



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

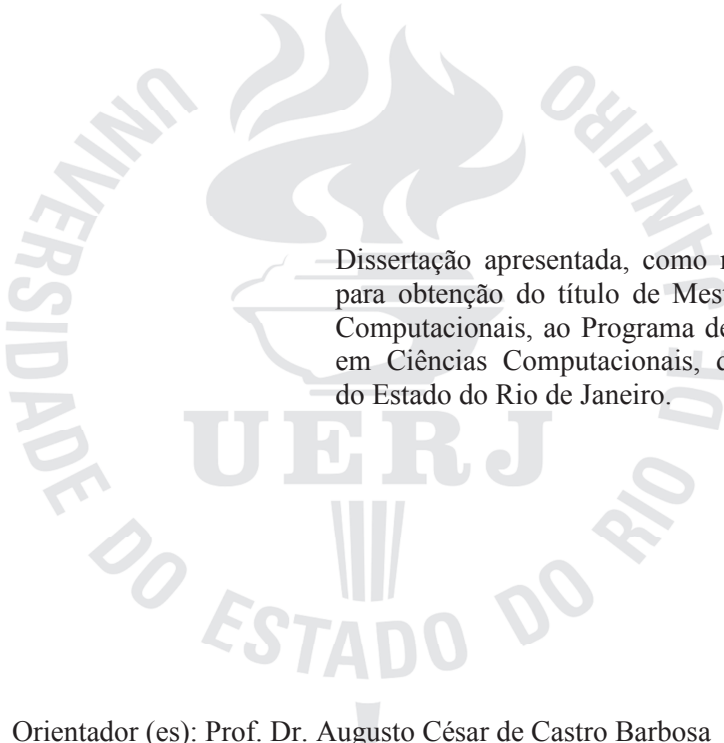
Daniela Ribeiro Monteiro

Uma abordagem por meio da teoria dos jogos de um modelo em
ecologia matemática

Rio de Janeiro
2013

Daniela Ribeiro Monteiro

**Uma abordagem por meio da teoria dos jogos de um modelo em
ecologia matemática**



Dissertação apresentada, como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre em Ciências
Computacionais, ao Programa de Pós-graduação
em Ciências Computacionais, da Universidade
do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador (es): Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa
Prof. Dr. Carlos Antônio de Moura

Rio de Janeiro
2013

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS/ BIBLIOTECA CTC/A

M778	<p>Monteiro, Daniela Ribeiro. Uma abordagem por meio da teoria dos jogos de um modelo em ecologia matemática / Daniela Ribeiro Monteiro. - 2013. 103f.</p> <p>Orientadores: Augusto César de Castro Barbosa, Carlos Antônio de Moura. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. Bibliografia: 85-87.</p> <p>1. Teoria dos jogos - Teses. 2. Teoria do controle - Teses. 3. Sistemas biológicos - Teses. I. Barbosa, Augusto César de Castro. II. Moura, Carlos Antônio de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 519.83</p>
------	---

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial deste trabalho, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Daniela Ribeiro Monteiro

**Uma abordagem por meio da teoria dos jogos de um modelo em ecologia
matemática**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 13 de setembro de 2013.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Carlos Antônio de Moura (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof^a. Dr^a. Cláudia Ferreira Reis Concordido
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. José Júlio Pedrosa Filho
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Rio de Janeiro
2013

DEDICATÓRIA

Aos meus familiares e bichinhos de quatro patas.

AGRADECIMENTO

Agradeço aos meus pais e irmã, pelo apoio durante o mestrado.

Ao Professor Moura, pela orientação, dedicação e por ter me aturado, principalmente no final do mestrado. E ao Professor Augusto César, pela orientação e sugestões para conclusão deste trabalho.

A todos os professores do CComp que tive oportunidade de conhecer.

À CAPES, pelo apoio financeiro durante o curso.

- Por favor, pode me ensinar o caminho para sair daqui?, perguntou Alice.
 - Depende: para onde quer ir?, contestou o Gato.
 - Não faz muita diferença aonde eu vá, continuou Alice.
- Sendo assim, não importa muito o caminho que vai seguir, concluiu o Gato.

Lewis Carroll, Alice no País das Maravilhas

RESUMO

MONTEIRO, D. R. *Uma abordagem por meio da Teoria dos Jogos de um modelo em ecologia matemática*. 2013.103f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

A presente dissertação propõe uma abordagem alternativa na simulação matemática de um cenário preocupante em ecologia: o controle de pragas nocivas a uma dada lavoura de soja em uma específica região geográfica. O instrumental teórico empregado é a teoria dos jogos, de forma a acoplar ferramentas da matemática discreta à análise e solução de problemas de valor inicial em equações diferenciais, mais especificamente, as chamadas equações de dinâmica populacional de Lotka-Volterra com competição. Essas equações, que modelam o comportamento predador-presa, possuem, com os parâmetros inicialmente utilizados, um ponto de equilíbrio mais alto que o desejado no contexto agrícola sob exame, resultando na necessidade de utilização da teoria do controle ótimo. O esquema desenvolvido neste trabalho conduz a ferramentas suficientemente simples, de forma a tornar viável o seu uso em situações reais. Os dados utilizados para o tratamento do problema que conduziu a esta pesquisa interdisciplinar foram coletados de material bibliográfico da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – EMBRAPA.

Palavras-chave: Teoria dos jogos. Controle ótimo. Sistemas biológicos.

ABSTRACT

MONTEIRO, D. R. *A model in mathematical ecology built with game theory*. 2013. 103f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

In this work an alternate approach is proposed to deal with a quite worrying question in ecology, namely, how can we cope with pests that endanger a soy crop located in a fixed geographical environment. The theoretical tool chosen to be employed is Game Theory. The strategy thus developed leads to the coupling of discrete and continuum mathematics, as long as the so-called Lotka-Volterra equations compose the model the study lies on. These equations, associated to predator-prey simulation, bear a too high equilibrium point when parameters associated to real situations are taken. Optimum control theory is thus usually employed, but this turns out to be a rather sophisticated technique. The scheme presented here is simpler, which makes possible its larger dissemination, as long as a practical implementation is completed. The present multidisciplinary research was conducted with data collected from reports made available by EMBRAPA, the Brazilian Enterprise for Agricultural Research.

Keywords: Game theory. Optimal control. Biological systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Jogo simultâneo em forma normal ou estratégica.	22
Figura 2 – Jogo simultâneo em forma normal em cores.	23
Figura 3 – Jogo sequencial na forma estendida ou de árvore de jogos.....	25
Figura 4 – Violando a regra (1) da árvore de jogos.....	26
Figura 5 – Violando a regra (2) da árvore de jogos.....	27
Figura 6 – Violando a regra (3) da árvore de jogos.....	27
Figura 7 – Conjuntos de informações unitários em jogo na forma estendida.	29
Figura 8 – Conjuntos de informações não-unitários em jogo na forma estendida.....	29
Figura 9 – Conjuntos de informações não podem conter nós que pertençam a jogadores diferentes.....	31
Figura 10 – Conjuntos de informações não podem conter nós em sequência.	31
Figura 11 – Os nós de um conjunto de informação não podem apresentar diferentes conjuntos de ação.....	32
Figura 12 – O jogo simultâneo da figura 1 na forma estendida.	32
Figura 13 – O jogo sequencial da figura 1 na forma normal.....	33
Figura 14 – Dilema do prisioneiro na forma normal.	34
Figura 15 – Batalha dos sexos na forma normal.	35
Figura 16 – Jogo do “galinha” forma normal.	36
Figura 17 – Exemplo de estratégia fortemente dominante.....	36
Figura 18 – Exemplo de estratégia fracamente dominada.	37
Figura 19 – Empresas de chocolate.	39
Figura 20 – Empresas de chocolate sem a estratégia estritamente dominada.	39
Figura 21 – O jogo dos supermercados.	40
Figura 22 – O jogo dos supermercados.	41
Figura 23 – O jogo dos supermercados.	42
Figura 24 – Sistema de malha aberta.	47
Figura 25 – Sistema de malha fechada.....	48
Figura 26 – Toxicidade e persistência ambiental de alguns agrotóxicos (escala de 1 a 5).	56

Figura 27 – Classificação toxicológica dos agrotóxicos.	58
Figura 28 – Principais efeitos agudos e crônicos causados pela exposição aos agrotóxicos, de acordo com a praga que controlam e o grupo químico a que pertencem.	58
Figura 29 – Pragas da soja, parte da planta atacada e sua importância relativa.	69
Figura 30 – <i>Anticarsia gemmatalis</i>	70
Figura 31 – Entomopatógenos de lagartas.	73
Figura 32 – Gráfico de fases do sistema sem controle	74
Figura 33 – Gráfico de fases do sistema com controle	75
Figura 34 – Variação do parâmetro	75
Figura 35 – Jogo lagarta X inimigos naturais	75
Figura 36 – Equilíbrio de Nash.	76
Figura 37 – Sistema com controle.	78

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	TEORIA DOS JOGOS	14
1.1	Introdução	14
1.2	Histórico	15
1.3	Tipos de jogos	16
1.3.1	<u>Jogos de uma só pessoa</u>	16
1.3.2	<u>Jogos de duas pessoas</u>	17
1.3.3	<u>Jogos de N-pessoas</u>	19
1.4	Conceito de racionalidade dos jogadores	19
1.5	Modelando um jogo	20
1.5.1	<u>Representando um jogo simultâneo: a forma normal ou estratégica</u>	21
1.5.2	<u>Representando um jogo sequencial: a forma de árvore de jogos ou estendida</u>	23
1.6	Os exemplos clássicos da teoria dos jogos	33
1.6.1	<u>Conhecendo cada exemplo</u>	33
1.6.2	<u>O dilema do prisioneiro</u>	33
1.6.3	<u>A batalha dos sexos</u>	35
1.6.4	<u>O jogo do “galinha”</u>	35
1.7	Resolvendo jogos	36
1.7.1	<u>Visualizando estratégias dominantes e dominadas</u>	36
1.7.2	<u>Eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas</u>	38
1.7.3	<u>Equilíbrio de Nash e ótimo de Pareto</u>	39
2	TEORIA DE CONTROLE	44
2.1	O surgimento da teoria de controle	44
2.2	Sistemas livres de controle	45
2.3	Sistemas autônomos com controle	47
2.4	Programação dinâmica	49
2.4.1	<u>Funcional de custo</u>	50
2.4.2	<u>Função de Bellman</u>	51

2.4.3	<u>Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)</u>	53
3	CONTROLE DE PRAGAS	55
3.1	O que são pragas?	55
3.2	O uso de agrotóxicos	55
3.2.1	<u>Consequências do uso de agrotóxicos</u>	56
3.3	Soluções alternativas para o controle de pragas	58
3.3.1	<u>Cultivo sem agrotóxico</u>	58
3.3.2	<u>Gestão integrada do controle de pragas (<i>Integrated Pest Management-IPM</i>)</u>	58
3.3.3	<u>Controle biológico</u>	59
3.3.4	<u>Biotecnologia</u>	59
4	TEORIA DOS JOGOS APLICADA AO CONTROLE DE PRAGAS	61
4.1	Introdução	61
4.2	Histórico	61
4.3	O jogo	62
4.3.1	<u>Os jogadores</u>	62
4.3.2	<u>O plano de fundo do jogo</u>	62
4.4	Modelagem matemática de dinâmica populacional	63
4.5	Aplicação ao controle de pragas em lavouras de soja	68
4.5.1	<u>Pragas da soja</u>	68
4.5.2	<u>Lagarta da soja</u>	69
4.5.2.1	<u>Manejo integrado</u>	71
4.5.3	<u>Jogo aplicado ao controle de lagartas</u>	73
	CONCLUSÃO	77
	REFERÊNCIAS	79
	APÊNDICE – Jogos diferenciáveis	82

INTRODUÇÃO

A Ecologia é a ciência que pesquisa as interações entre os organismos e seu ambiente, ou seja, é o estudo científico da distribuição – abundância ou escassez – de seres vivos e das interações que determinam essa distribuição. As interações podem ser entre seres vivos e/ou com o meio ambiente. A palavra Ecologia tem origem no grego “*oikos*”, que significa casa, e “*logos*”, estudo. Seria então o estudo da casa, ou, mais propriamente, do lugar ou ambiente onde se vive.

A ecologia matemática se propõe a utilizar modelos matemáticos para analisar, entender, avaliar, prever fenômenos ecológicos. Modelar um fenômeno real consiste em estabelecer uma correspondência entre grandezas, ações, seres, eventos de um dado contexto do universo e variáveis sujeitas a determinadas relações matemáticas. A correspondência *a priori* estabelecida – entre a matemática e o fenômeno real – permite o emprego das conclusões matemáticas obtidas no ambiente sob estudo.

Neste trabalho apresentamos um problema real na agricultura: o controle de pragas. Para realizar esse controle, utilizamos as equações de Lotka-Volterra com competição. Introduzimos um controle e, com o emprego de dados reais, montamos um jogo para o qual obtemos um Equilíbrio de Nash. Trata-se de uma aplicação da teoria dos jogos diferenciáveis, uma área que une a teoria dos jogos (clássica) à teoria de controle. Por ser este um tópico ainda com escassa literatura em português, apresentamos no Apêndice uma exposição resumida dessa teoria, que inclui dois exemplos de aplicação.

No Capítulo 1 introduzimos a teoria dos jogos. Mostramos como se classifica um jogo pela quantidade de jogadores, como reconhecer estratégias estritamente dominantes e dominadas, Equilíbrio de Nash e Ótimo de Pareto.

Alguns tópicos de teoria de controle são apresentados no Capítulo 2. Abordamos aspectos históricos, tipos de sistema (malha aberta ou fechada) e alguns pontos da programação dinâmica.

O Capítulo 3 discute como efetuar o controle de uma dada praga na agricultura: quais benefícios e inconvenientes estão associados ao seu controle, bem como as diversas formas como ele pode ser empregado.

O núcleo do Capítulo 4 consiste em apresentar um jogo que desenvolvemos: ele utiliza as equações de Lotka-Volterra com competição numa lavoura infestada por pragas.

Aplicamos um determinado controle e, em seguida, exibimos uma tabela associada, de forma a possibilitar a determinação do correspondente Equilíbrio de Nash.

Como exemplo prático, utilizamos o controle de praga por intermédio do manejo integrado numa lavoura de soja.

1 TEORIA DOS JOGOS

1.1 Introdução

A Teoria dos Jogos é o estudo matemático do contexto das tomadas de decisão entre indivíduos, sendo a escolha de cada um dependente das decisões dos demais. Essa teoria foi inicialmente formalizada com a publicação por John von Neumann e Oskar Morgenstern do texto *The Theory of Games and Economic Behavior* [17] e passou a ter maior destaque quando, em 1994, John Forbes Nash recebeu o Nobel de Economia pelo trabalho que desenvolveu com esse suporte teórico.

O jogo é uma atividade primária do ser humano e tudo indica fazer parte de sua vida desde a pré-história, mesmo que de forma intuitiva. Procurando sua origem, é possível encontrar formas de jogos já entre os egípcios, como as registradas num mural de aproximadamente 2.700 anos a.C.: *Meninas jogando bola* e *O vaso*, onde se encontra um jogo com pedrinhas em um tabuleiro circular. Pode-se definir um jogo como *uma situação onde indivíduos interagem entre si, utilizando determinadas estratégias para conquistar um propósito*. Os elementos básicos são:

- Os **jogadores** (indivíduos) – O número de jogadores depende do jogo em questão. Os jogadores podem ser nomeados como: adversários, oponentes, pessoa, agente e indivíduo;
- As **regras do jogo** – Cada jogo tem sua regra: tipo de movimento da peça, o que ocorre depois que se chega a determinado ponto, entre outros;
- Os **resultados** – Dependendo da ação que foi feita anteriormente, um resultado é atingido;
- Os **ganhos** (*payoffs* ou recompensas) – É o resultado que o jogador obtém por meio das estratégias por ele utilizadas. Dependendo do jogo, os ganhos são diversos, cabe ao jogador utilizar suas estratégias de forma a conseguir o ganho esperado. Pode-se dizer também que um ganho é aquilo que todo jogador obtém depois de terminado o jogo, de acordo com suas próprias escolhas e as dos demais jogadores.

1.2 Histórico

Até 1920, não havia interesse científico em elaborar análises técnicas para estudar estratégias de jogos. Os jogos de tabuleiros e cartas divertem a humanidade há anos, por colocarem as pessoas em situações nas quais vencer ou perder depende das estratégias utilizadas desde o início do jogo. Mas seu estudo só começou a ter um maior interesse após o surgimento da Teoria da Probabilidade, que teve início com o físico e matemático Frances Blaise Pascal, juntamente com o francês Pierre de Fermat, que desenvolveram a Teoria da Probabilidade em jogos de azar, utilizando regras matemáticas.

Em seguida Antoine Augustin Cournot, com estudo da análise do ponto de equilíbrio nas estratégias de jogos, formalizou um conceito específico de equilíbrio que depois foi generalizado por John Forbes Nash Jr.

A Teoria dos Jogos teve importante avanço quando John von Neumann, um matemático húngaro, provou o Teorema Minimax, que afirma: em um jogo de dois jogadores com soma zero, é racional para cada jogador escolher a estratégia que maximiza seu ganho mínimo, ou, de forma equivalente, que minimiza o ganho máximo do outro.

Esse resultado foi publicado em 1928 no artigo *Sobre a Teoria dos Jogos de Estratégia*, [18]. Na época o economista alemão Oskar Morgenstern estava para publicar o livro *Implicações Quantitativas do Comportamento do Máximo* [36], no qual discutia qual deveria ser a unidade de análise econômica: o individualismo ou a interação social. Chegou-se à conclusão de que se os indivíduos interagem, então a sua racionalidade é relativa. Se a racionalidade do indivíduo não é plena então a sua maximização também não será. A obra de Morgenstern expõe que o máximo depende diretamente da interação entre os indivíduos e indiretamente do meio no qual os indivíduos interagem. Por isso Morgenstern e John von Neumann reuniram-se e publicaram, em 1944, a obra *Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico*, [17], que além de desenvolver uma teoria de jogos para um número qualquer de participantes afirma que o comportamento da economia depende, fundamentalmente, da interação entre os agentes, já que ele afeta diretamente a elaboração de estratégias e tomadas de decisão dos produtores e dos consumidores.

Nesse período iniciou-se, cientificamente, a utilização das primeiras ideias sobre Teoria dos Jogos, com a finalidade de descobrir a melhor forma de jogar, supondo que os participantes dependiam de habilidade e de sorte – jogos de azar.

Após a publicação do livro *The Theory of Games and Economic Behavior* [17], a Teoria dos Jogos passou a ter um maior destaque e, mais tarde, John Forbes Nash desenvolveu o agora chamado Equilíbrio de Nash.¹

1.3 Tipos de jogos

Existem basicamente três tipos de jogos que são determinados pelo número de participantes.

1.3.1 Jogos de uma só pessoa

Em jogos de uma só pessoa, geralmente, encara-se a natureza como sendo o outro jogador. Existem controvérsias sobre esse tipo de jogo. Alguns autores não consideram jogos de uma só pessoa como jogos, visto que o jogador sempre possui algum adversário, sendo este a natureza ou outro oponente. Por exemplo, ao jogar Paciência no computador, o próprio computador é o adversário. Caso se jogue outro tipo de jogo de carta, o baralho pode ser encarado como o adversário.

Assim sendo, aos que consideram a existência de jogos de uma só pessoa, eles constituem-se, realmente, em jogos contra a natureza. Jogos desse tipo podem ser agrupados em três categorias, levando em conta o papel que ela desempenha em cada uma delas. Na primeira categoria, o meio não tem qualquer papel ativo, o jogador simplesmente procede a uma escolha, e essa escolha determina os acontecimentos. Na segunda categoria, há uma participação do meio, sendo esta considerada as leis do acaso; o jogador faz a primeira escolha e as leis/regras do acaso determinam o resto das ações. Neste caso, o jogador tem conhecimento do que pode vir a ocorrer. E na terceira categoria, o jogador toma decisão sem informação antecipada de como o seu oponente irá jogar.

Como exemplo da primeira categoria, temos o de uma pessoa que usará o elevador para ir ao escritório localizado no andar A. As alternativas que ela possui são os diversos botões do painel do elevador, inclusive o andar A. Os resultados possíveis são os diferentes andares existentes. A pessoa só terá um resultado favorável caso ela saiba aonde deve ir. Caso contrário parará em vários andares até chegar ao andar desejado.

¹Nash ficou conhecido mundialmente por ter sua vida retratada no filme *Uma mente brilhante*, vencedor do Oscar de melhor filme em 2001.

O exemplo clássico da segunda categoria é dos cinco criminosos suspeitos de terem cometido um crime e que estão mantendo um encontro secreto em um porão de um edifício. Do lado de fora há um policial que possui ordens de seguir o chefe do bando após o término do encontro, porém ele só possui a informação de que o chefe do grupo é o mais alto do grupo. Por medida de cautela, os criminosos abandonam o edifício um por vez em intervalos de tempo espaçados.

Pode parecer um jogo de mais de uma pessoa, porém somente um possui interesse no resultado do jogo, visto que os suspeitos não sabem que estão sendo seguidos. A natureza neste caso não tem interesse no resultado, cabe admitir que uma dada ordem de saída pode ocorrer com tanta probabilidade quanto qualquer outra ordem. Sendo assim, cabe ao policial adotar a medida de deixar dois criminosos seguirem o caminho e depois seguir o mais alto que sair.

Já na terceira categoria, têm-se vários exemplos. Um apostador joga na Mega-Sena. Ele sabe quais são as suas chances de ganhar com um único jogo, mas não sabe se os números do sorteio serão os mesmos que ele jogou. Um fazendeiro está decidindo se compra ou não um sistema de irrigação, ele não sabe quando ocorrerá a próxima chuva, porém tem condições de fazer uma razoável previsão de quando a mesma deve ocorrer.

Os jogos de uma só pessoa não possuem grande relevância diante dos outros. O ponto em questão, tanto em jogos de uma só pessoa quanto em jogos de n -pessoas, é que se deve conhecer os objetivos do jogador antes de tomar qualquer decisão.

1.3.2 Jogos de duas pessoas

São jogos com dois jogadores, porém podem existir mais participantes, mas que na verdade são representados somente por esses dois jogadores. Por exemplo, o sindicato de empregados de uma firma quer uma manifestação pedindo um aumento salarial. Enquanto a diretoria não atender este pedido, os empregados continuarão a realizar a manifestação. O sindicato na verdade é um grupo de trabalhadores e a diretoria também, mas o jogo em si é o embate entre esses dois grupos, o da diretoria e o do sindicato.

Os jogos de duas pessoas apresentam algumas características comuns aos jogos de N -pessoas: jogo finito, jogo com repetição ou sem repetição, jogo cooperativo ou não cooperativo, jogo de soma zero ou de soma não zero, jogo simultâneo, jogo sequencial, jogo com informação perfeita e jogo geral (ou de informação imperfeita).

- Jogo finito: um jogador só dispõe, em cada lance, de um número finito de alternativas e o jogo se encerra após um número finito de lances.
- Jogo com repetição: a partida, após o término, é repetida por certo número de vezes.
- Jogo sem repetição: a partida só ocorre uma vez e após não há mais jogadas.
- Jogo cooperativo: os jogadores cooperam entre si visando o melhor resultado possível.
- Jogo não cooperativo: os jogadores não cooperam entre si.
- Jogo de soma zero: a expressão *soma zero* deriva dos jogos de salão, como o pôquer, no qual não se cria, nem se destrói riqueza. Quem quiser ganhar dinheiro terá de ganhá-lo de outro jogador. Encerrado o jogo, a soma dos ganhos é sempre zero (as perdas são ganhos negativos).
- Jogo de soma não zero: o jogo não apresenta saldo neutro.
- Jogo simultâneo: é aquele em que cada jogador ignora as decisões dos demais no momento em que toma a sua própria decisão e os jogadores não se preocupam com as consequências futuras de suas escolhas.
- Jogo sequencial: é aquele em que os jogadores realizam seus movimentos em uma ordem predeterminada
- Jogo com informação perfeita: ambos os jogadores possuem conhecimento total das informações do jogo. Ou seja, surpresas estão fora de questão a qualquer altura do jogo ambos os participantes estão inteiramente informados.
- Jogo geral ou de informação não perfeita: os jogadores não possuem todas as informações sobre o jogo. Podem existir informações novas que não são passadas aos mesmos, ou até informações que não são dadas por certos motivos. Jogos desse tipo são mais complexos do que os de informação perfeita.

