

---

---

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO  
CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

**Um estudo sobre o espalhamento da  
dengue usando equações diferenciais  
parciais e lógica fuzzy**

**Luciana Takata Gomes**

Mestrado em Matemática Aplicada

**Orientador:** Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros

Campinas  
2009

---

---

# Um estudo sobre o espalhamento da dengue usando equações diferenciais parciais e lógica fuzzy

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Luciana Takata Gomes** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de Junho de 2009.



Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros  
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros
2. Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer
3. Prof<sup>a</sup>. Dra. Magda da Silva Peixoto

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Crislene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Gomes, Luciana Takata

G585e Um estudo sobre o espalhamento da dengue usando equações diferenciais parciais e lógica fuzzy / Luciana Takata Gomes -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Laécio Carvalho de Barros

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Dengue. 2. Epidemiologia - Matemática. 3. Lógica Fuzzy. 4. Equação diferencial parcial. 5. Método dos elementos finitos. I. Barros, Laécio Carvalho de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: A study of the spread of dengue using partial differential equations and fuzzy logic

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Dengue. 2. Epidemiology – Mathematics. 3. Fuzzy logic. 4. Differential equations, Partial. 5. Finite elements method.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros (IMECC - UNICAMP)  
Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer (IMECC - UNICAMP)  
Profª. Dra. Magda da Silva Peixoto (UFSCar - Sorocaba)

Data da defesa: 29/06/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

**Dissertação de Mestrado defendida em 29 de junho de 2009 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



**Prof.(a). Dr(a). LAÉCIO CARVALHO DE BARROS**



**Prof. (a). Dr (a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER**



**Prof. (a). Dr (a). MAGDA DA SILVA PEIXOTO**

*À minha família.*

# Agradecimentos

São muitas as pessoas que contribuíram com este trabalho, seja através da minha formação, da pesquisa, do apoio, da amizade ou de outra forma. Gostaria de deixar claro que a gratidão é imensa e que está presente quando penso em qualquer um que me auxiliou de alguma forma nesta jornada. Em especial, há algumas pessoas sem as quais este trabalho não teria sido realizado, de maneira que não posso deixar de agradecer:

Aos meus amigos e professores Joni e Laécio, não apenas por me ensinarem conhecimento técnico, mas por todo apoio, amizade e paixão pela Matemática e suas aplicações.

Aos meus pais Shirley e José Carlos e ao meu irmão Daniel. Há tanto que eles fazem e já fizeram por mim, mas acho que posso resumir tudo em amor e apoio incondicionais, regados a muita sabedoria e equilíbrio.

À minha avó, pessoa simples, amorosa e sorridente; ao meu avô, cujo espírito alegre e sempre elétrico nos acompanha em pensamento, e demais familiares que estiveram presente.

Aos meus amigos e namorado, que enchem minha vida de flores e de risadas e tornaram minha vida acadêmica mais alegre e fácil de acontecer.

Aos pesquisadores envolvidos no Projeto Temático (Ricardo, Valmir, Heloísa, Paulo, Silvia e demais).

À UNICAMP e ao IMECC e a seus professores e funcionários.

À CAPES pela bolsa e à FAPESP pelo apoio ao Projeto Temático.

# Resumo

A doença a ser analisada é a dengue e, com este intuito, são criados alguns modelos matemáticos para simular sua evolução no distrito sul da cidade de Campinas. Divide-se a população humana local em três compartimentos, de acordo com o estado dos indivíduos - suscetível, infectante ou recuperado. A interação destas diferentes populações de humanos com a de mosquitos *Aedes aegypti* determina o comportamento da doença no domínio especificado. As variáveis de estado do modelo são as populações de humanos e a população de mosquitos, cuja divisão em compartimentos depende do modelo adotado. Seus valores são determinísticos e representam a densidade das populações em cada ponto do domínio. O trabalho contempla informações de especialistas a respeito do comportamento da doença e das condições para a proliferação e espalhamento do mosquito vetor. Tais condições, consideradas de natureza incerta, acabam por determinar o risco de contração da doença e, conseqüentemente, parâmetros dos modelos. A modelagem resulta em sistemas de Equações Diferenciais Parciais, com alguns de seus parâmetros incertos. Para a obtenção de soluções (valores das variáveis em questão ao longo do tempo e sobre o domínio espacial citado), utilizam-se ferramentas de solução numérica (métodos dos Elementos Finitos e de Crank-Nicolson). Parâmetros relacionados ao comportamento da população do mosquito são avaliados por meio de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, aos quais são fornecidos, como entradas, as informações dos especialistas a respeito das condições do ambiente.

**Palavras-chave:** dengue, epidemiologia matemática, lógica fuzzy, equação diferencial parcial, elementos finitos.

# Abstract

The aim of this work is to study dengue and, with this purpose, some mathematical models were created to simulate its evolution in the southern district of the city of Campinas. The human population was subdivided into three compartments, according to the state of the individuals – susceptible, infectious or recovered. The interaction between these different populations and the *Aedes aegypti* mosquito population establishes the behaviour of the disease in the specified domain. The state variables of the models are the human populations and the mosquito population, whose compartmental division depends on the adopted model. Its values are deterministic and represent population densities in each point of the domain. This work takes into account specialists' information concerning the behaviour of the disease and the conditions of the proliferation and spread of the mosquito vector. These conditions, whose nature is considered uncertain, determine the risk of contraction of the disease and, consequently, the model parameters. The modelling results in systems of partial differential equations with some of its parameters being uncertain. To obtain the solutions (variable values according to time and the cited domain), numerical solution tools are used (Finite Elements and Crank-Nicolson methods). Parameters related to the behaviour of mosquito populations are evaluated through the Fuzzy Rules Based Systems, to which are provided, as entries, the specialists' information with respect to the environmental conditions.

**Keywords:** dengue, mathematical epidemiology, fuzzy logic, partial differential equation, finite elements.



# Lista de Figuras

2.1	<i>Aedes aegypti</i> em sua fase adulta. Fonte: Site da Dengue [6]. . . . .	13
2.2	Biociclo do <i>Aedes aegypti</i> . Fonte: Site da Dengue [6]. . . . .	13
2.3	Cidade de Campinas dividida em distritos. A região em destaque (distrito sul) é o domínio a ser estudado. . . . .	16
3.1	Esquema compartimental representativo do modelo SIR. As linhas contínuas indicam transferências entre compartimentos, nas direções das setas. . .	21
3.2	Esquema compartimental representativo do modelo do sistema (3.6). As linhas contínuas indicam transferências entre compartimentos, nas direções das setas, e a linha tracejada representa contato em potencial para resultar em infecção. . . . .	27
3.3	Esquema compartimental representativo do modelo do sistema (3.7). As linhas contínuas indicam transferências entre compartimentos, nas direções das setas, e as linhas tracejadas representam contatos em potencial para resultarem em infecções. . . . .	30
3.4	Esquema compartimental representativo do modelo do sistema (3.9). As linhas contínuas indicam transferências entre compartimentos, nas direções das setas, e as linhas tracejadas representam contatos em potencial para resultarem em infecções. . . . .	35
5.1	Subconjuntos fuzzy relacionados à precipitação pluviométrica, à densidade de recipientes e à densidade de humanos. . . . .	69

5.2	Método da Transformação Integral para sorteio da variável $C$ relacionada à quantidade de chuva total na segunda quinzena de Janeiro. $F(C)$ é a sua função de distribuição acumulada, baseada na Tabela 5.5; $u$ é o valor sorteio de uma variável uniforme $U(0,1)$ e $C = 92.9$ é o valor de sorteio para $C$ encontrado pelo método. . . . .	72
6.1	Esquema representativo do algoritmo de simulação acoplando as ferramentas estudadas. . . . .	74
6.2	Malha gerada resultante da discretização do domínio espacial através do <i>software</i> Gmsh. . . . .	76
6.3	Regiões correspondentes à cobertura de cada centro de saúde (esq.) e divisão utilizada no trabalho de acordo com as semelhanças entre as regiões (dir.). . . . .	76
6.4	Condição inicial para a densidade de humanos suscetíveis $S_0$ para os três modelos, semelhante em todas as simulações. . . . .	77
6.5	Densidade de recipientes sobre o domínio espacial para os três modelos. . . . .	77
6.6	Subconjuntos fuzzy relacionados à precipitação pluviométrica, à densidade de recipientes e à densidade de humanos. . . . .	80
6.7	Condição inicial para a densidade de humanos suscetíveis $S_0$ para os três modelos. . . . .	83
6.8	Condições iniciais para a densidade de humanos infectantes $I_0$ (para os três modelos) e de mosquitos infectantes $M_{I0}$ (para os Modelos 2 e 3). . . . .	84
6.9	Humanos suscetíveis no tempo final de 90 dias para os três modelos (diferenças visualmente imperceptíveis nas gravuras de um modelo para outro). . . . .	85
6.10	Humanos infectantes em $t = 90$ (Modelo 1). . . . .	86
6.11	Humanos recuperados em $t = 90$ (Modelo 1). . . . .	86
6.12	Humanos infectantes em $t = 90$ (Modelo 2). . . . .	86
6.13	Humanos recuperados em $t = 90$ (Modelo 2). . . . .	86
6.14	Humanos infectantes em $t = 90$ (Modelo 3). . . . .	86
6.15	Humanos recuperados em $t = 90$ (Modelo 3). . . . .	86
6.16	Mosquitos em $t = 90$ (Modelo 1). . . . .	87
6.17	Mosquitos aquáticos em $t = 90$ (Modelo 3). . . . .	87
6.18	Mosquitos suscetíveis em $t = 90$ (Modelo 2). . . . .	87
6.19	Mosquitos infectantes em $t = 90$ (Modelo 2). . . . .	87
6.20	Mosquitos suscetíveis em $t = 90$ (Modelo 3). . . . .	87
6.21	Mosquitos infectantes em $t = 90$ (Modelo 3). . . . .	87

6.22	Humanos suscetíveis a cada passo no tempo no ponto 604 para os três modelos (diferenças imperceptíveis nas gravuras de um modelo para outro)	88
6.23	Humanos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 1).	89
6.24	Humanos recuperados no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 1).	89
6.25	Humanos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 2).	89
6.26	Humanos recuperados no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 2).	89
6.27	Humanos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 3).	89
6.28	Humanos recuperados no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 3).	89
6.29	Mosquitos no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 1).	90
6.30	Mosquitos aquáticos no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 3).	90
6.31	Mosquitos suscetíveis no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 2).	90
6.32	Mosquitos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 2).	90
6.33	Mosquitos suscetíveis no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 3).	90
6.34	Mosquitos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 3).	90
6.35	Humanos suscetíveis em $t = 90$ (Simulação 4 – Modelo 2).	93
6.36	Hum. susc. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 4 – Mod. 2).	93
6.37	Humanos infectantes em $t = 90$ (Sim. 4 – Mod. 2).	93
6.38	Hum. inf. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 4 – Mod. 2).	93
6.39	Humanos recuperados em $t = 90$ (Sim. 4 – Mod. 2).	93
6.40	Hum. rec. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 4 – Mod. 2).	93
6.41	Mosquitos suscetíveis em $t = 90$ (Sim. 4 – Mod. 2).	94
6.42	Mosq. susc. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 4 – Mod. 2).	94
6.43	Mosquitos infectantes em $t = 90$ (Sim. 4 – Mod. 2).	94
6.44	Mosq. inf. no pto 604 ao longo do tempo (Sim. 4 – Mod. 2).	94
6.45	Condições iniciais para as densidades de humanos infectantes $I_0$ e de mosquitos infectantes para a simulação 5.	96
6.46	Humanos suscetíveis em $t = 90$ (Simulação 5 – Modelo 3).	98
6.47	Hum. susc. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).	98
6.48	Humanos infectantes em $t = 90$ (Sim. 5 – Mod. 3).	98
6.49	Hum. inf. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).	98
6.50	Humanos recuperados em $t = 90$ (Sim. 5 – Mod. 3).	98
6.51	Hum. rec. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).	98
6.52	Mosquitos suscetíveis em $t = 90$ (Sim. 5 – Mod. 3).	99
6.53	Mosq. susc. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).	99
6.54	Mosquitos aquáticos em $t = 90$ (Sim. 5 – Mod. 3).	99
6.55	Mosq. aq. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).	99

6.56	Mosquitos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).	99
6.57	Mosquitos infectantes nos tempos equivalentes a 30, 60 e 90 dias, de cima para baixo (Simulação 5 – Modelo 3). . . . .	100

# Lista de Tabelas

2.1	Série Histórica de Casos de dengue autóctones confirmados por mês em Campinas. . . . .	17
5.1	Tabela verdade dos conectivos “e”, “ou”, e “implicação”. . . . .	57
5.2	Tabela verdade do conectivo “não”. . . . .	58
5.3	Base de regras para ilustrar o método de Mamdani. . . . .	64
5.4	Base de regras para ilustrar o método de KTS. . . . .	66
5.5	Somatória das precipitações pluviométricas diárias na primeira quinzena de Janeiro de 1989 a 2009. . . . .	71
6.1	Valores de parâmetros determinísticos. . . . .	78
6.2	Valores das áreas, número total de recipientes encontrados em pesquisa, variável $Q$ , número de pessoas residentes e variável $H$ , de acordo com a região. . . . .	79
6.3	Valores linguísticos das variáveis $\alpha_M$ , $v$ e $\kappa$ em função de $C$ , $Q$ e $H$ e das variáveis $\gamma$ e $\mu_A$ em função de $C$ . . . . .	81
6.4	Valores das somatórias das precipitações diárias para períodos quinzenais de dezembro/06, de janeiro/07 e de fevereiro/07. . . . .	82
6.5	Valores das condições iniciais das simulações do primeiro grupo. . . . .	83
6.6	Valores utilizados para os parâmetros de transmissão de acordo com o modelo. . . . .	83
6.7	Valores totais de pessoas recuperadas e infectantes sobre todo o domínio ao se passarem o equivalente a 30, 60 e 90 dias. . . . .	85
6.8	Valores totais de pessoas infectadas ao longo dos três meses de acordo com cada modelo. . . . .	85

6.9	Valores sorteados para as somatórias das precipitações diárias para períodos quinzenais, a partir da primeira quinzena de Dezembro até a segunda de Fevereiro, para a simulação 4. . . . .	92
6.10	Valores totais de pessoas recuperadas e infectantes sobre todo o domínio ao se passarem o equivalente a 30, 60 e 90 dias para a simulação 4. . .	92
6.11	Valores totais de pessoas infectadas ao longo dos três meses para a simulação 4. . . . .	92
6.12	Valores sorteados para as somatórias das precipitações diárias para períodos quinzenais, a partir da primeira quinzena de Dezembro até a segunda de Fevereiro, para a simulação 5. . . . .	97
6.13	Valores totais de pessoas recuperadas e infectantes sobre todo o domínio ao se passarem o equivalente a 30, 60 e 90 dias para a simulação 5. . .	97
6.14	Valores totais de pessoas infectadas ao longo dos três meses para a simulação 5. . . . .	97

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A dengue</b>	<b>9</b>
2.1	Agente etiológico e aspectos clínicos . . . . .	10
2.2	O vetor . . . . .	12
2.3	Breve histórico . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Modelagem</b>	<b>19</b>
3.1	Introdução . . . . .	19
3.2	Dinâmica vital, difusão e epidemiologia . . . . .	19
3.2.1	Modelos de dinâmica vital . . . . .	20
3.2.2	O modelo SIR . . . . .	21
3.2.3	Termos de dispersão . . . . .	22
3.3	Considerações iniciais para o modelo da dengue . . . . .	22
3.4	Modelagem da população de humanos . . . . .	25
3.5	Modelagem da população de mosquitos e modelagem da dengue . . . . .	26
3.5.1	Modelo de 4 compartimentos . . . . .	26
3.5.2	Modelo de 5 compartimentos . . . . .	29
3.5.3	Modelos de 6 compartimentos . . . . .	31
3.5.4	Condições Iniciais e de Contorno . . . . .	34
3.5.5	Fatores ambientais: variáveis fuzzy . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Método numérico</b>	<b>39</b>
4.1	Método dos Elementos Finitos . . . . .	39
4.1.1	Teoria do Método . . . . .	39
4.1.2	Aplicação do método . . . . .	41

4.2	Discretização da Variável Temporal: o Método de Crank-Nicolson . . .	46
4.3	O Problema Discretizado: Elementos Finitos e Crank Nicolson . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Teoria dos Conjuntos Fuzzy</b>	<b>53</b>
5.1	Subconjuntos fuzzy . . . . .	54
5.2	Regras fuzzy . . . . .	55
5.3	Sistemas Baseados em Regras Fuzzy . . . . .	62
5.3.1	Base de regras fuzzy aplicada ao problema da dengue . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Acoplamento das ferramentas, simulações e resultados</b>	<b>73</b>
6.1	Acomplamento das ferramentas . . . . .	73
6.2	Simulações e Resultados . . . . .	75
6.2.1	Simulações 1, 2 e 3 . . . . .	79
6.2.2	Simulação 4 . . . . .	92
6.2.3	Simulação 5 . . . . .	96
6.3	Comentários gerais sobre as simulações . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>103</b>
7.1	Conclusões . . . . .	103
7.2	Trabalhos Futuros . . . . .	105
<b>A</b>	<b>Código Fonte</b>	<b>113</b>
A.1	dengue5v.m . . . . .	113



# Capítulo 1

## Introdução

De acordo com a Organização Pan-Americana de Saúde , “Hoje o dengue [sic] é a mais importante arbovirose que afeta o homem e constitui-se em sério problema de saúde pública no Brasil onde as condições do meio ambiente favorecem o desenvolvimento e a proliferação do *Aedes aegypti*, principal mosquito vetor”[34]. O Ministério da Saúde reforça a importância do tema, não restringindo ao Brasil a necessidade de preocupação com a doença, afirmando que “A dengue é um dos principais problemas de saúde pública no mundo” [5].

A dengue é uma doença infecciosa aguda de curta duração, causada por um arbovírus, do gênero Flavivírus [36]. Pode se apresentar através de quatro diferentes sorotipos (DEN-1, DEN-2, DEN-3 e DEN-4) os quais geram as mesmas manifestações (ibidem). Há duas variações da doença: dengue clássica e dengue hemorrágica. A primeira causa apenas desconforto, iniciando-se com febre alta e podendo apresentar outros sintomas como cefaléia, dores musculares, vômitos e manchas vermelhas pelo corpo. A segunda é caracterizada por sintomas semelhantes à da primeira, acrescida de diminuição acentuada da pressão sanguínea, o que ocasiona agitação ou letargia, pulso fraco e rápido, taquicardia e/ou sangramentos espontâneos, podendo levar a óbito se não controlada rapidamente.

Os vetores da dengue são os mosquitos do gênero *Aedes*, sendo que no Brasil o principal é o *Aedes aegypti*. O *Aedes aegypti* é um mosquito essencialmente urbano, que necessita de sangue para realizar a reprodução e que apresenta grande atividade e reprodução em ambientes de clima quente e úmido. Como o humano, em geral, propicia condições para a reprodução do mosquito (disponibilizando recipientes que podem acumular água e se tornarem criadouros), acaba por ser o animal mais próximo do habitat do mosquito, se tornando a maior vítima de suas picadas [17].

No Brasil, as primeiras epidemias ocorreram de 1846 a 1848, de 1851 a 1853, em

1916 e em 1923. A dengue foi erradicada do Brasil com a campanha da Organização Pan Americana de Saúde a partir de 1946. Após um grande progresso por décadas, o país finalmente se viu livre da doença, situação que durou por anos. O intuito desse programa era erradicar a febre amarela através do controle de seu vetor, que é o *Aedes aegypti*. Infelizmente, alguns países das Américas não alcançaram a erradicação e alguns abandonaram o programa. Uma nova epidemia de dengue ocorreu em 1981 e 1982, em Boa Vista [40]. Nos anos seguintes, a doença veio se espalhando por todo o país, chegando ao ponto de em 2008 estar presente em todos os estados brasileiros, como pode ser constatado no Informe Epidemiológico da Dengue realizado pela Secretaria de Vigilância [4].

De acordo com outro boletim epidemiológico do mesmo órgão, relativo ao balanço da dengue de janeiro a julho de 2007, a distribuição dos casos por porte do município no país foi a seguinte [7]:

- Cidades com menos de 100.000 habitantes: 44%;
- Cidades com população entre 100.000 e 500.000 habitantes: 27%;
- Cidades com população entre 500.000 e 1.000.000 habitantes: 16%;
- Cidades com mais de 1.000.000 habitantes: 13%.

Uma conclusão direta destes dados foi a grande ocorrência de dengue em municípios que não se constituem aglomerados urbanos. Ainda no boletim, concluiu-se o sucesso de iniciativas realizadas em grandes centros, como o “Plano Integrado de Ações de Controle da Dengue” na região metropolitana de Belo Horizonte, o “Pan Sem Dengue” na região metropolitana do Rio de Janeiro e o “Plano de Intensificação Verão 2007” no município de São Paulo [7].

Na maior parte dos municípios brasileiros, entretanto, as medidas têm se mostrado pouco efetivas ou simplesmente não existem.

É fato que a grande proliferação do *Aedes aegypti* está diretamente relacionada com a presença de humanos, por estes propiciarem o ambiente e o sangue necessários para a reprodução de maneira abundante. A presença do vírus em grande parte da população desse mosquito acaba por desencadear epidemias em épocas de clima propício em várias regiões do país. O ciclo da dengue é formado através da infecção das pessoas pela picada dos artrópodes e pela infecção destes ao levarem para dentro de seus corpos o sangue humano com o vírus. Felizmente, como constatado, programas bem estruturados voltados ao controle do mosquito são capazes de diminuir a incidência da doença.

Em Campinas, o primeiro foco de *Aedes aegypti* foi notificado em 1987. Casos de dengue ocorridos em 1986 foram considerados importados do Rio de Janeiro e em 1996 e 1997 foram notificados os primeiros casos autóctones. A primeira epidemia ocorreu no final de 1997 e início de 1998. De 1999 a 2005 o distrito de maior incidência de dengue foi o Distrito Sul de Campinas [13].

Muitos fatores têm sido associados à circulação de vetores e da virose, porém a dinâmica da transmissão não é totalmente conhecida. Com o intuito de realizar uma pesquisa capaz de contribuir na elucidação deste problema, foi elaborado por pesquisadores do Laboratório de Análise Espacial de Dados Epidemiológicos da Faculdade de Ciências Médicas da UNICAMP (epiGeo), o projeto Distribuição Espacial do Risco de Dengue em região do Município de Campinas [18].

O projeto conta com a colaboração de outros pesquisadores de diversas áreas. Para a simulação cenários, referentes ao espalhamento da doença no Distrito Sul de Campinas, torna-se necessária a modelagem matemática do fenômeno, com a criação de um modelo capaz de reproduzir com certa fidelidade o que se observa na vida real (dados colhidos em campo). A obtenção desses cenários se mostra importante por ter como objetivo a capacidade de simular a evolução da doença e, posteriormente, poder indicar medidas de controle.

O presente trabalho procura suprir esta necessidade. O modelo epidemiológico é baseado na modelagem compartimental, de acordo com a qual um indivíduo pertence a somente uma classificação a cada instante. No caso, um humano pode ser considerado suscetível, infectante ou recuperado, apenas. Leva-se em conta, também, o movimento aleatório de dispersão dos indivíduos no território ao longo do tempo. Para cada compartimento populacional, a modelagem é realizada através de uma equação diferencial parcial de difusão. Desta maneira, cria-se um sistema de equações, em que cada uma das equações corresponde à taxa de variação da quantidade de indivíduos em cada compartimento ao longo do tempo.

Takahashi propôs um modelo compartimental para a população de *Aedes aegypti* e, a partir do modelo matemático obtido, analisou possíveis métodos de controle do mosquito, chegando à conclusão de que o controle mecânico (eliminação de criadouros evitando o acúmulo de água em recipientes) se mostrava o mais eficaz e viável do que os controles biológico e químico [38].

Maidana e Yang realizaram uma modelagem da dengue incluindo não só as populações de mosquitos mas também as dos humanos [28]. Considerando uma área colonizada por mosquitos, a velocidade de espalhamento da doença foi determinada em função dos parâmetros do modelo. Também foram calculados valores limiares para os

parâmetros e os níveis da endemicidade resultantes.

Ambas as modelagens resultaram em sistemas de equações diferenciais parciais em função do tempo e em domínio espacial unidimensional. Foram analisadas frentes de onda e situações de equilíbrio. O presente trabalho tem como objetivo ir além de uma dimensão espacial, optando-se por estudar o problema evolutivo em uma região não-fictícia bidimensional, que é o Distrito Sul da cidade de Campinas. Escolhe-se ignorar a terceira dimensão espacial relativa à altura, uma vez que os mosquitos voam a cerca de até um metro do chão, altura em que os humanos geralmente se encontram, e, em comparação com a largura e a extensão da região, é uma grandeza irrelevante.

Os modelos resultantes são sistemas de equações que representam a dinâmica da doença através da caracterização dos diferentes compartimentos de humanos e de mosquitos. Foram criados com base nos trabalhos de Kermak e McKendrick, de acordo com o qual a taxa de passagem de suscetível para infectado depende da quantidade de encontros entre esses dois tipos, ou seja, é proporcional ao produto das quantidades de um e de outro na população [37].

Apesar de um modelo epidemiológico poder ser construído com base em grande quantidade de variáveis, procurando-se aproximá-lo ao máximo da realidade, em geral isso equivale a uma complexidade muito grande do modelo, o que na prática significa um sistema de várias equações diferenciais com muitas variáveis. O resultado acaba por ser a impossibilidade de se resolver analiticamente o sistema ou uma grande dificuldade em analisá-lo, tornando inviável a predição procurada.

Como este trabalho tem por objetivo obter simulações do espalhamento da doença em um domínio espacial real, há o fator da heterogeneidade e da difusão, que elevam a complexidade do problema. Sendo assim, os modelos resultantes são sistemas de equações diferenciais parciais. Aliada a isto, a presença de não-linearidade dos termos devido ao contato de mosquitos com humanos produz sistemas com certa complexidade, demandando maior tempo de simulação. Além disso, se maior a complexidade, torna-se mais difícil a realização de análises com o propósito de se compararem diferentes soluções obtidas com diferentes parâmetros utilizados. Mesmo com a anulação de alguns parâmetros e consequente simplificação do problema, não se sabe o que esperar.

A não-homogeneidade é um fator presente que notadamente influencia o fenômeno. Áreas com maior quantidade de lixo e, portanto, de criadouros para o vetor, são locais de maior risco para a contração da doença. Por outro lado, em tempos de seca, há uma menor proliferação do mosquito, diminuindo também a propagação da dengue em humanos.

Outro problema a ser resolvido relaciona-se com as características de não-exatidão

e de incerteza dos fenômenos naturais. A quantidade de criadouros e intensidade de chuvas não são sabidos com certeza nem se têm dados definitivos sobre sua influência na reprodução dos mosquitos. Além disso, tal influência pode ser oscilante. Ou seja, certa quantidade de criadouros e de precipitação não levam sempre à mesma taxa exata de reprodução de mosquitos. Além de não se terem os dados de entrada com exatidão (considerando-se quantidade de criadouros e de chuva incertos), não se sabe como eles influenciam, conjuntamente, a reprodução de mosquitos, de maneira exata (têm-se apenas regras do tipo: se há muito criadouro e muita chuva, há muita reprodução). A teoria clássica dos conjuntos não tem ferramentas específicas para esse tipo de informação. A teoria dos conjuntos fuzzy é mais adequada para essa situação.

Diante destas considerações, optou-se pela construção de um modelo também simples do ponto de vista matemático, com poucas equações. Mas, ao mesmo tempo, procura-se aumentar a fidelidade do modelo através da inserção de parâmetros fuzzy. E, procurando-se aliar simplicidade com realidade, são utilizadas bases de regras fuzzy para determinar parâmetros do problema. Ou seja, procura-se fazer como Missio [31], que utilizou o modelo compartimental SIR, de baixa complexidade, aliado à teoria de conjuntos fuzzy para obter mais representatividade do seu modelo de espalhamento da febre aftosa bovina .

Com o intuito de aliar certa fidelidade ao fenômeno biológico à viabilidade de um resultado confiável, neste trabalho são utilizados um método de solução numérica - o método dos Elementos Finitos, com discretização temporal de Crank-Nicolson -, que permite a obtenção de resultados numéricos sobre o espaço e ao longo do tempo; e a teoria dos conjuntos fuzzy, a qual acrescenta ao modelo maior aproximação à realidade, ao se considerar que possíveis elementos que influenciam no espalhamento da dengue são incertos.

São utilizados o *software* Gmsh para a geração da malha correspondente ao domínio discretizado (necessário para a implementação do método numérico) e o *software* MATLAB para a implementação do algoritmo criado para a resolução numérica do modelo matemático e a visualização dos resultados. No *software* MATLAB é utilizado o *Toolbox Fuzzy* para a manipulação dos parâmetros fuzzy.

Os principais objetivos deste trabalho são, portanto,

- Criar opções de modelos que representem a evolução da dengue, com aplicação no distrito sul da cidade de Campinas, levando em consideração as populações envolvidas (humanos e *Aedes aegypti*);
- Empregar ferramentas matemáticas que permitam:

- agregar ao modelo informações de natureza imprecisa (inerente a fenômenos biológicos), de maneira tratável matematicamente (através da teoria dos conjuntos fuzzy) e
- solucionar o modelo proposto – no caso, numericamente, através do Método dos Elementos Finitos, com discretização temporal de Crank-Nicolson;
- Construir um programa em ambiente MATLAB para a resolução do modelo, utilizando os métodos citados;
- Visualizar a evolução da doença em ambiente MATLAB;
- Analisar diferentes cenários a partir de diferentes parâmetros (condições iniciais ou coeficientes) estudados em parceria com pesquisadores do epiGeo.

### Próximos capítulos

De maneira sucinta, a organização do texto é apresentada a seguir.

No Capítulo 2 é realizado um breve relato da dengue, através da explicação dos agentes etiológicos, dos aspectos clínicos, do vetor e de um pequeno histórico. Tais informações são importantes para a motivação do estudo e para a modelagem matemática do fenômeno, realizada no Capítulo 3.

No Capítulo 3 são apresentados os processos de modelagem com três alternativas de modelos de sistemas de EDPs a serem implementados computacionalmente. Também é discutida a necessidade de se levarem em conta incertezas inerentes ao fenômeno, ocasionadas pela influência de fatores ambientais, cuja imprecisão é oriunda da falta de informação e da aleatoriedade.

A modelagem realizada resulta em sistemas de quatro, de cinco e de seis EDPs, sujeitas a condições iniciais e de contorno. Embora se possa demonstrar a existência de soluções para tais sistemas, estas não são conhecidas, ainda mais considerando-se parâmetros fuzzy e probabilísticos, de maneira que a resolução é aproximada por métodos numéricos, apresentados no Capítulo 4. Nesta parte do texto são apresentados o método dos Elementos Finitos, que aborda o problema em sua formulação fraca, realizando discretização do domínio espacial, e o método de Crank-Nicolson, de diferenças finitas, referente ao domínio temporal.

No Capítulo 5 é apresentada um pouco da teoria dos conjuntos fuzzy, de maneira que o leitor possa, ao final desse capítulo, entender o funcionamento do Sistema Baseados em Regras Fuzzy (SBRF), utilizados para se inferirem os valores dos parâmetros fuzzy do problema através dos dados de entrada referentes às condições ambientais. Tais

sistemas são atualmente muito utilizados na área de controladores. Também se mostram de grande importância na área biológica, que lida constantemente com variáveis de natureza incerta. Neste trabalho, as variáveis de entrada para os sistemas fuzzy são relacionadas a fatores ambientais (presenças de humanos e de recipientes e quantidade de chuva). Tais variáveis podem ser quantificadas por termos da linguagem (“alta”, “baixa”), os quais são modelados por conjuntos fuzzy (podendo apresentar também natureza aleatória). Elas influenciam a reprodução e a dispersão do mosquito, de maneira que os parâmetros representativos nos sistemas de EDPs destes são saídas do SBRF.

No Capítulo 6 as ferramentas estudadas durante o trabalho são acopladas originando um algoritmo para a resolução de cada um dos modelos propostos. Um fluxograma representativo é montado para um melhor entendimento e, em seguida, resultados e comentários de simulações são apresentados.

Por fim, no Capítulo 7 são comentadas as conclusões e as perspectivas de possíveis trabalhos futuros relacionados ao presente trabalho.

# Capítulo 2

## A dengue

Como já dito na introdução, a dengue é considerada como uma das prioridades da Organização Pan-Americana de Saúde (OPAS) [34]. É uma doença infecciosa aguda de curta duração, causada por um arbovírus, do gênero *Flavivírus* e possui gravidade variável, podendo levar ao óbito em alguns casos. Mas em geral é benigna e, cerca de 10 dias após o início dos sintomas, o paciente já está recuperado por completo. Apesar de não apresentar taxas altas de mortalidade, é uma doença que causa preocupação, por atingir de 50 a 100 milhões de pessoas em mais de cem países, a cada ano. No mesmo período, cerca de 550 mil doentes necessitam de hospitalização e 20 mil morrem em consequência da doença [5].

Os seus vetores são os artrópodes do gênero *Aedes*, sendo que o *Ae. aegypti* é o principal transmissor no Brasil. O vírus não passa de pessoa a pessoa, necessitando do mosquito como intermediário. Como ainda não foi desenvolvida uma vacina para a doença, medidas de controle do vetor são a principal arma no combate à dengue. Diante do princípio que o *Ae. aegypti* é muito bem adaptado aos ambientes urbanos e ao clima quente e úmido, necessitando de água parada e sangue humano para se reproduzir, não é de se estranhar que tenha encontrado no Brasil um território propício para se instalar. Planos de controle são, portanto, fundamentais neste país para se evitarem epidemias. Algumas iniciativas de abrangência regional e até continental, como citado na Introdução, se mostraram eficientes na retenção do espalhamento da doença [7], [40].

Trabalhos baseados em modelagem matemática como o de Takahashi [38] e a experiência de planos como os citados anteriormente mostraram que uma das principais armas de combate ao vetor é tornar o ambiente menos viável à sua proliferação, através da eliminação de possíveis criadouros. O controle mecânico (medidas dirigidas aos recipientes, constituindo-se na sua remoção ou alteração de suas condições de maneira a não permitir o acúmulo de água e a proliferação das formas imaturas de mosquito) apresenta



menor custo e risco à população e ao meio ambiente, se comparado com os controles químico (uso de inseticidas) e biológico (uso de bioinseticidas e de modificação genética). Entretanto, estes últimos não podem ser descartados como alternativas, sendo muitas vezes utilizados, mas quase sempre visando a eliminação do mosquito em sua fase larval.

Justificando uma ação mais direcionada à população adulta do mosquito, Thomé [39] resolve um problema de controle ótimo no qual são minimizados o custo com inseticida, o custo com a produção de mosquitos irradiados (estéreis) e o custo social (número de mosquitos fêmeas fertilizadas), após realizar modelagem matemática das populações do vetor.

É necessário, portanto, conhecer o comportamento da doença e do vetor para a realização de uma modelagem plausível do fenômeno e, com base nos resultados obtidos, um controle eficiente do vetor e, conseqüentemente, da doença.

## 2.1 Agente etiológico e aspectos clínicos

O agente causador da dengue é um arbovírus (vírus “*arthropode-borne*”, ou seja, um vírus cujo vetor é um artrópode), mais especificamente um flavivírus pertencente à família Flaviviridae. Os flavivírus têm como vetores mosquitos e carrapatos e como hospedeiros humanos, macacos, suínos, pássaros e pequenos mamíferos [33].

Para poder ser considerado um arbovírus e se perpetuar, o vírus tem que ser capaz de se multiplicar tanto no organismo do hospedeiro vertebrado quanto no do vetor hematófago. Além disso, é necessário que esteja presente no sangue do hospedeiro e que nele seja capaz de se reproduzir a uma taxa suficiente para que seja carregado no pequeno volume ingerido durante a picada do inseto. No corpo do inseto, é preciso que alcance as glândulas salivares para direcionar o vírus para a infecção de hospedeiros. Um ciclo completo de infecção ocorre quando o vírus é transmitido pelo vetor artrópode e amplificado em um hospedeiro sem imunidade prévia (reservatório), que permite a reinfecção de outros artrópodes. Somente a fêmea da espécie funciona como vetor para o vírus, pois somente ela necessita ingerir sangue para a maturação dos ovos. Um período de tempo obrigatório, chamado de período de incubação extrínseca, deve transcorrer até que o vírus tenha se replicado o bastante para que a saliva do vetor contenha suficiente vírus para transmitir uma dose infectiva. Para a maioria dos vírus, tal período varia de 7 a 14 dias [25]. Além da transmissão por vertebrados, alguns arbovírus são transmitidos por passagem vertical “transovariana” do artrópode fêmea para a sua prole.

Como os humanos propiciam ao *Aedes aegypti* o ambiente ideal para ele se reproduzir (através da disponibilização de recipientes que podem acumular água), em geral são os

mamíferos mais próximos e acabam por ser as maiores vítimas de suas picadas [17]. Outros animais também podem ser vítimas, mas o principal hospedeiro é, sem dúvidas, o ser humano [23].

Em geral, as infecções causadas por arbovírus são relativamente benignas, muitas vezes sem apresentar sintomas significativos ou apresentando as mesmas características de um resfriado. Entretanto, podem ocorrer algumas doenças mais graves, como a meningite asséptica grave e a encefalite ou doença hemorrágica, esta última podendo ser causada pelo vírus da dengue.

