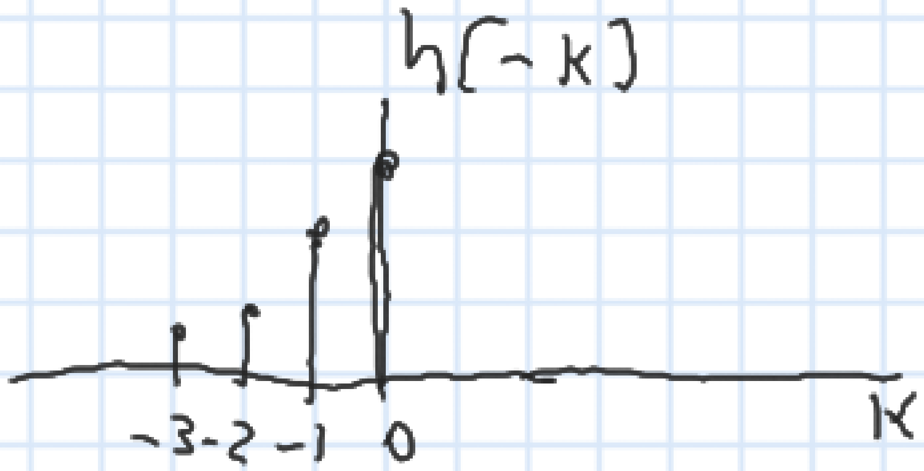
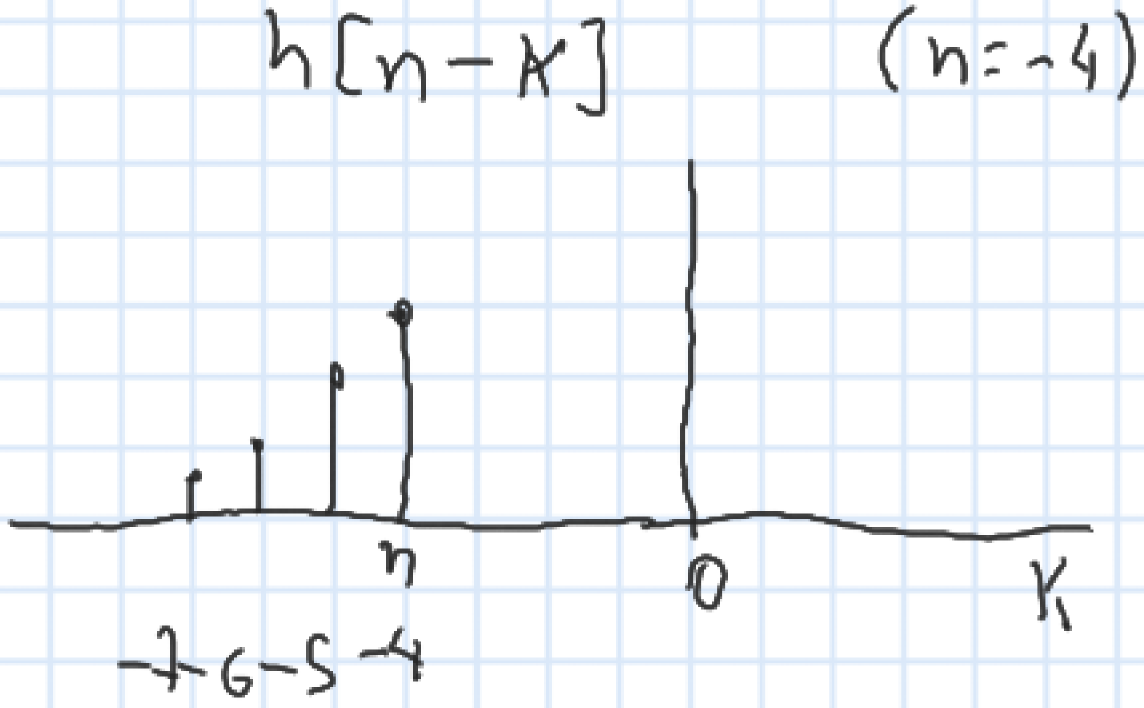