1.3.3 Jogos de N -pessoas

São jogos com mais de duas pessoas. Todos os tipos de jogos descritos acima também ocorrem em jogos de n -pessoas. Com a maior quantidade de jogadores, maiores são as dificuldades em analisar esse tipo de jogo.

1.4 Conceito de racionalidade dos jogadores

A Teoria dos Jogos baseia-se no fato de que todos os jogadores são racionais. Supor que um jogador é racional na Teoria, significa supor que os indivíduos empregam meios mais adequados aos objetivos que almejam, sejam quais forem esses objetivos. Além disso, o jogador possui ideias e preferências transitivas. Por exemplo: João prefere maçã à banana, mas entre banana e pera, ele prefere banana. Com isso, se oferecem maçã e pera a João, ele, sendo racional, escolherá maçã. Um jogador racional jamais deixará de escolher um ganho melhor em detrimento de outro pior.

Aprofundando um pouco mais o conceito de racionalidade do jogador – já que esta é uma das características mais importantes da teoria dos jogos, pois estuda a interação estratégica entre agentes que se comportam racionalmente – há a necessidade de se ter mais clareza sobre o que significa agir de forma racional. A teoria é limitada pelo *agir racionalmente dos jogadores* e já foi analisado que esse *agir racional* equivale a dizer que o jogador usará os meios de que dispõe da melhor forma possível.

As condições que devem ser satisfeitas para que uma ação seja considerada racional são complexas. Um indivíduo que deseja realizar seus objetivos por meio de uma ação racional deve, como um primeiro passo, formular uma hipótese inicial sobre a melhor forma de agir para atingir seus objetivos. Sendo definida a mesma, ele deve procurar recolher informações para testar a validade dela. Neste processo de coleta de informações, a hipótese pode permanecer válida, ser corrigida, ou mesmo ser substituída por outra mais adequada, de acordo com o que foi obtido. Finalmente, com base na hipótese final resultante dessa coleta, o agente escolhe a melhor ação a seguir.

Resumidamente, diante de um propósito, o indivíduo estuda os meios existentes para conseguir o seu objetivo e, diante de todos os meios, escolhe o melhor entre todos. O conceito de racionalidade é importante diante de como o indivíduo vai fazer essa escolha. Um ser racional busca a melhor opção, um ser não racional não necessariamente buscará

a melhor opção. No exemplo dado, onde se oferece ao João pera e maçã, se ele não fosse racional poderia ter escolhido pera e não maçã.

Cabe ressaltar que o conceito de racionalidade do jogador não entra no campo filosófico. Um jogador que age racionalmente deve deixar de se influenciar pelas emoções e não agir *sem pensar*, o que significa cumprir o requisito racional de levantamento de informações para avaliar a hipótese original sobre a melhor maneira de atingir os objetivos almejados.

1.5 Modelando um jogo

Jogos são modelos matemáticos para interações estratégicas e estas, por sua vez, são o resultado do conhecimento, por parte de cada um dos jogadores, de que suas ações afetam os demais e vice-versa.

Primeiramente, considerem-se as seguintes definições.

- Jogador: Um jogador é qualquer indivíduo ou organização envolvido no processo de interação estratégica que tenha autonomia para tomar decisões.
- Ação ou Movimento: Uma ação ou movimento de um jogador é uma escolha que ele pode realizar em um dado momento do jogo.
- Estratégia: É uma descrição completa de como uma pessoa deverá agir sob quaisquer circunstâncias possíveis; não tem a conotação de destreza. Conhecendo a estratégia de um jogador, é possível prever o resultado do jogo.

Os jogos podem ser representados de duas formas. A primeira aparenta a forma de uma tabela, chamada de *forma normal* ou estratégica, e a outra tem a forma de uma árvore de jogos, chamada de forma estendida. Ambas serão mostradas adiante.

Para modelar o jogo nas duas formas citadas é necessário ter várias informações sobre este, tais como: quantidade de jogadores, se o jogo é sequencial ou simultâneo, ações e ganhos possíveis dos jogadores. Com todos esses dados, pode-se assim modelar o jogo tanto no formato tabela como no formato de árvores de jogos.

1.5.1 Representando um jogo simultâneo: a forma normal ou estratégica

Um jogo simultâneo é aquele em que cada jogador ignora as decisões dos demais no momento em que toma a sua própria decisão e os jogadores não se preocupam com consequências futuras. Para apresentar um jogo deste tipo, segue abaixo o exemplo.

Dois bancos (Banco A e Banco B) devem decidir se irão ou não renovar o contrato de empréstimo com um cliente que está passando por dificuldades financeiras. Para isso, são necessárias informações tais como: quais são as ações que cada banco pode adotar e quais são as consequências desses atos. Supõe-se que os bancos só possuem dois tipos de ações a adotar, *Renovar* ou *Não Renovar* o contrato com o cliente em crise. Caso o banco decida *Renovar*, o mesmo continua recebendo o pagamento dos juros. Caso decida *Não Renovar*, a empresa em crise é obrigada a reembolsar o principal do empréstimo.

Por hipótese, supõe-se que a empresa tomou emprestado de cada banco \$ 5 milhões, mas que, em virtude da crise pela qual está passando, seus ativos valem menos que a soma de seus empréstimos: os ativos totais da empresa seriam de \$ 6 milhões, sendo insuficientes para cobrir o total de ambos os empréstimos, que são \$ 10 milhões. Caso os bancos decidam renovar seus contratos, a perspectiva é de que a empresa consiga se manter operando por mais um ano, pagando normalmente a taxa de juros a partir da receita corrente, no valor de \$ 1 milhão para cada banco. Após isso, a empresa provavelmente viria à falência. Falindo, os bancos dividiriam os ativos no valor de \$ 6 milhões, resultando para cada banco, ao final, um total de \$ 4 milhões, referente à \$ 3 milhões da divisão do ativo mais \$ 1 milhão dos juros pagos.

Se um dos bancos, entretanto, decidir não renovar o empréstimo, o mesmo receberá integralmente seu empréstimo de \$ 5 milhões de volta, mas com isso precipitará a falência da empresa. Como a empresa seria obrigada a pagar o empréstimo de \$ 5 milhões, só restaria ao banco que aceitou renovar seu contrato receber o remanescente \$ 1 milhão (\$ 1 milhão resultante da diferença do ativo de \$ 6 milhões menos os \$ 5 milhões pagos ao banco que não quis renovar o contrato).

A última possibilidade é a de que ambos os bancos decidam, ao mesmo tempo, não renovar seus contratos. Nesse caso, como os ativos da empresas são insuficientes, ela será obrigada a decretar sua falência e dividir os ativos entre os bancos; ou seja, cada banco receberá somente \$ 3 milhões dos \$ 5 milhões emprestados e terá então um prejuízo de \$ 2 milhões.

Na Figura 1 a seguir, representa-se o hipotético jogo entre os bancos descritos acima.

Figura 1 – Jogo simultâneo em forma normal ou estratégica.

	Banco B	
	Renova	Não Renova
Banco A		
Renova	4,4	1,5
Não Renova	5,1	3,3

A representação em forma normal é feita por uma tabela cujas estratégias de um jogador encontram-se listadas nas colunas e as do outro jogador listadas nas linhas. Sendo assim, as possíveis ações do Banco A *Renova*, *Não renova* estão nas linhas da tabela e as possíveis ações do Banco B estão nas colunas *Renova*, *Não renova*. Além das ações possíveis de cada jogador, a forma normal apresenta os ganhos que cada jogador recebe pelas suas escolhas, dadas as ações conduzidas pelo outro jogador.

Estas recompensas tanto podem ser constituídas pela utilidade que um jogador obtém depois de ter jogado o jogo, como podem ser constituídas pelo valor monetário que resulta ao fim do jogo. No sentido de ser o valor monetário que resulta ao fim do jogo, pode-se pensar as recompensas do Banco A e do Banco B como sendo os reembolsos a serem obtidos por essas duas empresas, de acordo com as suas escolhas.

Os ganhos do Banco A e do Banco B podem ser vistos nos números nas células da Figura 1, em que o primeiro número representa a recompensa do jogador que tem suas ações representadas nas linhas (Banco A), enquanto o segundo número representa o ganho do jogador que tem suas ações representadas pela coluna (Banco B). Dessa forma, caso o Banco A decida renovar o seu contrato enquanto o Banco B decide ao mesmo tempo não renovar o contrato, o Banco A obtém uma recompensa de \$ 1 milhão, enquanto a recompensa do Banco B é de \$ 5 milhões.

Na Figura 2 a seguir, diferenciam-se por cores as recompensas dos jogadores para melhor visualização.

Figura 2 – Jogo simultâneo em forma normal em cores.

Banco B		
Banco A	Renova	Não Renova
Renova	4,4	1,5
Não Renova	5,1	3,3

É importante destacar dois aspectos da interação que estão sendo modelados por meio da forma normal. O primeiro deles diz respeito ao fato de que cada jogador ignora a decisão do outro, no momento em que toma a sua decisão: um banco não sabe da decisão do outro banco, ou seja, ambos tomam sua decisão ao mesmo tempo sem saber qual decisão o outro banco irá tomar. O segundo aspecto é o fato de que nada indica que os dois bancos estão considerando possíveis desdobramentos no tempo em que estão tomando suas decisões: eles aparentam estar considerando somente as consequências imediatas em termos da lucratividade de suas empresas.

A forma normal fornece todas as possíveis combinações de ações dos jogadores, assim como os resultados obtidos. Este formato informa o que cada jogador fez e o que conseguiu com sua ação, em função da escolha do outro jogador. Para o caso de um jogo simultâneo com apenas dois jogadores, esse modelo de apresentação, ou seja, forma normal ou estratégica é a mais simples de modelagem.

Os jogos simultâneos, porém, possuem uma limitação. Este tipo de jogo não é o modelo mais preciso para descrever um processo de interação que ocorre em várias etapas. Neste tipo de interação estratégica, supor que cada jogador ignora as decisões dos demais pode não ser a melhor forma de se analisar a real situação. Para isso são utilizados os jogos sequenciais.

1.5.2 Representando um jogo sequencial: a forma de árvore de jogos ou estendida

Os jogos simultâneos não fornecem informações sobre possíveis desdobramentos decorrentes das escolhas dos jogadores, entretanto, muitas vezes, o processo de interação estratégica se desenvolve em etapas sucessivas e é cabível pensar que o processo de interação estratégica se desenrole por meio de ações e respostas sucessivas.

Para isso, existem os jogos sequenciais, que são aqueles em que os jogadores realizam seus movimentos em uma ordem predeterminada. Para apresentar um jogo deste tipo faremos o seguinte exemplo.

Sejam Nova e Velha duas empresas de fabricação de automóveis. A empresa Velha sabe que a Nova está para lançar no mercado um novo modelo de carro popular, sendo que a mesma possui um modelo parecido e já é consolidada no mercado. A Nova decide antes se vai ou não lançar seu novo modelo popular. A partir deste momento, a empresa Velha decide se irá baixar o preço do seu popular ou manter o preço, mas ela só toma sua decisão após a decisão da Nova de lançar ou não seu novo modelo popular.

Caso a Nova decida lançar seu modelo popular e a Velha decida reduzir o preço do seu modelo, cada empresa obtém um lucro na produção de veículos populares de \$ 2 milhões, uma vez que ambas disputam o mesmo mercado. Por outro lado, caso a Velha mantenha o preço dos seus populares, suas vendas se reduzem significativamente, e seus lucros caem para \$ 1 milhão, enquanto a empresa Nova toma parte do mercado e seus lucros aumentam para \$ 4 milhões.

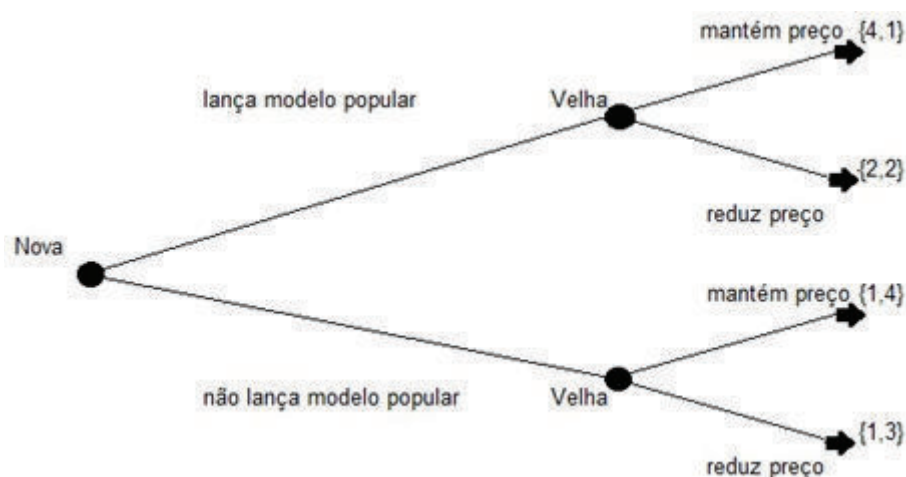
A outra possibilidade é que a Nova decida não lançar o seu modelo. Nesse caso, a decisão da Velha de reduzir ou não o preço do seu modelo popular vai afetar somente os seus lucros (\$ 3 milhões em um caso, \$ 4 milhões em outro), mas os lucros da Nova, que não possui um concorrente direto para o modelo popular da Velha (nos dois casos o seu lucro é de \$ 1 milhão). Cabe ressaltar que a empresa Velha toma sua decisão após conhecer a opção da Nova de lançar ou não seu modelo popular.

Para representar esse tipo de situação utiliza-se uma árvore de jogos, que é composta por *ramos* e *nós*. Cada *nó* representa uma etapa do jogo em que um dos jogadores tem que tomar uma decisão. Já o *ramo* representa uma das escolhas possíveis para o jogador, a partir do seu nó. Em termos mais precisos, um ramo é uma ação do conjunto de ações do jogador, em um dado nó.

À medida que um nó no jogo é alcançado, outros nós se tornam possíveis, ou seja, determinadas escolhas de um jogador, em uma dada etapa do jogo, tornam possíveis outras escolhas dos demais jogadores nas etapas seguintes, assim como, em outras vezes, outras escolhas do mesmo jogador no futuro.

Representando o jogo acima na forma estendida tem-se a Figura 3 a seguir:

Figura 3 – Jogo sequencial na forma estendida ou de árvore de jogos.



Para efetuar a leitura do jogo na forma estendida inicia-se do lado esquerdo para o direito da árvore de jogos. A empresa Nova é o jogador a fazer o primeiro movimento. Pode-se, então, deduzir que o nó inicial é da Nova. Dois ramos saem do nó inicial: um representa a decisão de lançar o modelo popular e o outro que representa a decisão de não lançar o modelo. O ramo que representa a decisão de lançar o modelo termina em um nó que pertence à Velha, o que significa que a Velha deve jogar. Ela só toma a sua decisão após a escolha da Nova de lançar o modelo, uma vez que o nó que pertence à Velha é sucessor do nó em que a Nova decide entre lançar ou não lançar o modelo popular. Ou, equivalentemente, como o nó que pertence à Nova é predecessor do nó em que a Velha decide se vai reduzir ou manter o preço, a empresa Velha toma a sua decisão já conhecendo a decisão da Nova.

Do nó da Velha partem dois ramos, representando as duas decisões possíveis: reduzir o preço ou manter o mesmo. Esses ramos alcançam os nós terminais com as recompensas de cada jogador, indicando que depois que a Velha fizer a sua escolha o jogo acaba e cada jogador recebe seus ganhos. Caso a Nova tenha decidido lançar o modelo popular e a Velha escolha reduzir o preço, tanto a Nova como a Velha têm um lucro de \$ 2 milhões. Se, nas mesmas circunstâncias, a Velha decide manter o preço de seu modelo popular, a Nova obterá um lucro de \$ 4 milhões, e a Velha obterá um lucro de \$ 1 milhão. O mesmo raciocínio se aplica analisando o outro nó inicial que parte da Nova, e que corresponde à decisão de Não Lançar o modelo popular.

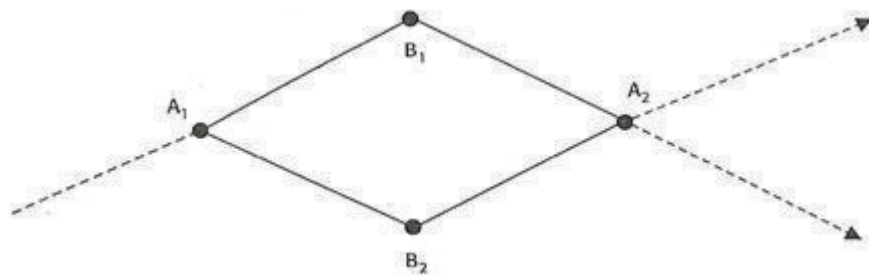
Nos resultados apresentados ao final, o primeiro valor corresponde aos ganhos da empresa Nova enquanto o segundo valor corresponde à empresa Velha.

Este formato de jogo permite representar processos de interação estratégica que se desenrolam em etapas sucessivas. Modelar um jogo neste formato é mais complexo do que em formato normal. O que não é de se estranhar, visto que a forma estendida oferece mais informações do que o jogo na forma normal, uma vez que o primeiro informa como a interação se processa sucessivamente. Por isso, existem regras ao modelar um jogo na forma de árvore de jogos que preservam a coerência das ações e informações do modelo, regras essas que são:

- Todo nó deve ser precedido por, no máximo, outro nó;
- Nenhuma trajetória pode ligar um nó a ele mesmo;
- Todo nó na árvore de jogos deve ser sucessor de um único e mesmo nó inicial.

Analisando cada regra separadamente, consideramos inicialmente a regra (1). No caso dos nós iniciais, a validade da regra é clara, pois os mesmos são precedidos por nenhum outro nó. Para os outros nós, é preciso compreender o sentido da regra (1). Observando a Figura 4 (as flechas tracejadas indicam a continuidade do jogo nas etapas que estão sendo representadas).

Figura 4 – Violando a regra (1) da árvore de jogos.

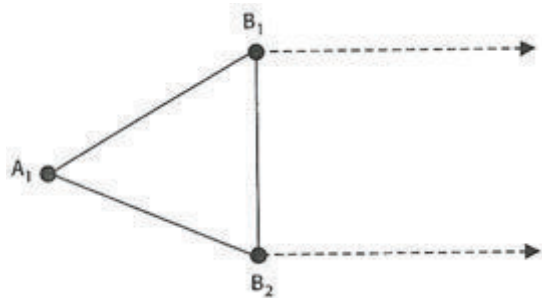


A Figura 4 representa uma trajetória em uma hipotética árvore de jogos em que a primeira regra da modelagem em formato de árvore de jogos foi quebrada: o segundo nó pertence ao jogador A (A_2), é antecedido por dois nós do jogador B (marcados como B_1 e B_2). Significa isto que uma vez que o jogador A tenha alcançado A_1 , não importa a escolha do jogador B (B_1 ou B_2), o jogador A sempre alcançará A_2 . Não existindo

então, neste caso, motivo para considerar a escolha de B por B_1 ou B_2 , uma vez que essa escolha não causa alterações no desenrolar do jogo, essa etapa não deve ser representada na árvore de jogos.

A Figura 5 representa o que ocorre quando a segunda regra (2) não é cumprida. O próprio objetivo da forma estendida, que é permitir a análise de processos dinâmicos de interação, ao retratar a sucessão de etapas em que os jogadores tomam suas decisões, fica comprometido.

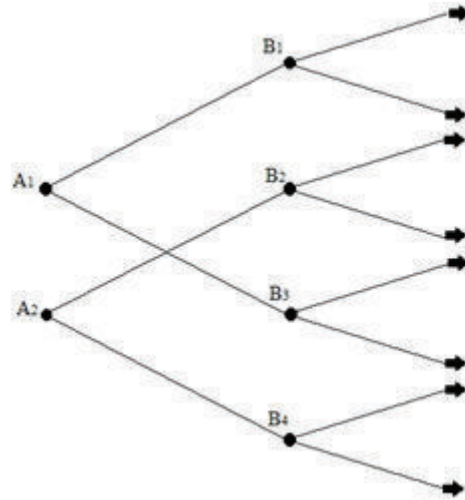
Figura 5 – Violando a regra (2) da árvore de jogos.



Com efeito, examinando o caso da Figura 5 não há como identificar qual nó é o sucessor de outro, entre os três nós A_1 , B_1 e B_2 e, desse modo, não se sabe quem move primeiro, o jogador A ou B.

A Figura 6 representa uma situação em que há dois nós iniciais distintos pertencentes ao jogador A, A_1 e A_2 , o que viola a última regra (3) de construção da árvore de jogos. Esses nós iniciais conduzem a diferentes nós pertencentes ao jogador B: A_1 precede B_1 e B_3 , A_2 precede B_2 e B_4 . Em outras palavras, o jogador B terá diferentes oportunidades de escolha dependendo do nó em que o jogo se inicie.

Figura 6 – Violando a regra (3) da árvore de jogos.



Na Figura 6 não há como saber com qual nó o jogo efetivamente iniciará e assim não tem como ser analisado o jogo. O que pode ser feito é separar a trajetória que inicia em A_1 da trajetória que inicia em A_2 e tratá-las como dois jogos distintos, sendo que os jogos separados respeitarão as regras dessa modelagem. Outra solução possível é estabelecer uma distribuição de probabilidades para ver onde o jogo se inicia-se em A_1 ou A_2 .

Sendo assim, as situações apresentadas nas Figura 4, Figura 5 e Figura 6 devem ser evitadas ao se representar um jogo na forma estendida.

Dadas as regras e conhecendo as características das empresas Nova e Velha, pode-se então começar a analisar o jogo. Cabe lembrar que no caso de um jogo simultâneo, a estratégia de cada jogador é igual às ações de que dispõe, uma vez que os jogadores fazem suas escolhas em um único momento, mas em jogos sequenciais, em geral os jogadores são capazes de, em algum momento, fazer suas escolhas conhecendo as ações dos demais em etapas anteriores do jogo. No exemplo da Figura 3, a Velha decide o que fazer após a Nova ter decidido se lança ou não seu modelo popular. Nesse caso, as estratégias que comporiam o espaço de estratégias da Velha seriam:

- Mantém o preço caso a Nova lance seu modelo popular, reduz o preço caso contrário;
- Reduz o preço caso a Nova lance seu modelo popular, mantém o preço se a Nova não lançar o modelo popular;
- Mantém o preço caso a Nova lance seu modelo popular, mantém o preço se a Nova não lançar o modelo popular;

- Reduz o preço caso a Nova lance seu modelo popular, reduz o preço se a Nova não lançar o modelo popular.

Essa diferença de espaços de estratégias entre os jogadores comparada com as estratégias entre os jogadores em um jogo na forma normal pode ser entendida como um resultado da diferença nas informações. No jogo sequencial, supõe-se que a Velha decide o que fazer com o preço de seu popular sabendo qual atitude a Nova decidiu. Isso leva a uma conclusão importante ao modelar um jogo: a escolha entre um jogo simultâneo ou sequencial deve ser tomada com base nas informações de que os jogadores dispõem sobre as decisões dos demais. Ou seja, se em um processo de interação estratégica os jogadores decidem em tempos diferentes, porém o jogador que decide em cada etapa não tem como saber o que foi decidido nas etapas anteriores, a melhor forma de representar esse jogo é como um jogo simultâneo, não obstante o fato de tomarem os jogadores suas decisões em momentos diferentes do tempo.

Diferentemente do jogo entre os Bancos A e B, onde nenhum dos dois bancos sabia qual decisão o outro tomou, a empresa Velha já sabe qual decisão a Nova escolheu. Isso significa que no momento em que decide o que fazer com seu preço, a Velha sabe em qual dos dois nós que lhe pertencem ela se encontra, ou, em termos mais técnicos, que cada um dos seus nós na Figura 3 constitui um conjunto de informações distintas, onde um conjunto de informações é composto pelos nós que o jogador acredita poder ter alcançado em uma dada etapa do jogo, na qual é a sua vez de jogar.

