complexe et φ un isomorphisme de fibrés vectoriels complexes de $M|U$ sur le fibré trivial $E_U = U \times E$. Une famille (U_i, φ_i, E_i) de cartes vectorielles complexes de M dont les domaines de définition U_i recouvrent X est appelée un *atlas vectoriel complexe* de M ; tout fibré vectoriel complexe possède un atlas vectoriel complexe (7.3.3).

On dit parfois \mathbf{C} -vectoriel au lieu de vectoriel complexe. De manière analogue, on dit parfois, lorsqu'on veut parler d'un fibré vectoriel sur \mathbf{R} , d'une carte vectorielle ordinaire de ce fibré, etc., « vectoriel réel » ou « \mathbf{R} -vectoriel » au lieu de « vectoriel ».

Soit M un fibré vectoriel complexe de base X . Il existe un automorphisme j et un

seul du fibré vectoriel (réel) sous-jacent à M (7.3.3) dont la restriction à chaque fibre est la multiplication par l'élément i de \mathbb{C} ; le carré de j est égal à -1 . Réciproquement, si M est un fibré vectoriel (réel) de base X et j un automorphisme de M tel que $j^2 = -1$, il existe sur M une unique structure de fibré vectoriel complexe admettant M comme fibré vectoriel (réel) sous-jacent et pour laquelle j est la multiplication par i .

8.8.2 (« Complexification d'un fibré vectoriel »). On définit un foncteur vectoriel τ en posant $\tau(E) = E \otimes \mathbb{C}$ pour tout espace de Banach (réel) E , et $\tau(u) = u \otimes \text{Id}_{\mathbb{C}}$ pour tout morphisme $u: E \rightarrow E'$ d'espaces de Banach (réels).

Si F est un fibré vectoriel de base X et de classe C^k ($0 \leq k \leq r$), son transformé par le foncteur vectoriel τ se note $F \otimes \mathbb{C}$. Il existe sur $F \otimes \mathbb{C}$ une unique structure de fibré vectoriel complexe de base X et de classe C^k , compatible avec sa structure de fibré vectoriel (réel) et induisant sur chaque fibre $(F \otimes \mathbb{C})_x = F_x \otimes \mathbb{C}$ sa structure canonique d'espace de Banach complexe (EVT, II, § 8, n° 1, *Exemple*). Muni de cette structure, on dit que $F \otimes \mathbb{C}$ est le *complexifié* de F .

Soit U un ouvert de X ; l'application canonique

$$\mathcal{S}_F^k(U) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{S}_{F \otimes \mathbb{C}}^k(U)$$

est un isomorphisme, par lequel on identifie ces deux espaces. Si $s \in \mathcal{S}_{F \otimes \mathbb{C}}^k(U)$, les éléments σ, τ de $\mathcal{S}_F^k(U)$ tels que $s = \sigma + i\tau$ s'appellent la partie réelle et la partie imaginaire de s ; la section $\bar{s} = \sigma - i\tau$ s'appelle la *conjuguée* de s .

En particulier, une section du fibré $T(X) \otimes \mathbb{C}$ s'appelle un *champ de vecteurs complexe* sur X .

Soit H un fibré vectoriel complexe de base X . Les isomorphismes canoniques $\text{Alt}_{\mathbb{R}}^p(T_x(X); H) \rightarrow \text{Alt}_{\mathbb{C}}^p(T_x(X) \otimes \mathbb{C}; H)$ définissent un isomorphisme de fibrés vectoriels complexes, dit canonique, de $\text{Alt}_{\mathbb{R}}^p(T(X); H)$ sur $\text{Alt}_{\mathbb{C}}^p(T(X) \otimes \mathbb{C}; H)$ (7.8.5), grâce auquel nous identifierons ces deux fibrés. Soit ω une section de ce fibré, autrement dit une forme différentielle de degré p sur X , à valeurs dans H , et soit ζ un champ de vecteurs complexes, de partie réelle ξ et de partie imaginaire η . On pose alors:

$$i(\zeta, \omega) = i(\xi, \omega) + i.i(\eta, \omega).$$

Si H est un fibré trivial, on pose

$$\theta_{\zeta} \cdot \omega = \theta_{\xi} \cdot \omega + i \theta_{\eta} \cdot \omega.$$

De même, on étend par linéarité le *crochet* aux champs de vecteurs complexes. Les formules des n°s précédents restent valables.

8.8.3. On appelle *structure presque complexe* de classe C^k ($k \leq r-1$) sur X la donnée d'une structure de *fibré vectoriel complexe* sur $T(X)$, de classe C^k , ayant pour structure réelle sous-jacente la structure naturelle de $T(X)$. Une telle structure équivaut à la donnée d'un automorphisme j de classe C^k de $T(X)$ tel que $j^2 = -1$.

Donnons-nous une telle structure. Prolongeons j en un \mathbb{C} -automorphisme de $T(X) \otimes \mathbb{C}$. Il existe une décomposition et une seule de $T(X) \otimes \mathbb{C}$ en somme directe de deux sous-fibrés complexes:

$$(1) \quad T(X) \otimes \mathbb{C} = T'(X) \oplus T''(X)$$

telle que j coïncide avec la multiplication par i sur $T'(X)$ et par $-i$ sur $T''(X)$. Le projecteur p' de $T(X) \otimes \mathbb{C}$ sur $T'(X)$ est égal à $\frac{1}{2}(1 - ij)$; le projecteur $p'' = 1 - p'$ de $T(X) \otimes \mathbb{C}$ sur $T''(X)$ est égal à $\frac{1}{2}(1 + ij)$. Les composés

$$\pi': T(X) \rightarrow T(X) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{p'} T'(X)$$

$$\pi'': T(X) \rightarrow T(X) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{p''} T''(X)$$

sont des \mathbb{R} -isomorphismes; le premier transforme j en la multiplication par i , le second en la multiplication par $-i$.

8.8.4 (« Formes de type (p, q) »). Conservons les hypothèses et notations du n° précédent. Soit F un fibré vectoriel complexe de base X , soient p et q deux entiers ≥ 0 , et soit $n = p + q$. Soit ω une forme différentielle de degré n sur un ouvert U de X , à valeurs dans F ; identifions (8.8.2) ω à une section de $\text{Alt}_\mathbb{C}^n(T(X) \otimes \mathbb{C}; F)$. On dit que ω est de type (p, q) si, pour tout $x \in U$, on a

$$\omega_x(v_1, \dots, v_n) = 0$$

dès que $p + 1$ des vecteurs v_i appartiennent à $T'_x(X)$ ou que $q + 1$ des vecteurs v_i appartiennent à $T''_x(X)$. Si l'on identifie $\bigwedge^n T_x(X) \otimes \mathbb{C}$ à la somme directe des espaces $\bigwedge^{m'} T'_x(X) \otimes \bigwedge^{m''} T''_x(X)$ pour $m' + m'' = n$ (A, III, p. 85) et ω_x à une forme \mathbb{C} -linéaire sur $\bigwedge^n T_x(X)$, il revient au même de dire que ω_x est nulle sur $\bigwedge^{m'} T'_x(X) \otimes \bigwedge^{m''} T''_x(X)$ pour $(m', m'') \neq (p, q)$.

Pour tout couple (p, q) d'entiers ≥ 0 avec $p + q = n$, il existe un sous-fibré vectoriel complexe $\text{Alt}^{p,q}(T(X); F)$ de $\text{Alt}^n(T(X); F)$ et un seul tel que ses sections sur un ouvert U de X soient les formes différentielles de type (p, q) sur X , à valeurs dans F . Le fibré vectoriel $\text{Alt}^n(T(X); F)$ est somme directe des fibrés vectoriels $\text{Alt}^{p,q}(T(X); F)$ pour $p \geq 0$, $q \geq 0$ et $p + q = n$. Toute forme différentielle ω de degré n à valeurs dans F se décompose de manière unique en

$$\omega = \sum_{p+q=n} \omega_{p,q}$$

où $\omega_{p,q}$ est une forme de type (p, q) , appelée *composante de type (p, q)* de ω . Si ω est de classe C^h , avec $0 \leq h \leq k$, il en est de même de ses composantes.

Exemples

a) Une forme différentielle de degré n est de type $(n, 0)$ si et seulement si elle est \mathbb{C} -multilinéaire.

b) Soient F' , F'' et F trois fibrés vectoriels complexes et soit $F' \times_X F'' \rightarrow F$ un accouplement \mathbb{C} -bilinéaire. Si ω' (resp. ω'') est une forme différentielle de type (p', q') (resp. (p'', q'')) à valeurs dans F' (resp. F''), la forme différentielle $\omega' \wedge \omega''$ est de type $(p' + p'', q' + q'')$.

c) Supposons que F soit le complexifié d'un fibré vectoriel (réel) (8.8.2). Si ω est une forme différentielle de type (p, q) à valeurs dans F , sa conjuguée $\bar{\omega}$ (8.8.2) est de type (q, p) .

8.8.5. Outre les hypothèses précédentes, on suppose $k \geq 1$. Les trois conditions suivantes sont alors équivalentes :

(i) Pour tout ouvert U de X et pour tout couple (ξ, η) de champs de vecteurs complexes sur U , de classe C^k , tel que $\xi(x)$ et $\eta(x)$ appartiennent à $T'_x(X)$ pour tout $x \in U$, on a $[\xi, \eta](x) \in T'_x(X)$ pour tout $x \in U$.

(ii) Pour tout ouvert U de X et tout couple (ξ, η) de champs de vecteurs (réels) sur U , de classe C^k , on a

$$[\xi, \eta] + j[j\xi, \eta] + j[\xi, j\eta] - [j\xi, j\eta] = 0.$$

(iii) Pour tout ouvert U de X et pour toute forme différentielle complexe ω de type $(1, 0)$ sur U , de classe C^k , la composante de type $(0, 2)$ de $d\omega$ est nulle.

Supposons que ces conditions soient vérifiées. Soit ω une forme différentielle de type (p, q) sur un ouvert U de X , de classe C^h avec $1 \leq h \leq k$, à valeurs dans un espace de Banach complexe F . On note $d'\omega$ (resp. $d''\omega$) la composante de type $(p+1, q)$ (resp. $(p, q+1)$) de $d\omega$; les autres composantes de $d\omega$ sont alors nulles et l'on a

$$(2) \quad d\omega = d'\omega + d''\omega.$$

Si $k \geq 2$, on a

$$(3) \quad d'(d'\omega) = 0, \quad d''(d''\omega) = 0, \quad d'(d''\omega) + d''(d'\omega) = 0.$$

Avec les notations de 8.8.4, exemple b), on a

$$(4) \quad d'(\omega' \wedge \omega'') = d'(\omega') \wedge \omega'' + (-1)^{p'+q'} \omega' \wedge d'(\omega'')$$

$$(5) \quad d''(\omega' \wedge \omega'') = d''(\omega') \wedge \omega'' + (-1)^{p'+q'} \omega' \wedge d''(\omega'').$$

Avec celles de 8.8.4, exemple c), on a

$$(6) \quad d'(\bar{\omega}) = \overline{d''(\omega)}.$$

Dans les formules (4) et (5) (resp. (6)), les formes différentielles ω' et ω'' (resp. ω) sont supposées de classe C^1 .

8.8.6 (« Structure presque complexe d'une variété complexe »). Soit X^c une variété analytique complexe, admettant X comme variété analytique réelle sous-jacente (5.14.2.a)). Le fibré $T(X)$ s'identifie au fibré vectoriel (réel) sous-jacent au fibré vectoriel complexe $T(X^c)$, ce qui munit X d'une structure presque complexe de classe C^ω , dite définie par la structure de variété analytique complexe donnée sur X . Cette structure presque complexe satisfait aux conditions (i) à (iii) de 8.8.5; en particulier, les opérateurs d' et d'' de 8.8.5 sont définis. Si $f: X^c \rightarrow Y^c$ est un morphisme de variétés analytiques complexes, f^* commute aux opérateurs d' et d'' .

8.8.7. Conservons les hypothèses et notations de 8.8.6. Soit \bar{X}^c la conjuguée de X^c (5.14.2.b)). Plongeons X par l'application diagonale $x \mapsto (x, x)$ dans la variété complexe $X^c \times \bar{X}^c$, et soit g l'anti-automorphisme $(x, y) \mapsto (y, x)$ de $X^c \times \bar{X}^c$. Le couple $(X^c \times \bar{X}^c, g)$ est une *complexification* de X (5.14.8). En particulier, pour tout $x \in X$, l'espace tangent $T_x(X^c \times \bar{X}^c)$ s'identifie à $T_x(X) \otimes \mathbb{C}$; dans cette identification, $T_x(X^c \times \{x\})$ correspond à $T'_x(X)$ et $T_x(\{x\} \times \bar{X}^c)$ correspond à $T''_x(X)$.

8.8.8. Supposons $r = \omega$; toute structure presque complexe de classe C^∞ sur X satisfaisant aux conditions équivalentes (i) à (iii) de 8.8.5 est la structure presque complexe définie par une structure de variété analytique complexe et une seule sur X .⁽¹⁾

8.8.9 (« Formes holomorphes »). Reprenons les hypothèses et notations de 8.8.6, et soit F un espace de Banach complexe. Les formes différentielles morphiques (autrement dit analytiques complexes) sur X^c , à valeurs dans F , sont encore appelées formes différentielles *holomorphes*; l'identification de $T(X^c)$ à $T(X)$ les identifie à des formes différentielles (analytiques réelles) sur X . Pour qu'une forme différentielle ω de degré p sur X , à valeurs dans F et de classe C^k avec $k \geq 1$, soit holomorphe, il faut et il suffit qu'elle soit de type $(p, 0)$ et que $d''\omega = 0$.

Soit ξ un champ de vecteurs sur X . On dit que ξ est *holomorphe* si c'est une application analytique complexe de X^c dans $T(X^c) = T(X)$, autrement dit un champ de vecteurs analytique complexe sur X^c . Si tel est le cas, et si ω est une forme différentielle holomorphe sur X à valeurs dans F , la forme $\theta_{\xi} \cdot \omega$ (resp. $i(\xi)\omega$) est la même, que l'on considère ξ comme champ de vecteurs analytique complexe sur X^c et ω comme un élément de $\Omega^p(X^c; F)$, ou ξ comme un champ de vecteurs sur X et ω comme un élément de $\Omega^p(X; F)$. De plus, soient $\xi' = \pi'(\xi)$ et $\xi'' = \pi''(\xi)$ les composantes de ξ dans $T'(X)$ et $T''(X)$ respectivement (8.8.3); on a

$$(7) \quad \theta_{\xi} \cdot \omega = \theta_{\xi'} \cdot \omega, \quad \theta_{\xi''} \cdot \omega = 0,$$

$$(8) \quad i(\xi)\omega = i(\xi')\omega, \quad i(\xi'')\omega = 0.$$

8.8.10. *Exemple.* — Supposons que X^c soit un ouvert de \mathbb{C}^n et notons z^1, \dots, z^n les fonctions coordonnées sur X^c . Pour $1 \leq k \leq n$, posons $z^k = x^k + iy^k$, où x^k et y^k sont à valeurs réelles. Considérons le repère tangent $(\partial/\partial z^k)$ de $T(X^c)$ défini par le système de coordonnées (z^k) et le repère tangent $(\partial/\partial x^k, \partial/\partial y^k)$ de $T(X)$ défini par le système de coordonnées (x^k, y^k) (8.1.5). On a $j(\partial/\partial x^k) = \partial/\partial y^k$ et l'image de $\partial/\partial z^k$ par l'application $\pi' : T(X) = T(X^c) \rightarrow T'(X)$ (8.8.3) est égale à

$$\frac{1}{2}(\partial/\partial x^k - i \partial/\partial y^k);$$

on la note encore en général $\partial/\partial \bar{z}^k$.⁽²⁾ Le champ de vecteurs complexe conjugué de ce champ $\partial/\partial z^k$ est noté $\partial/\partial \bar{z}^k$; on a

$$(9) \quad \partial/\partial \bar{z}^k = \frac{1}{2}(\partial/\partial x^k + i \partial/\partial y^k).$$

Si f est une fonction de classe C^1 sur X , à valeurs dans un espace de Banach complexe F , les formes différentielles $d'f$ et $d''f$ (8.8.5) sont données par

$$(10) \quad d'f = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial f}{\partial z^k} dz^k, \quad d''f = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k.$$

¹ Si X est de dimension finie, ceci reste vrai pour une structure presque complexe de classe C^k avec $k \geq \dim X$ (cf. A. NEWLANDER and L. NIRENBERG, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. LXV (1957), p. 391-404).

⁽²⁾ On prendra garde que l'identification canonique de $T(X^c)$ avec $T(X)$ ne transforme pas le champ de vecteurs $\partial/\partial z^k$ sur X^c en le champ de vecteurs $\partial/\partial z^k$ sur X , mais en le champ de vecteurs $\partial/\partial \bar{z}^k + \partial/\partial \bar{z}^k$. Cependant, les deux champs de vecteurs notés $\partial/\partial \bar{z}^k$ prennent la même valeur sur les formes différentielles holomorphes (8.8.9), qui sont d'ailleurs les seules auxquelles l'on puisse appliquer un champ de vecteurs de X^c .

Rappelons que l'on a

$$df = d'f + d''f$$

$$dz^k = dx^k + i dy^k \quad d\bar{z}^k = dx^k - i dy^k.$$

Si $A = (i_1, \dots, i_p)$ est une suite strictement croissante d'entiers appartenant à l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$, on pose

$$dz^A = dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p}$$

et l'on note $d\bar{z}^A$ la conjuguée de dz^A . Toute forme différentielle ω de type (p, q) à valeurs dans F s'écrit de façon unique

$$(11) \quad \omega = \sum_{A, B} f_{A, B} dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

où A (resp. B) parcourt l'ensemble des suites strictement croissantes de p (resp. q) éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les $f_{A, B}$ étant des fonctions à valeurs dans F . Si ω est de classe C^k , avec $k \geq 1$, il en est de même des fonctions $f_{A, B}$ et l'on a

$$(12) \quad d'\omega = \sum_{A, B} d'f_{A, B} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B$$

$$(13) \quad d''\omega = \sum_{A, B} d''f_{A, B} \wedge dz^A \wedge d\bar{z}^B.$$

§ 9. Equations différentielles et feuilletages

Dans les n^{os} 9.1, 9.2 et 9.3, on suppose K de caractéristique 0. Dans le n^o 9.4, on suppose K de caractéristique $p \neq 0$.

9.1. Courbes intégrales

Dans ce n^o, X désigne une variété de classe C^r et ξ un champ de vecteurs de classe C^s sur X , avec r, s dans N_K , $s \leq r - 1$.

9.1.1. Soit I un ouvert de K , et soit $f: I \rightarrow X$ une application de classe C^k ($k \in N_K$, $k \leq r$) de I dans X . Pour $t \in I$, on note $f'(t)$ le vecteur $T_t(f)(1) \in T_{f(t)}(X)$; ce vecteur est parfois appelé *vitesse* de f à l'instant t . Lorsque X est un espace de Banach, $f'(t)$ est la dérivée de f en t .

On dit que f est une *courbe intégrale* de ξ si l'on a

$$(1) \quad f'(t) = \xi(f(t))$$

pour tout $t \in I$. Une telle courbe est de classe C^{s+1} .

Si x est un point de X , on appelle *courbe intégrale de ξ d'origine x* une courbe intégrale $f: I \rightarrow X$ de ξ telle que $0 \in I$ et $f(0) = x$; pour tout $x \in X$, il existe une courbe intégrale de ξ d'origine x , définie dans un voisinage ouvert convenable de 0 dans K .

Si $f: I \rightarrow X$ est une courbe intégrale de ξ et si $a \in K$, l'application $t \mapsto f(t - a)$ de $I + a$ dans X est une courbe intégrale de ξ .

Soient $f_1: I_1 \rightarrow X$ et $f_2: I_2 \rightarrow X$ deux courbes intégrales de ξ , et $t \in I_1 \cap I_2$. Si $f_1(t) = f_2(t)$, les applications f_1 et f_2 coïncident dans un voisinage de t .

9.1.2 (« Flots »). Soit W un ouvert de $X \times K$. Pour tout $x \in X$, notons W_x l'ensemble des $t \in K$ tels que $(x, t) \in W$. On appelle *flot intégral de ξ de domaine W* une application f de classe C^k ($k \leq r$) de W dans X telle que, pour tout $x \in X$, l'application $f_x: W_x \rightarrow X$ définie par $f_x(t) = f(x, t)$ soit une courbe intégrale de ξ , et que pour $(x, 0) \in W$ on ait $f(x, 0) = x$.

Pour tout point $x \in X$, il existe un flot intégral de ξ de classe C^s dont le domaine est un voisinage de $(x, 0)$ dans $X \times K$. Deux flots intégraux de ξ définis au voisinage de $(x, 0)$ coïncident sur un voisinage de $(x, 0)$.

Soit $x \in X$ et soit f un flot intégral de ξ dont le domaine W est un voisinage de

$(x, 0)$. Il existe un voisinage V de $(x, 0, 0)$ dans $X \times K \times K$ tel que, si $(x, t_1, t_2) \in V$, on ait

$$(x, t_1) \in W, \quad (f(x, t_1), t_2) \in W, \quad (x, t_1 + t_2) \in W$$

et

$$(2) \quad f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2).$$

Si X est paracompacte, ou si X est séparée et $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , il existe un flot intégral de ξ dont le domaine est un voisinage de $X \times \{0\}$.

9.1.3 (« Le cas réel »). On suppose que $K = \mathbf{R}$ et que X est séparée. On appelle *arc intégral* de ξ toute courbe intégrale de ξ dont le domaine est un intervalle ouvert de \mathbf{R} . Deux arcs intégraux f_1 et f_2 de ξ , définis dans des intervalles I_1 et I_2 , et coïncidant en un point de $I_1 \cap I_2$, coïncident dans $I_1 \cap I_2$.

Pour tout point $x \in X$, il existe un arc intégral d'origine x et un seul $f_x: I_x \rightarrow X$ tel que, pour tout arc intégral $f: I \rightarrow X$ d'origine x , on ait $I \subset I_x$ et $f = f_x|I$. L'arc f_x est appelé *l'arc intégral maximal* de ξ d'origine x , et son domaine I_x est parfois appelé *l'intervalle de vie* du point x pour le champ ξ .

Si $I_x =]-a_-, a_+[$ et si a_+ est fini, la restriction de f_x à l'intervalle $[0, a_+[$ est une application propre de $[0, a_+[$ dans X . En particulier, $f(t)$ n'a pas de limite lorsque t tend vers a_+ .

9.1.4. Avec les notations et les hypothèses de 9.1.3, l'ensemble Ω des couples $(x, t) \in X \times \mathbf{R}$ tels que $t \in I_x$ est ouvert dans $X \times \mathbf{R}$ et l'application $f: \Omega \rightarrow X$ définie par $f(x, t) = f_x(t)$ est de classe C^s ; c'est un flot intégral de ξ de domaine Ω .

Les fonctions α_+ et $\alpha_-: X \rightarrow]0, +\infty]$ définies par $I_x =]-\alpha_-(x), \alpha_+(x)[$ sont semi-continues inférieurement. Pour $(x, t) \in \Omega$ et $y = f(x, t)$, on a $\alpha_+(y) = \alpha_+(x) - t$ et $\alpha_-(y) = \alpha_-(x) + t$.

Si $t_1 \in I_x$ et si $t_2 \in I_{f(x, t_1)}$, on a $t_1 + t_2 \in I_x$ et

$$(3) \quad f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2).$$

Si la fonction α_+ (resp. α_-) est minorée sur X par une constante > 0 , elle est constante et égale à $+\infty$.

On a $\alpha_+ = \alpha_- = +\infty$ (autrement dit, on a $\Omega = X \times \mathbf{R}$) dans chacun des cas suivants:

- (i) le champ ξ est à support compact (par exemple si X est compacte);
- (ii) il existe un groupe d'automorphismes de X , transitif, et préservant ξ ;
- *(iii) il existe sur X une structure riemannienne pour laquelle X soit complète et ξ borné.*

Si $\Omega = X \times \mathbf{R}$, l'application $f: X \times \mathbf{R} \rightarrow X$ est une loi d'opération à droite de classe C^s de la variété de groupe \mathbf{R} dans la variété X , cf. 5.12.5.

9.1.5 (« Le cas complexe »). On suppose que $K = \mathbf{C}$ et que X est séparée. Pour tout $a \in]0, +\infty]$, notons D_a le disque ouvert de centre 0 et de rayon a dans \mathbf{C} . Pour tout $x \in X$, il existe un nombre $\rho(x) \in]0, +\infty]$ et un seul, une courbe intégrale $f_x: D_{\rho(x)} \rightarrow X$

d'origine x et une seule telle que, pour tout $a \in]0, +\infty[$ et toute courbe intégrale $f: D_a \rightarrow X$ d'origine x , on ait $a \leq \rho(x)$ et $f = f_x|_{D_a}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, soit $\alpha_\lambda(x)$ la borne supérieure de l'intervalle de vie de x pour le champ de vecteurs $\lambda\xi$ sur la variété réelle déduite de X par restriction des scalaires. On a $\rho(x) = \inf_{|\lambda|=1} \alpha_\lambda(x)$.

L'ensemble Δ des couples $(x, t) \in X \times \mathbf{C}$ tels que $t \in D_{\rho(x)}$ est ouvert dans $X \times \mathbf{C}$ et l'application f de Δ dans X définie par $f(x, t) = f_x(t)$ est un flot intégral de ξ . La fonction $\rho: X \rightarrow]0, +\infty[$ est semi-continue inférieurement. Pour $(x, t) \in \Delta$ et $y = f(x, t)$, on a $\rho(y) \geq \rho(x) - |t|$. Si ρ est minorée sur X par une constante > 0 , on a $\rho = +\infty$ et $\Delta = X \times \mathbf{C}$.

Lorsque $\Delta = X \times \mathbf{C}$, l'application $f: X \times \mathbf{C} \rightarrow X$ est une loi d'opération à droite de la variété de groupe \mathbf{C} dans la variété X .

9.1.6. Soient $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés et η un champ de vecteurs sur Y tels que ξ soit φ -lié à η (cf. 8.2.6). Si $f: I \rightarrow X$ est une courbe intégrale de ξ , l'application $\varphi \circ f: I \rightarrow Y$ est une courbe intégrale de η . Si $K = \mathbf{R}$ et si X et Y sont séparées, pour tout $x \in X$, l'intervalle de vie de x pour ξ est contenu dans l'intervalle de vie de $\varphi(x)$ pour η . Si de plus φ est propre, ces intervalles sont égaux.

9.1.7 (« Équations dépendant du temps »). Soit W un ouvert de $X \times K$ et soit $\Xi: W \rightarrow T(X)$ un relèvement de classe C^s de $\text{pr}_1: W \rightarrow X$, c'est-à-dire une application de classe C^s de W dans $T(X)$ telle que $\Xi(x, t)$ appartienne à $T_x(X)$ pour tout $(x, t) \in W$. On appelle *courbe intégrale* de Ξ une application f de classe C^k (avec $k \in \mathbf{N}_K$ et $k \leq r$), d'un ouvert I de K dans X telle que, pour tout $t \in I$, on ait

$$(f(t), t) \in W \text{ et } f'(t) = \Xi(f(t), t).$$

Soit η le champ de vecteurs de classe C^s sur W défini par $\eta(x, t) = (\Xi(x, t), (t, 1))$. Pour qu'une application f d'un ouvert I de K dans X soit une courbe intégrale de Ξ , il faut et il suffit que $t \mapsto (f(t), t)$ soit une courbe intégrale de η au sens de 9.1.1.

Soient $g: I \rightarrow W$ une courbe intégrale de η et t_0 un point de I tel que $\text{pr}_2(g(t_0)) = t_0$. L'ensemble des éléments $t \in I$ tels que $\text{pr}_2(g(t)) = t$ est un voisinage de t_0 qui coïncide avec I si I est connexe.

9.1.8 (« Paramètres et conditions initiales »). Soit Z une variété de classe C^r , soit W un ouvert de $X \times K \times Z$, et soit Ξ un relèvement de classe C^s de $\text{pr}_1: W \rightarrow X$ (8.6.1). Si $z \in Z$, on note W_z l'ensemble des $(x, t) \in X \times K$ tels que $(x, t, z) \in W$, et on note Ξ_z l'application $(x, t) \mapsto \Xi(x, t, z)$ de W_z dans $T(X)$.

Soit (x_0, t_0, z_0) un point de W . Il existe alors un voisinage ouvert $X_1 \times I_1 \times Z_1$ de (x_0, t_0, z_0) dans W et une application de classe C^s

$$f: X_1 \times I_1 \times I_1 \times Z_1 \rightarrow X$$

tels que, quel que soit $(x_1, t_1, z_1) \in X_1 \times I_1 \times Z_1$, l'application $t \mapsto f(x_1, t_1, t, z_1)$ soit une courbe intégrale de Ξ_{z_1} (au sens de 9.1.7) vérifiant la relation $f(x_1, t_1, t_1, z_1) = x_1$.

Deux applications

$$f_1: X_1 \times I_1 \times I_1 \times Z_1 \rightarrow X \quad \text{et} \quad f_2: X_2 \times I_2 \times I_2 \times Z_2 \rightarrow X$$

satisfaisant aux conditions ci-dessus coïncident dans un voisinage de (x_0, t_0, t_0, z_0) .

9.2. Feuilletages

Dans ce n°, X désigne une variété de classe C^r , avec $r \in \mathbb{N}_K$. Sauf mention du contraire, toutes les variétés et tous les morphismes considérés sont supposés de classe C^r .

9.2.1. Soit S une variété, et soit $p: X \rightarrow S$ une submersion. Pour tout $s \in S$, munissons $X_s = p^{-1}(s)$ de la structure de variété induite par celle de X (5.10.5); l'ensemble X est réunion disjointe des X_s . Notons X_p la structure de variété sur X obtenue par recollement des X_s , pour $s \in S$ (5.2.4); c'est l'unique structure de variété sur X pour laquelle les X_s soient des sous-variétés ouvertes. L'espace topologique X_p est somme des espaces X_s .

Soient V une variété et f une application de V dans X . Pour que f soit un morphisme de V dans X_p , il faut et il suffit que f soit un morphisme de V dans X et que $p \circ f$ soit localement constante.

9.2.2. On appelle *feuilletage* de X une variété Y ayant même ensemble sous-jacent que X et satisfaisant à la condition suivante:

(F) Pour tout $x \in X$, il existe une sous-variété ouverte U de X contenant x , une variété S et une submersion $p: U \rightarrow S$ telles que la variété U_p soit une sous-variété ouverte de Y .

On dit aussi que le couple (X, Y) est une *variété feuilletée*. Si (X, Y) et (X', Y') sont des variétés feuilletées, on appelle *morphisme* de (X, Y) dans (X', Y') toute application $f: X \rightarrow X'$ qui est à la fois un morphisme de la variété X dans la variété X' et un morphisme de la variété Y dans la variété Y' .

Soit (X, Y) une variété feuilletée. L'application identique $Y \rightarrow X$ est une immersion bijective. Une partie U de X est appelée une *feuille* si c'est un ouvert de Y ; dans ce cas, on munit U de la structure topologique et de la structure de variété induites par celles de Y ; par exemple, on dit que U est une *feuille connexe* si c'est une partie ouverte et connexe de Y . Les feuilles qui sont des sous-variétés de X forment une base de la topologie de Y . Lorsque $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , les composantes connexes de Y sont des feuilles, appelées *feuilles connexes maximales* de (X, Y) .