O vírus da dengue pode se apresentar sob quatro diferentes sorotipos: DEN-1, DEN-2, DEN-3 e DEN-4. A doença pode se manifestar de duas formas: dengue clássica ou hemorrágica. No entanto, os sintomas apresentados não diferem devido à diferença no sorotipo contraído. A determinação do tipo do vírus da dengue que causou a infecção é irrelevante para o tratamento da pessoa doente. A dengue clássica causa apenas desconforto. Inicia-se com febre alta ( $39^{\circ}\text{C}$  a  $40^{\circ}\text{C}$ ), podendo apresentar diversos outros sintomas, dentre os quais

- cefaleia
- prostração
- mialgias (dor muscular, dor retro-orbitária - dor ao redor dos olhos)
- náusea, vômito, dor abdominal
- manchas vermelhas pelo corpo

A maioria das pessoas, após quatro ou cinco dias, começa a melhorar e recupera-se por completo, gradativamente, em cerca de dez dias.

Em alguns casos (a minoria), nos três primeiros dias depois que a febre começa a ceder, pode ocorrer diminuição acentuada da pressão sanguínea. Esta queda da pressão caracteriza a forma mais grave da doença, chamada de dengue “hemorrágica” (DHF). A diminuição da pressão sanguínea deve ser tratada rapidamente, uma vez que pode levar ao óbito. Outros sinais de alerta são

- dor abdominal intensa e contínua (não cede com medicação usual)
- agitação ou letargia
- vômitos persistentes
- pulso rápido e fraco

- sangramentos espontâneos e/ou Prova do Laço positiva
- taquicardia

dentre outros, de acordo com a cartilha emitida pela Defesa Civil [8]. Segundo a Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental (CETESB), a dengue grave pode acontecer mesmo em quem tem a doença pela primeira vez [36].

Murray afirma que na reinfeção com outra das quatro cepas relacionadas, o vírus pode causar DHF e a síndrome de choque da dengue (DSS) [33]. Justifica explicando que anticorpos não-neutralizantes promovem a internalização do vírus em macrófagos, fazendo com que células T de memória fiquem ativadas, liberem citocinas inflamatórias, e iniciem reações de hipersensibilidade. Estas reações resultam no enfraquecimento e na ruptura dos vasos, hemorragia e perda de plasma, levando aos sintomas de choque e hemorragia interna. Exemplifica com o caso de Cuba, em 1981, em que o vírus da dengue do tipo 2 infectou uma população previamente exposta ao vírus da dengue do tipo 1 entre 1977 e 1980, levando a uma epidemia com mais de 100.000 casos de DHF/DSS e 168 óbitos.

De acordo com a CETESB, não há um consenso sobre a manifestação da dengue em sua forma hemorrágica, havendo algumas hipóteses. Uma é a de que a exposição sequencial a um segundo diferente tipo de vírus seria a causa (a mesma de Murray). Outra é de que o tipo 2 do vírus estaria mais associado ao tipo grave da doença. Mais uma é que a dengue hemorrágica dependeria da maior virulência de determinadas cepas do vírus, isto é, existiriam formas virais mais agressivas do que outras [36].

Um consenso é que não existem tratamentos para as doenças causadas pelos arbovírus que não seja o cuidado de suporte. O meio mais fácil de prevenir a propagação de qualquer arbovírus é a eliminação do vetor e seu ambiente de reprodução. Para a proteção pessoal, é aconselhado o uso de repelentes para mosquitos e de roupas que cubram todo o corpo. De acordo com Murray, a vacina contra o vírus da dengue ainda não foi desenvolvida por causa do potencial risco para o aumento da patogênese devido a uma pré-imunização, quando em confrontos subsequentes com vírus selvagens [33].

## 2.2 O vetor

O *Aedes aegypti* é um artrópode pertencente à família Culicidae. Apresenta duas fases interdependentes em seu ciclo de vida: a aquática, que inclui três etapas de desenvolvimento - ovo, larva e pupa -, e a terrestre ou alada, que corresponde ao mosquito adulto.



Figura 2.1: *Aedes aegypti* em sua fase adulta. Fonte: Site da Dengue [6].

A partir da eclosão dos ovos até a idade adulta, a duração do ciclo de vida aquático é de pouco mais de uma semana, dependendo de condições da água, da temperatura e da alimentação da larva. A temperatura ideal para a proliferação do *Aedes aegypti* estaria em torno de 30 a 32 °C de acordo com a CETESB [36]. O *Ae. aegypti* vive relativamente pouco, por volta de 30 dias.

A fêmea, após a cópula, suga o humano ou um animal para a maturação dos ovos. Procura então um local com água limpa e parada para desovar, ao final de cerca de três dias. Como o sangue é utilizado para a reprodução, apenas, os machos não picam, se alimentando de suco de plantas.

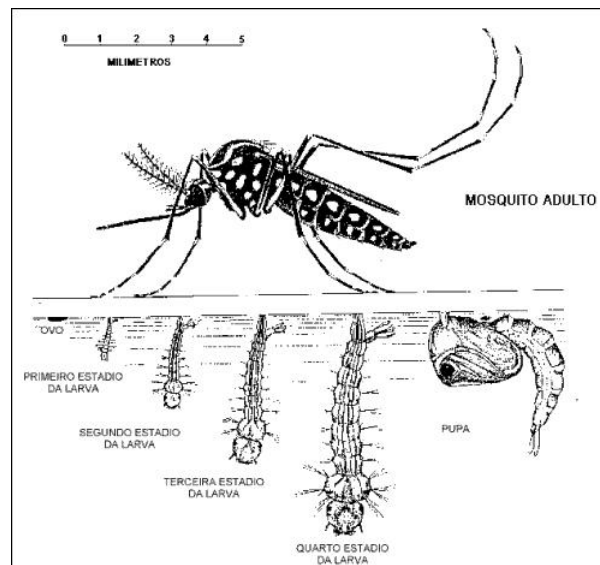


Figura 2.2: Biociclo do *Aedes aegypti*. Fonte: Site da Dengue [6].

As fases do biociclo do mosquito estão ilustradas na Figura 2.2 e são caracterizadas a seguir:

- *Ovo*: Os ovos são depositados pelas fêmeas na parede interna dos recipientes acima da superfície da água. Após a postura tem início o período de incubação, que em

condições favoráveis dura de 2 a 3 dias, quando estarão prontos para eclodir. A resistência à dessecação aumenta conforme os ovos ficam mais velhos, ou seja, a resistência aumenta quanto mais próximos estiverem do final de desenvolvimento embrionário. Este completo, eles podem se manter viáveis por vários meses. Em contato com a água, os ovos levam de 10 a 30 minutos para eclodir.

- *Larva*: As larvas são providas de grande mobilidade e têm como função primária o crescimento. Passam a maior parte do tempo alimentando-se de substâncias orgânicas, bactérias, fungos e protozoários existentes na água, nadando e vindo à superfície para respirar. Não toleram elevadas concentrações de matéria orgânica na água. A duração da fase larval, em condições favoráveis é de 5 a 10 dias, podendo se prolongar por algumas semanas.
- *Pupa*: A pupa não se alimenta, apenas respira e é dotada de boa mobilidade, se movimentando por contrações. A duração da fase, em condições favoráveis de temperatura, é de 2 dias em média.
- *Adulto*: Macho e fêmea alimentam-se de néctar e sucos vegetais, sendo que depois do acasalamento a fêmea necessita de sangue para a maturação dos ovos. Vivem de dez a quarenta e dois dias, em média .

Em sua fase adulta, o mosquito adulto tem colorido escuro, rajado de branco, com anéis brancos nas pernas. O tórax e o abdomen apresentam manchas prateadas nas partes laterais, como é descrito na cartilha de combate lançada pelo Ministério da Saúde [10].

## 2.3 Breve histórico

### Dengue no Mundo

As primeiras epidemias de dengue notificadas ocorreram em 1779-1780 na Ásia, na África e na América do Norte, dando início a ciclos com longos intervalos de tempo entre grandes surtos (10 a 40 anos), como é descrito pelo Centers for Disease Control and Prevention [20]. Uma pandemia teve início no Sudeste Asiático depois da Segunda Guerra Mundial e se espalhou pelo mundo. Epidemias causadas por múltiplos sorotipos se tornaram mais frequentes, a distribuição do vírus da dengue e de seus vetores se expandiram e a DHF surgiu na região do Pacífico e nas Américas.

## Dengue na América do Sul

Na América do Sul, as primeiras epidemias de dengue foram registradas no Brasil em 1846-1848, 1851-1853, 1916 e 1923. Na Venezuela ocorreu uma em 1941-1946 e, na década seguinte, foi a vez do Peru.

Em 1947, um programa de erradicação do *Aedes aegypti* foi implementado pela OPAS, com o intuito de se controlar a febre amarela nas Américas. Durante as três primeiras décadas houve progressos significativos e vários países se viram livres do mosquito, da dengue e da febre amarela. O Brasil foi um dos grandes beneficiados, permanecendo por muitos anos sem surtos em seu território. Infelizmente, alguns países, incluindo Argentina, Guiana Francesa, Estados Unidos, Venezuela e vários países caribenhos, não alcançaram a erradicação. Algumas nações acabaram por abandonar o programa e logo países livres do *Ae. aegypti* gradualmente foram reinfestados, fato acompanhado da ocorrência de dengue clássica e hemorrágica. A Colômbia, que havia alcançado a erradicação, foi vítima de uma epidemia de dengue na década de 70 e logo Guiana, Guiana Francesa, Suriname e Venezuela também sofreram com as infecções. Na década de 80, Bolívia, Equador, Paraguai, Peru e Brasil também notificaram epidemias.

## Dengue no Brasil

Apesar de ter sido vítima das primeiras epidemias de dengue na América do Sul, o Brasil foi capaz de ficar por décadas sem a notificação de surtos em seu território, com o programa da OPAS, iniciado em 1947. Em 1958 foi certificada, pela OPAS, a erradicação do *Ae. aegypti*. Mas, devido à descontinuidade do plano por outros países das Américas, em 1981-1982 uma nova epidemia foi notificada no estado de Roraima, em Boa Vista, na região Amazônica próximo à Guiana e à Venezuela. Em 1986-1987 ocorreu a mais importante epidemia da história do país, no estado do Rio de Janeiro, onde centenas de milhares de pessoas foram afetadas. Em 2008 a doença já alcançou todas as regiões do país.

## Dengue em Campinas

O primeiro foco de *Aedes aegypti* na cidade de Campinas foi notificado em 1987, sendo eliminado em seguida. Nos anos posteriores ocorreram mais notificações e em 1991 assumiu-se a existência de infestação domiciliar por este vetor [18].

Entretanto, em 1986 já haviam sido notificados vários casos de dengue, sendo classificados como importados da cidade do Rio de Janeiro. Os primeiros casos autóctones

da doença no município foram registrados em 1996 e 1997. Uma epidemia foi notificada em 1997-1998. Nos anos seguintes a transmissão diminuiu bastante, mas em 2002 ocorreu uma nova epidemia de grandes proporções. Nada parecido com a quantidade de casos registrados em 2007, como se pode observar na Tabela 2.1.

De acordo com a Secretaria Municipal de Saúde de Campinas, o distrito sul apresentava os índices mais elevados de Coeficiente de Incidência de Dengue (casos por 100.000 habitantes) de 2001 a 2005 [13].

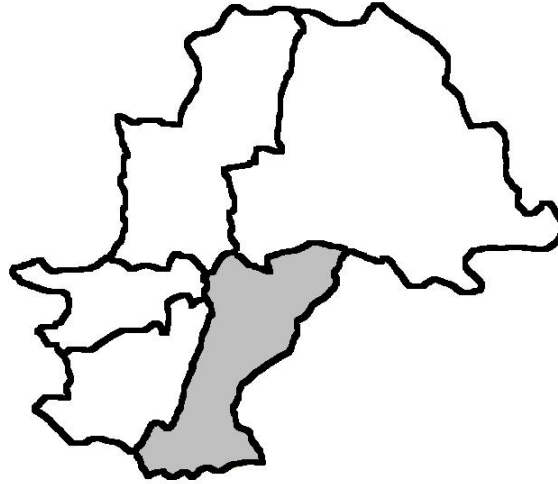


Figura 2.3: Cidade de Campinas dividida em distritos. A região em destaque (distrito sul) é o domínio a ser estudado.

Diante deste cenário, pesquisadores do epiGeo desenvolveram um projeto cujo objetivo é estimar a distribuição espacial do risco de dengue, através da realização de um estudo caso-controle espacial [18]. Elaborado em 2006 e com suporte da FAPESP, pesquisas a campo puderam ser desenvolvidas, permitindo a obtenção de dados a respeito de imóveis infestados com presença de larvas do mosquito, localização de casos positivos da doença em humanos, informação sobre presença de lixo, esgoto, água parada, etc.

De acordo com informe de Fevereiro de 2005 da Secretaria Municipal de Saúde de Campinas [14], uma força tarefa emergencial estava sendo organizada no distrito sul para conter o surto. Provavelmente por este motivo nos anos seguintes a mesma região parou de ser destaque no número de casos de dengue, apresentando-se com o segundo menor coeficiente de incidência da doença entre os cinco distritos no primeiro semestre de 2007, na maior epidemia da década, com mais de cinco mil casos confirmandos (*cf.* Tabela 2.1, divulgada pela Secretaria Municipal de Saúde de Campinas [13]) e mais de vinte mil notificados. A conscientização e a tomada de medidas de controle do vetor costumam ser a melhor maneira de se combater a epidemia.

Tabela 2.1: Série Histórica de Casos de dengue autóctones confirmados por mês em Campinas.

	<b>Jan</b>	<b>Fev</b>	<b>Mar</b>	<b>Abr</b>	<b>Mai</b>	<b>Jun</b>	<b>Jul</b>	<b>Ago</b>	<b>Set</b>	<b>Out</b>	<b>Nov</b>	<b>Dez</b>
1998	238	331	562	187	32	11	6	4	7	7	5	8
1999	7	12	27	49	8	3	1	3	3	0	0	4
2000	6	11	21	15	8	4	4	3	0	2	2	5
2001	32	38	160	223	136	21	13	10	2	2	5	86
2002	224	364	348	266	156	50	8	9	6	4	7	22
2003	90	91	126	76	28	7	2	0	0	1	0	3
2004	9	8	6	3	1	0	0	0	0	0	0	3
2005	5	7	8	38	29	17	8	2	2	0	0	3
2006	8	24	186	293	128	32	7	17	10	17	10	11
2007	157	828	2.891	3.050	1.903	207	53	12	26	36	37	18
2008	35	28	57	68	18	13	7	8	1	7	6	10
2009	3											

Fonte: Secretaria Municipal de Saúde de Campinas [15].



# Capítulo 3

## Modelagem

### 3.1 Introdução

A modelagem matemática é utilizada em diversas áreas do conhecimento na tentativa de explicar fenômenos do interesse humano. Em geral, o número de variáveis envolvidas é grande, e muitas de difícil mensuração. Algumas possuem importância fundamental no fenômeno. Cabe ao criador do modelo matemático escolher, a partir de algumas técnicas, as variáveis a serem utilizadas, uma vez que a complexidade do sistema cresce enormemente a cada nova inserção. Algumas são escolhidas automaticamente. Outras geram ao pesquisador a grande dúvida: vale à pena tanta complexidade a mais em troca de uma maior precisão? Essa complexidade permite o modelo ser manipulável? Essa precisão é realmente necessária?

Neste capítulo, procura-se realizar uma modelagem que alie certa fidelidade na representação do fenômeno à possibilidade de obtenção de resultados (no caso, numéricos) e sua visualização gráfica.

### 3.2 Dinâmica vital, difusão e epidemiologia

Para a modelagem matemática do espalhamento da dengue, utilizam-se informações a respeito da taxa de variação das populações envolvidas no fenômeno. Este é um procedimento bastante empregado em modelagem e, em geral, os termos utilizados não diferem muito de um modelo para ou outro, sendo que as suas combinações e as definições dos parâmetros acabam por tornar o sistema de equações compatível com o fenômeno estudado. Nesta seção são apresentados os termos da modelagem matemática mais utilizados em estudos de populações e que serão empregados neste trabalho: modelos de dinâmica vital, de epidemiologia e de difusão de partículas (ou dispersão de

seres vivos).

### 3.2.1 Modelos de dinâmica vital

O modelo mais simples utilizado para representar o crescimento de uma população  $P = P(t)$ , variando no tempo ( $t$ ), é o malthusiano, caracterizado pela equação diferencial ordinária (3.1):

$$\frac{dP}{dt} = cP \quad (3.1)$$

em que  $c$  é uma constante real, denominada taxa de crescimento intrínseca. De acordo com este modelo, a população  $P$  varia proporcionalmente à quantidade existente de indivíduos no momento. Ela pode aumentar indefinidamente se  $c > 0$ , ser constante se  $c = 0$  ou diminuir tendendo ao valor nulo se  $c < 0$ .

Este não é um modelo muito adequado para a maioria das populações, principalmente ao se considerarem períodos longos de tempo, em que há uma saturação do ambiente e escassez de alimentos ou outros fatores que influenciem o crescimento da espécie. Entretanto, para pequenas populações em períodos curtos de tempo, de maneira que não haja muitas limitações para a sobrevivência dos indivíduos, o modelo malthusiano fornece uma boa estimativa. Essa boa aproximação aliada à simplicidade do modelo faz com que seja bastante popular e muito empregado na modelagem de diversos fenômenos biológicos.

Mas caso o período de tempo não seja tão curto e haja nitidamente uma limitação no crescimento da espécie devido à escassez de recursos ambientais como espaço ou alimentos, um modelo bastante utilizado é o de Verhulst [3]:

$$\frac{dP}{dt} = c \left( 1 - \frac{P}{K} \right) P \quad (3.2)$$

em que  $c$  e  $K$  são constantes reais positivas.  $K$  corresponde à capacidade de suporte do meio, de maneira que, enquanto  $P < K$ , a população continua em crescimento; se  $P = K$  a população permanece em valor constante; e se  $P > K$  a quantidade de indivíduos decresce assintoticamente em direção ao valor  $K$ . Em outras palavras,  $K$  é o número máximo que o ambiente suporta de indivíduos da espécie  $P$ .

Há muitos outros modelos de dinâmica vital, de complexidades variadas. Os de Malthus e de Verhulst são os mais populares devido à sua simplicidade, sendo os únicos abordados neste trabalho.

Uma outra ideia muito presente em trabalhos de modelagem matemática, principalmente na área da epidemiologia, é a modelagem do fenômeno obedecendo o princípio

da ação das massas, a ser apresentada a seguir.

### 3.2.2 O modelo SIR

Hamer [24] postulou que a propagação de epidemias segue o princípio da ação das massas, de acordo com o qual a propagação de uma epidemia depende da taxa de contato entre indivíduos suscetíveis e infectantes. Portanto, depende da quantidade existente dessas duas populações.

De acordo com Yang [41], é um dos conceitos fundamentais da epidemiologia matemática, o qual dá origem ao primeiro modelo compartimental SIR clássico, formado pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= -\beta SI \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta SI - \sigma I \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= \sigma I\end{aligned}\tag{3.3}$$

em que  $S = S(t)$  corresponde à densidade de indivíduos suscetíveis,  $I = I(t)$  à densidade de infectados e  $R = R(t)$  à densidade de recuperados em função do tempo (variável  $t$ ). É considerado que, a cada encontro entre suscetível e infectado, existe a possibilidade de o suscetível se tornar infectado. Com base nesta hipótese, a população de suscetíveis passa ao compartimento de infectados a uma taxa  $\beta SI$ . E após  $1/\sigma$  unidades de tempo no compartimento dos infectados, o indivíduo passa a ser recuperado.

De acordo com o modelagem, cada indivíduo precisa pertencer a um dos compartimentos ( $S$ ,  $I$  ou  $R$ ) e só pode pertencer a apenas um. Uma vez recuperados, tornam-se imunes à doença até o fim do tempo analisado.

Tal modelo pode ser representado pelo diagrama da Figura 3.1, em que são apresentadas as células compartimentais e suas taxas de transferência e decaimento.

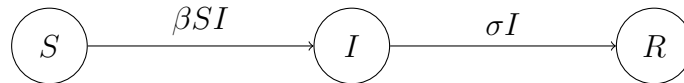


Figura 3.1: Esquema compartimental representativo do modelo SIR. As linhas contínuas indicam transferências entre compartimentos, nas direções das setas.

Este é um modelo simples, considerado didático para a apresentação dos modelos epidemiológicos. Para muitas doenças, não é preciso o suficiente. Para o objetivo deste trabalho, outros termos e variáveis têm que ser inseridos, obtendo-se maior compatibilidade com certas características da doença estudada.

### 3.2.3 Termos de dispersão

A modelagem do comportamento de substâncias em um domínio espacial, ao longo do tempo, leva em consideração o seu espalhamento devido ao movimento aleatório de suas partículas. Ao se pingar uma gota de tinta em um recipiente com água nota-se que a substância colorida tende a se espalhar, passando de pontos com maior concentração para pontos de menor concentração. Tal fenômeno é chamado de *difusão* e é representado matematicamente pela equação diferencial parcial de difusão:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \text{div}(\alpha \nabla C) \quad (3.4)$$

em que  $C$  é a concentração da substância e  $\alpha$  é uma função que pode assumir valor constante ou variar de acordo com o tempo, o espaço e/ou as características do meio, chamada de coeficiente de difusão.

A dedução para esta equação pode ser encontrada no livro de Edelstein-Keshet [19]. Na mesma referência bibliográfica, a autora afirma que populações de seres vivos também seguem um princípio semelhante de espalhamento aleatório, o qual é modelado pela mesma equação apresentada para difusão de partículas. Um dos primeiros a utilizar tal analogia foi Skellam [37]. Atualmente, tal modelagem é empregada amplamente em estudos de populações e a única diferença para a equação de difusão está no nome do coeficiente  $\alpha$ , que passa a ser chamado de coeficiente de dispersão.

Portanto, no caso de as populações também serem dependentes de variáveis espaciais, podem-se aliar os modelos anteriormente apresentados de dinâmica vital e/ou de epidemiologia com os termos de dispersão, obtendo-se a evolução das populações estudadas ao longo do tempo e do espaço. Este é o objetivo das próximas seções, em que são apresentados modelos do espalhamento da dengue através da combinação dos diferentes termos apresentados e da inserção de novas variáveis.

## 3.3 Considerações iniciais para o modelo da dengue

Como relatado anteriormente (seção 2.1), o ser humano só é infectado ao ser picado por um mosquito que tenha o vírus em suas glândulas salivares. O mosquito fêmea,

por sua vez, pode passar o vírus aos ovos, mas, de acordo com o recente trabalho de Zeidler et al. [42] esse tipo de transmissão ocorre em baixa frequência, de tal maneira que a persistência da dengue em meio urbano pode não depender desse fenômeno. Em conjunto com o fato que a maior vítima de picadas em ambiente urbano ser o homem, considera-se, portanto, que o sangue adquirido de um humano infectante seja a maneira principal para a continuidade do vírus.

Outro fator essencial para a modelagem é o conceito de homogeneidade das populações. Mesmo diferentes em aspectos como sexo, idade, poder aquisitivo, estado de saúde, localidade, considera-se que cada ser humano tem chance igual de contrair a doença. Da mesma maneira, todos os mosquitos suscetíveis possuem a mesma chance de adquirir o vírus da dengue após picar um humano infectante.

Essas são considerações que tornam viável a construção do modelo matemático. O objetivo aqui é estudar o espalhamento da doença no Distrito Sul da cidade de Campinas como um todo, e não a transmissão indivíduo a indivíduo.

Na realidade, a transmissão do vírus do mosquito para o humano, se estudado caso a caso, depende de fatores microdeterminantes relacionados ao hospedeiro, como sexo, idade, estado imunitário, presença de enfermidades prévias, estado nutricional. Também se mostram importantes fatores relacionados ao vetor, uma vez que um baixo nível de viremia ou de virulência da cepa pode não ser suficiente para a instalação do flavivírus no corpo humano [16].

De maneira semelhante, a transmissão do vírus de pessoa para mosquito também não é homogênea no domínio, sendo que o sucesso de transmissão em cada caso depende de características dos indivíduos envolvidos.

Neste trabalho serão assumidas as citadas hipóteses de homogeneidade, de maneira que as chances de infecção de um indivíduo só dependerão da quantidade de possíveis encontros entre indivíduos suscetíveis de uma espécie e infectantes da outra.

A duração da fase “infectante” para os humanos também varia de caso para caso, dependendo da capacidade do sistema imunológico do indivíduo no momento. Para a modelagem também se considerará uma média, de maneira que o coeficiente correspondente do modelo seja fixo.

Neste trabalho, as classificações “infectante” e “infectado” são consideradas equivalentes. Ou seja, se um indivíduo adquire o vírus da dengue, já se considera que pode passar o vírus adiante. No caso do homem, o período de incubação (período que vai da contração do vírus aos primeiros sintomas) é incluso no tempo de duração da fase “infectado”, como simplificação. Se um humano não tem mais a capacidade de transmitir a doença, então é dito recuperado (que aqui equivale a imune ou também a removido,

caso ocorra óbito). Apesar de não ser capaz de transmitir a dengue nos primeiros dias após ter contraído o flavivírus, por não tê-lo em quantidade suficiente, considera-se que o mosquito é capaz de infectar humanos logo após ingerir o vírus. E, uma vez que tenha contraído o vírus, o mosquito o carregará para o resto de sua vida.

Focando nos objetivos do trabalho, certos fatores de heterogeneidade podem ser ignorados. Como mencionado, pretende-se obter cenários do espalhamento da dengue em determinado domínio. O modelo compartimental só foi possível de ser criado devido a essa hipótese simplificadora que ignora a heterogeneidade da população.

Por outro lado, a construção do modelo sobre um domínio espacial permite agregar informações em cada coordenada  $(x, y)$ . O estado do ambiente, por exemplo, pode ser essencial na previsão da população de mosquitos, uma vez que a reprodução do *Aedes aegypti* depende, por exemplo, de um clima favorável (quente e úmido) e da presença de potenciais criadouros (recipientes com água). Se possível incorporar ao modelo, variáveis como estas podem tornar mais realista a modelagem, gerando uma solução mais precisa. Quanto à alimentação dos mosquitos, considera-se abundante, uma vez que é constituída de seiva e sucos vegetais, presentes em praticamente todo o domínio estudado.

Outro assunto importante a ser abordado para a realização da modelagem é o domínio temporal. A definição do intervalo de tempo em que se analisará o comportamento da doença define termos a serem utilizados e termos a serem ignorados nas equações do modelo.

A dengue é uma doença cíclica, sendo que o maior número de casos no Brasil ocorre entre janeiro e maio, época de maiores temperatura e umidade, clima favorável à reprodução e atividade do *Aedes aegypti*. Por este motivo, o período de tempo considerado é de poucos meses. É tempo suficiente para várias gerações de mosquitos, mas insuficiente para se levar em conta a dinâmica vital humana. Na modelagem a ser realizada, portanto, consideram-se taxas de nascimento e morte de mosquitos, bem como a passagem do estado suscetível para o infectado do vetor, e admitem-se apenas passagens de suscetíveis para infectados e de infectados para recuperados no caso dos humanos.

Os humanos não voltam a contrair o sorotipo pelo qual já foram infectados, por se tornarem imunes a ele de forma duradoura [9], e passam alguns meses imunes aos demais tipos. Portanto, considera-se que o intervalo de tempo de simulação é considerado curto para que eles percam a imunização e voltem a ficar doentes, caso surja uma nova cepa na região. Os mosquitos, por sua vez, não passam ao estado de recuperados, pelo fato de o vírus se instalar de maneira permanente em seu organismo.

Essas condições são consideradas neste trabalho como essenciais. A partir destas

considerações, a inserção de novas suposições pode resultar em diferentes modelos. Por enquanto, podem-se listar as seguintes hipóteses:

- Os humanos só podem assumir os estados de suscetível, de infectante e de recuperado e necessariamente têm que assumir algum desses estados;
- Os humanos suscetíveis só podem se tornar infectantes através da picada de um mosquito infectante;
- Existe uniformidade das populações de humanos e de mosquitos com relação à transmissão do vírus;
- Existe uniformidade dos humanos quanto ao tempo em que são considerados infectantes;
- O tempo é insuficiente para se considerar a dinâmica vital dos humanos;
- O tempo é suficiente para se considerar a dinâmica vital dos mosquitos;
- O tempo é insuficiente para se considerar a perda de imunidade dos humanos recuperados;
- Uma vez que tenha adquirido o vírus da dengue, um mosquito o carrega pelo resto de sua vida;
- O ambiente influencia a reprodução dos mosquitos.

### 3.4 Modelagem da população de humanos

Baseando-se nos conceitos apresentados na subseção anterior, procura-se formular uma modelagem intuitiva e determinística para representar a evolução da dengue na população dos humanos, considerando-se as interações entre humanos e mosquitos.

No modelo a ser apresentado, considera-se que, aumentando-se a quantidade de mosquitos presentes em um ponto no espaço, aumentam as chances de um humano se contaminar e, conseqüentemente, aumenta a taxa de passagem de humanos do compartimento de suscetíveis para infectantes (segundo o princípio da ação da massas). Como tal taxa é dependente do número de encontros entre humanos e mosquitos (e, conseqüentemente, da quantidade de mosquitos), em analogia ao modelo SIR representado

pelo sistema (3.3) pode-se considerar o seguinte sistema para a modelagem da evolução da doença em humanos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= -\beta SM \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta SM - \sigma I \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= \sigma I\end{aligned}\tag{3.5}$$

em que  $M = M(x, y, t)$ ,  $S = S(x, y, t)$ ,  $I = I(x, y, t)$  e  $R = R(x, y, t)$  representam, respectivamente, as densidade populacionais de mosquitos, humanos suscetíveis, humanos infectantes e humanos recuperados (e imunes), nas coordenadas  $(x, y)$  do domínio espacial e no instante de tempo  $t$ . Como no modelo SIR apresentado inicialmente, uma proporção dos encontros entre humanos e mosquitos geram infecção dos humanos. Ou seja,  $M$  pode ser um compartimento representando os mosquitos infectantes ou um compartimento representando toda a população de mosquitos, na qual está presente, ao menos em uma parcela, o vírus da dengue.  $\beta$  aqui é uma constante, indicando uniformidade no espaço e no tempo quanto ao potencial de um mosquito infectar um humano. Como já citado anteriormente,  $\sigma I$  é a taxa de passagem do compartimento de humanos infectantes para o de recuperados e, conseqüentemente,  $1/\sigma$  é o tempo para um indivíduo infectante se curar da doença, passando a ser um recuperado e imune.

Com este modelo da população de humanos em mãos, bastará a modelagem da população de mosquitos para se obterem os sistemas completos da evolução da dengue. Todas as abordagens a serem apresentadas a seguir utilizarão estas equações para os compartimentos dos humanos.

## 3.5 Modelagem da população de mosquitos e modelagem da dengue

### 3.5.1 Modelo de 4 compartimentos

No modelo a ser proposto, a dinâmica vital do mosquito é considerada malthusiana (a taxa de variação da população é diretamente proporcional à quantidade de indivíduos existente), uma vez que este modelo é simples e bem adequado para um período curto



de tempo e de condições favoráveis para a reprodução. (Posteriormente será comentado a respeito de uma abordagem para a taxa de nascimento específica de mosquitos  $v$  do modelo a ser apresentado, de maneira a permitir que ela seja variável e o modelagem seja mais realista.) Considera-se apenas um compartimento para a população de mosquitos,  $M$ , no qual admite-se uma porcentagem de mosquitos infectantes. Tal porcentagem não varia no espaço nem no tempo, aceitando-se como uma média. Em uma abordagem determinística, obtém-se o sistema de equações diferenciais parciais (3.6), que leva em consideração o conjunto de hipóteses apresentado na seção 3.3.

### Modelo 1

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_M \nabla M) &= vM - \mu M \\
 \frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla S) &= -\beta SM \\
 \frac{\partial I}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla I) &= \beta SM - \sigma I \\
 \frac{\partial R}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla R) &= \sigma I
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que  $v$  e  $\mu$  correspondem, respectivamente, às taxas de nascimento e de mortalidade específicas de *Aedes aegypti*, sendo  $\alpha_M$  e  $\alpha_H$  os coeficientes de dispersão do mosquito e dos humanos.

A dinâmica da doença pode ser representada pelo modelo compartimental presente na Figura 3.2.

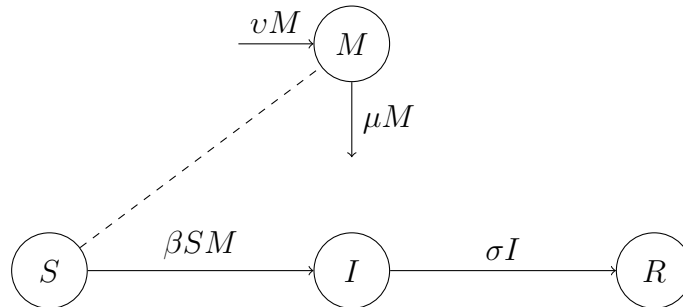


Figura 3.2: Esquema compartimental representativo do modelo do sistema (3.6). As linhas contínuas indicam transferências entre compartimentos, nas direções das setas, e a linha tracejada representa contato em potencial para resultar em infecção.

Nota-se que não há separação entre mosquitos infectantes e mosquitos suscetíveis, indicando que uma parcela fixa da população de mosquitos se encontra infectada pelo flavivírus. Tal consideração é uma simplificação razoável ao ser adotada em regiões infestadas pelo *Aedes aegypti* e com número razoável de notificações de dengue. Tais hipóteses garantem uma maior uniformidade na distribuição dos mosquitos infectantes. É um caso diferente ao de uma região sofrendo os primeiros casos de dengue, em que há nitidamente uma relação nas localizações de mosquitos infectantes e de humanos infectantes, enquanto que locais sem a presença de vírus no mosquito supõe-se não registrarem ocorrências de dengue em humanos. A divisão de mosquitos em compartimentos de mosquitos suscetíveis e de mosquitos infectantes resulta em sistemas de cinco equações, como será apresentado a seguir.

O sistema (3.6) tem como base o conjunto de hipóteses descritas na seção 3.3, acrescido da seguinte:

- Uma porcentagem fixa da população de *Aedes aegypti* é considerada contaminada pelo vírus da dengue.

### Sobre os termos de dispersão

Uma observação relevante na discussão do modelo (3.6) proposto, e nos posteriores a serem apresentados, refere-se aos termos de dispersão empregados, os quais foram formulados baseando-se nos movimentos aleatórios de partículas. Empiricamente já se comprovou que populações de seres vivos também seguem tal modelo, de maneira que uma maior concentração tende a provocar um maior espalhamento dos indivíduos no espaço disponível. Porém, como é possível se observar em trabalhos como *The Spatial Spread Among Foxes I: Background and Simple Model* [32], e em artigo de Maidana e Yang [28], para certas espécies, a dispersão em um espaço de tempo é tão ínfima que não é considerada no modelo. Em seu livro, Murray [32] apresenta um modelo para o estudo da propagação da raiva em raposas, dividindo esta espécie em dois compartimentos: raposas suscetíveis e raposas infectadas (e ao mesmo tempo infectantes). A dispersão só é considerada em raposas com raiva, pois estas aumentam muito a sua atividade quando afetadas pelo vírus, enquanto que as sadias são consideradas fixas. No caso de Maidana e Yang [28], em um modelo para a propagação de dengue em um domínio espacial unidimensional a ser apresentado adiante, considera-se apenas a dispersão do *Aedes aegypti* alado enquanto que o ser humano é considerado fixo. Tais modelagens são coerentes se admitido o fato de que as populações em questão (raposas suscetíveis ou humanos) já se estabeleceram em um território habitável, seguro e com

alimentos e espaço suficientes para toda a população, não havendo a necessidade de mais colonização de novo território. É certo que os humanos se locomovem todos os dias para trabalhar, estudar, comprar alimentos, interagir socialmente, passear, consultar médicos, frequentar academias, etc, mas em geral ao final do dia voltam a suas casas, não aumentando a área ocupada pela espécie. A colonização, ou a ocupação de mais território, ocorre em uma quantidade muito menor, de tal maneira que, se comparada com a dos mosquitos, é muito pequena. No caso dos mosquitos considera-se a dispersão pelo fato de estes não terem um local fixo para habitar, passando a vida em busca de alimento, de sangue e de locais para a postura dos ovos. Para os humanos, neste trabalho será admitido tal termo com um coeficiente muito baixo, mas presente em consideração à movimentação diária e à necessidade de suavização da condição inicial a ser adotada, constante por partes.

### 3.5.2 Modelo de 5 compartimentos

Um modelo descritivo da dengue formado pelos cinco compartimentos  $M_S$  (mosquitos suscetíveis),  $M_I$  (mosquitos infectantes),  $S$  (humanos suscetíveis),  $I$  (humanos infectantes) e  $R$  (humanos recuperados) é intuitivamente mais representativo do fenômeno estudado do que o de quatro compartimentos, apresentado anteriormente. Entretanto, ao se ganhar com a precisão, acrescentando-se uma variável e uma equação ao sistema, perde-se ao aumentar a complexidade do modelo, uma vez que a equação acrescida é acoplada às demais. Tal perda significa, portanto, a necessidade de encontrar a solução de mais uma variável e manipular mais um termo não-linear, aumentando o tempo de simulação e chances de instabilidades numéricas.

Como a infecção dos humanos se dá através da picada por mosquitos infectantes e a dos artrópodes ocorre ao sugar o sangue de um humano com o vírus da dengue, a taxa de passagem do compartimento de humanos suscetíveis para o de infectantes é  $\beta_2 S M_I$  e a taxa correspondente para os mosquitos é  $\beta_1 M_S I$ . Mantendo-se as demais hipóteses de uniformidade no domínio e dinâmica vital malthusiana para os mosquitos, são construídos o sistema de equações (3.7) e a Figura 3.3.

## Modelo 2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_S}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_M \nabla M_S) &= v(M_S + M_I) - \mu_S M_S - \beta_1 I M_S \\
\frac{\partial M_I}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_M \nabla M_I) &= -\mu_I M_I + \beta_1 I M_S \\
\frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla S) &= -\beta_2 S M_I \\
\frac{\partial I}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla I) &= \beta_2 S M_I - \sigma I \\
\frac{\partial R}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla R) &= \sigma I
\end{aligned} \tag{3.7}$$

em que  $\mu_1 < \mu_2$ , ou seja, a mortalidade de mosquitos contaminados pela dengue é maior do que a dos demais. De acordo com especialistas, a diferença na expectativa de vida é de cerca de uma semana a favor dos que não carregam o vírus.