Quando um jogador tem certeza de que, uma vez tendo alcançado uma dada etapa do jogo, ele somente poderá estar em um determinado nó, diz-se que o seu conjunto de informação nessa etapa é um conjunto unitário, o qual tem como único elemento aquele nó que o jogador supõe ter alcançado. Caso contrário, o conjunto de informações de um jogador em uma dada etapa do jogo conterá todos os nós que ele considerar possíveis de serem alcançados naquela etapa. Veja o exemplo a seguir.

A Figura 7 mostra um exemplo em que o jogador B apresenta dois conjuntos de informações unitários B_1 e B_2 , na segunda rodada do jogo. Cada um desses conjuntos possui apenas um nó, o que significa que o jogador B sabe qual foi a escolha de A antes de tomar a sua decisão, mas poderia acontecer de o jogador B ser obrigado a jogar sem saber o que o jogador A escolheu. Considere a Figura 8:

Figura 7 – Conjuntos de informações unitários em jogo na forma estendida.

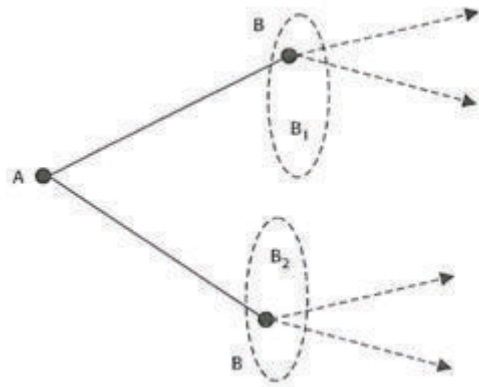
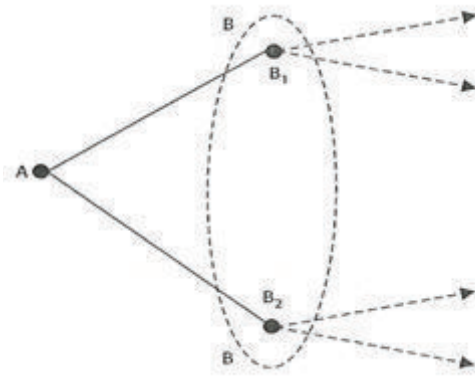


Figura 8 – Conjuntos de informações não-unitários em jogo na forma estendida.



Na Figura 8, na etapa que o jogador B joga pela primeira vez, ele não sabe em que nó se encontra. Se no nó B_1 ou no nó B_2 seu conjunto de informação possui, nessa etapa do jogo, dois elementos, (B_1, B_2) , uma vez que ele acredita que pode estar em qualquer um desses nós. Isso significa que, quando o jogador B é chamado a decidir, ele não possui todas as informações do jogo até ali, ele desconhece a ação do A até o primeiro movimento. O que leva a uma importante classificação dos processos de interação estratégica em relação às informações de que os jogadores dispõem.

Diante disso, um jogo é dito de informação perfeita quando todos os jogadores conhecem toda a história do jogo antes de fazerem suas escolhas. Se algum jogador, em algum momento do jogo, tem de fazer suas escolhas sem conhecer exatamente a história do jogo até ali, o jogo é dito de informação imperfeita.

Um modo mais formal de definir um jogo de informação perfeita é dizer que todos os seus conjuntos de informação são unitários, enquanto no jogo de informação imperfeita pelo menos um de seus conjuntos de informação não é unitário.

Viu-se que, para construir uma árvore de jogos, algumas regras têm de ser respeitadas. De modo análogo, a definição dos conjuntos de informação deve respeitar alguns critérios. O primeiro é apresentado na Figura 9, que ilustra um tipo de situação que não pode ocorrer. Onde se vê em um mesmo conjunto de informações nós que pertencem ao jogador B(B_1) e ao jogador C(C_1). A razão para isso não ocorrer é trivial: na segunda etapa do jogo, o jogador B sabe que não pode jogar em C_1 , uma vez que o nó não lhe pertence. Da mesma forma o jogador C sabe que não é a sua vez de jogar em B_1 . Assim, não há a possibilidade de um conjunto de informação conter nós que pertençam a jogadores diferentes.

Figura 9 – Conjuntos de informações não podem conter nós que pertençam a jogadores diferentes.

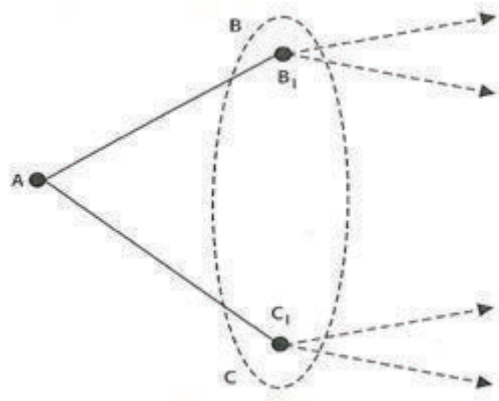
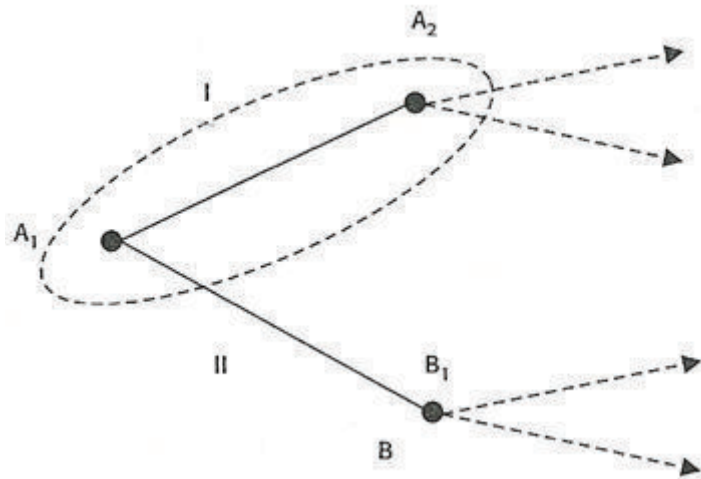


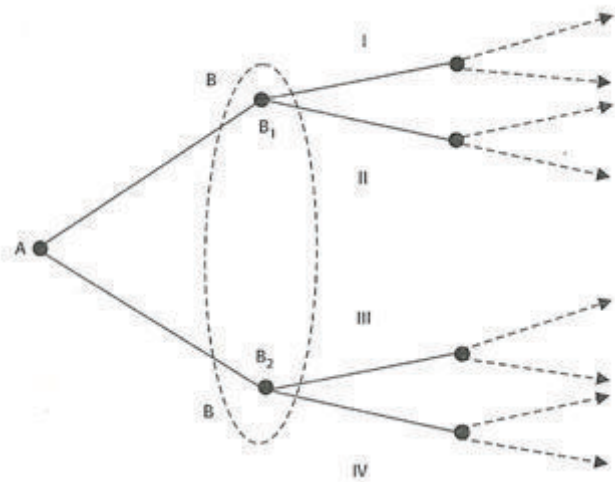
Figura 10 – Conjuntos de informações não podem conter nós em sequência.



A Figura 10 ilustra outro tipo de situação que não pode ocorrer ao definir-se conjuntos de informação: eles não podem conter nós em sequência. Nesta figura, o conjunto de informação assinalado une dois nós em sequência do jogador A: A_1 e A_2 . Mas o nó A_2 somente pode ser alcançado se o jogador escolher a ação I em seu primeiro movimento (A_1). Como o jogador A conhece suas próprias escolhas e a árvore de jogos, ele sabe se já realizou seu primeiro movimento e qual foi a sua opção. Ele sabe assim se o nó A_2 foi alcançado ou não.

E por último, a Figura 11 ilustra o terceiro critério a ser respeitado na definição de conjunto de informações: os nós que compõem um mesmo conjunto de informações não podem apresentar diferentes conjuntos de ação ao jogador.

Figura 11 – Os nós de um conjunto de informação não podem apresentar diferentes conjuntos de ação.



Para entender porque a situação da Figura 11 não pode ocorrer basta se posicionar no lugar do jogador B. Posicionando-se no lugar do jogador B, ao observar as possíveis ações, o jogador sabe a qual nó ele pertence. Não há então sentido em construir um conjunto de informações contendo B_1 e B_2 .

Foram discutidos até agora os jogos simultâneos utilizando a forma normal enquanto para os jogos sequenciais foi utilizada a forma estendida. Contudo, é importante perceber que nem jogos simultâneos são sinônimos de forma normal, nem tampouco jogos sequenciais são sinônimos de forma estendida. Pode-se representar o jogo na forma estendida como um jogo na forma de árvore de jogos e vice e versa. A opção entre uma dessas formas para representar um jogo dependerá da clareza com que cada uma representa um determinado tipo de jogo. Geralmente, jogos simultâneos são apresentados na forma estendida e jogos sequenciais na forma de árvore de jogos, tal como mostrado nas Figura 12 e Figura 13 a seguir.

Figura 12 – O jogo simultâneo da figura 1 na forma estendida.

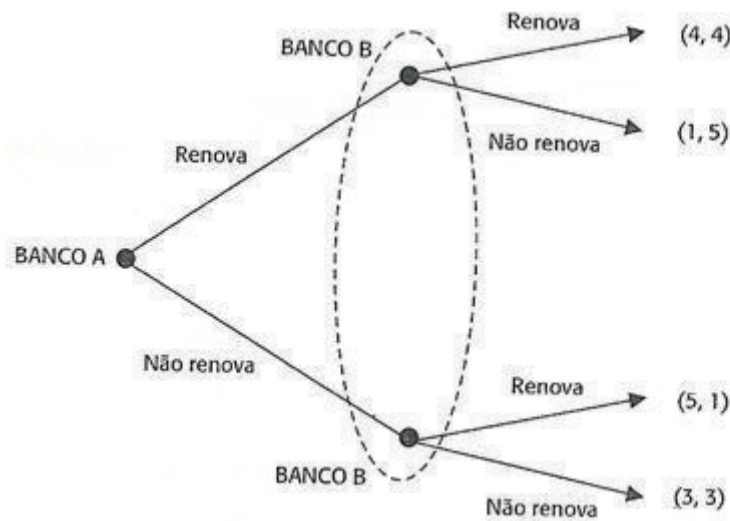


Figura 13 – O jogo sequencial da figura 1 na forma normal.

	Velha			
	Reduz preço, Reduz preço	Reduz preço, Mantém preço	Mantém preço, Reduz preço	Mantém preço, Mantém preço
Nova				
Lança modelo popular	2,2	2,2	4,1	4,1
Não lança modelo popular	1,3	1,4	1,3	1,4

1.6 Os exemplos clássicos da teoria dos jogos

Um dos exemplos mais clássicos da Teoria dos Jogos é o *Dilema do Prisioneiro*. Logo em seguida vem a *Batalha dos Sexos* e o *Jogo do “Galinha”*.

1.6.1 Conhecendo cada exemplo

Cada exemplo abaixo é encontrado em diversos livros, porém com ganhos diferentes. Em todos os casos, a essência de cada jogo é a mesma.

1.6.2 O dilema do prisioneiro

Apresentado originalmente por A. W. Tucker [35], o jogo descreve a seguinte cena: dois homens suspeitos de terem cometido um crime são presos e isolados em diferentes

celas. Cada um é interrogado e informado de quais são as consequências caso confesse ou fique calado: (1) se um dos possíveis suspeitos confessar e seu companheiro não o fizer, o que confessou dá provas para condenação do companheiro e é libertado, enquanto o outro é condenado a 20 anos de reclusão; (2) se ambos os suspeitos confessarem, ambos permanecerão detidos por 5 anos; (3) se os suspeitos ficarem em silêncio, ambos permanecerão na prisão por um ano – por porte ilegal de armas – acusação menor. Supõem-se que não há *honra entre criminosos* e que a única preocupação de cada um dos suspeitos é o seu próprio interesse.

Montando o jogo da forma normal tem-se a Figura 14 abaixo:

Figura 14 – Dilema do prisioneiro na forma normal.

Suspeito II		
Suspeito I	Confessar	Não Confessar
Confessar	(5 anos, 5 anos)	(liberdade, 20 anos)
Não Confessar	(20 anos, liberdade)	(1 ano, 1 ano)

Examinando o Dilema do Prisioneiro do ponto de vista de um dos suspeitos, como ele toma sua decisão sem saber o que o seu companheiro fez, ele será obrigado a considerar cada uma das alternativas que se abrem para esse companheiro, antecipando os efeitos de cada uma delas sobre a sua própria condição. Supondo que esse companheiro confesse, o outro deve permanecer calado, sofrendo 20 anos de prisão, ou confessar, permanecendo na prisão por 5 anos. Mas se o companheiro ficar calado, ele só fica na prisão por 1 ano se também ficar calado, ou, confessando, se verá em liberdade. Aparentemente, portanto, em ambas as situações o melhor é confessar. Mas existe um paradoxo nesse pensamento:

Dois prisioneiros ingênuos não acompanham esse tipo de argumentação, permanecem calados e sofrem apenas um ano de reclusão. Dois prisioneiros mais experientes confessam e sofrem cinco anos de prisão.

Antes de prosseguir tem-se que levar em conta os elementos essenciais que caracterizam esse jogo. Cada um dos jogadores tem duas escolhas fundamentais: eles podem cooperar ou não cooperar. Quando todos os jogadores cooperam, cada um deles consegue melhor resultado do que quando nenhum deles coopera.

Para qualquer estratégia que seja empregada por um dos jogadores, o outro sempre conseguirá melhor resultado se não cooperar do que cooperando.

Caso o jogo seja jogado somente uma única vez, os prisioneiros não cooperam e com isso não têm outra escolha senão confessar. Agora, se o jogo fosse disputado repetidamente, e não por um número fixo de vezes, mas por um período indefinido, os jogadores passariam a cooperar entre si.

Em uma única jogada, os jogadores vêem que a melhor opção para eles é confessar e com isso ficam presos 5 anos. Cooperando, os jogadores combinariam em não confessar e com isso ficariam somente 1 ano na prisão, mas isso seria possível somente se os suspeitos passassem a cooperar e existisse honra entre eles.

1.6.3 A batalha dos sexos

Um casal está tentando decidir qual programa fazer naquela noite: ir ao *ballet* ou a uma luta. Marido e mulher preferem fazer o programa a dois a irem sozinhos. Embora o marido prefira ir com a esposa à luta, preferiria ir com ela ao ballet a ir sozinho à luta. Analogamente, a esposa prefere ir ao *ballet* com o marido, preferiria ir à luta com ele a ir ao *ballet* sozinha. A Figura 15 a seguir representa esse jogo.

Figura 15 – Batalha dos sexos na forma normal.

		Homem	
		Mulher Luta	Ballet
Mulher	Luta	2,3	1,1
	Ballet	1,1	3,2

1.6.4 O jogo do “galinha”

O Jogo do “Galinha” consiste numa representação de uma competição entre os adolescentes norte-americanos nos anos 50. Sejam dois adolescentes, James e John, que dirigem seus carros em alta velocidade, em direção um ao outro. O objetivo do jogo é identificar quem desvia primeiro: esse será o covarde a ser apelidado de “galinha” pelos companheiros, resultando daí o nome do jogo. O que não desvia fica com a fama de “durão”. Se ambos desviam ao mesmo tempo, ninguém perde o jogo. Porém, se ambos

são “durões” e nenhum desvia, ambos sofrem um acidente que pode ser gravíssimo ou fatal. As recompensas simbólicas são descritas a seguir.

Figura 16 – Jogo do “galinha” forma normal.

		John	
James		Não desvia	Desvia
Não desvia		-2, -2	2, -1
Desvia		-1, 2	0, 0

Assim, cada jogador prefere não desviar, se o outro desvia. A opção que é preferível, em seguida, é desviar se o outro também desvia. A opção que é preferível, em seguida, é desviar se o outro não desvia, mas a pior de todas é não desviar se o outro também não desvia. Neste caso, como nenhum jogador indica que irá desviar, o ideal é desviar no último momento. Caso contrário, ambos colidem e podem perder a vida.

1.7 Resolvendo jogos

1.7.1 Visualizando estratégias dominantes e dominadas

Seja dada a seguinte situação: Sacolin, uma empresa de sacolas plásticas, tem que decidir se entra ou não no mercado de sacolas retornáveis. Visando a nova lei que entrou em vigor sobre sacolas plásticas, a empresa estuda se vale a pena criar uma nova linha de sacolas retornáveis e concorrer com a empresa Plastiquin. Esta, por sua vez, tem de decidir se aumenta, ou não, os gastos de propaganda com seu produto para conseguir novos adeptos ao uso de sacolas retornáveis, visando aumentar os seus lucros com a nova lei em vigor. Os lucros simbólicos de cada empresa são apresentados na Figura 17, onde os ganhos estão em milhões de reais.

Figura 17 – Exemplo de estratégia fortemente dominante.

Sacolin	Plastiquin	
	Aumenta os gastos com publicidade	Não aumenta os gastos com publicidade
Lança a sacola retornável	5,5	7,3
Não lança a sacola retornável	2,4	2,7

Primeiramente, examinemos os lucros da empresa Sacolin. Caso a empresa Plastiquin aumente seus gastos com publicidade, lançar as novas sacolas retornáveis proporcionará lucros no valor de R\$ 5 milhões, enquanto a decisão de não lançar a sacola produzirá lucros de somente R\$ 2 milhões. De forma análoga, caso a empresa Plastiquin decida não aumentar os seus gastos com propaganda, lançar as sacolas produziriam mais lucro do que a decisão de não lançar.

Pode-se perceber então que para a empresa Sacolin, a melhor opção é lançar as sacolas, independente da decisão da empresa Plastiquin. Utilizando os termos empregados pela Teoria dos Jogos, a estratégia *Lançar a sacola retornável* domina a estratégia *Não lançar a sacola retornável* no caso da empresa Sacolin. Pode-se dizer que o jogador Sacolin possui uma estratégia dominante *Lançar a sacola retornável*. Ou seja, a alternativa *Não lançar a sacola retornável* é dominada pela estratégia *Lançar a sacola retornável*. Já a empresa Plastiquin não possui estratégia dominante.

Percebe-se ainda que para a empresa Sacolin todas as recompensas sobre a estratégia *Lançar a sacola retornável* são estritamente maiores do que as recompensas da estratégia *Não lançar as sacolas retornáveis*. Neste caso, a estratégia *Lançar as sacolas retornáveis* é estritamente ou fortemente dominante em relação à estratégia *Não lançar as sacolas retornáveis*.

Além de estratégias estritamente dominantes, há casos em que uma estratégia é melhor do que a outra somente para uma situação, sendo no restante dos casos apenas tão boas quanto as outras estratégias. Reformulamos o exemplo anterior na Figura 10.

Figura 18 – Exemplo de estratégia fracamente dominada.

Sacolin	Plastiquin	
	Aumenta os gastos com publicidade	Não aumenta os gastos com publicidade
Lança a sacola retornável	2,5	7,3
Não lança a sacola retornável	2,4	2,7

Nesse exemplo reformulado, caso a empresa Plastiquin aumente os seus gastos com publicidade, a opção *Lançar a sacola retornável* produz o mesmo efeito que *Não lançar a sacola retornável*. Porém, caso a empresa Plastiquin decida não aumentar os gastos com publicidade, a empresa Sacolin terá mais lucro caso decida lançar suas sacolas retornáveis. Ou seja, nesse exemplo reformulado a estratégia *Lançar as sacolas retornáveis* produz lucros maiores em uma dada situação, e recompensas tão boas como as da estratégia *Não lançar as sacolas retornáveis* no restante das vezes. Diz-se que a estratégia *Lançar as sacolas retornáveis* é fracamente dominante em relação à estratégia *Não lançar as sacolas retornáveis*, para a empresa Sacolin. De forma análoga, diz-se que a estratégia *Não lançar as sacolas retornáveis* é fracamente dominada pela estratégia *Lançar as sacolas retornáveis*.

Ao identificar as estratégias dominantes e dominadas pode-se aplicar o primeiro método para determinar o resultado de um jogo, isto é, quais estratégias os jogadores devem escolher para obterem as melhores recompensas. Método este visto a seguir.

1.7.2 Eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas

A eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas é o método mais simples de se determinar o resultado de um jogo simultâneo. Para auxiliar no entendimento desse método, considere o exemplo que segue.

Sejam as empresas Chocolate Show e Xoucolate, que competem no mesmo mercado. A empresa Chocolate Show está no mercado há mais tempo e possui em sua linha de chocolates cestas prontas para datas específicas (Páscoa, Natal, Dia das Mães, Dia dos Pais, Dia dos Namorados, entre outras). A empresa Xoucolate é mais nova no mercado, porém já possui grande clientela que busca em suas lojas o mesmo tipo de serviço que a concorrente oferece. A empresa Chocolate Show pode responder às escolhas da Xoucolate

mantendo ou diminuindo os seus preços. Caso a Xoucolate lance suas cestas e a Chocolate Show mantenha seu preço, a Xoucolate tem lucro de R\$ 1 milhão e a Chocolate Show tem um prejuízo no mesmo valor. Caso a Chocolate Show reduza o preço de suas cestas, a concorrência entre os dois tipos de cestas faz com que a Chocolate Show e a Xoucolate repartam o mercado, obtendo lucros de R\$ 500 mil. Se a Xoucolate não lança suas cestas, a empresa não tem lucro nem prejuízo. Nesse caso, a Chocolate Show obtém lucros de R\$ 1 milhão se não reduzir o preço de suas cestas e o prejuízo de R\$ 1 milhão (-R\$ 1 milhão), caso reduza o preço das mesmas. A Figura 19 a seguir descreve essa situação.

Figura 19 – Empresas de chocolate.

Chocolate Show		
Xoucolate	Mantém o preço	Não mantém o preço
Lança as cestas	1,-1(milhão)	500,500 (mil)
Não lança as cestas	0,1(milhão)	0,-1(milhão)

Percebe-se então que a empresa Chocolate Show não possui estratégia estritamente dominante, enquanto a estratégia *Não lança as cestas* é estritamente dominada por *Lança as cestas* para a empresa Xoucolate. Diante disso, pode-se eliminar a estratégia *Não lança as cestas*, conforme feito na Figura 20 a seguir:

Figura 20 – Empresas de chocolate sem a estratégia estritamente dominada.

Chocolate Show		
Xoucolate	Mantém o preço	Não mantém o preço
Lança as cestas	1,-1(milhão)	500,500 (mil)
Não lança as cestas	0,1(milhão)	0,-1(milhão)

Com isso, o resultado é praticamente imediato. Considerando apenas a estratégia restante *Lança as cestas*, a estratégia *Mantém o preço* é estritamente dominada pela *Não mantém o preço* para a Chocolate Show. Com isso, o resultado desse jogo é a combinação das estratégias *Lança as cestas*, *Não mantém o preço*. Com essa eliminação, os jogadores, sendo racionais, se colocam no lugar do outro jogador e preveem qual é a melhor opção

para o mesmo. Assim, conseguem eliminar possíveis jogadas que não apresentam bons resultados para ambos os jogadores.

No exemplo acima, é fácil perceber que a opção *Não lançar as cestas* não é uma boa opção para a Xoucolate. Assim, a Chocolate Show pode prever que a empresa Xoucolate lançará no mercado as cestas e com isso pode prever qual será a sua resposta em relação à nova concorrência. Neste caso, percebe-se que a opção *Não mantém o preço* é a melhor resposta à estratégia adversária de lançar as cestas.

1.7.3 Equilíbrio de Nash e ótimo de Pareto

Uma forma de tratar jogos com estratégias estritamente dominadas ou jogos onde não é possível identificar as estratégias dominadas é através do Equilíbrio de Nash. Diz-se que uma combinação de estratégias constitui um *Equilíbrio de Nash* quando cada estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos demais jogadores e isso é verdade para todos os jogadores.

Para visualização do Equilíbrio de Nash considere o seguinte exemplo.

Duas redes de supermercados Rede Market e Super Rede estão com um estoque elevado de azeite. Devido à queda do dólar, conseguiram importar uma quantidade maior do que a usual. Ambas as redes possuem duas alternativas: manter o preço do azeite ou fazer uma promoção. A opção *aumentar o preço* não é viável, já que os consumidores sabem que com a queda do dólar, os preços de produtos importados diminuiriam e assim um consumidor consciente deixa de comprar o azeite, nestas redes, caso o produto tenha seu preço elevado. Restam então somente as opções *Mantém o preço* ou *Diminui o preço*.

A Figura 21 a seguir mostra os ganhos de cada estratégia.

Figura 21 – O jogo dos supermercados.