9.2.3. Si $s \in \mathbb{N}_K$, $s \leq r$, on appelle feuilletage de classe C^s de X un feuilletage de la variété de classe C^s sous-jacente à X .

9.2.4. Exemples

a) La variété X est un feuilletage de X , appelé le *feuilletage grossier* de X .

b) Si $p: X \rightarrow S$ est une submersion, X_p est un feuilletage de X , appelé le *feuilletage de X défini par p* . Le feuilletage de X défini par l'application identique est l'ensemble X muni de sa structure de variété pure de dimension 0 (5.2.1); on l'appelle le *feuilletage discret* de X .

c) Soient E un espace de Banach, F un sous-espace vectoriel fermé de E admettant un supplémentaire topologique, et p la projection canonique $E \rightarrow E/F$. Le feuilletage E_p de E est appelé le feuilletage de E défini par F .

d) Soit Γ un groupe discret opérant proprement et librement sur l'espace topologique X (TG, III, § 4, n° 4). Soit Y un feuilletage de X , et supposons que, pour tout $s \in \Gamma$, l'application $x \mapsto sx$ soit un automorphisme de (X, Y) . La relation d'équivalence sur X (resp. Y) dont les classes sont les orbites de Γ est régulière (5.9.5). Si l'on note X/Γ (resp. Y/Γ) la variété quotient correspondante, le couple $(X/\Gamma, Y/\Gamma)$ est une variété feuilletée, dite *quotient* de (X, Y) par Γ .

9.2.5. Soient Y un feuilletage de X et U un ouvert de X . Alors U est ouvert dans Y et U , muni de la structure de variété induite par celle de Y , est un feuilletage de X , appelé le *feuilletage induit* par Y .

Plus généralement, soit $f: X' \rightarrow X$ un morphisme tel que f et l'application identique $Y \rightarrow X$ forment un couple transversal (5.11.1). Le produit fibré $Y' = X' \times_X Y$ s'identifie canoniquement à un feuilletage de X' appelé le *feuilletage image réciproque* de Y par f .

9.2.6. Soient $p: X \rightarrow S$ et $p': X' \rightarrow S'$ deux submersions, et soit f un morphisme de X dans X' . Pour que f soit un morphisme de X_p dans $X'_{p'}$, il faut et il suffit que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un morphisme g de $p(U)$ dans S' tel que $g \circ p = p' \circ f$ sur U .

9.2.7. Soit Y un feuilletage de X . On appelle *carte feuilletante* de (X, Y) un quadruplet (U, φ, E, F) tel que (U, φ, E) soit une carte de X , que F soit un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Banach E admettant un supplémentaire topologique et que φ soit un isomorphisme du feuilletage de U induit par Y sur le feuilletage de $\varphi(U)$ défini par l'application canonique de E sur E/F . Pour tout point $x \in X$, il existe une carte feuilletante (U, φ, E, F) de (X, Y) telle que $x \in U$. Soit $n = \dim_x X$ et soit $m = \dim_x Y$. Si n est fini, il existe un voisinage ouvert U de x et un système de coordonnées ζ^1, \dots, ζ^n de X sur U tel que le feuilletage de U induit par Y coïncide avec le feuilletage défini par l'application $(\zeta^{m+1}, \dots, \zeta^n)$ de U dans K^{n-m} .

9.2.8. Soit Y un feuilletage de X . Lorsque x parcourt X , les espaces $T_x(Y)$ sont les fibres d'un sous-fibré vectoriel de classe C^{r-1} de $T(X)$ que l'on appelle le *sous-fibré de $T(X)$ tangent au feuilletage Y* et que l'on note $T(X, Y)$. Si le feuilletage Y est défini par une submersion $p: X \rightarrow S$, alors $T(X, Y) = \text{Ker } T(p)$ est le fibré tangent relatif $T(X/S)$ de X sur S (8.1.3).

Soient (X, Y) et (X', Y') deux variétés feuilletées, et soit f un morphisme de X dans X' . Pour que f soit un morphisme de variétés feuilletées, il faut et il suffit que $T(f)$ applique $T(X, Y)$ dans $T(X', Y')$. En particulier, soit $f: Z \rightarrow X$ un morphisme de variétés; pour que f soit un morphisme de Z dans Y , il faut et il suffit que $T(f)$ applique $T(Z)$ dans $T(X, Y)$. Pour qu'une sous-variété Z de X soit une feuille de (X, Y) , il faut et il suffit que l'on ait

$$T_z(Z) = T_z(X, Y) \quad \text{pour tout } z \in Z.$$

Soit Y un feuilletage de X et soit U une feuille de Y , admettant une base dénombrable d'ouverts. Soient Z une variété et f une application de Z dans U . Pour que f soit

un morphisme de variétés de Z dans U , il faut et il suffit que le composé de f et de l'injection canonique de U dans X soit un morphisme de variétés de Z dans X . Si X est localement compact et dénombrable à l'infini, toute feuille connexe de (X, Y) admet une base dénombrable d'ouverts (cf. TG, I, 3^e éd., §11, n° 7, cor. 2 du th. 1).

9.2.9. Supposons que $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} . Soit Y un feuilletage de X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Il existe une variété S et une submersion $p: X \rightarrow S$ telles que $Y = X_p$.
- b) Pour tout $x \in X$, il existe une sous-variété S_x de X possédant les deux propriétés suivantes :
 - b_1) L'espace tangent $T_x(S_x)$ à S_x en x est un supplémentaire topologique de $T_x(X, Y)$ dans $T_x(X)$.
 - b_2) Toute feuille connexe de (X, Y) rencontre S_x en au plus un point.

Supposons ces conditions vérifiées et soit $R\{x, y\}$ la relation sur X « x et y appartiennent à une même feuille connexe » ; alors R est une relation d'équivalence régulière (5.9.5) sur X , et, si p désigne la projection canonique $X \rightarrow X/R$, on a $Y = X_p$.

Exemple. — Prenons $K = \mathbf{R}$ et $X = \mathbf{R}^2$. Faisons opérer le groupe discret $\Gamma = \mathbf{Z}^2$ sur X par translations. Soit $m \in \mathbf{R}$ et soit (X, Y_m) le feuilletage défini par la submersion $p: (x_1, x_2) \mapsto x_2 - mx_1$ de X sur \mathbf{R} . Posons $X' = X/\Gamma$ et $Y'_m = Y_m/\Gamma$; alors Y'_m est un feuilletage du tore X' (cf. 9.2.4, exemple d)). Si m est rationnel, il existe une submersion p' de X' sur \mathbf{R}/\mathbf{Z} telle que $Y'_m = X'_{p'}$. Si m est irrationnel, toute feuille connexe maximale de (X', Y'_m) est dense dans X' , et il n'existe pas de submersion p' de X' dans une variété S telle que $Y'_m = X'_{p'}$.

9.2.10. Soit Y un feuilletage de X , et soit $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme de variétés tel que le composé $Y \rightarrow X \xrightarrow{\pi} S$ soit étale. Si S' est un ouvert de S , une section $\sigma: S' \rightarrow X$ de π au-dessus de S' est dite *horizontale* (par rapport au feuilletage Y) si c'est un morphisme de S' dans Y ; il revient au même de dire que $\sigma(S')$ est une feuille de (X, Y) , ou encore que $T(\sigma)$ applique $T(S')$ dans $T(X, Y)$. Pour tout $s_0 \in S$ et pour tout $x_0 \in \pi^{-1}(s_0)$, il existe une section horizontale définie au voisinage de s_0 et prenant la valeur x_0 en s_0 ; deux telles sections coïncident sur un voisinage de s_0 .

Plus généralement, soit $s_0 \in S$, soit T une variété, soit f un morphisme de T dans la sous-variété $\pi^{-1}(s_0)$ de X , et soit $t_0 \in T$. Il existe alors un voisinage ouvert T' (resp. S') de t_0 dans T (resp. de s_0 dans S), et un morphisme

$$F: S' \times T' \rightarrow X$$

vérifiant la condition suivante : pour tout $t \in T'$, l'application $s \mapsto F(s, t)$ est une section horizontale de π au-dessus de S' prenant la valeur $f(t)$ au point s_0 . Deux telles applications F coïncident sur un voisinage de (s_0, t_0) .

9.3. Sous-fibrés intégrables

Dans ce n°, X désigne une variété de classe C^r et F un sous-fibré vectoriel de classe C^s de $T(X)$, avec r, s dans \mathbf{N}_K , $s \leq r - 1$.

9.3.1. Soit V une variété de classe C^k ($k \in \mathbb{N}_k$, $k \leq r$) et soit f un morphisme de classe C^k de V dans X . On dit que f est une *intégrale* de F si $T(f)$ applique $T(V)$ dans F .

Une sous-variété Z de classe C^k de X est appelée une *sous-variété intégrale* de F si l'injection $Z \rightarrow X$ est une intégrale de F au sens ci-dessus, i.e. si l'on a $T_x(Z) \subset F_x$ pour tout $x \in Z$.

Soit $x \in X$. Si Z_1 et Z_2 sont deux sous-variétés intégrales de X contenant x et si $T_x(Z_1) = F_x$, il existe un voisinage U de x tel que $U \cap Z_2 \subset Z_1$. Si en outre $T_x(Z_2) = F_x$, les germes de Z_1 et Z_2 en x coïncident.

9.3.2. On dit que F est *intégrable* s'il existe un feuilletage Y de X de classe C^s tel que $F = T(X, Y)$ (9.2.8). Un tel feuilletage est alors unique; on l'appelle le *feuilletage intégral* de F . Pour qu'un morphisme $f: V \rightarrow X$ de classe C^s soit une intégrale de F , il faut et il suffit que f soit un morphisme de V dans Y .

Exemple. — Si F est de rang 1 en tout point, F est intégrable, et définit sur X un feuilletage pur de dimension 1. Supposons en outre que $K = \mathbb{R}$, que X soit séparée, et que F admette pour repère un champ de vecteurs ξ partout non nul. Alors, pour tout $x \in X$, la feuille connexe maximale contenant x est l'image de l'arc intégral maximal de ξ d'origine x (9.1.3).

9.3.3 (« Critères d'intégrabilité »). Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) Le sous-fibré vectoriel F de $T(X)$ est intégrable.
- (ii) Pour tout $x \in X$, il existe une sous-variété intégrale Z de classe C^s de F telle que $x \in Z$ et $T_x(Z) = F_x$.
- (iii) Quels que soient l'ouvert U de X et les champs de vecteurs ξ et η appartenant à $\mathcal{F}_F^s(U)$ (7.4.1), on a $[\xi, \eta] \in \mathcal{F}_F^{s-1}(U)$.

Soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une famille de sections de F de classe C^s telle que, pour tout $x \in X$, l'ensemble des $\xi_i(x)$ soit un sous-ensemble *total* de l'espace de Banach F_x (EVT, I, § 2, n° 1). Les conditions (i), (ii), (iii) sont alors équivalentes à:

- (iv) pour tout couple (i, j) d'éléments de I , et tout $x \in X$, on a $[\xi_i, \xi_j](x) \in F_x$.

Lorsque I est fini, et que la famille (ξ_i) est un *repère* de F , les conditions précédentes équivalent encore à:

- (v) il existe une famille $(c_{ij}^k)_{(i, j, k) \in I \times I \times I}$ de fonctions sur X à valeurs dans K telles que $[\xi_i, \xi_j] = \sum_k c_{ij}^k \xi_k$ quels que soient i, j dans I .

(Si tel est le cas, les fonctions $c_{i,j}^k$ sont de classe C^{s-1} .)

9.3.4. Soit $s' \in \mathbb{N}_k$, avec $s' \leq s$, et soit F' le fibré vectoriel de classe $C^{s'}$ déduit de F par affaiblissement de structure (8.7.1). Pour que F soit intégrable, il faut et il suffit que F' le soit. Dans ce cas, le feuilletage intégral de F' se déduit de celui de F par affaiblissement de structure.

9.3.5. Soient E un espace de Banach et p un entier ≥ 0 . Pour tout $x \in X$, notons

$N(p, E)_x$ le sous-espace vectoriel de $\text{Alt}^p(T_x(X); E)$ formé des éléments u tels que $u(v_1, \dots, v_p) = 0$ pour v_1, \dots, v_p dans F_x . Les espaces $N(p, E)_x$, pour $x \in X$, sont les fibres d'un sous-fibré vectoriel de classe C^s de $\text{Alt}^p(T(X); E)$. Notons-le $N(p, E)$. Si F est intégrable, on a :

(vi) pour tout ouvert U de X et toute forme $\omega \in \mathcal{S}_{N(p, E)}^s(U)$, on a $d\omega \in \mathcal{S}_{N(p+1, E)}^{s-1}(U)$.

Inversement, si (vi) est vérifiée pour $p = 1$ et pour tout espace de Banach E , le fibré F est intégrable; lorsque $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , il suffit même de vérifier (vi) pour $p = 1$ et $E = K$.

Supposons que le dual de $T(X)/F$ admette un repère $(\omega_1, \dots, \omega_n)$. L'intégrabilité de F est alors équivalente à la condition suivante :

(vii) $d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = 0$ pour $1 \leq i \leq n$.

S'il existe en outre un sous-fibré vectoriel G de classe C^s de $T(X)$ tel que $T(X)$ soit somme directe de F et de G , la condition (vii) équivaut à :

(viii) il existe des formes différentielles α_i^j (i, j dans I) de degré 1 sur X , de classe C^{s-1} , telles que $d\omega_i = \sum_j \alpha_i^j \wedge \omega_j$ pour tout $i \in I$.

9.3.6. Soit L un espace de Banach et soit ω une forme différentielle de degré 1 sur X à valeurs dans L , de classe C^s . On fait les deux hypothèses suivantes :

- a) pour tout $x \in X$, ω_x est un homomorphisme surjectif de $T_x(X)$ dans L , et le noyau de ω_x est F_x ;
- b) il existe un sous-fibré vectoriel G de $T(X)$ tel que $T(X)$ soit somme directe de F et de G .

L'intégrabilité de F est alors équivalente à :

(ix) il existe une forme différentielle α de degré 1 sur X à valeurs dans $\text{End}(L)$ telle que $d\omega = \alpha \wedge \omega$, le produit extérieur étant défini par l'accouplement canonique $\text{End}(L) \times L \rightarrow L$ (7.8.2 et 8.3.2).

9.3.7 (« Équations aux différentielles totales »). On suppose que X est le produit de deux variétés A et B de classe C^r ; on note $p_1: X \rightarrow A$ et $p_2: X \rightarrow B$ les deux projections. Soit f un morphisme de classe C^s de $p_1^*T(A)$ dans $p_2^*T(B)$. Les graphes des applications $f_{(a, b)}: T_a(A) \rightarrow T_b(B)$ sont les fibres d'un sous-fibré vectoriel de classe C^s de $T(X)$; notons-le F' .

Soit A' un ouvert de A , et soit $\varphi: A' \rightarrow B$ un morphisme de classe C^k ($k \in \mathbf{N}_K$, $k \leq r$). On dit que φ est une *intégrale* de f si, pour tout $a \in A'$, on a $T_a(\varphi) = f_{a, \varphi(a)}$; cela équivaut à dire que l'application $a \mapsto (a, \varphi(a))$ de A' dans X est une *intégrale* de F' (9.3.1). Une telle application est de classe C^{s+1} . Si φ_1 et φ_2 sont deux intégrales de f et prennent la même valeur en un point $a \in A$, elles coïncident dans un voisinage de a .

Plus généralement, soit Z une variété de classe C^k , soit A' un ouvert de A , soit $a \in A'$ et soient Φ_1, Φ_2 des morphismes de classe C^k de $Z \times A'$ dans B . Supposons que

Φ_1 et Φ_2 coïncident sur $Z \times \{a\}$ et que, pour tout $z \in Z$, les morphismes

$$a \mapsto \Phi_1(z, a) \quad \text{et} \quad a \mapsto \Phi_2(z, a)$$

soient des intégrales de f . Alors Φ_1 et Φ_2 coïncident dans un voisinage de $Z \times \{a\}$.

Supposons que F' soit *intégrable*. Soient Z une variété de classe C^k ($k \in \mathbb{N}_k, k \leq s$), (z_0, a_0) un point de $Z \times A$, et ρ un morphisme de classe C^k de Z dans B . Il existe un voisinage ouvert $Z' \times A'$ de (z_0, a_0) dans $Z \times A$ et un morphisme $\Phi: Z' \times A' \rightarrow B$ de classe C^k tels que, pour tout $z \in Z'$, l'application $a \mapsto \Phi(z, a)$ de A' dans B admette f pour application tangente et prenne la valeur $\rho(z)$ au point a_0 .

9.3.8. Conservons les hypothèses et notations de 9.3.7 et supposons que A (resp. B) soit une sous-variété ouverte d'un espace de Banach E (resp. M). L'application f s'identifie alors à un morphisme de classe C^s de $X = A \times B$ dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E; M)$. Notons D_1f (resp. D_2f) la première (resp. seconde) dérivée partielle de f (1.6.2); c'est un morphisme de classe C^{s-1} de X dans $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; M))$ (resp. dans $\mathcal{L}(M; \mathcal{L}(E; M))$), espace que l'on identifie de façon évidente à $\mathcal{L}_2(E; M)$ (resp. à $\mathcal{L}(M, E; M)$). Pour que F soit intégrable, il faut et il suffit que, pour tout $x \in X$, l'application bilinéaire

$$\Delta_x : (h_1, h_2) \mapsto D_1f(x)(h_1, h_2) + D_2f(x)(f(x)h_1, h_2)$$

de $E \times E$ dans M soit symétrique. Sous cette condition, si φ est une intégrale de f définie dans un ouvert A' de A , la dérivée seconde de φ en un point a de A' est $\Delta_{(a, \varphi(a))}$.

Si $E = K^n$, et si l'on note (x^1, \dots, x^n) les fonctions coordonnées sur K^n , l'application f est définie par une famille (f_1, \dots, f_n) d'applications de $A \times B$ dans M , et la condition d'intégrabilité s'écrit:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j} + (D_2f_i) \cdot f_j = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} + (D_2f_j) \cdot f_i$$

quels que soient les entiers i, j dans $\{1, n\}$. Une application φ d'un ouvert A' de A dans B est une intégrale de f si et seulement si l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = f_i(x, \varphi(x)) \quad \text{pour tout } x \in A' \text{ et tout } i \in \{1, n\},$$

autrement dit, si l'on a

$$d\varphi = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i(x, \varphi(x)) dx^i.$$

9.4. Fibrés intégrables en caractéristique $p \neq 0$

Dans ce n°, on suppose K de caractéristique $p \neq 0$. On note X une variété K -analytique localement de dimension finie.

9.4.1 (« Puissances p -ièmes »). Soit ξ un champ de vecteurs sur un ouvert U de X . Il existe un champ de vecteurs ξ^p et un seul sur U tel que l'on ait

$$(1) \quad D_{\xi^p}(f) = (D_{\xi})^p(f) = \underbrace{D_{\xi}(D_{\xi}(\dots(D_{\xi}(f))\dots))}_{p \text{ fois}}$$

pour toute fonction analytique f définie dans un ouvert de U .

Si φ est une fonction analytique sur U , on a

$$(2) \quad (\varphi\xi)^p = \varphi^p \xi^p + (D_{\varphi\xi})^{p-1}(\varphi) \cdot \xi$$

et si η est un champ de vecteurs sur U , on a

$$(3) \quad [\xi^p, \eta] = \text{ad}(\xi)^p(\eta) = [\xi, [\xi, \dots, [\xi, \eta] \dots]].$$

9.4.2 (« Identité de Jacobson »). Soit L la F_p -algèbre de Lie libre (LIE, II, § 2, n° 2) sur un ensemble $\{x, y\}$ à deux éléments. Il existe un élément et un seul $\Lambda_p(x, y)$ de L tel que l'on ait

$$(4) \quad (x + y)^p = x^p + y^p + \Lambda_p(x, y)$$

dans l'algèbre enveloppante de L . Exemples:

$$\Lambda_2(x, y) = [x, y]; \quad \Lambda_3(x, y) = [x, [x, y]] - [y, [x, y]].$$

Si ξ et η sont des champs de vecteurs sur X , on a

$$(5) \quad (\xi + \eta)^p = \xi^p + \eta^p + \Lambda_p(\xi, \eta).$$

9.4.3. *Exemple.* — Prenons $X = K$ (resp. K^*) et notons x l'application canonique $X \rightarrow K$. Soit ξ (resp. η) le champ de vecteurs $\partial/\partial x$ (resp. $x \cdot \partial/\partial x$); il est invariant par les translations du groupe additif (resp. multiplicatif) X . On a

$$(6) \quad \xi^p = 0 \quad \text{et} \quad \eta^p = \eta.$$

9.4.4 (« Fibrés intégrables »). Soit F un sous-fibré vectoriel de $T(X)$. On dit que F est *intégrable* si, pour tout $x \in X$, il existe un système de coordonnées $(\zeta^1, \dots, \zeta^n)$ de X en x et un entier $m \leq n$ tels que $(\partial/\partial \zeta^1, \dots, \partial/\partial \zeta^m)$ soit un repère de F au voisinage de x .

Pour que F soit intégrable, il faut et suffit qu'il vérifie la condition suivante:

Pour tout ouvert U de X , $\mathcal{S}_F^\omega(U)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{S}_{T(X)}^\omega(U)$ stable par l'opération $\xi \mapsto \xi^p$.

§ 10. Mesures définies par des formes différentielles

Dans ce paragraphe, on suppose que K est *localement compact*. A partir du n° 10.2, on suppose $K = \mathbf{R}$. Dans les n°s 10.1 et 10.4, toutes les variétés considérées sont supposées *localement de dimension finie*; lorsqu'elles sont séparées, elles sont *localement compactes*.

10.1. Mesure module d'une forme différentielle

Notations. — On note μ une *mesure de Haar* (INT, VII, § 1, n° 2) sur le groupe additif de K . On note $\mu^{\otimes n}$ la mesure $\mu \otimes \cdots \otimes \mu$ sur K^n et $\mu_U^{\otimes n}$ sa restriction à un ouvert U de K^n . Pour $a \in K$, on note $\text{mod}(a)$ le *module* de a (INT, VII, § 1, n° 10 et AC, VI, § 9, n° 1). Si $K = \mathbf{R}$, on a $\text{mod}(a) = |a|$; si $K = \mathbf{C}$, on a $\text{mod}(a) = |a|^2$; si K est ultramétrique, on a $\text{mod}(a) = q^{-v(a)}$, où q désigne le nombre d'éléments du corps résiduel de K et v la valuation normée de K (AC, VI, § 9, n° 1, prop. 1).

10.1.1. Soient U et V des ouverts de K^n , et soit $f: U \rightarrow V$ une application de classe C^r , avec $r \in \mathbf{N}_K$. Soit $x \in U$; on appelle *jacobien* de f en x , et on note $\text{Jac}_x(f)$, le déterminant de l'application linéaire $Df(x)$ dérivée de f en x . On note $\text{Jac}(f)$ la fonction $x \mapsto \text{Jac}_x(f)$; la fonction $\text{mod}(\text{Jac}(f))$ est une fonction continue dans U à valeurs réelles positives.

10.1.2 (« Changement de variable dans les intégrales »). Les hypothèses étant celles de 10.1.1, supposons que f soit un isomorphisme de classe C^r de la variété U sur la variété V . Alors *l'image par f de la mesure $\text{mod}(\text{Jac}(f)) \cdot \mu_U^{\otimes n}$ est $\mu_V^{\otimes n}$* ; pour toute fonction continue à support compact $\varphi: V \rightarrow \mathbf{C}$, on a

$$(1) \quad \int_V \varphi(y) \mu^{\otimes n}(y) = \int_U \varphi(f(x)) \cdot \text{mod}(\text{Jac}_x(f)) \mu^{\otimes n}(x).$$

10.1.3. Soit X une variété de classe C^r , et soit A une partie de X . On dit que A est *localement négligeable* si, pour toute carte (U, φ, K^n) de la variété X , l'ensemble $\varphi(A \cap U)$ est $\mu^{\otimes n}$ -négligeable (INT, IV, § 2, n° 2); cette condition ne dépend pas du choix de μ , et il suffit de la vérifier pour une famille de cartes dont les domaines recouvrent A . Tout ensemble contenu dans la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles localement négligeables est localement négligeable.

Exemples

a) Toute sous-variété de X qui est de codimension ≥ 1 en tout point (i.e. d'intérieur vide) est localement négligeable.

b) Soit g une fonction de classe C^r sur X , et soit A_g l'ensemble des points $x \in X$ tels que $g(x) = 0$; supposons que l'intérieur de A_g soit vide, et que $r = \omega$; alors A_g est localement négligeable.

c) Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés de classe C^r , la variété Y étant réunion dénombrable de compacts. On suppose que l'on a $\dim_y Y \leq \dim_{f(y)} X$ pour tout $y \in Y$. L'image par f de toute partie localement négligeable de Y est une partie localement négligeable de X . Il en est de même de l'image par f de l'ensemble des points où f n'est pas étale (« premier théorème de Sard »); en particulier, si $\dim_y Y < \dim_{f(y)} X$ pour tout $y \in Y$, $f(Y)$ est une partie localement négligeable de X .

d) Supposons K de caractéristique zéro. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés de classe C^r ($r \in \mathbb{N}_K$, $r \geq \omega$), Y étant réunion dénombrable de compacts. Soit C l'ensemble des points de Y où f n'est pas une submersion (« points critiques »). Alors $f(C)$ est une partie localement négligeable de X (« second théorème de Sard »).⁽¹⁾

10.1.4. Soit X une variété paracompacte de classe C^r . Il existe sur X une classe M de mesures équivalentes (INT, V, § 5, n° 6) et une seule telle que, quelle que soit $\nu \in M$ et quelle que soit la carte $c = (U, \varphi, K^n)$ de X , l'image par φ de la restriction de ν à U soit équivalente à $\mu_{\varphi(U)}^{\otimes n}$. On dit que M est la *classe canonique* de mesures sur X . Pour qu'un sous-ensemble A de X soit localement négligeable (10.1.3), il faut et il suffit qu'il soit localement négligeable (INT, IV, § 2, n° 2) pour une (resp. toute) mesure $\nu \in M$.

Si $K = \mathbb{R}$ et $r \neq \omega$ (resp. $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $r = \omega$, resp. K est ultramétrique), il existe $\nu \in M$ telle que, pour toute carte $c = (U, \varphi, K^n)$ de X , la densité de $\varphi(\nu_U)$ par rapport à $\mu_{\varphi(U)}^{\otimes n}$ soit partout > 0 et de classe C^{r-1} (resp. de classe C^∞ , resp. localement constante). Si ν et ν' sont deux telles mesures, la densité de ν' par rapport à ν est partout > 0 et de classe C^{r-1} (resp. de classe C^∞ , resp. localement constante).

10.1.5. Soit X une variété de classe C^r ; soit $T'(X)$ le fibré cotangent de X (8.2.2) et posons $\Omega = \det(T'(X))$ (7.9.9). Le fibré vectoriel Ω est de rang 1 en chaque point; lorsque X est pure de dimension n , il s'identifie au fibré vectoriel $\text{Alt}^n(T(X); K_X)$. Soit ω une section de Ω sur X ; on dit, par abus de langage, que ω est une *forme différentielle de degré maximum* sur X . Soit $c = (U, \varphi, K^n)$ une carte de X ; notons u^1, \dots, u^n les fonctions coordonnées sur K^n . Il existe une fonction f_c et une seule sur $\varphi(U)$ telle que $\omega|_U = \varphi^*(f_c \cdot du^1 \wedge \dots \wedge du^n)$. On dit que ω est *localement de module intégrable* si, pour toute carte $c = (U, \varphi, K^n)$ de X , la fonction réelle $\text{mod}(f_c): \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ est localement intégrable pour $\mu_{\varphi(U)}^{\otimes n}$ (INT, IV, § 4, n° 1); il suffit de vérifier cette propriété pour les cartes d'un atlas de X . Si ω est *continue*, et en particulier si ω est de classe C^s , avec $s \in \mathbb{N}_K$, $s \leq r - 1$, alors ω est localement de module intégrable.

¹ Lorsque $K = \mathbb{R}$, il suffit de supposer que $r > \sup_{y \in Y} (\dim_{f(y)} X - \dim_y Y)$; cf. par exemple A. SARD, *Bull. Am. Math. Soc.*, XLVIII (1943), p. 883–890.

10.1.6 (« Mesure positive définie par une forme différentielle de degré maximum »). Conservons les notations de 10.1.5 et supposons de plus que X soit *séparée* et que ω soit *localement de module intégrable*. Si $c = (U, \varphi, K^n)$ est une carte de X , notons ν_c la mesure sur $\varphi(U)$ produit de la mesure $\mu_{\varphi(U)}^{\otimes n}$ par la fonction $\text{mod}(f_c)$ (INT, V, § 5, n° 2, déf. 2) et soit α_c l'image de ν_c par φ^{-1} . Il existe sur X une mesure α et une seule telle que, pour toute carte $c = (U, \varphi, K^n)$ de X , la restriction de α à U soit égale à α_c . On dit que la mesure α est le *module* de ω et on la note $\text{mod}(\omega)_\mu$. C'est une mesure positive. Lorsque $K = \mathbb{R}$ et que μ est la mesure de Lebesgue, on écrit $|\omega|$ au lieu de $\text{mod}(\omega)_\mu$.

Si X est pure de dimension n , et si a est un nombre réel > 0 , on a $\text{mod}(\omega)_{a\mu} = a^n \text{mod}(\omega)_\mu$.

Soit A une partie de X . Pour que A soit localement négligeable (10.1.3), il faut et il suffit que, pour tout ouvert U de X et toute forme différentielle ω de degré maximum sur U qui est localement de module intégrable, l'ensemble $A \cap U$ soit localement négligeable pour la mesure $\text{mod}(\omega)_\mu$.

Supposons de plus X paracompacte et soit ν une mesure sur X appartenant à la classe d'équivalence canonique M (10.1.4). La mesure $\text{mod}(\omega)_\mu$ est de base ν (INT, V, § 5, n° 2, déf. 2). Pour que $\text{mod}(\omega)_\mu$ appartienne à M , il faut et il suffit que l'ensemble des $x \in X$ tels que $\omega(x) = 0$ soit localement négligeable.

10.1.7. *Exemple.* — Soit G un groupe de Lie sur K , de dimension finie n , et soit ω une forme différentielle de degré n sur G , invariante par les translations à gauche, et non nulle. La mesure $\text{mod}(\omega)_\mu$ correspondante est alors une *mesure de Haar* à gauche sur le groupe localement compact G .

Lorsque G est le groupe multiplicatif K^* , on peut prendre pour ω la forme dx/x , et l'on a $\text{mod}(\omega)_\mu = (\text{mod})^{-1} \cdot \mu$, cf. INT, VII, § 1, n° 10, prop. 14.

10.2. Orientations

Rappelons que, dans ce numéro et les suivants, on suppose $K = \mathbb{R}$.

10.2.1 (« Orientation d'un espace vectoriel réel »). Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n . On note $\text{Or}(E)$ l'ensemble des orientations de E (A, VI, § 2, n° 7); les éléments de $\text{Or}(E)$ sont les deux demi-droites fermées de l'espace vectoriel $\det(E) = \bigwedge^n E$. Si $\xi \in \text{Or}(E)$, l'autre élément de $\text{Or}(E)$ est appelé l'orientation *opposée* à ξ , et noté $-\xi$.