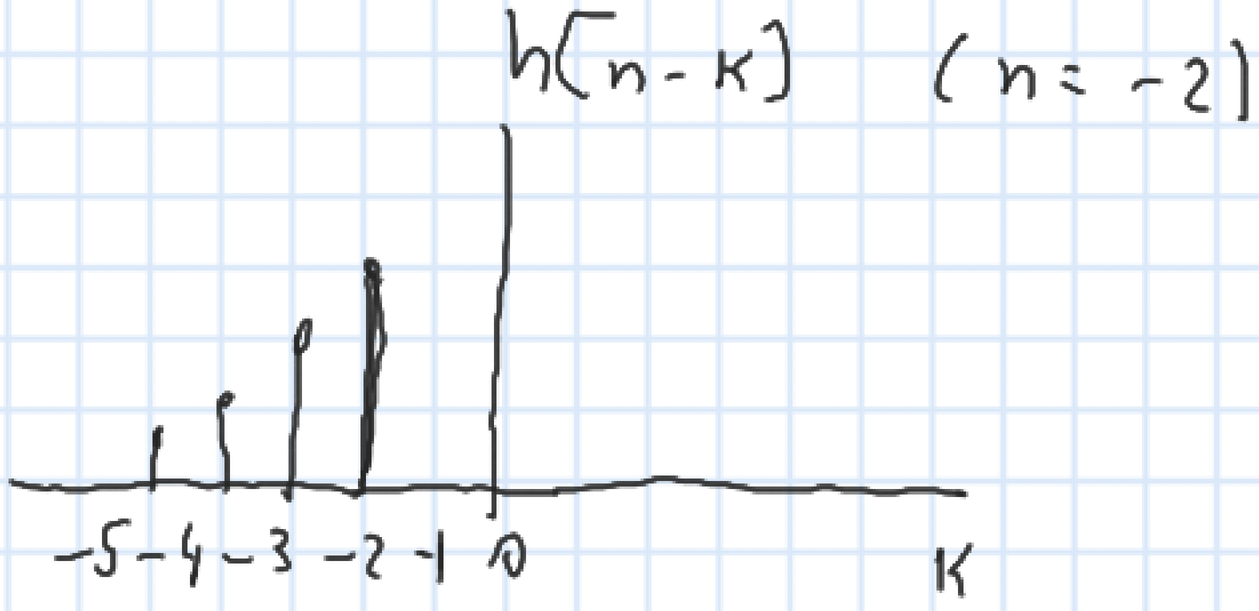
Interpretação Gráfica da Convolução