Rede Market		
Super Rede	Diminui o preço	Mantém o preço
Diminui o preço	800,800	1300, 300
Mantém o preço	300,1300	1000,1000

Neste exemplo, caso ambos os supermercados mantenham o preço, ambos terão um

ganho substantivo (R\$ 1000 cada um). Se ambos diminuïrem o preço, terão um ganho reduzido (R\$ 800 cada um). Contudo, se um mercado mantém o preço e o outro diminui, o que diminui o preço terá um lucro de R\$ 1000 a mais que o concorrente. Para pesquisar se há Equilíbrios de Nash nesse jogo, faz-se a seguinte análise.

Primeiramente, analisa-se o jogo como sendo o jogador Super Rede. O Super Rede deve verificar se existe alguma estratégia que seja a melhor resposta à estratégia de diminuir o preço por parte do supermercado Rede Market. Neste caso, a melhor resposta por parte do Super Rede para a estratégia *Diminui o preço* por parte da Rede Market é também adotar a estratégia *Diminui o preço*, gerando um lucro de R\$ 800 contra um lucro de R\$ 300, caso o Super Rede respondesse a essa estratégia mantendo o preço atual. Analisando agora o caso em que a Rede Market adote a estratégia *Mantém o preço*, a melhor resposta que a Super Rede poderia dar a essa estratégia seria *Diminui o preço*. Assim, independente da escolha de estratégia da Rede Market, a melhor opção para a Super Rede é diminuir os seus preços.

De forma análoga, pode-se ver que para a Rede Market a estratégia *Diminui o preço* também é a melhor resposta para qualquer estratégia escolhida pela Super Rede. Sendo assim, a melhor opção nesse exemplo para ambos os supermercados é a estratégia *Diminui o preço*. O Equilíbrio de Nash nesse jogo é a combinação das estratégias *Diminui o preço*, *Diminui o preço*. Uma forma de tentar visualizar o Equilíbrio de Nash em um dado jogo é marcar com flechas na vertical a melhor estratégia do jogador que está na linha e com flechas na horizontal a melhor estratégia do jogador que está na coluna. Caso as flechas apontem para alguma célula da matriz de recompensas, sem que nenhuma flecha parta dessa célula em direção à outra, essa célula é um Equilíbrio de Nash.

No caso do jogo dos supermercados, a matriz de recompensa ficaria da seguinte forma como mostra a Figura 22.

Figura 22 – O jogo dos supermercados.

Rede Market		
Super Rede	Diminui o preço	Mantém o preço
Diminui o preço	800,800	1300,300
Mantém o preço	300,1300	1000,1000

Note a primeira seta vertical, a qual aponta das recompensas (300,1300) para as recompensas (800,800). Ela significa que o Super Rede, que está nas linhas, prefere a estratégia *Diminui o preço*, se a Rede Market adota *Diminui o preço*. Já a seta na horizontal superior parte das recompensas (1300,300) para as recompensas (800,800), significando que a Rede Market prefere adotar *Diminui o preço* ao invés de *Mantém o preço*, caso a Super Rede adote *Diminui o preço*. Como as recompensas que correspondem à combinação de estratégia *Diminui o preço*, *Diminui o preço* são as únicas que recebem flechas sem enviar nenhuma a outras recompensas, *Diminui o preço*, *Diminui o preço* é um Equilíbrio de Nash.

Outro artifício usado é identificar, por meio de letras, qual recompensa é igual ou superior às demais recompensas, nas linhas e nas colunas. No exemplo dos supermercados, basta marcar com (a) as recompensas que são fracamente dominantes para o jogador que está nas colunas e (b) para aquelas recompensas que são fracamente dominantes para o jogador que está nas linhas. Assim a nova Figura 23 fica da seguinte forma:

Figura 23 – O jogo dos supermercados.

Rede Market		
Super Rede	Diminui o preço	Mantém o preço
Diminui o preço	800 (b),800 (a)	1300 (b), 300
Mantém o preço	300,1300(a)	1000,1000

Com esse artifício, obtém-se um Equilíbrio de Nash sempre que na mesma célula houver um (a) e um (b), chegando-se ao mesmo resultado que o anterior ao ser analisado

através de flechas. Utilizando esse artifício, percebe-se que o Equilíbrio de Nash é um método generalizado de solução de um jogo, uma vez que nem sempre é possível encontrar estratégias estritamente dominadas em um jogo.

Ao conduzir uma breve análise nesse exemplo, pode-se perceber que a estratégia *Diminui o preço, Diminui o preço* caracterizada como um Equilíbrio de Nash não é a melhor resposta para ambos os supermercados. A estratégia *Mantém o preço, Mantém o preço* traz maiores ganhos para ambos os jogadores. Caso ambos os jogadores concorressem em reduzir suas tarifas simultaneamente, ambos os jogadores sairiam ganhando. Quando a situação de pelo menos um dos jogadores melhora sem que a situação do(s) outro(s) piore, diz-se que houve uma *melhoria paretiana*, ou uma *melhoria no sentido de Pareto*. De forma análoga, se em uma determinada situação não é mais possível melhorar a situação do outro, diz-se que esta situação é um *Ótimo de Pareto*, o que significa que não é mais possível obter ganhos superiores, ao menos dadas as circunstâncias.

Cabe ressaltar que o Equilíbrio de Nash nada tem a ver com a noção de eficiência paretiana: o fato de que os jogadores estão adotando as melhores respostas às escolhas dos demais não significa, necessariamente, que as suas decisões, quando tomadas em conjunto, resultem na melhor situação possível. Com efeito, uma escolha que, do ponto de vista de um agente isolado pode ser ótima, caso seja adotada pelos outros agentes pode se revelar um problema.

O fato, todavia, dos requisitos do Equilíbrio de Nash serem exigentes não significa que ele será sempre único. Com efeito, pode acontecer que não haja um Equilíbrio de Nash ou que ocorra mais de um no mesmo jogo. Por exemplo, no jogo da Batalha dos Sexos, o par de estratégias *Luta, Luta* e *Ballet, Ballet* caracterizam ambas um Equilíbrio de Nash.

2 TEORIA DE CONTROLE

2.1 O surgimento da teoria de controle

Apresentamos, primeiramente, um breve histórico do surgimento da Teoria de Controle adaptado de [20].

- Na Grécia Antiga e Alexandria, foram descobertos documentos que mostram a existência de técnicas rudimentares que visavam a criação de dispositivos de controle nos aquedutos, estes formados por uma combinação de válvulas, com o propósito de manter constantes os diferentes níveis de água.
- No século XVII, o matemático e astrônomo holandês Christiaan Huygens (1629–1695) analisou problemas de controle de velocidade, ao projetar pêndulos de relógio. Alguns contemporâneos pesquisaram diferentes maneiras de se obter tais controles.
- No século XVIII, outros problemas de controle de velocidade também foram estudados, desta vez aplicados ao funcionamento de moinhos de vento.
- A Revolução Industrial impulsionou o surgimento de dispositivos reguladores mais precisos dos que os regulados a mão. Em 1769, James Watt (1736–1819) adaptou o controlador centrífugo para regular a velocidade de uma máquina a vapor. Este trabalho é considerado o primeiro trabalho significativo em controle. Como aquele sistema apresentava um comportamento instável, novos estudos matemáticos se dedicaram a analisar e contornar esse problema.
- Em 1840, o matemático e astrônomo George Airy (1801–1892) desenvolveu um dispositivo de controle para a velocidade de manejo para um telescópio. Seu projeto também apresentava instabilidade, o que o levou a empregar equações diferenciais para uma análise concentrada no controle de velocidade e na instabilidade dos sistemas reguladores, fato inédito até então.
- Em 1892, Lyapunov iniciou a pesquisa da estabilidade de equações diferenciais não lineares usando uma noção generalizada de energia. Seus estudos conduziram ainda a resultados para equações lineares.

- Nas décadas após a Primeira Guerra Mundial (1914–1918), um importante problema era o da telefonia a longas distâncias: quanto maior fosse a distância maior a necessidade de amplificar o sinal. Em 1927, o engenheiro elétrico Harold Stephen Black (1898–1983) inventou o amplificador eletrônico realimentado, que também apresentava um problema de estabilidade. Isto conduziu outros pesquisadores do *Bell Labs*, como Harry T. Nyquist (1889–1976) e Hendrik W. Bode (1905–1982), a desenvolverem novos conceitos para a estabilidade de sistemas com controle.
- Durante a Segunda Guerra Mundial (1939–1945) diferentes técnicas de controle foram combinadas para o uso militar, como a criação de baterias antiaéreas e sistemas de controle de fogo.
- Em um artigo de 1952 [3], Bellman publicou o método matemático de otimização conhecido como Programação Dinâmica. A aplicação desse método levou à solução de diversos problemas de otimização associados a sistemas com controle. Pontryagin se dedicou a problemas de interesse na área de Teoria de Controle e por volta de 1958, por meio do Cálculo das Variações, desenvolvido por L. Euler (1707–1783), estabeleceu o chamado Princípio do Máximo de Pontryagin, para resolução de problemas de controle ótimo. Em 1960, Kalman discutiu o controle ótimo de sistemas para os quais a solução é dada pelo Regulador Quadrático Linear (RQL).

2.2 Sistemas livres de controle

Um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) geral apresenta a forma

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), \quad (1)$$

onde a lei que regula a taxa de variação da variável x com relação ao tempo depende não somente de x (eventualmente multidimensional), mas também do tempo t , variável unidimensional.

Definição 2.1 (PVI) *Um problema de Cauchy ou Problema de Valor Inicial (PVI) é constituído de um sistema de equações diferenciais acoplado a uma condição inicial dada.*

Assim, um PVI é da forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (2)$$

onde $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ e g é uma função, $g : J \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo J um intervalo da reta e D um aberto conexo de \mathbb{R}^n .

Definição 2.2 Uma solução de um PVI é uma função diferenciável $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x = x(t)$, onde I é um intervalo da reta, com $t_0 \in I$, que satisfaz as condições:

- (i) $(t, x(t)) \in J \times D$;
- (ii) $x = x(t)$ satisfaz a equação, isto é, $\frac{dx}{dt} = g(t, x(t))$, para todo $t \in I$;
- (iii) $x = x(t)$ satisfaz a condição inicial $x(t_0) = x_0$.

O Teorema de Existência e Unicidade (TEU) de Soluções para EDO garante que o PVI possui uma única solução, desde que a função g esteja definida numa vizinhança do ponto (t_0, x_0) , seja contínua e lipschitziana, em relação à segunda variável nesta vizinhança.

Caso a função g admita derivada parcial contínua em relação a x , então g será localmente lipschitziana em relação a x , e portanto, o PVI preencherá as hipóteses do TEU de Soluções para EDO, qualquer que seja a condição inicial (t_0, x_0) dada.

O sistema apresentado é chamado de sistema não-autônomo. Já um sistema autônomo é aquele cuja configuração independe do tempo. Assim podemos sempre considerar o tempo inicial como sendo $t = 0$.

Definição 2.3 (Sistema autônomo livre de controle) Um sistema autônomo de EDO de primeira ordem, com condição inicial dada, é um PVI da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (3)$$

onde $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ e $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função definida em um aberto conexo D , que depende da variável x , mas não depende explicitamente da variável t .

2.3 Sistemas autônomos com controle

Podemos classificar, em geral, os sistemas autônomos como *Sistemas de Malha Aberta* ou *Sistemas de Malha Fechada*. Descreveremos a seguir cada um deles.

- (i) Sistemas de malha aberta ou *single-input*, são aqueles para os quais a entrada (*input*), $u = u(t)$, que é chamada variável ou função de controle, é independente da saída do sistema (*output*), $x = x(t)$, chamada de variável de estado.

Figura 24 – Sistema de malha aberta.



Os sistemas de malha aberta englobam desde máquinas de lavar roupa (cuja ativação é determinada simplesmente pelo usuário ao iniciá-la, não pelo ressecamento das roupas) até os telefones celulares (ativados e desativados pelo usuário, não dependendo de ser ou não recebida uma chamada).

Os benefícios de um sistema de malha aberta são, muitas vezes, a pequena quantidade de custo associado os processos em execução. Como desvantagens, a possibilidade de desperdício devido a poder o processo ser executado quando talvez não fosse necessário e o fato de que o processo não aprende com o *feedback*, o que impossibilita o aumento de sua eficiência.

Definição 2.4 (Sistema autônomo com controle de malha aberta) *A formulação de um sistema autônomo com controle de malha aberta é:*

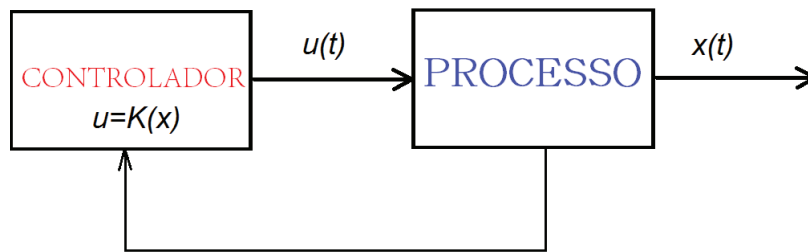
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (4)$$

onde $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ é o vetor de saída ou de estado, $u = u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ é o vetor de entrada ou variável de controle, $f : D \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função que suporemos de classe C^1 . Supomos que a função f depende dos vetores de saída e de entrada, mas não depende explicitamente de t , pois desejamos considerar sistemas com controle que sejam autônomos.

- (ii) Um sistema de malha fechada ou de realimentação (*feedback control system*), associado ao sistema (4), é um sistema onde as variáveis de controle ($u = u(t)$) aplicadas na entrada do sistema são determinadas, ao menos em parte, pelo conhecimento dos vetores de estado ou de saída do sistema. A lei que exprime o vetor variável de controle em função do vetor de estado é chamada de *lei de realimentação*.

Ou seja, os sistemas de malha fechada e de malha aberta possuem comportamentos opostos. O de malha fechada é um sistema onde o *feedback* do processo determina a fase posterior.

Figura 25 – Sistema de malha fechada.



A lei de realimentação irá controlar o sistema, corrigindo desvios do que se considera o comportamento desejável do sistema. Para isso, a lei de realimentação atribui um ganho ou uma perda ao sistema, isto é, contribui positivamente ou negativamente para o sistema. Portanto, a estratégia de realimentação consiste em alterar a dinâmica do sistema de malha aberta (4), acrescentando uma lei de realimentação $u = K(x)$, de modo a estabilizar o sistema. Notemos que, nesse caso, o controle depende do vetor de saída. Como $x = x(t)$, u dependerá implicitamente de t , mas não explicitamente.

Fazendo uma comparação entre os sistemas de malha aberta e sistemas de malha fechada, temos que os sistemas de malha aberta têm a vantagem de serem relativamente simples e, em consequência, de baixo custo. Entretanto, são facilmente imprecisos, já que não existe *feedback* para correção dos possíveis erros. Já em um sistema de malha fechada, podemos combinar os valores reais com os desejados. Entretanto, atrasos de tempo no sistema podem comprometer uma ação corretiva e, em consequência, ocasionar oscilações na saída e instabilidade. Estes sistemas são mais complexos provocando um maior custo para sua fabricação e/ou manutenção, pois normalmente são compostos de um número maior de componentes.

Definição 2.5 (Sistema autônomo com controle de malha fechada) A formulação de um sistema autônomo com controle de malha fechada é:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ u = K(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, K(x)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (5)$$

onde $f : D \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função que suporemos de classe C^1 e $u = K(x)$ é a lei de realimentação. Como u não depende explicitamente de t , o sistema é autônomo.

2.4 Programação dinâmica

Em otimização, o conceito de *programa* está relacionado com o problema de dominar, de forma ótima, uma situação proposta. Tal conceito surgiu originalmente na economia e diz respeito ao desenvolvimento de planejados ótimos de produção.

Considere inicialmente o seguinte problema genérico de otimização

$$\begin{cases} \text{Minimizar } g(x) \\ \text{sujeito a } x \in X_{ad} \end{cases}. \quad (6)$$

A função $g(x)$ é denominada função objetivo e X_{ad} é o conjunto dos pontos admissíveis (isto é, X_{ad} : conjunto das estratégias de produção viáveis; $g(x)$: custo líquido da realização do plano $x \in X_{ad}$).

A metodologia conhecida como programação dinâmica (*dynamic programming*) foi desenvolvida por R.E. Bellman no final dos anos 50, podendo ser aplicada para solucionar problemas de controle bastante gerais (isto é, não lineares, não autônomos). O ponto de partida da programação dinâmica é o chamado *princípio de otimalidade de Bellman* [2].

Uma estratégia ótima possui a seguinte propriedade: independentemente das decisões tomadas em instantes anteriores ao atual, as decisões futuras relativas ao estado, ao qual as decisões passadas levaram, têm que ser escolhidas de forma ótima.

Ou seja, o modo de escolher a estratégia ótima de controle independe tanto das decisões tomadas em instantes anteriores, quanto dos respectivos estados atravessados pelo sistema até o instante atual.

Para introduzir a Função de Bellman é necessário o conceito de Funcional de Custo.

2.4.1 Funcional de custo

A função custo mede o custo da trajetória, associada ao controle u , para levar o estado x_0 inicial a um estado final desejável. Dependendo do problema, como naqueles em que a ação deve ocorrer em um intervalo de tempo finito ($t \in [0, T]$), incorporamos ao funcional de custo uma parcela que representa um custo terminal, $p(x(T))$. Os estados $x = x(t)$ e os controles $u = u(t)$ devem estar relacionados.

Seja um sistema autônomo com controle

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (7)$$

O problema de achar um controle ótimo \tilde{u} está relacionado com o problema de minimizar um funcional linear, chamado de funcional objetivo ou de custo dado por:

- No caso de problema com horizonte finito [[2], pag.:217] , onde temos $t \in [0, T]$, consideramos o funcional

$$J(x, u) = p(x(T)) + \int_0^T L(x(t), u(t))dt, \quad (8)$$

sujeito a que $u : [0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ pertença ao conjunto dos controles admissíveis, do sistema (7), sendo que o estado final $x(T)$ pode ser dado ou não.

A função L é denominada de função de custo e $p(x(T))$ representa o custo final ou terminal.

- No caso de problema com horizonte infinito [[2], pag.:222], onde $t \geq 0$, consideramos o funcional

$$J_\infty(x, u) = \int_0^{+\infty} L(x(t), u(t))dt, \quad (9)$$

sujeito a que $u : [0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ pertença ao conjunto dos controles admissíveis do sistema (7), sendo que os estados $x = x(t)$ devem estar definidos para $t \geq 0$.

Além da hipótese de que a função f , da equação (7), seja de classe C^1 , vamos supor que a função L seja contínua.

2.4.2 Função de Bellman

Na programação dinâmica, o papel principal é exercido por uma função, chamada de função Valor ou Função de Bellman, a qual fornece, quando o sistema é autônomo, para quaisquer estado inicial $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ dado, o menor custo possível entre todas as possíveis trajetórias que se iniciam nesse estado x . Uma sequência de decisões otimizadoras (que fazem parte de um processo global de otimização) tem a propriedade seguinte: qualquer que seja o estado inicial e a decisão inicial, a sequência de decisões futuras, relativas ao estado obtido após decisões passadas devem ser escolhidas de forma ótima, independentemente das decisões tomadas em instantes de tempos anteriores ao atual.

Consideraremos $t_0 = 0$ e um estado $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ dado. Desejamos minimizar o funcional de custo, variando os controles admissíveis:

$$J_{\infty}^x(\varphi, u) = \int_0^{+\infty} L(\varphi(s), u(s)) ds, \quad (10)$$

sujeito à $\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi(t), u(t))$, $\varphi(0) = x$, $u : [0, +\infty[\rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$, u contínua.

Observação 2.1 *Cabe ressaltar que, para cada controle $u = u(t)$ fixado, pelo TEU de EDO, existe uma única solução para o PVI*

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi, u), \varphi(0) = x.$$

Denotaremos a solução, associada ao controle $u = u(t)$ fixado, por $\varphi^u = \varphi^u(t)$, onde $\varphi^u(0) = x$, e chamamos o par (φ^u, u) de trajetória, caminho ou processo admissível para o PVI dado acima.

Portanto, fixado o estado $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, para cada controle u , o problema proposto acima é equivalente a avaliar o funcional de custo ao longo do processo (φ^u, u) . Para cada x fixado, os processos (φ^u, u) são as estratégias viáveis para se atingir um determinado objetivo, a partir de x .

A integral

$$J_{\infty}^x(\varphi^u, u) = \int_0^{+\infty} L(\varphi^u(s), u(s)) ds \quad (11)$$

fornece o custo de se utilizar o processo (φ^u, u) para atingir o objetivo esperado. Desejamos atingir o objetivo esperado a custo mínimo. Para que a solução desse problema seja

possível, algumas condições devem ser impostas:

- (i) O conjunto dos controles admissíveis $U = \{u : [0, +\infty[\rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m, u \text{ contínua}\}$ é não-vazio, convexo e fechado;
- (ii) $f : D \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 , o que garante a existência e unicidade de soluções da EDO para uma condição inicial dada;
- (iii) As soluções $\varphi = \varphi(t)$ estão definidas para $t \in [0, +\infty[$ e são diferenciáveis;
- (iv) $L(\varphi, u)$ é pelo menos contínua, para garantir que a integral exista;
- (v) $\int_0^{+\infty} L(\varphi(s), u(s))ds < \infty$, isto é, a integral imprópria converge para todo par $(\varphi(t), u(t))$;
- (vi) O funcional $J : U \rightarrow \mathbb{R}$, com

$$J(u) = J_\infty^x(\varphi^u, u) = \int_0^{+\infty} L(\varphi^u(s), u(s))ds$$

é coercivo; isto é: $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty$.

A última hipótese garante a existência do ínfimo do funcional, mas que nesse caso, o ínfimo pertence à imagem do funcional, isto é, existe um controle ótimo, \tilde{u} , tal que

$$J(\tilde{u}) = \inf_{u \in U} J(u).$$

Então, nesse caso, o ínfimo é o mínimo.

Portanto, com essas hipóteses, garantimos a existência do mínimo do funcional $J(u) = J_\infty^x(\varphi^u, u)$.

Definição 2.6 (Função de Bellman) *A função de Bellman é a aplicação*

$$V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$V(x) = \min_u \left\{ J_\infty^x(\varphi^u, u) \text{ tal que } u \in U, \frac{d\varphi^u}{dt} = f(\varphi^u, u(t)), \varphi^u(0) = x \right\}. \quad (12)$$

O controle \tilde{u} para qual o mínimo do conjunto é atingido é chamado de controle ótimo para o estado x e a trajetória $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}^{\tilde{u}}(t)$, da equação diferencial, que corresponde a esse controle ótimo, é chamada de trajetória ótima. O par $(\tilde{\varphi}, \tilde{u})$ é chamado de caminho ou processo ótimo.

Portanto, para o processo ótimo $(\tilde{\varphi}, \tilde{u})$ temos:

$$V(x) = J_{\infty}^x(\tilde{\varphi}, \tilde{u}) = \int_0^{+\infty} L(\tilde{\varphi}(s), \tilde{u}(s)) ds \quad (13)$$

onde, $\tilde{\varphi}(0) = x$.

A função de Bellman satisfaz o problema de achar uma solução ótima do ponto de vista global a uma otimização a cada estágio; isto é, achar um controle u que minimiza o problema para cada estado x fixado. Observemos que o Princípio de Bellman é exatamente: a cada estágio presente devemos escolher a estratégia ótima, independentemente de escolhas passadas.

A função de Bellman satisfaz a chamada Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

2.4.3 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

Considere a seguinte EDO:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f(x(s), \alpha(s)) & (0 < s < T) \\ x(0) = x^0, \end{cases},$$

com o funcional *payoff* associado

$$P[\alpha(\cdot)] = \int_0^T r(x(s), \alpha(s)) ds + g(x(T)).$$

Incorpore a este uma grande família de problemas semelhantes, variando os instantes de início e pontos de partida:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f(x(s), \alpha(s)) & (t \leq s \leq T) \\ x(t) = x \end{cases},$$

onde

$$P_{x,t}[\alpha(\cdot)] = \int_t^T r(x(s), \alpha(s)) ds + g(x(T)).$$

Considere os problemas acima para todas as escolhas de instantes iniciais $0 \leq t \leq T$ e para todos os pontos de partidas em $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.7 Para $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq T$, defina a função valor $v(x, t)$ para o melhor payoff possível de $x \in \mathbb{R}^n$ no tempo t . Em outras palavras,

$$\begin{cases} v(x, t) := \sup_{\alpha(\cdot) \in A} P_{x,t}[\alpha(\cdot)] & (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \\ v(x, T) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}.$$

Teorema 2.1 (Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman) Suponha que a função valor é de classe C^1 relativamente às variáveis (x, t) . Então v soluciona a seguinte equação diferencial parcial:

$$\begin{cases} v_t(x, t) + \max_{a \in A} \{f(x, a) \cdot \nabla_x v(x, t) + r(x, a)\} = 0 \\ v(x, T) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \end{cases}.$$

Observação 2.2 Conhecendo a função de Bellman, V , a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) fornece, automaticamente, uma lei de realimentação.