Soit $0 \rightarrow E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \rightarrow 0$ une suite exacte d'espaces vectoriels (réels) de dimension finie; posons $p' = \dim E'$, $p'' = \dim E''$ et soit ξ' (resp. ξ'') une orientation de E' (resp. E''). On note $\xi' \xi''$ (resp. $\xi'' \xi'$) l'orientation de E contenant un $(p' + p'')$ -vecteur non nul $u' \wedge u''$ (resp. $u'' \wedge u'$), où u' est l'image par $\bigwedge^{p'} \alpha$ d'un p' -vecteur de E' appartenant à ξ' et où u'' est un p'' -vecteur de E dont l'image par $\bigwedge^{p''} \beta$ appartient à ξ'' (cf. A, VI, § 2, n° 7). Si $E = E' \times E''$, α et β étant les applications canoniques, on dit que $\xi' \xi''$ est la *produit* de l'orientation ξ' et de l'orientation ξ'' .

10.2.2 (« Espace des orientations »). Soient B un espace topologique et M un fibré vectoriel réel de base B (au sens topologique — cf. § 6, p. 61, Note (*)), de rang fini

(7.1.6). Soit Or_M l'ensemble somme des $\text{Or}(M_b)$, pour $b \in B$, et soit $\pi: \text{Or}_M \rightarrow B$ l'application telle que $\pi(\text{Or}(M_b)) = \{b\}$. Il existe sur Or_M une structure d'espace topologique et une seule telle que:

a) π soit continue.

b) Si s est une section continue et partout non nulle de $\det(M)$ sur un ouvert U de B , et si $\xi(s(b))$ est l'orientation de M_b définie par l'élément $s(b)$ de $\det(M_b)$, l'application $b \mapsto \xi(s(b))$ de U dans Or_M est continue.

L'espace Or_M s'appelle *l'espace des orientations* de M . Le groupe $\{\pm 1\}$ opère sur Or_M par $\xi \mapsto \pm \xi$ (10.2.1). Le quadruplet $(\text{Or}_M, \{\pm 1\}, B, \pi)$ est une *fibration principale* (6.2.1) de base B et de groupe structural $\{\pm 1\}$; la projection $\pi: \text{Or}_M \rightarrow B$ définit un isomorphisme de $\text{Or}_M/\{\pm 1\}$ sur B , cf. n° 6.2.

Lorsque B est muni d'une structure de variété, on munit Or_M de la structure de variété image inverse de celle de B par π (5.8.1); la fibration définie ci-dessus est alors une fibration de variétés et le morphisme π est étale.

10.2.3. Conservons les hypothèses de 10.2.2. On appelle *orientation* du fibré vectoriel M une section continue $\xi: B \rightarrow \text{Or}_M$ de la projection $\pi: \text{Or}_M \rightarrow B$. On dit que M est *orientable* s'il possède une orientation; il revient au même de dire que le fibré Or_M est trivialisable, i.e. isomorphe à $B \times \{\pm 1\}$. Si B est connexe non vide, tout fibré vectoriel orientable de base B possède deux orientations, opposées l'une de l'autre.

Lorsque M est réduit à 0, le fibré $\det(M)$ est le fibré trivial \mathbf{R}_B et Or_M s'identifie à $\text{Or}(\mathbf{R}) \times B$; le fibré M possède une *orientation canonique*, correspondant à la demi-droite positive de \mathbf{R} .

10.2.4 (« Orientation d'une variété »). Soit X une variété localement de dimension finie sur \mathbf{R} de classe C^r , et soit $T(X)$ son fibré tangent. On note \tilde{X} la variété $\text{Or}_{T(X)}$; le groupe $\{\pm 1\}$ opère proprement et librement sur \tilde{X} et $\tilde{X}/\{\pm 1\}$ s'identifie à X ; les fibres de la projection $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ sont les ensembles $\text{Or}(T_x(X))$, pour $x \in X$. On appelle *orientation* de X une orientation du fibré $T(X)$, autrement dit une section continue du fibré \tilde{X} ; une telle section est de classe C^r . On dit que X est *orientable* si elle possède une orientation. Toute variété de dimension zéro est orientable et possède une orientation canonique (10.2.3).

Soit $\xi \in \tilde{X}$ et soit $x = \pi(\xi)$ son image dans X ; l'application $T_\xi(\pi): T_\xi(\tilde{X}) \rightarrow T_x(X)$ est un isomorphisme; elle permet d'identifier ξ à un élément $\tilde{\xi}$ de $\text{Or}(T_x(X))$. L'application $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ est une *orientation* de \tilde{X} , dite canonique; en particulier, \tilde{X} est orientable.

10.2.5 (« Orientation d'un morphisme »). Soient X et Y deux variétés localement de dimension finie et soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés. On appelle *orientation* de f un morphisme $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

et compatible avec l'action du groupe $\{\pm 1\}$.

Si \tilde{f} est une orientation de f et si η est une orientation de Y , il existe une orientation ξ et une seule de X telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \uparrow \xi & & \uparrow \eta \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

soit commutatif. On dit que ξ est associée à η par \tilde{f} .

Exemples

a) Si Y est réduite à un point, une orientation de f équivaut à une orientation de X .

b) Supposons f étale. Pour tout $x \in X$, l'application $T_x(f)$ est un isomorphisme de $T_x(X)$ sur $T_{f(x)}(Y)$, et définit (par transport de structure) une bijection

$$\tilde{f}_x: \text{Or}(T_x(X)) \rightarrow \text{Or}(T_{f(x)}(Y)).$$

La famille des \tilde{f}_x définit une orientation $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ de f , dite canonique.

c) Plus généralement, supposons que f soit une *submersion*, et soit α une orientation du fibré $T(X/Y)$ (8.1.3). Soient $x \in X$ et ξ une orientation de $T_x(X)$. Posons $y = f(x)$; on a une suite exacte (8.1.3)

$$0 \rightarrow T_x(X/Y) \rightarrow T_x(X) \xrightarrow{T_x(f)} T_y(Y) \rightarrow 0$$

et il existe donc une orientation $\tilde{f}_\alpha(\xi)$ de $T_y(Y)$ et une seule telle que $\xi = \tilde{f}_\alpha(\xi)\alpha(x)$ (10.2.1). L'application $\tilde{f}_\alpha: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ est une orientation de f , dite associée à α . L'application $\alpha \mapsto \tilde{f}_\alpha$ est une bijection de l'ensemble des orientations de $T(X/Y)$ sur l'ensemble des orientations de f .

d) Si $f: X \rightarrow Y$ est une immersion, les orientations de f correspondent aux orientations du fibré normal à f .

10.2.6 (« Orientation d'un produit »). Soient X_1 (resp. X_2) une variété localement de dimension finie et ξ_1 (resp. ξ_2) une orientation de X_1 (resp. X_2). Soit $X = X_1 \times X_2$. L'application $(x_1, x_2) \mapsto \xi_1(x_1)\xi_2(x_2)$ (10.2.1) est une orientation de $X_1 \times X_2$, appelée *produit* des orientations ξ_1 et ξ_2 , et notée $\xi_1\xi_2$, ou $\xi_1 \otimes \xi_2$.

Supposons que X_i ($i = 1, 2$) soit pure de dimension n_i . L'isomorphisme canonique $X_1 \times X_2 \rightarrow X_2 \times X_1$ transforme $\xi_1 \otimes \xi_2$ en $\xi_2 \otimes \xi_1$ (resp. en $-\xi_2 \otimes \xi_1$) si l'un des n_i est pair (resp. si n_1 et n_2 sont impairs).

10.2.7 (« Cas complexe »). Soit F un espace vectoriel complexe de dimension finie et soit $F_{\mathbf{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent. Soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base de F ; alors $\{e_1, ie_1, e_2, ie_2, \dots, e_m, ie_m\}$ est une base de $F_{\mathbf{R}}$ et l'orientation de $F_{\mathbf{R}}$ définie par le $2m$ -vecteur

$$e_1 \wedge ie_1 \wedge e_2 \wedge ie_2 \wedge \dots \wedge e_m \wedge ie_m$$

est indépendante du choix de la base $\{e_1, \dots, e_m\}$ de F ; on dit que c'est l'*orientation de $F_{\mathbf{R}}$ définie par la structure complexe donnée*. Si F est somme directe de deux sous-espaces G et H , l'orientation de $F_{\mathbf{R}} = G_{\mathbf{R}} \oplus H_{\mathbf{R}}$ est le produit des orientations de $G_{\mathbf{R}}$ et $H_{\mathbf{R}}$.

Soit X une variété réelle localement de dimension finie, munie d'une structure presque complexe (8.8.3). Pour tout $x \in X$, soit $\xi(x)$ l'orientation de $T_x(X)$ définie par sa structure complexe. L'application $x \mapsto \xi(x)$ est une orientation de X , dite définie par la structure presque complexe. En particulier, nous munirons la variété analytique réelle X sous-jacente à une variété analytique complexe X^c , localement de dimension finie, de l'orientation définie par la structure presque complexe associée (8.8.6). Si l'on remplace la structure de variété analytique complexe donnée sur X par sa conjuguée (5.4.12.b)), cette orientation est multipliée par la fonction $x \mapsto (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} X^c}$.

10.2.8. Exemples

a) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. La variété analytique réelle définie par E (5.2.2) est orientable. Plus précisément, l'application $\xi \mapsto \xi(0)$ est une bijection de l'ensemble des orientations de cette variété sur $\text{Or}(E)$.

En particulier, la variété \mathbb{R}^n a une orientation canonique ξ^n définie par la demi-droite $\mathbf{R}_+ e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ de $\text{Or}(\mathbb{R}^n)$.

b) Soit X une *sphère* de centre 0 et de rayon > 0 dans \mathbb{R}^n ; c'est une sous-variété de \mathbb{R}^n . Pour tout $x \in X$, l'espace $T_x(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ est somme directe de la droite $\mathbf{R}x$ et de l'hyperplan $T_x(X)$. Soit η_x l'orientation $\mathbf{R}_+ x$ de $\mathbf{R}x$ (« normale extérieure ») et soit ξ_x l'unique orientation de $T_x(X)$ telle que le produit de η_x et ξ_x soit l'orientation ξ^n de \mathbb{R}^n . L'application $x \mapsto \xi_x$ est une orientation de X , dite canonique.

c) Soit X une variété connexe, et soit G un groupe discret opérant proprement et librement sur X . Pour que X/G soit orientable, il faut et il suffit que X soit orientable et que l'action de G sur l'ensemble des orientations de X soit triviale.

d) L'espace projectif réel $P_{n-1}(\mathbb{R})$ s'identifie au quotient de la sphère S_{n-1} par le groupe $\{\pm 1\}$ opérant par $x \mapsto \pm x$; il est orientable si n est pair, et non orientable si n est impair.

e) Tout quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe de Lie *connexe* est orientable.

10.3. Formes différentielles M-tordues

10.3.1. Soit X une variété réelle de classe C^r , et soit M un fibré vectoriel de base X , de rang fini et de classe C^k , avec $0 \leq k \leq r$. Soit $\lambda_M = (\text{Or}_M, \{\pm 1\}, X, \pi)$ la fibration principale associée à la variété des orientations de M (10.2.2). Faisons opérer le groupe structural $\{\pm 1\}$ sur \mathbf{R} par multiplication. On note $\tilde{\mathbf{R}}_M$ l'espace fibré associé à λ_M de fibre type \mathbf{R} (muni de la loi d'opération définie ci-dessus) (6.5.1); il est muni (7.10.2) d'une structure de fibré vectoriel de base X , de rang 1 et de classe C^k ; on l'appelle *fibré des scalaires M-tordus*.

10.3.2. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Or}_M \times \mathbf{R} & \xrightarrow{\rho} & \tilde{\mathbf{R}}_M \\
 \text{pr}_1 \downarrow & \nearrow \varphi & \downarrow p \\
 \text{Or}_M & \xrightarrow{\pi} & X
 \end{array}$$

où p désigne la projection canonique de $\tilde{\mathbf{R}}_M$ sur X , ρ l'application repère (6.5.1) de $\tilde{\mathbf{R}}_M$ et où $\varphi(\xi) = \rho(\xi, 1)$ pour $\xi \in \text{Or}_M$. En particulier, l'image réciproque du fibré $\tilde{\mathbf{R}}_M$ par π s'identifie au fibré trivial $\text{Or}_M \times \mathbf{R}$. On identifie également un élément ξ de Or_M à son image dans $\tilde{\mathbf{R}}_M$ par φ ; avec cette convention, on a $\rho(\xi, a) = a\xi$ pour tout $(\xi, a) \in \text{Or}_M \times \mathbf{R}$; on a $a\xi = b\eta$ si et seulement s'il existe $e \in \{\pm 1\}$ tel que $b = ea$ et $\eta = e\xi$. Une *orientation* ξ de M définit ainsi une section $x \mapsto \xi(x)$ de $\tilde{\mathbf{R}}_M$.

Il existe un isomorphisme j et un seul de $\tilde{\mathbf{R}}_M \otimes \tilde{\mathbf{R}}_M$ sur le fibré trivial $\mathbf{R}_X = X \times \mathbf{R}$ tel que $j(\xi \otimes \xi) = (\pi(\xi), 1)$ pour tout $\xi \in \text{Or}_M$; cela permet d'identifier le fibré vectoriel $\tilde{\mathbf{R}}_M$ à son dual.

10.3.3. Soit de plus F un fibré vectoriel de base X et de classe C^{r-1} . Une forme différentielle sur X à valeurs dans $\tilde{\mathbf{R}}_M \otimes F$ est appelée une *forme différentielle M-tordue à valeurs dans F*. Une telle forme de degré p est une section du fibré $\text{Alt}^p(T(X); \tilde{\mathbf{R}}_M \otimes F)$, qu'on identifie de façon évidente à $\tilde{\mathbf{R}}_M \otimes \text{Alt}^p(T(X); F)$. Lorsque F est le fibré trivial défini par un espace de Banach E , on parle simplement de forme M-tordue à valeurs dans E ; lorsque $E = \mathbf{C}$ (resp. \mathbf{R}), on dit forme M-tordue complexe (resp. forme M-tordue réelle, ou forme M-tordue).

Soit ω une forme M-tordue de degré p à valeurs dans F . Le fait que $\pi: \text{Or}_M \rightarrow X$ soit étale et que $\pi^*(\tilde{\mathbf{R}}_M) = \text{Or}_M \times \mathbf{R}$ permet d'identifier $\pi^*(\tilde{\mathbf{R}}_M \otimes \text{Alt}^p(T(X); F))$ à $\text{Alt}^p(T(\text{Or}_M); \pi^*(F))$ et ω définit une section $\tilde{\omega}$ de $\text{Alt}^p(T(\text{Or}_M); \pi^*(F))$ (7.4.3), autrement dit, une forme différentielle de degré p sur Or_M à valeurs dans $\pi^*(F)$. On obtient ainsi une bijection de l'espace des formes M-tordues de degré p sur X à valeurs dans F , sur l'espace des formes $\tilde{\omega}$ de degré p sur Or_M à valeurs dans $\pi^*(F)$ telles que

$$\tilde{\omega}(-\xi) = -\tilde{\omega}(\xi) \quad \text{pour tout } \xi \in \text{Or}_M.$$

Lorsque M est muni d'une *orientation* ξ , l'application $\omega \mapsto \xi \otimes \omega$ permet d'identifier les sections de $\text{Alt}^p(T(X); F)$ (autrement dit les formes différentielles de degré p usuelles) aux formes M-tordues de degré p à valeurs dans F .

10.3.4. Soit ω une forme différentielle M-tordue de degré p sur X , à valeurs dans un espace de Banach E , et de classe C^s ($1 \leq s \leq \inf(k, r-1)$). Il existe une forme différentielle M-tordue $d\omega$, de degré $p+1$ sur X , à valeurs dans E , et une seule telle que, quels que soient l'ouvert U de X , l'orientation ξ de $M|U$ et la forme différentielle α sur U tels que $\omega|U = \xi \otimes \alpha$, on ait $d\omega|U = \xi \otimes d\alpha$. La forme $d\omega$ est de classe C^{s-1} ; on l'appelle la *différentielle extérieure* de ω .

Si l'on note $\tilde{\omega}$ (resp. $\tilde{d\omega}$) la forme différentielle sur Or_M correspondant à ω (resp. à $d\omega$) comme en 10.3.3, on a $d(\tilde{\omega}) = \tilde{d\omega}$.

Si ζ est un champ de vecteurs de classe C^s sur X , on définit de manière analogue la forme M-tordue $\theta_\zeta \cdot \omega$. On a

$$\theta_\zeta \cdot \omega = d(i(\zeta)\omega) + i(\zeta)d\omega$$

et $\theta_\zeta \cdot \omega$ est de classe C^{s-1} .

10.4. Mesure associée à une forme différentielle tordue

Rappelons que, dans ce numéro, on suppose $K = \mathbf{R}$ et que toutes les variétés considérées sont localement de dimension finie.

10.4.1. Soit X une variété de classe C^r . On peut appliquer les définitions et résultats de 10.3 en prenant pour fibré vectoriel M le *fibré tangent* $T(X)$. On a alors $\text{Or}_M = \tilde{X}$ (10.2.4); on note \tilde{R}_X et on appelle simplement *fibré des scalaires tordus* le fibré $\tilde{R}_{T(X)}$ (10.3.1)⁽¹⁾; une forme différentielle $T(X)$ -tordue à valeurs dans un fibré vectoriel F est appelée simplement une *forme différentielle tordue* (ou *impaire*) à valeurs dans F . Lorsque X est muni d'une *orientation*, l'application $\omega \mapsto \xi \otimes \omega$ permet d'identifier les formes différentielles usuelles (parfois appelées « paires ») aux formes tordues.

10.4.2. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés de classe C^r et soit $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ une orientation de f (10.2.5). Il existe un isomorphisme j et un seul de $f^*(\tilde{R}_Y)$ sur \tilde{R}_X tel que $\tilde{x} = j(\pi(\tilde{x}), \tilde{f}(\tilde{x}))$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{X}$. On identifie ces deux fibrés grâce à j . Si ω est une forme tordue de degré p sur Y à valeurs dans un fibré vectoriel F , l'image réciproque $f^*(\omega)$ s'identifie à une forme différentielle tordue de degré p sur X à valeurs dans $f^*(F)$. Si l'on note $\tilde{\omega}$ (resp. $\tilde{f}^*(\omega)$) la forme différentielle sur \tilde{Y} (resp. \tilde{X}) correspondant à ω (resp. $f^*(\omega)$) comme en 10.3.3, on a $\tilde{f}^*(\tilde{\omega}) = \tilde{f}^*(\omega)$.

Lorsque F est le fibré trivial défini par un espace de Banach, l'opération f^* commute à la différentiation extérieure (10.3.4).

10.4.3. Soit X une variété *pure de dimension* n , et soit ω une forme différentielle tordue de degré n sur X , à valeurs dans un espace de Banach E . Soit $c = (U, \varphi, \mathbb{R}^n)$ une carte de X et soit ξ^n l'orientation canonique de \mathbb{R}^n ; notons u^1, \dots, u^n les fonctions coordonnées sur \mathbb{R}^n . Il existe une fonction f_c et une seule sur $\varphi(U)$, à valeurs dans E , telle que

$$\omega|_U = \varphi^*(\xi^n \otimes f_c \cdot du^1 \wedge \dots \wedge du^n).$$

On dit que ω est *localement intégrable* si, pour toute carte $c = (U, \varphi, \mathbb{R}^n)$ de X , la fonction f_c correspondante est localement intégrable par rapport à $\lambda_{\varphi(U)}^{\otimes n}$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}). Supposons que ce soit le cas et que X soit *séparée*. Il existe sur X une mesure vectorielle $\alpha(\omega)$ à valeurs dans E et une seule possédant la propriété suivante: pour toute carte $c = (U, \varphi, \mathbb{R}^n)$ de X , l'image par φ de la restriction à U de la mesure $\alpha(\omega)$ est la mesure $f_c \cdot \lambda_{\varphi(U)}^{\otimes n}$ (INT, VI, § 2, n° 4). On dit que $\alpha(\omega)$ est la *mesure définie par* ω et on la note le plus souvent simplement ω . Le support de $\alpha(\omega)$ est contenu dans le support $\text{Supp } \omega$ de ω (en appelant *support* d'une forme différentielle ω l'adhérence de l'ensemble des $x \in X$ tels que $\omega(x) \neq 0$).

Si f est une fonction réelle sur X , localement intégrable pour la mesure $\alpha(\omega)$, alors la forme différentielle $f\omega$ est localement intégrable et l'on a $\alpha(f\omega) = f \cdot \alpha(\omega)$.

Si g est une fonction réelle sur X essentiellement intégrable pour $\alpha(\omega)$, son intégrale se note généralement $\int_X g\omega$, ou $\int g\omega$, ou $\int g(x)\omega(x)$; on évite de la noter $\int g d\omega$, à cause des risques de confusion avec la différentielle extérieure $d\omega$ de ω , qui est définie (et d'ailleurs égale à 0) si ω est de classe C^1 . Si A est une partie de X dont la fonction caractéristique φ_A est essentiellement intégrable pour $\alpha(\omega)$, l'intégrale de φ_A se note

¹ On prendra garde que cette notation est contradictoire avec la notation \tilde{R}_M lorsque l'on considère X comme munie de sa structure de fibré vectoriel de rang 0 sur elle-même.

$\int_A \omega$. Si la constante 1 est essentiellement intégrable pour ω , on dit que ω est *intégrable*.

Soit maintenant p un entier, avec $0 \leq p \leq n$, et soit ω une forme différentielle tordue de degré p sur X , à valeurs dans un espace de Banach E . Soit de plus Y une sous-variété pure de dimension p de X ; supposons que l'injection canonique $i: Y \rightarrow X$ soit munie d'une *orientation*. L'image réciproque $i^*(\omega)$ (10.4.2) se note alors parfois $\omega|_Y$. Si $\omega|_Y$ est intégrable, on pose

$$\int_Y \omega = \int_Y \omega|_Y.$$

10.4.4. Soit X une variété pure de dimension n , munie d'une *orientation* ξ . L'identification $\omega \mapsto \xi \otimes \omega$ entre formes différentielles usuelles et formes différentielles tordues permet d'appliquer ce qui précède aux formes de degré n sur X ; ainsi, à toute forme localement intégrable ω , de degré n , est associée une mesure sur X , notée encore ω . Si $E = \mathbf{R}$, une telle forme ω est localement de module intégrable (10.1.5) et la mesure $\text{mod}(\omega)_\mu$ correspondante (10.1.6) n'est autre que la *valeur absolue* $|\omega|$ de la mesure ω (INT, III, § 1, n° 6).

10.4.5. *Exemple*. — Soit X une variété réelle pure de dimension 1, orientée, séparée, et soit $z: X \rightarrow \mathbf{C}$ une application différentiable de X dans \mathbf{C} . La forme différentielle complexe dz définit sur X une *mesure complexe* également notée dz . Ceci s'applique notamment lorsque X est une sous-variété différentielle pure de dimension 1 de \mathbf{C} , z étant l'injection de X dans \mathbf{C} .

Plus particulièrement, prenons pour X un *cercle* de centre 0 et de rayon $\rho > 0$; orientons X comme indiqué dans 10.2.8, *b*), compte tenu de l'identification usuelle de \mathbf{C} avec \mathbf{R}^2 ; si $x \in X$, l'espace tangent $T_x(X)$ s'identifie à la droite $\mathbf{R}ix$ de $T_x(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$ et l'orientation choisie est la demi-droite \mathbf{R}_+ix . Si f est une fonction continue sur X , à valeurs dans un espace de Banach complexe, l'intégrale de f pour la mesure dz est donnée par la formule

$$\int_X f(z) dz = i\rho \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\alpha}) e^{i\alpha} d\alpha.$$

Par exemple, si n est un entier, on a

$$\int_X z^n dz = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\alpha} d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

10.4.6 (« Cas complexe »). Soit X^c une variété analytique complexe séparée, pure de dimension m , et soit ω une forme différentielle holomorphe de degré m sur X^c . Soit X la variété analytique réelle sous-jacente à X^c ; la forme ω s'identifie à une forme de type $(m, 0)$ sur X (8.8.9); soit $\bar{\omega}$ sa conjuguée (8.8.2). La forme $i^{m^2}\omega \wedge \bar{\omega}$ est une forme différentielle *réelle* de degré $2m$ sur X ; compte tenu de l'orientation canonique de X (10.2.7), cette forme s'identifie à une mesure sur X , qui n'est autre que la *mesure positive* $\text{mod}(\omega)_\mu$ définie en 10.1.6, où μ est la mesure définie par la forme différentielle

$i dz \wedge \overline{dz}$, autrement dit le double de la mesure de Lebesgue $\lambda^{\otimes 2}$ sur \mathbf{C} (identifié à \mathbf{R}^2 de la manière usuelle).

Soit H l'espace des formes holomorphes ω de degré m sur X^c telles que la mesure $\omega \wedge \bar{\omega}$ soit bornée. Pour α, β dans H , la mesure complexe $\alpha \wedge \bar{\beta}$ est bornée; en posant

$$(\alpha|\beta) = i^{m^2} \int_X \alpha \wedge \bar{\beta},$$

on obtient une forme hermitienne sur H , qui fait de H un *espace de Hilbert*.

§ 11. Formule de Stokes

Dans ce paragraphe, on suppose $K = \mathbb{R}$.

11.1. Pièces

11.1.1. Soit E un espace de Banach. Une partie S de E est appelée un *demi-espace fermé* s'il existe une forme linéaire continue $h \neq 0$ et un nombre réel k tels que $S = \{x | h(x) \leq k\}$ (cf. EVT, II, § 2, n° 6); la frontière de S est alors l'hyperplan fermé $\{x | h(x) = k\}$; on l'appelle également le *bord* de S , et on le note ∂S .

11.1.2. Soient X une variété de classe C^r et A une partie de X . On dit que A est une *pièce* de X si, pour tout $a \in A$, il existe une carte $c = (U, \varphi, E)$ de X en a telle que $\varphi(A \cap U)$ soit un ouvert d'un demi-espace fermé de E . On pose $\partial A = A - \mathring{A}$ (ensemble des points non intérieurs de A). C'est une *sous-variété* de A , que l'on appelle le *bord* de A .⁽¹⁾ Si $a \in \partial A$, il existe une carte $c = (U, \varphi, E)$ de X centrée en a et un hyperplan fermé H de E tels que $\varphi(A \cap U)$ soit un voisinage ouvert de 0 dans un des demi-espaces fermés S_c de E définis par H (EVT, II, § 2, n° 6), et que $\varphi(\partial A \cap U) = H \cap \varphi(A \cap U)$. Une telle carte est dite *adaptée* à A en a . Le demi-espace fermé S_c est alors l'unique demi-espace fermé de E dont $\varphi(A \cap U)$ soit un ouvert.

Pour qu'une partie fermée A de X soit une pièce de X , il faut et il suffit que \mathring{A} soit dense dans A et que $A - \mathring{A}$ soit une sous-variété de X de codimension 1 en chacun de ses points.

11.1.3. Exemples

a) Dans \mathbb{R}^n , une boule fermée de rayon > 0 est une pièce; son bord est la sphère correspondante.

b) Si A est une pièce de la variété X et si B est une partie *fermée* de ∂A , alors $A - B$ est une pièce de X .

c) Soit $\varphi: X \rightarrow X'$ un morphisme de variétés de classe C^r , et soit A' une pièce de X' . Si φ est transversal à $\partial A'$ (5.11.6), $\varphi^{-1}(A')$ est une pièce de X dont le bord est $\varphi^{-1}(\partial A')$.

¹ Cette terminologie provient de ce que A est naturellement muni d'une structure de « variété à bord », de bord ∂A . Pour la définition de cette catégorie, ainsi que pour celle, plus générale, de la catégorie des « variétés à bord anguleux », le lecteur pourra se reporter à H. CARTAN, Séminaire 1961/62, *Topologie Différentielle*, exposés 1-2-3 (par A. DOUADY), Benjamin, New York, 1969. Signalons qu'on peut montrer que toute « variété à bord » dont le bord est paracompact est isomorphe à une pièce fermée d'une variété.

En particulier, soit $h: X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^r , et soit $a \in \mathbf{R}$; supposons qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $h(x) = a$ et $d_x h = 0$. L'ensemble $\{x | h(x) \leq a\}$ est une pièce fermée de X de bord $h^{-1}(a)$.

d) Si $r = \infty$ et si X est localement compacte, tout compact de X admet un système fondamental de voisinages formé de pièces compactes.

11.1.4. Soient X une variété de classe C^r et A une pièce de X . Soient $a \in \partial A$ et $v \in T_a(X)$. Soit $c = (U, \varphi, E)$ une carte de X adaptée à A en a (11.1.2) et soit $h = \theta_c^{-1}(v)$ l'élément de E correspondant à v (5.5.1). Soit S_c le demi-espace fermé de E dont $\varphi(A \cap U)$ est un ouvert (11.1.2). On dit que v est un *vecteur rentrant* (resp. *strictement rentrant*, resp. *sortant*, resp. *strictement sortant*) pour A en a si h appartient à S_c (resp. \dot{S}_c , $-S_c$, $-\dot{S}_c$), condition qui est indépendante du choix de la carte adaptée c . On note $T_a^+(A)$ (resp. $T_a^-(A)$) l'ensemble des vecteurs sortants (resp. rentrants) de $T_a(X)$ pour A . Ce sont des demi-espaces fermés de $T_a(X)$, dont le bord contient 0. On a

$$T_a(\partial A) = T_a^+(A) \cap T_a^-(A).$$

11.2. Formule de Stokes pour les pièces

Dans ce n°, on désigne par X une variété de classe C^r ($r \geq 2$) pure de dimension finie n et séparée. On désigne par A une pièce de X et par i l'injection canonique de ∂A dans X . On désigne par E un espace de Banach.

11.2.1. Soit $x \in \partial A$ et soit ξ une orientation de $T_x(\partial A)$; on note $\tilde{i}_x(\xi)$ l'orientation de $T_x(X)$ contenant les éléments $v \wedge u$, où v est un vecteur strictement sortant pour A en x (11.1.4) et où u est un élément non nul de $\bigwedge^{n-1} T_x(\partial A)$ appartenant à l'orientation ξ . L'application \tilde{i}_x est une bijection de $\text{Or}(T_x(\partial A))$ sur $\text{Or}(T_x(X))$. Les applications \tilde{i}_x pour $x \in \partial A$, définissent un morphisme $\tilde{i}: \tilde{\partial A} \rightarrow \tilde{X}$ qui est une *orientation* de i (10.2.5). Si ξ est une orientation de X , l'orientation de ∂A associée à ξ par \tilde{i} (10.2.5) est dite *définie par ξ* .

Exemple. — Lorsque $X = \mathbf{R}^n$, que ξ est l'orientation usuelle de \mathbf{R}^n et que A est une boule fermée de rayon > 0 , l'orientation de la sphère ∂A définie par ξ est l'orientation canonique (10.2.8, b)).

11.2.2. Soit ω une forme différentielle tordue de degré p sur X à valeurs dans E (10.4.1); l'image réciproque $i^*(\omega)$ de ω par le morphisme orienté $i: \partial A \rightarrow X$ se note $\omega|_{\partial A}$ et s'appelle la *forme induite* par ω sur ∂A (cf. 10.4.3).