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K] \cdot h[n-K]$$

$h[-K] \Rightarrow$ INVERSÃO TEMPORAL





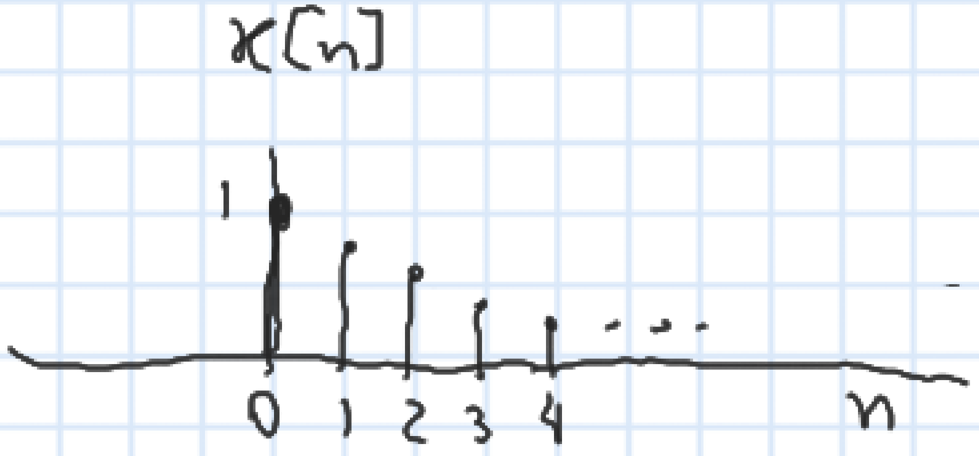


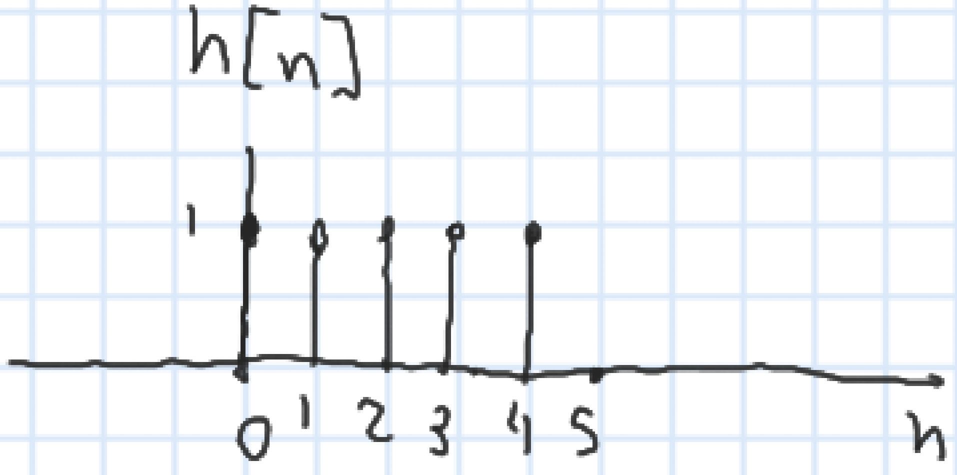
Use o método gráfico para calcular a seguinte convolução:

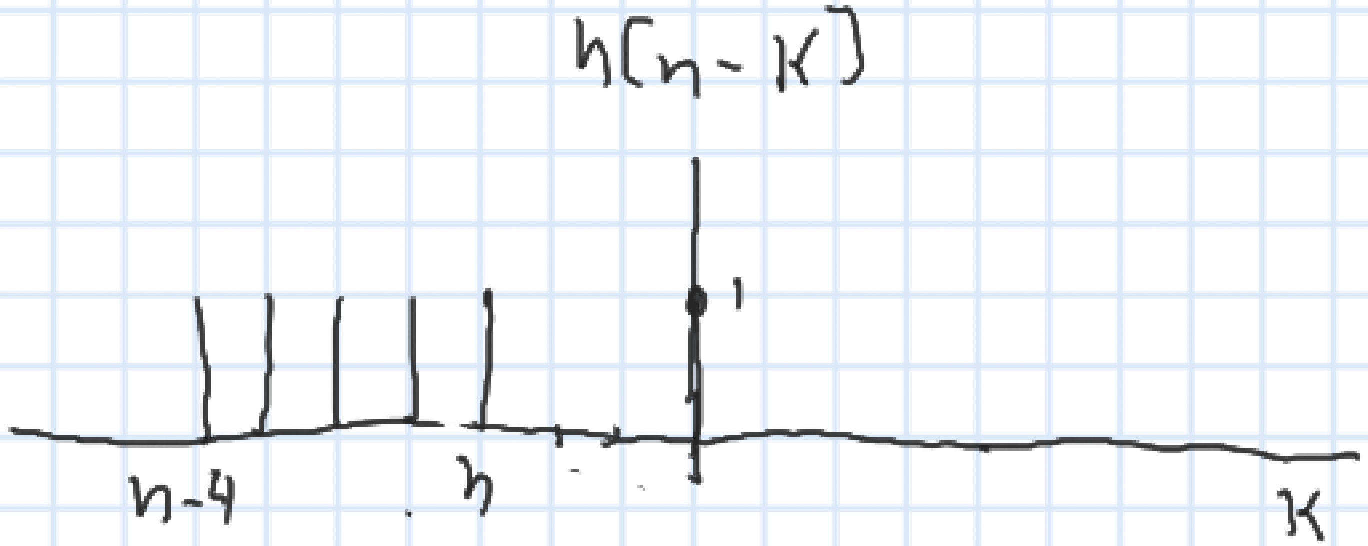
$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad x[n] = \alpha^n \cdot u[n]$$