3 CONTROLE DE PRAGAS

3.1 O que são pragas?

Designa-se como *praga* (ou *peste*) o surto de determinadas espécies nocivas ao desenvolvimento agrícola ou que destroem a propriedade humana, perturbam os ecossistemas, ou que provocam doenças epidêmicas no homem ou em outros animais. Geralmente, associa-se a palavra *praga* a animais, tais como ratos ou insetos, porém, pode-se aplicar a mesma designação a ervas daninhas (é uma planta que nasce em local e momento indesejado, podendo interferir negativamente na agricultura), consideradas invasoras, prejudiciais à biodiversidade de alguns ambientes ou à produção agrícola.

O conceito oficial de praga é estabelecido pela FAO (*Food and Agriculture Organization*) como sendo: “qualquer espécie, raça ou biótipo de vegetais, animais ou agentes patogênicos, nocivos aos vegetais ou produtos vegetais”. Portanto, o termo praga compreende animais (insetos, ácaros e nematóides) e doenças (causadas por fungos, bactérias, vírus e viróides).

A maneira mais usada atualmente para combater as pragas na agricultura são os agrotóxicos, produtos químicos que têm a finalidade de exterminar pragas ou doenças que ataquem as culturas agrícolas. Entre eles, podemos encontrar os inseticidas, herbicidas, fungicidas, raticidas e outros. Além de serem tóxicas, essas substâncias se mantêm no solo por muitos anos e, pela cadeia alimentar, vão se acumulando no corpo dos animais e do ser humano, causando doenças graves e até a morte. Uma forma alternativa de se combater as pragas é a utilização de controle biológico.

3.2 O uso de agrotóxicos

Diversos são os nomes dados aos agrotóxicos: defensivos agrícolas, pesticidas, praguicidas, remédios de planta ou veneno. O desenvolvimento dessas substâncias foi impulsionado pelo anseio do homem em melhorar sua condição de vida, procurando aumentar a produção dos alimentos. Desde o início da civilização, o homem é o principal responsável pelas transformações ocorridas na natureza em razão da evolução da sua espécie e da crescente busca por espaço e alimento. Há cerca de 10.000 anos, com o desenvolvimento agrícola, a densidade populacional começou a aumentar e, conseqüentemente, a relação

entre as espécies mudou. O homem começou a estocar grãos, vegetais e carne, e esses estoques tornaram-se fontes de alimento para agrupamentos humanos e animais domésticos. Os campos cultivados, entretanto, tornaram-se fontes de alimento para as mais variadas espécies de insetos e roedores e também foram atacados por fungos e bactérias. Essas espécies se multiplicaram rapidamente por causa da grande quantidade de alimento e passaram a interferir no bem-estar das pessoas, sendo, por isso, consideradas pragas.

O termo agrotóxico inclui inseticidas (controle de insetos), fungicidas (controle de fungos), herbicidas (combate às plantas invasoras), fumigantes (combate às bactérias do solo), algicida (combate a algas), avicidas (combate a aves), nematicidas (combate aos nematoides), moluscicidas (combate aos moluscos), acaricidas (combate aos ácaros), além de reguladores de crescimento, desfoliantes (combate às folhas indesejadas) e dissecantes.

3.2.1 Consequências do uso de agrotóxicos

A larga utilização de agrotóxicos no processo de produção agropecuária, entre outras aplicações, tem trazido uma série de transtornos e modificações para o ambiente, seja através da contaminação das comunidades de seres vivos que o compõem, seja através da sua acumulação nos segmentos bióticos e abióticos dos ecossistemas (biota, água, ar, solo, sedimentos etc.).

Um dos efeitos ambientais indesejáveis dos agrotóxicos é a contaminação de espécies que não interferem no processo de produção que se tenta controlar (espécies não-alvos), dentre as quais se inclui, conforme discutido no item anterior, a espécie humana. A Figura 26, (fonte [31]) apresenta o grau de toxicidade (variando em uma escala de 1 a 5) e a persistência (variando também em uma escala de 1 a 5) para os principais grupos de animais atingidos pela contaminação ambiental por agrotóxicos, exceto a espécie humana.

Além disso, temos também outros problemas originados pelo uso de inseticidas, tais como:

- A resistência das pragas;
- Destruição de organismos não-alvos;
- Surgimento de pragas secundárias;
- Efeitos adversos ao meio ambiente através da contaminação do solo e da água.

Figura 26 – Toxicidade e persistência ambiental de alguns agrotóxicos (escala de 1 a 5).

Agrotóxicos	Toxicidade				Persistência no ambiente
	Mamíferos	Peixes	Aves	Insetos	
Permetrina	2	4	2	5	2
DDT	3	4	2	2	5
Lindano	3	3	2	4	4
Etil-paration	5	2	5	5	2
Malation	2	2	1	4	1
Carbaril	2	1	1	4	1
Metoprene	1	1	1	2	2
<i>Bacillus thuringiensis</i>	1	1	1	1	1

Atualmente, vários estudos vêm sendo realizados para mostrar os malefícios do uso descontrolado de agrotóxicos. Os danos causados por esses agentes químicos não ficam somente no solo e no responsável pela sua aplicação, mas também no alimento que vai parar na mesa do consumidor final.

Os agrotóxicos causam, principalmente para quem os manipula, diversos problemas de saúde. Segundo [31] os agrotóxicos podem causar intoxicação aguda – aquelas que se pode perceber imediatamente após o contato com o produto químico – ou doenças crônicas, que aparecem semanas e meses depois. Podem causar também, entre as doenças crônicas, dermatite, câncer, desregulamentação endócrina, neurotoxicidade retardada, efeitos sobre o sistema imunológico, doença do fígado, malformação fetal e aborto. A leucemia é o principal câncer associado ao uso de agrotóxico.

Os agrotóxicos podem ser classificados em quatro classes de acordo com os perigos que eles podem representar para os seres humanos. A classificação está de acordo com o resultado dos testes e estudos feitos em laboratórios, que objetivam estabelecer a dosagem letal 50% (DL50), a quantidade de substância necessária para matar 50% dos animais testados nas condições experimentais utilizadas.

Considerando que a capacidade de determinada substância causar morte ou algum efeito sobre os animais depende da sua concentração no corpo do indivíduo, a dose letal é expressa em miligrama da substância por quilograma da massa corporal. A toxicidade

de uma substância também pode variar de acordo com o modo de administração, e os rótulos dos produtos são identificados por meio de faixas coloridas, conforme tabela que segue, retirada de [31].

Figura 27 – Classificação toxicológica dos agrotóxicos.

Classe toxicológica	Toxicidade	DL50 (mg/Kg)	Faixa colorida
I	Extremamente tóxico	≤ 5	Vermelha
II	Altamente tóxico	Entre 5 e 50	Amarela
III	Mediamente tóxico	Entre 50 e 500	Azul
IV	Pouco tóxico	Entre 500 e 5.000	Verde

Os agrotóxicos também podem ser classificados de acordo com sua periculosidade ambiental, em classes que variam de I a IV: produtos altamente perigosos ao meio ambiente (Classe I), como a maioria dos organoclorados; produtos muito perigosos ao meio ambiente (Classe II), como o malation; produtos perigosos ao meio ambiente (Classe III), como o carbaril e o glifosato; e produtos pouco perigosos ao meio ambiente (Classe IV), como os derivados de óleos minerais. A tabela abaixo foi retirada de [31].

3.3 Soluções alternativas para o controle de pragas

3.3.1 Cultivo sem agrotóxico

Núcleos de agricultura natural ou orgânica (sem o uso de agrotóxicos) surgem como alternativa ao modelo das monoculturas, que privilegia a produtividade à custa da saúde dos lavradores e dos consumidores. Os produtores orgânicos estão ganhando cada vez mais espaço junto aos consumidores.

Os produtos orgânicos, em geral, são de menor tamanho e levam mais tempo para serem produzidos e colhidos. O fato é que quanto maior for a fruta ou hortaliça, mais se deve desconfiar do uso abusivo de agrotóxicos.

Infelizmente, a agricultura orgânica não é feita em grande escala, devido às inúmeras perdas que ocorrem por causa das pragas. O preço elevado final do produto induz também a não haver consumidores em número suficiente para que mais agricultores possam vir a utilizar essa técnica.

Figura 28 – Principais efeitos agudos e crônicos causados pela exposição aos agrotóxicos, de acordo com a praga que controlam e o grupo químico a que pertencem.

Classificação quanto à praga que controlam	Classificação quanto ao grupo químico	Sintomas de intoxicação aguda	Sintomas de intoxicação crônica
Inseticidas	Organofosforados/Carbamatos	Fraqueza	Efeitos neurotóxicos retardados
		Cólicas abdominais	Alterações cromossômicas
		Vômitos	Dermatites de contato
		Espasmos musculares	
		Convulsões	
	Organoclorados	Náuseas	Lesões hepáticas
		Vômitos	Arritmias cardíacas
	Piretróides sintéticos	Contrações musculares involuntárias	Lesões renais
		Irritações das conjuntivas	Neuropatias periféricas
		Espirros	Alergias
Fungicidas	Ditiocarbamatos	Excitação	Asma brônquica
		Convulsões	Irritações nas mucosas
			Hipersensibilidade
		Tonteiras	Alergias respiratórias
		Vômitos	Dermatites
	Fentalamidas	Tremores musculares	Mal de Parkinson
		Dor de cabeça	Cânceres
		-	Teratogêneses
Herbicidas	Dinitrofenóis/Pentaclorofenol	Dificuldade respiratória	Cânceres (PCP – formação de dioxinas)
		Hipertermia	Cloroacnes
		Convulsões	Indução da produção de enzimas hepáticas
		Perda do apetite	Cânceres
		Enjôo	Teratogênese
	Fenoxiacéticos	Vômitos	Lesões hepáticas
		Fasciculação muscular	Dermatites de contato
		Sangramento nasal	Fibrose pulmonar
	Dipiridílios	Fraqueza	
		Desmaios	
		Conjuntivites	

3.3.2 Gestão integrada do controle de pragas (*Integrated Pest Management-IPM*)

Promover a Gestão Integrada do Controle de Pragas ("IPM") seria uma forma de reduzir o uso de pesticidas. Alguns especialistas veem a IPM como uma componente de um processo mais amplo para uma agricultura “isenta de produtos químicos”, ao passo que outros a veem como um sistema que proporciona o uso mais eficiente de pesticidas químicos. Todos eles, porém, concordam que devem ser escolhidas alternativas de controle das pragas sem o uso de produtos químicos.

Atualmente, várias práticas e métodos permitem controlar pragas e doenças sem o uso de produtos tóxicos: o uso de variedades de plantas resistentes a pragas; rotação de cultura; distribuição de resíduos de colheitas; adubação adequada e outras boas práticas agrícolas. Os principais métodos recomendados são: utilização de inimigos naturais das pragas (controle biológico), controle físico (calor, frio e umidade) e uso de armadilhas e barreiras.

3.3.3 Controle biológico

Esse método consiste em introduzir no ecossistema um inimigo natural (predador, parasita ou competidor) da espécie nociva ao interesse humano, para manter sua densidade populacional em níveis em que os prejuízos provocados sejam toleráveis. Quando bem planejado, acarreta evidentes vantagens em relação ao uso de agentes químico, uma vez que não polui o ambiente e não causa desequilíbrios ecológicos.

Exemplos de alguns seres vivos que atuam no controle biológico no Brasil [33] são apresentados a seguir.

- *Metarhizium anisopliae*: Fungo que parasita insetos diversos como lagartas, besouros, cigarrinhas etc. O micélio do fungo envolve o inseto, mumificando-o.
- *Apanteles flavipes*: Pequena vespa, que injeta ovos em lagartas diversas (parasitas da cana-de-açúcar, milho etc). Dos ovos eclodem larvas que destroem o inseto parasitado.
- *Coccinella septempunctata*: Inseto conhecido como joaninha, que atua como predador de diversas espécies de pulgões.
- *Baculovirus anticarsia*: Vírus utilizado no combate a lagarta-da-soja.

3.3.4 Biotecnologia

Futuramente, a biotecnologia será utilizada no controle de pragas, fazendo modificações genéticas nas plantas. Essas plantas receberiam os herbicidas, mas somente as ervas daninhas seriam destruídas. Já outras plantas foram criadas para resistir a pragas sem uso de pesticidas e outros seriam resistentes tanto a herbicidas como a insetos. Existe, porém, uma preocupação de que as variedades melhoradas poderão causar mais resistência às pragas, e uma possível transferência das propriedades genéticas de plantas modificadas para ervas daninha resistentes aos herbicidas. E não se sabe os efeitos de longo prazo do consumo dessas plantas geneticamente alteradas, tanto em seres humanos como em animais.

4 TEORIA DOS JOGOS APLICADA AO CONTROLE DE PRAGAS

4.1 Introdução

Conforme descrito no Capítulo 1, a modelagem de jogos exige determinadas regras. Mencionamos a teoria dos Jogos Diferenciáveis, uma ligação entre a Teoria dos Jogos e a Teoria de Controle, resumida no Apêndice. Já no Capítulo 3, discorreremos sobre o controle de praga em lavouras, sobre benefícios e malefícios do uso de agrotóxicos comparativamente a outros métodos, tais como o controle biológico.

Neste capítulo introduziremos um jogo diferenciável no controle de pragas, determinando as condições para existência do jogo, os jogadores, os *payoffs*, entre outros. Estabelecemos uma ligação com o trabalho de Santos [20], que estuda o controle biológico de praga nas lavouras de soja.

4.2 Histórico

Thomas Malthus (1766–1834), economista, estatístico, estudioso das Ciências Sociais e considerado o pai da demografia, foi o responsável pela Teoria Populacional denominada Malthusiana. Malthus observou que o crescimento populacional, entre 1650 e 1750, dobrou como consequência do aumento da produção de alimentos, das melhorias das condições de vida nas cidades, do aperfeiçoamento do combate às doenças, das melhorias no saneamento básico, e os benefícios obtidos com a Revolução Industrial. Esses fatores fizeram com que a taxa de mortalidade declinasse, ampliando o crescimento natural. Preocupado com o crescimento populacional acelerado, Malthus publicou em 1798 uma série de ideias alertando para a importância do controle da natalidade. Afirmava que o bem estar populacional estaria intimamente relacionado com crescimento demográfico do planeta.

Com base nesses dados, Malthus concluiu que, inevitavelmente, a fome seria uma realidade caso não houvesse um controle imediato da natalidade. Profecias malthusianas previam fome no mundo em virtude de crescimento geométrico da população, enquanto o crescimento agrícola crescia de forma aritmética, ou seja, linear. A partir de um dado momento, a curva da população estaria muito acima da curva do crescimento agrícola. A superpopulação ficaria então sem controle até que surgissem predadores que fizessem

esse controle externo ou, caso não aparecessem predadores e/ou parasitas (doenças), o descontrole continuaria até que acabassem todos os alimentos disponíveis no ambiente, gerando competição intraespecífica (entre as espécies) e controle populacional por fome.

Malthus só não contava que com o crescimento da indústria a partir da Revolução Industrial e das melhorias técnicas no campo, suas previsões não se concretizariam. Com as melhorias técnicas no campo, uma mesma área que antes produzia somente x alimento por hectare, por exemplo, pode passar a produzir nx , com $n > 1$, ou seja, podemos produzir numa mesma área muito mais alimentos.

Desde a época de Malthus um problema persiste: a praga no campo. Esta é a única que pode, mesmo com todas as melhorias, vir a causar 100% de destruição no campo. Existem contudo técnicas que tentam minimizar o efeito da mesma, técnica esta chamada de controle de pragas.

4.3 O jogo

Introduzimos agora a proposta de um jogo diferenciável no controle de pragas no campo. Para isso, determinaremos os jogadores, o plano de fundo e as condições do jogo.

4.3.1 Os jogadores

Sendo um jogo de dois jogadores, vamos discriminar quem são eles:

- Jogador I: as pragas (neste caso, Lagarta da Soja)
- Jogador II: o agricultor (representado pelos inimigos naturais da Lagarta da Soja)

4.3.2 O plano de fundo do jogo

Conforme visto no Capítulo 3, o controle de pragas provoca benefícios e malefícios, quer seja feito com ou sem o uso de agrotóxicos no cultivo. O uso de agrotóxico em excesso já é bastante conhecido como algo a ser evitado. Manter uma plantação sem o uso de agrotóxico a torna muito mais vulnerável à ação das pragas, o que induz à perda da produção. Consequentemente, aumenta o valor final do produto, tendo em vista uma menor produção por área comparativamente à obtida com emprego de agrotóxico.

O plano de fundo do jogo será uma lavoura infestada por uma certa praga, cujo controle biológico será um inimigo natural da praga. Sabemos que existe um limite máximo de pragas por folha que a lavoura consegue suportar sem grandes perdas ou mesmo sua extinção. Também podemos considerar um limite mínimo, visto que para não se ter grande número de pragas por folha, é investido um dado valor para evitar o número excessivo de pragas. Caso esse número seja muito pequeno, isto é, tenhamos poucas pragas por folha, sabemos que o valor gasto será elevado e prejudicial para o dono da lavoura e, conseqüentemente, para o consumidor final. Trabalharemos então no jogo dentro de um limite mínimo e máximo, de forma a evitar esses prejuízos econômicos.

4.4 Modelagem matemática de dinâmica populacional

Em Thomas Malthus (1789) [15] reconheceu que, dados recursos abundantes, as populações humanas apresentam a tendência de aumentar geometricamente, ou exponencialmente.

O padrão de crescimento pode ser descrito por:

$$\frac{dx}{dt} = xr,$$

onde $r(r > 0)$ é a taxa de crescimento relativo da população x .

O crescimento exponencial a qualquer taxa maior que zero, teoricamente, produz enormes populações, se continuar ininterruptamente. As populações reais somente seguem o padrão exponencial quando os recursos são abundantes e outras condições são favoráveis para o crescimento contínuo.

Verhulst [26] propôs em 1838 uma modificação na equação de Malthus. Em seu modelo, Verhulst considera que os recursos são limitados, e a taxa de crescimento da população, proporcional à população em cada instante, e não constante, como suposto anteriormente. Verhulst criou então uma Equação Logística para descrever o padrão de crescimento de uma população com recursos limitados. Em baixas densidades, a população cresce de maneira exponencial e, em altas densidades, as taxas de crescimento diminuem à medida que os recursos vão se tornando insuficientes para sustentar o crescimento contínuo da população. Com o decorrer do tempo a população assintoticamente aproxima-se de um limite superior conhecido como γ , a densidade de saturação ou ca-

pacidade de suporte logístico. Na curva é o efeito da *resistência ambiental*, ou aquilo que Malthus chamou de *dificuldade de subsistência*. A Equação Logística é normalmente escrita como uma equação diferencial do tipo

$$\frac{dx}{dt} = x(a - \gamma x), \quad (14)$$

onde $\frac{dx}{dt}$ é a taxa de crescimento populacional, $x = x(t)$ é a densidade da população em um instante t , a é uma constante positiva que representa a taxa de crescimento populacional quando não há fatores limitantes e γ é uma constante positiva que representa o limite populacional, isto é, o valor para o qual a população tende no decorrer do tempo.

A Equação Logística considera que a taxa de crescimento, $\frac{dx}{dt}$, depende não só da população, mas também das condições existentes no meio em que está presente. O termo $(-\gamma x)x$ na equação representa a contribuição da competição entre os indivíduos da mesma espécie no crescimento da população, ou seja, a competição intraespecífica. Esta equação retrata uma única população.

Os organismos interagem com outras espécies e com o ambiente físico de várias maneiras. Essas interações às vezes incluem “*feedbacks* negativos”. Um exemplo de *feedback* negativo é quando um aumento na população de uma espécie de presa gera um aumento na população de seus predadores (através do aumento da reprodução), e isso, por sua vez, retroalimenta para reduzir a população de presas através do aumento da mortalidade devido à predação. A *Lei de Lotka-Volterra* propõe que “quando as populações estão envolvidas em *feedback* negativo com outras espécies, ou até mesmo com componentes de seu ambiente”, é provável que se observe uma dinâmica oscilatória (cíclica).

O modelo de Lotka-Volterra foi pioneiro ao descrever matematicamente a interação entre duas populações distintas (presas e predadores). A introdução deste modelo, bem como as suas conseqüentes variações, foi uma das principais contribuições para a dinâmica de populações. Propostas independentemente por Alfred J. Lotka em 1925 [14] e por Vito Volterra em 1926 [27], as equações na verdade são um par de equações diferenciais, não lineares e de primeira ordem. O modelo matemático apresentado por Volterra tinha como objetivo a análise das variações cíclicas observadas nas populações de tubarões e pequenos peixes no mar Asiático. A relação entre presa e predador é descrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-b + \beta x) \end{cases} . \quad (15)$$

As equações, chamadas Equações Lotka-Volterra, onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ representam, respectivamente, as populações de presas/hospedeiro e predadores/parasitóide, foram construídas a partir das seguintes hipóteses:

1. $\frac{dx}{dt} = ax$, com $a > 0$ quando $y = 0$
2. $\frac{dy}{dt} = -by$, com $b > 0$ quando $x = 0$
3. Os termos βxy e $-\alpha yx$, $\beta > 0$ e $\alpha > 0$, representam as interações entre as duas espécies. O termo βxy implica no crescimento de y , enquanto o termo $-\alpha yx$ implica no decréscimo de x .

Supõe-se que os recursos para as presas são ilimitados, e que o único fator inibidor para seu crescimento é a presença dos predadores. Assim, sem predadores, a população de presas crescerá exponencialmente, segundo o modelo malthusiano, representado por xa . Com a presença dos predadores a taxa de crescimento da presa decai linearmente com o aumento da população de predadores, o que justifica o acréscimo do termo $(x\alpha y)$.

Analogamente, supomos que os predadores se alimentam unicamente daquelas presas e, caso elas deixem de existir, os mesmos se extinguirão. Sem as presas, voltaríamos a ter o modelo malthusiano, mostrando uma queda na população de predadores, que está sendo representado pelo termo $-yb$. Com a presença das presas, essa situação sofre uma alteração. Temos então um aumento linear da taxa de crescimento da população predadores, quando a população de presas aumenta, justificando o acréscimo do termo $y\beta x$.

Trataremos agora de um modelo matemático que une os dois modelos acima citados, isto é, o modelo da Equação Logística e o modelo de Lotka-Volterra. Vamos admitir na primeira equação de (15), o fator natural que inibe o crescimento da população, isto é, essa equação é modificada para, quando y for igual a zero, obtermos (14). O sistema é definido como um caso particular de (15) e definido como modelo de Lotka-Volterra com competição:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - \gamma x - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-b + \beta x) \end{cases}, \quad (16)$$

onde

- a, γ, α, b e β são constantes positivas;
- a representa a taxa de crescimento das pragas;
- b representa a taxa de mortalidade dos inimigos naturais das pragas;
- $-\alpha yx$ e βxy são as interações entre as duas populações;
- $(-\gamma x)x$ representa a competição intraespecífica das pragas, que brigam pelo alimento em lavouras.

Podemos observar que não introduzimos um termo para competição intraespecífica na equação dos predadores. Isto ocorreu por se tratar de um modelo que parte do princípio de que se tem um número elevado de presas, não sendo portanto o foco da análise a competição intraespecífica entre os predadores. Esta pode não ocorrer ou ocorrer em número mínimo, visto que não há a possibilidade de falta de comida. O objetivo deste modelo é o equilíbrio entre as espécies.