11.2.3. Faisons l'une des deux hypothèses suivantes:

- (i) ω est une forme différentielle tordue de degré $n - 1$ sur X , à valeurs dans E ;
- (ii) X est orientée, ∂A est munie de l'orientation correspondante (11.2.1) et ω est une forme différentielle de degré $n - 1$ sur X à valeurs dans E .

Supposons de plus que ω soit de classe C^1 et que l'intersection de A et du support de ω soit compacte. La différentielle extérieure $d\omega$ de ω est continue (8.3.5 et 10.3.4).

La fonction caractéristique de A est essentiellement intégrable pour la mesure vectorielle définie par $d\omega$ sur X et la forme différentielle $\omega|_{\partial A}$ de degré $n-1$ sur ∂A est intégrable (10.4.3 et 10.4.4). On a

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega \quad (\text{« formule de Stokes »}).$$

11.2.4. Soit α une forme différentielle tordue de degré n sur X à valeurs dans E , à support compact, et de classe C^1 . Pour qu'il existe une forme différentielle tordue ω de degré $n-1$ sur X , à valeurs dans E , à support compact et de classe C^1 , telle que $\alpha = d\omega$, il est nécessaire que $\int_X \alpha = 0$; si X est connexe, cette condition est suffisante; si de plus α est de classe C^k ($k \leq r-1$, $k \neq \omega$), on peut choisir ω de classe C^k .

11.2.5. Supposons que X soit la variété réelle sous-jacente à C , que E soit un espace de Banach complexe et que A soit une pièce compacte de X . Munissons X de l'orientation définie par sa structure complexe (10.2.7). Soit f une application continue de A dans E dont la restriction à l'intérieur \mathring{A} de A est holomorphe. Notons dz la différentielle de l'injection $z: \partial A \rightarrow C$. La forme $f \cdot dz$, produit de f et de dz , est une forme différentielle de degré 1 sur ∂A , à valeurs dans E , de classe C^0 , et l'on a :

$$\int_{\partial A} f \cdot dz = 0 \quad (\text{« formule de Cauchy »}).$$

Lorsque f se prolonge en une application holomorphe, notée encore f , d'un voisinage ouvert U de A , à valeurs dans E , la forme différentielle $f \cdot dz$ (où z désigne cette fois l'injection canonique de U dans C) est de classe C^ω sur U et sa différentielle extérieure est nulle.

11.2.6 (« Dérivée d'une intégrale »). Supposons X orientée. Soit Y une variété de classe C^r , et soit α une forme différentielle de degré n sur Y , à valeurs dans E , de classe C^1 , et à support compact. Soit I un ouvert de \mathbb{R} contenant 0 et soit $g: I \times X \rightarrow Y$ un morphisme de classe C^r ; pour $t \in I$, notons g_t l'application $x \mapsto g(t, x)$ de X dans Y . Notons ψ le morphisme de X dans $T(Y)$ défini par $\psi(x) = T_{(0, x)}(g)(1, 0)$; c'est un relèvement de g_0 (8.6.5). Supposons que la restriction de $\text{pr}_1: I \times A \rightarrow I$ à l'intersection de $I \times A$ et du support de $g^*(\alpha)$ soit propre (TG, I, § 10). Pour tout $t \in I$, l'intersection de A et du support de $g_t^*(\alpha)$ est alors compacte; l'application $t \mapsto \int_A g_t^*(\alpha)$ est de classe C^1 sur I et sa dérivée à l'origine est donnée par la formule

$$\frac{d}{dt} \left(\int_A g_t^*(\alpha) \right)_{t=0} = \int_A \theta_\psi \cdot \alpha = \int_A i(\psi) d\alpha + \int_{\partial A} i(\psi) \alpha,$$

cf. n° 8.6.

11.3. Formule de Stokes pour les ensembles localement polyédraux ⁽¹⁾

Dans ce n°, X désigne une variété réelle pure de dimension finie n de classe C^r ($r \geq 2$); on suppose X séparée.

¹ Le lecteur qui s'intéresse à des cas plus généraux pourra consulter H. WHITNEY, *Geometric Integration Theory*, Chap. III, § 18 (Princeton Univ. Press, 1957).

11.3.1. Soit A une partie d'un espace vectoriel réel de dimension finie. On dit que A est *polyédrale* si elle est réunion finie d'intersections finies de demi-espaces fermés.

Une partie A de X est dite *localement polyédrale* si, pour tout $x \in X$, il existe une carte $c = (U, \varphi, E)$ de X en x et une partie polyédrale A_c de E telles que $\varphi(A \cap U) = \varphi(U) \cap A_c$. Une pièce de X est une partie localement polyédrale.

11.3.2. Soit A une partie fermée de X , et soit $\text{Fr}(A) = A - \mathring{A}$ sa frontière. Un point $x \in \text{Fr}(A)$ est dit *régulier* s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que $A \cap U$ soit une pièce de la variété U (auquel cas x appartient au bord de $A \cap U$). On note ∂A l'ensemble des points réguliers de $\text{Fr}(A)$ et on l'appelle le *bord régulier* (ou simplement le *bord*) de A . L'ensemble $A' = \mathring{A} \cup \partial A$ est une pièce de X , de bord ∂A .

11.3.3. * *Exemple.* — Soit \mathcal{H} un ensemble localement fini d'hyperplans d'un espace affine réel E de dimension finie n , et soit C une *chambre* de E relativement à \mathcal{H} (LIE, V, § 1, n° 3). L'adhérence \bar{C} de C est une partie localement polyédrale de la variété E ; le bord régulier de \bar{C} est la réunion des *faces* de C (*loc. cit.*, n° 4). En particulier, si C est un *simplexe ouvert* (*loc. cit.*, n° 6) de sommets a_0, \dots, a_n , le bord de \bar{C} est la réunion des $C_{(i)}$ ($0 \leq i \leq n$), où $C_{(i)}$ est le simplexe ouvert de sommets $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ dans l'espace affine engendré par ces sommets.*

11.3.4. Soit A une partie localement polyédrale de X , et soit ω une forme différentielle tordue de degré $n - 1$ sur X à valeurs dans un espace de Banach E ; on suppose que ω est de classe C^1 et que l'intersection de son support avec A est *compacte*. Alors, la fonction caractéristique de A (resp. A' , \mathring{A}) est essentiellement intégrable pour la mesure vectorielle définie par $d\omega$ sur X et l'on a

$$\int_A d\omega = \int_{A'} d\omega = \int_{\mathring{A}} d\omega.$$

La forme différentielle $\omega|_{\partial A}$ (pour l'orientation canonique de l'injection canonique de ∂A , considéré comme le bord de la pièce A' , dans X) est intégrable dans ∂A et l'on a

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega \quad (\text{« formule de Stokes »}).$$

Lorsque X est munie d'une *orientation*, et que l'on munit ∂A de l'orientation correspondante (11.2.1), cette formule est encore valable si ω est une forme différentielle usuelle de degré $n - 1$ à valeurs dans E , de classe C^1 et telle que $A \cap \text{Supp } \omega$ soit compact.

11.4. Formule de Stokes relative (intégration sur les fibres)

Dans ce numéro, on désigne par X et S deux variétés (réelles) de classe C^r et par $\pi: X \rightarrow S$ une *submersion*. On désigne par n un entier et on suppose que, pour tout $s \in S$, la fibre $X_s = \pi^{-1}(s)$ de π en s (qui est une sous-variété de X (5.10.5)) est *pure de dimension* n .

11.4.1. Soient E et H deux espaces vectoriels et soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie n de H . Soient p un entier ≥ 0 , u une application $(n+p)$ -linéaire alternée de H^{n+p} dans E et t_1, \dots, t_p des éléments de H/F ; soient t'_1, \dots, t'_p des représentants de t_1, \dots, t_p dans H . L'application

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto u(t'_1, \dots, t'_p, x_1, \dots, x_n)$$

est une application n -linéaire alternée de F^n dans E , qui ne dépend que de u et des t_i ; on la note $u \perp (t_1, \dots, t_p)$ (cf. A, III, p. 158 pour le cas particulier $E = K$). L'application

$$(t_1, \dots, t_p) \mapsto u \perp (t_1, \dots, t_p)$$

est p -linéaire alternée.

11.4.2 (« π -torsion »). Considérons le fibré vectoriel $T(X/S)$ sur X (8.1.3); il est de rang fini n en chaque point de X . On pose $\tilde{R}_\pi = \tilde{R}_{T(X/S)}$ (10.3.1) et $\tilde{X}_\pi = \text{Or}_{T(X/S)}$ (10.2.2). Soit $s \in S$; compte tenu de l'identification naturelle de $T(X/S)|_{X_s}$ avec $T(X_s)$ (8.1.3), la fibre en s de l'application $\tilde{\pi}: \tilde{X}_\pi \rightarrow S$ composée de π et de l'application canonique $\tilde{X}_\pi \rightarrow X$, est \tilde{X}_s (10.2.4). On appelle *forme différentielle π -tordue* sur X une forme différentielle $T(X/S)$ -tordue (10.3.3).

11.4.3 (« S -orientation d'un S -morphisme »). Soit X' une variété munie d'une submersion $\pi': X' \rightarrow S$ dont les fibres X'_s sont pures de dimension finie n' , et soit $\varphi: X' \rightarrow X$ un morphisme tel que $\pi' = \pi \circ \varphi$. On appelle *S -orientation* de φ un morphisme $\tilde{\varphi}: \tilde{X}'_\pi \rightarrow \tilde{X}_\pi$, commutant à l'action du groupe $\{\pm 1\}$ et tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}'_\pi & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{X}_\pi \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

soit commutatif. La donnée d'une S -orientation de φ permet, comme en 10.4.2, d'identifier les fibrés $\tilde{R}_{\pi'}$ et $\varphi^*(\tilde{R}_\pi)$ et de définir l'image réciproque d'une forme différentielle π -tordue par le morphisme S -orienté φ : c'est une forme différentielle π' -tordue sur X' .

11.4.4. Soit A une pièce de X telle que la restriction de π à ∂A soit une *submersion*. Pour tout $s \in S$, la fibre $X_s = \pi^{-1}(s)$ est une sous-variété de X transversale à ∂A et $A \cap X_s$ est une pièce de X_s , notée A_s , de bord $\partial A \cap X_s$.

Soit i l'injection canonique de ∂A dans X . Il existe une S -orientation \tilde{i} et une seule de i telle que, pour tout $s \in S$, la restriction de \tilde{i} à $(\partial A_s)^\sim$ (identifié à la fibre en s de la submersion $\partial \tilde{A}_{\pi|\partial A} \rightarrow S$) soit l'orientation définie en 11.2.1 de l'injection canonique de ∂A_s dans X_s . Si ω est une forme différentielle π -tordue sur X , l'image réciproque de ω par le morphisme i ainsi orienté est notée $\omega|_{\partial A}$ (cf. 11.2.2).

11.4.5 (« Produit intérieur »). Soit p un entier ≥ 0 et soit ω une forme différentielle π -tordue de degré $n + p$ sur X , à valeurs dans un fibré vectoriel E de base X . Soient $s \in S$ et $x \in X_s$; on a $\omega(x) = \xi \otimes u$, où ξ est une orientation de $T_x(X_s) = T(X/S)_x$, identifiée à un élément de $(\tilde{R}_{X_s})_x = (\tilde{R}_\pi)_x$ (10.3.2), et où u est une application $(n + p)$ -linéaire alternée de $T_x(X)$ dans E_x . Soient t_1, \dots, t_p des vecteurs tangents à S en s . Posons

$$\theta(x) = \xi \otimes (u \lrcorner (t_1, \dots, t_p)) \in (\tilde{R}_{X_s})_x \otimes (\text{Alt}^n(T(X); E))_x$$

(cf. 11.4.1). On définit ainsi une forme différentielle tordue $\theta: x \mapsto \theta(x)$ de degré n sur X_s , à valeurs dans $E|X_s$. On la note $\omega \lrcorner (t_1, \dots, t_p)$.

En particulier, soit M un fibré vectoriel de classe C^{r-1} de base S et prenons $E = \pi^*(M)$. Le fibré $E|X_s$ s'identifie naturellement au fibré trivial de base X_s défini par l'espace de Banach M_s et la forme $\omega \lrcorner (t_1, \dots, t_p)$ s'identifie à une forme différentielle tordue sur X_s , à valeurs dans M_s .

11.4.6. Conservons les notations précédentes (en particulier $E = \pi^*(M)$) et supposons de plus que X soit *séparée* et ω *continue*. Soit A une pièce de X telle que la restriction de π à ∂A soit une *submersion* et que la restriction de π à l'intersection de A et du support de ω soit *propre*. Pour $s \in S$ et t_1, \dots, t_p dans $T_s(S)$, la forme $\omega \lrcorner (t_1, \dots, t_p)$ (11.4.5) est une forme différentielle tordue de degré n sur X_s , continue, à valeurs dans l'espace de Banach M_s , et son support rencontre A_s suivant un compact. Il existe une forme différentielle α et une seule de degré p sur S , à valeurs dans le fibré vectoriel M , et telle que

$$\alpha(s)(t_1, \dots, t_p) = \int_{A_s} \omega \lrcorner (t_1, \dots, t_p)$$

quels que soient $s \in S$ et t_1, \dots, t_p dans $T_s(S)$. La forme α se note $\int_{\pi|A} \omega$ (ou simplement $\int_\pi \omega$ lorsque $A = X$); on dit qu'elle s'obtient en *intégrant* ω sur A le long des fibres de π . Si ω est de classe C^k ($0 \leq k \leq r - 1$, $k \leq \infty$), il en est de même de $\int_{\pi|A} \omega$.

Lorsque ω est une forme de degré $< n$, on convient que $\int_{\pi|A} \omega = 0$.

11.4.7. Conservons les hypothèses et notations précédentes.

a) Pour toute forme différentielle scalaire continue β sur S , on a

$$\int_{\pi|A} (\pi^*\beta) \wedge \omega = \beta \wedge \int_{\pi|A} \omega.$$

b) Soient η un champ de vecteurs continu sur X et ζ un champ de vecteurs continu sur S , tels que η soit π -lié à ζ (8.2.6). On a

$$i(\zeta) \int_{\pi|A} \omega = \int_{\pi|A} i(\eta)\omega.$$

c) Supposons de plus que η , ζ et ω soient de classe C^1 , que l'on ait $\eta(x) \in T_x(\partial A)$ pour tout $x \in \partial A$ et que M soit le fibré trivial défini par un espace de Banach E . On a

$$\theta_\zeta \cdot \int_{\pi|A} \omega = \int_{\pi|A} \theta_\eta \cdot \omega,$$

(cf. 8.4.2 et 10.3.4).

d) Si ω est de degré $n + p$ et de classe C^1 , on a

$$d\left(\int_{\pi|A} \omega\right) = \int_{\pi|A} d\omega + (-1)^p \int_{\pi|\partial A} \omega|_{\partial A}.$$

e) Supposons que S soit réduite à un point. Les formes π -tordues sur X sont alors les formes tordues ordinaires (10.4.1). Si ω est de degré n , la forme $\int_{\pi|A} \omega$ de degré 0 sur S est la constante $\int_A \omega$ (10.4.3).

11.4.8. Soit $\pi' : S \rightarrow S'$ une submersion telle que les fibres de π' soient des sous-variétés pures de dimension finie constante n' . Posons $\pi'' = \pi' \circ \pi$; c'est une submersion de X sur S' dont les fibres sont des sous-variétés pures de dimension $m = n + n'$.

Soit $x \in X$. La suite

$$0 \longrightarrow T(X/S)_x \xrightarrow{\text{Id}} T(X/S')_x \xrightarrow{T_x(\pi')} T(S/S')_{\pi(x)} \longrightarrow 0$$

est exacte. Il existe un isomorphisme j et un seul du fibré vectoriel $\tilde{\mathbf{R}}_x \otimes \pi^*(\tilde{\mathbf{R}}_{\pi'})$ sur $\tilde{\mathbf{R}}_{\pi'}$ tel que, si ξ (resp. η) est une orientation de $T(X/S)_x$ (resp. de $(\pi^*T(S/S'))_x$ identifié à $T(S/S')_{\pi(x)}$), on ait $j(\xi \otimes \eta) = \eta\xi$ (le produit étant défini par la suite exacte précédente (10.2.1)).

Soit M' un fibré vectoriel de base S' ; posons $M = \pi'^*(M')$, et $E = \pi^*(M) = \pi''^*(M')$. Si ω est une forme différentielle π'' -tordue sur X à valeurs dans E , l'isomorphisme j permet de l'identifier à une forme π -tordue à valeurs dans $\pi^*(\tilde{\mathbf{R}}_{\pi'}) \otimes E$, ou encore à valeurs dans $\pi^*(\tilde{\mathbf{R}}_{\pi'} \otimes M)$.

Soit de plus A une pièce de X telle que $\pi|_{\partial A} : \partial A \rightarrow S$ soit une submersion; il en est alors de même de $\pi'|_{\partial A} : \partial A \rightarrow S'$. Supposons en outre que ω soit *continue* et que la restriction de π'' à $A \cap \text{Supp } \omega$ soit *propre*; il en est alors de même de la restriction de π à $A \cap \text{Supp } \omega$. On peut considérer d'une part la forme différentielle $\int_{\pi'|A} \omega$ sur S' , qui est une forme à valeurs dans M' , d'autre part la forme différentielle $\int_{\pi|A} \omega$ sur S , qui est une forme à valeurs dans $\tilde{\mathbf{R}}_{\pi'} \otimes M$, ou encore une forme π' -tordue à valeurs dans $M = \pi'^*(M')$. De plus, $\pi(A)$ est une sous-variété ouverte de S et la restriction de π' à $\pi(A) \cap \text{Supp } \int_{\pi|A} \omega$ est propre. La forme différentielle $\int_{\pi'| \pi(A)} \int_{\pi|A} \omega$ est définie; c'est une forme différentielle sur S' , à valeurs dans M' . On a

$$\int_{\pi' \circ \pi|A} \omega = \int_{\pi'| \pi(A)} \int_{\pi|A} \omega.$$

Si $A = X$, on a

$$\int_{\pi' \circ \pi} \omega = \int_{\pi'} \int_{\pi} \omega.$$

§ 12. Jets

Dans ce paragraphe, on note X et Y deux variétés de classe C^r , où $r \in \mathbb{N}_\infty$, et k un entier tel que $0 \leq k \leq r$.

A partir du n° 12.3, on suppose:

- soit que K est de caractéristique zéro;
- soit que les variétés, espaces de Banach et fibrés vectoriels considérés sont localement de dimension finie.

12.1. Jets d'applications

12.1.1. Soit $x \in X$ et soient f, g deux applications continues définies au voisinage de x et à valeurs dans Y . On dit que f et g ont un *contact d'ordre $\geq k$* en x si l'on a $f(x) = g(x)$ et s'il existe des cartes (U, φ, E) de X en x et (V, ψ, F) de Y en $f(x)$ telles que les applications $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$, définies au voisinage de $\varphi(x)$ dans E et à valeurs dans F , aient un contact d'ordre $\geq k$ en $\varphi(x)$ (1.1.2). Cette propriété est alors vérifiée par toutes les cartes de X en x et de Y en $f(x)$.

12.1.2. Soient $x \in X, y \in Y$. Dans l'ensemble des applications de classe C^r définies au voisinage de x , à valeurs dans Y , et appliquant x sur y , la relation « f et g ont un contact d'ordre $\geq k$ » est une relation d'équivalence; la classe de f pour cette relation se note $j_x^k(f)$ et s'appelle le *jet d'ordre k* de f de *source* x et de *but* y . La source d'un jet j est notée $s(j)$ et son but $b(j)$.

L'ensemble des jets d'ordre k de X dans Y (resp. de source x , resp. de but y) est noté $J^k(X, Y)$ (resp. $J_x^k(X, Y)$, resp. $J^k(X, Y)_y$) et l'on pose

$$J_x^k(X, Y)_y = J_x^k(X, Y) \cap J^k(X, Y)_y.$$

12.1.3. Si U et V sont des ouverts de X et Y respectivement, on identifie de façon évidente $J^k(U, V)$ à l'image réciproque de $U \times V$ par l'application

$$(s, b): J^k(X, Y) \rightarrow X \times Y.$$

12.1.4. Soit Z une variété de classe C^r , et soit $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$. Soit $j \in J_x^k(X, Y)_y$ et soit $j' \in J_y^k(Y, Z)_z$. Les applications $f' \circ f$, avec $f \in j$ et $f' \in j'$, ont même jet d'ordre k en x ; ce jet s'appelle le *composé* de j et j' et se note $j' \circ j$; on a $s(j' \circ j) = s(j)$ et $b(j' \circ j) = b(j')$. Si T est une variété de classe C^r et si $j'' \in J_z^k(Z, T)$, on a

$$j'' \circ (j' \circ j) = (j'' \circ j') \circ j.$$

12.1.5. Soit $j \in J_x^k(X, Y)$, avec $x \in X$, et soit k' un entier tel que $0 \leq k' \leq k$. Les jets $j_x^{k'}(f)$, pour $f \in j$, sont égaux; le jet ainsi défini est noté $r^{k, k'}(j)$; l'application $r^{k, k'}: J^k(X, Y) \rightarrow J^{k'}(X, Y)$ est surjective.

12.1.6. Supposons r égal à ∞ ou à ω . Soient f et g deux applications de classe C^r définies au voisinage d'un point $x \in X$, et à valeurs dans Y . Si $j_x^m(f) = j_x^m(g)$ pour tout entier $m \geq 0$, on dit que f et g ont un *contact d'ordre infini* en x . On obtient ainsi une relation d'équivalence dont les classes s'appellent les *jets d'ordre infini* en x ; le jet d'ordre infini de f se note $j_x^\infty(f)$ ou $j_x^\omega(f)$. Les définitions et résultats qui précèdent s'étendent sans modification aux jets d'ordre infini.

12.2. Jets d'applications d'espaces de Banach

Dans ce n°, E et F désignent deux espaces de Banach. Si m est un entier ≥ 0 , on note $P_m(E; F)$ l'espace de Banach des *polynômes-continus homogènes de degré m* sur E à valeurs dans F (1ère partie, Appendice, A.2).

12.2.1. Soit U un ouvert de E , soit $f: U \rightarrow F$ une application de classe C^r , et soit $a \in U$. Il existe un polynôme-continu

$$\tilde{f} = f_0 + \dots + f_k \quad (\text{avec } f_m \in P_m(E; F))$$

et un seul, qui soit de degré $\leq k$, et qui ait même jet d'ordre k à l'origine que $x \mapsto f(x - a)$. Si $0 \leq m \leq k$, la m -ième composante f_m de \tilde{f} est notée $\Delta^m f(a)$ ou $\Delta_a^m(f)$. Lorsque $r = \omega$, cette notation coïncide avec celle de 3.2.1 et 4.2.1; lorsque $r \leq \infty$, on a

$$m! \Delta^m f(a)(h) = D^m f(a)(h, \dots, h) = D^m f(a) \cdot h^m.$$

L'application $f \mapsto \tilde{f}$ définit par passage au quotient une bijection de $J_a^k(E, F)$ sur $\prod_{0 \leq m \leq k} P_m(E; F)$ au moyen de laquelle on identifie ces deux espaces; en particulier, $J_a^k(E, F)$ est muni d'une structure d'espace de Banach sur K . Si $j \in J_a^k(E, F)$, on note $\Delta_a^m(j)$ la m -ième composante de j ; on a

$$\Delta_a^m(j) \in P_m(E; F) \quad \text{pour} \quad 0 \leq m \leq k, \quad \text{et} \quad \Delta_a^0(j) = b(j) \in F.$$

12.2.2. Soit U (resp. V) un ouvert de E (resp. F). Notons $Q^k(E, F)$ l'espace de Banach produit des $P_m(E; F)$ pour $1 \leq m \leq k$. L'application

$$j \mapsto (s(j), b(j), \Delta_{s(j)}^1(j), \dots, \Delta_{s(j)}^k(j))$$

est une bijection de $J^k(U, V)$ sur $U \times V \times Q^k(E, F)$, au moyen de laquelle on identifie ces deux ensembles. En particulier, $J_0^k(E, F)_0$ s'identifie à $Q^k(E, F)$.

12.3. Variétés de jets

12.3.1. Soient $c = (U, \varphi, E)$ et $c' = (V, \psi, F)$ des cartes de X et Y respectivement. Les

applications φ et ψ définissent, par transport de structure, une bijection π de $J^k(U, V)$ sur

$$J^k(\varphi(U), \psi(V)) = \varphi(U) \times \psi(V) \times Q^k(E, F),$$

cf. 12.2.2. Si l'on pose $W = J^k(U, V)$ et $G = E \times F \times Q^k(E, F)$, le triplet (W, π, G) est une carte de $J^k(X, Y)$. Les cartes ainsi obtenues forment un C^{r-k} -atlas et celui-ci munit $J^k(X, Y)$ d'une *structure de K-variété de classe C^{r-k}* .⁽¹⁾

Si $(x, y) \in X \times Y$, les ensembles $J_x^k(X, Y)$, $J^k(X, Y)_y$ et $J_x^k(X, Y)_y$ sont des sous-variétés fermées de $J^k(X, Y)$.

12.3.2. Si X et Y sont pures (resp. de dimension finie, resp. séparées, resp. connexes), il en est de même de $J^k(X, Y)$.

Si U (resp. V) est ouvert dans X (resp. dans Y), $J^k(U, V)$ est une sous-variété ouverte de $J^k(X, Y)$, cf. 12.1.3.

12.3.3. Les applications $s: J^k(X, Y) \rightarrow X$, $b: J^k(X, Y) \rightarrow Y$ et $(s, b): J^k(X, Y) \rightarrow X \times Y$ sont des fibrations (6.1.1) de classe C^{r-k} . Lorsque $k = 0$, (s, b) est un isomorphisme.

12.3.4. Notons T_X et T_Y les fibrés vectoriels $\text{pr}_1^* T(X)$ et $\text{pr}_2^* T(Y)$ sur $X \times Y$, et soit $\mathcal{L}(T_X; T_Y)$ le fibré des homomorphismes de T_X dans T_Y (7.7.3); si $(x, y) \in X \times Y$, on a

$$\mathcal{L}(T_X; T_Y)_{(x, y)} = \mathcal{L}(T_x(X); T_y(Y)).$$

Soit $j \in J^k(X, Y)$, $k \geq 1$, et soit $f \in j$. L'application tangente à f en $x = s(j)$ ne dépend que de j ; on la note $T(j)$; c'est un élément de $\mathcal{L}(T_x(X); T_y(Y))$, où $y = b(j)$. Lorsque $k = 1$ l'application

$$T: J^1(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}(T_X; T_Y)$$

ainsi définie est un isomorphisme de variétés de classe C^{r-1} .

Pour $X = K$, cet isomorphisme identifie $J_0^1(K, Y)$ à $T(Y)$; pour $Y = K$, il identifie $J^1(X, K)_0$ au dual $T'(X)$ de $T(X)$.

12.3.5. Soit k' un entier tel que $0 \leq k' \leq k$. L'application

$$r^{k, k'}: J^k(X, Y) \rightarrow J^{k'}(X, Y) \quad (\text{cf. 12.1.5})$$

est une fibration de classe C^{r-k} .

12.3.6. Soit Z une variété de classe C^r , et soit T l'ensemble des couples

$$(j, j') \in J^k(X, Y) \times J^k(Y, Z)$$

tels que $b(j) = s(j')$. Alors T est une sous-variété de $J^k(X, Y) \times J^k(Y, Z)$ et l'application $(j, j') \mapsto j' \circ j$ est un morphisme de classe C^{r-k} de T dans $J^k(X, Z)$.

12.3.7. Si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme de classe C^r , l'application $x \mapsto j_x^k(f)$ est un morphisme $j^k(f)$ de classe C^{r-k} de X dans $J^k(X, Y)$.

¹ Lorsque $k = r$ (ce qui n'est possible que si $K = \mathbb{R}$), $J^k(X, Y)$ est munie d'une structure de *variété topologique* (cf. *Conventions et Notations*) et les morphismes et fibrations considérées ci-après doivent être pris dans un sens purement topologique (cf. note de bas de page du §6).

12.3.8. Soient k' et k'' des entiers positifs de somme k . Soit $x \in X$, soit U un voisinage ouvert de x , et soit $f: U \rightarrow Y$ un morphisme de classe C^r . L'application

$$x \mapsto j_x^{k'}(f): U \rightarrow J^{k'}(X, Y)$$

est de classe $C^{r-k'}$ et son jet d'ordre k'' en x ne dépend que de $j_x^k(f)$. On obtient ainsi une application canonique

$$\alpha: J^k(X, Y) \rightarrow J^{k''}(X, J^{k'}(X, Y))$$

qui est de classe C^{r-k} ; si K est de caractéristique zéro, c'est un plongement.

12.3.9. Soient X', Y' des variétés de classe C^r , soient $f: X \rightarrow X'$ et $g: Y' \rightarrow Y$ des morphismes, et soient $(x, y') \in X \times Y'$, $x' = f(x)$, $y = g(y')$. Si $u \in J_x^k(X', Y')_{y'}$, posons

$$J_x^k(f, g)_y(u) = j_y^k(g) \circ u \circ j_x^k(f).$$

On obtient ainsi une application

$$J^k(f, g): J^k(X', Y') \times_{X'} X \rightarrow J^k(X, Y)$$

qui est de classe C^{r-k} .

12.3.10. Soit A une partie compacte de X . Soit $\mathcal{C}^k(X; Y)$ l'ensemble des applications de classe C^k de X dans Y . Pour tout $f \in \mathcal{C}^k(X; Y)$, l'application $j^k(f)|_A$ appartient à l'ensemble $\mathcal{C}(A; J^k(X, Y))$ des applications continues de A dans $J^k(X, Y)$. On a ainsi défini une application λ de $\mathcal{C}^k(X; Y)$ dans $\mathcal{C}(A; J^k(X, Y))$. L'image réciproque par λ de la topologie de la convergence compacte sur $\mathcal{C}(A; J^k(X, Y))$ (TG, X, § 3, déf. 1) est une topologie sur $\mathcal{C}^k(X; Y)$; on l'appelle la *topologie de la C^k -convergence uniforme sur A* .

12.4. Repères et fibrations principales

12.4.1. Soit $j \in J^k(X, Y)$ et soient $x = s(j)$, $y = b(j)$. On dit que j est *inversible* s'il existe $j' \in J_y^k(Y, X)_x$ tel que $j' \circ j = j_x^k(\text{Id}_X)$ et $j \circ j' = j_y^k(\text{Id}_Y)$; le jet j' est alors déterminé de manière unique; on le note j^{-1} . Si $k = 0$, tout jet est inversible. Si $k \geq 1$, les conditions suivantes sont équivalentes:

- a) j est inversible;
- b) l'application $T(j): T_x(X) \rightarrow T_y(Y)$ (cf. 12.3.4) est un isomorphisme;
- c) il existe un isomorphisme g de classe C^r d'un voisinage ouvert de x sur un voisinage ouvert de y , tel que $j_x^k(g) = j$.

12.4.2. Soit E un espace de Banach. On note $\text{GL}^k(E)$ l'ensemble des jets d'ordre k de E dans E qui sont inversibles et ont 0 pour source et pour but; c'est un ouvert de $J_0^k(E, E)_0$. Muni de la loi de composition des jets, et de la structure de variété induite par celle de l'espace de Banach $J_0^k(E, E)_0 = Q^k(E, E)$, c'est une variété de groupe de classe C^ω .