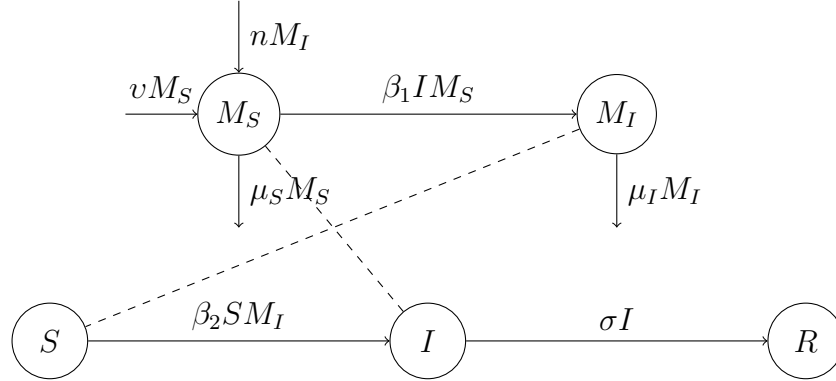


Figura 3.3: Esquema compartimental representativo do modelo do sistema (3.7). As linhas contínuas indicam transferências entre compartimentos, nas direções das setas, e as linhas tracejadas representam contatos em potencial para resultarem em infecções.

O sistema (3.7) apresentado, que representa o Modelo 2 da dengue, tem como base o conjunto de hipóteses da seção 3.3, acrescido das seguintes:

- Os mosquitos assumem os estados de suscetível ( $M_S$ ) ou de infectantes ( $M_I$ );
- A dinâmica vital do mosquito é malthusiana;
- Mosquitos suscetíveis passam a ser infectantes devido ao contato com humanos infectantes, como rege o princípio da ação das massas;

- Humanos suscetíveis passam a ser infectantes devido ao contato com mosquitos infectantes, como rege o princípio da ação das massas;
- Mosquitos suscetíveis e infectantes geram mosquitos suscetíveis (a transmissão transovariana é desprezada), não havendo outra maneira de infecção além da picada em um humano infectante;

Da mesma maneira que se procurou formular um modelo mais acurado inserindo-se outro compartimento para a população de mosquitos, a seguir serão apresentados modelos destacando a população de *Aedes aegypti* em sua fase aquática.

### 3.5.3 Modelos de 6 compartimentos

Maidana e Yang [28] propuseram um modelo para estudar a propagação de dengue usando um sistema de equações diferenciais parciais de difusão-reação, com modelagem semelhante à de Takahashi [38] para controle de *Aedes aegypti*. As hipóteses utilizadas para a formulação do modelo incluem algumas das listadas acima, como homogeneidade das populações a respeito das reações com relação ao vírus; população humana dividida em compartimentos de suscetíveis ( $H(x, t)$ ), infectantes ( $I(x, t)$ ) e recuperados ( $R(x, t)$ ); a infecção, seja do humano ou do mosquito, apenas através da picada de humano pelo mosquito; tempo insuficiente para se considerar a perda de imunidade dos humanos recuperados; e dinâmica vital do *Ae. aegypti*. As diferenças residem nas admissões de um compartimento a mais, presente na classificação dos artrópodes (ao invés de apenas suscetíveis e infectantes, os mosquitos podem ser alados suscetíveis ( $M_S(x, t)$ ), alados infectantes ( $M_I(x, t)$ ) e aquáticos ( $A(x, t)$ )), de dinâmica vital do ser humano e de termo de advecção (transporte) sobre os *Ae. aegypti* alados.

Denotando-se a quantidade total de mosquitos alados  $M_S(x, t) + M_I(x, t)$  por  $M(x, t)$  e a quantidade total de humanos  $H(x, t) + I(x, t) + R(x, t)$  por  $N(x, t)$ , o modelo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_S}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 M_S}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial M_S}{\partial x} + \gamma A \left(1 - \frac{M}{k_1}\right) - \mu_1 M_S - \beta_1 M_S I \\
\frac{\partial M_I}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 M_I}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial M_I}{\partial x} - \mu_1 M_I + \beta_1 M_S I \\
\frac{\partial A}{\partial t} &= r \left(1 - \frac{A}{k_2}\right) M - \mu_2 A - \gamma A \\
\frac{\partial H}{\partial t} &= \mu_H N - \mu_H H - \beta_2 H M_I \\
\frac{\partial I}{\partial t} &= \beta_2 H M_I - \sigma I - \mu_H I \\
\frac{\partial R}{\partial t} &= \sigma I - \mu_H R
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Os termos que envolvem derivadas parciais de segunda e primeira ordem com relação do espaço correspondem, respectivamente, à dispersão dos insetos e à advecção (fator vento). Como no modelo apresentado anteriormente, os termos  $\beta_1 M_S I$  e  $\beta_2 H M_I$  correspondem às taxas de infecção de mosquitos e de humanos, respectivamente.  $\mu_1 M_S$ ,  $\mu_1 M_I$  e  $\mu_2 A$  são as variações nas populações de mosquitos alados suscetíveis, mosquitos alados infectantes e mosquitos aquáticos, nesta mesma ordem, devido à mortalidade natural.  $\gamma A(1 - \frac{M}{k_1})$  é a taxa de passagem de mosquitos aquáticos para mosquitos alados, supostamente controlada por limitações no meio ambiente, relacionados a alguma capacidade máxima em suportar insetos da espécie. De maneira semelhante, o termo  $r(1 - \frac{A}{k_2})M$  procura representar o nascimento de *Aedes aegypti* no compartimento de aquáticos, com limitações no meio também.

### Comentários

É sabido que a população de *Aedes aegypti* não cresce indefinidamente seguindo um modelo matlhusiano com parâmetro constante. Entretanto, a densidade populacional de mosquitos não se aproxima assintoticamente de valores fixos limitados pelo meio ambiente como prediz o modelo de Verhulst.

A verdade é que fatores ambientais como temperatura, disponibilidade de sangue para a maturação de ovos, criadouros, umidade e oferta de alimentos são mecanismos controladores da população de mosquitos. Não há uma capacidade de suporte fixa co-

nhecida do meio ambiente com relação a esta espécie, devendo tal número, se existente, ser exorbitante, dado o pequeno tamanho do ser e sua alta capacidade de adaptação.

Para o domínio proposto no presente trabalho (distrito sul da cidade de Campinas), a heterogeneidade se mostra um importante fator, uma vez que, dentro desta região, há áreas com grande concentração de humanos e áreas em que quase não há indivíduos vivendo ou circulando. Há locais com maior acúmulo de recipientes do que outros também. E neste trabalho será proposto considerar a chuva (que varia ao longo do tempo) outro fator de grande influência na reprodução dos mosquitos, baseando-se em Zeidler *et al.* [42].

Por serem considerados mecanismos controladores importantes na dinâmica da dengue, já que influenciam a reprodução e a atividade do mosquito, opta-se por escolher parâmetros variáveis que dependam dessas variáveis citadas. Desta maneira, acaba-se por não se admitirem capacidades de suporte fixas, considerando-se que a população do vetor varia de acordo com as condições do local e do instante de tempo. Acredita-se que tais considerações podem tornar a modelagem do fenômeno no domínio especificado (com as suas características específicas) mais realista do que adotar um modelo genérico com parâmetros fixos.

Na apresentação da próxima abordagem, assim como nas anteriores, a modelagem matemática será determinística. Serão considerados os mesmos compartimentos utilizados no artigo de Maidana e Yang [28], mas sua modelagem em termos determinísticos é mais simples. Em seguida serão apresentadas condições de contorno e iniciais e, posteriormente, serão discutidas as influências dos fatores ambientais citados e como este tipo de informação pode ser inserido nos modelos do trabalho.

**Modelo 3**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_S}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_M \nabla M_S) &= \gamma A - \mu_S M_S - \beta_1 I M_S \\
\frac{\partial M_I}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_M \nabla M_I) &= \beta_1 I M_S - \mu_I M_I \\
\frac{\partial A}{\partial t} &= \kappa M - \gamma A - \mu_A A \\
\frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla S) &= -\beta_2 S M_I \\
\frac{\partial I}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla I) &= \beta_2 S M_I - \sigma I \\
\frac{\partial R}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla R) &= \sigma I
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Nota-se que não existe um termo de dispersão na equação referente à dinâmica dos mosquitos aquáticos devido ao fato que esta é uma população fixa no espaço. Se um ovo for posto em um recipiente, esse não sairá do local até se tornar alado e tiver independência da água do recipiente em que se encontra. Entretanto, devido à natureza dos dados de entrada do problema (número de criadouros constantes por partes ao longo do domínio, apresentando saltos sobre fronteiras imaginárias), a ausência do termo de dispersão acabou por gerar soluções de comportamento caótico nas simulações. Dessa maneira, mostrou-se necessário ser considerada, no programa, uma pequena dispersão, suavizando descontinuidades presentes nas informações.

Assim como os demais modelos, pode-se montar um esquema representativo do modelo compartimental apresentado na Figura 3.4.

**3.5.4 Condições Iniciais e de Contorno**

Para os modelos propostos convergirem, cada um a soluções únicas, é necessário que sejam bem postos, de maneira que estejam bem definidas as condições iniciais (valores iniciais para cada população) e as de contorno (condições a respeito do comportamento das soluções nas fronteiras do domínio espacial).

Para o modelo de quatro compartimentos ( $M$ ,  $S$ ,  $I$  e  $R$ ), as condições iniciais ( $t = 0$ )



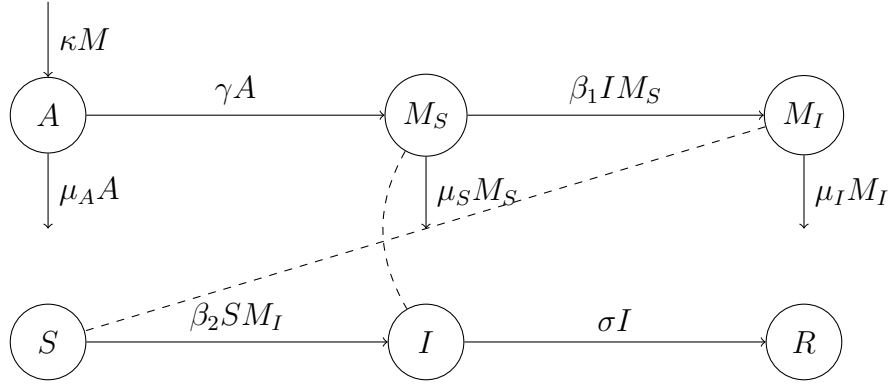


Figura 3.4: Esquema compartimental representativo do modelo do sistema (3.9). As linhas contínuas indicam transferências entre compartimentos, nas direções das setas, e as linhas tracejadas representam contatos em potencial para resultarem em infecções.

são dadas por

$$\begin{aligned}
 M(x, y, 0) &= M_0(x, y) \\
 S(x, y, 0) &= S_0(x, y) \\
 I(x, y, 0) &= I_0(x, y) \\
 R(x, y, 0) &= R_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

e as condições de contorno por

$$\left. \frac{\partial M}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial I}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial R}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0 \tag{3.11}$$

em que  $\left. \frac{\partial M}{\partial \eta} \right|_{\tau}$  corresponde à derivada da função  $M(x, y, t)$  com relação ao vetor normal na borda  $\tau$  do domínio,  $\left. \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_{\tau}$  corresponde à derivada da função  $S(x, y, t)$  com relação ao vetor normal na borda  $\tau$  do domínio e assim por diante.

As condições de contorno garantem que o balanço líquido entre o que entra e o que sai do domínio seja nulo, uma vez que a derivada com relação ao vetor normal é nula. Significa que o comportamento na borda do domínio é estacionário com relação ao espaço, ou seja, não é para haver grandes mudanças nos valores das populações entre um ponto imediatamente antes da fronteira (do lado de dentro do domínio) e outro imediatamente depois (que não existe na modelagem, mas na realidade sim).

Analogamente, para o problema de cinco compartimentos ( $M_S$ ,  $M_I$ ,  $S$ ,  $I$  e  $R$ ) têm-se como condições iniciais e de contorno

$$\begin{aligned}
 M_S(x, y, 0) &= M_{S0}(x, y) \\
 M_I(x, y, 0) &= M_{I0}(x, y) \\
 S(x, y, 0) &= S_0(x, y) \\
 I(x, y, 0) &= I_0(x, y) \\
 R(x, y, 0) &= R_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\left. \frac{\partial M_S}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial M_I}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial I}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial R}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0 \tag{3.13}$$

E para o problema de seis compartimentos ( $A$ ,  $M_S$ ,  $M_I$ ,  $S$ ,  $I$  e  $R$ ):

$$\begin{aligned}
 A(x, y, 0) &= A_0(x, y) \\
 M_S(x, y, 0) &= M_{S0}(x, y) \\
 M_I(x, y, 0) &= M_{I0}(x, y) \\
 S(x, y, 0) &= S_0(x, y) \\
 I(x, y, 0) &= I_0(x, y) \\
 R(x, y, 0) &= R_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial M_S}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial M_I}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial I}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial R}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0 \tag{3.15}$$

### 3.5.5 Fatores ambientais: variáveis fuzzy

Como brevemente comentado na seção 3.5.3, certos fatores ambientais influenciam na dinâmica do *Aedes aegypti*.

Em seu recente trabalho, Zeidler *et al.* [42] relacionou o aumento de precipitação pluviométrica com o aumento na formação de criadouros, ocasionando um crescimento da população de mosquitos. Observa-se que, em Campinas, o pico de precipitação pluviométrica ocorre em geral durante final e início do ano (verão), decaindo até chegar o inverno, quando normalmente são registrados os menores índices. Analisando-se a Tabela 2.1 da seção 2.3, na página 16, e comparando-a a dados de precipitação pluviométrica ao longo do ano, percebe-se que a dengue tem uma forte relação com o índice de chuva, no sentido de que no verão há mais dengue do que no resto do ano, bem como há mais chuva. Desta maneira, a consideração da variação da intensidade da chuva ao longo do tempo pode ter forte impacto nas soluções obtidas dos modelos matemáticos formulados, tornando-os mais realistas do que no caso de os parâmetros do problema serem considerados fixos.

Entretanto, a chuva não é o único fator que influencia a reprodução do vetor. Existe a necessidade da presença de potenciais criadouros, ou seja, recipientes que possam acumular a água (em geral, da chuva) para os ovos poderem ser postos e eclodirem. Devem também existir animais para a fêmea do mosquito poder obter o sangue necessário para a maturação dos ovos. Em geral, o ser procurado para ela picar é o humano, por este estar perto do hábitat do mosquito, ou seja, no próprio meio urbano. Mas, se houver outro tipo de animal próximo, há a possibilidade de ela sugar o seu sangue também [17].

A temperatura, também considerada por especialistas como fator importante na atividade e reprodução do artrópode, aqui é omitida devido ao período de tempo considerado para o estudo da propagação da doença ser o verão, aproximadamente. Nesta época não há ocorrência de temperatura baixa a ponto de diminuir a atividade do mosquito, sendo este o período de maior atividade do *Ae. aegypti* (e, conseqüentemente, de reprodução e de picadas em humanos). Os fatores a serem considerados neste trabalho são, portanto, a chuva e a presença de humanos e de recipientes. Demais condições (predadores, presença de alimentos, etc) serão consideradas sempre favoráveis ao mosquito.

Apesar de poderem ser representadas numericamente, neste trabalho escolhe-se tratar as novas variáveis  $Q$  (densidade de recipientes),  $C$  (precipitação pluviométrica) e  $H$  (densidade de humanos) como variáveis fuzzy. Nenhuma delas é conhecida com exatidão. A precipitação pluviométrica em um período que ainda não ocorreu é uma mera

previsão. A quantidade de criadouros em um local é uma estimativa. Tais considerações mais o fato de essas variáveis poderem ser rotuladas como “alta”, “média” ou “muito baixa” levam os autores a tratá-las como fuzzy, ao invés de clássicas.

Antes considerada malthusiana, a reprodução do mosquito poderá variar agora em função dos fatores ambientais, o que é com certeza mais realista, uma vez que a população de mosquitos aumenta em estação chuvosa e diminui se não houver aonde se reproduzir, não crescendo indefinidamente.

Os parâmetros relacionados à reprodução e dispersão do vetor são, de acordo com esta abordagem, determinados por tais variáveis incertas. A influência sobre a dispersão faz sentido se relevado o fato de que os artrópodes se locomovem em busca de sangue e de locais para se reproduzir, de maneira que, se tais condições não forem boas onde ele se encontra, com certeza voará mais em busca desses recursos e sua dispersão será maior.

Nos Modelos 1 e 2 o parâmetro  $v$ , que diz respeito ao nascimento de novos mosquitos, e o coeficiente de dispersão  $\alpha_M$  são variáveis de  $Q$ ,  $C$  e  $H$ . Não se sabe exatamente como é esta influência: não existe uma fórmula matemática que determina esta relação. Da mesma maneira, no Modelo 3, os parâmetros  $\kappa$  (oviposição) e  $\alpha_M$  são influenciados de maneira incerta por  $Q$ ,  $C$  e  $H$ , enquanto que  $\gamma$  (relacionado com a taxa de transformação de mosquitos aquáticos em alados) e  $\mu_A$  (mortalidade na fase aquática) variam apenas em função de  $C$ .

Através do tratamento das variáveis  $Q$ ,  $C$  e  $H$  como fuzzy, surge a possibilidade de se trabalhar com Sistemas Baseados em Regras Fuzzy [30], o qual será abordado na seção 5.3. Tal ferramenta permite inferir valores para os parâmetros do modelo através da inserção de regras linguísticas, do tipo “se  $Q$  (densidade de recipientes) é baixa e  $C$  (precipitação pluviométrica) é baixa e  $H$  (densidade de humanos) é baixa então  $v$  (reprodução do mosquito) é baixa” e de dados de entrada, como os valores atualizados de  $Q$ ,  $C$  e  $H$ . Os valores inferidos são determinísticos, permitindo o uso da ferramenta de solução numérica proposta no capítulo 4.

A teoria dos conjuntos fuzzy será abordada no capítulo 5, em que será explicado com mais clareza o uso desta teoria no presente problema.

# Capítulo 4

## Método numérico

### 4.1 Método dos Elementos Finitos

Modelos matemáticos representativos de algum fenômeno frequentemente assumem a forma de equações diferenciais ou integrais. Apenas nos casos mais simples é possível encontrar soluções analíticas e, em geral, é necessário recorrer a técnicas numéricas para se encontrar uma solução aproximada [26].

O método dos elementos finitos foi criado inicialmente para resolver as complicadas equações de elasticidade e de mecânica estrutural e, para esses problemas, superou o método de diferenças finitas [22]. Após rápido desenvolvimento das aplicações, o método passou a ser empregado a diversos tipos de equações, não só na mecânica.

Há duas abordagens para o método. Uma é a de Rayleigh-Ritz, baseada no fato de que muitos problemas de condição de contorno podem ser formulados em termos de problemas variacionais - o que significa que algum funcional precisa ser otimizado sobre um espaço apropriado de funções [21]. A outra abordagem, de Galerkin, consiste em procurar soluções da equação integral obtida a partir do produto interno realizado nos termos da equação com uma função de teste  $v$  de um espaço apropriado.

Ambas conduzem à mesma solução apropriada [21], que se aproximam da solução do problema inicial. A vantagem da formulação de Galerkin é que não é preciso encontrar o problema variacional equivalente ao problema original. Por este motivo, é escolhido para tratar os problemas deste trabalho. Uma ideia geral do método é dado a seguir.

#### 4.1.1 Teoria do Método

Suponha que é procurada a solução da equação escrita na forma  $L(u) = f$ , em que  $L$  é um operador. Escolhe-se um espaço  $\mathcal{M}$  apropriado de dimensão finita e uma base

$\phi_1, \dots, \phi_N$  de  $\mathcal{M}$ . O método de Galerkin consiste em encontrar uma aproximação  $U$  para  $u$  no espaço  $\mathcal{M}$ , sendo escrito como combinação linear dos termos da base, ou seja, na forma

$$U = \sum_{j=1}^N \beta_j \phi_j(x, y) \quad (4.1)$$

onde os coeficientes  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  são determinados tais que

$$(L(U) - f, v) = 0 \quad (4.2)$$

para todo  $v \in M$  em que  $(u, v) = \int \int_{\Omega} uv dx dy$ , com  $\Omega$  o domínio do problema.

A equação (4.2) corresponde à formulação fraca ou variacional de  $L(u) = f$ , dita forte ou clássica. Analogamente,  $u$  e  $U$  são chamadas soluções forte (ou clássica) e fraca (ou variacional), respectivamente.

Uma vantagem deste método sobre o método de diferenças finitas reside no fato de o método de elementos finitos conseguir lidar com descontinuidades das variáveis dependentes, de suas derivadas e dos parâmetros do problema. Ao se realizar a integração do produto interno, várias dessas irregularidades desaparecem. O método de diferenças finitas calcula quocientes de diferenças para a aproximação de derivadas de funções, baseando-se na série de Taylor. Portanto, se as derivadas não forem “bem comportadas” (contínuas e suaves), as soluções podem não ser boas.

Outro ponto positivo para o método de elementos finitos é o fato de conseguir lidar facilmente com domínios de geometria complicada, ao contrário do método de diferenças finitas.

Neste capítulo será realizada a aplicação do método de elementos finitos, bem como o de Crank-Nicolson (a ser apresentado adiante), apenas no primeiro modelo formulado para a dengue, ao qual corresponde o sistema de equações parciais (3.6). As aplicações aos demais modelos são análogas, de maneira que seria repetitivo realizar todo o processo para cada sistema de equações apresentado no Capítulo 3.

### 4.1.2 Aplicação do método

Nesta seção é aplicado o método de Galerkin ao sistema (3.6), re-escrito a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_M \nabla M) &= vM - \mu M \\
\frac{\partial S}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla S) &= -\beta SM \\
\frac{\partial I}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla I) &= \beta SM - \sigma I \\
\frac{\partial R}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_H \nabla R) &= \sigma I
\end{aligned} \tag{4.3}$$

As condições iniciais do problema são dadas por (4.4):

$$\begin{aligned}
M(x, y, 0) &= M_0(x, y) \\
S(x, y, 0) &= S_0(x, y) \\
I(x, y, 0) &= I_0(x, y) \\
R(0, x, y) &= R_0(x, y)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

e as condições de contorno por

$$\left. \frac{\partial M}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial I}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial R}{\partial \eta} \right|_{\tau} = 0 \tag{4.5}$$

Aplicando-se o produto interno de  $L^2(\Omega)$  (espaço de funções  $z$  sobre  $\Omega$  tal que  $\int z^2 dx < \infty$  existe e é finito) no problema (4.3) obtém-se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial M}{\partial t} | v \right) - (div(\alpha_M \nabla S) | v) = ((v - \mu)M | v) \\ \left( \frac{\partial S}{\partial t} | v \right) - (div(\alpha_S \nabla S) | v) = -(\beta S M | v) \\ \left( \frac{\partial I}{\partial t} | v \right) - (div(\alpha_I \nabla I) | v) = (\beta S M | v) - (\sigma I | v) \\ \left( \frac{\partial R}{\partial t} | v \right) - (div(\alpha_R \nabla R) | v) = (\sigma I | v) \\ \text{para todo } v \in \mathcal{V} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

em que, para cada  $t \in J$ ,

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}$$

De acordo com o Teorema de Green, em conjunto com as condições de contorno, o termo  $-(div(\alpha_S \nabla S) | v)$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} -(div(\alpha_M \nabla M) | v) &= (\alpha_M \nabla M || \nabla v) - \langle \alpha_M \frac{\partial M}{\partial \eta} | v \rangle \\ &= (\alpha_M \nabla M || \nabla v) + 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

em que  $(\nabla u || \nabla v)$  é a notação utilizada para representar a integral do produto das funções  $\nabla u$  e  $\nabla v$  sobre o domínio bidimensional  $\Omega$ :  $(\nabla u || \nabla v) = \int \int_{\Omega} \nabla u \dot{\nabla} v \, da$ ; e  $\langle u | v \rangle$  é a notação para a integral do produto das funções  $u$  e  $v$  sobre o contorno  $\tau$ :  $\langle u | v \rangle = \int_{\tau} \nabla u \dot{\nabla} v \, ds$ .



Aplicando-se o Teorema de Green em todos os termos de difusão, o sistema torna-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial M}{\partial t} |v \right) + (\alpha_M \nabla M || \nabla v) = ((v - \mu)M |v) \\ \left( \frac{\partial S}{\partial t} |v \right) + (\alpha_S \nabla S || \nabla v) = -(\beta S M |v) \\ \left( \frac{\partial I}{\partial t} |v \right) + (\alpha_I \nabla I || \nabla v) = (\beta S M |v) - (\sigma I |v) \\ \left( \frac{\partial R}{\partial t} |v \right) + (\alpha_R \nabla R || \nabla v) = (\sigma I |v) \\ \text{para todo } v \in \mathcal{V} \end{array} \right. \quad (4.8)$$

O problema que se deseja resolver agora é formado pelo sistema (4.8) e pelas condições iniciais (4.4). As condições de contorno não mais se apresentam explícitas, uma vez que já estão incorporadas a (4.8).

A existência da solução fraca do problema formado por (4.8) e (4.4) é garantida pelo próprio método de Galerkin [31], que consiste em procurar uma solução aproximada, construindo um subespaço  $V_h$ , de  $V$ , de dimensão finita  $m \in \mathbb{N}$ .

É escolhida convenientemente uma base  $\mathcal{B} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$  para  $\mathcal{V}_h$ , podendo-se escrever cada função  $v_h$  de  $\mathcal{V}_h$  como combinação linear finita de elementos da base  $\mathcal{B}$ . Portanto, desiste-se de se procurar as soluções analíticas, e são procuradas as soluções aproximadas

$$\begin{aligned} M_h &= \sum w_j(t) \phi_j(x, y), \\ S_h &= \sum p_j(t) \phi_j(x, y), \\ I_h &= \sum q_j(t) \phi_j(x, y), \\ R_h &= \sum r_j(t) \phi_j(x, y) \end{aligned}$$

com as derivadas primeiras aproximadas dadas por

$$\frac{\partial M_h}{\partial x} = \sum w_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial M_h}{\partial y} = \sum w_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial y},$$

$$\frac{\partial S_h}{\partial x} = \sum p_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_h}{\partial y} = \sum p_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial y},$$

$$\frac{\partial I_h}{\partial x} = \sum q_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial I_h}{\partial y} = \sum q_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial y},$$

$$\frac{\partial R_h}{\partial x} = \sum r_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial R_h}{\partial y} = \sum r_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}$$

Ou seja,  $M_h, S_h, I_h, R_h \in \mathcal{V}_h$ , sendo  $\mathcal{B} = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  a base de  $\mathcal{V}_h$ .

O domínio  $\Omega$  é aproximado por um polígono  $\Omega_h$ , o qual é subdividido em triângulos, formando o conjunto  $T_h = K_1, \dots, K_m$  de triângulos  $K_i$  de tal maneira que nenhum vértice de um triângulo se localize na parede de outro. O espaço  $\mathcal{V}_h$  consiste em todas as funções contínuas em  $\Omega_h$ , que são lineares em cada triângulo  $K_i$ .

Os pontos que correspondem aos vértices dos triângulos formam uma malha de  $N$  pontos e a cada ponto  $N_i$  corresponde uma  $\phi_i$  linear de valor 1 no ponto  $N_i$  e valor 0 nos demais pontos da discretização. Ou seja,  $\phi_j(x_i, y_i) = 1$  se  $i = j$  e  $\phi_j(x_i, y_i) = 0$  se  $i \neq j$ , com  $(x_i, y_i)$  correspondendo às coordenadas do ponto  $N_i$ .

Como se pode notar, a quantidade de elementos na base de  $\mathcal{V}_h$  está diretamente relacionada com a quantidade de pontos. Quanto mais refinada a malha, mais suave a solução e mais próxima da solução analítica do problema original.

Como o espaço das soluções agora é  $\mathcal{V}_h$ , aproxima-se  $v$  por  $v_h = \sum \xi_j \phi_j$ . Um novo

problema é formulado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial M_h}{\partial t} | v_h \right) + (\alpha_M \nabla M_h | | \nabla v_h) = ((v - \mu) M_h | v_h) \\ \left( \frac{\partial S_h}{\partial t} | v_h \right) + (\alpha_S \nabla S_h | | \nabla v_h) = -(\beta S_h M_h | v_h) \\ \left( \frac{\partial I_h}{\partial t} | v_h \right) + (\alpha_I \nabla I_h | | \nabla v_h) = (\beta S_h M_h | v_h) - (\sigma I_h | v_h) \\ \left( \frac{\partial R_h}{\partial t} | v_h \right) + (\alpha_R \nabla R_h | | \nabla v_h) = (\sigma I_h | v_h) \\ \text{para todo } v_h \in \mathcal{V}_h \end{array} \right. \quad (4.9)$$

E, uma vez que a exigência neste sistema de as igualdades ocorrerem para toda função do espaço  $\mathcal{V}_h$  é equivalente à exigência de as igualdades ocorrerem para todo elemento da base de  $\mathcal{V}_h$ , pode-se re-escrever (4.9) como

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial M_h}{\partial t} | \phi_i \right) + (\alpha_M \nabla M_h | | \nabla \phi_i) = ((v - \mu) M_h | \phi_i) \\ \left( \frac{\partial S_h}{\partial t} | \phi_i \right) + (\alpha_S \nabla S_h | | \nabla \phi_i) = -(\beta S_h M_h | \phi_i) \\ \left( \frac{\partial I_h}{\partial t} | \phi_i \right) + (\alpha_I \nabla I_h | | \nabla \phi_i) = (\beta S_h M_h | \phi_i) - (\sigma I_h | \phi_i) \\ \left( \frac{\partial R_h}{\partial t} | \phi_i \right) + (\alpha_R \nabla R_h | | \nabla \phi_i) = (\sigma I_h | \phi_i) \\ \text{para todo } \phi_i \in \mathcal{B} \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Antes de se escrever a forma final do problema, necessita-se realizar um tratamento especial nas derivadas com relação ao tempo.

## 4.2 Discretização da Variável Temporal: o Método de Crank-Nicolson

O método de Galerkin foi aplicado no problema com relação ao espaço, apenas. Para o tratamento da variável temporal, considera-se uma divisão do domínio temporal em  $nt$  intervalos. A cada passo no tempo realiza-se o método de Galerkin no espaço. A derivada no tempo é tratada através do método de diferenças finitas de Crank-Nicolson.

O método de Crank-Nicolson aproxima a derivada temporal de uma função  $g(t)$  por diferenças finitas. Considerando-se a partição do intervalo de tempo  $[0, T]$  em  $nt$  intervalos de tamanho  $\Delta t$ , criando a malha  $[t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_{nt}]$ , a aproximação de  $g'(t)$  no instante  $t_{n+1/2}$  pode ser dada através da série de Taylor. Consideram-se as expansões:

$$g(t_{n+1}) = g(t_{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2}g'(t_{n+1/2}) + \frac{\Delta t^2}{4}g''(t_{n+1/2}) + O(\Delta t^3) \quad (4.11)$$

$$g(t_n) = g(t_{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{2}g'(t_{n+1/2}) + \frac{\Delta t^2}{4}g''(t_{n+1/2}) + O(\Delta t^3)$$

Subtraindo-se a segunda da primeira e realizando-se algumas manipulações, obtem-se

$$g'(t_{n+1/2}) = \frac{g(t_{n+1}) - g(t_n)}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (4.12)$$

De maneira semelhante, é possível se obter

$$g(t_{n+1/2}) = \frac{g(t_{n+1}) + g(t_n)}{2} + O(\Delta t^2) \quad (4.13)$$

Assim, uma equação na forma

$$g'(t) = F(g(t))$$

em que  $F$  é algum funcional, pode ser aproximada, no instante  $t_{n+1/2}$ , por

$$\frac{g(t_{n+1}) - g(t_n)}{\Delta t} = F\left(\frac{g(t_{n+1}) + g(t_n)}{2}\right)$$

com erro da ordem de  $\Delta t^2$ .

### 4.3 O Problema Discretizado: Elementos Finitos e Crank Nicolson

Utilizando-se a malha  $[t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_{nt}]$  no problema (4.10), denota-se  $w_j^n$  para a aproximação de  $w_j(t_n)$ ,  $p_j^n$  para a aproximação de  $p_j(t_n)$ ,  $q_j^n$  para a aproximação de  $q_j(t_n)$  e  $r_j^n$  para a aproximação de  $r_j(t_n)$ . E, seguindo o método de Crank-Nicolson:

$$\frac{dw_j}{dt}(t_{n+1/2}) \approx \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t}, \quad w_j^{n+1/2} \approx \frac{w_j^{n+1} + w_j^n}{2},$$

$$\frac{dp_j}{dt}(t_{n+1/2}) \approx \frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\Delta t}, \quad p_j^{n+1/2} \approx \frac{p_j^{n+1} + p_j^n}{2},$$

$$\frac{dq_j}{dt}(t_{n+1/2}) \approx \frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t}, \quad q_j^{n+1/2} \approx \frac{q_j^{n+1} + q_j^n}{2},$$

$$\frac{dr_j}{dt}(t_{n+1/2}) \approx \frac{r_j^{n+1} - r_j^n}{\Delta t}, \quad r_j^{n+1/2} \approx \frac{r_j^{n+1} + r_j^n}{2}$$

Consequentemente, como aproximação para as derivadas de  $S_h$ ,  $I_h$  e  $R_h$  com relação ao tempo, no ponto  $(x, y, t_{n+1/2})$ , tem-se

$$\frac{\partial M_h}{\partial t}(x, y, t_{n+1/2}) = \sum_{j=1}^N \frac{dw_j}{dt}(t_{n+1/2}) \phi_j(x, y) \approx \sum_{j=1}^N \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} \phi_j(x, y),$$

$$\frac{\partial S_h}{\partial t}(x, y, t_{n+1/2}) = \sum_{j=1}^N \frac{dp_j}{dt}(t_{n+1/2}) \phi_j(x, y) \approx \sum_{j=1}^N \frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\Delta t} \phi_j(x, y),$$

$$\frac{\partial I_h}{\partial t}(x, y, t_{n+1/2}) = \sum_{j=1}^N \frac{dq_j}{dt}(t_{n+1/2}) \phi_j(x, y) \approx \sum_{j=1}^N \frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} \phi_j(x, y),$$

$$\frac{\partial R_h}{\partial t}(x, y, t_{n+1/2}) = \sum_{j=1}^N \frac{dr_j}{dt}(t_{n+1/2}) \phi_j(x, y) \approx \sum_{j=1}^N \frac{r_j^{n+1} - r_j^n}{\Delta t} \phi_j(x, y),$$

A aplicação do método de Crank-Nicolson no sistema (4.10) fornece

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} (\phi_j | \phi_i) + \alpha_M \sum_{j=1}^N \frac{w_j^{n+1} + w_j^n}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \\ & + \alpha_M \sum_{j=1}^N \frac{w_j^{n+1} + w_j^n}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) = (v - \mu) \sum_{j=1}^N \frac{w_j^{n+1} + w_j^n}{2} (\phi_j | \phi_i) \\ \\ & \sum_{j=1}^N \frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\Delta t} (\phi_j | \phi_i) + \alpha_S \sum_{j=1}^N \frac{p_j^{n+1} + p_j^n}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \\ & + \alpha_S \sum_{j=1}^N \frac{p_j^{n+1} + p_j^n}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) = -\beta \sum_{j=1}^N \frac{p_j^{n+1} + p_j^n}{2} \sum_{k=1}^N \frac{w_k^{n+1} + w_k^n}{2} (\phi_j \phi_k | \phi_i) \\ \\ & \sum_{j=1}^N \frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} (\phi_j | \phi_i) + \alpha_I \sum_{j=1}^N \frac{q_j^{n+1} + q_j^n}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \\ & + \alpha_I \sum_{j=1}^N \frac{q_j^{n+1} + q_j^n}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) = \beta \sum_{j=1}^N \frac{p_j^{n+1} + p_j^n}{2} \sum_{k=1}^N \frac{w_k^{n+1} + w_k^n}{2} (\phi_j \phi_k | \phi_i) \\ & - \sigma \sum_{j=1}^N \frac{q_j^{n+1} + q_j^n}{2} (\phi_j | \phi_i) \\ \\ & \sum_{j=1}^N \frac{r_j^{n+1} - r_j^n}{\Delta t} (\phi_j | \phi_i) + \alpha_R \sum_{j=1}^N \frac{r_j^{n+1} + r_j^n}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \\ & + \alpha_R \sum_{j=1}^N \frac{r_j^{n+1} + r_j^n}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) = \sigma \sum_{j=1}^N \frac{q_j^{n+1} + q_j^n}{2} (\phi_j | \phi_i) \\ \\ & \text{para todo } \phi_i \in \mathcal{B} \end{aligned} \right. \tag{4.14}$$

Após um rearranjo dos termos, a forma final do sistema que se pretende resolver é

apresentada a seguir:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^N \left[ \left( 1 - \frac{(v-\mu)\Delta t}{2} \right) (\phi_j|\phi_i) + \frac{\alpha_M \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\alpha_M \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \right] w_j^{n+1} \\
 & = \sum_{j=1}^N \left[ \left( 1 + \frac{(v-\mu)\Delta t}{2} \right) (\phi_j|\phi_i) - \frac{\alpha_M \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\alpha_S \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \right] w_j^n \\
 & \sum_{j=1}^N \left[ (\phi_j|\phi_i) + \frac{\alpha_S \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_S \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\beta \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (w_k^{n+1} + w_k^n) (\phi_j \phi_k | \phi_i) \right] p_j^{n+1} \\
 & = \sum_{j=1}^N \left[ (\phi_j|\phi_i) - \frac{\alpha_S \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) - \frac{\alpha_S \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\beta \Delta t}{4} \sum_{k=1}^N (w_k^{n+1} + w_k^n) (\phi_j \phi_k | \phi_i) \right] p_j^n \\
 & \sum_{j=1}^N \left[ \left( 1 + \frac{\sigma \Delta t}{2} \right) (\phi_j|\phi_i) + \frac{\alpha_I \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\alpha_I \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \right] q_j^{n+1} \\
 & = \sum_{j=1}^N \left[ \left( 1 - \frac{\sigma \Delta t}{2} \right) (\phi_j|\phi_i) - \frac{\alpha_I \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\alpha_I \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \right] q_j^n + \frac{\beta \Delta t}{4} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (p_j^{n+1} + p_j^n) (w_j^{n+1} + w_j^n) (\phi_j \phi_k | \phi_i) \\
 & \sum_{j=1}^N \left[ (\phi_j|\phi_i) + \frac{\alpha_R \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_R \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \right] r_j^{n+1} \\
 & = \sum_{j=1}^N \left[ (\phi_j|\phi_i) - \frac{\alpha_R \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) - \frac{\alpha_R \Delta t}{2} \left( \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \parallel \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \right] r_j^n \\
 & \quad + \sum_{j=1}^N \left( \frac{\sigma \Delta t}{2} \right) (\phi_j|\phi_i) (q_j^{n+1} + q_j^n) \\
 & \text{para todo } \phi_i \in \mathcal{B}
 \end{aligned} \right. \tag{4.15}$$

Da mesma maneira, para cada condição inicial de cada população do sistema procura-

se uma solução da formulação variacional. Para a realização de uma pequena mudança de notação, são definidos  $w_0(x, y) = M_0(x, y)$ ,  $p_0(x, y) = S_0(x, y)$ ,  $q_0(x, y) = I_0(x, y)$  e  $r_0(x, y) = R_0(x, y)$ . Levando-se em conta que  $M_0(x, y) = M(x, y, 0)$  é aproximado no domínio discreto por  $\sum_{j=1}^N w_j^0(\phi_j(x, y)|\phi_i(x, y))$ , é necessário satisfazer  $\sum_{j=1}^N w_j^0(\phi_j(x, y)|\phi_i(x, y)) = w_0(x, y)$ . O mesmo vale para as demais variáveis, resultando no sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N w_j^0 \phi_j(x, y) = w_0(x, y) \\ \sum_{j=1}^N p_j^0 \phi_j(x, y) = p_0(x, y) \\ \sum_{j=1}^N q_j^0 \phi_j(x, y) = q_0(x, y) \\ \sum_{j=1}^N r_j^0 \phi_j(x, y) = r_0(x, y) \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Para resolver este problema em sua forma variacional, procuram-se as soluções de

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N w_j^0(\phi_j(x, y)|\phi_i(x, y)) = (w_0(x, y)|\phi_i(x, y)) \\ \sum_{j=1}^N p_j^0(\phi_j(x, y)|\phi_i(x, y)) = (p_0(x, y)|\phi_i(x, y)) \\ \sum_{j=1}^N q_j^0(\phi_j(x, y)|\phi_i(x, y)) = (q_0(x, y)|\phi_i(x, y)) \\ \sum_{j=1}^N r_j^0(\phi_j(x, y)|\phi_i(x, y)) = (r_0(x, y)|\phi_i(x, y)) \end{array} \right. \quad (4.17)$$

para cada  $i = 1, \dots, N$ .