Considerando o sistema (16), podemos calcular seus pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} x(a - \gamma x - \alpha y) = 0 \\ y(-b + \beta x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } a - \gamma x - \alpha y = 0 \\ y = 0 \text{ ou } -b + \beta x = 0 \end{cases}.$$

Como as condições $x = 0$ ou $y = 0$ não apresentaram interesse para o modelo, pois x e y representam as densidades das populações, das 4 possibilidades teremos que encontrar

$$\begin{cases} a - \gamma x - \alpha y = 0 \\ -b + \beta x = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{matrix}$$

De (II)

$$-b + \beta x = 0 \Leftrightarrow \beta x = b. \quad (17)$$

De (17), obtemos:

$$x = \frac{b}{\beta}. \quad (18)$$

De (I)

$$a - \gamma\left(\frac{b}{\beta}\right) - \alpha y = 0 \Leftrightarrow \alpha y = a - \gamma\left(\frac{b}{\beta}\right) \quad (19)$$

De (19), obtemos

$$y = \frac{a - \frac{\gamma b}{\beta}}{\alpha}. \quad (20)$$

Logo, o ponto de equilíbrio para o sistema sem controle é

$$\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a - \frac{\gamma b}{\beta}}{\alpha} \right). \quad (21)$$

O ponto de equilíbrio do sistema (16) possui um nível maior do que o desejável, mesmo o modelo sendo estável. Por isso, neste caso, é necessário a aplicação do controle.

Observe que o número de pragas no ponto de equilíbrio é invariante relativamente aos coeficientes da primeira equação. Ou seja, mudar qualquer parâmetro na primeira equação não auxiliaria para reduzir essa população.

De fato, teríamos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(aa_1 - \gamma\gamma_1x - \alpha\alpha_1y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-b + \beta x) \end{cases}, \quad (22)$$

cujo ponto de equilíbrio para o sistema sem controle é

$$\left(\frac{b}{\beta}, \frac{aa_1 - \frac{\gamma\gamma_1 b}{\beta}}{\alpha\alpha_1} \right). \quad (23)$$

Já para a segunda equação, alterar os valores dos coeficientes implica na obtenção de valores diferentes para as pragas no equilíbrio:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - \gamma x - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-bb_1 + \beta\beta_1x) \end{cases}, \quad (24)$$

cujo ponto de equilíbrio é

$$\left(\frac{bb_1}{\beta\beta_1}, \frac{a - \frac{\gamma bb_1}{\beta\beta_1}}{\alpha} \right). \quad (25)$$

- Aumento do número de pragas caso $b_1 > \beta_1$
- Diminuição do número de pragas caso $b_1 < \beta_1$
- Mesmo número de pragas caso $b_1 = \beta_1$

Para a estratégia de controle biológico, onde é feita a inserção de inimigos naturais, de modo a manter o sistema em um estado de equilíbrio abaixo de danos econômicos, utilizamos o modelo (16), introduzindo uma função de controle, denominada U , na segunda equação. Esta é a equação que descreve a taxa de variação da densidade populacional do inimigo natural da praga em questão. Assim temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - \gamma x - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-b + \beta x) + U \end{cases}. \quad (26)$$

A aplicação de uma função de controle se baseia na ideia que existe um certo limite de quantidade de pragas que determina a margem de danos econômicos, denominada por x_d . Isto é, não há necessidade de exterminar completamente a praga. Basta manter sua população em uma margem x_d que essa não causará danos à lavoura.

4.5 Aplicação ao controle de pragas em lavouras de soja

4.5.1 Pragas da soja

Para explicar melhor o processo do controle de pragas resumimos abaixo os dados do manual da EMBRAPA sobre Soja [8].

A tecnologia de Manejo Integrado de Pragas da Soja (MIP-Soja) foi implantada no Brasil, na década de 1970, e tem sido aperfeiçoada constantemente. Essa tecnologia orienta na tomada de decisões de controle de pragas com base num conjunto de informações sobre os insetos e sua densidade populacional, na ocorrência de inimigos naturais e na capacidade da cultura de tolerar os danos. Assim, o monitoramento da lavoura, a identificação correta das pragas e dos inimigos naturais, o conhecimento do estágio de desenvolvimento da planta e dos níveis de ação são importantes componentes do MIP-Soja.

A cultura da soja está sujeita ao ataque de insetos desde a germinação até a colheita Figura 29. Logo após a germinação, a partir do início do estágio vegetativo, vários insetos, como o bicudo-da-soja (*Sternechus subsignatus*), a lagarta elasmopalpus lignosellus (*Elasmopalpus lignosellus*), os corós (*Scarabaeoidea*) e os percevejos-castanhos-da-raiz (*Scaptocoris castanea* e *S. cetvelho*), danificam a cultura. Mais adiante, a lagarta-da-soja (*Anticarsia gemmatilis*), a lagarta falsa-medideira (*Pseudoplusia includens*) e vários outros desfolhadores atacam as plantas, ocorrendo em maior número durante as fases vegetativa e de floração.

Figura 29 – Pragas da soja, parte da planta atacada e sua importância relativa.

Inseto	Parte da planta atacada ¹	Importância
Lagartas de parte aérea		
Lagarta-da-soja (<i>Anticarsia gemmatilis</i>)	Fo	Praga principal
Falsa-medideira (<i>Pseudoplusia includens</i> , <i>Rachiplusia nu</i>)	Fo	Secundária, P. includens com importância crescente em algumas regiões
Lagarta-enroladeira (<i>Omiodes indicatus</i>)	Fo	Secundária, geralmente ocorrendo no final do ciclo da cultura, quando a desfolha não é importante
Broca-das-axilas (<i>Crociosema aporema</i>)	Fo, Br, Va	Secundária, com alguma importância em áreas restritas
Lagarta-das-vagens (<i>Spodoptera cosmioides</i> , <i>Spodoptera eridania</i>)	Va, Se	Esporádica
Lagarta maruca (<i>Maruca vitrata</i>)	Va	Esporádica
Broca-da-vagem (<i>Etiella zinckenella</i>)	Va, Se	Secundária, com alguma importância em áreas restritas
Lagarta-rosca (<i>Agrotis</i> spp.)	Pl, Ha	Secundária
Percevejos de parte aérea		
Percevejos sugadores de semente (<i>Nezara viridula</i> , <i>Piezodorus guildinii</i> , <i>Euschistus heros</i>)	Va, Se	Praga principal
Percevejo-barriga-verde (<i>Dichelops melacanthus</i>)	Va, Se	Secundária
Percevejo Edessa (<i>Edessa meditabunda</i>)	Va, Se	Secundária
Percevejo pardo (<i>Thyanta prerditor</i>)	Va, Se	Secundária
Percevejo acrosterno (<i>Chinavia</i> spp.)	Va, Se	Secundária
Coleópteros de parte aérea		
Tamanduá-da-soja (<i>Sternechus subsignatus</i>)	Ha	Praga regionalmente importante
Vaquinha (<i>Cerotoma</i> sp.)	Fo(A), No(L), Va	Secundária, em áreas de soja precedida por feijão
Vaquinha patriota (<i>Diabrotica speciosa</i>)	Fo (A), Ra (L)	Secundária, em áreas de soja precedida por milho "safrinha"
Torrãozinho (<i>Aracanthus mourei</i>)	Fo, Pe	Secundária, ocorrência no início do crescimento da soja
Vaquinha (<i>Colaspis</i> sp.)	Fo	Secundária
<i>Megascelis calcifera</i>	Fo	Secundária
Bicudinho (<i>Chalcodermus</i> sp.)	Fo, Pe, Br	Secundária, com alguma importância em áreas restritas
<i>Myochrous armatus</i>	Ha	Esporádica
<i>Blapstinus</i> sp.	Pl, Ha	Esporádica
Pragas de partes subterrâneas da planta		
Corós (<i>Phyllophaga</i> spp., <i>Liogenys</i> spp., <i>Plectris pexa</i> , <i>Demodema brevitarsis</i>)	Ra	Praga regionalmente importante
Percevejo-castanho (<i>Scaptocoris</i> spp.)	Ra	Praga regionalmente importante
Lagarta-elasma (<i>Elasmopalpus lignosellus</i>)	Ha	Esporádica, usualmente importantes em anos com prolongado período seco, na fase inicial da cultura
Cochonilhas-da-raiz	Ra	Importantes em áreas de semeadura direta
Outras pragas		
Caracóis e lesmas	Pl, Co, Fj	Importantes em áreas de semeadura direta
Piolhos-de-cobra	Pl	Importantes em áreas de semeadura direta
Grilo marrom ou pardo (<i>Anurogryllus muticus</i>)	Pl	Secundária
Tripés	Fj	Secundária, importante em áreas muito restritas, vetores de vírus da "queima do broto"
Mosca-branca (<i>Bemisia tabaci</i> biótipo B)	Fo	Secundária, com potencial alto de dano
Gafanhotos	Fo	Esporádica
Ácaros	Fo, Pe, Ha	Esporádica

¹ Br= brotos; Co= cotilédones; Fj= folhas jovens; Fo= folhas; Ha= hastes; No=nódulos, Pe= pecíolos; Pl= plântulas; Pp= plantas pequenas; Ra= raízes; Se= sementes; Va= vagens (A)= adulto, (L)= larva

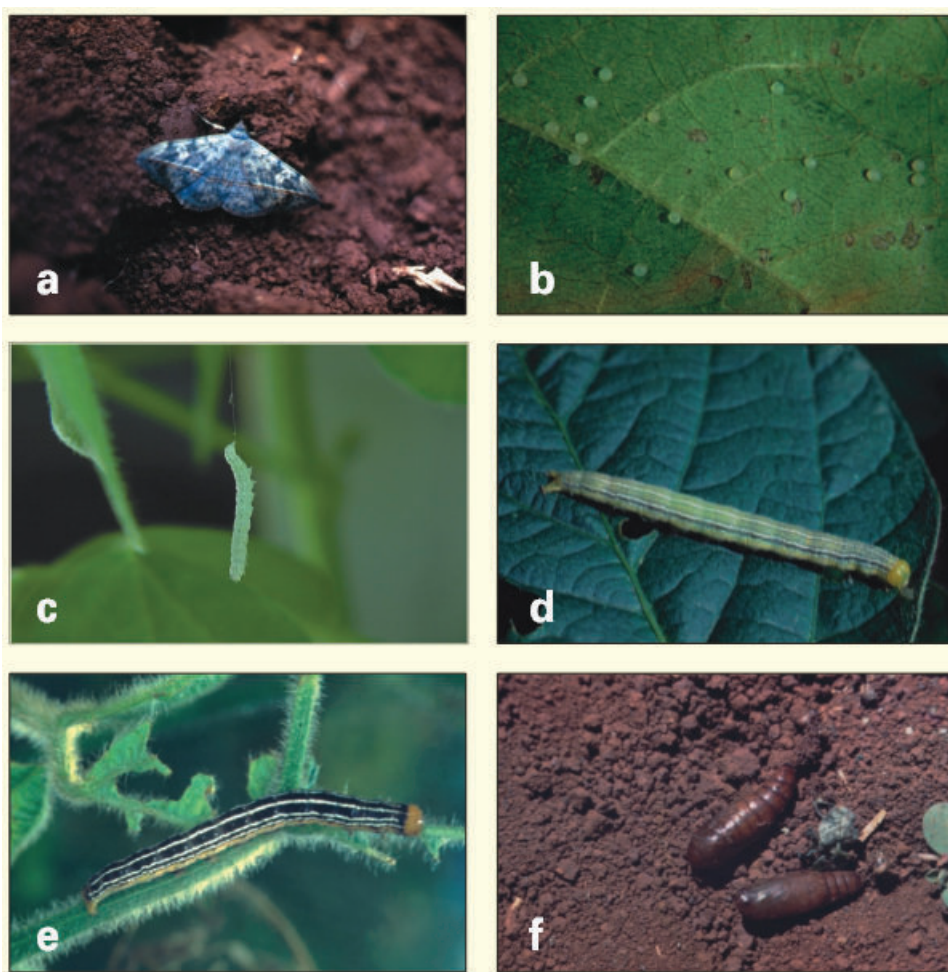
Com o início da fase reprodutiva, surgem os percevejos sugadores de vagens e sementes (*Nezara viridula*, *Piezodorus guildinii* e *Euschistus heras*), dentre outras espécies, que causam danos desde a formação das vagens até o final do enchimento dos grãos. A soja pode, também, ser atacada por outras espécies de insetos, consideradas pragas esporádicas, cujos aumentos populacionais são determinados por alterações climáticas, ou outros fatores, como, por exemplo, os sistemas de produção específicos de cada região.

Os insetos-pragas têm suas populações controladas naturalmente por predadores, parasitóides e doenças, conhecidos como inimigos naturais. Apesar de os danos causados por insetos serem, em alguns casos, alarmantes, não se recomenda a aplicação preventiva de produtos químicos. Além do problema de poluição ambiental, pode ocorrer a eliminação de inimigos naturais e as aplicações desnecessárias podem elevar significativamente o custo de produção da soja.

Como parte do MIP-Soja, vários métodos como o biológico e o químico podem ser utilizados para o controle das principais pragas. Além disso, a rotação de culturas e a manipulação da época de semeadura têm sido recomendadas principalmente para insetos de ciclo longo. A tabela abaixo foi retirada de [8].

4.5.2 Lagarta da soja

A lagarta-da-soja é encontrada em todos os locais de cultivo, sendo o desfolhador mais comum da soja no Brasil. Costuma atacar as lavouras a partir de novembro, nas regiões ao Norte do Paraná, e a partir de dezembro a janeiro no Sul do País, podendo causar desfolhamento, que pode chegar a 100%. A mariposa (Fig.30 a) possui coloração cinza, marrom ou bege, na maioria das vezes apresentando uma listra transversal escura ao longo das asas, unindo as pontas do primeiro par de asas. O processo reprodutivo, incluindo o acasalamento e a oviposição, ocorre à noite.

Figura 30 – *Anticarsia gemmatalis*

(a) – mariposa; (b) – ovos; (c) lagarta, 3º ínstar, (d) – lagarta, forma verde; (e) – lagarta, forma preta; (f) – pupa.

Os ovos (Fig.30b) são depositados isoladamente, na parte inferior das folhas, no caule, nos ramos e nos pedolos com maior concentração nos terços médio e inferior das plantas. São verde-claros assim que depositados e, com o passar do tempo, podem se tornar acinzentados e, posteriormente, marrom-escuro, próximo à eclosão das larvas. O período de incubação é de aproximadamente três dias, e cada fêmea tem capacidade para colocar até 1.000 ovos; cerca de 80% são depositados nos primeiros oito a dez dias de vida. A longevidade das fêmeas é de aproximadamente 20 dias. Nos dois primeiros ínstar (Fig.30c), as lagartas medem em média 3 e 9mm, respectivamente, e apresentam os dois primeiros pares de falsas pernas vestigiais no abdômen. Locomovem-se medindo palmos, podendo ser confundidas com as lagartas falsasmedideiras. Nesses dois ínstar, as lagartas raspam o parênquima foliar; somente a partir do terceiro ínstar conseguem

perfurar as folhas. A fase larval tem a duração de 12 a 15 dias, e as lagartas podem consumir cerca de 100 a 150cm² de área foliar; aproximadamente 96% desse consumo ocorre do 4º ao 6º instares larvais. Geralmente a lagarta é verde (Fig.30d), com estrias longitudinais brancas sobre o dorso. Em condições de alta população, ou escassez de alimento, a lagarta torna-se escura(Fig.30e), mantendo as estrias brancas. Possui quatro falsas pernas no abdômen e passa por seis instares larvais, podendo atingir 40mm de comprimento. Quando a lagarta pára de se alimentar no último instar larval, entra na fase de pré-pupa, que dura de um a dois dias. A lagarta empupa no solo, numa profundidade de até 2cm. A pupa recém-formada é verde-clara, tornando-se, posteriormente, marrom-escura e brilhante (Fig.30f). A fase de pupa dura de nove a dez dias, quando emergem as mariposas. A foto abaixo foi retirada de [8].

4.5.2.1 Manejo integrado

Segundo os níveis de ação pelo MIP-Soja, *A. gemmatilis* deve ser controlada com inseticidas químicos, quando forem encontradas, em média, 20 lagartas grandes (igual ou superior a 1.5cm) por metro ou quando a desfolha atingir 30%, antes da floração, e 15%, tão logo apareçam as primeiras flores. No caso de ataques da lagarta-da-soja, existem várias opções de produtos eficientes, tanto os inseticidas químicos quanto os biológicos, a exemplo do *Baculovirus anticarsia*, específico para a lagarta-da-soja, e do *Bacillus thuringiensis var.kurstaki* (Berliner), que é uma bactéria portadora de uma toxina específica para lepidópteros. Quando o ataque ocorrer no início da cultura, associado com períodos de seca, o controle deverá ser realizado com produtos químicos seletivos para evitar desfolha, que prejudicará o crescimento das plantas.

A dose de *baculovírus* a ser utilizada por hectare é de 50 LE (lagartas equivalentes), que corresponde a 50 lagartas grandes (maiores que 3cm), ou 20g de lagartas mortas por *baculovírus* por hectare. As lagartas mortas devem ser moídas no liquidificador, com a água, coando-se a calda obtida em tecido tipo gaze.

O *baculovírus* formulado, disponível na forma de pó molhável, deve ser suspenso em água e pulverizado na dose de 20g/ha, sobre lavouras infestadas com a lagarta-da-soja. A aplicação do *baculovírus* também pode ser aérea, empregando os mesmos 20g de lagartas mortas pelo vírus/ha, ou da formulação em pó molhável/ha tendo como veículo, no mínimo, 15 I/ha (litros por hectare) água ou 5 I/ha de óleo não refinado de soja.

Para a aplicação na próxima safra, as lagartas mortas por *baculovirus* devem ser coletadas e lavadas em água corrente. O material pode ser armazenado em freezer por até um ano. Como alguns dias depois da morte da lagarta por *baculovirus* o seu corpo apodrece, rompe-se, e grande quantidade de *baculovirus* é liberada sobre o substrato, geralmente uma aplicação do *baculovirus* controla o inseto durante toda a safra. O *baculovirus* pode ser aplicado quando forem encontradas, no máximo, 20 lagartas pequenas (no fio) ou 5 lagartas grandes (maiores que 1.5cm) e 15 lagartas pequenas por metro de fileira(amostragem). Em condições de estiagem, considerar como nível máximo para aplicação do vírus a metade dos valores mencionados acima.

O *baculovirus* não deve ser aplicado quando (i) a população de lagartas (pequenas + grandes) for superior a 20 por metro de fileira, (ii) a maioria das lagartas na lavoura for grande (> do que 1.5cm); (iii) a desfolha da lavoura já tenha atingido 30% na fase vegetativa, ou 15% após a floração; e (iv) junto com a lagarta-da-soja ocorrerem outras espécies desfolhadoras e/ou percevejos que precisem ser controlados. Nessas situações, o agricultor deve seguiras recomendações do MIP-Soja.

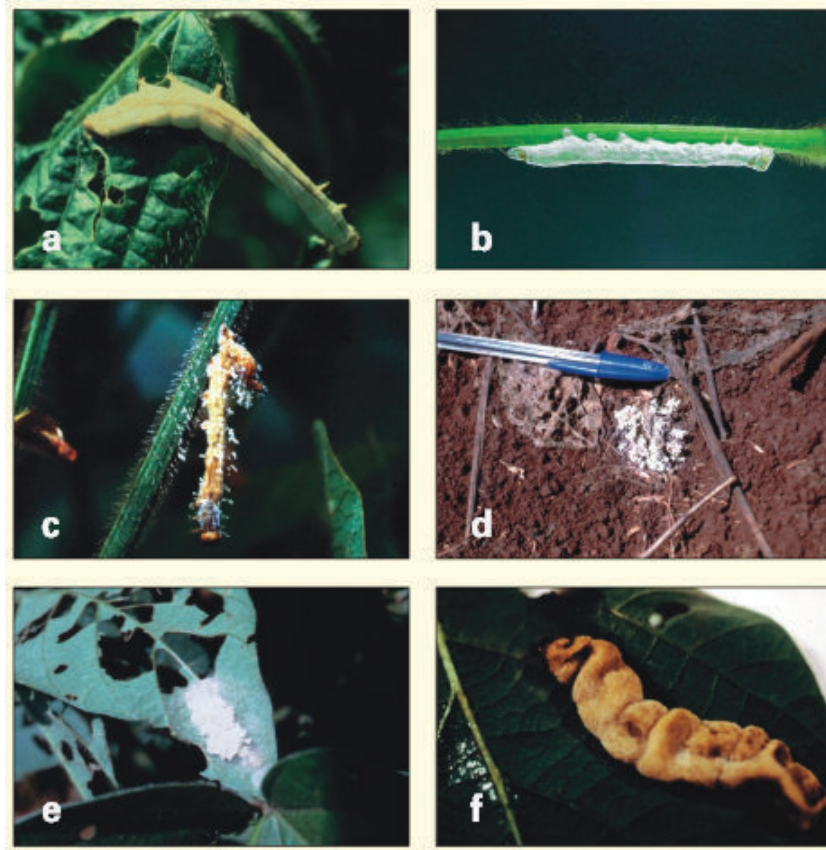
Outro produto biológico recomendado é baseado na bactéria *Bacillus thuringiensis*, que possui toxinas que paralisam o intestino do inseto. As lagartas contaminadas param de se alimentar algumas horas após a ingestão do produto e morrem poucos dias depois.

O fungo *Nomuraea rileyi*, que ataca a lagarta da soja e outras espécies de lagartas ocorre com elevada prevalência, durante os períodos de alta umidade relativa (maior que 80%), dizimando populações da lagarta-da-soja e tornando desnecessária a aplicação de outras medidas de controle. As lagartas atacadas por *N. rileyi* (Fig. 31 b) são brancas, devido ao crescimento vegetativo do fungo, aspecto seco e mumificado, não apodrecendo como as lagartas mortas por *baculovirus*. Quando ocorrem condições de umidade apropriadas, o fungo esporula, passando da coloração branca à verde. Os esporos formados sobre as lagartas mortas espalham-se pela ação do vento, infectando outras lagartas presentes na lavoura, multiplicando o patógeno.

A ocorrência do fungo parece ser favorecida quando as plantas de soja fecham as linhas, criando um microclima favorável para o seu desenvolvimento. Assim, em semeaduras no início da época recomendada, a aparição do fungo é antecipada. Quando há previsão de períodos chuvosos, *N. rileyi* está presente na lavoura e as populações da lagarta-da-soja ainda não atingiram o nível de dano econômico, é conveniente monitorar

a evolução da doença na população da lagarta para não realizar aplicações desnecessárias de produtos químicos. A foto abaixo foi retirada de [8].

Figura 31 – Entomopatógenos de lagartas



(a) – lagarta-da-soja infectada por vírus; (b) – lagarta-da-soja infectada por *Nomuraea rileyi*; (c) – *Plutellinae* atacada por *Zoophtora radicans*; (d) – lagarta-da-soja infectada por *Paecilomyces tenuipes*; (e) – *Plutellinae* infectada por *P. tenuipes*; (f) – *Plutellinae* infectada por *Pandora gammae*.

4.5.3 Jogo aplicado ao controle de lagartas

Conforme dito anteriormente, nosso jogo será baseado em dois jogadores:

- Jogador I: as pragas (neste caso, Lagarta da Soja)
- Jogador II: o agricultor (representado pelos inimigos naturais)

O agricultor busca diminuir a quantidade de lagartas por hectare com o auxílio de inimigos naturais no meio ambiente. Para isso, ele busca encontrar um controle U de modo que a quantidade total de lagartas fique num patamar economicamente estável. Usaremos $x_d = 20$ (vinte lagartas pequenas) como ponto de equilíbrio estável para o número de lagartas.

Conforme foi visto, não é necessário dizimar toda a população de lagartas. Este fato acarretaria danos econômicos, dos quais o agricultor busca fugir.

Voltando as equações de Lotka-Volterra com competição

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - \gamma x - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-b + \beta x) + U \end{cases}, \quad (27)$$

desejamos encontrar U de modo que o ponto $P = (x_d, y_d)$ seja economicamente estável.

Utilizaremos no nosso jogo os dados obtidos de Santos [20] para os parâmetros das equações acima. Substituindo os valores dos parâmetros nas equações sem controle

Tabela 1: Dados da EMBRAPA.