On a $\text{GL}^0(E) = \{e\}$. Le groupe $\text{GL}^1(E)$ s'identifie, au moyen de T , au groupe $\text{GL}(E)$ des automorphismes de E .

Si $k' \leq k$, l'application $r^{k, k'}: \text{GL}^k(E) \rightarrow \text{GL}^{k'}(E)$ est un homomorphisme de classe C^ω et c'est une submersion surjective. L'application $f \mapsto \text{Id}_E + f$ est un isomorphisme de variétés de groupes de $P_k(E, E)$ sur le noyau de $r^{k, k-1}$.

12.4.3. Soit E un espace de Banach. Pour tout $x \in X$, on appelle E -repère d'ordre k de X en x tout élément inversible de $J_0^k(E, X)_x$. L'ensemble des E -repères d'ordre k de X est une sous-variété ouverte $R^k(E, X)$ de $J_0^k(E, X)$; l'application b a pour restriction un morphisme, encore noté b , de $R^k(E, X)$ dans X ; de même, si $k' \leq k$, on note encore $r^{k, k'}$ le morphisme de $R^k(E, X)$ dans $R^{k'}(E, X)$, restriction de l'application $r^{k, k'}$ de 12.1.5.

12.4.4. On suppose que X est pure de type E (5.1.7). Le groupe $GL^k(E)$ opère à droite sur $R^k(E, X)$ par la loi $(\rho, u) \mapsto \rho \circ u$ et le quadruplet $\lambda_X = (R^k(E, X), GL^k(E), X, b)$ est une *fibration principale* (6.2.1) de groupe structural $GL^k(E)$, de base X et de classe C^{r-k} .

Si $k' \leq k$, soit H le noyau de $r^{k, k'}: GL^k(E) \rightarrow GL^{k'}(E)$; le quadruplet $(R^k(E, X), H, R^{k'}(E, X), r^{k, k'})$ est une fibration principale de classe C^{r-k} .

La variété $J^k(X, Y)$ est munie d'une structure d'espace fibré associé à λ_X (6.5.1): la fibre type est $J_0^k(E, Y)$ sur laquelle $GL^k(E)$ opère à gauche par la loi $(u, j) \mapsto j \circ u^{-1}$; l'application repère $R^k(E, X) \times J_0^k(E, Y) \rightarrow J^k(X, Y)$ transforme (ρ, j) en $j \circ \rho^{-1}$. La projection $J^k(X, Y) \rightarrow X$ correspondant à cette structure d'espace fibré est s .

12.4.5. Soit F un espace de Banach, et supposons Y pure de type F . Alors $J^k(X, Y)$ est munie d'une structure d'espace fibré associé à λ_Y : la fibre type est $J^k(X, F)_0$ sur laquelle $GL^k(F)$ opère à gauche par la loi $(v, j) \mapsto v \circ j$; l'application repère est $(\sigma, j) \mapsto \sigma \circ j$; la projection $J^k(X, Y) \rightarrow Y$ est b .

12.4.6. Les hypothèses étant celles de 12.4.4 et 12.4.5, soit μ la fibration principale

$$(R^k(E, X) \times R^k(F, Y), GL^k(E) \times GL^k(F), X \times Y, b \times b),$$

produit de λ_X et λ_Y . Alors $J^k(X, Y)$ est munie d'une structure d'espace fibré associé à μ : la fibre type est $J_0^k(E, F)_0$ sur laquelle $GL^k(E) \times GL^k(F)$ opère à gauche par la loi $((u, v), j) \mapsto v \circ j \circ u^{-1}$; l'application repère est $((\rho, \sigma), j) \mapsto \sigma \circ j \circ \rho^{-1}$; la projection $J^k(X, Y) \rightarrow X \times Y$ est (s, b) .

12.5. Jets de sections

12.5.1. Soit $\pi: Y \rightarrow X$ une submersion, soit $x \in X$, et soit $s \in J_x^k(X, Y)$. On dit que s est un *jet de section* (d'ordre k) de π si s est de la forme $j_x^k(f)$, où f est une section de classe C^r de π au-dessus d'un voisinage ouvert de x ; cette condition équivaut à

$$j_{b(s)}^k(\pi) \circ s = j_x^k(\text{Id}_X).$$

On note $P_x^k(\pi)$ (resp. $P^k(\pi)$) l'ensemble des jets $s \in J_x^k(X, Y)$ (resp. $J^k(X, Y)$) qui sont des jets de section de π ; c'est une sous-variété de classe C^{r-k} de $J^k(X, Y)$. Les applications

$$s: P^k(\pi) \rightarrow X \quad \text{et} \quad b: P^k(\pi) \rightarrow Y$$

sont des submersions; si π est une fibration, ce sont des fibrations. Pour $k = 0$, b est un isomorphisme, par lequel on identifie $P^0(\pi)$ à Y .

Si $k' \leq k$, l'application $r^{k, k'}: J^k(X, Y) \rightarrow J^{k'}(X, Y)$ applique $P^k(\pi)$ dans $P^{k'}(\pi)$; l'application de $P^k(\pi)$ dans $P^{k'}(\pi)$ déduite de $r^{k, k'}$ est une fibration de classe C^{r-k} .

12.5.2. Soit Z une variété de classe C^r ; supposons que $Y = X \times Z$ et soit $\pi = \text{pr}_1: Y \rightarrow X$. La restriction de $J^k(\text{Id}_X, \text{pr}_2)$ (cf. 12.3.9) à $P^k(\pi)$ est un isomorphisme de $P^k(\pi)$ sur $J^k(X, Z)$, par lequel on identifie ces deux variétés.

12.5.3. Soit Y' une variété de classe C^r , soient $\pi: Y \rightarrow X$ et $\pi': Y' \rightarrow X$ des submersions et soit $g: Y \rightarrow Y'$ un morphisme tel que $\pi' \circ g = \pi$. L'application $J^k(\text{Id}_X, g)$ a pour restriction une application

$$P^k(g): P^k(\pi) \rightarrow P^k(\pi')$$

qui est de classe C^{r-k} .

Soit X' une variété de classe C^r , et soit $f: X' \rightarrow X$ un morphisme; posons $(Y', \pi') = f^*(Y, \pi)$, cf. 5.11.5. L'application $J^k(f, \text{Id}_Y)$ (cf. 12.3.9) définit une application de classe C^{r-k} de $f^*P^k(\pi)$ dans $P^k(\pi')$.

12.6. Jets de sections d'un fibré vectoriel

12.6.1. Soit E un fibré vectoriel de classe C^r de base X , et soit π sa projection. Soient $c_0 = (U, \varphi, F_0)$ une carte vectorielle de E et $c_1 = (U, \psi, F_1)$ une carte de la variété X , de même domaine U . Ces cartes définissent une bijection θ de $P^k(\pi)|U$ sur $J^k(\psi(U), F_0) = \psi(U) \times F_0 \times Q^k(F_1, F_0)$, cf. 12.2.2 et 12.3.1, d'où une carte vectorielle

$$d = (U, \theta, G), \quad \text{avec} \quad G = F_0 \times Q^k(F_1, F_0) = \prod_{m=0}^k P_m(F_1; F_0)$$

de $P^k(\pi)$. Les cartes ainsi obtenues forment un C^{r-k} -atlas vectoriel, qui munit $P^k(\pi)$ d'une structure de *fibré vectoriel* de classe C^{r-k} , de base X . Ce fibré vectoriel est noté $P^k(E)$; la structure de variété sous-jacente est celle définie en 12.5.1.

Soit U un ouvert de X , et soit $f \in \mathcal{S}_E^r(U)$ une section de classe C^r de E au-dessus de U . L'application $j^k(f): x \mapsto j_x^k(f)$ est une section de classe C^{r-k} de $P^k(E)$ au-dessus de U . L'application $j^k: \mathcal{S}_E^r(U) \rightarrow \mathcal{S}_{P^k(E)}^{r-k}(U)$ est K -linéaire.

12.6.2. Si F est un espace de Banach, l'identification (12.5.2) de $P^k(F_X)$ avec $J^k(X, F)$ munit cette dernière variété d'une structure de fibré vectoriel de classe C^{r-k} , de base X . Lorsque $F = K$, on écrit $P^k(X)$ au lieu de $P^k(K_X)$.

Exemple. — Prenons $X = K^n$, et notons u_1, \dots, u_n les fonctions coordonnées sur K^n ; alors la fibre $P_0^k(X)$ de $P^k(X)$ en 0 admet pour base la famille des jets d'ordre k

des monômes $u_1^{m_1} \dots u_n^{m_n}$, avec $m_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n m_i \leq k$.

12.6.3. Soient d un entier ≥ 0 , E_1, \dots, E_d, F des fibrés vectoriels de classe C^r de base X , et soit $u: E_1 \times_X \dots \times_X E_d \rightarrow F$ un morphisme multilinéaire (7.3.1) de classe C^r . Il existe alors un morphisme multilinéaire

$$P^k(u): P^k(E_1) \times_X \dots \times_X P^k(E_d) \rightarrow P^k(F)$$

et un seul tel que

$$P^k(u)(j^k(s_1), \dots, j^k(s_d)) = j^k(u(s_1, \dots, s_d))$$

pour tout ouvert U de X et toute suite de sections $s_i \in \mathcal{S}_{\mathbb{E}}^r(U)$ pour $1 \leq i \leq d$.

Si A est un fibré en algèbres (7.3.2) de base X , le morphisme de $P^k(A) \times_X P^k(A)$ dans $P^k(A)$ déduit de la multiplication $A \times_X A \rightarrow A$ fait de $P^k(A)$ un fibré en algèbres; si A est un fibré en algèbres associatives, $P^k(A)$ est un fibré en algèbres associatives; si en outre M est un fibré en A -modules (7.3.3), $P^k(M)$ est un fibré en $P^k(A)$ -modules. En particulier, $P^k(X)$ est un *fibré en algèbres associatives, commutatives et unifières*; si E est un fibré vectoriel, $P^k(E)$ est un *fibré en $P^k(X)$ -modules*. Si $u: E \rightarrow F$ est un morphisme de fibrés vectoriels, alors $P^k(u): P^k(E) \rightarrow P^k(F)$ est un $P^k(X)$ -homomorphisme.

12.6.4. Si $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ est une suite exacte localement directe de fibrés vectoriels de base X , il en est de même de la suite

$$P^k(E) \rightarrow P^k(F) \rightarrow P^k(G)$$

où les homomorphismes considérés sont $P^k(u)$ et $P^k(v)$.

12.6.5. Soient k' et k'' deux entiers positifs de somme k , et soit E un fibré vectoriel de classe C^r et de base X . Le morphisme

$$\alpha: J^k(X, E) \rightarrow J^{k'}(X, J^{k''}(X, E)) \quad (\text{cf. 12.3.8})$$

induit un morphisme de fibrés vectoriels

$$\beta: P^k(E) \rightarrow P^{k''}(P^{k'}(E))$$

qui est de classe C^{r-k} . Si U est un ouvert de X et $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{E}}^r(U)$, on a

$$\beta(j^k(f)) = j^{k''}(j^{k'}(f)).$$

Lorsque K est de caractéristique zéro, β est un isomorphisme de $P^k(E)$ sur un sous-fibré vectoriel de $P^{k''}(P^{k'}(E))$.

12.6.6. Soit k' un entier tel que $0 \leq k' \leq k$, et soit E un fibré vectoriel de classe C^r et de base X . L'application

$$r^{k, k'}: P^k(E) \rightarrow P^{k'}(E)$$

est un morphisme surjectif localement direct de classe C^{r-k} . Son noyau $N^{k, k'}(E)$ est formé des jets de section de E ayant un contact d'ordre $\geq k'$ avec la section nulle.

12.6.7 (« Le foncteur vectoriel P_m »). Les notations étant celles de 7.6, 7.7, 7.8, posons $I_+ = \{0\}$, $I_- = \{1\}$ et soit m un entier ≥ 0 . Si $\mathcal{V} = (V_0, V_1)$ est un couple d'espaces de Banach, notons $\tau_m(\mathcal{V})$ l'espace de Banach $P_m(V_1; V_0)$ des *polynômes-continus* homogènes de degré m sur V_1 à valeurs dans V_0 (A.2). De même, si $f = (f_0, f_1)$, où $f_0: V_0 \rightarrow V'_0$ et $f_1: V_1 \rightarrow V'_1$ sont des morphismes d'espaces de Banach, notons $\tau_m(f)$ le morphisme $p \mapsto f_0 \circ p \circ f_1$ de $P_m(V_1; V_0)$ dans $P_m(V'_1; V'_0)$. On obtient ainsi un *foncteur*

vectoriel τ_m de classe C^ω . Si E_0 et E_1 sont deux fibrés vectoriels de base X , on note $P_m(E_1; E_0)$ le fibré vectoriel déduit de (E_0, E_1) par τ_m (7.6.2).

12.6.8. Reprenons les notations et hypothèses de 12.6.1. Il existe un morphisme de fibrés vectoriels

$$\iota: P_k(T(X); E) \rightarrow P^k(E) \quad (\text{cf. 12.6.6}),$$

et un seul tel que, quelles que soient la carte vectorielle $c_0 = (U, \varphi, F_0)$ de E et la carte $c_1 = (U, \psi, F_1)$ de X , le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} P_k(T(X), E)|U & \xrightarrow{\iota|U} & P^k(E)|U \\ \eta \downarrow & & \downarrow \theta \\ U \times P_k(F_1; F_0) & \xrightarrow{i} & U \times \prod_{m=0}^k P_m(F_1; F_0) \end{array}$$

- où: 1) $\iota|U$ est la restriction de ι à $P_k(T(X), E)|U$;
 2) θ est la bijection définie en 12.6.1;
 3) i est l'application $(u, p) \mapsto (u, 0, \dots, 0, p)$;
 4) η est déduite, au moyen du foncteur vectoriel τ_k , de la carte vectorielle c'_1 de $T(X)$ (cf. 8.1.1) et de la carte vectorielle c_0 de E .

Le morphisme ι est un *isomorphisme* de $P_k(T(X); E)$ sur le sous-fibré vectoriel $N^{k, k-1}(E)$ de $P^k(E)$ (cf. 12.6.6); la suite

$$0 \rightarrow P_k(T(X); E) \xrightarrow{\iota} P^k(E) \xrightarrow{\tau^{k, k-1}} P^{k-1}(E) \rightarrow 0$$

est une *suite exacte* localement directe de fibrés vectoriels.

Plus généralement, posons $N_0 = P^k(E)$, $N_m = N^{k, m-1}(E)$ pour $m \geq 1$, de sorte que les N_m forment une suite décroissante de sous-fibrés vectoriels de $P^k(E)$:

$$P^k(E) = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_k \supset N_{k+1} = 0.$$

Pour $0 \leq m \leq k$, la projection $r^{k, m}: P^k(E) \rightarrow P^m(E)$ définit un isomorphisme de N_m/N_{m+1} sur $N^{m, m-1}(E)$; vu ce qui précède, on obtient ainsi des *isomorphismes*

$$\iota_m: N_m/N_{m+1} \rightarrow P_m(T(X); E) \quad (0 \leq m \leq k).$$

On a en particulier $N_0/N_1 \simeq E$ et $N_1/N_2 \simeq \mathcal{L}(T(X); E)$. Pour $k = 1$, cela donne une suite exacte:

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(T(X); E) \rightarrow P^1(E) \rightarrow E \rightarrow 0.$$

12.7. Affaiblissement de structure

On suppose $K = \mathbb{R}$. Soit $r' \in N_K$ avec $k \leq r' \leq r$ et soient X' et Y' les variétés de classe $C^{r'}$ obtenues à partir de X et Y par affaiblissement de structure (5.13.1). Soient $x \in X$ et $j \in J_x^k(X, Y)$; soient U une partie ouverte de X contenant x et f une application de classe C^k de U dans Y , telles que $j_x^k(f) = j$. Considérons f comme un germe de mor-

phisme de X' dans Y' ; son jet $j' \in J_x^k(X', Y')$ ne dépend que de j . L'application $j \mapsto j'$ est un isomorphisme de classe $C^{r'-k}$ de $J^k(X, Y)$ sur $J^k(X', Y')$; elle permet d'identifier $J^k(X', Y')$ à la variété de classe $C^{r'-k}$ déduite de la variété $J^k(X, Y)$ de classe C^{r-k} par affaiblissement de structure. Un résultat analogue s'applique aux variétés $P^k(\pi)$ et $P^k(E)$ des n° 12.5 et 12.6.

§ 13. Distributions ponctuelles

13.1. Tenseurs symétriques et espaces de Banach

13.1.1. Soit E un module sur un anneau commutatif A . Si n est un entier ≥ 0 , on note $TS^n(E)$ le module des *tenseurs symétriques* de degré n de E (A, III, p. 71 et A, IV, § 5, n° 2); la somme directe des $TS^n(E)$ est notée $TS(E)$. Si r est, soit un entier, soit l'un des symboles ∞, ω , on pose

$$TS^{(r)}(E) = \bigoplus_{n \leq r} TS^n(E) \quad \text{et} \quad TS^{(r)+}(E) = \bigoplus_{1 \leq n \leq r} TS^n(E);$$

par suite, si $r \geq 0$, $TS^{(r)}(E)$ est somme directe de $TS^{(0)}(E) = A$ et de $TS^{(r)+}(E)$. On a $TS^{(1)+}(E) = E$ et $TS^{(\infty)}(E) = TS^{(\omega)}(E) = TS(E)$.

Si n est un entier ≥ 0 , et si $x \in E$, on note $\gamma_n(x)$ l'élément $x \otimes \cdots \otimes x$ de $TS^n(E)$; pour $n = 0$, $\gamma_0(x) = 1$.

13.1.2 (« Applications polynomiales »). On suppose que A est intègre infini et que E est un A -module libre. Soit F un A -module. Une application $f: E \rightarrow F$ est dite *polynomiale homogène de degré n* si elle satisfait aux conditions équivalentes suivantes (cf. A, IV, § 5, n° 9):

a) Il existe une application linéaire $\tilde{f}: TS^n(E) \rightarrow F$ telle que $f(x) = \tilde{f}(\gamma_n(x))$ pour tout $x \in E$.

b) Il existe une application multilinéaire $u: E^n \rightarrow F$ telle que $f(x) = u(x, \dots, x)$ pour tout $x \in E$.

Supposons que ce soit le cas. L'application \tilde{f} vérifiant a) est alors unique; si $t \in TS^n(E)$, on note $\langle f, t \rangle$ l'élément $\tilde{f}(t)$. Si $u: E^n \rightarrow F$ vérifie b), l'application linéaire correspondante de $\otimes^n E$ dans F coïncide avec \tilde{f} dans le sous-module $TS^n(E)$. Lorsque $n!$ est inversible dans A , on peut choisir u symétrique, et cela de façon unique.

13.1.3. Soient E un espace de Banach sur K et F un espace polynormé séparé sur K . Soient U un voisinage ouvert de 0 dans E , $f: U \rightarrow F$ une application de classe C^r ($r \in \mathbb{N}_K$), et t un élément de $TS^{(r)}(E)$, cf. 13.1.1 (appliqué à l'anneau $A = K$). Soit k un entier $\leq r$ tel que $t \in TS^{(k)}(E)$. On peut décomposer t et f de façon unique en

$$t = t_0 + \cdots + t_k, \quad \text{avec} \quad t_i \in TS^i(E)$$

et

$$f = f_0 + \cdots + f_k + h,$$

où f_i est un polynôme-continu homogène de degré i ($0 \leq i \leq k$) et où h a un contact d'ordre $\geq k$ avec 0 au point 0. On pose alors

$$\langle f, t \rangle = \sum_{i=0}^k \langle f_i, t_i \rangle;$$

c'est un élément de F qui ne dépend pas du choix de k .

13.1.4. Soient E et E' deux espaces de Banach, U un voisinage ouvert de 0 dans E et $\varphi: U \rightarrow E'$ une application de classe C^r telle que $\varphi(0) = 0$. Soit $t \in TS^{(r)}(E)$. Il existe un élément $t' \in TS^{(r)}(E')$ et un seul tel que, quels que soient l'espace polynormé séparé F , le voisinage ouvert U' de 0 dans E' , et l'application $f: U' \rightarrow F$ de classe C^r , on ait

$$(*) \quad \langle f, t' \rangle = \langle f \circ \varphi, t \rangle.$$

Cet élément t' se note $\varphi_*(t)$. L'application

$$\varphi_*: TS^{(r)}(E) \rightarrow TS^{(r)}(E')$$

ainsi définie est linéaire.

13.2. Distributions ponctuelles

Dans ce numéro, X désigne une variété de classe C^r , et x un point de X .

13.2.1. Soit \mathcal{A} l'ensemble des couples (c, t) , où $c = (U, \varphi, E)$ est une carte de X centrée en x , et où $t \in TS^{(r)}(E)$. Deux éléments $((U, \varphi, E), t)$ et $((U', \varphi', E'), t')$ de \mathcal{A} sont dits équivalents si $t' = \gamma_*(t)$, où $\gamma = \varphi' \circ \varphi^{-1}$. On obtient ainsi une relation d'équivalence sur \mathcal{A} ; une classe d'équivalence pour cette relation est appelée une *distribution ponctuelle* en x sur X .

Soit $T_x^{(r)}(X)$ l'ensemble des distributions ponctuelles en x sur X . Si c est une carte de X centrée en x , l'application

$$\theta_c: TS^{(r)}(E) \rightarrow T_x^{(r)}(X)$$

qui, à t , fait correspondre la classe de (c, t) , est une bijection. Dans tout ce qui suit, on munit $T_x^{(r)}(X)$ de la structure de K -espace vectoriel obtenue en transportant celle de $TS^{(r)}(E)$ par θ_c ; cette structure ne dépend pas du choix de c . De même, si $k \leq r$, on note $T_x^{(k)}(X)$ et $T_x^{(k)+}(X)$ les images de $TS^{(k)}(E)$ et $TS^{(k)+}(E)$ par θ_c ; elles ne dépendent pas du choix de c . Un élément de $T_x^{(r)}(X)$ est dit d'ordre $\leq k$ s'il appartient à $T_x^{(k)}(X)$. On a

$$T_x^{(k)}(X) = T_x^{(0)}(X) \oplus T_x^{(k)+}(X).$$

Il existe un élément et un seul ε_x de $T_x^{(0)}(X)$ tel que l'on ait $\theta_c(1) = \varepsilon_x$ pour toute carte c de X centrée en x . Si t est une distribution ponctuelle en x , on appelle *terme constant* de t l'élément λ de K tel que $t - \lambda \varepsilon_x \in T_x^{(r)+}(X)$; on dit que t est *sans terme constant* si son terme constant est nul.

13.2.2. Soit F un espace polynormé séparé, et soit f une fonction de classe C^r à valeurs dans F , définie sur un voisinage de x . Soit t une distribution ponctuelle en x sur X .

Considérons une carte $c = (U, \varphi, E)$ de X centrée en x , et posons $f_c = f \circ \varphi^{-1}$ et $t_c = \theta_c^{-1}(t)$; l'élément $\langle f_c, t_c \rangle$ de F défini en 13.1.3 ne dépend pas du choix de c ; on le note $\langle f, t \rangle$. On a $\varepsilon_x(f) = f(x)$.⁽¹⁾ Le terme constant de t est $\langle 1, t \rangle$.

Si F' est un espace polynormé séparé et si $u: F \rightarrow F'$ est linéaire continue, on a $\langle u \circ f, t \rangle = u(\langle f, t \rangle)$.

Supposons que F soit un espace de Banach, et que t soit d'ordre $\leq k$, avec k fini. Soit $j \in J_x^k(X, F)$, cf. 12.1.2, et soit $f \in j$. Alors $\langle f, t \rangle$ ne dépend que du jet j ; on le note $\langle j, t \rangle$. L'application de $T_x^{(k)}(X) \times J_x^k(X, F)$ dans F ainsi définie est bilinéaire. Lorsque $F = K$, on a posé $J_x^k(X, F) = P_x^k(X)$, cf. 12.6.2, et l'on obtient une *forme bilinéaire* sur $T_x^{(k)}(X) \times P_x^k(X)$.

13.2.3. Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés de classe C^r et soit $y = \varphi(x)$. Soit $c = (U, \psi, E)$ une carte de X centrée en x et soit $c' = (U', \psi', E')$ une carte de Y centrée en y ; soit $\tilde{\varphi}$ l'expression de φ dans ces cartes (5.3.2), et soit $\tilde{\varphi}_*$ l'application correspondante de $TS^{(r)}(E)$ dans $TS^{(r)}(E')$, cf. 13.1.4. Il existe une application linéaire et une seule, notée $T_x^{(r)}(\varphi)$ ou φ_* , de $T_x^{(r)}(X)$ dans $T_y^{(r)}(Y)$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} TS^{(r)}(E) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_*} & TS^{(r)}(E') \\ \theta_c \downarrow & & \downarrow \theta_{c'} \\ T_x^{(r)}(X) & \xrightarrow{\varphi_*} & T_y^{(r)}(Y). \end{array}$$

Cette application ne dépend pas du choix de c et c' . Si $t \in T_x^{(r)}(X)$, on dit que $\varphi_*(t)$ est l'*image* de t par φ . On a $\varphi_*(\varepsilon_x) = \varepsilon_y$. Si $k \leq r$, on a

$$\varphi_*(T_x^{(k)}(X)) \subset T_y^{(k)}(Y) \quad \text{et} \quad \varphi_*(T_x^{(k)+}(X)) \subset T_y^{(k)+}(Y).$$

Si $\varphi': X \rightarrow Y$ est un morphisme de classe C^r appliquant x sur y , on a $\varphi_* = \varphi'_*$ si et seulement si $j_x^r(\varphi) = j_x^r(\varphi')$, cf. 12.1.

Si φ est une immersion (resp. une submersion) en x , φ_* est injectif (resp. surjectif); la réciproque est vraie si $\dim_y Y < +\infty$.

Si $\varphi': Y \rightarrow Z$ est un morphisme de variétés de classe C^r , et si $t \in T_x^{(r)}(X)$, on a $(\varphi' \circ \varphi)_*(t) = \varphi'_*(\varphi_*(t))$.

Soit F un espace polynormé séparé, et soit f une fonction de classe C^r à valeurs dans F , définie dans un voisinage de y . On a alors

$$(1) \quad \langle f, \varphi_*(t) \rangle = \langle f \circ \varphi, t \rangle \quad \text{pour tout } t \in T_x^{(r)}(X).$$

Pour t donné, les relations (1) (pour f et F variables) caractérisent $\varphi_*(t)$; lorsque $\dim_y Y < +\infty$, on peut se borner à $F = K$.

13.2.4. Supposons que X soit une sous-variété ouverte d'un *espace de Banach* E . Notons φ_x l'application $y \mapsto y - x$ de X dans E ; la carte $c = (X, \varphi_x, E)$ est centrée

¹ Lorsque $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et que X est localement compacte, la formule précédente conduit à identifier la distribution ponctuelle ε_x à la *mesure de Dirac* ε_x définie en INT, III, § 1, n° 3. Plus généralement, toute mesure à support fini dans X s'identifie à une distribution à support fini au sens du n° 13.6.

en x . On identifie alors $T_x^{(r)}(X)$ à $TS^{(r)}(E)$ au moyen de θ_e^{-1} ; en particulier, on a $T_x^{(\infty)}(X) = TS(E)$.

Soit F un espace de Banach, soit $u: E \rightarrow F$ une application linéaire continue, et soient $x \in E$, $y \in F$ tels que $u(x) = y$. Identifions comme ci-dessus $T_x^{(\infty)}(E)$ à $TS(E)$ et $T_y^{(\infty)}(F)$ à $TS(F)$. L'application

$$u_*: TS(E) \rightarrow TS(F) \quad (\text{cf. 13.2.3})$$

coïncide avec l'application $TS(u)$ induite par le prolongement canonique de u à l'algèbre tensorielle.

13.2.5. Si $k \leq r$, on note $T^{(k)}(X)$ (resp. $T^{(k)+}(X)$) l'ensemble somme des $T_a^{(k)}(X)$ (resp. des $T_a^{(k)+}(X)$) pour $a \in X$. Une application $t: X \rightarrow T^{(k)}(X)$ telle que $t(a) \in T_a^{(k)}(X)$ pour tout $a \in X$ s'appelle un *champ de distributions ponctuelles d'ordre $\leq k$* .

Supposons k fini et X localement de dimension finie. Pour tout $a \in X$, la forme bilinéaire $(j, t) \mapsto \langle j, t \rangle$ (cf. 13.2.2) définit un isomorphisme i_a de $T_a^{(k)}(X)$ sur le dual $P_a^k(X)^*$ de $P_a^k(X)$. Les i_a définissent une bijection $i: T^{(k)}(X) \rightarrow P^k(X)^*$, où $P^k(X)^*$ désigne le dual du fibré vectoriel $P^k(X)$; par transport de structure au moyen de i^{-1} , on munit $T^{(k)}(X)$ d'une structure de fibré vectoriel de base X et de classe C^{r-k} . Un champ de distributions ponctuelles d'ordre $\leq k$ est dit de classe C^s , avec $s \leq r - k$, si c'est une section de classe C^s du fibré $T^{(k)}(X)$.

Soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés de classe C^r et supposons que Y soit, comme X , localement de dimension finie. Alors $\varphi_*: T^{(k)}(X) \rightarrow T^{(k)}(Y)$ est un φ -morphisme de fibrés vectoriels de classe C^{r-k} .

13.2.6. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq r$. Si U est un ouvert d'un espace de Banach E de dimension finie, le fibré vectoriel $T^{(k)}(U)$ s'identifie, grâce à 13.2.4, au fibré trivial de fibre $TS^{(k)}(E)$.

Prenons en particulier $E = K^n$, avec $n \geq 0$, et soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de E . Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un élément de N^n , notons Δ^α l'élément $\gamma_{\alpha_1}(e_1) \dots \gamma_{\alpha_n}(e_n)$ de $TS(E)$ (le produit utilisé étant le *produit symétrique* des tenseurs symétriques, cf. A, IV, § 5, n° 3).⁽¹⁾ Les Δ^α , pour $|\alpha| \leq k$, forment une base de $TS^{(k)}(E)$; si $a \in K^n$, on note Δ_a^α les éléments correspondants de $T_a^{(k)}(E)$. Soient F un espace polynormé séparé, et f une fonction de classe C^r , à valeurs dans F , définie au voisinage de a ; si $\alpha \in N^n$, l'élément $\langle f, \Delta_a^\alpha \rangle$ coïncide avec l'élément $(\Delta^\alpha f)(a)$ défini en 2.5.3, 3.2.1 et 4.2.1.

Supposons X localement de dimension finie, et soit $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ un système de coordonnées de X dans un ouvert U . Si $a \in U$ et si α est un multi-indice tel que $|\alpha| \leq k$, on note $(\Delta_\xi^\alpha)_a$ la distribution ponctuelle en a dont l'image par ξ est la distribution ponctuelle $\Delta_{\xi(a)}^\alpha$ sur K^n ; les champs de distributions

$$\Delta_\xi^\alpha: a \mapsto (\Delta_\xi^\alpha)_a \quad (|\alpha| \leq k)$$

forment un repère sur U du fibré vectoriel $T^{(k)}(X)$. Si $f: U \rightarrow F$ est de classe C^r , on pose $\langle f, (\Delta_\xi^\alpha)_a \rangle = \Delta_\xi^\alpha f(a)$ et l'on note $\Delta_\xi^\alpha f$ la fonction $a \mapsto \Delta_\xi^\alpha f(a)$; c'est une fonction de classe C^{r-k} dans U .