$$h[n] = u[n] - u[n-5]$$

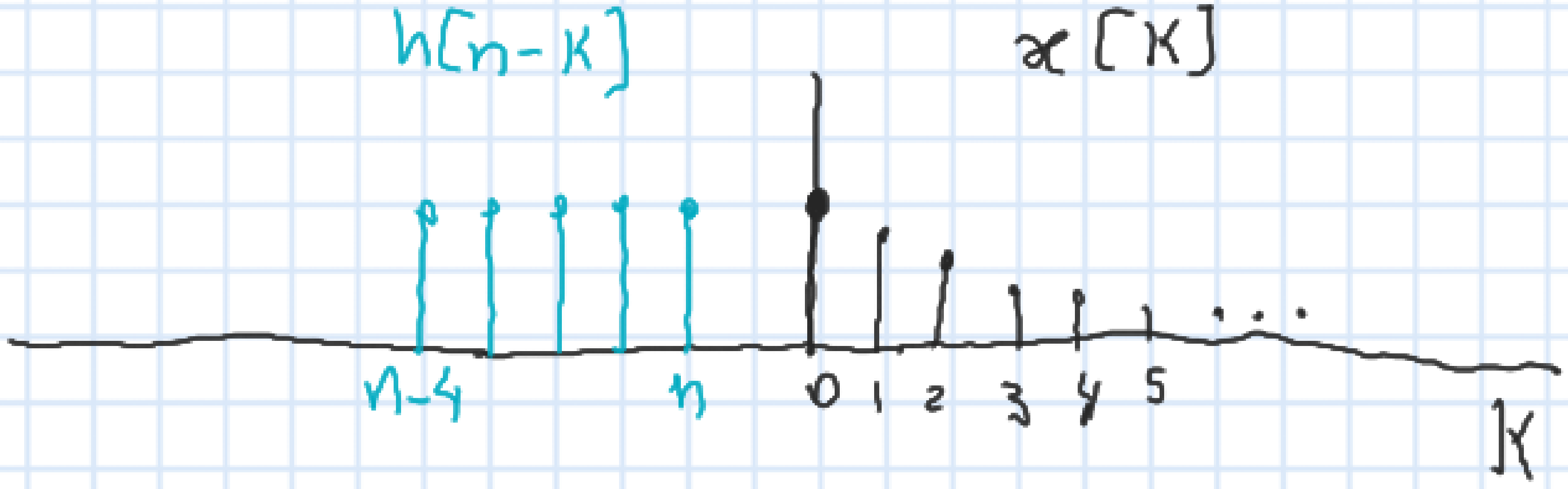
$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K] \cdot h[n-K]$$