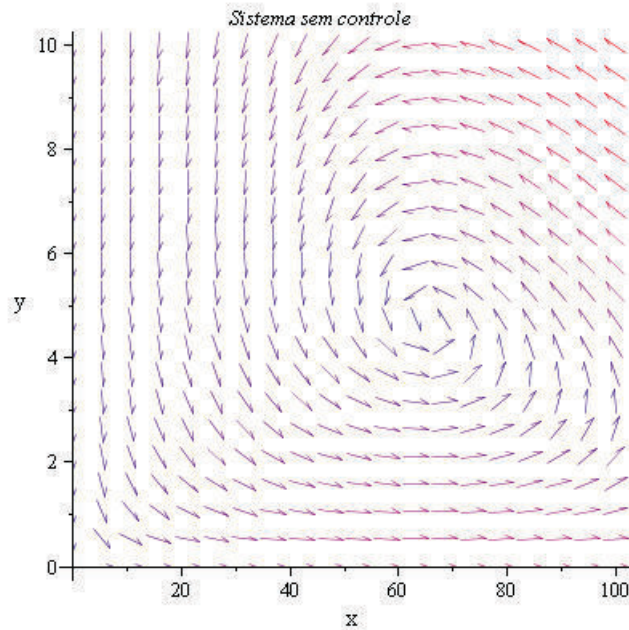
a	b	α	γ	β
0.16	0.19	0.02	0.001	0.0029

obtemos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(0.16 - 0.001x - 0.02y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-0.19 + 0.0029x) \end{cases},$$

O gráfico de fases do sistema acima pode ser visto logo abaixo. Observe que o ponto de equilíbrio do sistema é $(20, 7)$

Figura 32 – Gráfico de fases do sistema sem controle



Fazendo

$$\begin{cases} x(0.16 - 0.001x - 0.02y) = 0 \\ y(-0.19 + 0.0029x) = 0 \end{cases},$$

obtemos como ponto de equilíbrio o valor $P_i \cong (65.5; 4.7)$, um valor que não é economicamente viável para o agricultor.

Substituindo $x = x_d = 20$ em $(0.16 - 0.001x - 0.02y) = 0$, obtemos $y_d = 7$, ou seja, $P_f = (x_d, y_d) = (20, 7)$.

O agricultor busca então sair do ponto $P_i \cong (65.5; 4.7)$ para o ponto $P_f = (x_d, y_d) = (20, 7)$, para isso ele utilizará um controle U na segunda equação, ou seja:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(0.16 - 0.001x - 0.02y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-0.19 + 0.0029x) + U \end{cases}.$$

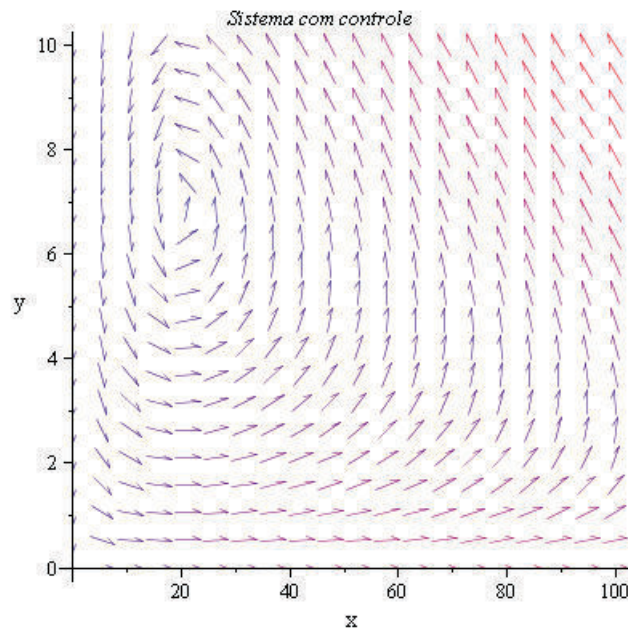
Variando gradualmente o parâmetro b da equação (16), observamos que quando $b = 0.058$, a solução do sistema é o ponto $(20, 7)$, ou seja, o ponto economicamente estável.

Assim sendo, determinamos $U = 0.132y$ e podemos reescrever o sistema conforme segue:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(0.16 - 0.001x - 0.02y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-0.19 + 0.0029x) + 0.132y \end{cases}.$$

O gráfico de fases do sistema acima pode ser visto a seguir:

Figura 33 – Gráfico de fases do sistema com controle



Determinando para cada valor de

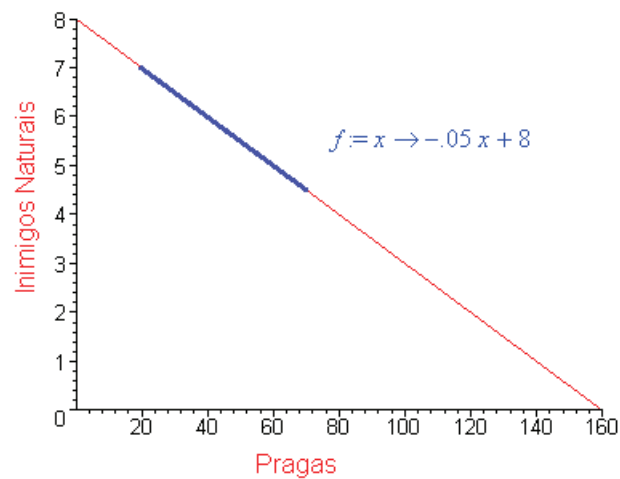
$$b = \{x \in \mathbb{R} | 0.058 \leq x \leq 0.019\}$$

o ponto

$$P^* = \left(\frac{b}{0,0029}, \frac{0.16 - 0.001 \frac{b}{0.0029}}{0.02} \right),$$

obtemos o gráfico abaixo:

Figura 34 – Variação do parâmetro



Variando a função até os pontos (0.8) e (160.0), obtemos a função de primeiro grau $f(x) = -0.05x + 8$. A partir dessa função, podemos montar a seguinte tabela:

Figura 35 – Jogo lagarta X inimigos naturais

	Lagartas	
Inimigos	Livres no Ambiente	Fora do Ambiente
Livres no Ambiente	7; 20	8; 0
Fora do Ambiente	0; 160	0; 0

Esta tabela é a representação do nosso jogo. Observe-se que dadas as equações de Lotka-Volterra com competição e realizando uma variação gradual no parâmetro b para assim conseguir obter o controle U , montamos o gráfico acima. Este gráfico nos forneceu a tabela que simboliza um jogo.

A partir dessa tabela, verificamos que o ponto (20, 7) é um Equilíbrio de Nash, não havendo nenhum outro nesse jogo.

Figura 36 – Equilíbrio de Nash

	Lagartas	
Inimigos	Livres no Ambiente	Fora do Ambiente
Livres no Ambiente	7; 20	8; 0
Fora do Ambiente	0; 160	0; 0

Concluimos então que para sair do ponto $P_i \cong (65.5; 4.7)$ para o ponto $P_f = (x_d, y_d) = (20, 7)$, o agricultor deve modificar o parâmetro referente à taxa de mortalidade dos inimigos naturais. Para isso, basta inserir no meio, maior quantidade de inimigos, fazendo com que esta taxa diminua e consiga assim atingir o ponto economicamente estável.

CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos como a Teoria dos Jogos e a Teoria do Controle se acoplam na chamada Teoria dos Jogos Diferenciáveis. Esta possui escassa bibliografia em língua portuguesa e por isso incluímos no Apêndice um resumo de seus conceitos, mesmo não os utilizando todos na aplicação desenvolvida neste trabalho. Expusemos a origem e o desenvolvimento inicial da Teoria dos Jogos, a classificação quanto à quantidade de jogadores, tipo de jogos (soma zero ou soma não zero), formação (perfeita ou imperfeita), cooperativo ou não cooperativo, dentre outras, descrevendo como se encontram o Equilíbrio de Nash e o Ótimo de Pareto. Modelamos um jogo em que os jogadores são:

- agricultor (representado pelo inimigo natural da praga),
- as lagartas (praga da lavoura).

Utilizamos as Equações de Lotka-Volterra com competição e inserimos um controle para modelar as nossas estratégias. Primeiramente encontramos o controle para depois elaborar o nosso jogo e encontrar assim o Equilíbrio de Nash a ele associado.

É natural a pergunta: “Qual a estratégia de luta da lagarta?”. Na teoria dos jogos, os jogos, em sua maioria, não são de soma zero, ou seja, o que um jogador ganha não é necessariamente o que o outro perde. A lagarta não ganha nada ao ser infectada. E a mesma não pode fugir dessa infecção uma vez que os inimigos se espalham pelo ar. Diferentemente do caso apresentado no Apêndice (Homem x Leão), a lagarta não tem como fugir, já que seu inimigo é invisível a olho nu. Assim sendo, uma vez infectada, nada se pode fazer.

De fato, modelos para jogos podem exibir essa aparente lacuna, como ilustramos com um outro jogo, cf. [7], que guarda alguma semelhança com o que discutimos. Células cancerígenas cooperam para que o seu crescimento seja possível, resultando dessa evolução o surgimento de um tumor. Ao resto do corpo afetado, cabe evitar esse tipo de problema, mas uma vez criado, não há como voltar atrás, destruindo o tumor. Em um determinado instante, dependendo do tipo de tumor e do tratamento, o enfermo vem a falecer, ocorrendo o óbito tanto para as células cancerígenas quanto as sadias. Ou seja, no final do jogo, nenhum dos jogadores ganhou o “grande prêmio”.

Mostramos, com o jogo desenvolvido, como um agricultor pode controlar uma peste que atinge sua lavoura. Cabe ressaltar que nas equações abaixo, caso o parâmetro β seja modificado, é possível encontrar o correspondente ponto de equilíbrio economicamente aceitável.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - \gamma x - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-b + \beta x) \end{cases}.$$

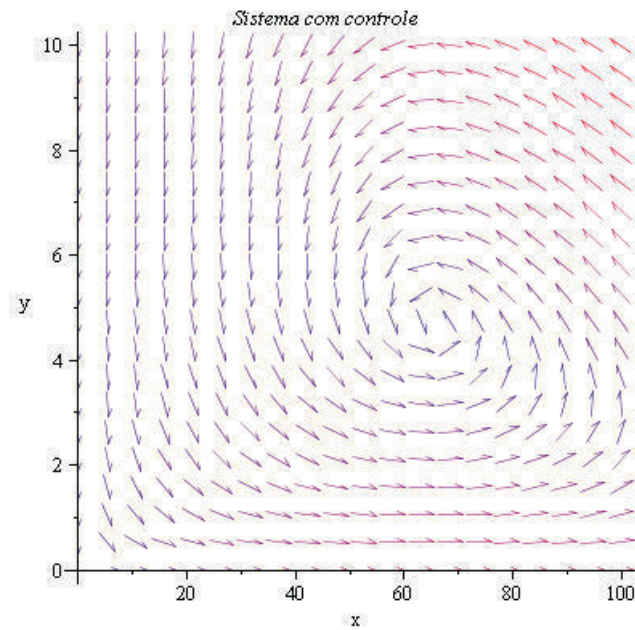
Utilizando os valores dos parâmetros fornecidos pela EMBRAPA, vimos que o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(0.16 - 0.001x - 0.02y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-0.19 + 0.0029x) \end{cases},$$

tem solução $P_i \cong (65.5; 4.7)$.

Ao mudar o parâmetro β de 0.0029 para 0.0095, isto é, inserir um controle $U^* = 0.0066xy$, nosso sistema também terá como ponto de equilíbrio $P_f \cong (20; 7)$. Só que neste caso, mudar o parâmetro β significa mudar a interação entre as espécies, o que apresenta dificuldades práticas.

Figura 37 – Sistema com controle



O jogo aqui desenvolvido pode ser aplicado a qualquer modelo de Lotka-Volterra com competição. Em trabalhos futuros podem ser buscadas formas mais rápidas para obtenção do controle.

REFERÊNCIAS

- [1] ALMEIDA, P.J.A.L; KAJIN, M.; VIEIRA, M.V.: *Equilíbrio de Nash e Estratégias evolutivamente estáveis: A Teoria dos jogos na ecologia de populações*, 2012, Sigma.UFRJ, Vol. 16, Fas. 1, Pág: 127
- [2] BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A.: *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*, 2008. IMPA, Rio de Janeiro.
- [3] BELLMAN, R.: *On the Theory of Dynamic Programming*, 1952. PNAS, vol. 38 n°. 8 Pág: 716 – 719
- [4] BERKOVITZ, L.D.: *Optimal Control Theory (Applied Mathematical Sciences)*, 1974 . Springer, New York
- [5] BERNHARD,P.:*Nonzero-sum dynamic games in the managment of biological systems*, 2009. Inria
- [6] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R.C.: *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 1998. LTC, Rio de Janeiro, 6 ed.
- [7] DINGLI, D., CHALUB, F., SANTOS, F., SEGBROECK, S. V., PACHECO, J.M.: *Cancer phenotype as the outcome of an evolutionary game between normal and malignant cells*, 2009 British Journal of Cancer Vol. 101, 1130–1136
- [8] EMBRAPA.: *Soja - Manejo Integrado de Pragas*, 2000, Embrapa, ISSN 1516–7860.
- [9] EVANS, L. C.: *An Introduciton to Mathematical Optimal Control Theory Version 0.2*. University of California, Berkeley
- [10] FRANKLIN, G.F.; POWELL, A.; EMAMI-NAEINI, A.: *Feedback Control of Dynamic Systems*, 1994. Addison-Wesley Publishing Company, 3 ed., 1994.
- [11] FELTRIN, C.C.; RAFIKOV, M.: *Aplicação da Função de Lyapunov num Problema de Controle Ótimo de Pragas*, 2002. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, vol.3, N°. 2, p. 83–92, 2002.

- [12] ISAACS, R.: *Differential Games. A mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*, 1999. Dover, New York, 2 ed..
- [13] LEITÃO, A.; SILVA, G. N.: *Tópicos em Teoria de Controle*, 2004. Monografias da Segunda Bienal de Matemática, UFBA, p. 1–97, 2004.
- [14] LOTKA, A.J.: *Elements of Physical Biology*, 1925. Williams e Wilkins Compay, Baltimore.
- [15] MALTHUS, R. T.: *An Essay on the Principle of Population* , 1978. Electronic Scholarly Publishing Projec, 1998 (reedição)
- [16] MONTEIRO, D. R.: *Uma Introdução a Teoria dos Jogos*, 2010. Monografia, UERJ, Rio de Janeiro.
- [17] NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O.: *Theory of Games and Economic Behavior*, 1944. Princeton University Press
- [18] NEUMANN, J. V.: *Zür Theorie der Gesellschaftsspiele*, 1928. Mathematische Annalen, Volume 100, Issue 1, pp 295–320
- [19] NUNES, R. R.: *Dinâmica de Populações: Um Breve Histórico*, 2006.
- [20] SANTOS, L. H. S.: *Teoria de Controle Ótimo com Aplicações a Sistemas Biológicos*, 2012. Dissertação, UERJ, Rio de Janeiro .
- [21] SONTAG, E. D.: *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, 1998. Springer, 2 ed., New York, 1998.
- [22] STAAKS, P. G.: *Teoria de Controle Ótimo e Teoria dos Jogos*, 2010. Monografia, USP, São Paulo.
- [23] RAFIKOV, M.: *Notas do Minicurso: Aplicação dos modelos matemáticos no controle de populações*, 2003. UFSC, Santa Catarina
- [24] PEREZ, F.; MOREIRA, J. C.: *Saúde e Ambiente em sua Relação com o Consumo de Agrotóxicos em um Pólo Agrícola do Estado do Rio de Janeiro, Brasil*, 2007 Cad. Saúde Pública, Rio de Janeiro, 23 Sup 4, S612–S621.

- [25] VATH,B.:*Aplicação de modelos matemáticos no controle de populações, 2003* UFSC, Santa Catarina
- [26] VERHULST, P. F.:*Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, 1838.*
- [27] VOLTERRA. V.:*Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically, 1926.*
- [28] *A Química dos Agrotóxicos - QUÍMICA NOVA NA ESCOLA, 2012.* Vol. 34, N° 1, p. 10-15.
- [29] <http://sistemasdeproducao.cnptia.embrapa.br/FontesHTML/Milho/CultivodoMilho/prsementes.htm>.
Acessado em 06/08/2012.
- [30] <http://sistemasdeproducao.cnptia.embrapa.br/FontesHTML/Milho/CultivodoMilho/plantasdaninhas.htm>. Acessado em 06/08/2012.
- [31] <http://www.mst.org.br/node/10586>.
Acessado em 06/08/2012.
- [32] <http://www.portalsaofrancisco.com.br/alfa/meio-ambiente-controle-biologico/control-biologico.php>.
Acessado em 06/08/2012.
- [33] <http://www.coladaweb.com/biologia/alimentos/agrotoxicos>.
Acessado em 06/08/2012.
- [34] http://philip.inpa.gov.br/publ_livres/mss
Acessado em 06/09/2012.
- [35] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tucker_Albert.html.
Acessado em 03/09/2013.
- [36] <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/EcOsMorg.html>.
Acessado em 03/09/2013.

APÊNDICE – Jogos Diferenciáveis

A Introdução

A Teoria dos Jogos Diferenciáveis investiga problemas de conflitos em sistemas modelados por equações diferenciais. Esse tópico faz a intersecção entre Teoria dos Jogos (onde vários jogadores estão envolvidos) e a Teoria de Controle (eventos representados por equações diferenciais são controlados pelos jogadores).

A partir de agora, introduzimos o Jogo Diferenciável, um modelo de jogo para duas pessoas. A ideia principal é que dois jogadores controlam a dinâmica de evolução de algum sistema, onde um jogador tenta maximizar enquanto o outro tenta minimizar o funcional *payoff*, que depende da trajetória.

Quais são as estratégias ideais para cada jogador? Esta é uma pergunta complicada, principalmente porque em cada instante, as decisões de controle de cada jogador dependerão do que o outro teria anteriormente decidido.

Apresentamos neste capítulo alguns conceitos e proposições da teoria como forma de divulgação da mesma.

A.1 Definições

Um problema modelo: Considere o intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$, juntamente com os conjuntos $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}^l$ e a função $f : \mathbb{R}^n \times A \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definição 4.1 A transformação mensurável $\alpha(\cdot) : [t, T] \rightarrow A$ é o controle do jogador I (iniciado no instante t).

A transformação mensurável $\beta(\cdot) : [t, T] \rightarrow B$ é o controle do jogador II. Correspondendo a cada par de controle, temos as seguintes dinâmicas:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f(x(s), \alpha(s), \beta(s)) & (t \leq s \leq T) \\ x(t) = x \end{cases},$$

onde o ponto inicial $x \in \mathbb{R}^n$ é dado.

Definição 4.2 *O payoff (P) do jogo é dado por*

$$P_{x,t}[\alpha(\cdot), \beta(\cdot)] := \int_t^T r(x(s), \alpha(s), \beta(s)) ds + g(x(T)).$$

O jogador I, cujo controle é $\alpha(\cdot)$, deseja maximizar o funcional $P[\cdot]$; o jogador II, cujo controle é $\beta(\cdot)$, deseja minimizar esse funcional.

Pretendemos agora definir funções de valor e estudar o jogo usando programação dinâmica.

Definição 4.3 *Os conjuntos de controle do jogo são:*

$$A(t) := \{\alpha(\cdot) : [t, T] \rightarrow A, \alpha(\cdot) \text{ mensurável}\}$$

$$B(t) := \{\beta(\cdot) : [t, T] \rightarrow B, \beta(\cdot) \text{ mensurável}\}.$$

Precisamos modelar o fato de que, a cada instante de tempo, nenhum jogador sabe os movimentos futuros do outro. A ideia é que um jogador irá selecionar antecipadamente, não o seu controle, mas sim suas respostas a todos os controles possíveis que podem ser selecionados por seu adversário.

Definição 4.4 *(i) A transformação $\Phi : B(t) \rightarrow A(t)$ é chamada de estratégia do jogador I para todo tempo $t \leq s \leq T$,*

$$\beta(\tau) \equiv \hat{\beta}(\tau) \quad \text{para } t \leq \tau \leq s$$

implica

$$\Phi[\beta](\tau) \equiv \Phi[\hat{\beta}](\tau) \quad \text{para } t \leq \tau \leq s \quad (28)$$

Podemos pensar que $\Phi[\beta]$ é a resposta do jogador I para o jogador II ao selecionar o controle $\beta(\cdot)$. A condição (28) expressa as ações futuras que o jogador I não pode prever.

(ii) A estratégia do jogador II é a transformação $\Psi : A(t) \rightarrow B(t)$ para todo instante $t \leq s \leq T$;

$$\alpha(\tau) \equiv \hat{\alpha}(\tau) \quad \text{para } t \leq \tau \leq s;$$

implica

$$\Psi[\alpha](\tau) \equiv \Psi[\hat{\alpha}](\tau) \quad \text{para } t \leq \tau \leq s$$

Definição 4.5 *Os conjuntos de estratégias são:*

$A(t) :=$ estratégias do jogador I (começando no instante t),

$B(t) :=$ estratégias do jogador II (começando no instante t).

Agora, introduzimos as funções de valor.

(i) A função de valor mínimo é

$$v(x, t) := \inf_{\Psi \in B(t)} \sup_{\alpha(\cdot) \in A(t)} P_{x,t}[\alpha(\cdot), \Psi[\alpha](\cdot)]. \quad (29)$$

(ii) A função de valor máximo é

$$u(x, t) := \sup_{\Phi \in A(t)} \inf_{\beta(\cdot) \in B(t)} P_{x,t}[\Phi[\beta](\cdot), \beta(\cdot)]. \quad (30)$$

Um dos dois jogadores anuncia a sua estratégia de acordo com a escolha do controle do outro; este, por sua vez, escolhe o controle. O jogador que joga depois, ou seja, o que escolhe a estratégia, tem uma vantagem. De fato, verifica-se que sempre:

$$v(x, t) \leq u(x, t).$$

B Programação dinâmica e equação de Isaacs

Teorema 4.1 (EDP para valores máximos e mínimos da função valor) *Suponha u, v continuamente diferenciáveis. Então u maximiza a Equação de Isaacs,*

$$\begin{cases} u_t + \min_{b \in B} \max_{a \in A} \{f(x, a, b) \cdot \nabla_x u(x, t) + r(x, a, b)\} = 0 \\ u(x, T) = g(x) \end{cases}, \quad (31)$$

e v minimiza a Equação de Isaacs,

$$\begin{cases} v_t + \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{f(x, a, b) \cdot \nabla_x v(x, t) + r(x, a, b)\} = 0 \\ v(x, T) = g(x) \end{cases}. \quad (32)$$

A Equação de Isaacs é análoga à Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para jogos de duas pessoas. Podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$u_t + H^+(x, \nabla_x u) = 0 \quad (33)$$

para o valor máximo da EDP hamiltoniana

$$H^+(x, p) := \min_{b \in B} \max_{a \in A} \{f(x, a, b) \cdot p + r(x, a, b)\} \quad (34)$$

e

$$v_t + H^-(x, \nabla_x v) = 0 \quad (35)$$

para o seu valor de mínimo

$$H^-(x, p) := \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{f(x, a, b) \cdot p + r(x, a, b)\}. \quad (36)$$

A.1 Interpretações e observações

Em geral temos:

$$(i) \quad \max_{a \in A} \min_{b \in B} \{f(x, a, b) \cdot p + r(x, a, b)\} < \min_{b \in B} \max_{a \in A} \{f(x, a, b) \cdot p + r(x, a, b)\}$$

e, conseqüentemente, $H^-(x, p) < H^+(x, p)$. Os valores máximos e mínimos da Equação de Isaacs, geralmente, assumem valores diferentes dos valores de máximo e mínimo das funções de valor, assim, $u \neq v$.

A interpretação dessa situação é simplificada se pensarmos de uma forma um pouco diferente: basta supor que dois jogadores se revezam para exercer seus respectivos controles em um curto espaço de tempo. Nessa situação, há uma desvantagem para o primeiro, uma vez que o outro jogador sabe o controle que foi selecionado. A função valor u representa uma espécie de versão “infinitesimal” dessa situação, para que o jogador I tenha vantagem; já o valor da função v representa a situação oposta, para que o jogador II tenha essa mesma vantagem.

No entanto,

$$\max_{a \in A} \min_{b \in B} \{f(\dots) \cdot p + r(\dots)\} < \min_{b \in B} \max_{a \in A} \{f(\dots) \cdot p + r(\dots)\}, \quad (37)$$

onde para todo p e para todo x , sabemos que o jogo satisfaz a *Condição Minimax*, também conhecida como *Condição de Isaacs*.