¹Si $m = |\alpha|$ et si Σ est l'ensemble des applications σ de $\{1, \dots, m\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ telles que $\text{Card } \sigma^{-1}(i) = \alpha_i$, on a

$$\Delta^\alpha = \gamma_{\alpha_1}(e_1) \dots \gamma_{\alpha_n}(e_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma} e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(n)}, \quad \text{cf. A, IV, § 5, n° 4.}$$

13.3. Distributions ponctuelles et espaces tangents

Dans ce n^o, X désigne une variété de classe C^r .

13.3.1. Soit $x \in X$ et soit k un entier $\leq r$. Soit $c = (U, \varphi, E)$ une carte de X centrée en x ; l'isomorphisme $\theta_c: TS^{(r)}(E) \rightarrow T_x^{(r)}(X)$ défini en 13.2.1 applique $TS^{(k)}(E)$ sur $T_x^{(k)}(X)$ et $TS^{(k-1)}(E)$ sur $T_x^{(k-1)}(X)$; par restriction et passage au quotient, il induit un isomorphisme

$$\theta_{c,k}: TS^{(k)}(E) = TS^{(k)}(E)/TS^{(k-1)}(E) \rightarrow T_x^{(k)}(X)/T_x^{(k-1)}(X).$$

D'autre part, c définit un isomorphisme, déjà noté θ_c , de E sur l'espace tangent $T_x(X)$, cf. 5.5.1. Notons i_k le composé

$$T_x^{(k)}(X)/T_x^{(k-1)}(X) \xrightarrow{\theta_{c,k}^{-1}} TS^{(k)}(E) \xrightarrow{TS^{(k)}(\theta_c)} TS^{(k)}(T_x(X)).$$

L'isomorphisme i_k est indépendant du choix de c ; pour $k = 1$, on l'utilise pour identifier $T_x^{(1)+}(X) = T_x^{(1)}(X)/T_x^{(0)}(X)$ à l'espace tangent $T_x(X)$. Si $t \in T_x^{(k)}(X)$, on se permet de noter $i_k(t)$ l'image par i_k de la classe de t modulo $T_x^{(k-1)}(X)$.

Posons

$$\text{gr}_k T_x^{(r)}(X) = T_x^{(k)}(X)/T_x^{(k-1)}(X) \quad \text{et} \quad \text{gr } T_x^{(r)}(X) = \bigoplus_{0 \leq k \leq r} \text{gr}_k T_x^{(r)}(X).$$

On dit que $\text{gr } T_x^{(r)}(X)$ est le *gradué associé* à la filtration croissante $(T_x^{(k)}(X))_{k \leq r}$ de $T_x^{(r)}(X)$. Les i_k définissent un *isomorphisme* d'espaces vectoriels gradués

$$i: \text{gr } T_x^{(r)}(X) \rightarrow TS^{(r)}(T_x(X)).$$

Si $r = \infty$ ou ω , i est un isomorphisme de $\text{gr } T_x^{(r)}(X)$ sur $TS(T_x(X))$. Lorsque l'on désire préciser x (ou X , ou les deux), on écrit i_x (ou i_X , ou $i_{X,x}$) à la place de i .

13.3.2. Outre les hypothèses ci-dessus, supposons que X soit *localement de dimension finie*. Les isomorphismes i_k relatifs aux différents points de X définissent un *isomorphisme de fibrés vectoriels*

$$i_k: T^{(k)}(X)/T^{(k-1)}(X) \rightarrow TS^k(T(X))$$

où $TS^k(T(X))$ désigne le fibré vectoriel de classe C^{r-1} déduit de $T(X)$ par le foncteur vectoriel en dimension finie TS^k (cf. 7.6.5). Pour $k \geq 1$, i_k est un isomorphisme de classe C^{r-k} ; pour $k = 0$, c'est l'application identique du fibré trivial K_X .

13.3.3. *Exemple.* — Les hypothèses étant comme ci-dessus, soit $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ un système de coordonnées de X en x . Notons $(\partial_i, x)_{1 \leq i \leq n}$, la base de $T_x(X)$ définie par ξ (cf. 5.5.8) et notons $((\Delta_\xi^a)_x)_{|\alpha| \leq k}$, celle de $T_x^{(k)}(X)$ définie en 13.2.6. On a :

$$\begin{aligned} i_k((\Delta_\xi^a)_x) &= 0 & \text{si } |\alpha| < k \\ i_k((\Delta_\xi^a)_x) &= \gamma_{a_1}(\partial_1, x) \cdots \gamma_{a_n}(\partial_n, x) & \text{si } |\alpha| = k. \end{aligned}$$

¹ Ici encore, le produit des $\gamma_{a_i}(\partial_i, x)$ est un *produit symétrique* dans $TS(T_x(X))$.

13.3.4. Supposons que K soit de caractéristique zéro ou que X soit localement de dimension finie. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq r$ et soit $x \in X$; soit F un espace de Banach. D'après 12.6.8, on a une suite exacte

$$(i) \quad 0 \rightarrow P_k(T_x(X); F) \xrightarrow{i} P_x^k(F_X) \xrightarrow{\sigma} P_x^{k-1}(F_X) \rightarrow 0,$$

avec $\sigma = r^{k, k-1}$. D'autre part, d'après 13.3.1, on a une suite exacte

$$(ii) \quad 0 \leftarrow TS^k(T_x(X)) \xleftarrow{i} T_x^{(k)}(X) \xleftarrow{s} T_x^{(k-1)}(X) \leftarrow 0,$$

où s est l'inclusion de $T_x^{(k-1)}(X)$ dans $T_x^{(k)}(X)$ et $i = i_k$. Ces suites exactes sont « accouplées dans F ». Plus précisément, écrivons-les sous la forme:

$$(i) \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\sigma} C \rightarrow 0$$

$$(ii) \quad 0 \leftarrow A' \xleftarrow{i} B' \xleftarrow{s} C' \leftarrow 0.$$

Si $a \in A$ et $a' \in A'$, l'élément $\langle a, a' \rangle$ de F est défini par 13.1.2; si $b \in B$ et $b' \in B'$, (resp. si $c \in C$ et $c' \in C'$), l'élément $\langle b, b' \rangle$ (resp. $\langle c, c' \rangle$) de F est défini par 13.2.2; on a alors:

$$\langle ia, b' \rangle = \langle a, ib' \rangle \quad \text{et} \quad \langle \sigma b, c' \rangle = \langle b, sc' \rangle \quad \text{si} \quad a \in A, \quad b \in B, \quad b' \in B', \quad c' \in C'.$$

13.3.5. Soit Y une variété de classe C^r , soit $\varphi: X \rightarrow Y$ un morphisme de classe C^r et soient $x \in X$, $y \in Y$ tels que $y = \varphi(x)$. L'application $\varphi_*: T_x^{(r)}(X) \rightarrow T_y^{(r)}(Y)$ définie en 13.2.3 est compatible avec les filtrations de ces espaces; elle définit par passage aux gradués associés une application linéaire

$$\text{gr}(\varphi_*): \text{gr } T_x^{(r)}(X) \rightarrow \text{gr } T_y^{(r)}(Y).$$

Notons d'autre part $TS^{(r)}(T_x(\varphi))$ l'application de $TS^{(r)}(T_x(X))$ dans $TS^{(r)}(T_y(Y))$ induite par le prolongement canonique $TS(T_x(\varphi))$ de $T_x(\varphi)$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{gr } T_x^{(r)}(X) & \xrightarrow{\text{gr}(\varphi_*)} & \text{gr } T_y^{(r)}(Y) \\ \downarrow i_{x,x} & & \downarrow i_{y,y} \\ TS^{(r)}(T_x(X)) & \xrightarrow{TS^{(r)}(T_x(\varphi))} & TS^{(r)}(T_y(Y)) \end{array}$$

est commutatif.

13.3.6. Supposons que K soit de caractéristique zéro. En utilisant les isomorphismes $\varphi_M: S^k(M) \rightarrow TS^k(M)$ définis en A, IV, § 5, n° 8, on peut remplacer, dans tout ce qui précède, les $TS^k(T_x(X))$ par les puissances symétriques k -ièmes $S^k(T_x(X))$ de l'espace tangent $T_x(X)$.

13.4. Produit tensoriel de distributions ponctuelles

13.4.1. Soient X_1 et X_2 deux variétés de classe C^r , soient $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ et $t_1 \in T_{x_1}^{(k_1)}(X_1)$, $t_2 \in T_{x_2}^{(k_2)}(X_2)$ avec $k_1 + k_2 \leq r$. Posons $X = X_1 \times X_2$, $x = (x_1, x_2)$ et

$k = k_1 + k_2$. Pour $i = 1, 2$, soit $c_i = (U_i, \varphi_i, E_i)$ une carte de X_i centrée en x_i et notons \tilde{t}_i l'élément de $\text{TS}(E_i)$ tel que $\theta_c(\tilde{t}_i) = t_i$, cf. 13.2.1. Soit σ l'isomorphisme canonique de $\text{TS}(E_1) \otimes \text{TS}(E_2)$ sur $\text{TS}(E_1 \times E_2)$, cf. A, IV, § 5, n° 5. L'élément $\sigma(\tilde{t}_1 \otimes \tilde{t}_2)$ est le *produit symétrique* de \tilde{t}_1 et \tilde{t}_2 (identifiés à des éléments de $\text{TS}(E_1 \times E_2)$) grâce aux injections canoniques $\text{TS}(E_i) \rightarrow \text{TS}(E_1 \times E_2)$; il appartient à $\text{TS}^{(k)}(E_1 \times E_2)$. Posons $c = c_1 \times c_2$; c'est une carte de X centrée en x . L'image par θ_c de $\sigma(\tilde{t}_1 \otimes \tilde{t}_2)$ est un élément de $\text{T}_x^{(k)}(X)$, qui ne dépend pas du choix des cartes c_i . On l'appelle le *produit direct*, ou le *produit tensoriel symétrique* (ou même simplement le *produit tensoriel*) de t_1 et t_2 et on le note $t_1 \times t_2$ ou $t_1 \otimes t_2$.

On a $\varepsilon_{x_1} \otimes \varepsilon_{x_2} = \varepsilon_x$. Le terme constant de $t_1 \otimes t_2$ est le produit des termes constants de t_1 et de t_2 .

L'isomorphisme $(y_1, y_2) \mapsto (y_2, y_1)$ de $X_1 \times X_2$ sur $X_2 \times X_1$ transforme $t_1 \otimes t_2$ en $t_2 \otimes t_1$.

13.4.2 (« Associativité et fonctorialité »). Soient X_i ($i = 1, 2, 3$) des variétés de classe C^r , et soient $x_i \in X_i$, $t_i \in \text{T}_{x_i}^{(k_i)}(X_i)$ avec $k_1 + k_2 + k_3 \leq r$. On a

$$(t_1 \otimes t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3);$$

on note cette distribution ponctuelle $t_1 \otimes t_2 \otimes t_3$. On définit de même des produits tensoriels finis quelconques.

Soient $\varphi_1: X_1 \rightarrow Y_1$ et $\varphi_2: X_2 \rightarrow Y_2$ des morphismes de variétés de classe C^r , et soient $t_1 \in \text{T}^{(k_1)}(X_1)$, $t_2 \in \text{T}^{(k_2)}(X_2)$ avec $k_1 + k_2 \leq r$. On a

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)_*(t_1 \otimes t_2) = \varphi_{1*}(t_1) \otimes \varphi_{2*}(t_2).$$

13.4.3. Les notations étant celles de 13.4.1, soient F_1, F_2 et F des espaces polynormés séparés, et $(u_1, u_2) \mapsto u_1 \cdot u_2$ une application bilinéaire continue de $F_1 \times F_2$ dans F . Soit

$$f_i: X_i \rightarrow F_i \quad (i = 1, 2)$$

une application de classe C^r , et définissons $f_1 \otimes f_2: X \rightarrow F$ par

$$(f_1 \otimes f_2)(y_1, y_2) = f_1(y_1) \cdot f_2(y_2).$$

L'application $f_1 \otimes f_2$ est de classe C^r , et l'on a

$$\langle f_1 \otimes f_2, t_1 \otimes t_2 \rangle = \langle f_1, t_1 \rangle \cdot \langle f_2, t_2 \rangle.$$

13.4.4. Les notations étant celles de 13.4.1, soit f une application de classe C^r de X dans un espace polynormé séparé F . Si $y_1 \in X_1$, notons f_{y_1} l'application $y_2 \mapsto f(y_1, y_2)$ de X_2 dans F et posons $g(y_1) = \langle f_{y_1}, t_2 \rangle$. La fonction $g: X_1 \rightarrow F$ ainsi définie est de classe C^{r-k_1} , et l'on a

$$\langle f, t_1 \otimes t_2 \rangle = \langle g, t_1 \rangle,$$

autrement dit

$$\langle f, t_1 \otimes t_2 \rangle = \langle y_1 \mapsto \langle y_2 \mapsto f(y_1, y_2), t_2 \rangle, t_1 \rangle.$$

On a de même

$$\langle f, t_1 \otimes t_2 \rangle = \langle y_2 \mapsto \langle y_1 \mapsto f(y_1, y_2), t_1 \rangle, t_2 \rangle.$$

13.4.5. Les notations étant celles de 13.4.1, soit

$$\alpha_{k_1, k_2}: T_{x_1}^{(k_1)}(X_1) \otimes T_{x_2}^{(k_2)}(X_2) \rightarrow T_x^{(k)}(X)$$

l'application linéaire définie par l'application bilinéaire $(t_1, t_2) \mapsto t_1 \otimes t_2$; cette application est *injective*; elle est bijective si k_1 et k_2 sont infinis.

Si $n \leq r$, notons $T_x^{(n)}(X_1, X_2)$ le sous-espace vectoriel de $T_{x_1}^{(n)}(X_1) \otimes T_{x_2}^{(n)}(X_2)$ engendré par les sous-espaces $T_{x_1}^{(k_1)}(X_1) \otimes T_{x_2}^{(k_2)}(X_2)$ pour $k_1 + k_2 \leq n$. Il existe une application linéaire

$$\alpha_n: T_x^{(n)}(X_1, X_2) \rightarrow T_x^{(n)}(X)$$

et une seule qui prolonge les applications α_{k_1, k_2} définies ci-dessus; c'est un isomorphisme. Dans ce qui suit, on identifie $T_x^{(n)}(X)$, au moyen de α_n^{-1} , au sous-espace vectoriel $T_x^{(n)}(X_1, X_2)$ de $T_{x_1}^{(n)}(X_1) \otimes T_{x_2}^{(n)}(X_2)$.

13.4.6. Conservons les notations de 13.4.5 et 13.3.1. Par passage au quotient, α_{k_1, k_2} définit une application linéaire

$$\varepsilon_{k_1, k_2}: \text{gr}_{k_1} T_{x_1}^{(r)}(X_1) \otimes \text{gr}_{k_2} T_{x_2}^{(r)}(X_2) \rightarrow \text{gr}_k T_x^{(r)}(X).$$

Les applications ε_{k_1, k_2} ($k_1 + k_2 \leq r$) sont les composantes d'une application linéaire graduée de degré zéro

$$\varepsilon: \bigoplus_{k_1 + k_2 \leq r} (\text{gr}_{k_1} T_{x_1}^{(r)}(X_1) \otimes \text{gr}_{k_2} T_{x_2}^{(r)}(X_2)) \rightarrow \bigoplus_{k \leq r} \text{gr}_k T_x^{(r)}(X)$$

qui est un *isomorphisme*. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{k_1 + k_2 \leq r} (\text{gr}_{k_1} T_{x_1}^{(r)}(X_1) \otimes \text{gr}_{k_2} T_{x_2}^{(r)}(X_2)) & \xrightarrow{\varepsilon} & \text{gr}_k T_x^{(r)}(X) \\ \downarrow i_{12} & & \downarrow i_x \\ \bigoplus_{k_1 + k_2 \leq r} (TS^{k_1}(T_{x_1}(X_1)) \otimes TS^{k_2}(T_{x_2}(X_2))) & \xrightarrow{\sigma} & \bigoplus_{k \leq r} TS^k(T_{x_1}(X_1) \times T_{x_2}(X_2)) \end{array}$$

est commutatif (dans ce diagramme, i_{12} désigne l'homomorphisme induit par $i_{x_1} \otimes i_{x_2}$ et σ est l'isomorphisme défini en A, IV, § 5, n° 5). Si r est infini, ce diagramme s'écrit simplement:

$$\begin{array}{ccc} \text{gr } T_{x_1}^{(\infty)}(X_1) \otimes \text{gr } T_{x_2}^{(\infty)}(X_2) & \xrightarrow{\varepsilon} & \text{gr } T_x^{(\infty)}(X) \\ \downarrow i_{x_1} \otimes i_{x_2} & & \downarrow i_x \\ TS(T_{x_1}(X_1)) \otimes TS(T_{x_2}(X_2)) & \xrightarrow{\sigma} & TS(T_x(X)). \end{array}$$

13.5. Coproduits

Dans ce numéro, X désigne une variété de classe C^r et x un point de X .

13.5.1. Soit $k \leq r$. Si Δ est l'application diagonale $y \mapsto (y, y)$ de X dans $X \times X$, alors Δ_* applique $T_x^{(k)}(X)$ dans $T_{(x, x)}^{(k)}(X \times X)$, qui est un sous-espace vectoriel de

$T_x^{(k)}(X) \otimes T_x^{(k)}(X)$, cf. 13.4.5. On obtient ainsi une application linéaire, notée encore Δ_* (ou c):

$$T_x^{(k)}(X) \rightarrow T_x^{(k)}(X) \otimes T_x^{(k)}(X);$$

on l'appelle le *coproduit* attaché à $T_x^{(k)}(X)$. Muni de ce coproduit, $T_x^{(k)}(X)$ est une *cogèbre* coassociative et cocommutative (A, III, p. 144–145); elle admet pour coïtité la forme linéaire qui associe à une distribution ponctuelle son terme constant (13.2.1). Si $k' \leq k$, l'inclusion de $T_x^{(k')}(X)$ dans $T_x^{(k)}(X)$ est un morphisme de cogèbres.

Si $c = (U, \varphi, E)$ est une carte de X centrée en x , l'isomorphisme

$$\theta_c: T^{(k)}(E) \rightarrow T_x^{(k)}(X)$$

est un isomorphisme de cogèbres, $T^{(k)}(E)$ étant muni du coproduit induit par celui de $TS(E)$, cf. A, IV, § 5, n° 7.

Si $\varphi: X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés de classe C^r , l'application de $T_x^{(k)}(X)$ dans $T_{\varphi(x)}^{(k)}(Y)$ induite par φ_* est un morphisme de cogèbres.

13.5.2. Soient F_1, F_2 et F des espaces polynormés séparés, et $(u_1, u_2) \mapsto u_1 \cdot u_2$ une application bilinéaire continue de $F_1 \times F_2$ dans F . Soit $t \in T_x^{(r)}(X)$ et soit $c(t) = \sum_j u_j \otimes v_j$ (u_j, v_j dans $T_x^{(r)}(X)$) son image par le coproduit. Soient $f_i: X \rightarrow F_i$ ($i = 1, 2$) des applications de classe C^r . On a

$$\langle f_1 \cdot f_2, t \rangle = \sum_j \langle f_1, u_j \rangle \cdot \langle f_2, v_j \rangle,$$

ce que l'on écrit, par abus de notation:

$$\langle f_1 \cdot f_2, t \rangle = \langle f_1 \otimes f_2, c(t) \rangle.$$

13.5.3. Soit $t \in T_x^{(k)}(X)$, où $k \leq r$.

a) Pour que $c(t) = t \otimes t$, il faut et il suffit que t soit égal à 0 ou à ε_x .

b) Pour que $c(t) = t \otimes \varepsilon_x + \varepsilon_x \otimes t$, il faut et il suffit que t soit un vecteur tangent, i.e. que l'on ait $t \in T_x^{(1)+}(X)$.

13.6. Distributions à support fini

13.6.1. Soit X une variété de classe C^r , et soit $k \leq r$. On note $\mathcal{T}^{(k)}(X)$ la somme directe des espaces $T_x^{(k)}(X)$, pour $x \in X$. Un élément de $\mathcal{T}^{(k)}(X)$ est appelé une *distribution à support fini* sur X , d'ordre $\leq k$. Si $f: X \rightarrow F$ est une fonction de classe C^r à valeurs dans un espace polynormé séparé F , et si $t = \sum_{x \in X} t_x$, où $t_x \in T_x^{(k)}(X)$ pour tout $x \in X$ est une distribution à support, fini, on pose

$$\langle f, t \rangle = \sum_{x \in X} \langle f, t_x \rangle.$$

De même, on pose $c(t) = \sum_{x \in X} c(t_x)$, ce qui munit $\mathcal{T}^{(k)}(X)$ d'une structure de cogèbre coassociative, cocommutative, et possédant une coïtité $t \mapsto \langle 1, t \rangle$. Les inclusions $\mathcal{T}^{(k')}(X) \rightarrow \mathcal{T}^{(k)}(X)$, où $k' \leq k$, sont des morphismes de cogèbres.

Si $\varphi: X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés de classe C^r , les applications $T_x^{(k)}(\varphi): T_x^{(k)}(X) \rightarrow T_{\varphi(x)}^{(k)}(Y)$ relatives aux divers points x de X définissent une application linéaire φ_* de $\mathcal{T}^{(k)}(X)$ dans $\mathcal{T}^{(k)}(Y)$, qui est un morphisme de cogèbres.

Si X_1 et X_2 sont deux variétés de classe C^r , les applications α_k^{-1} (cf. 13.4.5) définissent une application linéaire

$$\mathcal{T}^{(k)}(X_1 \times X_2) \rightarrow \mathcal{T}^{(k)}(X_1) \otimes \mathcal{T}^{(k)}(X_2)$$

qui est injective; c'est un morphisme de cogèbres. Si $k = \infty$ ou ω , c'est un isomorphisme de cogèbres.

13.6.2. Soit X une variété de classe C^r , et soit V un K -espace vectoriel de dimension finie. Un élément de $\mathcal{T}^{(r)}(X) \otimes V$ s'appelle une distribution à support fini sur X à valeurs dans V . Lorsque $K = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{C}$, une telle distribution est également appelée une *distribution complexe* à support fini sur X . Les définitions et résultats des n°s précédents s'étendent aussitôt, par linéarité, aux distributions à valeurs dans V .

13.7. Affaiblissement de structure

On suppose $K = \mathbf{R}$. Soit $r' \in \mathbf{N}_K$ tel que $r' \leq r$. Soit X une variété de classe C^r , et soit X' la variété de classe $C^{r'}$ obtenue par affaiblissement de structure (5.13.1). Soit $x \in X$, et soit $t \in T_x^{(k)}(X)$, avec $k \leq r'$. Choisissons une carte $c = (U, \varphi, E)$ de X centrée en x , et soit \tilde{t} l'élément de $TS^{(k)}(E)$ tel que $\theta_c(\tilde{t}) = t$. Comme c est une carte de X' centrée en x , l'élément $t' = \theta_c(\tilde{t})$ de $T_x^{(k)}(X')$ est défini; il ne dépend pas du choix de c . L'application $t \mapsto t'$ est une bijection de $T_x^{(k)}(X)$ sur $T_x^{(k)}(X')$ par laquelle on *identifie* ces deux espaces. Les identifications ainsi obtenues sont compatibles avec les opérations $\langle f, t \rangle$, $\varphi_*(t)$, $t_1 \otimes t_2$, $c(t)$, ... des n°s précédents.

§ 14. Opérateurs différentiels

Dans ce paragraphe, X désigne une variété *localement de dimension finie* de classe C^r , où $r \in \mathbb{N}_\infty$; on note E et F deux fibrés vectoriels de rang fini de classe C^r et de base X .

Toutes les variétés et tous les fibrés vectoriels considérés sont supposés localement de dimension finie.

14.1. Opérateurs différentiels

14.1.1. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq r$, et soit $P^k(E)$ le fibré des jets de sections d'ordre k de E (12.6.1). Posons

$$D^k(E, F) = \mathcal{L}(P^k(E); F).$$

C'est un fibré vectoriel de base X et de classe C^{r-k} . Une section de ce fibré sur un ouvert U de X s'identifie à une application

$$D: P^k(E)|U \rightarrow F|U$$

qui commute à la projection sur U et est linéaire sur chaque fibre; une telle section est appelée un *opérateur différentiel sur U , de type $E \rightarrow F$, et d'ordre $\leq k$* . Soit $h \in \mathbb{N}_\infty \cup \{0\}$, avec $0 \leq h \leq r - k$. On note $\mathcal{D}_U^{k,h}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs différentiels sur U , de type $E \rightarrow F$ et d'ordre $\leq k$, qui sont *de classe C^h* (comme sections de $D^k(E, F)$, ou comme morphismes de $P^k(E)|U$ dans $F|U$, cela revient au même). Si $M = D^k(E, F)$, on a $\mathcal{D}_U^{k,h}(E, F) = \mathcal{S}_M^h(U)$; c'est un module sur $\mathcal{C}^h(U)$, cf. 7.4.1.

Si $0 \leq k' \leq k$, le morphisme $r^{k,k'}: P^k(E) \rightarrow P^{k'}(E)$ (cf. 12.6.6) définit une *injection* de $D^{k'}(E, F)$ dans $D^k(E, F)$; tout opérateur différentiel d'ordre $\leq k'$ est ainsi identifié à un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$. Un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ qui n'est pas d'ordre $\leq k - 1$ est dit parfois *d'ordre k* . Si $h \in \mathbb{N}_\infty \cup \{0\}$ et $h \leq r - k$, et si U est un ouvert de X , on a :

$$0 \subset \mathcal{D}_U^{0,h}(E, F) \subset \mathcal{D}_U^{1,h}(E, F) \subset \dots \subset \mathcal{D}_U^{k,h}(E, F).$$

Si $r = \infty$ ou ω , on note $\mathcal{D}_U^{\infty,h}(E, F)$ la réunion des $\mathcal{D}_U^{k,h}(E, F)$ pour $k \geq 0$; un élément de cette réunion s'appelle un *opérateur différentiel sur U d'ordre borné* (de type $E \rightarrow F$, de classe C^h) ou parfois simplement un *opérateur différentiel sur U* .

14.1.2 (« Opérateurs d'ordre zéro »). On a $P^0(E) = E$ (12.5.1) et $D^0(E, F) = \mathcal{L}(E; F)$. Si U est ouvert dans X , et si $h \in \mathbb{N}_\infty \cup \{0\}$ et $h \leq r$, un élément de $\mathcal{D}_U^{0,h}(E, F)$ est un morphisme de classe C^h de $E|U$ dans $F|U$.

14.1.3 (« Affaiblissement de structure »). Supposons $K = \mathbf{R}$, et soit $r' \in \mathbf{N}_\mathbf{R}$ avec $r' \leq r$. Soient X' , E' et F' la variété et les fibrés vectoriels de classe $C^{r'}$ obtenus par affaiblissement de structure à partir de X , E , et F respectivement. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq r'$. Alors $P^k(E')$ est le fibré de classe $C^{r'-k}$ déduit de $P^k(E)$ par affaiblissement de structure, et l'on a un résultat analogue pour $D^k(E', F')$. En particulier, si U est ouvert dans X , et si $0 \leq h \leq r - k'$, on a $\mathcal{D}_U^{k,h}(E', F') = \mathcal{D}_U^{k,h}(E, F)$.

14.1.4. Soit D un opérateur différentiel sur X , de type $E \rightarrow F$, d'ordre $\leq k$ (où $0 \leq k \leq r$). Soit U un ouvert de X , et soit s une section, de classe C^m , de E sur U , avec $m \in \mathbf{N}_\mathbf{K} \cup \{0\}$ et $k \leq m \leq r$. Alors $j^k(s)$ est une section de classe C^{m-k} de $P^k(E)$ sur U (12.6.1); son image par D est notée $D_U(s)$, ou $D(s)$. C'est une section de $F|U$. Supposons D de classe C^h , où $h = m - k$. Alors $D_U(s)$ est de classe C^h , et les applications

$$D_U: \mathcal{S}_E^m(U) \rightarrow \mathcal{S}_F^h(U)$$

ainsi obtenues jouissent des propriétés suivantes:

- (1) D_U est K -linéaire.
- (2) Pour tout $s \in \mathcal{S}_E^m(U)$ et tout ouvert V de U , on a $D_V(s|V) = D_U(s)|V$.
- (3) Pour tout $s \in \mathcal{S}_E^m(U)$ et tout $x \in U$ tels que $j_x^k(s) = 0$, on a $D_U(s)(x) = 0$.
- (3') Pour tout système de coordonnées $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ dans U et tout repère $s = (s_1, \dots, s_d)$ de E sur U (7.4.4), il existe des sections $n_{i,\alpha}$ ($1 \leq i \leq d$, $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| \leq k$) de F sur U , de classe C^h et telles que, pour toute famille $(f_i)_{1 \leq i \leq d}$ d'éléments de $\mathcal{C}^m(U)$, on ait

$$D_U\left(\sum_{1 \leq i \leq d} f_i \cdot s_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq d, |\alpha| \leq k} \Delta_\xi^\alpha(f_i) \cdot n_{i,\alpha}, \quad (\text{cf. 13.2.6}).$$

- (4) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^m(U)$ et toute application θ de $\mathcal{S}_U^m(E)$ dans $\mathcal{S}_U^h(F)$, notons $\text{ad}(f)\theta$ l'application

$$s \mapsto f \cdot \theta(s) - \theta(f \cdot s)$$

de $\mathcal{S}_U^m(E)$ dans $\mathcal{S}_U^h(F)$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^m(U)$, il existe un opérateur différentiel L sur U , de type $E \rightarrow F$, d'ordre $\leq k - 1$ et de classe C^h tel que

$$(\text{ad}(f)D_U)(s) = L_U(s) \quad \text{pour tout } s \in \mathcal{S}_U^m(E).$$

- (5) On a

$$\text{ad}(f_0) \dots \text{ad}(f_k)D_U = 0 \quad \text{quels que soient } f_0, \dots, f_k \text{ dans } \mathcal{C}^m(U).$$

Si l'on pose $I = \{0, \dots, k\}$ et $f_H = \prod_{i \in H} f_i$ pour toute partie H de I , la relation précédente équivaut à:

$$\sum_{H \in I} (-1)^{\text{Card}(H)} f_H \cdot D_U(f_{I-H} \cdot s) = 0$$

quelles que soient f_0, \dots, f_k dans $\mathcal{C}^m(U)$ et s dans $\mathcal{S}_E^m(U)$.

14.1.5 (« Caractérisation des opérateurs différentiels »). Soient k, m et $h = m - k$ comme dans 14.1.4. Pour tout ouvert U de X , soit D_U une application de $\mathcal{S}_E^m(U)$ dans $\mathcal{S}_F^h(U)$. Supposons que les conditions 1, 2, 3 (resp. 1, 2, 3') de 14.1.4 soient vérifiées

pour toute partie ouverte U de X . Il existe alors un élément D de $\mathcal{D}_X^{k,h}(E, F)$ et un seul tel que les D_U soient les applications correspondantes.⁽¹⁾ Dans ce qui suit, on identifie D à la famille des D_U .

Lorsque $m = \infty$ ou ω , on a $h = m$ et l'on peut remplacer les conditions (3) et (3') par l'une des conditions (4) et (5).