O sistema (4.15) se apresenta na forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}_1 \mathbb{W}^{n+1} = \mathbb{N}_1 \mathbb{W}^n \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{W}^n, \mathbb{W}^{n+1}) \mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{N}_2(\mathbb{W}^n, \mathbb{W}^{n+1}) \mathbb{P}^n \\ \mathbb{M}_3 \mathbb{Q}^{n+1} = \mathbb{N}_3 \mathbb{Q}^n + \mathbb{B}_3(\mathbb{W}^n, \mathbb{W}^{n+1}, \mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n+1}) \\ \mathbb{M}_4 \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{N}_4 \mathbb{R}^n + \mathbb{B}_4(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^{n+1}) \end{array} \right. \quad (4.18)$$

em que  $\mathbb{W}^n$ ,  $\mathbb{P}^n$ ,  $\mathbb{Q}^n$  e  $\mathbb{R}^n$  correspondem aos vetores formados pelos termos  $w_j^n$ ,  $p_j^n$ ,  $q_j^n$  e  $r_j^n$ , respectivamente, sendo que o índice  $j$  corresponde à sua posição no vetor.  $\mathbb{M}_1$ ,  $\mathbb{M}_3$ ,  $\mathbb{M}_4$ ,  $\mathbb{N}_1$ ,  $\mathbb{N}_3$  e  $\mathbb{N}_4$  são matrizes formadas por termos constantes e  $\mathbb{M}_2(\mathbb{W}^n, \mathbb{W}^{n+1})$ ,  $\mathbb{N}_2(\mathbb{W}^n, \mathbb{W}^{n+1})$ ,  $\mathbb{B}_3(\mathbb{W}^n, \mathbb{W}^{n+1}, \mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n+1})$  e  $\mathbb{B}_4(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^{n+1})$  são vetores que dependem dos valores de  $\mathbb{W}^n$ ,  $\mathbb{W}^{n+1}$ ,  $\mathbb{P}^n$ ,  $\mathbb{P}^{n+1}$ ,  $\mathbb{Q}^n$  e  $\mathbb{Q}^{n+1}$ , como a notação indica.

Fornecendo os valores iniciais  $w_j^0$ ,  $p_j^0$ ,  $q_j^0$  e  $r_j^0$  (ou,  $\mathbb{W}^0$ ,  $\mathbb{P}^0$ ,  $\mathbb{Q}^0$  e  $\mathbb{R}^0$ , respectivamente), solução do sistema 4.17, resolve-se o sistema (4.18), o que fornece os valores de  $\mathbb{W}^1$ ,  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{Q}^1$  e  $\mathbb{R}^1$ . Realizando-se o processo de resolução do sistema 4.18  $nt$  vezes, cada vez utilizando o resultado da iteração anterior como entrada, são obtidos os valores de todas as variáveis no tempo final  $t_f$ .

# Capítulo 5

## Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Na modelagem de fenômenos biológicos é comum se deparar com variáveis de grande influência no fenômeno, mas que não são precisamente quantificadas. Tais variáveis não podem ser tratadas pela álgebra tradicional por apresentarem características incertas. Entretanto, por serem fundamentais para o modelo, não podem ser ignoradas.

No cotidiano, os humanos estão a todo instante classificando essas variáveis, quantificando-as do seu modo. E, a partir disso, são capazes de tirar conclusões precisas a despeito da incerteza inerente ao fenômeno.

Um médico pode medir numericamente a temperatura de um paciente, mas relacionar um número à dor que este sente não é um processo objetivo. Quem quantifica a dor é o paciente, atribuindo-lhe valores como “fraca”, “média”, “forte”, “insuportável”, conceitos completamente abstratos, subjetivos. Na tentativa de se transformar a informação subjetiva em números, uma possibilidade é mostrar ao paciente uma figura com diferentes cores e suas graduações. Pede-se para ele escolher aquela que melhor expressa o seu sentimento (em geral, cores mais quentes indicam maior dor). Como cada cor corresponde a um comprimento de onda, pode-se relacionar um número à dor do paciente, conseguindo-se uma medida objetiva.

Essa relação entre conceitos subjetivos e números é realizada através de modelagem matemática utilizando a teoria dos conjuntos fuzzy. Este tipo de teoria tem se mostrado mais adequado na manipulação de variáveis incertas e subjetivas do que a matemática clássica através de conjuntos *crisp*.

Para o entendimento do método a ser utilizado para a manipulação das variáveis fuzzy, antes faz-se necessária a apresentação de algumas definições da teoria dos conjuntos fuzzy, presentes nos livros de Barros e Bassanezi [2] e de Massad, Ortega e Barros [30].

## 5.1 Subconjuntos fuzzy

Um conjunto  $A$  do universo  $U$  é dito *crisp* ou clássico se, dado qualquer elemento  $x$  de  $U$ ,  $x$  só pode assumir exclusivamente a condição de pertencente ou a de não pertencente a  $A$ . É possível definir  $A$  pela função

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (5.1)$$

chamada de função característica de  $A$ .

Baseando-se nesta representação se define um *subconjunto fuzzy*:

**Definição 5.1.1** *Seja  $U$  um conjunto clássico. Um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é caracterizado por uma função*

$$\phi_F : U \rightarrow [0, 1]$$

*pré-fixada, chamada de função de pertinência de  $F$ .*

Em analogia à representação dos conjuntos clássicos apresentada, se  $x$  é um elemento de  $U$  e  $\phi_F(x) = 1$  é dito que o elemento pertence completamente ao conjunto  $F$ , enquanto que se  $\phi_F(x) = 0$ , sua pertinência é nula, não correspondendo a este conjunto.

Pode-se dizer que um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é composto por um conjunto de pares ordenados:

$$F = \{(x, \phi_F(x)), \text{ com } x \in U\}$$

Outras definições são importantes no estudo da teoria dos conjuntos fuzzy, como *suporte*,  $\alpha$ -*nível* e *número fuzzy*, apresentados a seguir.

**Definição 5.1.2** *O suporte do subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é definido por*

$$\text{supp}F = \{x \in U : \phi_F(x) > 0\}$$

Ou seja, é o conjunto de todos os elementos de  $U$  que possuem pertinência não-nula a  $F$ .

**Definição 5.1.3** *O  $\alpha$ -nível do subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é definido pelo conjunto clássico*

$$[F]^\alpha = \{x \in U : \phi_F(x) > \alpha\} \quad \text{para } 0 \leq \alpha \leq 1$$

**Definição 5.1.4** Um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é chamado de número fuzzy quando o universo no qual  $\phi_F$  está definida é o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  satisfaz às condições:

- (i) todos os  $\alpha$ -níveis de  $F$  são não vazios;
- (ii) todos os  $\alpha$ -níveis de  $F$  são intervalos fechados de  $\mathbb{R}$ ;
- (iii)  $\text{supp}F = \{x \in U : \phi_F(x) > 0\}$  é limitado.

Os números fuzzy mais comuns são os triangulares e os trapezoidais. Os triangulares, cujo gráfico tem forma de um triângulo, têm a função de pertinência definida da seguinte maneira

$$\phi_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a} & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b} & \text{se } u < x \leq b \\ 0 & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

e os trapezoidais (de gráfico em formato de trapézio) são definidos seguir

$$\phi_F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x \leq d \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## 5.2 Regras fuzzy

O ambiente é fator fundamental que determina atividade e reprodução do *Aedes aegypti*. É um conjunto de diversas variáveis, dentre as quais podem ser citadas temperatura, chuva, presença de alimentos, vento, luminosidade, presença de predadores, etc.

A chuva pode ser vista como uma variável clássica, assumindo valores reais, se medida em termo de quantidade de água precipitada em determinada área. Por exemplo, no mês de Janeiro de 2009, na cidade de Campinas, na estação da Faculdade de Engenharia Agrícola da UNICAMP, a precipitação foi de 397.7 mm. Entretanto, não se tem um valor exato para cada ponto da cidade. Seria necessária uma estimativa para cada local, com base nos valores obtidos nas estações mais próximas. Através de um histórico, também seria possível uma previsão para o próximo verão – este tipo de incerteza, também considerado aleatório, será explorado na seção 5.3.1. Desta maneira, valores a serem usados em modelos com o objetivo de se preverem situações dependentes

da precipitação pluviométrica, como o crescimento da população de mosquitos, se baseariam em dados estimados, inexatos. Além de haver estas fontes de imprecisão, não se sabe exatamente como a chuva influencia o modelo. Não se sabe o quanto exatamente a taxa de reprodução dos artrópodes cresce com o aumento da precipitação. Essas incertezas levam os autores a optarem por uma abordagem fuzzy, ou seja, admite-se que as variáveis são inexatas e a teoria utilizada para se manipular tais parâmetros não é a clássica, mas a teoria dos conjuntos fuzzy. Neste caso específico da chuva, também será relevada a sua natureza estocástica, utilizando-se método probabilístico para estimar o seu valor.

Analogamente, a quantidade de recipientes (em potencial para se tornarem criadouros com a presença de chuva - sejam pneus, vasos de plantas, garrafas, bacias, panelas, tocos de bambus, buracos de árvores) pode ser considerada fuzzy. Teoricamente é possível se enumerar os recipientes existentes na região, mas na prática isso demanda dinheiro, muita procura e total colaboração da população local, sendo completamente inviável na realidade. Mais uma vez, é necessário se recorrer a estimativas. E, da mesma maneira que a chuva, não se sabe com exatidão como é a influência da quantidade de recipientes na reprodução do mosquito. Sabe-se, apenas, que se há recipiente e se há água limpa, em uma temperatura que não seja baixa, então existe um ambiente propício para a postura de ovos do *Aedes aegypti*. Opta-se, portanto, em se considerar a variável quantidade de recipientes como fuzzy também.

Outro fator que se sabe ser importante na reprodução do *Aedes aegypti* é a presença de humanos para a fêmea poder obter o sangue necessário na maturação dos ovos. Também não se tem conhecimento da influência exata na reprodução do mosquito, mas é senso comum que, se uma região em que há artrópodes da espécie em questão, em pleno verão, apresentar recipientes, chuva e seres humanos, então a reprodução do mosquito vai ser alta. Entretanto, se os moradores ou as autoridades locais tiverem o cuidado de eliminar tais recipientes, ou mudá-los de posição de maneira a não poderem acumular água, o crescimento da população do mosquito não será tão alto.

Regras como essas, observadas e verbalizadas pelo ser humano, podem ser traduzidas para a linguagem matemática através da teoria dos conjuntos fuzzy, de maneira que se torna possível a escrita de algoritmos para se computar a consequência (média de ovos postos ou média de mosquitos passando de aquáticos para alados) da ocorrência dos diferentes estados das variáveis de entrada (valores para *precipitação pluviométrica*, para *densidade de recipientes* e para *densidade de humanos*). O método que realiza essa “tradução” para a matemática é chamado de sistema baseado em regras fuzzy (SBRF).

O SBRF é um sistema que se baseia em regras que contém informações como as ci-

tadas acima: “se a presença de humanos é alta e a quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução é alta e a precipitação pluviométrica é alta *então* a postura de ovos pelo *Aedes aegypti* é alta” ou “se a presença de humanos é alta e a quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução é baixa e a precipitação pluviométrica é alta *então* a postura de ovos pelo *Aedes aegypti* é baixo-média”. Ou seja, as sentenças se apresentam na forma “se SUBSTANTIVO  $A_1$  é QUALIFICAÇÃO  $B_1$  e SUBSTANTIVO  $A_2$  é QUALIFICAÇÃO  $B_2$  e ... e SUBSTANTIVO  $A_m$  é QUALIFICAÇÃO  $B_m$  *então* SUBSTANTIVO  $C_1$  é QUALIFICAÇÃO  $D_1$  e SUBSTANTIVO  $C_2$  é QUALIFICAÇÃO  $D_2$  e ... e SUBSTANTIVO  $C_l$  é QUALIFICAÇÃO  $D_l$ ”. Tais sentenças se apresentam na forma utilizada na linguagem verbal do ser humano. Através da utilização da teoria da lógica fuzzy, o método propõe traduzir estas sentenças para a linguagem matemática, de maneira que cada qualificação (em geral, adjetivo) é dado matematicamente por um subconjunto fuzzy e cada conectivo “e”, “ou”, “não” e “*então*” são modelados de acordo com uma abordagem nebulosa.

Sentenças lógicas como “se a presença de humanos é alta e a quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução é baixa e a precipitação pluviométrica é alta *então* a postura de ovos pelo *Aedes aegypti* é baixo-média”, “se a temperatura ambiente é baixa *então* a atividade do mosquito é baixa”, “se não houver disponibilidade de sangue *ou* a temperatura ambiente for inferior a 15 graus Celsius *então* a postura de ovos pelo *Aedes aegypti* não ocorrerá” e “se o mosquito é macho *então* ele não pica humanos por sangue” são utilizadas com frequência no dia-a-dia. Elas utilizam os conectivos básicos “e”, “ou”, “não” e “*implicação*” (aqui escrito como “se-*então*”).

Na lógica clássica, atribui-se às sentenças verdadeiras o valor 1 e às falsas o valor 0. Para os conectivos “e”, “ou”, e “*implicação*”, tem-se a tabela verdade 5.1. A tabela para o conectivo “*não*” é a 5.2.

Tabela 5.1: Tabela verdade dos conectivos “e”, “ou”, e “*implicação*”.

$p$	$q$	$p \text{ e } q$	$p \text{ ou } q$	$p \text{ então } q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Em analogia, a lógica fuzzy também tem seus conectivos lógicos. Na sentença “se a presença de humanos é alta e a quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução é baixa e a precipitação pluviométrica é alta *então* a postura de ovos pelo *Aedes aegypti* é baixo-média”, por exemplo, existem termos que não são exatos. “Alta”,

Tabela 5.2: Tabela verdade do conectivo “não”.

$p$	não $p$
1	0
0	1

“baixa” e “baixo-média” são termos da linguagem falada pelo homem. “Presença de humanos”, “quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução”, “precipitação pluviométrica” e “postura de ovos” são variáveis ditas linguísticas (conceito a ser definido adiante - em geral se apresentam como substantivos) que recebem o valores “alta”, “baixa”, “alta” e “baixo-média”, respectivamente (tais valores se apresentam na forma de adjetivo ou advérbio). É diferente de “se o mosquito é macho *então* ele não pica humanos”. Não há imprecisão ou incerteza nesta frase. Está bem clara qual é a consequência de um mosquito ser macho: ele não pica humanos. É uma sentença lógica clássica.

Assim como as frases citadas têm diferenças na exatidão, os conectivos também o têm, deixando de apresentar valores binários em suas tabelas verdade, no caso fuzzy. Como extensão do caso clássico, denota-se pela operação mínimo (representada por  $\wedge$ ) o conectivo lógico clássico “e” e utiliza-se o máximo ( $\vee$ ) para determinar a tabela verdade do “ou”.  $\neg p$  denota “não  $p$ ”, sendo que  $\neg p = 1 - p$ . Nota-se que para os valores 1 ou 0 para  $p$  e  $q$ , têm-se reproduzidas as tabelas verdade. O mesmo vale para a “implicação”. Porém, este conectivo não possui uma fórmula apenas, podendo ser representado por diferentes operações.

Os conectivos lógicos fuzzy são definidos através de termos chamados de normas e conormas triangulares, apresentados a seguir.

**Definição 5.2.1** Um operador  $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ,  $\Delta(x, y) = x \Delta y$ , é uma  $t$ -norma se satisfizer seguintes condições:

- (i) elemento neutro:  $\Delta(1, x) = 1 \Delta x = x$ ;
- (ii) comutativa:  $\Delta(x, y) = x \Delta y = y \Delta x = \Delta(y, x)$ ;
- (iii) associativa:  $x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z$ ;
- (iv) monotonicidade: se  $x \leq u$  e  $y \leq v$  então  $x \Delta y \leq u \Delta v$ .

**Definição 5.2.2** Um operador  $\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ,  $\nabla(x, y) = x \nabla y$ , é uma  $t$ -conorma se satisfizer seguintes condições:

- (i) *elemento neutro*:  $\nabla(0, x) = 0 \nabla x = x$ ;
- (ii) *comutativa*:  $\nabla(x, y) = x \nabla y = y \nabla x = \nabla(y, x)$ ;
- (iii) *associativa*:  $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$ ;
- (iv) *monotonicidade*: se  $x \leq u$  e  $y \leq v$  então  $x \nabla y \leq u \nabla v$ .

O operador *t-norma* estende o conectivo “e” enquanto que o operador *t-conorma* estende o conectivo “ou”.

**Definição 5.2.3** *Um operador  $\eta : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  é uma negação se satisfizer seguintes condições:*

- (i) *fronteiras*:  $\eta(0) = 1$  e  $\eta(1) = 0$ ;
- (ii) *involução*:  $\eta(\eta(x)) = x$ ;
- (iii) *monotonicidade*: se  $x \leq y$  então  $\eta(x) \leq \eta(y)$ .

**Definição 5.2.4** *Qualquer operador  $\implies : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  é uma implicação fuzzy se:*

- (i) *reproduzir a tabela verdade da implicação clássica*;
- (ii) *for crescente na segunda variável, ou seja,  $\implies(x, u) \leq \implies(x, v)$  se  $u \leq v$ ,  $\forall x \in [0, 1]$* ;
- (iii) *for decrescente na primeira variável, ou seja,  $\implies(u, y) \leq \implies(v, y)$  se  $u \geq v$ ,  $\forall y \in [0, 1]$* .

Alguns exemplos de conectivos da lógica fuzzy são apresentados a seguir.

- $\Delta(x, y) = \min\{x, y\} = x \wedge y$
- $\Delta(x, y) = xy$
- $\nabla(x, y) = \max\{x, y\} = x \vee y$
- $\Delta(x, y) = x + y - xy$
- $\eta(x) = 1 - x$
- $(x \implies y) = l(x, y) = \min\{(1 - x + y), 1\}$



A importância de se definirem conectivos básicos na lógica fuzzy reside na necessidade de se trabalhar com sentenças lógicas menos exatas, como a dos fatores que influenciam a postura de ovos do *Aedes aegypti*. A verdade da afirmação “a presença de humanos é alta” depende das necessidades do mosquito e da quantidade de humanos presentes na região. Ou seja, a quantidade de humanos é relativa. Para os mosquitos, talvez cem humanos em um raio de um quilômetro seja uma concentração suficiente para se obter o sangue necessário para a maturação dos ovos. Mas para a densidade populacional de um bairro em uma cidade populosa da Índia, talvez isso seja pouco. Assim, no caso dos mosquitos, a afirmação “a presença de humanos é alta” pode possuir valor 0 se a concentração de humanos for nula e possuir valor 1 se ela for de cem ou mais humanos em um raio de um quilômetro. Se a densidade populacional for diferente de zero, a afirmação possuirá algum grau de verdade que, numa escala de 0 a 1, é provavelmente diferente de 0. Mas pode não ser igual a 1, apresentando um valor intermediário. Portanto, faz-se necessário saber quanto é verdadeira uma afirmação, para então se calcular o quanto é verdadeira outra afirmação (implicação) sobre ela. Através dos conceitos apresentados é possível realizar tal cálculo.

O processo de dedução de sentenças como a do caso do mosquito macho é exato e denominado de modus ponens clássico. Por sua vez, as que utilizam raciocínio aproximado, como a dos fatores que influenciam a postura de ovos são chamadas de modus ponens fuzzy. Modus ponens fuzzy generalizado é o nome atribuído ao processo de dedução a partir de uma afirmação incerta, baseando-se em regras dadas, que não necessariamente incluem o caso da afirmação dada. No caso da sentença “se não houver disponibilidade de sangue ou a temperatura ambiente for inferior a 15 graus Celsius então a postura de ovos pelo *Aedes aegypti* não ocorrerá”, não se sabe o que ocorre quando a temperatura ambiente for de 20 graus Celsius e houver disponibilidade de sangue. Sabe-se apenas quais são as condições suficientes para a postura de ovos não ocorrer. Já se for tomada como verdadeira a sentença “se a presença de humanos é alta e a quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução é baixa e a precipitação pluviométrica é alta então a postura de ovos pelo *Aedes aegypti* é baixo-média” e se observar que a presença de humanos é alta, a quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução é baixa e a precipitação pluviométrica é média, deduz-se que a postura de ovos também será relativamente baixa, uma vez que as condições são muito semelhantes às da regra dada. Este é o caso do modus ponens fuzzy generalizado.

A teoria embutida na lógica fuzzy e nos conjuntos fuzzy permite transformar em linguagem matemática as sentenças no formato “se  $X$  é  $x$  então  $Y$  é  $y$ ” e, consequentemente, possibilita a manipulação de entradas com raciocínio aproximado e a dedução

de um resultado.

Em geral, nas premissas de raciocínio aproximado escritas na forma “ $X$  é  $x$ ”,  $X$  apresenta-se na forma de substantivo e  $x$  na forma de adjetivo. Em “se a precipitação pluviométrica é alta”, pode-se associar  $X$  à precipitação pluviométrica, sendo esta uma variável, mais precisamente uma *variável linguística*. Esta variável pode assumir diferentes valores, como “muito baixa”, “média”, “alta”, que corresponde ao termo  $x$ .

**Definição 5.2.5** *Uma variável linguística  $X$  no universo  $U$  é uma variável cujos valores assumidos por ela são subconjuntos fuzzy de  $U$ .*

Para um maior detalhamento do conceito de modus ponens fuzzy generalizado, faz-se necessária a definição de relação fuzzy.

**Definição 5.2.6** *Uma relação fuzzy  $R$  sobre  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  é qualquer subconjunto fuzzy de  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ . Assim, uma relação fuzzy  $R$  é definida por uma função de pertinência  $\phi_R : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \longrightarrow [0, 1]$ .*

A uma proposição fuzzy condicional “se  $x$  é  $A$  então  $y$  é  $B$ ” é sempre possível associar uma relação fuzzy de  $U \times V$ , com  $x \in U$  e  $y \in V$ .

“se a presença de humanos é alta e a quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução é baixa e a precipitação pluviométrica é alta então a postura de ovos pelo *Aedes aegypti* é baixo-média” e se observar que a presença de humanos é alta, a quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução é baixa e a precipitação pluviométrica é média, deduz-se que a postura de ovos também será relativamente baixa, uma vez que as condições são muito semelhantes às da regra dada. Este é o caso do modus ponens fuzzy generalizado.

No caso de “se a temperatura ambiente é baixa então a atividade do mosquito é baixa”, o que acaba de ser posto é uma regra (“se  $x$  é  $A$  então  $y$  é  $B$ ”). Se tem-se o fato “a temperatura ambiente é baixa” (“ $x$  é  $A^*$ ”), ou seja, se a temperatura não é tão baixa, quase considerada média, então a atividade do mosquito também não deve ser baixa como é dito na afirmação. Mas é evidente que a atividade do artrópode não é plena, como seria em temperaturas bem mais altas. Poderia ser dito como conclusão “a atividade do mosquito é baixo-média” (“ $y$  é  $B^*$ ”). Os humanos não realizam cálculos matemáticos para inferir conclusões ou tomar decisões a partir de dados incertos, fornecidos em linguagem verbal, mas utilizam o raciocínio dedutivo, baseando-se em suas experiências de vida e informações obtidas através de outros humanos ou fontes de conhecimento.

Quanto a este tópico, o uso da lógica fuzzy tem o objetivo obter conclusões semelhantes às obtidas por humanos, mas usando cálculos matemáticos, o que se faz pela regra de composição de inferência fuzzy:

$$\phi_{B^*}(y) = \sup_{x \in U} [\phi_R(x, y) \triangle \phi_{A^*}(x)] \quad (5.2)$$

Este é o modo de inferência fuzzy (ou seja, modo de inferir conclusões a partir de premissas incertas, utilizando a lógica fuzzy) denominado *modus ponens fuzzy generalizado*.

Os sistemas baseados em regras fuzzy agem de maneira semelhante ao *modus ponens fuzzy generalizado*. É necessário fornecer alguma informação linguística, que é traduzida para a linguagem matemática e inferências são realizadas.

Na próxima seção o SBRF é apresentado com maior detalhamento.

### 5.3 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

As regras fuzzy dos SBRF se apresentam no formato “se *estado* então *resposta*”, de maneira análoga às premissas do *modus ponens* (“se  $X$  é  $x$  então  $Y$  é  $y$ ”). Como o próprio nome indica, os SBRF são baseados nessas regras, de maneira que são fornecidas várias delas para compor a base de informações do sistema.

Apesar de as regras de apresentarem em formato análogo ao do *modus ponens fuzzy*, o método mais utilizado para modelar os conectivos do sistema e realizar inferências (método de Mamdani) não utiliza uma operação que respeite as regras da implicação (para modelar o “se-então”). Para os demais conectivos são respeitadas as definições apresentadas neste capítulo.

Através da colaboração de especialistas, regras como “se a presença de humanos é alta e a quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução é alta e a precipitação pluviométrica é alta então a postura de ovos pelo *Aedes aegypti* é alta”, “se a presença de humanos é alta e a quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução é baixa e a precipitação pluviométrica é alta então a postura de ovos pelo *Aedes aegypti* é baixa-média”, etc, são obtidas e utilizadas como base para o SBRF. Através da modelagem dos conectivos e dos subconjuntos fuzzy, é possível, a partir de dados de entrada, obter inferências como saídas. Ou seja, fornecendo os atuais estados das variáveis linguísticas “presença de humanos”, “quantidade de recipientes disponíveis para a reprodução” e “precipitação pluviométrica”, o método fornece como saída o estado da variável “postura de ovos pelo *Aedes aegypti*”.

Uma base de regras fuzzy é formada por uma quantidade finita de proposições fuzzy do tipo “se *estado* então *resposta*”, em que *estado* e *resposta* são valores assumidos por variáveis linguísticas. Os conjuntos fuzzy que compõem os *estados* são chamados de *antecedentes* e o que compõem as *respostas* são os *consequentes*.

Para a construção de uma função que determine um sistema fuzzy, Barros e Basanezi [2] apresentam quatro módulos necessários: módulo de fuzzificação, módulo de base de regras, módulo de inferência fuzzy e módulo de defuzzificação.

No **módulo de fuzzificação**, através do conhecimento prévio do fenômeno ou da consulta de especialistas, as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios e as funções de pertinência envolvidas são definidas. No **módulo de base de regras**, também com base nas informações do fenômeno (seja através de fontes como livros ou de especialistas), as proposições da base de regras são descritas na forma linguística e as variáveis e suas classificações linguísticas são modeladas por conjuntos fuzzy. No **módulo de base de regras** são definidas as t-normas, t-conormas e regras de inferência a serem utilizadas para se obter a relação fuzzy que modela a base de regras, levando à linguagem matemática as regras anteriormente escritas de forma linguística. Por fim, no **módulo de defuzzificação**, escolhe-se o melhor método que seja capaz de eleger um número crisp como representação do conjunto fuzzy resultante.

Há dois principais métodos de inferência: o de Mamdani e o KTS (Kang-Takagi-Sugeno).

### Método de Inferência de Mamdani

O método de inferência de Mamdani, proposto por Mamdani e Assilan [29], modela os conectivos da seguinte maneira:

- em cada regra  $R_j$  a condicional “se  $x$  é  $A_j$  então  $u$  é  $B_j$ ” é modelada pela aplicação  $\wedge$  (mínimo);
- o conectivo “e” é modelado pela t-norma  $\wedge$  (mínimo);
- o conectivo “ou” é modelado pela t-conorma  $\vee$  (máximo).

Nota-se que o conectivo representado pelo “se-então”, diferentemente do modus ponens, não é considerado aqui uma implicação, uma vez que a aplicação  $\wedge$  (mínimo) não respeita as regras da definição de implicação. Essa é a grande diferença entre o método de inferência de Mamdani e o modus ponens.

A relação fuzzy  $\mathcal{M}_k$ , obtida pela base de regras modelada pelo método de inferência de Mamdani, é o subconjunto fuzzy de  $X \times U_k$  cuja função de pertinência é dada por

$$\phi_{\mathcal{M}_k}(x, u_k) = \max_{1 \leq i \leq r} (\phi_{R_i}(x, u_k)) = \max_{1 \leq i \leq r} [\phi_{A_j}(x) \wedge \phi_{B_{jk}}(u_k)] \quad (5.3)$$

em que  $r$  é número de regras que compõem a base de regras e  $A_j$  e  $B_{jk}$  são os subconjuntos da regra  $j$ .

No caso de as entradas ou as saídas serem múltiplas, como é representado na Tabela 5.3, cada subconjunto fuzzy  $A_j$  pode representar o produto cartesiano fuzzy de subconjuntos fuzzy:

$$\phi_{A_j}(x) = \phi_{A_{j1}}(x_1) \wedge \phi_{A_{j2}}(x_2) \wedge \dots \wedge \phi_{A_{jn}}(x_n) \quad (5.4)$$

Tabela 5.3: Base de regras para ilustrar o método de Mamdani.

	$R_1$ :	“Se $x_1$ é $A_{11}$ e $x_2$ é $A_{12}$ e ... e $x_n$ é $A_{1n}$ então $u_1$ é $B_{11}$ e $u_2$ é $B_{12}$ e ... e $u_n$ é $B_{1m}$ ”
ou		
	$R_2$ :	“Se $x_1$ é $A_{21}$ e $x_2$ é $A_{22}$ e ... e $x_n$ é $A_{2n}$ então $u_1$ é $B_{21}$ e $u_2$ é $B_{22}$ e ... e $u_n$ é $B_{2m}$ ”
ou		
$\vdots$	$\vdots$	
ou		
	$R_l$ :	“Se $x_1$ é $A_{l1}$ e $x_2$ é $A_{l2}$ e ... e $x_n$ é $A_{ln}$ então $u_1$ é $B_{l1}$ e $u_2$ é $B_{l2}$ e ... e $u_n$ é $B_{lm}$ ”
Fato:		$A' = x_1$ é $A'_1$ e $x_2$ é $A'_2$ e ... e $x_n$ é $A'_n$
Conclusão:		$u_1$ é $B_1 = \mathcal{M}_1 \circ A'$ e $u_2$ é $B_2 = \mathcal{M}_2 \circ A'$ e ... e $u_m$ é $B_m = \mathcal{M}_m \circ A'$

Para cada  $k = 1, \dots, m$  é calculada uma relação  $\mathcal{M}_k$ , específica para cada saída  $u_k$ . Ou seja, o procedimento se comporta como se existissem  $m$  SBRFs, cada um para cada variável de saída  $u_k$  e cujas regras se diferem das da Tabela 5.3 apenas ao se omitirem os consequentes que não sejam relacionados ao próprio  $u_k$ .

Ao se inserirem conjuntos fuzzy de entrada  $A' = A'_1 \times A'_2 \times \dots \times A'_{jn}$ , com  $A'_1, A'_2, \dots, A'_{jn}$  números fuzzy, os conjuntos de saída são dados por  $B_k = \mathcal{M}_k \circ A'$ , cuja função de pertinência é

$$\phi_{B_k}(u_k) = \phi_{\mathcal{M}_k \circ A'}(u_k) = \sup_x \{ \phi_{\mathcal{M}_k}(x, u_k) \wedge \phi_{A'}(x) \} \quad (5.5)$$

com  $\phi_{A'} = \phi_{A'_1} \wedge \phi_{A'_2} \wedge \dots \wedge \phi_{A'_{jn}}$ .

No método de Mamdani, seja a entrada crisp ou fuzzy, a saída do sistema será sempre fuzzy. Para transformar este resultado em um valor crisp, há vários métodos de defuzzificação, dentre os quais dois dos mais comuns são o centro de gravidade ( $G(B)$ ) e o centro dos máximos ( $C(B)$ ).

Para facilitar a notação e o entendimento do processo,  $B_k$  é representado simplifi-  
cadamente por  $B$  e  $u_k$  por  $u$ . Portanto, para cada  $B_k$  com  $k = 1, \dots, m$ , realiza-se a defuzzificação com base no método escolhido.

O centro de gravidade é obtido através das fórmulas (5.6) e (5.7), para domínio discreto e contínuo, respectivamente.

$$\frac{\sum_{i=0}^n u_i \phi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \phi_B(u_i)} \quad (5.6)$$

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} u \phi_B(u) du}{\int_{\mathbb{R}} \phi_B(u) du} \quad (5.7)$$

Ou seja, equivale a uma média aritmética de uma distribuição de dados, com  $\phi_B(u_i)$  equivalente aos pesos (correspondência) de  $u_i$  em  $B$ . É o método de defuzzificação mais empregado nos sistemas fuzzy.

O centro dos máximos é calculado pela fórmula

$$C(B) = \frac{i + s}{2} \quad (5.8)$$

com  $i = \inf\{u \in \mathbb{R} : \phi_B(u) = \max_u \phi_B(u)\}$  e  $s = \sup\{u \in \mathbb{R} : \phi_B(u) = \max_u \phi_B(u)\}$ .

### Método de Inferência de Kang-Takagi-Sugeno

O método de inferência de Kang-Takagi-Sugeno suprime o módulo de defuzzificação, sendo o consequente de cada regra dado explicitamente por uma função dos valores de entrada desta regra.

De maneira análoga à da base de regras da Tabela 5.3, pode-se escrever a base para o método KTS como na Tabela 5.4, em que fica explícita a característica citada com relação ao cálculo do consequente.

Tabela 5.4: Base de regras para ilustrar o método de KTS.

	$R_1$ :	“Se $x_1$ é $A_{11}$ e $x_2$ é $A_{12}$ e ... e $x_n$ é $A_{1n}$ então $u$ é $u_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ”
ou		
	$R_2$ :	“Se $x_1$ é $A_{21}$ e $x_2$ é $A_{22}$ e ... e $x_n$ é $A_{2n}$ então $u$ é $u_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ”
ou		
$\vdots$	$\vdots$	
ou		
	$R_l$ :	“Se $x_1$ é $A_{l1}$ e $x_2$ é $A_{l2}$ e ... e $x_n$ é $A_{ln}$ então $u$ é $u_l = g_l(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ”
Fato:		$A' = x_1$ é $A'_1$ e $x_2$ é $A'_2$ e ... e $x_n$ é $A'_n$
Conclusão:		$u = f_l(x_1, x_2, \dots, x_n)$

A saída geral é dada por

$$u = f_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{j=1}^l w_j \Delta_1 g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sum_{j=1}^l w_j} = \frac{\sum_{j=1}^l w_j \Delta_1 u_j}{\sum_{j=1}^l w_j}$$

em que  $w_j$  são pesos correspondentes à contribuição da regra  $R_j$ , dados por  $w_j = \phi_{A_{j1}}(x_1) \Delta_2 \phi_{A_{j2}}(x_2) \dots \Delta_2 \phi_{A_{jn}}(x_n)$  e  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  são t-normas (em geral, produto ou mínimo).