(ii) Utilizando a Programação Dinâmica em (37), podemos resolver a Equação de Isaacs para $u \equiv v$ e, em seguida, pelo menos em princípio, criar controles ótimos para cada jogador.

(iii) Dizer que $\alpha^*(\cdot)$ e $\beta^*(\cdot)$ são controles ideais significa que o par $(\alpha^*(\cdot), \beta^*(\cdot))$ é um ponto de sela para $P_{x,t}$. Isso significa que

$$P_{x,t}[\alpha(\cdot), \beta^*(\cdot)] \leq P_{x,t}[\alpha^*(\cdot), \beta^*(\cdot)] \leq P_{x,t}[\alpha^*(\cdot), \beta(\cdot)],$$

para todos os controles $\alpha(\cdot)$ e $\beta(\cdot)$. O Jogador I selecionará $\alpha^*(\cdot)$, pois ele teme que o Jogador II selecione $\beta^*(\cdot)$. De forma análoga, o Jogador II selecionará $\beta^*(\cdot)$, pois ele também teme que o Jogador I selecione $\alpha^*(\cdot)$.

B.2 Jogos e princípio do máximo de Pontryagin

Admite-se que a condição minimax em (37) domina e determinamos os controles ótimos $\alpha^*(\cdot)$, $\beta^*(\cdot)$ como foi dito anteriormente. Denotemos $X^*(\cdot)$ a solução da EDO (28) correspondendo aos controles $\alpha^*(\cdot)$ e $\beta^*(\cdot)$. Então, define-se:

$$p^*(t) := \nabla_x v(X^*(t), t) = \nabla_x u(X^*(t), t).$$

Assim podemos escrever que

$$\dot{p}^*(t) = -\nabla_x H(X^*(t), p^*(t), \beta^*(t))$$

para o Hamiltoniano da Teoria dos Jogos,

$$H(x, p, a, b) := f(a, x, b)\dot{p} + r(x, a, b).$$

C.3 Aplicação: jogo de guerra

Discutiremos um exemplo extraído de [12].

C.3.1 Relatório do problema

Suporemos que os oponentes I e II estão em guerra e definimos:

$x^1(t)$ = oferta de recursos para I,

$x^2(t)$ = oferta de recursos para II.

Cada jogador a cada instante pode dedicar alguma fração do seu efetivo direcionado para o ataque e o restante do efetivo para o atrito. Seja $A = B = [0, 1]$. Definem-se:

$\alpha(t)$ = efetivo do jogador I dedicado ao esforço de atrito

$1 - \alpha(t)$ = efetivo do jogador I dedicado ao esforço de ataque

$\beta(t)$ = efetivo do jogador II dedicado ao esforço de atrito

$1 - \beta(t)$ = efetivo do jogador II dedicado ao esforço de ataque

Sejam dados também os parâmetros:

m_1 = taxa de produção do material de guerra do jogador I

m_2 = taxa de produção do material de guerra do jogador II

c_1 = eficácia das armas de II contra a produção de I

c_2 = eficácia das armas de I contra a produção de II

Suporemos $c_1 > c_2$, uma hipótese que apresenta uma assimetria sobre o problema.

As dinâmicas são governadas pelo seguinte sistema de EDO:

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = m_1 - c_1\beta(t)x^2(t) \\ \dot{x}^2(t) = m_2 - c_2\alpha(t)x^1(t) \end{cases} . \quad (38)$$

Com isso, introduzimos a função *payoff*

$$P[\alpha(\cdot), \beta(\cdot)] = \int_0^T (1 - \alpha(t))x^1(t) - (1 - \beta(t))x^2(t)dt,$$

onde a integral registra as vantagens de I sobre II de ataques diretos no instante t . O jogador I busca então maximizar P enquanto o jogador II busca minimizá-lo.

C.3.2 Aplicando programação dinâmica

Primeiramente, checamos a condição *minimax*, para $n = 2$, $p = (p_1, p_2)$:

$$\begin{aligned} f(x, a, b) \cdot p + r(x, a, b) = \\ (m_1 - c_1 b x_2) p_1 + (m_2 - c_2 a x_1) p_2 + (1 - a) x_1 - (1 - b) x_2 = \\ m_1 p_1 + m_2 p_2 + x_1 - x_2 + a(-x_1 - c_2 x_1 p_2) + b(x_2 - c_1 x_2 p_1). \end{aligned}$$

Desde que a e b ocorram em instantes separados, a condição *minimax* é satisfeita. Portanto $v \equiv u$ e as duas formas da equação de Isaacs concordam:

$$v_t + H(x, \nabla_x v) = 0$$

para

$$H(x, p) := H^+(x, p) = H^-(x, p).$$

Renomeamos $A = B = [0, 1]$ e $p = \nabla_x v$, e escolhemos um valor $a \in [0, 1]$ para maximizar

$$a x_1 (-1 - c_2 v_{x_2})$$

De modo análogo, selecionamos um valor $b \in [0, 1]$ para minimizar

$$b x_2 (1 - c_1 v_{x_1})$$

Assim temos:

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{se } -1 - c_2 v_{x_2} \geq 0 \\ 0, & \text{se } -1 - c_2 v_{x_2} < 0 \end{cases}, \quad (39)$$

e

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 - c_1 v_{x_1} \geq 0 \\ 1, & \text{se } 1 - c_1 v_{x_1} < 0 \end{cases}. \quad (40)$$

Então, se conhecermos a função valor v , poderemos desenvolver um controle ótimo de *feedback* para os jogadores I e II. No entanto é difícil resolver equação de Isaacs para v . Para isso iremos mudar a abordagem.

C.3.3 Aplicando o princípio do máximo

Supõe-se que $\alpha(\cdot)$ e $\beta(\cdot)$ foram selecionados conforme dito anteriormente, e $\chi(\cdot)$ corresponde à solução da EDO (38). Define-se

$$\rho(t) := \nabla_x v(\chi(t), t).$$

De acordo com os resultados acima, $\rho(\cdot)$ resolve a equação adjunta

$$\dot{\rho}(t) = -\nabla_x H(\chi(t), \rho(t), \alpha(t), \beta(t)) \quad (41)$$

para

$$\begin{aligned} H(x, p, a, b) &= p \cdot f(x, a, b) + r(x, a, b) = \\ &= p_1(m_1 - c_1 b x_2) + p_2(m_2 - c_2 a x_1) + (1 - a)x_1 - (1 - b)x_2. \end{aligned} \quad (42)$$

Podemos ler (42) como

$$\begin{cases} \dot{p}^1 = \alpha - 1 + p^2 c_2 \alpha \\ \dot{p}^2 = 1 - \beta + p^1 c_1 \beta \end{cases}, \quad (43)$$

com a condição final $p^1(T) = p^2(T) = 0$.

Introduzimos ainda

$$s^1 := -1 - c_2 v_{x_2} = -1 - c_2 p^2, s^2 := 1 - c_1 v_{x_1} = 1 - c_1 p^1;$$

de acordo com (42) e (43), as funções s^1 e s^2 controlam quando os jogadores I e II trocam seus controles.

Dinâmicas para s^1 e s^2 . Nosso objetivo agora é encontrar as EDO's para s^1 e s^2 . Calculemos:

$$\dot{s}^1 := -c_2 \dot{p}^2 = c_2(\beta - 1 - p^1 c_1 \beta) = c_2(-1 + \beta(1 - p^1 c_1)) = c_2(-1 + \beta s^2)$$

e

$$\dot{s}^2 := -c_1 \dot{p}^1 = c_1(-\alpha + 1 - p^2 c_2 \alpha) = c_1(1 + \alpha(-1 - p^2 c_2)) = c_1(1 - \alpha s^1).$$

Portanto

$$\begin{cases} \dot{s}^1 = c_2(-1 + \beta s^2), & s^1(T) = -1 \\ \dot{s}^2 = c_1(1 - \alpha s^1), & s^2(T) = 1 \end{cases}. \quad (44)$$

De (42) e (43), temos

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{se } s_1 \geq 0 \\ 0, & \text{se } s_1 < 0 \end{cases},$$

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{se } s_2 \leq 0 \\ 0, & \text{se } s_2 > 0 \end{cases}.$$

Calculando s^1 e s^2 . Trabalhamos anteriormente com o instante terminal T . Desde o instante T , nós temos $s^1 < 0$ e $s^2 > 0$, as mesmas aproximam-se de T . A partir daqui temos $\alpha = \beta \equiv 0$ próximo de T , significando um ataque total de ambos os lados.

Considere o tempo decrescendo a partir de T e seja $t^* < T$ o primeiro instante em que ou I ou II troca de estratégia. Nossa intenção é calcular T^* . No intervalo $[t^*, T]$ temos $\alpha(\cdot) \equiv \beta(\cdot)$. De (44),

$$\dot{s}^1 = -c_2, \quad s^1(T) = -1, \quad \dot{s}^2 = c_1, \quad s^2(T) = 1;$$

e portanto

$$s^1(t) = -1 + c_2(T - t), \quad s^2(t) = 1 + c_1(t - T)$$

para instantes $t^* \leq t \leq T$. A partir daqui s^1 atinge 0 no instante $T - \frac{1}{c_2}$; s^2 atinge 0 no instante $T - \frac{1}{c_1}$. Lembrando que nós assumimos $c_2 > c_1$. Então $T - \frac{1}{c_1} < T - \frac{1}{c_2}$, e a seguir:

$$t^* = T - \frac{1}{c_2}.$$

Agora definimos $t_* < t^*$ para ser o próximo instante quando acontecer a troca dos jogadores I ou II . No intervalo de tempo $[t_*, t^*]$, temos $\alpha \equiv \beta \equiv 0$. Portanto podemos ler a dinâmica da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{s}^1 = -c_2, & s^1(t^*) = 0 \\ \dot{s}^2 = c_1(1 + s^1), & s^2(t^*) = 1 - \frac{c_1}{c_2} \end{cases}.$$

Obtemos a solução dessas equações:

$$\begin{cases} s^1(t) = -1 + c_2(T - t) \\ s^2(t) = 1 - \frac{c_1}{2c_2} - \frac{c_1c_2}{2}(t - T)^2 \end{cases} \quad (t_* \leq t \leq t^*),$$

Agora $s^1 > 0$ em $[t_*, t^*]$ para todas as opções de t_* . Mas como $s^2 = 0$

$$t_* := T - \frac{1}{c_2} \left(\frac{2c_2}{c_1} - 1 \right)^{1/2}.$$

Se agora resolvermos (44) em $[0, t_*]$ com $\alpha = \beta \equiv 1$, vemos que s_1, s_2 não trocam de sinal.

D.4 Aplicação homem X leão

Primeiramente, comecemos a descrever um jogo diferencial bastante popular: o “Leão e o Homem”. O jogo consiste no seguinte: homem e leão estão trancados em uma arena circular. O leão está faminto e o homem não é forte o suficiente para servir de café da manhã. Vários questionamentos em decorrência disso. Na visão do homem temos:

- (1) O quão longe e até quando o homem consegue escapar do leão?
- (2) Caso ele consiga sempre escapar do leão, qual deve ser a distância mínima entre eles?

Já na visão do leão, temos:

- (1) Quanto tempo (pelo menos) o homem pode escapar do leão?
- (2) Caso ele não tenha sucesso em capturar o homem, o quão perto ele consegue chegar dele?

Esses questionamentos são típicos da teoria dos jogos: o homem tente maximizar a distância entre ele e o leão enquanto o leão tenta minimizar essa distância.

O que é incomum para a teoria dos jogos aqui é que estamos lidando com um problema de tempo contínuo. Dinâmicas podem ser expressas em termos de velocidades instantâneas para o leão e o homem, que necessitam escolhê-las a cada momento a fim de realizar seu objetivo. Esse tipo de problema é típico da teoria de controle. Vamos tentar formalizar um pouco essas idéias. Assumimos que o leão pode correr com uma velocidade máxima indicada por $L > 0$ e que o homem pode correr a uma velocidade máxima de $M > 0$. Seja $y(t) \in \mathbb{R}^2$ a posição do homem no instante t e $z(t) \in \mathbb{R}^2$ a posição do leão no instante t . Em seguida, o homem escolhe a cada tempo sua velocidade $y'(t)$ no conjunto de velocidades $U = \{u \in \mathbb{R}^2, |u| \leq M\}$ enquanto o leão escolhe sua velocidade $z'(t)$ no conjunto $V = \{v \in \mathbb{R}^2, |v| \leq L\}$. Os conjuntos U e V são chamados de conjuntos de controles do homem e do leão, respectivamente.

A dinâmica do problema é:

$$y'(t) = u(t) \quad \text{onde} \quad u(t) \in U, \quad \text{e} \quad z'(t) = v(t) \quad \text{onde} \quad v(t) \in V$$

Como homem e leão devem permanecer na arena, devemos acrescentar as restrições da mesma:

$$|y(t)| \leq R \quad \text{e} \quad |z(t)| \leq R \quad \forall t \geq 0.$$

Vamos agora tentar formular, de uma maneira bastante ingênua, algumas idéias para resolver este jogo. Isso vai obrigar-nos a pensar sobre a noção fundamental na teoria dos jogos diferenciais, a noção de estratégia.

D.4.1 Primeiro caso $L > M$.

Está é a pior situação para o homem. Obviamente, se o leão correr em direção ao homem, conseguirá capturá-lo em um tempo finito. Matematicamente, isto significa que o leão escolhe em cada momento a velocidade

$$\bar{v}(y(t), z(t)) = L \frac{y(t) - z(t)}{|y(t) - z(t)|}$$

Assim, o leão vai resolver a cada tempo a equação diferencial:

$$\dot{z}(t) = \bar{v}(y(t), z(t)). \tag{45}$$

Desde que o homem permaneça na arena ($|y(t)| \leq R$ para todo t), é um exercício fácil de mostrar que a solução $z(t)$ da equação acima também permanece na arena. O mapeamento \bar{v} é a estratégia, isto é, uma regra de decisão que permite ao leão decidir em cada momento o controle para jogar.

Também se pode verificar que esta é uma boa estratégia, no sentido de que há garantias de captura em tempo finito independentemente do que o homem faça. Suponha que o homem escolha em cada momento o controle $u(t) \in U$, então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|y(t) - z(t)|^2 &= 2\langle y(t) - z(t), y'(t) - z'(t) \rangle \\ &= 2\langle y(t) - z(t), y'(t) \rangle - 2\langle y(t) - z(t), z'(t) \rangle \\ &\leq 2M|y(t) - z(t)| - 2L|y(t) - z(t)| \end{aligned}$$

desde que o homem corra com uma velocidade máxima M (isto é, $|u(t)| \leq M$), e $z'(t)$ é dado por (45). Então:

$$\frac{d}{dt}|y(t) - z(t)|^2 \leq -2(L - M)|y(t) - z(t)|$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dt}|y(t) - z(t)| \leq -(L - M)$$

Portanto, a captura é segura antes de $|y(0) - z(0)|/(L - M)$, mesmo que o homem saiba que o leão tem a estratégia \bar{v} .

Note que não há nenhuma razão para que esta estratégia seja ideal para o leão, uma vez que não leva em conta o fato de que o homem é obrigado a ficar na arena.

D.4.2 Segundo caso $L < M$.

Este caso é muito mais promissor para o homem, embora não seja completamente evidente que ele possa evitar a captura, uma vez que ele está obrigado a permanecer na arena. Vamos mostrar que este é realmente o caso e, além disso, que ele pode ficar a uma certa distância fixa do leão. Suponhamos, para fixar as ideias e simplificar o cálculo, que o raio da arena é $R = 1$ e que o homem inicia a partir da fronteira da arena. Vamos agora trabalhar em coordenadas polares. Sejam (ρ_M, θ_M) e (ρ_L, θ_L) as coordenadas polares do homem e do leão, respectivamente. Tomemos as restrições sobre as velocidades que seguem:

$$(\rho'_M)^2 + \rho_M^2(\theta'_M)^2 \leq M^2 \quad \text{e} \quad (\rho'_L)^2 + \rho_L^2(\theta'_L)^2 \leq L^2$$

A fim de evitar detalhes técnicos, basta definir a estratégia do homem em uma vizinhança do “conjunto ruim” $\rho_M = \rho_L$ e $\theta_M = \theta_L \bmod(2\pi)$. O homem vai ficar no limite da arena: $\rho_M(t) = 1$ para todo t . Então $\rho'_M \equiv 0(t)$ e pode-se escolher $|\theta'_M(t)| = M$. O homem também escolhe a sua velocidade radial em forma de *feedback*, ou seja,

$$\theta'_M(t) = \bar{s}_M(\theta_M(t), \theta_L(t)), \tag{46}$$

onde \bar{s}_M é da seguinte forma:

$$s_M^-(\theta_M, \theta_L) = \begin{cases} M & \text{se } \theta_M - \theta_L \geq 0 \text{ e } |\theta_M - \theta_L| < \frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi \\ -M & \text{se } \theta_M - \theta_L < 0 \text{ e } |\theta_M - \theta_L| < \frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi \end{cases}.$$

Esta é uma “estratégia”, o que significa que depende da posição atual do θ_M e θ_L . Seja $\epsilon \in (0, 1)$ de modo que

$$|\theta_M(0) - \theta_L(0)| + 1 - \rho_L(0) > \epsilon$$

e tal que

$$L \left(1 + \frac{1}{(1 - \epsilon)^2} \right)^{\frac{1}{2}} < M$$

Isso é possível desde que as posições de leão e homem sejam distintas no instante inicial e $L < M$.

Afirmamos que, qualquer que seja a velocidade $(\rho'_L(t), \theta'_M(t))$ do leão, sempre teremos:

$$\rho(t) := |\theta_M(t) - \theta_L(t)| + 1 - \rho_L(t) > \frac{\epsilon}{2}.$$

Isto significa que a distância entre leão e homem é limitada inferiormente por uma constante positiva. Note-se que, uma vez que a estratégia \bar{s}_M é descontínua, pode haver um problema na definição da solução da equação (46). Entretanto, isso não é o caso, porque se $\theta_M(t) = \theta_L(t) \text{ (mod } 2\pi)$ para algum t e $\rho_L(t)$ é suficientemente próximo de 1, então $|\theta'_L(t)| < M = |\theta'_M(t)|$, de modo que θ_M está bem definido e $\theta_M \neq \theta_L$ em algum intervalo pequeno $(t, t + h)$.

Por contradição suponhamos que há um primeiro instante $t_1 > 0$ de tal modo que $\rho(t_1) = \frac{\epsilon}{2}$. Depois, há um intervalo não vazio (t_0, t_1) em que $\rho(t) \in (\frac{\epsilon}{2}, \epsilon)$ para $t \in (t_0, t_1)$. Vamos mostrar que ρ é não decrescente nesse intervalo, o que conduz a uma contradição. Note que, nesse intervalo, temos $1 - \rho_L(t) \leq \epsilon$, o que implica em $\rho_L(t) \geq 1 - \epsilon > 0$.

Para todo $t \in (t_0, t_1)$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de $\theta_M(t) \neq \theta_L(t)$ para todo t ,

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt}\rho(t) &= \text{sgn}(\theta_M(t) - \theta_L(t))(\theta'_M(t) - \theta'_L(t)) - \rho'_L(t) \\
&\geq -((\rho'_L(t))^2 + (\rho_L(t)\theta'_L(t))^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{(\rho_L(t))^2}\right)^{\frac{1}{2}} + M \\
&\geq -L \left(1 + \frac{1}{(1-\epsilon)^2}\right)^{\frac{1}{2}} + M \geq 0
\end{aligned}$$

dada a escolha de ϵ .

D.4.3 Terceiro caso $L = M$.

Este problema foi um desafio matemático por algum tempo, tendo a solução sido obtida por [4].

Vale o seguinte resultado: o leão pode chegar tão perto do homem quanto se queira, mas o homem pode sempre evitar a captura. Em outras palavras, a captura nunca ocorre, mas a distância mínima entre o leão e o homem torna-se arbitrariamente pequena.

Vamos mostrar que o leão pode chegar tão perto do homem quanto se queira. Para isso, vamos supor, para simplificar os cálculos, que no instante 0 o leão está no centro da arena. A estratégia do leão será a seguinte: ele irá mover-se o mais rápido possível na direção do homem, mas manterá sempre o mesmo raio que o homem, isto é, garantirá que $z(t)$ permaneça no segmento $[0, y(t)]$. Em coordenadas polares isso significa que $\theta_L(t) = \theta_M(t)$ para todo t . Então, $\bar{\theta}'_L = \theta'_M$, como $\rho_L(t) \leq \rho_M(t)$ o leão maximiza $\bar{\rho}'_L$ sob o parâmetro $\bar{\theta}'_L = \theta'_M$, temos:

$$\bar{\rho}'_L = [M^2 - \bar{\rho}_L^2(\theta'_M)^2]^{\frac{1}{2}}$$

O par $(\bar{\theta}'_L, \bar{\rho}'_L)$, é novamente uma estratégia, isto é, uma regra de decisão para o leão. Vamos salientar que isso depende da velocidade do seu oponente.

Vamos verificar que a distância entre o leão e o homem tende para zero. Iremos novamente mostrar por contradição e supor que ele é limitado inferiormente por uma constante positiva $\epsilon > 0$. Então,

$$\rho_M(t) \geq \rho_L(t) + \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Note que

$$(\bar{\rho}_L(t) + \epsilon)|\bar{\theta}'_L(t)| \leq \rho_M(t)|\theta'_M(t)| \leq M$$

e então

$$\bar{\rho}'_L = [M^2 - \rho_L^2(\bar{\theta}'_M)^2]^{\frac{1}{2}} \geq \left[M^2 - \frac{\rho_L^2 M^2}{\epsilon + \bar{\rho}_L^2} \right]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{M_\epsilon}{1 + \epsilon},$$

já que $0 \leq \bar{\rho}_M(t)$. Mas a desigualdade acima implica que $\bar{\rho}$ está aumentando como uma velocidade não menor que $M_\epsilon/(1 + \epsilon)$, o que contradiz o fato de que $\bar{\rho}'_M \leq 1$.

Vamos finalmente mostrar que o homem pode evitar a captura. Para simplificar supomos que o leão usa a estratégia descrita acima. Sem perda de generalidade podemos supor que a posição inicial do homem é no interior da arena $|\rho_M(0) \in (0, 1)|$. Então ele irá correr em espiral para a borda. Mais precisamente:

$$\theta'_M = M^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2 - \rho_M}{\rho_M} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \rho'_M = (M - (\rho_M \theta'_M)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Esta escolha é possível porque

$$M - (\rho_M \theta'_M)^2 = M(1 - 2\rho_M + \rho_M^2) = M(1 - \rho_M)^2,$$

o que nos dá $\rho'_M = M^{\frac{1}{2}}(1 - \rho_M)$ e então

$$\forall t \geq 0, \rho_M(t) = 1 - (1 - \rho_M(0))e^{-\sqrt{M}t}.$$

Vamos agora verificar que a captura não acontece em tempo finito: temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|y(t) - z(t)| &= \frac{d}{dt}(\rho_M(t) - \rho_L(t)) &&= \rho'_M(t) - \rho'_L(t) \\ &= (M - (\rho_M \theta'_M)^2)^{\frac{1}{2}} - (M - (\rho_L \theta'_L)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= -(\theta'_M)^2(\rho_M^2 - \rho_L^2)/[\rho'_M(t) + \rho'_L(t)] \\ &\geq -2(\theta'_M)^2(\rho_M - \rho_L)/[2\rho'_M(t)] \\ &\geq -(\theta'_M)^2 e^{\sqrt{M}t}(\rho_M - \rho_L)/(1 - \rho_M(0)) \end{aligned}$$

O lema de Gronwall então implica que $\rho_M(t) - \rho_L(t) > 0$ para todo $t \geq 0$.

A abordagem acima é muito simplificada: de fato, não definimos rigorosamente o problema e nem os tipos de estratégia que os jogadores estão permitidos a jogar. Argumentamos como se a ordem na qual os jogadores jogam não influenciasse a solução. Um dos objetivos da teoria dos jogos diferenciais é uma análise mais rigorosa. No en-

tanto, para melhor entender as dificuldades, é conveniente começar com aspectos mais computacionais da teoria, como a abordagem de Isaacs, previamente mencionada.