14.1.6 (« Opérateurs scalaires »). Supposons que E et F soient égaux au fibré trivial K_X . Un opérateur différentiel de type $E \rightarrow F$ s'appelle alors un opérateur différentiel *scalaire* ou simplement un opérateur différentiel; s'il est d'ordre $\leq k$, c'est une section du fibré $\mathcal{L}(P^k(X); K_X) = P^k(X)^*$, dual du fibré $P^k(X)$; en utilisant l'isomorphisme

$$i^{-1}: P^k(X)^* \rightarrow T^{(k)}(X) \quad (\text{cf. 13.2.5}),$$

on voit qu'un opérateur différentiel scalaire d'ordre $\leq k$ s'identifie à une *section* du fibré vectoriel $T^{(k)}(X)$, i.e. à un *champ de distributions ponctuelles d'ordre $\leq k$* .

Prenons en particulier pour X un ouvert de K^n , où n est un entier ≥ 0 . Les champs de distributions ponctuelles

$$\Delta^\alpha: x \mapsto \Delta_x^\alpha \quad (\text{cf. 13.2.6})$$

sont des opérateurs différentiels scalaires de classe C^ω . Pour tout $h \in N_K$, les Δ^α pour $(|\alpha| \leq k)$ forment une *base* du $\mathcal{C}^h(X)$ -module $\mathcal{D}_X^{k,h}(K_X, K_X)$.

14.1.7 (« Opérateurs différentiels complexes sur une variété réelle »). Supposons $K = \mathbb{R}$ et que les fibrés vectoriels E et F soient munis de *structures complexes* (8.8.1); soit k un entier tel que $0 \leq k \leq r$. Le fibré $P^k(E)$ est alors muni d'une structure complexe (12.6.3); le fibré $\mathcal{L}_C(P^k(E); F)$ (7.8.5) des applications linéaires *complexes* de $P^k(E)$ dans F est un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{L}(P^k(E); F) = D^k(E, F)$; on le note $D_C^k(E, F)$. Une section de $D_C^k(E, F)$ est appelée un opérateur différentiel *complexe*, de type $E \rightarrow F$ et d'ordre $\leq k$. Si $h \in N_K$ et $h \leq r - k$, et si U est un ouvert de X , on note de même $\mathcal{D}_U^{k,h}(E, F)_C$ l'espace des sections de classe C^h de $D_C^k(E, F)$ sur U ; c'est un C -espace vectoriel. Les autres définitions et résultats de ce paragraphe s'étendent de manière analogue aux opérateurs différentiels complexes; nous en laissons la formulation au lecteur.

14.1.8 (« Composition »). Soit G un fibré vectoriel de classe C^r et de base X . Soient k' et k'' des entiers positifs de somme $k \leq r$, et soit D' (resp. D'') un opérateur différentiel sur X , de type $E \rightarrow F$ (resp. de type $F \rightarrow G$), d'ordre $\leq k'$ (resp. $\leq k''$). Supposons $D': P^{k'}(E) \rightarrow F$ de classe $C^{h'}$, avec $h' \in N_K \cup \{0\}$ et $k'' \leq h' \leq r - k'$; l'application

$$D'_* = P^{k''}(D''): P^{k''}(P^{k'}(E)) \rightarrow P^{k''}(F)$$

est de classe $C^{h'-k''}$ (12.6.3). Soit β l'homomorphisme canonique de $P^k(E)$ dans $P^{k''}(P^{k'}(E))$, cf. 12.6.5. En composant les applications

$$P^k(E) \xrightarrow{\beta} P^{k''}(P^{k'}(E)) \xrightarrow{D'_*} P^{k''}(F) \xrightarrow{D''} G,$$

on obtient un opérateur différentiel de type $E \rightarrow G$ et d'ordre $\leq k$. Cet opérateur est dit le *composé* de D'' et D' ; on le note $D'' \circ D'$.

¹ Il suffit d'ailleurs que la condition (3') soit vérifiée pour une famille (ξ_λ) de systèmes de coordonnées et une famille de repères (s_λ) dont les domaines recouvrent X .

Si U est un ouvert de X , et si $s \in \mathcal{S}_E^k(U)$, on a

$$(D'' \circ D')(s) = D''(D'(s))$$

(où les deux membres sont des sections de G sur U); cela justifie la terminologie et la notation adoptées.

Supposons maintenant D'' de classe $C^{h''}$, avec $h'' \in \mathbb{N}_K \cup \{0\}$ et $h'' \leq r - k''$. Alors $D'' \circ D'$ est de classe C^h , avec $h = \inf(h' - k'', h'')$.

Supposons que l'on ait $E = F = G$, et que $k' \leq h''$, auquel cas $D' \circ D''$ est défini. Alors $D' \circ D'' - D'' \circ D'$ est un opérateur différentiel de type $E \rightarrow E$ et d'ordre $\leq k - 1$; on le note $[D', D'']$.

14.1.9 (« Associativité »). Les notations et hypothèses étant celles de 14.1.8, soit H un fibré vectoriel de classe C^r et de base X , et soit D''' un opérateur différentiel sur X , de type $G \rightarrow H$ et d'ordre $\leq k'''$, avec $k' + k'' + k''' \leq r$. On suppose que D' est de classe $C^{h'}$, avec $h' \in \mathbb{N}_K \cup \{0\}$ et $k'' + k''' \leq h' \leq r - k'$ et que D'' est de classe $C^{h''}$, avec $h'' \in \mathbb{N}_K \cup \{0\}$ et $k''' \leq h'' \leq r - k''$. Alors les composés

$$D''' \circ (D'' \circ D') \quad \text{et} \quad (D''' \circ D'') \circ D'$$

sont définis et sont égaux.

14.1.10. Exemples

a) Soit U un ouvert de X , soit $D \in \mathcal{D}_U^{k,h}(E, F)$ avec $h \in \mathbb{N}_K \cup \{0\}$ et $h \leq r - k$, et soit $f \in \mathcal{C}^{h+k}(U)$ (resp. $f \in \mathcal{C}^h(U)$). La multiplication par f dans E (resp. F) est un opérateur différentiel sur U d'ordre ≤ 0 , et de type $E \rightarrow E$ (resp. $F \rightarrow F$), cf. 14.1.2. Les composés $D \circ f$ et $f \circ D$ sont définis et appartiennent à $\mathcal{D}_U^{k,h}(E; F)$; on pose

$$\text{ad}(f)D = f \circ D - D \circ f \in \mathcal{D}_U^{k-1,h}(E, F),$$

cf. 14.1.4, (4). On munit ainsi $\mathcal{D}_U^{k,h}(E, F)$ d'une structure de $\mathcal{C}^{h+k}(U)$ -module à droite (resp. de $\mathcal{C}^h(U)$ -module à gauche). La structure de module à gauche coïncide avec celle de 14.1.1.

b) Supposons $r = \infty$ ou $r = \omega$. Les opérateurs différentiels de type $E \rightarrow E$ et de classe C^r forment une K -algèbre associative à élément unité.

c) Prenons pour X un ouvert de K^n . Les opérateurs différentiels scalaires Δ^α (14.1.6) vérifient les formules

$$\Delta^\alpha \circ \Delta^\beta = ((\alpha, \beta)) \Delta^{\alpha+\beta}.$$

Ils commutent entre eux. Notons D_i l'opérateur E^i (« i -ème dérivée partielle »). Si K est de caractéristique 0, on a

$$\Delta^\alpha = \frac{1}{\alpha!} D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Si K est de caractéristique $p \neq 0$, on a $D_i^p = 0$ pour tout i .

14.1.11 (« Opérateurs multidifférentiels »). Soient E_1, \dots, E_n des espaces fibrés vectoriels de classe C^r et de base X , et soient k, k_1, \dots, k_n des entiers appartenant à $\{0, r\}$. Posons

$$L(k_1, \dots, k_n) = \mathcal{L}(P^{k_1}(E_1) \otimes \dots \otimes P^{k_n}(E_n); F).$$

Si $k_i \leq k$ pour tout i , les projections $r^{k, k_i}: P^k(E_i) \rightarrow P^{k_i}(E_i)$ permettent d'identifier le fibré $L(k_1, \dots, k_n)$ à un sous-fibré du fibré $L(k) = L(k, \dots, k)$. Il existe un plus petit sous-fibré $M(k)$ de $L(k)$ contenant tous les sous-fibrés $L(k_1, \dots, k_n)$, pour $k_1 + \dots + k_n = k$. Une section H de $M(k)$ est appelée un *opérateur n -différentiel* (ou *multidifférentiel*) *de type* $(E_1, \dots, E_n) \rightarrow F$ et d'ordre $\leq k$. Si s_i ($1 \leq i \leq n$) est une section de classe C^m ($m \in \mathbb{N}_k, m \geq k$) de E_i sur un ouvert U de X , on définit $H_U(s_1, \dots, s_n) = H(s_1, \dots, s_n)$ comme l'image par H de la section $j^k(s_1) \otimes \dots \otimes j^k(s_n)$ du fibré

$$P^k(E_1) \otimes \dots \otimes P^k(E_n).$$

C'est une section de $F|U$. Si H est de classe C^h , cette section est de classe C^p avec $p = \inf(m - k, h)$.

Lorsque E_1, \dots, E_n et F sont égaux à K_X , on dit que H est un opérateur n -différentiel (ou multidifférentiel) *scalaire*.

Exemple. — Soient J un ensemble fini, X un ouvert de K^J . Soit H un opérateur n -différentiel scalaire d'ordre $\leq k$ sur X . Il existe une famille unique de fonctions scalaires

$$c(\alpha(1), \dots, \alpha(n))_{(\alpha(1), \dots, \alpha(n)) \in \mathbb{N}^J}, \quad \sum_{i=1}^n |\alpha(i)| \leq k$$

sur X telles que

$$H_X(f_1, \dots, f_n) = \sum_{\alpha(1), \dots, \alpha(n)} c(\alpha(1), \dots, \alpha(n)) \Delta^{\alpha(1)}(f_1) \dots \Delta^{\alpha(n)}(f_n)$$

pour toute famille (f_1, \dots, f_n) de fonctions de classe C^k sur X . Pour que H soit de classe C^h , il faut et il suffit que les fonctions $c(\alpha(1), \dots, \alpha(n))$ soient de classe C^h .

14.2. Symboles

14.2.1. Soit k un entier positif $\leq r$. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow P_k(T(X); E) \xrightarrow{i} P^k(E) \xrightarrow{j} P^{k-1}(E) \rightarrow 0$$

du n° 12.6.8, où l'on a posé $j = r^{k, k-1}$. En appliquant le foncteur vectoriel $M \mapsto \mathcal{L}(M; F)$ à cette suite, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(P^{k-1}(E); F) \xrightarrow{j'} \mathcal{L}(P^k(E); F) \xrightarrow{\sigma_k} \mathcal{L}(P_k(T(X); E); F) \rightarrow 0$$

que l'on peut écrire:

$$0 \rightarrow D^{k-1}(E, F) \xrightarrow{j'} D^k(E, F) \xrightarrow{\sigma_k} S^k(E, F) \rightarrow 0$$

en posant

$$S^k(E, F) = \mathcal{L}(P_k(T(X); E); F).$$

L'homomorphisme $j' = \mathcal{L}(j; \text{Id}_F)$ est l'inclusion canonique de $D^{k-1}(E, F)$ dans $D^k(E, F)$; l'homomorphisme σ_k est égal par définition à $\mathcal{L}(i; \text{Id}_F)$. Si D est un opérateur différentiel de type $E \rightarrow F$ et d'ordre $\leq k$, son image par σ_k est une section $\sigma_k(D)$ de $S^k(E, F)$ que l'on appelle le *k -symbole* (ou simplement le *symbole*) de D ; on a $\sigma_k(D) = 0$ si et seulement si D est d'ordre $\leq k - 1$. Si D est de classe C^h , il en est de même de son symbole.

14.2.2 (« Identifications du fibré des symboles »). On peut écrire le fibré $S^k(E, F) = \mathcal{L}(P_k(T(X); E); F)$ de diverses manières. Tout d'abord, si $x \in X$, un élément de $P_k(T_x(X); E_x)$ s'identifie (13.1.2) à un élément de $\mathcal{L}(TS^k(T_x(X)); E_x)$. On obtient ainsi des identifications de fibrés vectoriels

$$P_k(T(X); E) = \mathcal{L}(TS^k(T(X)); E) = (TS^k(T(X)))^* \otimes E$$

et, en appliquant le foncteur vectoriel $M \mapsto \mathcal{L}(M; F) = M^* \otimes F$, on obtient :

$$S^k(E, F) = TS^k(T(X)) \otimes E^* \otimes F = TS^k(T(X)) \otimes \mathcal{L}(E; F).$$

On peut encore transformer l'expression précédente. Si M et N sont deux fibrés vectoriels, notons $Sym^k(M; N)$ le sous-fibré de $\mathcal{L}(M, \dots, M; N)$ formé des applications k -linéaires *symétriques*. On a un isomorphisme canonique

$$Sym^k(M; N) \rightarrow Sym^k(M; K_X) \otimes N;$$

d'autre part, la dualité entre $\otimes^k M$ et $\otimes^k M^*$ identifie $Sym^k(M; K_X)$ à $TS^k(M^*)$. On obtient ainsi une identification

$$Sym^k(M; N) = TS^k(M^*) \otimes N.$$

En appliquant cette formule à $M = T(X)^*$ et $N = \mathcal{L}(E; F)$, on a :

$$S^k(E, F) = TS^k(T(X)) \otimes \mathcal{L}(E; F) = Sym^k(T(X)^*; \mathcal{L}(E; F)).$$

Supposons K de caractéristique 0 ou $> k$. Si u est une application k -linéaire symétrique, notons \tilde{u} l'application polynomiale

$$x \mapsto \frac{1}{k!} u(x, \dots, x)$$

correspondante. L'application $u \mapsto \tilde{u}$ définit un isomorphisme

$$S^k(E, F) = Sym^k(T(X)^*, \mathcal{L}(E; F)) \rightarrow P_k(T(X)^*; \mathcal{L}(E; F)).$$

Ainsi, tout élément σ de $S^k(E, F)_x$, avec $x \in X$, peut être identifié à une *application polynomiale homogène* $\tilde{\sigma}$ de degré k de $T_x(X)^*$ dans $\mathcal{L}(E_x; F_x)$.

14.2.3 (« Calcul du symbole d'un opérateur différentiel »). Soit $x \in X$ et soit D un opérateur différentiel de type $E \rightarrow F$, d'ordre $\leq k$, défini dans un voisinage ouvert de x et de classe C^{r-k} . On va expliciter la valeur $\sigma_k(D)(x)$ du *symbole* de D en x . Considérons-le comme élément de $Sym^k(T_x(X)^*; \mathcal{L}(E_x; F_x))$ (cf. 14.2.2). Soient $\omega_1, \dots, \omega_k$ des covecteurs en x et choisissons des fonctions f_1, \dots, f_k de classe C^r dans un voisinage ouvert U de x telles que $d_x f_i = \omega_i$ pour $i = 1, \dots, k$. Posons

$$D' = (-1)^k \text{ad}(f_k) \dots \text{ad}(f_1) D \quad (\text{cf. 14.1.10, a}).$$

L'opérateur D' est d'ordre ≤ 0 ; c'est une section de $\mathcal{L}(E; F)|_U$. La valeur de D' en x est un élément $\lambda(\omega_1, \dots, \omega_k)$ de $\mathcal{L}(E_x; F_x)$ qui ne dépend que de $(\omega_1, \dots, \omega_k)$. L'application λ ainsi définie est symétrique. Elle est égale au *symbole* $\sigma_k(D)(x)$ de D en x .

Supposons $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et explicitons $\sigma_k(D)(x)$ considéré comme application polynomiale homogène de degré k de $T_x(X)^*$ dans $\mathcal{L}(E_x; F_x)$ (cf. 14.2.2). Soient $\omega \in T_x(X)^*$ et $v \in E_x$; choisissons une fonction f de classe C^r dans un voisinage

ouvert U de x telle que $d_x f = \omega$, et une section s de classe C^r de E dans U telle que $s(x) = v$. Il existe une famille $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ de sections de F dans U et une seule telle que

$$e^{-tf} D(e^{tf} s) = \sum_{j=0}^k t^j \varphi_j \quad \text{pour tout } t \in K.$$

Alors, $\varphi_k(x)$ ne dépend pas du choix de f et s telles que $d_x f = \omega$, $v(x) = s$; l'application $v \mapsto \varphi_k(x)$ est un élément $\lambda(\omega)$ de $\mathcal{L}(E_x; F_x)$, et λ est une application polynomiale homogène de degré k de $T_x(X)^*$ dans $\mathcal{L}(E_x; F_x)$. Cette application est égale au symbole $\sigma_k(D)(x)$ de D en x .

14.2.4 (« Le cas scalaire »). Prenons $E = F = K_x$, auquel cas on identifie $D^k(E, F)$ au fibré $T^{(k)}(X)$ des distributions ponctuelles d'ordre $\leq k$, cf. 14.1.6. On a

$$S^k(E, F) = TS^k(T(X))$$

et le symbole

$$\sigma_k: T^{(k)}(X) \rightarrow TS^k(T(X))$$

n'est autre que le composé

$$T^{(k)}(X) \rightarrow T^{(k)}(X)/T^{(k-1)}(X) \xrightarrow{i_k} TS^k(T(X)),$$

où i_k est l'isomorphisme défini en 13.3.2.

Prenons par exemple pour X un ouvert de K^n , et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de K^n (identifié aux espaces tangents $T_x(X)$). Si $\alpha \in N^n$ est tel que $|\alpha| \leq k$, le symbole de l'opérateur Δ^α est donné par les formules (cf. 13.3.3):

$$\begin{aligned} \sigma_k(\Delta^\alpha)(x) &= 0 & \text{si } |\alpha| < k \\ \sigma_k(\Delta^\alpha)(x) &= \gamma_{\alpha_1}(e_1) \dots \gamma_{\alpha_n}(e_n) & \text{si } |\alpha| = k, \end{aligned}$$

le produit des $\gamma_{\alpha_i}(e_i)$ étant le *produit symétrique*, cf. 13.2.6 et 13.3.3.

14.2.5 (« Symbole d'un composé »). Les notations et hypothèses sont celles de 14.1.8. La composition des applications linéaires définit un accouplement

$$\mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(E; G).$$

D'autre part, l'opération de *produit symétrique* définit un accouplement

$$TS^{k''}(T(X)) \times TS^{k'}(T(X)) \rightarrow TS^k(T(X)).$$

Comme on a

$$\left. \begin{aligned} S^{k''}(F, G) &= TS^{k''}(T(X)) \otimes \mathcal{L}(F; G) \\ S^{k'}(E, F) &= TS^{k'}(T(X)) \otimes \mathcal{L}(E; F) \\ S^k(E, G) &= TS^k(T(X)) \otimes \mathcal{L}(E; G) \end{aligned} \right\} \text{ cf. 14.2.2,}$$

on déduit de là, par produit tensoriel, un accouplement

$$(*) \quad S^{k''}(F, G) \times S^{k'}(E, F) \rightarrow S^k(E, G).$$

On a alors la formule

$$\sigma_k(D'' \circ D') = \sigma_{k''}(D'') \cdot \sigma_{k'}(D'),$$

où le produit figurant dans le terme de droite est défini par l'accouplement (*) ci-dessus.

Supposons maintenant K de caractéristique zéro, et soit $x \in X$. Notons σ (resp. σ' , σ'') le k -symbole (resp. le k' -symbole, le k'' -symbole) de $D'' \circ D'$ (resp. D' , D'') en x . Pour tout $\omega \in T_x(X)^*$, on a alors (avec les notations de la fin de 14.2.2):

$$\tilde{\sigma}(\omega) \in \mathcal{L}(E_x; G_x), \quad \tilde{\sigma}'(\omega) \in \mathcal{L}(E_x; F_x), \quad \tilde{\sigma}''(\omega) \in \mathcal{L}(F_x; G_x)$$

et

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{\sigma}''(\omega) \circ \tilde{\sigma}'(\omega).$$

14.3. Transposition

Dans ce n°, on suppose que X est pure de dimension n .

14.3.1. Soit $\Omega = \det(T(X)^*)$, cf. 7.9.9; c'est un fibré vectoriel de rang 1 en chaque point, de base X , et de classe C^{r-1} . On a

$$\Omega = \bigwedge^n T(X)^* = \text{Alt}^n(T(X); K_X).$$

Soit M un fibré vectoriel de base X . On pose

$$\tilde{M} = \mathcal{L}(M; \Omega) = M^* \otimes \Omega^{(1)}$$

Si M est de classe C^h , avec $h \in \mathbb{N}_K \cup \{0\}$ et $h \leq r-1$, il en est de même de \tilde{M} . L'application canonique de M dans $\tilde{M} = \mathcal{L}(M; \Omega)$ est un isomorphisme; on l'utilise pour identifier M à \tilde{M} .

14.3.2 (« Définition du transposé »). Soit k un entier positif $\leq r-1$, et soit D un opérateur différentiel sur X , de type $E \rightarrow F$, d'ordre $\leq k$, et de classe C^h , avec $h \in \mathbb{N}_K \cup \{0\}$ et $k \leq h \leq r-k$. Il existe alors un opérateur différentiel tD sur X , de type $\tilde{F} \rightarrow \tilde{E}$ et d'ordre $\leq k$, jouissant de la propriété suivante:

Soit $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ un système de coordonnées dans un ouvert U de X et soit $s = (s_i)_{1 \leq i \leq e}$ (resp. $t = (t_j)_{1 \leq j \leq f}$) un repère de E (resp. de F) sur U . Soit (s_i^*) (resp. (t_j^*)) le repère de E^* (resp. de F^*) tel que $\langle s_i, s_j^* \rangle = \delta_{ij}$ (resp. $\langle t_i, t_j^* \rangle = \delta_{ij}$), et soit (\tilde{s}_i) (resp. (\tilde{t}_j)) le repère de \tilde{E} (resp. \tilde{F}) sur U obtenu en formant le produit tensoriel de (s_i^*) (resp. de (t_j^*)) avec le repère $\omega = d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^n$ de Ω . Soient c_{α}^{ij} ($1 \leq i \leq e$, $1 \leq j \leq f$, $|\alpha| \leq k$) les fonctions de classe C^h sur U telles que l'on ait

$$D\left(\sum_i f_i s_i\right) = \sum_{i,j,\alpha} c_{\alpha}^{ij} \Delta_{\xi}^{\alpha}(f_i) \cdot t_j$$

quelles que soient les fonctions f_i dans $\mathcal{C}^{h+k}(U)$, cf. 14.1.4, (3'). On a alors

$${}^tD\left(\sum_j g_j \tilde{t}_j\right) = \sum_{i,j,\alpha} (-1)^{|\alpha|} \Delta_{\xi}^{\alpha}(c_{\alpha}^{ij} g_j) \tilde{s}_i$$

quelles que soient les fonctions g_j dans $\mathcal{C}^{h+k}(U)$.

¹ On aura soin de ne pas confondre \tilde{M} avec le revêtement de M défini en 10.2.4 et noté de la même manière.

La propriété précédente (qui doit être vérifiée quels que soient ξ , s et t) détermine tD de façon unique.⁽¹⁾ L'opérateur tD est appelé le *transposé* de D ; il est de classe C^{h-k} . Si $h \geq 2k$, le transposé de tD est défini et égal à D (compte tenu des identifications de \tilde{E} et \tilde{F} avec E et F respectivement).

L'application $D \mapsto {}^tD$ est K -linéaire. Si $k = 0$, i.e. si D est un morphisme de E dans F , tD est le morphisme $\mathcal{L}(D; \text{Id}_\Omega)$ de \tilde{F} dans \tilde{E} .

Le symbole de tD se déduit du symbole de D au moyen de l'isomorphisme

$$TS^k(T(X)) \otimes \mathcal{L}(E; F) \rightarrow TS^k(T(X)) \otimes \mathcal{L}(\tilde{F}; \tilde{E})$$

qui est le produit tensoriel de l'automorphisme $(-1)^k$ de $TS^k(T(X))$ et de l'isomorphisme $u \mapsto \mathcal{L}(u; \text{Id}_\Omega)$ de $\mathcal{L}(E; F)$ sur $\mathcal{L}(\tilde{F}; \tilde{E})$.

14.3.3 (« Transposé d'un composé »). Les notations et hypothèses étant celles de 14.1.8, supposons que D' soit de classe $C^{h'}$ et D'' de classe $C^{h''}$ avec h', h'' dans $\mathbb{N}_X \cup \{0\}$, $h' \geq k' + 2k''$ et $h'' \geq k'' + 2k'$.

Alors les transposés de D' , D'' et $D'' \circ D'$ sont définis, ainsi que le composé de ${}^tD'$ et ${}^tD''$, et l'on a

$${}^t(D'' \circ D') = {}^tD' \circ {}^tD''.$$

En particulier, les hypothèses et notations étant celles de 14.3.2, et f étant une fonction de classe $C^{h'}$ sur X avec $2k \leq h'$, on a ${}^t(D \circ f) = f \circ {}^tD$.

Exemple. — Prenons pour X un ouvert de K^n ; notons ξ^1, \dots, ξ^n les fonctions coordonnées sur X et identifions Ω à K_X au moyen du repère $\omega = d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^n$. Si $E = F = K_X$, on a

$$\tilde{E} = \tilde{F} = \mathcal{L}(K_X; \Omega) = \mathcal{L}(K_X; K_X) = K_X,$$

et l'opération $D \mapsto {}^tD$ transforme opérateurs différentiels scalaires en opérateurs différentiels scalaires. On a, par exemple

$${}^t(\Delta^\alpha) = (-1)^{|\alpha|} \Delta^\alpha \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Si r est infini, la transposition est un *anti-automorphisme* de l'algèbre $\mathcal{D}_X^{\infty, r}(K_X, K_X)$.

14.3.4. Soit k un entier positif tel que K soit de caractéristique 0 ou $> k$. Soit Ω_1 le fibré vectoriel $\bigwedge^{n-1} T(X)^* = \text{Alt}^{n-1}(T(X); K_X)$. Les notations et hypothèses étant celles de 14.3.2, soit en outre D' un opérateur différentiel sur X , de type $\tilde{F} \rightarrow \tilde{E}$, d'ordre $\leq k$; on appelle *opérateur de Green* pour (D, D') tout opérateur multidifférentiel G (cf. 14.1.11) de type $(E, \tilde{F}) \rightarrow \Omega_1$, d'ordre $\leq k - 1$ ⁽²⁾ et de classe C^h (avec $h \geq 1$), tel que l'on ait l'identité

$$(1) \quad \langle D(u), v \rangle - \langle u, D'(v) \rangle = d(G(u, v))$$

quels que soient l'ouvert U de X et les éléments $u \in \mathcal{S}_E^k(U)$, $v \in \mathcal{S}_F^k(U)$. Précisons que, dans cette formule, d désigne la différentiation extérieure (8.3.5) et $\langle D(u), v \rangle$ (resp.

¹ En fait, il suffit de vérifier la propriété en question pour des triplets $(\xi^\lambda, s^\lambda, r^\lambda)$ tels que les domaines des ξ^λ recouvrent X .

² Lorsque $k = 0$, on convient que cela signifie que $G = 0$.

$\langle u, D'(v) \rangle$ désigne la section de Ω sur U obtenue à partir du couple $(D(u), v)$ (resp. du couple $(u, D'(v))$) par l'accouplement canonique de $F \times \tilde{F}$ (resp. de $E \times \tilde{E}$) dans Ω . L'existence de G implique $D' = {}^tD$; on dit aussi que G est un opérateur de Green pour D .

14.3.5. Soit D un opérateur différentiel sur X , de type $E \rightarrow F$, d'ordre $\leq k$, de classe C^h avec $h \in \mathbb{N}_K$ et $k \leq h \leq r - k$. Il existe un opérateur de Green de classe C^{h-k+1} pour D dans chacun des cas suivants:

- a) $K = \mathbb{R}$, $r = \infty$ et X est paracompacte.
- b) K est de caractéristique 0 ou $> k$, X est isomorphe à un ouvert d'un espace K^n , et les fibrés E et F sont isomorphes à des fibrés triviaux.
- c) L'opérateur D est d'ordre ≤ 1 (cf. 14.3.7).

14.3.6. On conserve les hypothèses et notations de 14.3.3. Si G' (resp. G'') est un opérateur de Green pour D' (resp. D''), il existe un opérateur de Green H pour $D'' \circ D'$ et un seul tel que l'on ait

$$H(u, v) = G''(D'(u), v) + G'(u, {}^tD''(v))$$

quels que soient l'ouvert U de X et les éléments $u \in \mathcal{S}_E^k(U)$ et $v \in \mathcal{S}_F^k(U)$.

14.3.7. On a $S^1(E, F) = T(X) \otimes E^* \otimes F$ (cf. 14.2.2). D'autre part, le produit intérieur droit $(\xi, \omega) \mapsto i(\xi)\omega$ (cf. A, III, p. 158) définit un isomorphisme de $T(X) \otimes \Omega_1$ sur Ω_1 ; par produit tensoriel avec le dual Ω^* de Ω , on obtient ainsi un isomorphisme de $T(X)$ sur $\Omega^* \otimes \Omega_1$, d'où des identifications de fibrés vectoriels

$$\begin{aligned} S^1(E, F) &= \Omega^* \otimes \Omega_1 \otimes E^* \otimes F = (E \otimes F^* \otimes \Omega)^* \otimes \Omega_1 \\ &= (E \otimes \tilde{F})^* \otimes \Omega_1 = \mathcal{L}(E \otimes \tilde{F}; \Omega_1). \end{aligned}$$

Cela posé, soit D un opérateur différentiel sur X , de type $E \rightarrow F$, d'ordre ≤ 1 , de classe C^h avec $h \in \mathbb{N}_K \cup \{0\}$ et $h \leq r - 1$. Il existe un unique opérateur de Green pour D ; il est d'ordre 0; c'est un morphisme de classe C^h de $E \otimes \tilde{F}$ dans Ω_1 , et il se déduit du symbole de D par l'identification précédente.

14.3.8. Supposons que l'on ait $K = \mathbb{R}$, que X soit séparée et orientée (10.2.4) et soit A une pièce fermée (11.1.2) de X . Munissons A de l'orientation induite par celle de X , et ∂A de l'orientation correspondante (11.2.1). Soient k un entier tel que $2k \leq r$, D un opérateur différentiel sur X , de type $E \rightarrow F$, d'ordre $\leq k$ et de classe C^k . Soit G un opérateur de Green pour D . Soient U un ouvert de X , $u \in \mathcal{S}_E^k(U)$, $v \in \mathcal{S}_F^k(U)$ et supposons que les supports de u et de v rencontrent A suivant un compact. On a alors

$$\int_A \langle D(u), v \rangle - \int_A \langle u, {}^tD(v) \rangle = \int_{\partial A} G(u, v)$$

(« formule de Green »). En particulier, si $\partial A = \emptyset$, on a

$$\int_A \langle D(u), v \rangle = \int_A \langle u, {}^tD(v) \rangle.$$

14.4. Exemples

On suppose X pure de dimension finie n . On la suppose aussi munie d'une structure de variété de classe C^{r+1} compatible avec la structure de classe C^r donnée.

14.4.1 (« Transformations infinitésimales »). Soit τ un *foncteur vectoriel en dimension finie* pour les isomorphismes, de classe C^r ; on suppose que, pour tout espace vectoriel V de dimension finie, $\tau(V)$ est de dimension finie. On note E_τ le fibré vectoriel $\tau(T(X))$; il est de classe C^r .