As funções  $g_i$  normalmente são lineares afins devido à sua eficiência e aplicabilidade, se apresentando sob a forma

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}$$

Este caso particular é denominado Takagi-Sugeno (TS).

### 5.3.1 Base de regras fuzzy aplicada ao problema da dengue

O crescimento específico, a oviposição, a dispersão, a taxa de transformação de mosquitos aquáticos em alados e a mortalidade dos mosquitos alados, representados por  $n$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha_M$ ,  $\gamma$  e  $\mu_A$ , são parâmetros essenciais nas modelagens realizadas para a população de *Aedes aegypti* e, conseqüentemente, na dinâmica da dengue. Dependem de fatores como a densidade de humanos ( $H$ ), densidade de recipientes ( $Q$ ) e precipitação pluviométrica ( $C$ ), sendo portanto considerados no modelo como funções dessas variáveis.

Sabe-se que pode haver mais variáveis que influenciem no ciclo do *Ae. aegypti*, mas, como já dito anteriormente, o aumento na quantidade de variáveis em um problema ocasiona um aumento na sua complexidade, tornando-o mais difícil de ser resolvido matematicamente.

Como já discutido no Capítulo 3, as variáveis  $Q$  (densidade de criadouros),  $C$  (precipitação pluviométrica) e  $H$  (densidade de humanos), apesar de poderem ser representadas numericamente, neste trabalho escolhe-se tratá-las como variáveis fuzzy, uma vez que nenhuma delas é conhecida com exatidão. Seus valores são previsões ou estimativas e ainda costumam ser rotuladas linguisticamente como “alta”, “médio-alta” ou “baixa”. E por serem dependentes de tais variáveis,  $v(H, Q, C)$ ,  $\kappa(H, Q, C)$ ,  $\alpha_M(H, Q, C)$ ,  $\gamma(H, Q, C)$  e  $\mu_A(H, Q, C)$  também são consideradas fuzzy. Acredita-se que tal tratamento seja mais realista por se relevarem as incertezas inerentes às variáveis em questão.

Tendo-se em mãos estimativas para  $Q$ ,  $H$  e  $C$ , é possível inferir valores para os parâmetros  $v(H, Q, C)$ ,  $\kappa(H, Q, C)$ ,  $\alpha_M(H, Q, C)$ ,  $\gamma(H, Q, C)$  e  $\mu_A(H, Q, C)$ . Especialistas são capazes de informar verbalmente como as variações de  $Q$ ,  $H$  e  $C$  influenciam nos quatro parâmetros citados. Se há muitos humanos, muitos recipientes e pouca chuva, então os ovos não eclodirão por causa da falta de água, tornando baixo o valor de  $\gamma(H, Q, C)$ . Se há poucos humanos, muitos recipientes e muita chuva, o valor de  $\alpha_M(H, Q, C)$  será alto porque as condições serão propícias para a reprodução mas os mosquitos terão que se movimentar bastante em busca de sangue para a maturação dos ovos. Ou seja, pode-se modelar as informações no formato de regras fuzzy e construir um SBRF para inferir os valores dos parâmetros desejados.

Em geral, o método de inferência fuzzy que apresenta os melhores resultados é o de Mamdani. O KTS, apesar de também ser bastante popular, é mais analítico, exigindo que se tenha um conhecimento mais apurado do problema em termos matemáticos, de maneira a tornar possível uma boa modelagem das funções representativas dos consequentes do sistema. Por não se ter tal conhecimento e se considerar o primeiro método satisfatório, a opção neste trabalho será pelo método de inferência de Mamdani.

As três variáveis de entrada do SBRF a ser construído,  $H$ ,  $Q$  e  $C$ , por mais que possam assumir valores clássicos, passam por um processo de fuzzyficação. Recebem valores como “alto” ou “médio”. A variável  $H$  recebe o valor “baixa” com pertinência próxima a 1 em um ponto se a densidade populacional na região em que se encontra for muito pequena ou nula. À medida que a densidade vai aumentando, passa a ser “baixa” com uma pertinência mais baixa, mas já passa a ter pertinência mais alta ao subconjunto fuzzy “média”. Essa descrição está ilustrada na Figura 5.1. De forma



semelhante, a variável *densidade de recipientes*  $Q$  também pode assumir diferentes graus de pertinência a subconjuntos fuzzy “baixa”, “média” ou “alta”, dependendo do número estimado de recipientes em potencial para se tornar criadouro na região. A variável *precipitação pluviométrica*  $C$  pode assumir valores análogos, de acordo com a quantidade de água estimada no período.

As variáveis de saída são cinco,  $v$ ,  $\kappa$ ,  $\gamma$ ,  $\mu_A$  e  $\alpha_M$ , e a utilização de cada uma delas depende do modelo utilizado. A variável  $v$  corresponde à taxa de nascimento específica dos Modelos 1 e 2.  $\kappa$  é a taxa de oviposição do Modelo 3. Em regiões muito urbanas, em que não há a presença de muitos mamíferos além do homem, caso haja poucos humanos na região, não haverá muito sangue para a maturação dos ovos e, portanto, a postura será baixa, o que significa um baixo valor para  $\kappa$ .  $\gamma$  diz respeito à taxa de passagem de mosquitos da fase aquática para a fase alada, no Modelo 3. Se a fêmea colocar os ovos mas não chover em seguida, a fase aquática desta nova geração será mais longa do que se houvesse precipitação e o valor de  $\gamma$  será menor, uma vez que os ovos demorarão para eclodir. Os que já tiverem eclodido, entretanto, caso a água seja muito escassa, com certeza sofrerão uma maior mortalidade  $\mu_A$ . O coeficiente de dispersão  $\alpha_M$  é uma variável presente em todos os modelos e aumenta de acordo com a escassez de recipientes e de humanos. Ou seja, se faltar sangue humano ou local para a reprodução, os mosquitos irão se locomover mais para conseguir o que necessitam. Caso haja esses recursos em abundância no local, não há porquê o artrópode sair de onde se encontra. Entretanto, caso não haja chuva, o mosquito naturalmente “percebe” que não é época para a reprodução, de acordo com especialistas. Dessa maneira, se não há água não há muita locomoção em busca dos outros recursos necessários à reprodução.

É importante frisar que, na modelagem realizada neste trabalho, considera-se que, mesmo havendo quantidades baixas de humanos e de recipientes, a influência desta variáveis sobre o decaimento da população do mosquito é limitada. Isso se deve ao fato de o mosquito ser bastante versátil, sugando sangue também de outros animais (mas com preferência ao humano) e colocando seus ovos em locais mais sujos e precários (há preferência por água limpa e parada), caso o meio realmente não apresente alternativas. Mas considera-se que essas situações ocorram em baixa frequência, de maneira que, em geral, a mortalidade supere a natalidade em tais condições desfavoráveis ao mosquito.

Algumas regras utilizadas na composição da base de regras fuzzy são apresentadas a seguir:

- se a densidade de humanos é alta e a densidade de recipientes disponíveis para a reprodução é alta e a precipitação pluviométrica é alta então o crescimento específico é alto, a oviposição é alta, a dispersão é baixa, o coeficiente de trans-

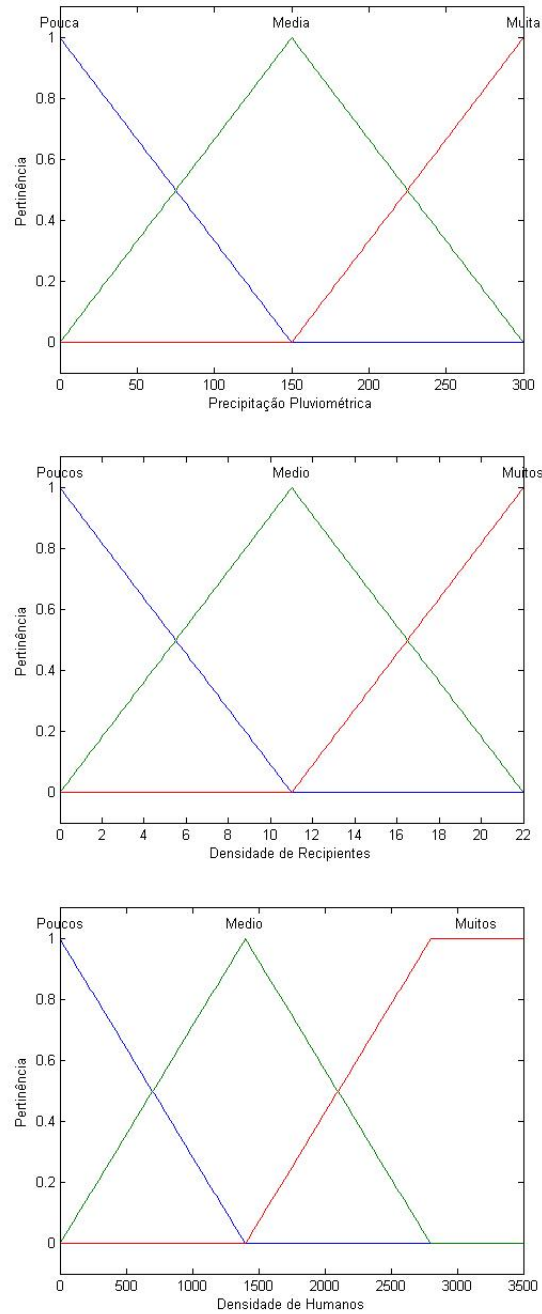


Figura 5.1: Subconjuntos fuzzy relacionados à precipitação pluviométrica, à densidade de recipientes e à densidade de humanos.

formação é alta e a mortalidade de aquáticos é baixa;

- se a densidade de humanos é baixa e a densidade de recipientes disponíveis para a reprodução é baixa e a precipitação pluviométrica é alta então o crescimento

específico é médio, a oviposição é média, a dispersão é alta, o coeficiente de transformação é alto e a mortalidade de aquáticos é baixa;

- se a densidade de humanos é baixa e a densidade de recipientes disponíveis para a reprodução é baixa e a precipitação pluviométrica é baixa então o crescimento específico é baixo, a oviposição é baixa, a dispersão é baixa, o coeficiente de transformação é baixo e a mortalidade de aquáticos é alta

Utilizando-se o *Toolbox Fuzzy* do *software* MATLAB [1] são definidas as variáveis de entrada ( $H$ ,  $Q$  e  $C$ ) e as de saída ( $v$ ,  $\kappa$ ,  $\gamma$  e  $\mu_A$ ,  $\alpha_M$ ) e os valores que elas podem assumir (os subconjuntos fuzzy “baixo”, “alto”, etc). São inseridas regras como as citadas e selecionado o método de inferência de Mamdani com a defuzzificação realizada através do método do centro de gravidade.

### **Incerteza de natureza aleatória**

Além do conhecimento parcial sobre o comportamento de uma variável ambiental, a aleatoriedade do fenômeno também pode contribuir para a sua natureza incerta. Neste trabalho, o fator chuva, que influencia os parâmetros relacionados à reprodução e à dispersão do *Aedes aegypti*, é considerada também uma variável aleatória.

Para a simulação do espalhamento da dengue referente a um período de tempo que ainda não aconteceu, pode-se ter idéia da quantidade de humanos e de recipientes presentes no domínio, mas a precipitação pluviométrica pode apresentar grandes variações imprevisíveis após um determinado período de tempo. A previsão pode ser realizada para até alguns dias a partir da data atual, mas para alguns meses adiante não há certeza alguma sobre qualquer prognóstico que se tente realizar. Desta maneira, opta-se por se considerar a precipitação pluviométrica como variável aleatória, cuja distribuição é fornecida por dados de precipitações nos anos passados.

Como se pretende realizar cada simulação em período correspondente a três meses incluindo o início do verão em Campinas (Dezembro, Janeiro e Fevereiro), são coletados os dados de chuva referentes a esses três meses nos últimos vinte anos [11]. No programa a ser implementado, pretende-se inserir como dado de chuva um valor fixo a cada quinze dias. Opta-se por não inserir dados diários pela grande exigência computacional. Cada valor de chuva a ser inserido é sorteado através do Método da Transformação Integral.

### **Método da Transformação Integral**

Seja uma variável aleatória  $X$  com função de distribuição acumulada  $F(x)$ . Definindo-se a variável aleatória  $U = F(x)$  prova-se em [12] que ela possui distribuição uniforme

$U(0, 1)$ . Portanto, para o sorteio de um valor para  $X$ , levando-se em conta a sua função de distribuição, basta seguir os seguintes passos:

1. utilizar o comando *rand(1)* no *Matlab*, o qual utiliza uma distribuição  $U(0, 1)$  para gerar um número aleatório  $u$ ;
2. resolver  $u = F(x)$ , obtendo-se o valor para  $x$  ( $x = F^{-1}(u)$ ).

Para o caso da variável aleatória correspondente à precipitação pluviométrica em Campinas nos primeiros quinze dias de Janeiro, a função de distribuição acumulada é discreta. Neste caso, de acordo com método descrito por Kennedy Jr. e Gentle [27], pode-se definir o conjunto de todos os valores  $x_1 < x_2 < x_3 \dots$  em que a variável  $X$  possui probabilidade não-nula de ocorrer. Esta distribuição pode ser amostrada tomando-se  $X = x_i$  em que  $F(x_{i-1}) < u < F(x_i)$  com  $u$  sendo um número aleatório gerado através da distribuição uniforme  $U(0, 1)$ .

Os dados que definem a distribuição acumulada da precipitação pluviométrica no trabalho são valores correspondentes ao somatório das precipitações pluviométricas diárias em um período de quinze dias, para uma mesma quinzena em cada um dos últimos vinte e um anos. Por exemplo, para a segunda quinzena de Janeiro foram obtidos os valores da Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Somatória das precipitações pluviométricas diárias na primeira quinzena de Janeiro de 1989 a 2009.

Ano	Precipitação	Ano	Precipitação	Ano	Precipitação
1989	75.2 mm	1996	84 mm	2003	106.6 mm
1990	106.3 mm	1997	188.6 mm	2004	76.8 mm
1991	277.9 mm	1998	33 mm	2005	271.2 mm
1992	77.2 mm	1999	121.1 mm	2006	92.9 mm
1993	33 mm	2000	60 mm	2007	211.3 mm
1994	109.6 mm	2001	114.6 mm	2008	176.1 mm
1995	82.2 mm	2002	179.9 mm	2009	276.9 mm

Fonte: Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento [11].

A distribuição acumulada é dada pelo gráfico da Figura 5.2. Desta maneira, se sorteado o valor  $u = 0.3932$ , pelo comando *rand(1)* do MATLAB, obtém-se  $x_i = 92.9$ .

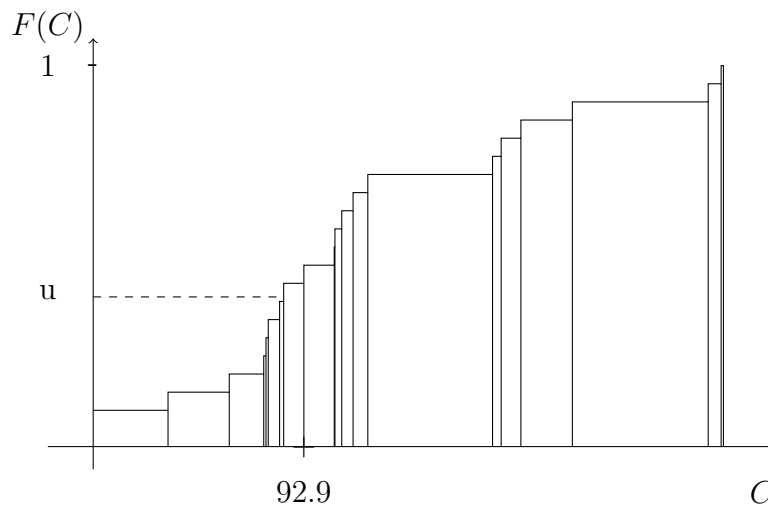


Figura 5.2: Método da Transformação Integral para sorteio da variável  $C$  relacionada à quantidade de chuva total na segunda quinzena de Janeiro.  $F(C)$  é a sua função de distribuição acumulada, baseada na Tabela 5.5;  $u$  é o valor sorteio de uma variável uniforme  $U(0,1)$  e  $C = 92.9$  é o valor de sorteio para  $C$  encontrado pelo método.

# Capítulo 6

## Acoplamento das ferramentas, simulações e resultados

Após as apresentações da modelagem matemática realizada, resultando em três modelos epidemiológicos representados por sistemas de equações diferenciais parciais de difusão; dos métodos numéricos de Elementos Finitos e de Crank-Nicolson, realizados através das discretizações do domínio espacial e do temporal, respectivamente; do Método da Transformação Integral, para o sorteio da variável precipitação pluviométrica, e do Sistema Baseado em Regras Fuzzy, utilizado para inferir, a partir das variáveis fuzzy, os parâmetros de dispersão e de reprodução do mosquito, neste capítulo será realizado o acoplamento destas ferramentas, com o intuito de se solucionar qualquer uma das modelagens representativas do problema de espalhamento da dengue no distrito sul da cidade de Campinas. Posteriormente, serão apresentados os resultados obtidos da implementação computacional, sob a forma de gráficos de superfícies fornecendo estimativas das densidades populacionais sobre o domínio em determinados passos no tempo e de gráficos com valores das densidades em determinados pontos com a evolução ao longo do tempo.

### 6.1 Acomplamento das ferramentas

Um esquema representativo do acoplamento das diversas ferramentas utilizadas na resolução do problema se encontra na Figura 6.1. O método de Crank-Nicolson divide o tempo total de 90 dias de domínio temporal em 900 subintervalos de mesmo tamanho, número correspondente ao total de iterações a serem realizadas. O domínio espacial é discretizado através do *software* Gmsh em uma malha irregular de 1221 pontos e 2227

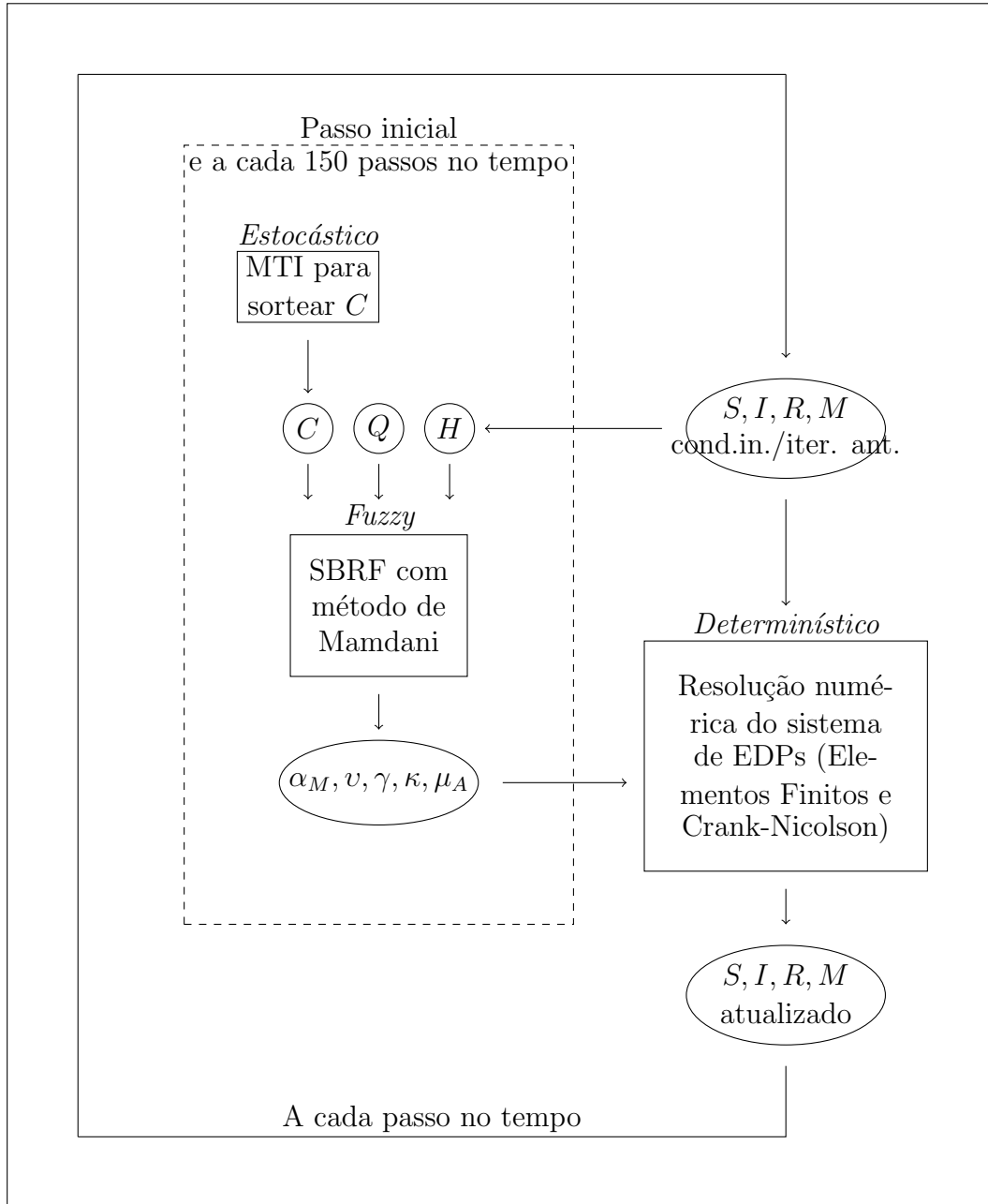


Figura 6.1: Esquema representativo do algoritmo de simulação acoplado as ferramentas estudadas.

triângulos.

Inicialmente, é sorteado, através do Método da Transformação Integral, um valor para a variável  $C$  (precipitação pluviométrica, que se modifica durante o tempo) e são definidos os valores para  $Q$  (densidade de recipientes, que assume um valor para cada região) e para  $H$  (densidade de humanos, que assume um valor para cada região), em cada ponto do domínio, baseados em pesquisa realizada na região. Estes valores são

entradas para processo de inferência de Mamdani. Como saída, têm-se valores para  $\alpha_M$ ,  $v$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$  e/ou  $\mu_A$  – dependendo do modelo a ser utilizado – em cada ponto do domínio. São definidas as condições iniciais para as variáveis densidades populacionais de humanos ( $S$ ,  $I$  e  $R$ ) e de mosquitos ( $M$ ;  $M_S$  e  $M_I$ ; ou  $A$ ,  $M_S$  e  $M_I$ , dependendo do modelo). Em posse dos valores dos parâmetros relacionados à dispersão do mosquito e à sua reprodução e das condições iniciais para as populações, implementa-se o algoritmo que realiza o tratamento das condições iniciais e soluciona o problema através dos métodos de Elementos Finitos e de Crank Nicolson, realizando-se o primeiro passo no tempo. No passo seguinte, os valores de saída para as densidades populacionais servem de entrada para outra resolução através dos métodos numéricos referentes ao espaço e ao tempo. Esta última etapa é repetida a cada passo no tempo, até o fim de 150 iterações. Esta quantidade de passos equivale ao período de 15 dias, ao final do qual se realiza um novo sorteio para a precipitação pluviométrica, redefinindo-se os parâmetros de dispersão do mosquito e de sua reprodução através do método de inferência de Mamdani. Devido à dispersão dos humanos, apesar de ser pequena, a cada final de 15 dias a movimentação é levada em conta, redefinindo a variável  $H = S + I + R$  em cada ponto do domínio espacial. Novamente, até o fim de outras 150 iterações, o sistema de EDPs é resolvido utilizando-se os métodos numéricos, quando outro valor para a chuva é sorteado e  $H$  é novamente redefinido. Tal processo segue até o total de 900 passos no tempo.

## 6.2 Simulações e Resultados

Como já citado, o domínio temporal de 90 dias é dividido em 900 subintervalos de mesmo tamanho e o espacial é discretizado através do *software* Gmsh em uma malha irregular de 1221 pontos e 2227 triângulos (Figura 6.2). Valores de quantidade de recipientes encontrados e de população humana referentes a cada região coberta por um centro de saúde diferente (Figura 6.3) foram fornecidos por pesquisadores e são utilizados para determinar parâmetros e condições iniciais do problema.

Notou-se que tais valores para as pequenas regiões, mais ao norte do distrito, eram semelhantes entre si, se diferenciando das três grandes regiões a leste, a oeste e a sul. Com base nesta observação, o domínio espacial foi dividido em quatro grande áreas, cada uma com um valor diferente para a quantidade de recipientes e de humanos. Dentro de uma mesma região, entretanto, são consideradas quantidades constantes de um ponto para outro da malha, de maneira a facilitar as definições de tais variáveis e permitir que o trabalho seja possível de ser realizado. Nas Figuras 6.4 e 6.5 são apresentados os valores da densidade de humanos em cada ponto do domínio e da quantidade de recipientes



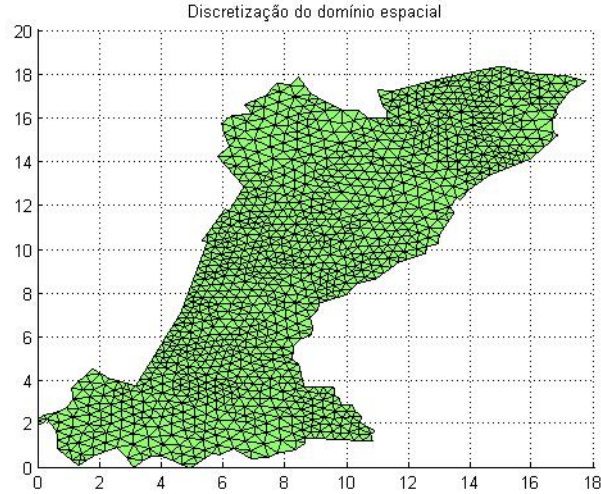


Figura 6.2: Malha gerada resultante da discretização do domínio espacial através do *software* Gmsh.

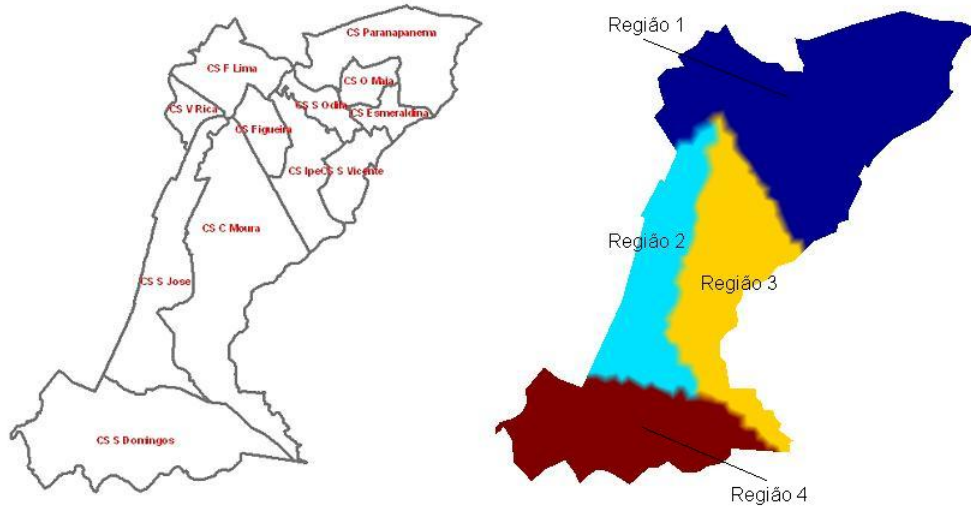


Figura 6.3: Regiões correspondentes à cobertura de cada centro de saúde (esq.) e divisão utilizada no trabalho de acordo com as semelhanças entre as regiões (dir.).

encontrados em pesquisa nas regiões, dividido pela tamanho de cada área correspondente, resultando em uma aproximação da proporção da densidade de recipientes em unidades por quilômetro quadrado em cada região.

A transmissão viral é um fator que varia muito de acordo com cada indivíduo, como já explicado anteriormente (seção 3.3), há fatores tanto relacionados com o mosquito quanto com o ser humano e quanto com o próprio vírus. O fato de uma população local

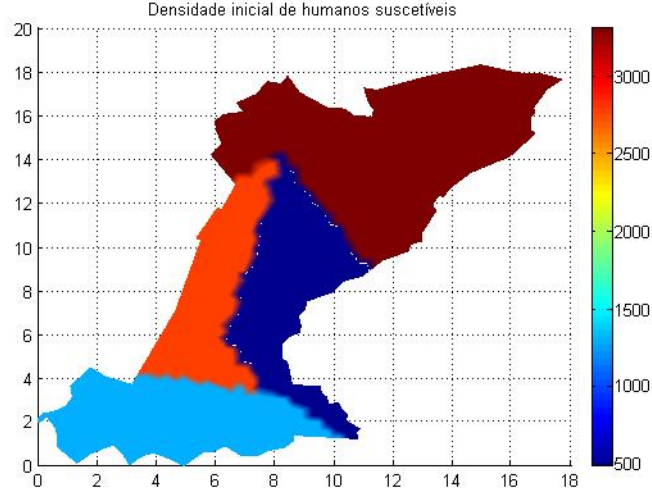


Figura 6.4: Condição inicial para a densidade de humanos suscetíveis  $S_0$  para os três modelos, semelhante em todas as simulações.

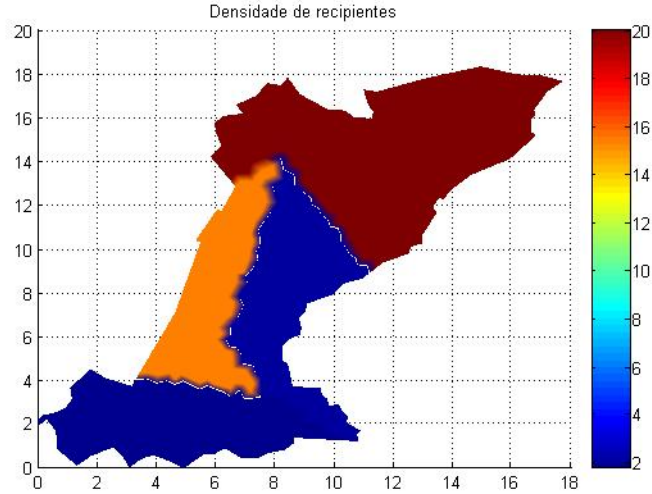


Figura 6.5: Densidade de recipientes sobre o domínio espacial para os três modelos.

já ter passado por uma epidemia com um dos sorotipos da dengue ocasiona grande diferença no espalhamento do vírus em uma época posterior, uma vez que se a mesma cepa voltar à região, muitos humanos já estarão imunes a ela (acarretando em uma grande queda no valor de  $\beta_2$ , relacionado com a infecção humana).

Portanto, por mais que se determinem valores médios para  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , estes podem variar enormemente devido às condições já mencionadas. Na literatura, não se encontrou um consenso quanto aos valores de tais parâmetros. Na realidade, não foi encontrado

um estudo de modelagem matemática como o presente em que se tenha levado em consideração um domínio real com condições heterogêneas que possam mudar no espaço e no tempo.

Tais motivos levam os autores a, fixados os demais parâmetros, procurarem estimativas razoáveis para  $\beta_1$  e  $\beta_2$  de maneira que se obtenham resultados semelhantes aos dados reais. As unidades do problema são o quilômetro para a distância e o dia para o tempo. Os valores dos parâmetros determinísticos que não variam de uma simulação para a outra se encontram na Tabela 6.1.

Como referência, foram utilizados dados relativos ao fim de 2006 e começo de 2007, quando se teve início a maior epidemia da cidade de Campinas. De acordo com os dados fornecidos pelos órgãos DIMEN, IAL, GVE, COVISA e SINANNET, através da Secretaria Municipal da Saúde, em janeiro e fevereiro de 2007 foram confirmados, respectivamente, 15 e 113 casos no distrito sul do município. Como o número de casos notificados no ano de 2007 em toda a cidade (cerca de vinte mil notificações foram realizadas) foi aproximadamente o quádruplo do de confirmados (pelo fato de que nem todos que apresentam os sintomas da dengue são submetidos ao exame de sangue para a confirmação da presença do vírus), consideram-se os valores de 60 e de 450 como os números estimados de casos de dengue nos dois primeiros meses de 2007 na região de interesse. Além do fato de que muitos que apresentam os sintomas da doença serem considerados casos positivos sem precisar se submeter a exame laboratório, muitos indivíduos não identificam os sintomas como sendo os da dengue, pois o quadro clínico é muito variável, podendo ser confundido com outras viroses e simples gripes, o que faz com que a pessoa não procure por atendimento médico e não descubra a verdadeira causa do seu estado. Desta maneira, os números aqui utilizados como base não podem ser encarados como dados certos e exatos, devendo-se permitir considerar uma certa margem de variação destes valores.

Tabela 6.1: Valores de parâmetros determinísticos.

Parâmetro	Valor
$\alpha_H$	0.0015 km <sup>2</sup> /dia
$\mu_1$	0.04 dia <sup>-1</sup>
$\mu_2$ ou $\mu$	0.05 dia <sup>-1</sup>
$\sigma$	0.1 dia <sup>-1</sup>

Relacionados ao tempo, têm-se os seguintes parâmetros: tempo final  $t_f = 90$  dias e número de passos no tempo (ou número de iterações)  $nt = 900$ .

Alguns dos parâmetros utilizados se encontram na Tabela 6.1. Os valores das áreas, das quantidades totais de habitantes humanos e de recipientes e os consequentes valo-

res de entrada para o SBRF das variáveis  $Q$  (densidade de recipientes) em unidades por quilômetro quadrado e  $H$  (densidade de humanos) em habitantes por quilômetro quadrado se encontram na Tabela 6.2, de acordo com a região (*cf.* ilustração na Figura 6.3)

Tabela 6.2: Valores das áreas, número total de recipientes encontrados em pesquisa, variável  $Q$ , número de pessoas residentes e variável  $H$ , de acordo com a região.

Variável	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Área	53.6464 km <sup>2</sup>	20.4067 km <sup>2</sup>	26.5709 km <sup>2</sup>	27.2613 km <sup>2</sup>
T. rec.	1081 u.	311 u.	56 u.	45 u.
$Q$	20.1505 u./km <sup>2</sup>	152401 u./km <sup>2</sup>	21076 u./km <sup>2</sup>	16507 u./km <sup>2</sup>
T. hum.	178705 hab.	56205 hab.	12325 hab.	35821 hab.
$H$	3331.2 hab./km <sup>2</sup>	2754.2 hab./km <sup>2</sup>	4683.8 hab./km <sup>2</sup>	1314.0 hab./km <sup>2</sup>

As variáveis  $H$ ,  $Q$  e  $C$  podem assumir os valores “pouca”, “baixo”, “média”, como está ilustrado na Figura 6.6. As regras utilizadas para inferir  $\alpha_M$ ,  $v$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$  e  $\mu_A$  estão apresentadas na Tabela 6.3.

Para a construção das bases de regras e dos subconjuntos fuzzy em questão, informações a respeito do comportamento do mosquito foram coletadas em livros e artigos [17], [42], [23]. Infelizmente, não houve a oportunidade de se trabalhar com um entomólogo. Espera-se que, com a colaboração de especialistas, seja possível, em trabalhos futuros, realizar a apuração das bases de regras e dos subconjuntos fuzzy, com o intuito de permitir que os resultados dos modelos se aproximem mais da realidade.

$\alpha_M$  tem valor mínimo de 0.01 km<sup>2</sup>dia<sup>-1</sup> e máximo de 0.02 km<sup>2</sup>dia<sup>-1</sup>.  $v$  varia entre 0 e 0.147 dia<sup>-1</sup>,  $\kappa$  entre 0 e 0.45 dia<sup>-1</sup>,  $\gamma$  entre 0 e 0.2 dia<sup>-1</sup> e  $\mu_A$  entre 0.075 e 0.225 dia<sup>-1</sup>.

A base de regras é chamada, realizando-se a inferência fuzzy, na primeira iteração e a cada 150 iterações, redefinindo, para todos os pontos do domínio espacial, os valores de  $\alpha_M$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $v$  e/ou  $\mu_A$  (de acordo com o modelo).

As simulações ocorrem através do *software* MATLAB versão 7.0 em ambiente Microsoft Windows XP Professional, processador Intel Core 2 Duo e memória RAM de 3.24 GB, resultando em tempo de simulação de 38, 56 e 62 minutos para os Modelos 1, 2 e 3, respectivamente.

## 6.2.1 Simulações 1, 2 e 3

As primeiras simulações são apresentadas de maneira concomitante com o intuito de se compararem os diferentes modelos propostos no Capítulo 3. Sob as mesmas condições

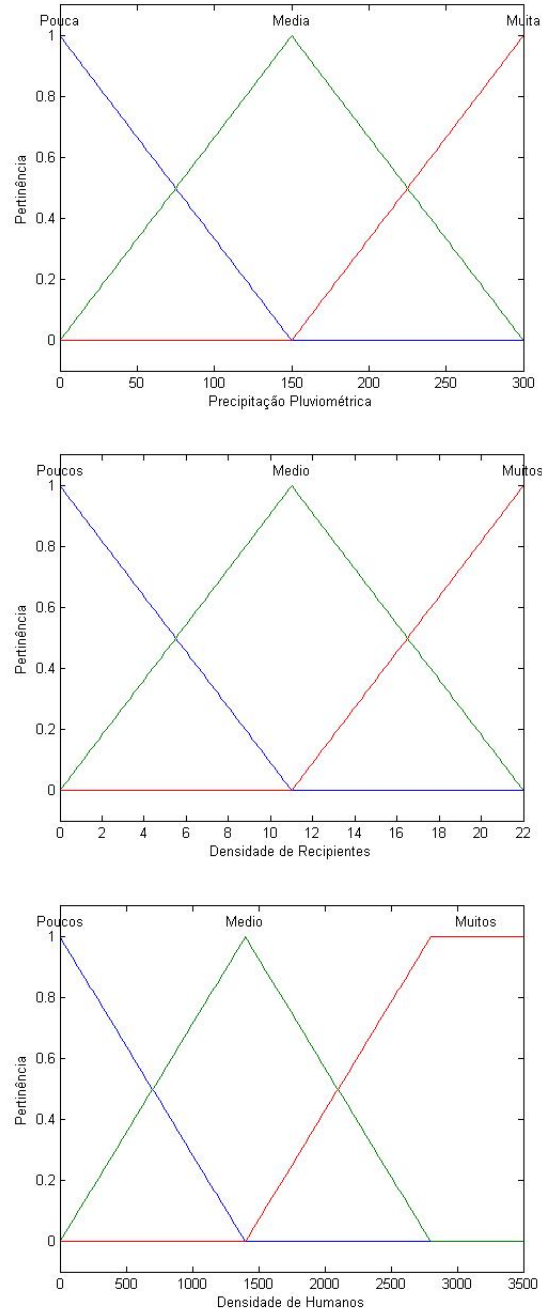


Figura 6.6: Subconjuntos fuzzy relacionados à precipitação pluviométrica, à densidade de recipientes e à densidade de humanos.

iniciais e mesmo conjunto de parâmetros já mencionados, três algoritmos são implementados, um para cada modelo, e são realizadas as simulações. São utilizados valores para a precipitação pluviométrica iguais às de Dezembro de 2006 e de janeiro e fevereiro de 2007, quando se teve início a maior epidemia da cidade de Campinas. Nos meses

Tabela 6.3: Valores linguísticos das variáveis  $\alpha_M$ ,  $v$  e  $\kappa$  em função de  $C$ ,  $Q$  e  $H$  e das variáveis  $\gamma$  e  $\mu_A$  em função de  $C$ .

$C$ baixo								
	$H$ baixo		$H$ médio		$H$ alto		$\gamma$ baixo $\mu_A$ alto	
$Q$ baixo	$\alpha_M$	baixo	$\alpha_M$	baixo	$\alpha_M$	baixo		
	$v$	baixo	$v$	baixo	$v$	baixo		
	$\kappa$	baixo	$\kappa$	baixo	$\kappa$	baixo		
$Q$ médio	$\alpha_M$	baixo	$\alpha_M$	baixo	$\alpha_M$	baixo		
	$v$	baixo	$v$	baixo	$v$	baixo		
	$\kappa$	baixo	$\kappa$	baixo	$\kappa$	baixo		
$Q$ alto	$\alpha_M$	baixo	$\alpha_M$	baixo	$\alpha_M$	baixo		
	$v$	baixo	$v$	baixo	$v$	médio-baixo		
	$\kappa$	baixo	$\kappa$	baixo	$\kappa$	médio-baixo		
$C$ médio								
	$H$ baixo		$H$ médio		$H$ alto			$\gamma$ médio $\mu_A$ médio
$Q$ baixo	$\alpha_M$	alto	$\alpha_M$	médio-alto	$\alpha_M$	médio-alto		
	$v$	médio-baixo	$v$	médio-baixo	$v$	médio		
	$\kappa$	médio-baixo	$\kappa$	médio-baixo	$\kappa$	médio		
$Q$ médio	$\alpha_M$	médio-alto	$\alpha_M$	médio-baixo	$\alpha_M$	baixo		
	$v$	médio-baixo	$v$	médio	$v$	médio-alto		
	$\kappa$	médio-baixo	$\kappa$	médio	$\kappa$	médio-alto		
$Q$ alto	$\alpha_M$	médio	$\alpha_M$	baixo	$\alpha_M$	baixo		
	$v$	médio	$v$	médio-alto	$v$	médio-alto		
	$\kappa$	médio	$\kappa$	médio-alto	$\kappa$	médio-alto		
$C$ alto								
	$H$ baixo		$H$ médio		$H$ alto			$\gamma$ alto $\mu_A$ baixo
$Q$ baixo	$\alpha_M$	alto	$\alpha_M$	alto	$\alpha_M$	alto		
	$v$	médio	$v$	médio	$v$	médio-alto		
	$\kappa$	médio	$\kappa$	médio	$\kappa$	médio-alto		
$Q$ médio	$\alpha_M$	alto	$\alpha_M$	médio	$\alpha_M$	médio-baixo		
	$v$	médio-baixo	$v$	médio-alto	$v$	alto		
	$\kappa$	médio-baixo	$\kappa$	médio-alto	$\kappa$	alto		
$Q$ alto	$\alpha_M$	médio-alto	$\alpha_M$	médio-baixo	$\alpha_M$	baixo		
	$v$	médio-alto	$v$	alto	$v$	alto		
	$\kappa$	médio-alto	$\kappa$	alto	$\kappa$	alto		

janeiro de 2007 e fevereiro de 2007, estima-se que ocorreram por volta 60 e 450 casos, respectivamente.

Com o intuito de se compararem os resultados obtidos com o modelo e os dados reais, opta-se por, apenas neste caso, não se realizar o sorteio da variável precipitação pluviométrica. Por se tratar de um período de tempo que já ocorreu, os valores da chuva nos três meses citados são conhecidos, sendo dados pelos valores apresentados na

Tabela 6.4.

Tabela 6.4: Valores das somatórias das precipitações diárias para períodos quinzenais de dezembro/06, de janeiro/07 e de fevereiro/07.

Período	Precipitação pluviométrica
02/12/2006 a 16/12/2006	89.4 mm
17/12/2006 a 31/12/2006	109 mm
01/01/2007 a 14/01/2007	264.4 mm
15/12/2007 a 30/01/2007	211.3 mm
31/01/2007 a 13/02/2007	74.2 mm
14/12/2007 a 01/12/2007	128 mm

Fonte: Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento [11].

As condições iniciais são dadas pela Tabela 6.5.  $\Omega$  denota o domínio espacial e  $\Pi$  o conjunto das regiões de áreas equivalentes a um quilômetro quadrado em torno dos pontos  $(x, y) = (2.7, 2.75)$ ,  $(x, y) = (1.9, 4.0)$ ,  $(x, y) = (5.3, 6.3)$  e  $(x, y) = (10, 14)$ . A distribuição dos valores de  $S_0$  e  $I_0$  (iguais para os três modelos) em indivíduos por quilômetro quadrado ao longo do domínio estão ilustrados nas Figuras 6.7 e 6.8. As condições iniciais para os humanos significam que existem doze indivíduos infectantes distribuídos em quatro localidades distintas do domínio espacial e a quantidade de recuperados é nula, indicando que a contagem de recuperados passa a ser realizada a partir do instante inicial  $t = 0$ . Os mosquitos são distribuídos homogeneamente sobre o domínio ( $M_S + M_I + A = 15$ ), de maneira que se espera que as condições do meio tratem de promover, ao longo do tempo, a heterogeneidade esperada devido às disparidades nestas condições ambientais. Há diferenças na distribuição da população de mosquitos entre suscetíveis e infectantes, de maneira que nas áreas em que há humanos infectantes, considera-se que há mosquitos já infectantes também (Figura 6.8). Os valores ajustados para os parâmetros relacionados com a transmissão estão listados na Tabela 6.6.

## Resultados

Os resultados das simulações são apresentados através de três maneiras distintas:

- através de gráficos para cada população ao longo do domínio espacial em um instante no tempo (em geral, no tempo final de 90 dias), com cores mais quentes indicando valores mais altos, de acordo com designação na barra de cores;
- através de gráficos para cada população com os valores de suas densidades a cada passo no tempo (até o total de 900 passos), em um ponto específico do domínio espacial;

Tabela 6.5: Valores das condições iniciais das simulações do primeiro grupo.

Mod.	$S_0$	$I_0$	$R_0$	$A_0$	$M_{S_0}$	$M_{I_0}$
1	$S_0 = H$ em $\Omega - \Pi$ e	$I_0 = 0$ em $\Omega - \Pi$ e	$R_0 = 0$ em $\Omega$	$M = 15$ em $\Omega$		
2	$S_0 = H - 3$ em $\Pi$	$I_0 = 3$ em $\Pi$		$M_{S_0} = 15$ em $\Omega - \Pi$ , $M_{S_0} = 9$ em $\Pi$		$M_{I_0} = 0$ em $\Omega - \Pi$ e $M_{I_0} = 6$ em $\Pi$
3				$A_0 = 7$ em $\Omega$	$M_{S_0} = 8$ em $\Omega - \Pi$ e $M_{S_0} = 2$ em $\Pi$	$M_{I_0} = 0$ em $\Omega - \Pi$ e $M_{I_0} = 6$ em $\Pi$

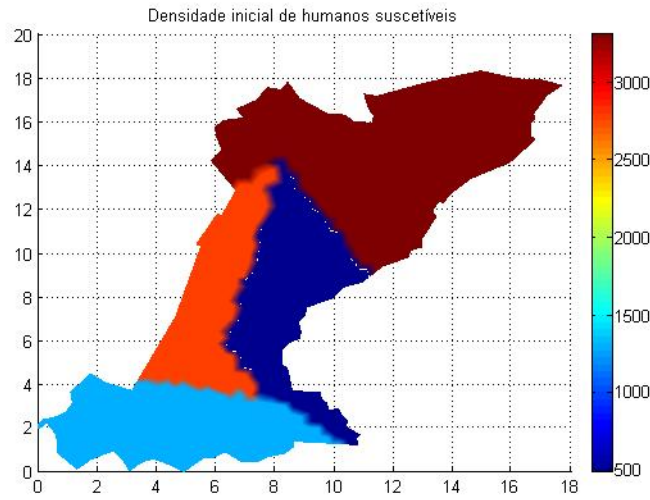


Figura 6.7: Condição inicial para a densidade de humanos suscetíveis  $S_0$  para os três modelos.

Tabela 6.6: Valores utilizados para os parâmetros de transmissão de acordo com o modelo.

	$\beta_1$	$\beta_2$
Modelo 1	$3.0 \times 10^{-7} \text{ km}^2 \text{ dia}^{-1} \text{ ind.}^{-1}$	
Modelo 2	$4.5 \times 10^{-3} \text{ km}^2 \text{ dia}^{-1} \text{ ind.}^{-1}$	$1.5 \times 10^{-5} \text{ km}^2 \text{ dia}^{-1} \text{ ind.}^{-1}$
Modelo 3	$4.5 \times 10^{-3} \text{ km}^2 \text{ dia}^{-1} \text{ ind.}^{-1}$	$1.95 \times 10^{-5} \text{ km}^2 \text{ dia}^{-1} \text{ ind.}^{-1}$

- através de valores finais totais para os números de pessoas recuperadas e infectantes sobre todo o domínio ao se passarem o equivalente a 30, 60 e 90 dias.

As Figuras 6.9 a 6.21 ilustram, de acordo com a legenda, os valores das densidades populacionais para cada compartimento de cada modelo, sobre todo o domínio espacial no instante final. As Figuras 6.22 a 6.34 mostram, de acordo com a descrição, os valores



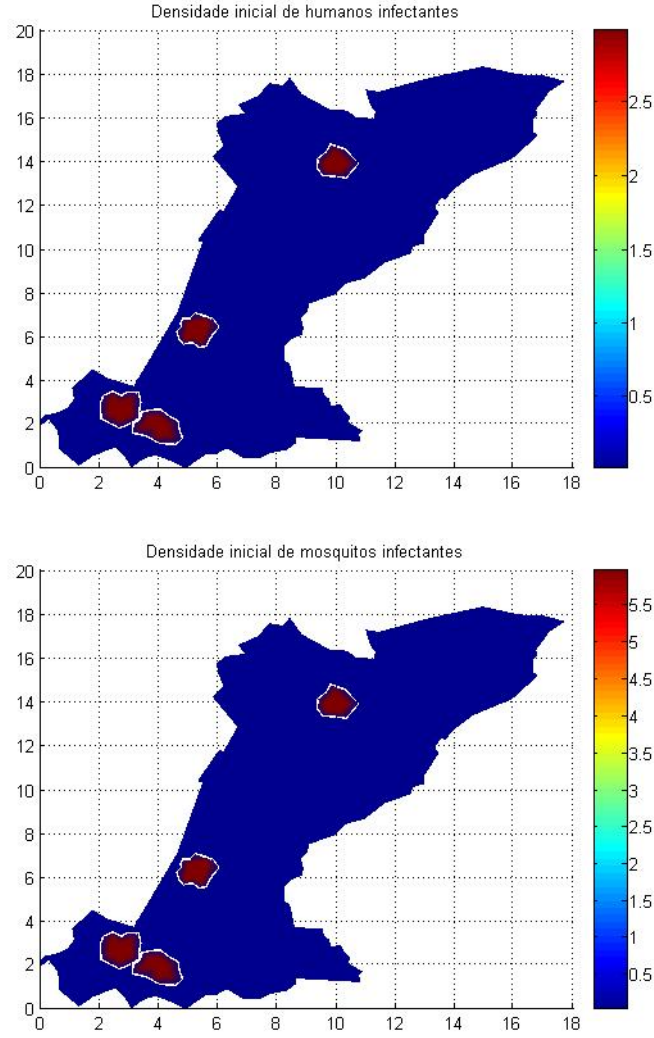


Figura 6.8: Condições iniciais para a densidade de humanos infectantes  $I_0$  (para os três modelos) e de mosquitos infectantes  $M_{I_0}$  (para os Modelos 2 e 3).

das densidades populacionais para cada compartimento ao longo do tempo no ponto  $(x, y) = (5.30, 6.32)$ . Na Tabela 6.7 são apresentados os valores do número total de infectantes e recuperados nos dias 30, 60 e 90, de acordo com cada modelo.

Os valores apresentados na Tabela 6.7 para a quantidade de humanos recuperados corresponde ao total naquele instante. Portanto, ao final de 30 dias (o que corresponderia ao total para o mês de Dezembro), para o Modelo 2 foram obtidas 26 pessoas recuperadas, enquanto que para o final de 60 dias houve uma diferença de 22 indivíduos. No tempo final de 90 dias esse valor de diferença com o mês anterior foi de 209. Portanto, somando-se aos infectantes no final de cada mês, foram obtidos os seguintes

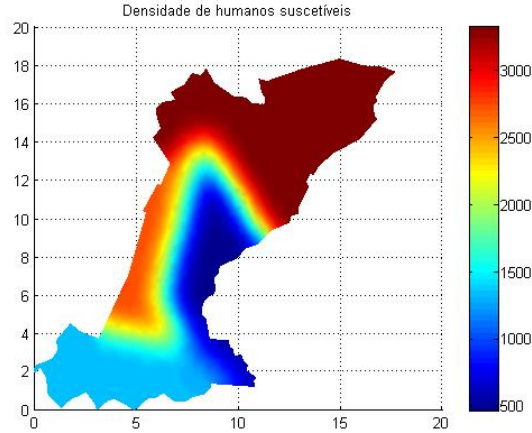


Figura 6.9: Humanos suscetíveis no tempo final de 90 dias para os três modelos (diferenças visualmente imperceptíveis nas gravuras de um modelo para outro).

valores totais para os meses de dezembro, janeiro e fevereiro: 32, 35 e 464. Realizando-se essas contas para todos os modelos, foram obtidos os valores da Tabela 6.8 em cada mês.

Tabela 6.7: Valores totais de pessoas recuperadas e infectantes sobre todo o domínio ao se passarem o equivalente a 30, 60 e 90 dias.

Mod.	Humanos infectantes			Humanos recuperados		
	$t = 30$ dias	$t = 60$ dias	$t = 90$ dias	$t = 30$ dias	$t = 60$ dias	$t = 90$ dias
1	23.00 ind.	69.69 ind.	137.79 ind.	50.92 ind.	173.80 ind.	477.53 ind.
2	6.46 ind.	12.20 ind.	255.53 ind.	25.92 ind.	48.49 ind.	257.14 ind.
3	6.28 ind.	9.56 ind.	276.49 ind.	27.32 ind.	46.33 ind.	246.81 ind.

Tabela 6.8: Valores totais de pessoas infectadas ao longo dos três meses de acordo com cada modelo.

Mod.	Dezembro	Janeiro	Fevereiro
1	74 ind.	193 ind.	442 ind.
2	32 ind.	35 ind.	464 ind.
3	34 ind.	29 ind.	477 ind.

### Comentários

Através de ajuste adequado dos parâmetros de transmissão, foi possível obter valores totais de pessoas infectadas próximo aos dados. Como se esperava, sob melhores condições ambientais, a população de mosquitos apresentou um maior crescimento.

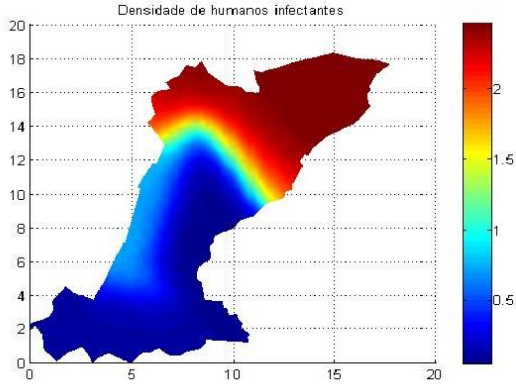


Figura 6.10: Humanos infectantes em  $t = 90$  (Modelo 1).

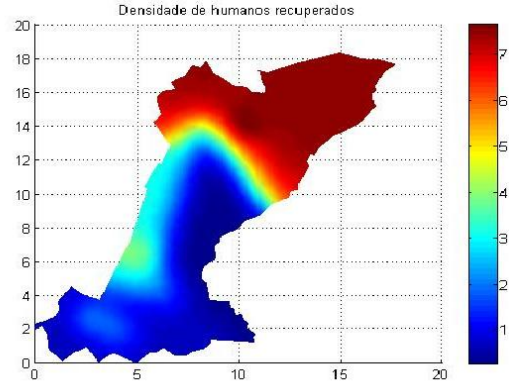


Figura 6.11: Humanos recuperados em  $t = 90$  (Modelo 1).

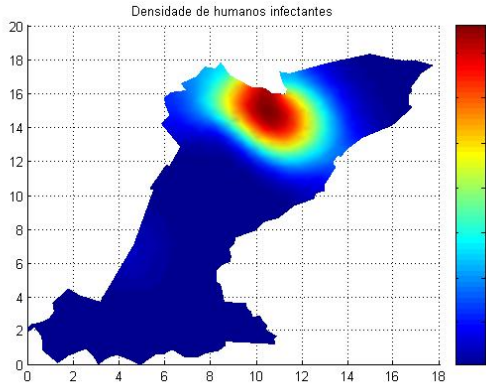


Figura 6.12: Humanos infectantes em  $t = 90$  (Modelo 2).

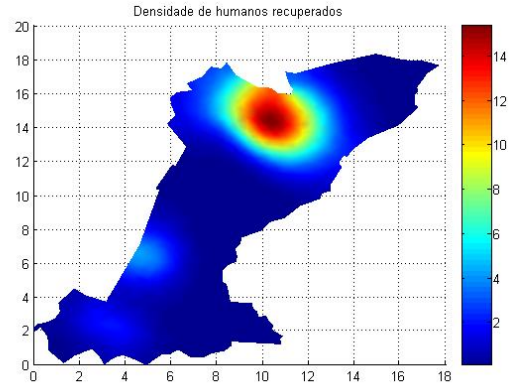


Figura 6.13: Humanos recuperados em  $t = 90$  (Modelo 2).

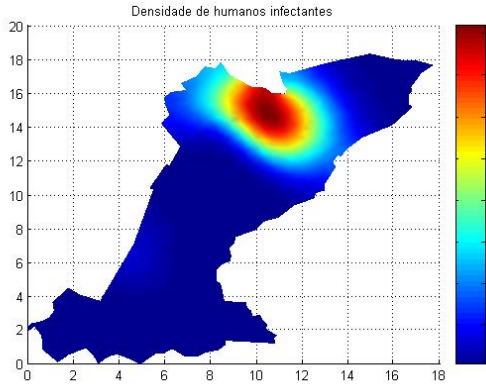


Figura 6.14: Humanos infectantes em  $t = 90$  (Modelo 3).

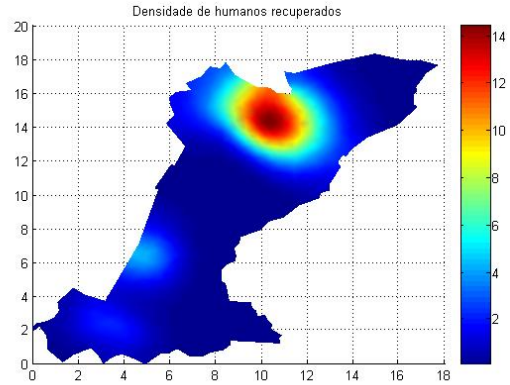


Figura 6.15: Humanos recuperados em  $t = 90$  (Modelo 3).

Para o Modelo 1 as localizações dos focos iniciais não acarretaram diferença no espalhamento da infecção, uma vez que a transmissão do vírus da dengue não dependia

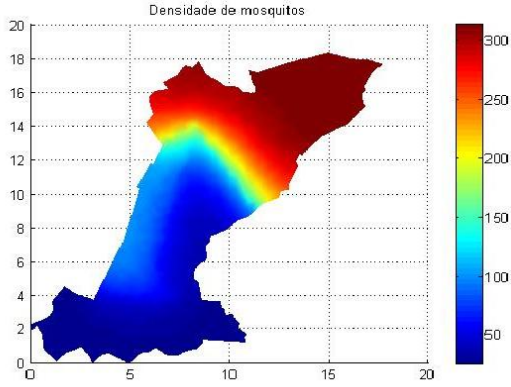


Figura 6.16: Mosquitos em  $t = 90$  (Modelo 1).

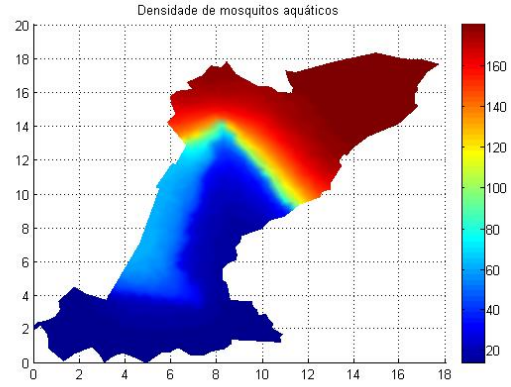


Figura 6.17: Mosquitos aquáticos em  $t = 90$  (Modelo 3).

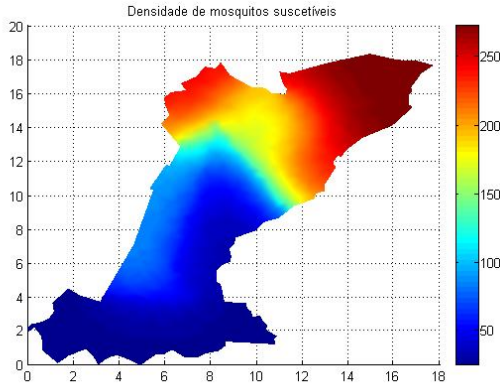


Figura 6.18: Mosquitos suscetíveis em  $t = 90$  (Modelo 2).

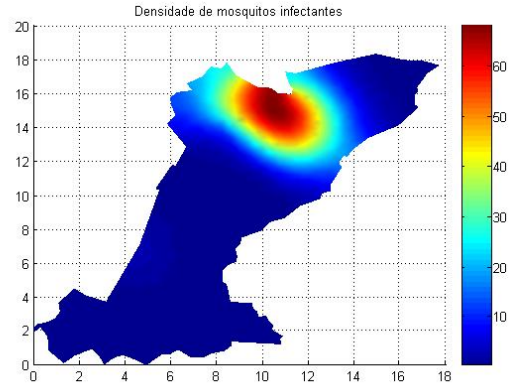


Figura 6.19: Mosquitos infectantes em  $t = 90$  (Modelo 2).

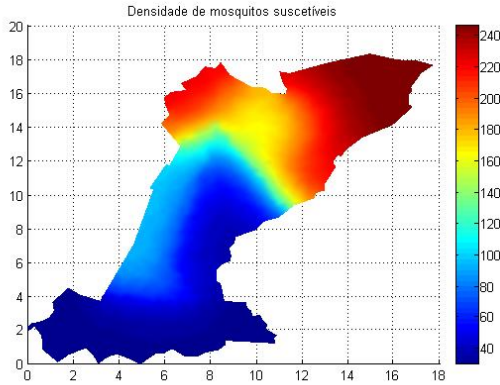


Figura 6.20: Mosquitos suscetíveis em  $t = 90$  (Modelo 3).

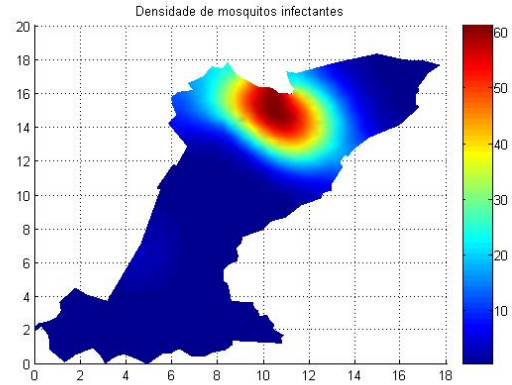


Figura 6.21: Mosquitos infectantes em  $t = 90$  (Modelo 3).

da infecção do vetor pelo humano, sendo a população de mosquitos considerada contaminada em uma parcela fixa. Seguindo as expectativas, os espalhamentos da dengue

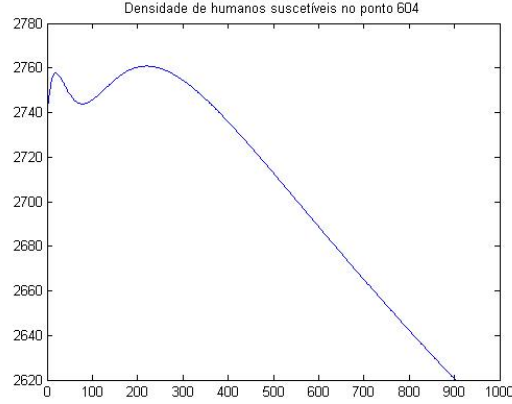


Figura 6.22: Humanos suscetíveis a cada passo no tempo no ponto 604 para os três modelos (diferenças imperceptíveis nas gravuras de um modelo para outro)

dos Modelos 2 e 3 dependeram da localidade dos primeiros focos, devido às suas modelagens considerarem a separação de mosquito suscetível de infectante e a passagem de um compartimento para o outro de acordo com contato com humano infectante. Em todos os casos, a infecção foi mais forte em locais mais propícios à reprodução dos insetos (aliados ao contato entre infectantes de uma espécie e suscetíveis da outra, nos Modelos 2 e 3).

Nos gráficos das populações ao longo do tempo no ponto 604  $((x, y) = (5.3, 6.3))$ , percebe-se que as evoluções das populações de humanos suscetíveis são idênticas entre os três modelos e as dos humanos infectantes e recuperados são semelhantes, com pequenas diferenças quantitativas e nos formatos das curvas. Em todos, indica-se grande aumento inicial na infecção, devido à presença de vírus (sob a forma de mosquitos e humanos infectantes). Por causa da dispersão há então uma grande queda nas densidades, o que é novamente superado devido à continuidade do processo de espalhamento do vírus em área propícia.

Pode parecer estranha uma queda na densidade de recuperados, quando este é um compartimento que só recebe indivíduos provenientes do de infectantes. Na realidade, o termo de dispersão, apesar de ser baixo, é o responsável por tal comportamento, já que a região em que o ponto 604 se localiza (região 2) é mais concentrada em humanos do que as de pontos próximos (regiões 3 e 4). Desta maneira, há um pequeno efeito sobre a densidade da população local, não apenas de recuperados mas de suscetíveis também, como se observa na Figura 6.9.

Nos gráficos das densidades relativas aos mosquitos no ponto 604 ao longo do tempo (Figuras 6.29 a 6.34), é possível se observar claramente o efeito da chuva sobre a reprodução da espécie. A cada 150 passos no tempo há uma mudança nesta variável am-

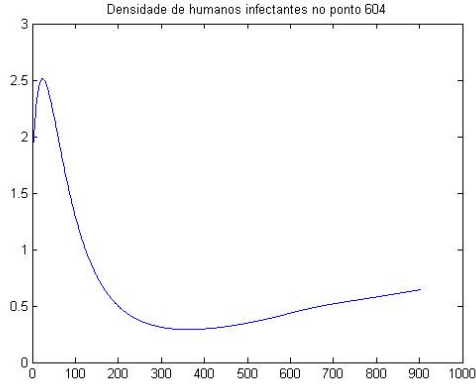


Figura 6.23: Humanos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 1).

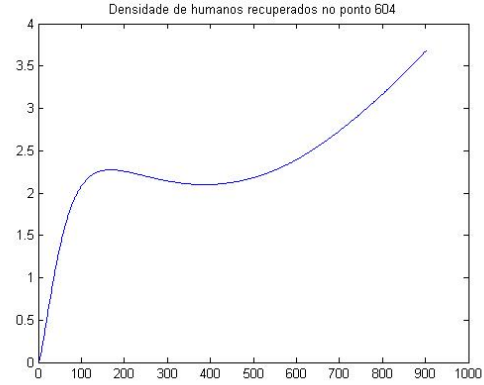


Figura 6.24: Humanos recuperados no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 1).

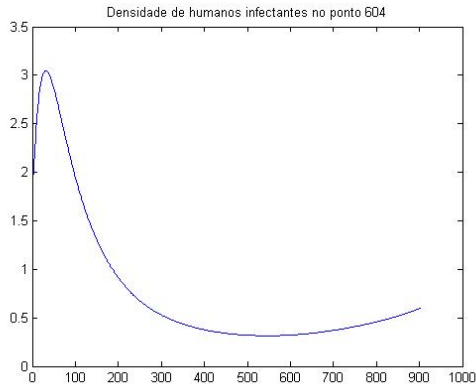


Figura 6.25: Humanos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 2).

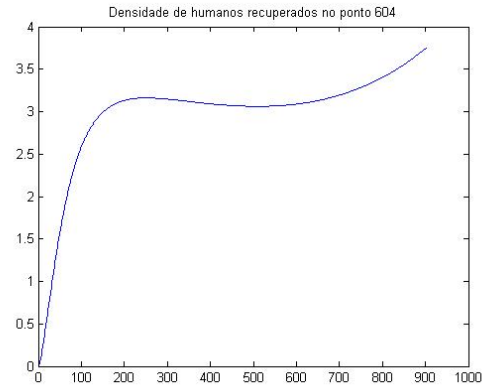


Figura 6.26: Humanos recuperados no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 2).

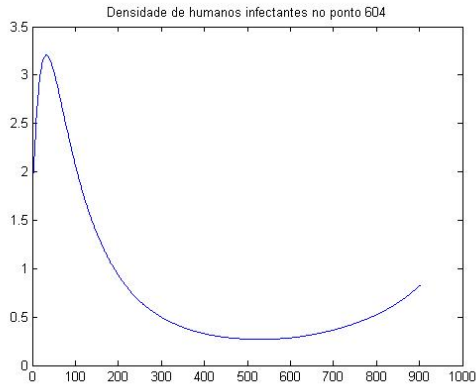


Figura 6.27: Humanos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 3).

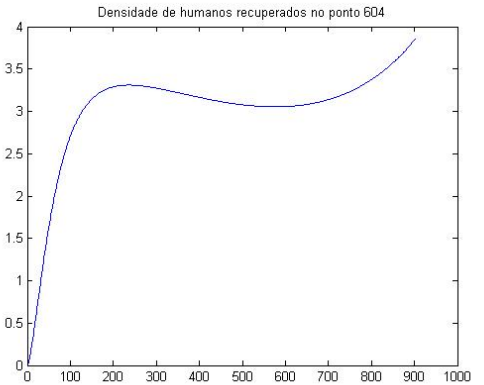


Figura 6.28: Humanos recuperados no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 3).

biental, provocando “bicos” nas curvas exatamente após esta quantidade de iterações. Como esperado, os maiores crescimentos ocorrem entre os passos de número 300 e 600,



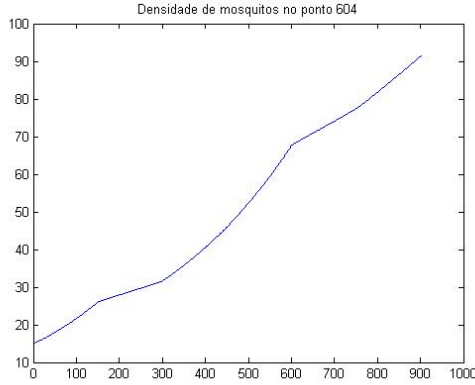


Figura 6.29: Mosquitos no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 1).

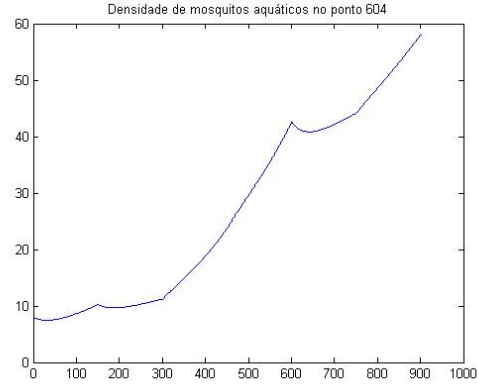


Figura 6.30: Mosquitos aquáticos no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 3).

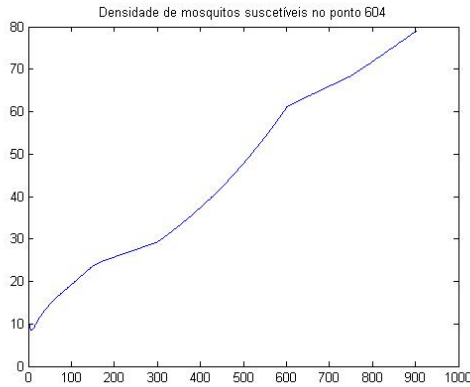


Figura 6.31: Mosquitos suscetíveis no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 2).

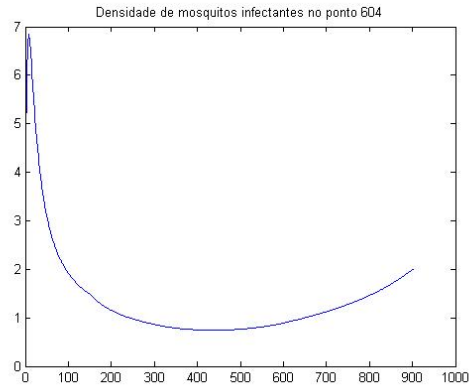


Figura 6.32: Mosquitos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 2).

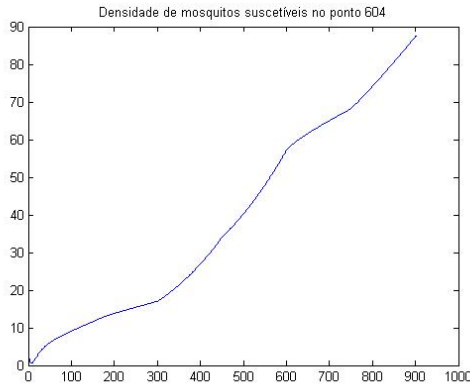


Figura 6.33: Mosquitos suscetíveis no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 3).

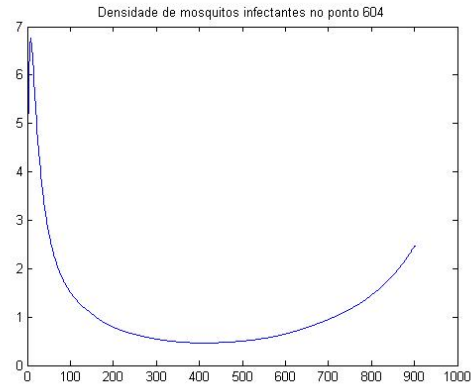


Figura 6.34: Mosquitos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Mod. 3).

que correspondem aos dois períodos quinzenais de maior precipitação pluviométrica (desprezando-se as instabilidades iniciais ocasionadas pelo método numérico).

A população de mosquitos aquáticos, presente apenas de acordo com a modelagem 3, apresenta “bicos” mais acentuados, devido a todos os parâmetros de sua equação correspondente serem dependentes da chuva e sua dinâmica depender também da população de alados que a origina.

Pode-se concluir que os resultados alcançados estiveram de acordo com as expectativas, de maneira que o primeiro modelo, sendo o mais simples, não foi capaz de gerar um resultado de acordo com a localização dos focos iniciais. No estudo do espalhamento de uma doença infecciosa, espera-se que uma maior quantidade de indivíduos infectados seja encontrada nas proximidades dos focos iniciais, a não ser que as condições não sejam propícias para a continuidade da doença. Os outros dois modelos foram capazes de suprir esta falha, mas demoravam cerca de o dobro de tempo de simulação. Entre estes dois, entretanto, não foram encontradas grandes diferenças nos resultados, de maneira que o Modelo 3, um pouco mais completo e complexo do que o outro, seria indicado em caso de se simular um controle aplicado sobre os mosquitos em sua fase aquática, já que tal modelagem admitiu um compartimento destinado apenas a esta população.



### 6.2.2 Simulação 4

Sob as mesmas condições iniciais das simulações anteriores, é simulado o Modelo 2 com diferentes valores para a precipitação pluviométrica. Com exceção dos parâmetros dependentes da chuva, todos os demais tiveram seus valores mantidos da simulação anterior. No presente caso, a chuva foi sorteada através do Método da Transformação Integral, como detalhado na seção 5.3.1. Os valores obtidos estão listados na Tabela 6.9.

Tabela 6.9: Valores sorteados para as somatórias das precipitações diárias para períodos quinzenais, a partir da primeira quinzena de Dezembro até a segunda de Fevereiro, para a simulação 4.

Período	Precipitação pluviométrica
1	121.0 mm
2	197.7 mm
3	74.0 mm
4	276.9 mm
5	158.4 mm
6	48.6 mm

### Resultados

Os resultados obtidos são apresentados no mesmo formato do que os anteriores (Figuras 6.35 a 6.44 e Tabelas 6.10 e 6.11), sem mais o intuito de se compararem os diferentes modelos. O objetivo é avaliar a mudança das soluções de acordo com um novo cenário resultante de valores diferentes para a precipitação pluviométrica.