Soit ξ un champ de vecteurs de classe C^r sur X . Il existe un opérateur différentiel D de type $E_\tau \rightarrow E_\tau$ et d'ordre ≤ 1 tel que

$$D_U(s) = \theta_\xi \cdot s$$

pour tout ouvert U de X et tout $s \in \mathcal{S}_E^r(U)$, cf. 8.4.3. Un tel opérateur D est unique; on le note $(\theta_\xi)_\tau$ ou simplement θ_ξ . Son symbole est la section $\xi \otimes \text{Id}_{E_\tau}$ du fibré vectoriel

$$S^1(E_\tau, E_\tau) = T(X) \otimes \mathcal{L}(E_\tau; E_\tau).$$

Si V est un K -espace vectoriel de dimension finie, posons

$$\tilde{\tau}(V) = \mathcal{L}(\tau(V); \text{Alt}^n(V; K)) = \tau(V)^* \otimes \bigwedge^n V^*,$$

et si $u: V_1 \rightarrow V_2$ est un isomorphisme, définissons $\tilde{\tau}(u): \tilde{\tau}(V_1) \rightarrow \tilde{\tau}(V_2)$ par transport de structure. On obtient ainsi un foncteur vectoriel en dimension finie $\tilde{\tau}$. Le fibré $E_{\tilde{\tau}} = \tilde{\tau}(T(X))$ s'identifie de manière évidente au fibré $(E_\tau)^*$; le transposé de $(\theta_\xi)_\tau$ est $-(\theta_\xi)^*$ et la formule (1) du n° 14.3.4 prend la forme

$$\langle \theta_\xi \cdot u, v \rangle + \langle u, \theta_\xi \cdot v \rangle = d(i(\xi)(u \cdot v)).$$

14.4.2 (« Différentielle extérieure »). Pour tout entier $p \geq 0$ on pose

$$\Omega^p = \text{Alt}^p(T(X); K_X).$$

Il existe un opérateur différentiel D de type $\Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ et d'ordre ≤ 1 tel que

$$D_U(\omega) = d\omega$$

pour tout ouvert U de X et tout $\omega \in \mathcal{S}_{\Omega^p}^r(U)$. Un tel opérateur D est unique; on le note d (ou d_p si l'on tient à préciser l'entier p).

Son symbole est l'élément de $S^1(\Omega^p, \Omega^{p+1})$ obtenu de la manière suivante: on a tout d'abord

$$\begin{aligned} S^1(\Omega^p, \Omega^{p+1}) &= T(X) \otimes \mathcal{L}(\Omega^p; \Omega^{p+1}) \\ &= \mathcal{L}(\Omega^1; \mathcal{L}(\Omega^p; \Omega^{p+1})) = \mathcal{L}(\Omega^1, \Omega^p; \Omega^{p+1}), \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(\Omega^1, \Omega^p; \Omega^{p+1})$ désigne le fibré des applications bilinéaires de $\Omega^1 \times \Omega^p$ dans Ω^{p+1} . Or le produit extérieur $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ définit une section canonique de ce dernier fibré; cette section est le symbole de d_p .

Pour déterminer le transposé de d_p , on remarque d'abord que le produit extérieur définit un accouplement $\Omega^p \times \Omega^{n-p} \rightarrow \Omega^n = \Omega$ qui permet d'identifier $(\Omega^p)^*$ à Ω^{n-p} . On identifie de la même manière $(\Omega^{p+1})^*$ à Ω^{n-p-1} . Avec ces conventions, le transposé de d_p est $(-1)^{p+1}d_{n-p-1}$ et l'opérateur de Green correspondant, de type

$(\Omega^p, \Omega^{n-p-1}) \rightarrow \Omega_1 = \Omega^{n-1}$, est simplement le produit extérieur (sur chaque fibre).

14.4.3 (« Laplacien »). On prend $K = \mathbf{R}$, $r = \infty$, $X = \mathbf{R}^n$, $E = F = K_X$; on note ξ^i ($1 \leq i \leq n$) les fonctions coordonnées sur X ; on pose $D_i = \partial/\partial \xi^i$, et $L = \sum_{i=1}^n D_i^2$.

L'opérateur L est un opérateur différentiel scalaire d'ordre ≤ 2 . Si l'on identifie Ω à K_X grâce au repère $\omega = d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^n$, on a $\tilde{E} = \tilde{F} = K_X$ (cf. 14.3.3, exemple) et ${}^tL = L$.

Pour $1 \leq i \leq n$, posons $\omega_i = (-1)^{i-1} d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^{i-1} \wedge d\xi^{i+1} \wedge \dots \wedge d\xi^n$. Les ω_i forment un repère de $\Omega_1 = \Omega^{n-1}$. Si $f \in \mathcal{C}^1(X)$, notons $\text{grad}(f)$ la section $\sum_{i=1}^n D_i(f)\omega_i$ de Ω_1 . Il existe un opérateur de Green G pour L tel que l'on ait

$$G(u, v) = v \cdot \text{grad}(u) - u \cdot \text{grad}(v) \quad \text{pour tout ouvert } U \text{ de } X \text{ et } u, v \text{ dans } \mathcal{C}^1(U).$$

En particulier, soit A une pièce compacte de \mathbf{R}^n . Orientons \mathbf{R}^n , munissons A de l'orientation induite par celle de \mathbf{R}^n et ∂A de l'orientation correspondante (11.2.1). On a

$$\int_A (Lu) \cdot v\omega - \int_A u \cdot (Lv)\omega = \int_{\partial A} (v \cdot \text{grad}(u) - u \cdot \text{grad}(v))$$

pour u, v dans $\mathcal{C}^1(X)$.

§ 15. Variétés d'applications¹

Dans ce paragraphe, on suppose $K = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} . La lettre r désigne un entier ≥ 1 et la lettre s un élément de \mathbf{N}_K tel que $s \geq r$; on a $s = \omega$ si $K = \mathbf{C}$.

15.1. Fonctions de classe $C^{r,s}$

Dans ce n°, E désigne un espace de Banach *réel*, F_1 et F_2 des espaces de Banach sur K , V un ouvert de $E \times F_1$ et f une application de V dans F_2 . On munit E , F_1 et F_2 de normes compatibles avec leurs structures d'espaces de Banach.

15.1.1 (« Cas différentiable »). On suppose $K = \mathbf{R}$ et $s \neq \omega$. On dit que f est de classe $C_K^{r,s}$ (ou simplement $C^{r,s}$) si elle possède des dérivées partielles itérées $D_E^p D_{F_1}^q f$ (1.7.2) continues pour tout couple d'entiers positifs (p, q) tels que $p \leq r$ et $p + q \leq s$. Il revient au même de dire que les dérivées partielles itérées $D_{F_1}^q f$ existent et sont de classe C^r pour tout entier q tel que $0 \leq q \leq s - r$. Si $s = r$, cela équivaut à dire que f est de classe C^r ; si $s \geq r + 1$, cela équivaut à dire que f est de classe C^r et $D_{F_1} f$ de classe $C^{r,s-1}$.

Si f est de classe $C^{r,s}$, et si $p \leq r$, $p + q + 1 \leq s$, la fonction $D_E^p D_{F_1}^q f$ a une dérivée partielle par rapport à F_1 donnée par:

$$(1) \quad D_{F_1}(D_E^p D_{F_1}^q f) = D_E^p D_{F_1}^{q+1} f.$$

15.1.2 (« Cas analytique »). On suppose $s = \omega$. Pour tout entier $k \geq 0$, notons $P_k(F_1; F_2)$ l'espace des polynômes-continus homogènes de degré k sur F_1 à valeurs dans F_2 , muni de la norme définie dans l'*Appendice* du premier fascicule, p. 88, A.2.

On dit que f est de classe $C_K^{r,\omega}$ (ou simplement $C^{r,\omega}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur K) si, pour tout point $(x_0, y_0) \in V$, il existe un voisinage U de x_0 dans E , des nombres réels $R > 0$ et $M \geq 0$ et des fonctions $h_k: U \rightarrow P_k(F_1; F_2)$ ($k \in \mathbf{N}$), de classe C^r

¹ Les définitions et résultats de ce paragraphe s'étendent sans modifications essentielles au cas où l'espace de Banach E du n° 15.1 est remplacé par un *demi-espace fermé* et au cas où la variété B des n° 15.1.6 à 15.3.2 (resp. la variété X du n° 15.3.3) est remplacée par une *pièce* d'une variété (11.1.2). En particulier, l'espace des applications de classe C^r du segment $\{0, 1\}$ dans une K -variété Y de classe C^s ($s > r$) a une structure naturelle de K -variété de classe C^{s-r} .

Une autre généralisation possible consiste à remplacer E et B (resp. X) par des espaces topologiques (resp. par un espace topologique compact) et à prendre $r = 0$. Ainsi, si X est un espace compact et Y une K -variété de classe C^s , l'ensemble $\mathcal{C}^0(X; Y)$ des applications continues de X dans Y a une structure naturelle de K -variété de classe C^s (la topologie sous-jacente étant celle de la convergence uniforme).

Nous laissons au lecteur le soin de développer ces brèves indications.

(pour la structure de variété différentielle sous-jacente à la structure de K -variété de $P_k(F_1; F_2)$), tels que:

- (i) $U \times (y_0 + B(R)) \subset V$, où $B(R)$ est la boule ouverte de rayon R dans F_1 ;
- (ii) si $x \in U$ et $p \leq r$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} \|D^p h_k(x)\| R^k \leq M$;
- (iii) si $x \in U$ et $t \in B(R)$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)(t) = f(x, y_0 + t)$.

Ces propriétés entraînent:

(iv) Pour tout $t \in B(R)$, la fonction $x \mapsto f(x, y_0 + t)$ est de classe C^r dans U , et l'on a

$$(2) \quad D_{\mathbb{R}}^p f(x, y_0 + t) = \sum_{k=0}^{\infty} D^p h_k(x)(t) \quad \text{si } p \leq r \text{ et } x \in U.$$

On ne change pas la définition des fonctions de classes $C^{r,\omega}$ si l'on remplace la condition (ii) ci-dessus par l'une des deux conditions suivantes:

(ii') Les h_k définissent un morphisme de classe C^r de U dans l'espace de Banach réel sous-jacent au K -espace de Banach $\mathcal{H}_R(F_1; F_2)$ (3.1.1 et 3.1.2).

(ii'') Les h_k définissent un morphisme de classe C^r de U dans l'espace de Banach réel sous-jacent au K -espace de Banach $\tilde{\mathcal{H}}_R(F_1; F_2)$ (3.1.5).

15.1.3. Supposons $K = \mathbb{R}$. Pour que f soit de classe $C_{\mathbb{R}}^{r,\omega}$, il faut et il suffit que f soit de classe $C^{r,\omega}$ (15.1.1) et que, pour tout $(x_0, y_0) \in V$, il existe un voisinage V_0 de (x_0, y_0) dans V et des nombres réels positifs A et M tels que

$$(3) \quad \frac{1}{q!} \|D_{\mathbb{R}}^q D_{F_1}^q f(x, y)\| \leq A \cdot M^q$$

pour tout $p \leq r$, tout $q \geq 0$ et tout $(x, y) \in V_0$.

15.1.4. Supposons $K = \mathbb{C}$. Pour que f soit de classe $C_{\mathbb{C}}^{r,\omega}$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées:

- a) f est de classe $C_{\mathbb{R}}^{r,\omega}$ pour les structures réelles sous-jacentes à F_1 et F_2 .
- b) Pour tout $(x, y) \in V$, $D_{F_1} f(x, y)$ est une application \mathbb{C} -linéaire de F_1 dans F_2 .

Lorsque F_1 est de dimension finie, on peut remplacer a) par:

- a') f est de classe C^r .

15.1.5. L'ensemble des applications de classe $C^{r,s}$ de V dans F_2 ne dépend pas du choix des normes sur E, F_1, F_2 .

15.1.6. Soit B une variété différentielle de classe C^r , soit W un ouvert de $B \times F_1$, et soit ρ une application de W dans F_2 . Soit $c = (U, \varphi, E_c)$ une carte de la variété B . Notons W_c l'ouvert de $E_c \times F_1$ image par $\varphi \times \text{Id}_{F_1}$ de $W \cap (U \times F_1)$ et ρ_c l'application de W_c dans F_2 telle que

$$\rho_c(\varphi(x), y) = \rho(x, y) \quad \text{si } (x, y) \in W \cap (U \times F_1).$$

L'application $\rho: W \rightarrow F_2$ est dite de classe $C^{r,s}$ si, pour toute carte c de la variété B , l'application $\rho_c: W_c \rightarrow F_2$ est de classe $C^{r,s}$ au sens de 15.1.1 et 15.1.2; il suffit que cette condition soit réalisée pour une famille de cartes dont les domaines recouvrent B . Une telle application ρ est de classe C^r (pour les structures réelles sous-jacentes de $B \times F_1$ et F_2); sa restriction à l'ensemble $W \cap (\{b\} \times F_1)$ est un K -morphisme de classe C^s pour tout $b \in B$.

15.1.7. Soient B_1 et B_2 des variétés différentielles de classe C^r , et $g: B_1 \rightarrow B_2$ un morphisme de classe C^r . Soit W_1 (resp. W_2) un ouvert de $B_1 \times F_1$ (resp. de $B_2 \times F_2$) et soit h une application de W_1 dans W_2 . On dit que h est un g -morphisme de classe $C^{r,s}$ si $\text{pr}_1 \circ h = g \circ \text{pr}_1$ et si $\text{pr}_2 \circ h$ est une application de classe $C^{r,s}$ (15.1.6) de W_1 dans F_2 .

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{h} & W_2 \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ B_1 & \xrightarrow{g} & B_2 \end{array}$$

Soient de même B_3 une variété de classe C^r , W_3 un ouvert de $B_3 \times F_3$, où F_3 est un K -espace de Banach, et g' un morphisme de classe C^r de B_2 dans B_3 . Si h (resp. h') est un g -morphisme (resp. g' -morphisme) de classe $C^{r,s}$ de W_1 dans W_2 (resp. de W_2 dans W_3), le composé $h' \circ h$ est un $(g' \circ g)$ -morphisme de classe $C^{r,s}$ de W_1 dans W_3 .

15.2. Variété de classe $C^{r,s}$ au-dessus d'une variété de classe C^r

Dans tout ce n°, on note B une variété différentielle de classe C^r .

15.2.1. Soit X un ensemble muni d'une application $p: X \rightarrow B$. On appelle *carte de X au-dessus de B* un triplet $\theta = (V, \psi, F)$, où V est une partie de X , F un K -espace de Banach, et ψ une bijection de V sur un ouvert de $B \times F$ telle que $\text{pr}_1 \circ \psi = p|_V$.

Soit $(\theta_i)_{i \in I} = ((V_i, \psi_i, F_i))_{i \in I}$ une famille de cartes de X au-dessus de B . On dit que les θ_i sont $C^{r,s}$ -compatibles si, pour tout couple d'éléments i, j de I , les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- $\psi_i(V_i \cap V_j)$ est ouvert dans $B \times F_i$ et $\psi_j(V_i \cap V_j)$ est ouvert dans $B \times F_j$;
- l'application $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ de $\psi_j(V_i \cap V_j)$ dans $\psi_i(V_i \cap V_j)$ est un Id_B -morphisme de classe $C^{r,s}$ (15.1.7).

Une famille $((V_i, \psi_i, F_i))_{i \in I}$ de cartes de X au-dessus de B qui sont $C^{r,s}$ -compatibles et dont les domaines V_i recouvrent X est appelée un $C^{r,s}$ -atlas de X (au-dessus de B). Deux $C^{r,s}$ -atlas sont dits équivalents si leur réunion est un $C^{r,s}$ -atlas; la relation de $C^{r,s}$ -équivalence entre atlas est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence de $C^{r,s}$ -atlas s'appelle une structure de *variété de classe $C^{r,s}$ au-dessus de B* sur l'ensemble X ; lorsque l'on désire préciser K , on écrit $C_K^{r,s}$ au lieu de $C^{r,s}$. Si X est une variété de classe $C^{r,s}$ au-dessus de B , on dit que $p: X \rightarrow B$ est la *projection* de X ; si θ est une carte de X au-dessus de B , on dit que θ est une *carte de la $C^{r,s}$ -variété X* si θ appartient à un atlas de la classe d'équivalence définissant la structure de X .

15.2.2. Soit X une variété de classe $C^{r,s}$ au-dessus de B , de projection p . Il existe sur X

une structure de variété différentielle de classe C^r et une seule, telle que, pour toute carte (V, ψ, F) de la $C^{r,s}$ -variété X , l'ensemble V soit ouvert dans X et que ψ soit un C^r -isomorphisme de la sous-variété ouverte V de X sur la sous-variété ouverte $\psi(V)$ de $B \times F$. Si l'on munit X de cette structure, l'application $p: X \rightarrow B$ est une submersion de classe C^r .

Soit $b \in B$ et soit $X_b = p^{-1}(b)$. Il existe une structure de K -variété de classe C^s sur X_b , et une seule, telle que, pour toute carte $\theta = (V, \psi, F)$ de la $C^{r,s}$ -variété X , le triplet $\theta_b = (V \cap X_b, \text{pr}_2 \circ \psi|_{(V \cap X_b)}, F)$ soit une carte de la variété X_b . La structure de variété différentielle de classe C^r sous-jacente à cette structure est induite par la structure de variété différentielle de classe C^r sur X définie ci-dessus.

15.2.3. Exemples

(i) Lorsque B est réduite à un point, la notion de variété de classe $C_K^{r,s}$ au-dessus de B est équivalente à celle de K -variété de classe C^s .

(ii) Soit Z une K -variété de classe C^s ; prenons $X = B \times Z$ et $p = \text{pr}_1$. Il existe sur X une structure de variété de classe $C^{r,s}$ au-dessus de B , et une seule, telle que, pour toute carte (U, ψ, L) de Z , $(B \times U, \text{Id}_B \times \psi, L)$ soit une carte de $C^{r,s}$ -variété X .

(iii) Soient X une variété de classe $C^{r,s}$ au-dessus de B , et Y un ouvert de X . La structure de variété de classe $C^{r,s}$ de Y induite par celle de X se définit comme dans le cas des variétés (cf. 5.2.3).

(iv) Soit M un fibré vectoriel sur K de base B et de classe C^r (7.3.4), et soit π sa projection sur B . Il existe sur M une structure de variété de classe $C_K^{r,\omega}$ au-dessus de B , et une seule, telle que, si (U, ψ, F) est une carte K -vectorielle de M (8.8.1), le triplet $(\pi^{-1}(U), \psi, F)$ soit une carte de la $C_K^{r,\omega}$ -variété M .

15.2.4. Soient X une variété de classe $C^{r,s}$ au-dessus de B , p sa projection, L un K -espace de Banach, et f une application de X dans L . On dit que f est de classe $C^{r,s}$ si, pour toute carte (V, ψ, F) de la $C^{r,s}$ -variété X , l'application $(f|_V) \circ \psi^{-1}$ de $\psi(V)$ dans L est de classe $C^{r,s}$ (15.1.6). Une telle application est de classe C^r et sa restriction à X_b pour $b \in B$, est de classe C^s .

15.2.5. Soit $g: B \rightarrow B'$ un morphisme de variétés différentielles de classe C^r , soit X (resp. X') une variété de classe $C^{r,s}$ au-dessus de B (resp. B'), et soit h une application de X dans X' . On dit que h est un g -morphisme de classe $C^{r,s}$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & X' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

a) $p' \circ h = g \circ p$;

b) h est continue;

c) pour toute carte (V', ψ', F') de la $C^{r,s}$ -variété X' , l'application $\text{pr}_2 \circ \psi' \circ h$ de $V = h^{-1}(V')$ dans F' est

de classe $C^{r,s}$ (au sens de 15.2.4) lorsqu'on munit l'ouvert V de la structure induite par celle de X (15.2.3, (iii)).

Lorsque $B = B'$ et $g = \text{Id}_B$, on dit aussi que h est un B -morphisme de classe $C^{r,s}$.

Pour qu'un B-morphisme de classe $C^{r,s}$ soit un B-isomorphisme de classe $C^{r,s}$, il suffit que ce soit un isomorphisme de classe C^1 .

Soit $g': B' \rightarrow B''$ un morphisme de variétés de classe C^r et soit X'' une variété de classe $C^{r,s}$ au-dessus de B'' . Si $h: X \rightarrow X'$ est un g -morphisme de classe $C^{r,s}$ et $h': X' \rightarrow X''$ est un g' -morphisme de classe $C^{r,s}$, alors $h' \circ h$ est un $(g' \circ g)$ -morphisme de classe $C^{r,s}$.

15.2.6. Soient X une variété de classe $C_K^{r,s}$ au-dessus de B et p sa projection; on suppose $s \neq \omega$, X séparée et p propre (TG, I, § 10, n° 1). Alors, pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b et un $C^{r,s}$ -isomorphisme de $p^{-1}(U)$ sur $U \times X_b$, où $X_b = p^{-1}(b)$.

15.2.7. Soient X une variété de classe $C_K^{r,s}$ au-dessus de B , p sa projection, et $\sigma: B \rightarrow X$ une section de classe C^r . On appelle *voisinage tubulaire* de classe $C_K^{r,s}$ de σ un triplet (M, N, φ) où M est un fibré K -vectoriel, de base B et de classe C^r , N est un voisinage ouvert de $\sigma(B)$ dans X , et φ est un B-isomorphisme de classe $C_K^{r,s}$ de N sur un ouvert de M (cf. 15.2.3 (iv)), transformant la section σ en la section nulle de M .

Supposons que $s \geq r + 1$ et que la variété B soit paracompacte et admette des partitions de l'unité de classe C^r (5.3.6); il existe alors des voisinages tubulaires de classe $C_K^{r,s}$ de σ .

15.3. Variétés de sections et variétés d'applications

15.3.1 (« Structure d'espace de Banach sur un espace de sections »). Soit B une variété différentielle compacte de classe C^r ; soit M un fibré vectoriel sur K (7.3.4) de base B et de classe C^r ; notons M_r la variété différentielle de classe C^r sous-jacente à M , et soit $\mathcal{S}_M^r(B)$ le K -espace vectoriel des sections de classe C^r de M (7.4.1). La topologie induite sur $\mathcal{S}_M^r(B)$ par la topologie de la C^r -convergence uniforme de $\mathcal{C}^r(B; M_r)$ (12.3.10) fait de $\mathcal{S}_M^r(B)$ un K -espace de Banach.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de B et, pour tout $i \in I$, soient $c_i = (U_i, \varphi_i, E_i)$ une carte de B et $t_i = (U_i, \psi_i, F_i)$ une carte K -vectorielle de M (8.8.1). Munissons chacun des E_i (resp. F_i) d'une norme compatible avec sa structure d'espace de Banach sur \mathbb{R} (resp. K) et soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement fermé de B , tel que $V_i \subset U_i$ pour tout $i \in I$. Pour $f \in \mathcal{S}_M^r(B)$ et $i \in I$, notons f_i l'application de $\varphi_i(U_i)$ dans F_i obtenue par composition:

$$\varphi_i(U_i) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \xrightarrow{f} M|U_i \xrightarrow{\psi_i} U_i \times F_i \xrightarrow{\text{pr}_2} F_i.$$

Posons

$$\|f\| = \sup_{i \in I, p \leq r, x \in V_i} \|D^p f_i(\varphi_i(x))\|.$$

L'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $\mathcal{S}_M^r(B)$, qui définit la structure d'espace de Banach sur K de $\mathcal{S}_M^r(B)$.

Si N est un ouvert de l'espace M , l'ensemble $\mathcal{S}^r(B; N)$ des sections $f \in \mathcal{S}_M^r(B)$ telles que $f(B) \subset N$ est ouvert dans $\mathcal{S}_M^r(B)$.

15.3.2. Soit B une variété différentielle compacte de classe C^r , et soit X une variété

de classe $C_K^{r,s}$ ($s \geq r + 1$) au-dessus de B . Si N est un ouvert de X , notons $\mathcal{S}^r(B; N)$ l'ensemble des sections de classe C^r de X sur B dont l'image est contenue dans N . Il existe sur $\mathcal{S}^r(B; X)$ une structure de K -variété de classe C^{s-r} , et une seule, telle que, pour toute section $\sigma \in \mathcal{S}^r(B; X)$ et tout voisinage tubulaire (M, N, φ) de classe $C_K^{r,s}$ de σ (15.2.7), le triplet $(\mathcal{S}^r(B; N), \varphi^*, \mathcal{S}_M^r(B))$, où φ^* est l'application $f \mapsto \varphi \circ f$, soit une carte de la K -variété $\mathcal{S}^r(B; X)$.

Dans ce qui suit, on munit $\mathcal{S}^r(B; X)$ de cette structure.

15.3.3. Soit X une variété différentielle compacte de classe C^r , et soit Y une K -variété de classe C^s ($s \geq r + 1$). Soit $\mathcal{C}^r(X; Y)$ l'ensemble des applications de classe C^r de X dans Y (autrement dit, à valeurs dans la variété de classe C^r sous-jacente à Y , cf. 5.13.1 et 5.14.2). On munit $\mathcal{C}^r(X; Y)$ de la structure de K -variété de classe C^{s-r} obtenue en l'identifiant à $\mathcal{S}^r(X; X \times Y)$, cf. 15.2.3, (ii) et 15.3.2. On l'appelle *la variété des applications de classe C^r de X dans Y* . Sa topologie est celle de la C^r -convergence uniforme (12.3.10).

Supposons Y séparée; il en est alors de même de $\mathcal{C}^r(X; Y)$. De plus, l'ensemble des immersions (resp. plongements, submersions, submersions surjectives, morphismes étales, isomorphismes) de classe C^r de X dans Y est un ouvert de $\mathcal{C}^r(X; Y)$.

Soient X' une variété différentielle compacte de classe C^r , $\varphi: X' \rightarrow X$ un morphisme de variétés différentielles de classe C^r et $\psi: Y \rightarrow Y'$ un morphisme de K -variétés de classe C^s . L'application $f \mapsto \psi \circ f \circ \varphi$ est un morphisme de classe C^{s-r} de $\mathcal{C}^r(X; Y)$ dans $\mathcal{C}^r(X'; Y')$.

15.3.4 (« Affaiblissement de structure »). Gardons les hypothèses et notations de 15.3.3. Soit de plus $s' \in N_{\mathbb{R}}$ avec $r < s' \leq s$ et soit $Y_{s'}$ la variété réelle de classe $C^{s'}$ sous-jacente à Y (5.13 et 5.14.2). La structure de variété réelle de classe $C^{s'-r}$ de $\mathcal{C}^r(X; Y_{s'})$ est sous-jacente à la structure de K -variété de classe C^{s-r} de $\mathcal{C}^r(X; Y)$.

15.3.5. Soient X et X' des variétés différentielles compactes de classe C^r et $C^{r'}$ respectivement, avec $r' < r$; et soit Y une K -variété de classe C^s , avec $s \geq r + 1$. Soit $t = \inf(r - r', s - r)$. L'application $(f, g) \mapsto g \circ f$ est un morphisme de classe C^t de $\mathcal{C}^{r'}(X'; X) \times \mathcal{C}^r(X; Y)$ dans $\mathcal{C}^{r'}(X'; Y)$.

15.3.6 (« Espace tangent à $\mathcal{C}^r(X; Y)$ »). Les hypothèses étant celles de 15.3.3, soit $f \in \mathcal{C}^r(X; Y)$ et soit ξ un vecteur tangent en f à la variété $\mathcal{C}^r(X; Y)$. Si $x \in X$, notons ϵ_x l'application $g \mapsto g(x)$ de $\mathcal{C}^r(X; Y)$ dans Y ; c'est un morphisme de classe C^{s-r} . L'image par $T_f(\epsilon_x)$ de ξ est un élément ξ_x de $T_{f(x)}(Y)$; l'application $x \mapsto \xi_x$ est un relèvement de classe C^r de f dans $T(Y)$ (cf. 8.6.1) et on peut l'identifier à une section de classe C^r du fibré vectoriel $f^*T(Y)$ de base X . On obtient de cette façon un *isomorphisme* de l'espace tangent $T_f(\mathcal{C}^r(X; Y))$ sur l'espace de Banach $\mathcal{S}_{f^*T(Y)}^r(X)$.

15.3.7 (« Interprétation de $\mathcal{C}^p(X; \mathcal{C}^q(Y; Z))$ »). Soient X et Y des variétés différentielles compactes de classe C^p et C^q respectivement ($1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q < +\infty$), et soit Z une K -variété de classe C^s , avec $s \geq p + q$. Soit $f: X \times Y \rightarrow Z$ une application

continue; pour tout $x \in X$, notons f_x l'application $y \mapsto f(x, y)$ de Y dans Z . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

a) Quelles que soient les cartes $c = (U, \varphi, E)$ de X , $d = (V, \psi, F)$ de Y et $e = (W, \theta, G)$ de Z telles que $f(U \times V) \subset W$, les dérivées partielles $D_E^p D_F^q f'$ de l'expression f' de f dans les cartes $c \times d$ et e (5.3.2) existent et sont continues pour $p' \leq p$ et $q' \leq q$.

b) Pour tout $x \in X$, l'application f_x est de classe C^q et l'application $x \mapsto f_x$ est un morphisme de classe C^p de X dans la variété $\mathcal{C}^q(Y; Z)$.

15.3.8. Soit Y une K -variété compacte de classe C^s , avec $s \geq r + 1$, et soit $\text{Diff}^r(Y)$ le groupe des automorphismes de classe C^r de la variété réelle Y_r de classe C^r sous-jacente à Y . L'ensemble $\text{Diff}^r(Y)$ est ouvert dans $\mathcal{C}^r(Y; Y) = \mathcal{C}^r(Y_r; Y)$; on le munit de la structure de K -variété de classe C^{s-r} induite par celle de $\mathcal{C}^r(Y; Y)$. La loi de composition $(f, g) \mapsto g \circ f$ fait de $\text{Diff}^r(Y)$ un *groupe topologique*. Par contre, la structure de variété de classe C^{s-r} n'est pas en général compatible avec la structure de groupe de $\text{Diff}^r(Y)$. Pour $f \in \text{Diff}^r(Y)$, l'application $g \mapsto g \circ f$ de $\text{Diff}^r(Y)$ dans lui-même est de classe C^{s-r} , mais l'application $g \mapsto f \circ g$ n'est pas en général de classe C^1 . En particulier, $\text{Diff}^r(Y)$ n'est pas en général un groupe de Lie.⁽¹⁾

¹ Supposons $s = \infty$. Soit $\text{Diff}^\infty(Y)$ le groupe des automorphismes de classe C^∞ de Y ; munissons-le de la topologie la moins fine rendant continues les injections canoniques $\text{Diff}^\infty(Y) \rightarrow \text{Diff}^r(Y)$ pour tout entier $r \geq 1$. Soit d'autre part $\text{Diff}^0(Y)$ le groupe des homéomorphismes de Y , muni de la topologie de la convergence uniforme (TG, X, § 3, n° 5, prop. 11). Si $\dim Y \geq 1$, il est impossible de trouver un groupe de Lie G et des homomorphismes continus de $\text{Diff}^\infty(Y)$ dans G et de G dans $\text{Diff}^0(Y)$ dont le composé soit l'injection canonique (cf. LIE, III, § 4, exerc. 7).