Tabela 6.10: Valores totais de pessoas recuperadas e infectantes sobre todo o domínio ao se passarem o equivalente a 30, 60 e 90 dias para a simulação 4.

Mod.	Humanos infectantes			Humanos recuperados		
	$t = 30$ dias	$t = 60$ dias	$t = 90$ dias	$t = 30$ dias	$t = 60$ dias	$t = 90$ dias
2	7.22 ind.	16.41 ind.	461.40 ind.	26.50 ind.	55.61 ind.	416.70 ind.

Tabela 6.11: Valores totais de pessoas infectadas ao longo dos três meses para a simulação 4.

Mod.	Dezembro	Janeiro	Fevereiro
2	34 ind.	46 ind.	822 ind.

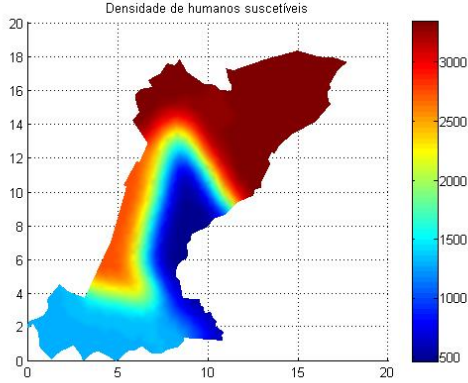


Figura 6.35: Humanos suscetíveis em  $t = 90$  (Simulação 4 – Modelo 2).

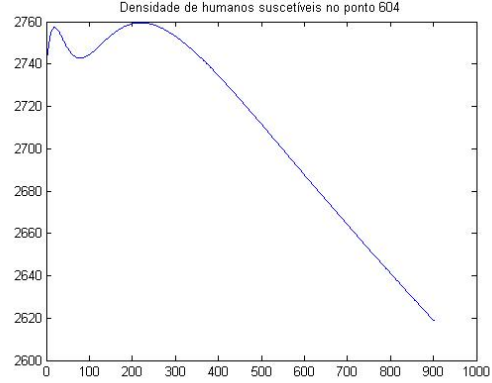


Figura 6.36: Hum. susc. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 4 – Mod. 2).

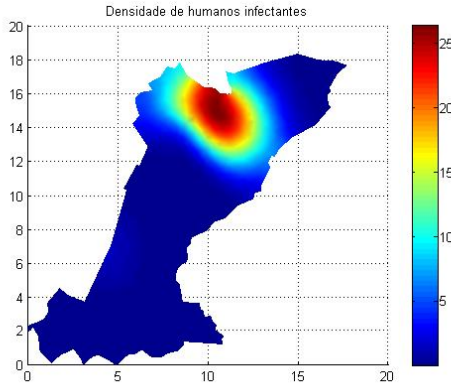


Figura 6.37: Humanos infectantes em  $t = 90$  (Sim. 4 – Mod. 2).

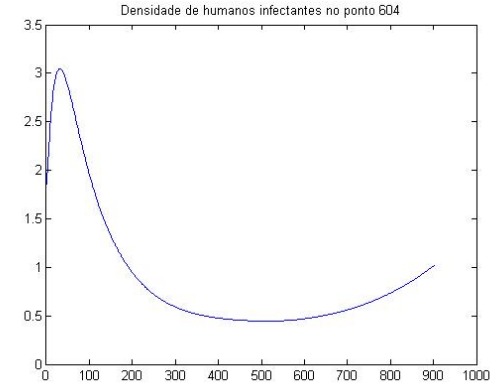


Figura 6.38: Hum. inf. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 4 – Mod. 2).

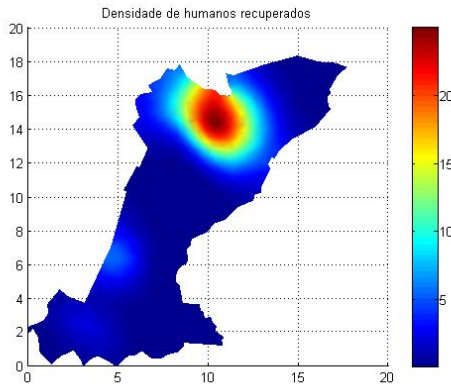


Figura 6.39: Humanos recuperados em  $t = 90$  (Sim. 4 – Mod. 2).

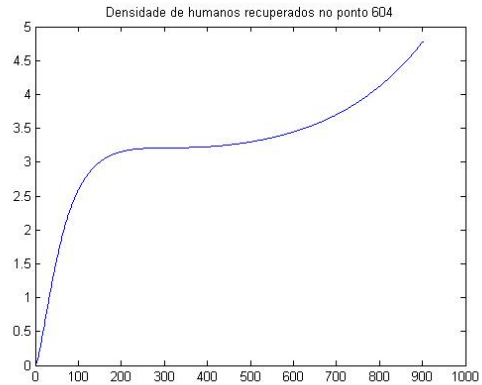


Figura 6.40: Hum. rec. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 4 – Mod. 2).

### Comentários

Os sorteios dos valores para a variável precipitação pluviométrica forneceram números bem diferentes dos utilizados nas simulações anteriores. As médias quinzenais resultan-

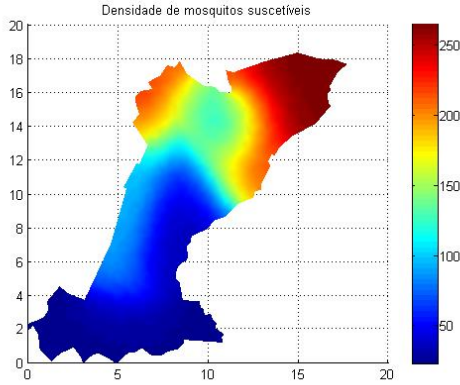


Figura 6.41: Mosquitos suscetíveis em  $t = 90$  (Sim. 4 – Mod. 2).

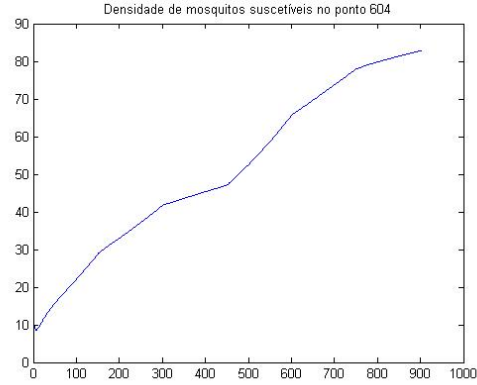


Figura 6.42: Mosq. susc. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 4 – Mod. 2).

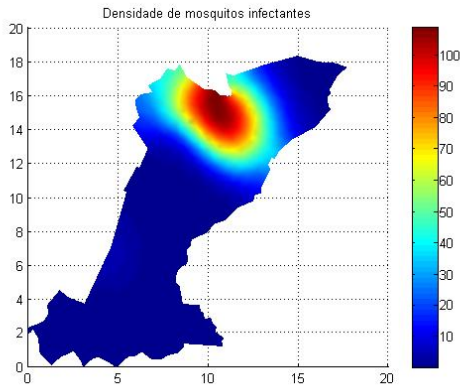


Figura 6.43: Mosquitos infectantes em  $t = 90$  (Sim. 4 – Mod. 2).

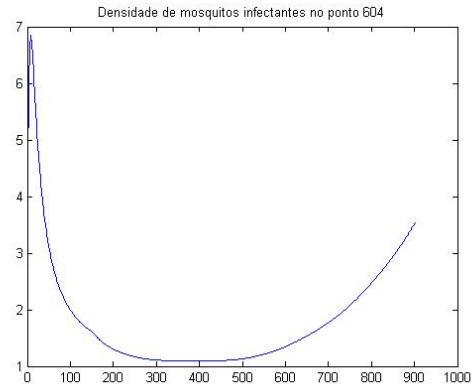


Figura 6.44: Mosq. inf. no pto 604 ao longo do tempo (Sim. 4 – Mod. 2).

tes, entretanto, foram bem semelhantes: no caso anterior fora de 146.05 mm, enquanto que para este atingiu-se 146.10 mm. Apesar de tão mínima a diferença, a distribuição dos valores ao longo do tempo surtiu um grande efeito na população de mosquitos infectantes e, conseqüentemente, na de humanos infectantes. Nota-se que a população de mosquitos suscetíveis não se comportou de maneira muito diferente quantitativamente, o que indica que a distribuição da chuva pode ter, de acordo com o modelo, grandes influências no espalhamento do vírus.

Segundo a Tabela 6.11, o valor total de pessoas infectadas no mês de Fevereiro foi de 822 indivíduos, número muito maior do que alcançado na simulação anterior (de 464). A explicação é que a precipitação pluviométrica foi bem maior nos dois primeiros períodos na simulação 4 do que nos dois primeiros períodos das simulações anteriores. Desta maneira, o crescimento do mosquito foi mais acentuado no começo, permitindo infecção de um maior número de insetos durante esses dois períodos, o que acarretou

em uma infecção inicial mais forte. Por mais que a reprodução do mosquito decaísse em seguida, o grande número de infectados já era presente, espalhando a dengue de maneira mais efetiva do que anteriormente.

### 6.2.3 Simulação 5

A simulação de número 5, realizada para o Modelo 3, também utiliza o sorteio da precipitação pluviométrica, porém as condições iniciais para as populações de humanos infectantes e mosquitos infectantes são diferentes, reduzindo-se de quatro para apenas um foco de infecção na região menos propícia para a proliferação dos mosquitos (*cf.* Figura 6.45). Os valores sorteados para a chuva estão listados na Tabela 6.12.

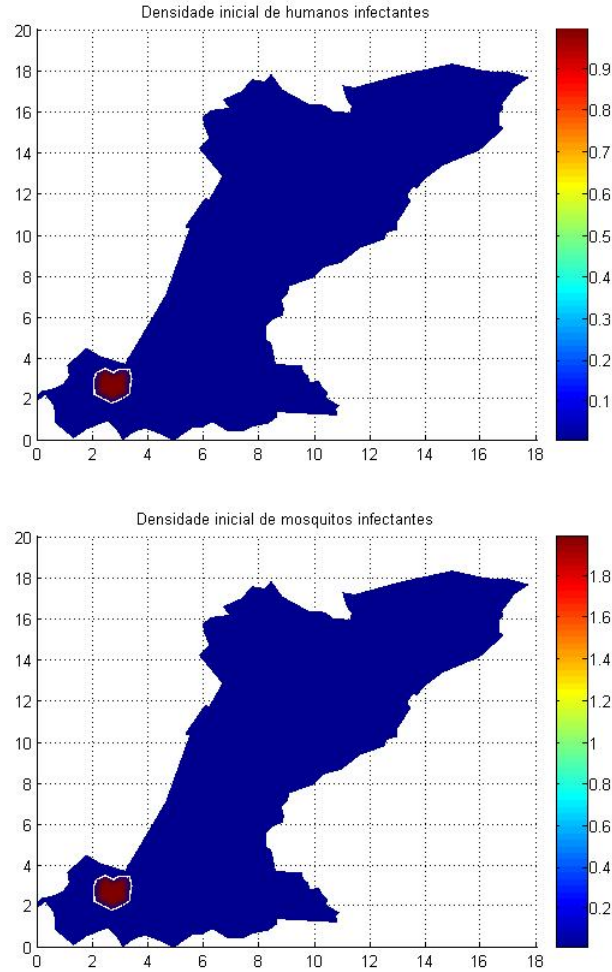


Figura 6.45: Condições iniciais para as densidades de humanos infectantes  $I_0$  e de mosquitos infectantes para a simulação 5.

Tabela 6.12: Valores sorteados para as somatórias das precipitações diárias para períodos quinzenais, a partir da primeira quinzena de Dezembro até a segunda de Fevereiro, para a simulação 5.

Período	Precipitação pluviométrica
1	89.4 mm
2	223.5 mm
3	267.3 mm
4	75.2 mm
5	325.2 mm
6	194.8 mm

## Resultados

As Figuras 6.46 a 6.55 mostram, de acordo com a legenda, os valores das densidades populacionais dos três compartimentos de humanos e dos mosquitos suscetíveis e aquáticos, sobre todo o domínio espacial no instante final e ao longo do tempo no ponto 604  $((x, y) = (5.30, 6.32))$ . A Figura 6.56 corresponde à evolução dos mosquitos infectantes no ponto 604 e a Figura 6.57 apresenta os gráficos obtidos para esta mesma população sobre o espaço ao final de 30, 60 e 90 dias. Na Tabela 6.13 são apresentados os valores do número total de infectantes e recuperados nos dias 30, 60 e 90, de acordo com cada modelo, e, na Tabela 6.14, os valores finais a cada mês de casos de dengue.

Tabela 6.13: Valores totais de pessoas recuperadas e infectantes sobre todo o domínio ao se passarem o equivalente a 30, 60 e 90 dias para a simulação 5.

Mod.	Humanos infectantes			Humanos recuperados		
	$t = 30$ dias	$t = 60$ dias	$t = 90$ dias	$t = 30$ dias	$t = 60$ dias	$t = 90$ dias
3	0.36 ind.	0.22 ind.	0.77 ind.	2.00 ind.	2.79 ind.	3.78 ind.

Tabela 6.14: Valores totais de pessoas infectadas ao longo dos três meses para a simulação 5.

Mod.	Dezembro	Janeiro	Fevereiro
3	2 ind.	1 ind.	2 ind.

## Comentários

Os resultados são coerentes, indicando valores baixos de infecção (*cf.* Tabela 6.14) ao serem comparados com os das simulações anteriores, que possuíam mais focos da doença (mesmo com uma média quinzenal de chuva mais elevada de 195.90 mm). Uma

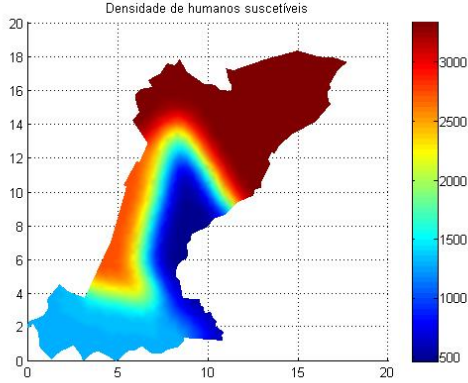


Figura 6.46: Humanos suscetíveis em  $t = 90$  (Simulação 5 – Modelo 3).

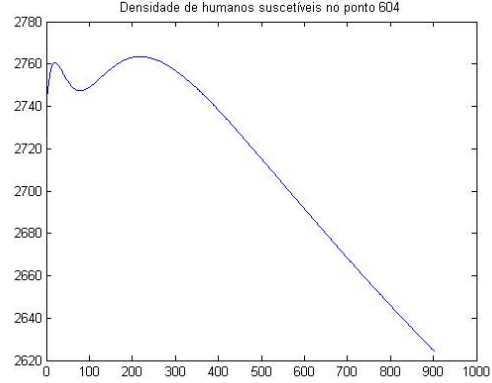


Figura 6.47: Hum. susc. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).

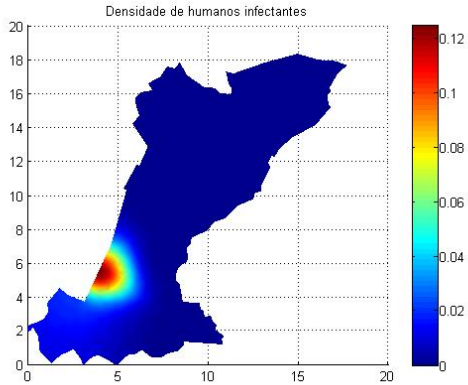


Figura 6.48: Humanos infectantes em  $t = 90$  (Sim. 5 – Mod. 3).

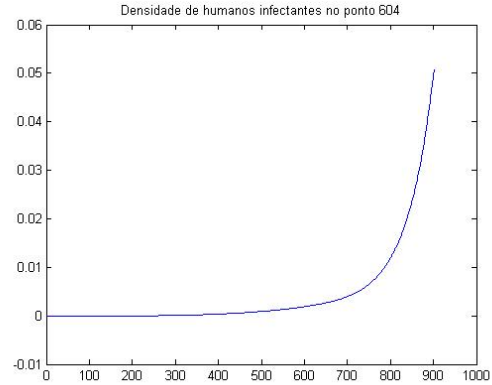


Figura 6.49: Hum. inf. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).

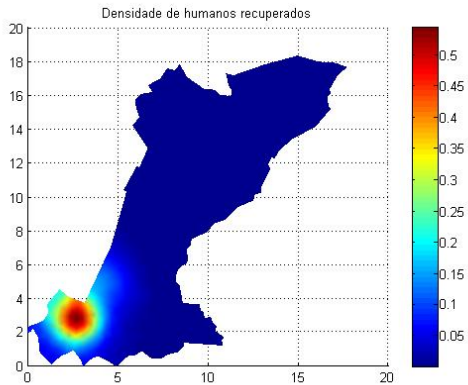


Figura 6.50: Humanos recuperados em  $t = 90$  (Sim. 5 – Mod. 3).

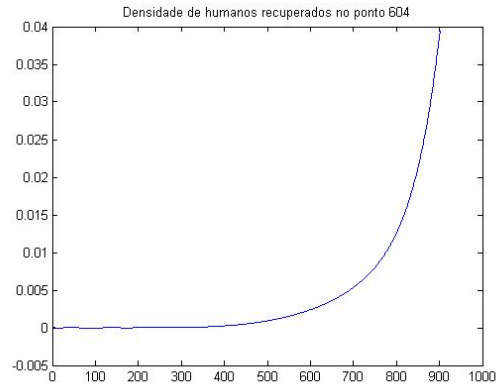


Figura 6.51: Hum. rec. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).

maior quantidade de infectantes no instante de 90 dias acabou por aparecer deslocado do foco inicial, uma vez que as condições não eram propícias onde se localizava. Os

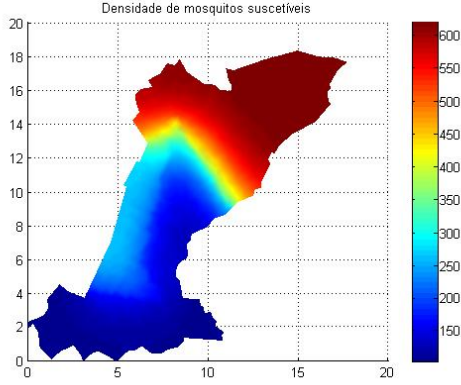


Figura 6.52: Mosquitos suscetíveis em  $t = 90$  (Sim. 5 – Mod. 3).

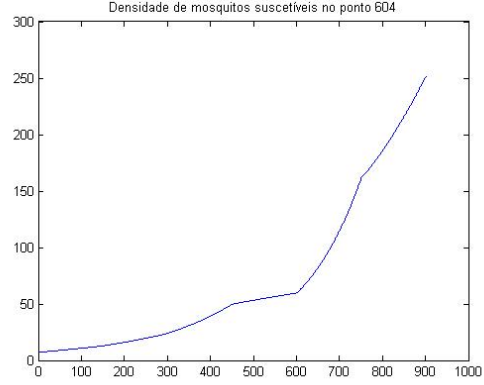


Figura 6.53: Mosq. susc. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).

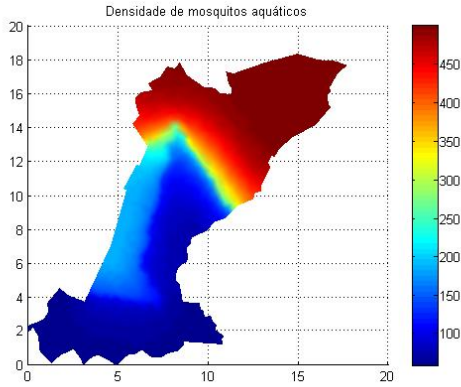


Figura 6.54: Mosquitos aquáticos em  $t = 90$  (Sim. 5 – Mod. 3).

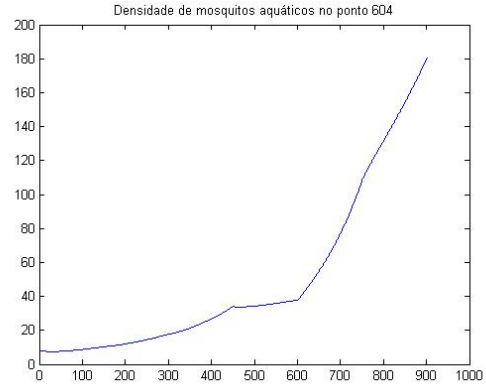


Figura 6.55: Mosq. aq. no pto. 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).

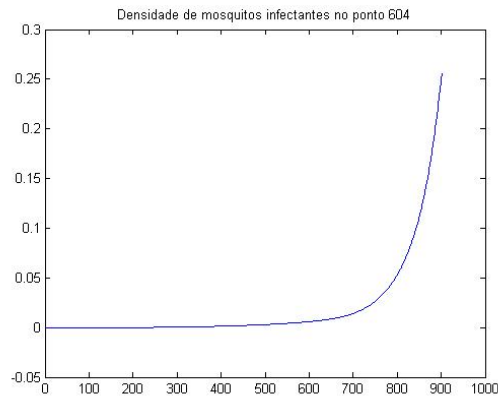


Figura 6.56: Mosquitos infectantes no ponto 604 ao longo do tempo (Sim. 5 – Mod. 3).

gráficos da Figura 6.57 mostram as densidades em cada ponto da malha da população de mosquitos infectantes, nos instantes 30, 60 e 90 dias, mostrando a evolução do foco



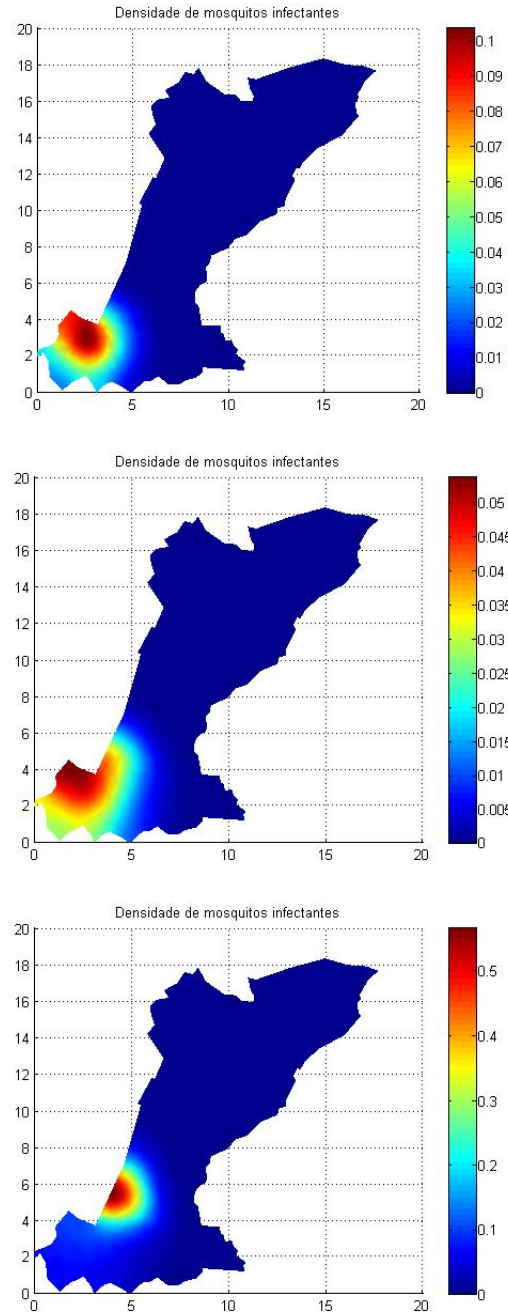


Figura 6.57: Mosquitos infectantes nos tempos equivalentes a 30, 60 e 90 dias, de cima para baixo (Simulação 5 – Modelo 3).

da dengue. Como anteriormente se localizava na região 4, com baixa concentração de pessoas e de recipientes, mas perto da região 2, a infecção acabou por atingir pontos da região 2, que era mais propícia (continha maior densidade de mosquitos e de humanos para adquirirem o vírus), fazendo com que ela adquirisse força neste novo local.

### 6.3 Comentários gerais sobre as simulações

Nos três modelos foi notável a influência dos fatores ambientais (humanos, recipientes e precipitação pluviométrica) na reprodução do *Aedes aegypti*, de maneira que os valores obtidos para o mosquito aumentavam se as condições para a sua reprodução melhorassem. A modelagem destes termos, portanto, se mostrou satisfatória. Como esperado, os Modelos 2 e 3 se mostraram mais representativos da realidade, uma vez que a infecção se espalhou em torno das localidades contendo focos de infecção. O Modelo 1, por sua vez, ignorou tais localizações, já que sua modelagem não permite um aumento de mosquitos infectantes de acordo com a presença de humanos infectantes. De fato, como considera-se fixa uma porcentagem da população de mosquitos como infectante, a densidade desta população depende apenas da quantidade de mosquitos existentes em cada ponto. Entre os Modelos 2 e 3, não foi possível se concluir qual obteve melhores resultados. Os valores nas três primeiras simulações, para os números de casos para os meses de janeiro e de fevereiro, se mostraram perto das estimativas dos números de casos no distrito sul em 2007. Foram obtidos 193 e 442 para o Modelo 1, 35 e 464 para o Modelo 2 e 29 e 477 para o Modelo 3. Os valores esperados eram de cerca de 60 e de 450, mas sem grandes precisões, devido a esses números serem apenas estimativas baseadas no número de casos confirmados no distrito sul nos meses em questão e na comparação entre o número de confirmados e de notificados durante toda a epidemia de 2007 na cidade de Campinas.

As diferenças entre os números de casos entre os Modelos 2 e 3 não foram grandes, mas nota-se que a infecção no Modelo 3 apresenta uma força maior do que no Modelo 2 mais ao final do período de 90 dias. Isso pode ser explicado pela presença dos mosquitos aquáticos. Inicialmente, o número total de aquáticos e de alados em cada ponto no Modelo 3 é equivalente ao de alados do Modelo 2. Ou seja, há mais alados neste último, portanto, mais mosquitos suscetíveis ao vírus. Por sua vez, no Modelo 3 existe a necessidade de se passar um certo tempo para que os aquáticos virem alados e, portanto, suscetíveis ao vírus. Na calibragem dos parâmetros de transmissão este fato foi levado em conta, de maneira que a transmissão necessitava ser maior no Modelo 3 para se alcançar o número de casos de humanos semelhantes ao da realidade. Assim, com o amadurecimento do mosquito, a infecção acabava por tomar mais força do que no Modelo 2. Mas como as diferenças se mostraram pequenas, não se elege, entre os dois em discussão, um modelo mais representativo da realidade, em termos de casos totais de humanos com dengue a cada mês. Devido ao fato de o Modelo 3 explicitar a população de mosquitos aquáticos (sobre a qual, em geral, se realiza o controle do vetor) e o tempo para realizar a simulação não ser tão maior do que no caso do Modelo

2, há uma inclinação pela escolha do modelo com o maior número de compartimentos para simulações da dengue.

Além das diferenças entre os modelos, foi possível analisar o comportamento das populações de mosquitos e da infecção sobre os humanos de acordo com a variação da chuva. Apesar de na simulação 4, realizada para o Modelo 2, a média de chuva no final dos três meses ter sido muito semelhante à dos valores utilizados nas simulações anteriores, o número de casos no final dos três meses foi muito maior do que na simulação 2 (feita também para o Modelo 2, com as mesmas condições iniciais e parâmetros que não eram influenciados pela chuva). O número de casos em fevereiro quase dobrou, saltando de 464 na segunda simulação para 822 casos na quarta. Isso se explica pela distribuição da precipitação ao longo destes três meses. Ela foi maior no início, permitindo uma maior proliferação de mosquitos suscetíveis à infecção. Assim, uma maior quantidade de mosquitos se infectou inicialmente, infectando também os humanos. Com a diminuição da chuva, o crescimento da população de *Ae. aegypti* desacelerou, de maneira que, no final, o número total de mosquitos era semelhante ao da simulação 2, mas o número de infectantes era bem maior. Portanto, de acordo com o modelo, a distribuição da precipitação pluviométrica tem importante papel no espalhamento da dengue.

Por fim, foi realizada uma simulação para o Modelo 3 com valores diferentes dos casos anteriores para a chuva e para as condições iniciais de infectantes. Considerou-se apenas um foco de infecção, com menos humanos e mosquitos infectantes do que nas outras simulações, e em lugar não propício para a reprodução do vetor (com baixas densidades de humanos e de recipientes). O comportamento da infecção foi interessante, com a migração do foco da região 4 para a região 2, esta última mais propícia para o mosquito. Mas como a quantidade inicial de infectantes era realmente pequena, em condições não muito favoráveis para o vetor, a infecção foi bem fraca, resultando em números de casos entre 1 e 2 a cada mês.

# Capítulo 7

## Considerações Finais

### 7.1 Conclusões

A partir do estudo das populações e de fatores envolvidos no fenômeno dengue, foi possível realizar o desenvolvimento de três diferentes modelagens compartmentais para o espalhamento de dengue no distrito sul da cidade de Campinas, resultando em sistemas de equações diferenciais parciais. As informações a respeito das variáveis ambientais (densidade de humanos, densidade de recipientes e precipitação pluviométrica) foram obtidas por diferentes fontes e tratadas como incertas, pela teoria dos conjuntos fuzzy e por método probabilístico para o sorteio de uma das variáveis (precipitação pluviométrica). Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, utilizando método de inferência de Mamdani, foram criados para inferir valores determinísticos, os quais alimentam os modelos de sistemas de EDPs. O sistema de equações diferenciais parciais resultante é, portanto, determinístico, podendo ser tratado através dos métodos dos Elementos Finitos e de Crank-Nicolson, para a obtenção de resultados numéricos desconhecendo-se as soluções analíticas dos problemas.

Através de ferramentas computacionais, o domínio espacial foi discretizado em uma malha de 1221 pontos e 2227 triângulos (*software* Gmsh) e o SBRF com método de inferência de Mamdani e o algoritmo resultante dos métodos numéricos foram implementados (*software* MATLAB), para cada um dos modelos propostos.

Foi possível, após todo este esquema, obter resultados numéricos para cada um dos modelos, com diferentes condições iniciais e de parâmetros. Cinco simulações foram realizadas, sendo que as três primeiras tinham, como principal intuito, realizar a comparação entre os três modelos e verificar a semelhança entre seus resultados e a realidade. Assim, a simulação 1 correspondeu ao Modelo 1; a simulação 2 ao Modelo 2 e a simulação 3 ao Modelo 3, todos com mesmas condições iniciais e sob as mes-

mas condições ambientais, referentes a dados do final de 2006 e início de 2007. Nestes três casos a variável precipitação pluviométrica não foi sorteada; seus valores foram dados reais dos meses de Dezembro de 2006, de Janeiro de 2007 e de Fevereiro de 2007. Diferentes saídas foram obtidas do programa: gráficos das densidades de todas as populações no tempo final de 90 dias, ao longo do domínio espacial; gráficos das densidades de todas as populações em um ponto escolhido do domínio espacial, ao longo do tempo, e o número total de casos de dengue a cada mês. Eram esperados valores em torno de 60 e de 450 casos no segundo e no terceiro mês, respectivamente. Foram obtidos os valores de 193 e 442 para o Modelo 1, de 35 e 464 para o Modelo 2 e 29 e 477 para o Modelo 3, o que se mostrou dentro das expectativas.

O Modelo 1 se mostrou menos preciso, o que era de se esperar, uma vez que não considera a divisão entre os compartimentos de mosquitos suscetíveis e de infectantes. Não respeitou a heterogeneidade das condições iniciais a respeito da localização do vírus. Foi, entretanto, o mais rápido para a realização de simulações. Os Modelos 2 e 3 não mostraram grandes diferenças entre seus resultados nem no tempo exigido para se correr o total 900 iterações. A escolha do modelo a ser utilizado depende, portanto, da heterogeneidade das condições iniciais e do intuito em se testar ou não um controle sobre alguma população em específico.

Mais duas simulações foram realizadas, utilizando-se os Modelos 2 e 3 (aqueles cujos resultados foram considerados mais semelhantes à realidade, respeitando as localidades dos focos de infecção e obtendo valores mais próximos dos números mensais de casos de dengue). A primeira teve o intuito de se analisar a variação nos resultados ocasionada pela variação da chuva, utilizando-se os mesmo valores das simulações anteriores para as condições iniciais e os parâmetros não dependentes da chuva. Foram sorteados valores de precipitação pluviométrica que, apesar de uma média quinzenal semelhante, ocasionaram uma grande diferença na quantidade de humanos infectados, devido à influência da distribuição da chuva ao longo do tempo.

A última simulação também utilizou sorteio da chuva, mas as condições iniciais foram diferentes, com apenas um foco da doença em um local não propício para a reprodução de mosquitos (com poucos humanos e poucos recipientes disponíveis). Como esperado, o número de casos foi baixíssimo, mesmo com uma média quinzenal de precipitação pluviométrica mais alta do que nos casos anteriores (195.90 mm). O fato interessante se deu pelo deslocamento do foco da doença, da região 4 (não propícia para a reprodução dos mosquitos) para a região vizinha 2 (com melhores condições), o que não fugiu à realidade.

Conclui-se que os objetivos foram alcançados, efetivando-se a meta final de se re-

alizarem implementações computacionais dos diferentes modelos de espalhamento da dengue, que permitem a obtenção, a visualização e a análise de resultados sob diferentes condições iniciais e ambientais. Os fatos que se destacam, diferenciando este trabalho dos demais na área de modelagem epidemiológica da dengue, são:

- o domínio não ser fictício (distrito sul da cidade de Campinas);
- dados reais terem sido utilizados (aproximações para a população de humanos e para a densidade de recipientes e o sorteio da chuva com base em dados de anos anteriores, acoplando diferentes ferramentas matemáticas para a manipulação de informações incertas) e
- comparações com uma epidemia ocorrida na região terem sido realizadas, apontando resultados do trabalho coerentes com a realidade.

## 7.2 Trabalhos Futuros

O presente trabalho indica a possibilidade de futuros desenvolvimentos relacionados ao estudo de modelagem e resolução numérica do fenômeno dengue. Algumas sugestões são provenientes de pesquisadores especializados na dengue, como:

- a consideração da ocorrência de duas ou mais cepas na região, seja em épocas diferentes, ocasionando imunidade parcial a longo prazo e total a curto prazo, como de maneira concomitante, para se avaliar a coerência da hipótese de infecção por diferentes sorotipos ser a causa de dengue hemorrágica;
- a avaliação de medidas de controle sobre o estágio larval do mosquito; e
- a extensão do modelo para um período mais longo, de maneira a considerar o fato constatado historicamente de que a não-interrupção da dengue durante o meio do ano ocasiona epidemias mais fortes do que quando há ao menos um mês em que a dengue não se manifesta.

Outras idéias, que surgiram ao longo do estudo e após a obtenção dos resultados finais, despertaram o interesse pelas seguintes possibilidades:

- a admissão de ao menos uma das variáveis, correspondente a alguma das populações estudadas, como fuzzy. Em sua dissertação de mestrado, Rocha [35] resolve uma equação diferencial parcial de difusão-advecção através de diferenças finitas para a obtenção da concentração de uma substância poluente ao longo

de um canal, considerando-a uma variável fuzzy. Uma abordagem semelhante poderia ser realizada;

- a consideração de outro tipo de contato, denominado “não-local”, como Missio [31] admitiu em seu trabalho. Tal abordagem torna a modelagem mais legítima, uma vez que os meios de transporte utilizados pelos humanos permitem que estes se locomovam vários quilômetros em poucos minutos, podendo carregar o vírus da dengue para locais do domínio afastados de onde se encontram. Isso de fato acontece, mas não é considerado neste trabalho, que só admite o contato local entre as diferentes populações; e
- o estudo de onda viajante, cuja existência pode depender de parâmetros do problema. Caso de fato exista, passa a ser objetivo estimar a velocidade do avanço de uma epidemia, levando-se em conta as variações nos fatores ambientais.

Outra possibilidade, comentada na seção 6.2, é:

- o estudo mais aprofundado a respeito das bases de regras, com presença mais constante de especialistas. Isso pode promover um ajuste nas bases de regras, de maneira que elas sejam mais fiéis à realidade, bem como as soluções numéricas para as densidades populacionais.

# Referências Bibliográficas

- [1] AMENDOLA, M.; SOUZA, A.L.; BARROS, L.C. **Manual do uso da teoria dos conjuntos fuzzy no MATLAB 6.5**. Disponível em <[http://www.ime.unicamp.br/laeciocb/manual\\_fuzzy\\_matlab.pdf](http://www.ime.unicamp.br/laeciocb/manual_fuzzy_matlab.pdf)>. Acesso: 15 jan. 2009.
- [2] BARROS, L.C.; BASSANEZI, R.C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. Campinas: Coleção IMECC - Textos Didáticos, 2006.
- [3] BASSANEZI, R.C.; FERREIRA Jr, W.C. **Equações Diferenciais: com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.
- [4] BRASIL. Ministério da Saúde. **Informe Epidemiológico da Dengue, Janeiro a Abril de 2008**. Disponível em: <[http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/pdf/boletim\\_dengue\\_maio2008.pdf](http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/pdf/boletim_dengue_maio2008.pdf)>. Acesso: 23 abr. 2009.
- [5] BRASIL. Ministério da Saúde. **Programa Nacional de Controle da Dengue**. Disponível em: <[http://portal.saude.gov.br/saude/area.cfm?id\\_area=920](http://portal.saude.gov.br/saude/area.cfm?id_area=920)>. Acesso em 08 dez. 2008.
- [6] BRASIL. Ministério da Saúde. **Dengue – Epidemiologia**. Disponível em: <<http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/kkitdengue2/epidemiologia/imagens.html>>. Acesso em 17 jan. 2009.
- [7] BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. **Balanco Dengue Janeiro a Julho de 2007**. Disponível em: <[http://www.infectologia.org.br/anexos/MS-SVS\\_balan%C3%A7o%20dengue%20jan-jul%202007.pdf](http://www.infectologia.org.br/anexos/MS-SVS_balan%C3%A7o%20dengue%20jan-jul%202007.pdf)>. Acesso: 18 fev. 2009.



- [8] BRASIL. Ministério da Saúde. **Dengue Aspectos Epidemiológicos, Diagnóstico e Tratamento.** Disponível em: <[http://www.defesacivil.sp.gov.br/documentos/cartilha\\_dengue.pdf](http://www.defesacivil.sp.gov.br/documentos/cartilha_dengue.pdf)>. Acesso: 03 fev. 2009.
- [9] BRASIL. Ministério da Saúde. **Perguntas.** Disponível em: <[http://portal.saude.gov.br/portal/saude/visualizar\\_texto.cfm?idtxt=23630&janela=1](http://portal.saude.gov.br/portal/saude/visualizar_texto.cfm?idtxt=23630&janela=1)>. Acesso: 09 mai. 2009.
- [10] BRASIL. Ministério da Saúde e SUCAM, **Combate aos vetores da Febre Amarela e do Dengue *Aedes aegypti* e *Aedes albopictus*, Superintendência de Campanhas de Saúde Pública**, 5. ed., Brasília, 1987.
- [11] BRASÍLIA. Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento. Agritempo. Disponível em: <<http://www.agritempo.gov.br/>>. Acesso em: 10 mai. 2009.
- [12] BUSSAB, W.O.; MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**, 5. ed., São Paulo: Saraiva, 2007.
- [13] CAMPINAS. Secretaria Municipal de Saúde de Campinas. **Dengue: Situação Epidemiológica.** Disponível em: <[http://www.campinas.sp.gov.br/saude/doencas/dengue/dengue\\_sit\\_epid.htm](http://www.campinas.sp.gov.br/saude/doencas/dengue/dengue_sit_epid.htm)>. Acesso: 24 out. 2008.
- [14] CAMPINAS. Secretaria Municipal de Saúde de Campinas. Coordenadoria de Vigilância e Saúde Ambiental. **Informe Dengue 02/2005.** Disponível em: <[http://www.campinas.sp.gov.br/saude/doencas/dengue/informes/informe\\_dengue\\_100505.doc](http://www.campinas.sp.gov.br/saude/doencas/dengue/informes/informe_dengue_100505.doc)>. Acesso: 28 out. 2008.
- [15] CAMPINAS. Secretaria Municipal de Saúde de Campinas. Coordenadoria de Vigilância e Saúde Ambiental. **Informe Dengue 01/2009.** Disponível em: <[http://www.campinas.sp.gov.br/saude/vigilancia/informes/informe\\_tecnico\\_dengue\\_210109.pdf](http://www.campinas.sp.gov.br/saude/vigilancia/informes/informe_tecnico_dengue_210109.pdf)>. Acesso: 28 abr. 2009.
- [16] COELHO, G. E. Fatores de Risco para Desenvolvimento de Febre Hemorrágica do Dengue durante um Surto de Dengue em Fortaleza, Ceará, 2001. **Boletim Eletrônico Epidemiológico**, Ano 02, n.7, 2002.
- [17] CONSOLI, R.A.G.B., OLIVEIRA, R.L., **Principais Mosquitos de Importância Sanitária no Brasil.** Rio de Janeiro: Fiocruz, 1994.

- [18] CORDEIRO, R. et al. **Distribuição espacial do risco de dengue no distrito sul de Campinas**. Projeto – Faculdade de Ciências Médicas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.
- [19] EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. Westminster, NY: Random, 1988.
- [20] EUA. Centers for Disease Control and Prevention. **Dengue Fever: History**. Disponível em: <<http://www.cdc.gov/ncidod/dvbid/dengue/index.htm#history>>. Acesso em: 9 out. 2008.
- [21] FAIRWEATHER, G. **Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations**. New York: M. Dekker, 1978.
- [22] FIX, G.J.; STRANG, G. **An Analysis of the Finite Element Method**, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1973.
- [23] FORATTINI, O.P. **Entomologia Médica**. São Paulo: Faculdade de Higiene e Saude Publica, 1962-65.
- [24] HAMER, W.H. Epidemic disease in England. **The Lancet**, 1, p.733-739, 1906.
- [25] JAWETZ, E.; LEVINSON, W. **Microbiologia Médica e Imunologia**. Tradução por Jose Procopio M. Senna, 7. ed., Artmed, Porto Alegre, 2005.
- [26] JOHNSON, C. **Numerical solution of partial differential equations by the finite element method**. Cambridge: Cambridge University, 1987.
- [27] KENNEDY JUNIOR, W.J.; GENTLE, J.E. **Statistical Computing**. New York: Marcel Dekker. 1980.
- [28] MAIDANA, N.A.; YANG, H.M. A Spatial Model to Describe the Dengue Propagation. **TEMA Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v.8, n.1, p.83-92, 2007.
- [29] MAMDANI, E.H.; ASSILAN, S.S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. **Int. J. Man-Machine Studies**, v.7, p.1-13, 1975.
- [30] MASSAD, E.; ORTEGA, N.R.S.; BARROS, L.C. **Fuzzy logic in action: applications in epidemiology and beyond**. New York: Springer, 2008.

- [31] MISSIO, M. **Modelos de EDP integrados à Lógica Fuzzy e Métodos Probabilísticos no tratamento de incertezas: uma aplicação à febre aftosa em bovinos**. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.
- [32] MURRAY, J.D. **Mathematical Biology: Spatial models and biomedical applications**, New York: Springer, 2002-2003.
- [33] MURRAY, P.R.; ROSENTHAL, K.S.; PFALLER, M.A. **Microbiologia Médica**. Tradução por Angela Christina Dias de Castro et al. 5.ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
- [34] ORGANIZAÇÃO Pan-Americana da Saúde. **Prevenção e controle doenças. Tema: Dengue. Conceito**. Disponível em: <<http://www.opas.org.br/prevencao/temas.cfm?id=49&area=Conceito>>. Acesso em: 10 out. 2008.
- [35] ROCHA, G.S. **Aplicação da teoria dos números fuzzys nos modelos de transporte de poluentes para avaliar sua capacidade de previsão do risco de contaminação em rios naturais**, Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.
- [36] SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado do Meio Ambiente. Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental. **Dengue – Saiba como se prevenir...** Disponível em: <<http://www.cetesb.sp.gov.br/Institucional/dengue/dengue.asp>>. Acesso em: 14 dez. 2008.
- [37] SKELLAM, J.G., Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika*, 38, p.196-218, 1951.
- [38] TAKAHASHI, L.T. **Modelos matemáticos de epidemiologia com vetores: simulação da propagação urbana e geográfica da dengue**. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.
- [39] THOMÉ, R.C.A. **Controle Ótimo Aplicado na Estratégia de Combate ao Aedes aegypti Utilizando Inseticida e Mosquitos Estéreis**. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

- [40] VASCONCELOS, F. C. et al. Aedes aegypti, Dengue and Re-urbanization of Yellow Fever in Brazil and other South American Countries – Past and Present Situation and Future Perspectives. **Dengue Bulletin**, v.23, 1999.
- [41] YANG, H.M., **Epidemiologia matemática - Estudo dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta**. Campinas, SP: UNICAMP, 2001.
- [42] ZEIDLER, J.D. et al. Vírus dengue em larvas de Ae. aegypti sua dinâmica de infestação, Roraima, Brazil. **Revista de Saúde Pública**, v.42, n.6, p.986-91, 2008.

# Apêndice A

## Código Fonte

A seguir, é apresentado o código fonte `dengue5v.m` da simulação 4 (Modelo 2), implementado em ambiente MATLAB 7.0. Os arquivos `malha.dat` e `coord.dat` foram obtidos através do *software* Gmsh e definem a malha de triângulos resultantes da discretização do domínio espacial. Para o tratamento das variáveis fuzzy foi utilizado o *Toolbox Fuzzy* do MATLAB.

### A.1 dengue5v.m

```
clear all
tic

%-----%
%##### Abrir os arquivos #####
%-----%

% Abrindo a matriz malha de triângulos (malha.dat)

ntr = 2227;
fid = fopen('malha.dat','r');
malha = fscanf(fid,'%d',[9 ntr]);
malha = malha';
malha = [malha(:,7),malha(:,8),malha(:,9)];
fclose(fid);

% Abrindo a matriz de coordenadas dos pontos (coord.dat)

nn = 1221;
fid = fopen('coord.dat','r');
coord = fscanf(fid,'%lf',[4 nn]);
coord = coord';
coord = [coord(:,2) coord(:,3)];
fclose(fid);

% Ajustando as coordenadas para a unidade do problema e para uma melhor visualização
```

```

minx = min(coord(:,1));
miny = min(coord(:,2));
coord(:,1) = coord(:,1)-minx*ones(nn,1);
coord(:,2) = coord(:,2)-miny*ones(nn,1);
coord = (10-3)*coord; % Passando para a unidade de m para km
%-----%
%%%%% Definições de pontos de visualização, parâmetros, etc %%%%
%-----%

% Pontos para visualização

indver1=335; % (10.8176 , 15.4169)
indver2=604; % (5.2961 , 6.3190)
indver3=784; % (2.7175 , 3.0292)

% Parametros - tempo

tfinal = 15; % Tempo de um periodo (em dias). Tempo total é de np*15 dias.
nt = 150; % Número de passos no tempo no periodo.
np = 6; % Número de periodos de 15 dias.
ntt = 150*np; % Número total de passos no tempo.
dt = tfinal/nt; % Tamanho do passo no tempo.

% Outros parâmetros do problema

alfas = 0.0015; % Espalhamento de humanos suscetíveis (HS)
alfai = 0.0015; % Espalhamento de humanos infectante (HI)
alfar = 0.0015; % Espalhamento de humanos recuperados (HR)

mis = 0.04; % Mortalidade de mosquitos suscetíveis (MS)
mii = 0.05; % Mortalidade de mosquitos infectantes (MI)
b=0.000015; % Proporcao de encontros efetivos entre MI e HS que geram HI
c=0.0045; % Proporcao de encontros efetivos entre MS e HI que geram MI
g = 0.1; % Recuperacao dos humanos

% Redefinicoes de parâmetros

dalts = alfas*dt/2; dalti = alfai*dt/2; daltr = alfar*dt/2;
bd4=b*dt/4; gd2=g*dt/2; cd4 = c*dt/4; msd2=mis*dt/2; mid2=mii*dt/2;

% Parametros fuzzy

alfau = zeros(nn,1); nat = zeros(nn,1);
alfauvar=0.0100; natvar = 0.147;
alfaumin=0.0100; natmin = 0;

gravachuva=zeros(6,1);
periodo = 1;
chu = sorteiachuva(periodo);
gravachuva(periodo)=chu;

x=zeros(3,1); y=zeros(3,1);

area1 = 0; area2 = 0; area3 = 0; area4 = 0;

```

```

rec = zeros(nn,1);
rect1 = 1081; % Número de recipientes encontrados na regio 1
rect2 = 311; % Número de recipientes encontrados na regio 2
rect3 = 56; % Número de recipientes encontrados na regio 3
rect4 = 45; % Número de recipientes encontrados na regio 4

hum = zeros(nn,1);
humt1 = 14450+21168+11909+17511+11015+34742+15664+27309+24937; % Humanos habitantes na regio 1
humt2 = 56205; % Humanos habitantes na regio 2
humt3 = 12325; % Humanos habitantes na regio 3
humt4 = 35821; % Humanos habitantes na regio 4

regiao=zeros(nn,1);

x1 = 282567.6666666667-minx; y1 = 7452497-miny;
x2 = 287202.4434083354-minx; y2 = 7451473.607507878-miny;
x3 = 289532.6-minx; y3 = 7449451.2-miny;
x4 = 286748.9239530133-minx; y4 = 7451545.027145297-miny;
x5 = 285417.12051598-minx; y5 = 7454038.319529831-miny;
x6 = 287366.9119993274-minx; y6 = 7462438.950990694-miny;
x7 = 285687-minx; y7 = 7461165-miny;
x8 = 290428.5-minx; y8 = 7457126-miny;

x1=10^(-3)*x1; y1=10^(-3)*y1;
x2=10^(-3)*x2; y2=10^(-3)*y2;
x3=10^(-3)*x3; y3=10^(-3)*y3;
x4=10^(-3)*x4; y4=10^(-3)*y4;
x5=10^(-3)*x5; y5=10^(-3)*y5;
x6=10^(-3)*x6; y6=10^(-3)*y6;
x7=10^(-3)*x7; y7=10^(-3)*y7;
x8=10^(-3)*x8; y8=10^(-3)*y8;

m12 = (y1-y2)/(x1-x2);
m23 = (y2-y3)/(x2-x3);
m45 = (y4-y5)/(x4-x5);
m56 = (y5-y6)/(x5-x6);
m67 = (y6-y7)/(x6-x7);
m68 = (y6-y8)/(x6-x8);

areatotal=0;
for itr = 1:ntr
    for il = 1:3
        ig = malha(itr,il);
        x(il) = coord(ig,1);
        y(il) = coord(ig,2);
    end
    J = (x(2)-x(1))*(y(3)-y(1))-(x(3)-x(1))*(y(2)-y(1));
    areatr = abs(J)/2;
    if (y(il) >= m67*x(il) + y6 - m67*x6) || (y(il) >= m68*x(il) + y6 - m68*x6)
        area1 = area1 + areatr;
        regiao(ig) = 1;
    elseif ((y(il) <= m67*x(il) + y6 - m67*x6) && (y(il) >= m12*x(il) + y1 - m12*x1)) && ((y(il)
        >= m56*x(il)+ y5 - m56*x5) || (y(il) <= m45*x(il) + y4 - m45*x4))
        area2 = area2 + areatr;

```

```

        regioao(ig) = 2;
    elseif ((y(il) <= m68*x(il) + y6 - m68*x6) && (y(il) <= m56*x(il) + y5 - m56*x5) && (y(il) >=
        m45*x(il) + y4 - m45*x4)) && ((y(il) >= m12*x(il) + y1 - m12*x1) || (y(il) >= m23*x(il)
        + y2 - m23*x2))
        area3 = area3 + areatr;
        regioao(ig) = 3;
    elseif (y(il) <= m12*x(il) + y1 - m12*x1) && (y(il) <= m23*x(il) + y2 - m23*x2)
        area4 = area4 + areatr;
        regioao(ig) = 4;
    end
    areatotal=areatr+areatotal;
end

for ig = 1:nn
    x(il) = coord(ig,1);
    y(il) = coord(ig,2);
    if (y(il) >= m67*x(il) + y6 - m67*x6) || (y(il) >= m68*x(il) + y6 - m68*x6)
        rec(ig) = rect1/area1;
        hum(ig) = humt1/area1;
        auxnEalf=nalf(chu,rec(ig),hum(ig));
        nat(ig)=natvar*auxnEalf(1)+natmin;
        alfau(ig)=alfauvar*auxnEalf(2)+alfaumin;
    elseif ((y(il) <= m67*x(il) + y6 - m67*x6) && (y(il) >= m12*x(il) + y1 - m12*x1)) && ((y(il) >=
        m56*x(il) + y5 - m56*x5) || (y(il) <= m45*x(il) + y4 - m45*x4))
        rec(ig) = rect2/area2;
        hum(ig) = humt2/area2;
        auxnEalf=nalf(chu,rec(ig),hum(ig));
        nat(ig)=natvar*auxnEalf(1)+natmin;
        alfau(ig)=alfauvar*auxnEalf(2)+alfaumin;
    elseif ((y(il) <= m68*x(il) + y6 - m68*x6) && (y(il) <= m56*x(il) + y5 - m56*x5) && (y(il) >=
        m45*x(il) + y4 - m45*x4)) && ((y(il) >= m12*x(il) + y1 - m12*x1) || (y(il) >= m23*x(il)
        + y2 - m23*x2))
        rec(ig) = rect3/area3;
        hum(ig) = humt3/area3;
        auxnEalf=nalf(chu,rec(ig),hum(ig));
        nat(ig)=natvar*auxnEalf(1)+natmin;
        alfau(ig)=alfauvar*auxnEalf(2)+alfaumin;
    elseif (y(il) <= m12*x(il) + y1 - m12*x1) && (y(il) <= m23*x(il) + y2 - m23*x2)
        rec(ig) = rect4/area4;
        hum(ig) = humt4/area4;
        auxnEalf=nalf(chu,rec(ig),hum(ig));
        nat(ig)=natvar*auxnEalf(1)+natmin;
        alfau(ig)=alfauvar*auxnEalf(2)+alfaumin;
    end
end

% Condições iniciais

sant = hum; % Relativo aos HS
iant = zeros(nn,1); % Relativo aos HI
rant = zeros(nn,1); % Relativo aos HR
usant = 15*ones(nn,1); % Relativo aos MS
uiant = zeros(nn,1); % Relativo aos MI
    for ig = 1:nn

```



```

        x(il) = coord(ig,1);
        y(il) = coord(ig,2);
        if (x(il)-10)^2+(y(il)-14)^2 < (1/pi); % Lugar favoravel aos mosquitos (na região 1)
            sant(ig)=sant(ig)-3; iant(ig)=iant(ig)+3; usant(ig)=usant(ig)-6; uiant(ig)=uiant(ig)+6;
        end
        if (x(il)-4)^2+(y(il)-1.90)^2 < (1/pi); % Lugar desfavoravel aos mosquitos (na região 4)
            sant(ig)=sant(ig)-3; iant(ig)=iant(ig)+3; usant(ig)=usant(ig)-6; uiant(ig)=uiant(ig)+6;
        end
        if (x(il)-2.7)^2+(y(il)-2.75)^2 < (1/pi); % Lugar desfavoravel aos mosquitos (na região 4)
            sant(ig)=sant(ig)-3; iant(ig)=iant(ig)+3; usant(ig)=usant(ig)-6; uiant(ig)=uiant(ig)+6;
        end
        if (x(il)-5.3)^2+(y(il)-6.3)^2 < (1/pi); % Lugar mais ou menos (na região 2)
            sant(ig)=sant(ig)-3; iant(ig)=iant(ig)+3; usant(ig)=usant(ig)-6; uiant(ig)=uiant(ig)+6;
        end
    end

    cis = zeros(nn,1); cii = zeros(nn,1); cir = zeros(nn,1);
    cius = zeros(nn,1); ciui = zeros(nn,1);
    mc=zeros(nn,nn);

    cs(1) = -1; cs(2) = 1; cs(3) = 0;
    et(1) = -1; et(2) = 0; et(3) = 1;

    dfdx = zeros(3,1); dfdy = zeros(3,1);

    % Definicao das matrizes e vetores a serem preenchidos

    mms = sparse(nn,nn); mns = sparse(nn,nn);
    mmi = sparse(nn,nn); mni = sparse(nn,nn); bi = zeros(nn,1);
    mmr = sparse(nn,nn); mnr = sparse(nn,nn); br = zeros(nn,1);

    % Preenchimento das matrizes (linear) e resolução da cond inicial

    for itr = 1:ntr
        for il = 1:3
            ig = malha(itr,il);
            x(il) = coord(ig,1);
            y(il) = coord(ig,2);
        end
        J = (x(2)-x(1))*(y(3)-y(1))-(x(3)-x(1))*(y(2)-y(1));
        J = abs(J);
        for il = 1:3
            dfdx(il) = -(et(il)*(y(2)-y(1))-cs(il)*(y(3)-y(1)));
            dfdy(il) = (et(il)*(x(2)-x(1))-cs(il)*(x(3)-x(1)));
        end
        smr = [1/12 1/24 1/24
              1/24 1/12 1/24
              1/24 1/24 1/12];
        smres = J*smr; smrds = J*smr;
        smrei = J*(1+gd2)*smr; smrdi = J*(1-gd2)*smr;
        smrer = J*smr; smrdr = J*smr;
        semrx = [dfdx(1)*dfdx(1) dfdx(1)*dfdx(2) dfdx(1)*dfdx(3)
                 dfdx(2)*dfdx(1) dfdx(2)*dfdx(2) dfdx(2)*dfdx(3)
                 dfdx(3)*dfdx(1) dfdx(3)*dfdx(2) dfdx(3)*dfdx(3)];
        semrxs = dalts*semrx/J;
    end

```

```

semrxi = dalti*semrx/J;
semrxr = daltr*semrx/J;
semry = [dfdy(1)*dfdy(1) dfdy(1)*dfdy(2) dfdy(1)*dfdy(3)
         dfdy(2)*dfdy(1) dfdy(2)*dfdy(2) dfdy(2)*dfdy(3)
         dfdy(3)*dfdy(1) dfdy(3)*dfdy(2) dfdy(3)*dfdy(3)];
semrys = dalts*semry/J;
semryi = dalti*semry/J;
semryr = daltr*semry/J;
for il = 1:3
    ig = malha(itr,il);
    for jl = 1:3
        jg = malha(itr,jl);
        mc(ig,jg) = mc(ig,jg) + J*smr(il,jl);
        mms(ig,jg) = mms(ig,jg) + smres(il,jl) + semrxs(il,jl) + semrys(il,jl);
        mns(ig,jg) = mns(ig,jg) + smrds(il,jl) - semrxs(il,jl) - semrys(il,jl);
        mmi(ig,jg) = mmi(ig,jg) + smrei(il,jl) + semrxi(il,jl) + semryi(il,jl);
        mni(ig,jg) = mni(ig,jg) + smrdi(il,jl) - semrxi(il,jl) - semryi(il,jl);
        mmr(ig,jg) = mmr(ig,jg) + smrer(il,jl) + semrxr(il,jl) + semryr(il,jl);
        mnr(ig,jg) = mnr(ig,jg) + smrdr(il,jl) - semrxr(il,jl) - semryr(il,jl);
    end
    cis(ig) = cis(ig) + J*sant(ig)/6;
    cii(ig) = cii(ig) + J*iant(ig)/6;
    cir(ig) = cir(ig) + J*rant(ig)/6;
    cius(ig) = cius(ig) + J*usant(ig)/6;
    ciui(ig) = ciui(ig) + J*uiant(ig)/6;
end
end %for itr

sant = mc\cis; iant = mc\cii; rant = mc\cir; usant = mc\cius; uiant = mc\ciui;

s = sant; i = iant; r = rant; us = usant; ui = uiant;

%-----%
%%%%%%%% Preenchimento das matrizes que variam no tempo e resolução %%%%
%-----%

% Vetores para visualizacao em determinados pontos ao longo do tempo

cont = 1
vers1 = zeros(ntt,1); vers2 = zeros(ntt,1); vers3 = zeros(ntt,1);
veri1 = zeros(ntt,1); veri2 = zeros(ntt,1); veri3 = zeros(ntt,1);
verr1 = zeros(ntt,1); verr2 = zeros(ntt,1); verr3 = zeros(ntt,1);
verus1 = zeros(ntt,1); verus2 = zeros(ntt,1); verus3 = zeros(ntt,1);
verui1 = zeros(ntt,1); verui2 = zeros(ntt,1); verui3 = zeros(ntt,1);

vers1(1) = sant(indver1); vers2(1) = sant(indver2); vers3(1) = sant(indver3);
veri1(1) = iant(indver1); veri2(1) = iant(indver2); veri3(1) = iant(indver3);
verr1(1) = rant(indver1); verr2(1) = rant(indver2); verr3(1) = rant(indver3);
verus1(1) = usant(indver1); verus2(1) = usant(indver2); verus3(1) = usant(indver3);
verui1(1) = uiant(indver1); verui2(1) = uiant(indver2); verui3(1) = uiant(indver3);

for periodo = 1:np

% Definicao das matrizes que variam e vetores a serem preenchidos

```

```

mmus = sparse(nn,nn); mnus = sparse(nn,nn); bus = zeros(nn,1);
mmui = sparse(nn,nn); mnui = sparse(nn,nn); bui = zeros(nn,1);

% Preenchimento das matrizes - linear

for itr = 1:ntr
    for il = 1:3
        ig = malha(itr,il);
        x(il) = coord(ig,1);
        y(il) = coord(ig,2);
    end
    J = (x(2)-x(1))*(y(3)-y(1))-(x(3)-x(1))*(y(2)-y(1));
    J = abs(J);
    for il = 1:3
        dfdx(il) = -(et(il)*(y(2)-y(1))-cs(il)*(y(3)-y(1)));
        dfdy(il) = (et(il)*(x(2)-x(1))-cs(il)*(x(3)-x(1)));
    end
    smr = [1/12 1/24 1/24
           1/24 1/12 1/24
           1/24 1/24 1/12];
    smreus = J*(1+msd2)*smr;
    smrdus = J*(1-msd2)*smr;
    smreui = J*(1+mid2)*smr;
    smrdui = J*(1-mid2)*smr;
    semrx = [dfdx(1)*dfdx(1) dfdx(1)*dfdx(2) dfdx(1)*dfdx(3)
             dfdx(2)*dfdx(1) dfdx(2)*dfdx(2) dfdx(2)*dfdx(3)
             dfdx(3)*dfdx(1) dfdx(3)*dfdx(2) dfdx(3)*dfdx(3)];
    semry = [dfdy(1)*dfdy(1) dfdy(1)*dfdy(2) dfdy(1)*dfdy(3)
             dfdy(2)*dfdy(1) dfdy(2)*dfdy(2) dfdy(2)*dfdy(3)
             dfdy(3)*dfdy(1) dfdy(3)*dfdy(2) dfdy(3)*dfdy(3)];
    for il = 1:3
        ig = malha(itr,il);
        for jl = 1:3
            jg = malha(itr,jl);
            mmus(ig,jg) = mmus(ig,jg) + smreus(il,jl) - J*(nat(jg)*dt/2)*smr(il,jl)
                + (alfau(jg)*dt/2)*semrx(il,jl)/J + (alfau(jg)*dt/2)*semry(il,jl)/J;
            mnus(ig,jg) = mnus(ig,jg) + smrdus(il,jl) + J*(nat(jg)*dt/2)*smr(il,jl)
                - (alfau(jg)*dt/2)*semrx(il,jl)/J - (alfau(jg)*dt/2)*semry(il,jl)/J;
            mmui(ig,jg) = mmui(ig,jg) + smreui(il,jl) + (alfau(jg)*dt/2)*semrx(il,jl)/J
                + (alfau(jg)*dt/2)*semry(il,jl)/J;
            mnui(ig,jg) = mnui(ig,jg) + smrdui(il,jl) - (alfau(jg)*dt/2)*semrx(il,jl)/J
                - (alfau(jg)*dt/2)*semry(il,jl)/J;
        end
    end
end %for itr

%%%%%% Termo não linear %%%%%%%%%

nlin = zeros(3,3,3);
for ii=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            if (ii==j) && (j==k)
                nlin(ii,j,k)=1/20;
            elseif (ii~=j) && (ii~=k) && (j~=k)

```

```

        nlin(ii,j,k)=1/120;
    else
        nlin(ii,j,k)=1/60;
    end
end
end
end

% Preenchimento da parte nao linear das matrizes e resolucao a cada passo no tempo

for contt = 1:nt
    t=(periodo-1)*nt+contt*dt;
    for ijk = 1:3
        mmusf = mmus; mnusf = mnus; busf = bus;
        mmsf = mms; mnsf = mns;
        buif = bui; bif = bi; brf = br;
        for itr = 1:ntr
            for il = 1:3
                ig = malha(itr,il);
                x(il) = coord(ig,1);
                y(il) = coord(ig,2);
            end
            J = (x(2)-x(1))*(y(3)-y(1))-(x(3)-x(1))*(y(2)-y(1));
            J = abs(J);
            for il = 1:3
                ig = malha(itr,il);
                for jl = 1:3
                    jg = malha(itr,jl);
                    for kl = 1:3
                        kg = malha(itr,kl);
                        mmusf(ig,jg) = mmusf(ig,jg) + cd4*J*(iant(kg)+i(kg))*nlin(il,jl,kl);
                        mnusf(ig,jg) = mnusf(ig,jg) - cd4*J*(iant(kg)+i(kg))*nlin(il,jl,kl);
                        mmsf(ig,jg) = mmsf(ig,jg) + bd4*J*(uiant(kg)+ui(kg))*nlin(il,jl,kl);
                        mnsf(ig,jg) = mnsf(ig,jg) - bd4*J*(uiant(kg)+ui(kg))*nlin(il,jl,kl);
                        bif(ig) = bif(ig)+bd4*J*((sant(jg)+s(jg))*(uiant(kg)+ui(kg)))*nlin(il,jl,kl);
                        buif(ig) = buif(ig)+cd4*J*((usant(jg)+us(jg))*(iant(kg)+i(kg)))*nlin(il,jl,kl);
                    end
                    busf(ig) = busf(ig) + (nat(ig)*dt/2)*J*(uiant(jg)+ui(jg))*smr(il,jl);
                    brf(ig) = brf(ig) + gd2*J*(iant(jg)+i(jg))*smr(il,jl);
                end
            end
        end
        % Resolucao do sistema
        us = mmusf\(mnusf*usant+busf);
        ui = mmui\(mnui*uiant+buif);
        s = mmsf\(mnsf*sant);
        i = mmi\(mni*iant+bif);
        r = mmr\(mnr*rant+brf);
    end

    % Atualizacao
    usant = us; uiant = ui; sant = s; iant = i; rant = r;

    cont=cont+1
    vers1(cont) = s(indver1); vers2(cont) = s(indver2); vers3(cont) = s(indver3);

```

```

veri1(cont) = i(indver1); veri2(cont) = i(indver2); veri3(cont) = i(indver3);
verr1(cont) = r(indver1); verr2(cont) = r(indver2); verr3(cont) = r(indver3);
verus1(cont) = us(indver1); verus2(cont) = us(indver2); verus3(cont) = us(indver3);
verui1(cont) = ui(indver1); verui2(cont) = ui(indver2); verui3(cont) = ui(indver3);

if mod(cont-2,10)==0
    figure(1)
    trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),s), title('Densidade de humanos suscetíveis'),
        view([0 90]),colorbar,shading interp;
    if cont-2==0
        hgsave('HSm0b')
    elseif cont-2==300
        hgsave('HSm1b')
        recup1=0;
        rec123=zeros(3,1);
        infect1=0;
        inf123=zeros(3,1);
        for itr = 1:ntr
            for il = 1:3
                ig = malha(itr,il);
                x(il) = coord(ig,1); y(il) = coord(ig,2);
            end
            J = (x(2)-x(1))*(y(3)-y(1))-(x(3)-x(1))*(y(2)-y(1));
            J = abs(J);
            for il = 1:3
                dfdx(il) = -(et(il)*(y(2)-y(1))-cs(il)*(y(3)-y(1)));
                dfdy(il) = (et(il)*(x(2)-x(1))-cs(il)*(x(3)-x(1)));
            end
            for il = 1:3
                ig = malha(itr,il);
                rec123(il)=r(ig);
                inf123(il)=i(ig);
            end
            recup1=recup1+J*(rec123(1)+rec123(2)+rec123(3))/6;
            infect1=infect1+J*(inf123(1)+inf123(2)+inf123(3))/6;
        end %for itr
    elseif cont-2==600
        hgsave('HSm2b')
        recup2=0;
        rec123=zeros(3,1);
        infect2=0;
        inf123=zeros(3,1);
        for itr = 1:ntr
            for il = 1:3
                ig = malha(itr,il);
                x(il) = coord(ig,1); y(il) = coord(ig,2);
            end
            J = (x(2)-x(1))*(y(3)-y(1))-(x(3)-x(1))*(y(2)-y(1));
            J = abs(J);
            for il = 1:3
                dfdx(il) = -(et(il)*(y(2)-y(1))-cs(il)*(y(3)-y(1)));
                dfdy(il) = (et(il)*(x(2)-x(1))-cs(il)*(x(3)-x(1)));
            end
            for il = 1:3
                ig = malha(itr,il);

```

```

        rec123(il)=r(ig);
        inf123(il)=i(ig);
    end
    recup2=recup2+J*(rec123(1)+rec123(2)+rec123(3))/6;
    infect2=infect2+J*(inf123(1)+inf123(2)+inf123(3))/6;
end %for itr
end

figure(2)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),i), title('Densidade de humanos infectantes'),
    view([0 90]),colorbar,shading interp;
if cont-2==0
    hgsave('HIm0b')
elseif cont-2==300
    hgsave('HIm1b')
elseif cont-2==600
    hgsave('HIm2b')
end

figure(3)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),r), title('Densidade de humanos recuperados'),
    view([0 90]),colorbar,shading interp;
if cont-2==0
    hgsave('HRm0b')
elseif cont-2==300
    hgsave('HRm1b')
elseif cont-2==600
    hgsave('HRm2b')
end

figure(4)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),us), title('Densidade de mosquitos suscetíveis'),
    view([0 90]),colorbar,shading interp;
if cont-2==0
    hgsave('MSm0b')
elseif cont-2==300
    hgsave('MSm1b')
elseif cont-2==600
    hgsave('MSm2b')
end

figure(5)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),ui), title('Densidade de mosquitos infectantes'),
    view([0 90]),colorbar,shading interp;
if cont-2==0
    hgsave('MIm0b')
elseif cont-2==300
    hgsave('MIm1b')
elseif cont-2==600
    hgsave('MIm2b')
end
end
end % for contt

% Para o proximo periodo

```

```

if periodo < 6
    chu = sorteiachuva(periodo+1)
    gravachuva(periodo+1)=chu;
    for ig = 1:nn
        x(il) = coord(ig,1);
        y(il) = coord(ig,2);
        if (y(il) >= m67*x(il) + y6 - m67*x6) || (y(il) >= m68*x(il) + y6 - m68*x6)
            hum(ig) = (sant(ig)+iant(ig)+rant(ig))/area1;
            auxnEalf=nalf(chu,rec(ig),hum(ig));
            nat(ig)=natvar*auxnEalf(1)+natmin;
            alfau(ig)=alfauvar*auxnEalf(2)+alfaumin;
        elseif ((y(il) <= m67*x(il) + y6 - m67*x6) && (y(il) >= m12*x(il) + y1 - m12*x1))
            && ((y(il) >= m56*x(il) + y5 - m56*x5) || (y(il) <= m45*x(il) + y4 - m45*x4))
            hum(ig) = (sant(ig)+iant(ig)+rant(ig))/area2;
            auxnEalf=nalf(chu,rec(ig),hum(ig));
            nat(ig)=natvar*auxnEalf(1)+natmin;
            alfau(ig)=alfauvar*auxnEalf(2)+alfaumin;
        elseif ((y(il) <= m68*x(il) + y6 - m68*x6) && (y(il) <= m56*x(il) + y5 - m56*x5) &&
            (y(il) >= m45*x(il) + y4 - m45*x4)) && ((y(il) >= m12*x(il) + y1 - m12*x1)
            || (y(il) >= m23*x(il) + y2 - m23*x2))
            hum(ig) = (sant(ig)+iant(ig)+rant(ig))/area3;
            auxnEalf=nalf(chu,rec(ig),hum(ig));
            nat(ig)=natvar*auxnEalf(1)+natmin;
            alfau(ig)=alfauvar*auxnEalf(2)+alfaumin;
        elseif (y(il) <= m12*x(il) + y1 - m12*x1) && (y(il) <= m23*x(il) + y2 - m23*x2)
            hum(ig) = (sant(ig)+iant(ig)+rant(ig))/area4;
            auxnEalf=nalf(chu,rec(ig),hum(ig));
            nat(ig)=natvar*auxnEalf(1)+natmin;
            alfau(ig)=alfauvar*auxnEalf(2)+alfaumin;
        end
    end % for ig
end % if
end % for periodo=1:6

% Total de pessoas infectadas nos terceiro mes

infect3=0;
inf123=zeros(3,1);
recup3=0;
rec123=zeros(3,1);
for itr = 1:ntr
    for il = 1:3
        ig = malha(itr,il);
        x(il) = coord(ig,1);
        y(il) = coord(ig,2);
    end
    J = (x(2)-x(1))*(y(3)-y(1))-(x(3)-x(1))*(y(2)-y(1));
    J = abs(J);
    for il = 1:3
        dfdx(il) = -(et(il)*(y(2)-y(1))-cs(il)*(y(3)-y(1)));
        dfdy(il) = (et(il)*(x(2)-x(1))-cs(il)*(x(3)-x(1)));
    end
    for il = 1:3
        ig = malha(itr,il);

```

```

        inf123(il)=i(ig);
        rec123(il)=r(ig);
    end
    infect3=infect3+J*(inf123(1)+inf123(2)+inf123(3))/6;
    recup3=recup3+J*(rec123(1)+rec123(2)+rec123(3))/6;
end %for itr

toc
tempo = toc

figure(11)
plot(vers2), title('Densidade de humanos suscetíveis no ponto 604')
hgsave('HS604b')

figure(21)
plot(veri2), title('Densidade de humanos infectantes no ponto 604')
hgsave('HI604b')

figure(31)
plot(verr2), title('Densidade de humanos recuperados no ponto 604')
hgsave('HR604b')

figure(41)
plot(verus2), title('Densidade de mosquitos suscetíveis no ponto 604')
hgsave('MS604b')

figure(51)
plot(verui2), title('Densidade de mosquitos infectantes no ponto 604')
hgsave('MI604b')

figure(1)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),s), title('Densidade de humanos suscetíveis'), view([0 90]),
colorbar,shading interp;
hgsave('HSm3b')

figure(2)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),i), title('Densidade de humanos infectantes'), view([0 90]),
colorbar,shading interp;
hgsave('HIm3b')

figure(3)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),r), title('Densidade de humanos recuperados'), view([0 90]),
colorbar,shading interp;
hgsave('HRm3b')

figure(4)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),us), title('Densidade de mosquitos suscetíveis'), view([0 90]),
colorbar,shading interp;
hgsave('MSm3b')

figure(5)
trisurf(malha,coord(:,1),coord(:,2),ui), title('Densidade de mosquitos infectantes'), view([0 90]),
colorbar,shading interp;
hgsave('MIm3b')

```