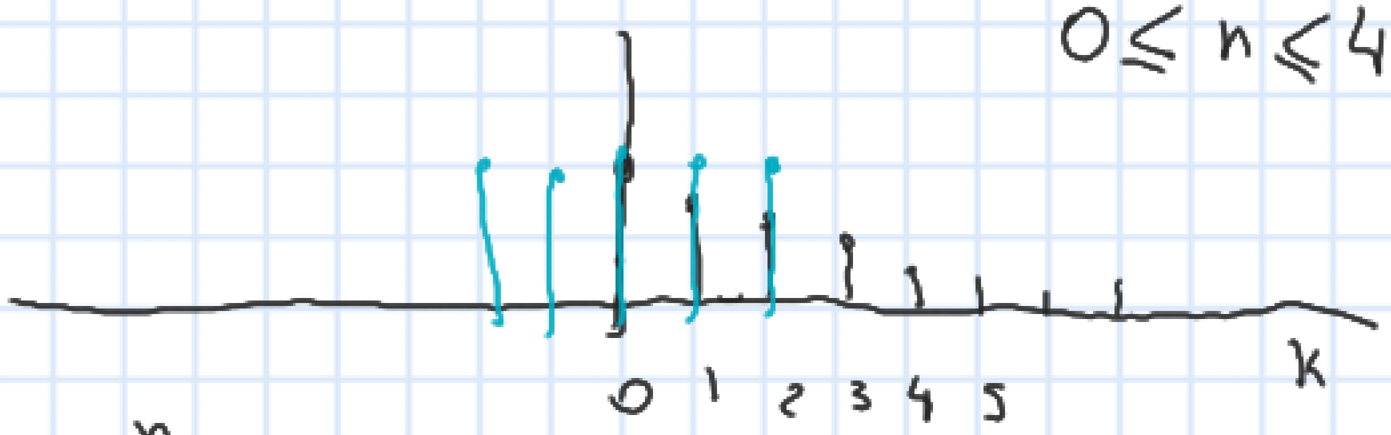


$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$



$y[n] = 0$ p/ $n < 0$

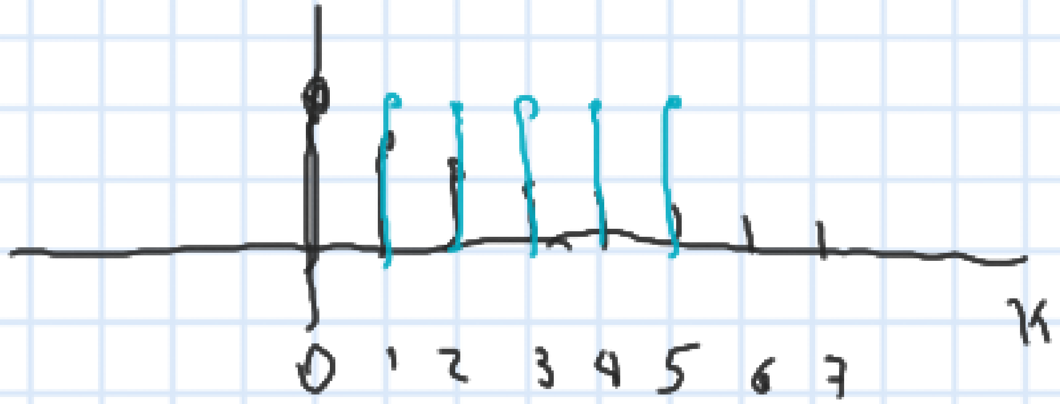
$0 \leq n \leq 4$



$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$n > 4$

$$y[n] = \sum_{k=n-4}^{n} \alpha^k$$



$$y[n] = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$$\boxed{y[n] = \begin{cases} 0 & \text{p/ } n < 0 \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & \text{p/ } 0 \leq n \leq 4 \\ \dfrac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1-\alpha} & \text{p/ } n > 4 \end{cases}}$$

Calcule a convolução:

$$x[n] * y[n]$$

$$x[n] = \alpha^n \cdot u[n]$$

$$y[n] = \beta^n \cdot u[n]$$

$$g[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K] \cdot y[n-K] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \alpha^K \cdot u[K] \cdot \beta^{n-K} \cdot u[n-K]$$

$K \geq 0$ E $K \leq n$

$g[n] = 0$ p/ $n < 0$

$$g[n] = \sum_{K=0}^{n} \alpha^K \cdot \beta^{n-K} = \quad \text{p/ } 0 \leq n$$

$$= \beta^n \sum_{K=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^K = \beta^n \cdot \frac{1 - \left(\alpha/\beta\right)^{n+1}}{1 - \alpha/\beta}$$

$$g[n] = \beta^n \cdot \left(\frac{1 - \left(\alpha/\beta\right)^{n+1}}{1 - \alpha/\beta} \right) \cdot u[n]$$

Resposta ao impulso do sistema e suas propriedades

Seja um sistema H com resposta ao impulso h[n].

- Memória

SEM MEMÓRIA $h[n] = \alpha . \delta[n]$

COM MEMÓRIA $h[n] \neq \alpha . \delta[n]$

-Causalidade

CAUSAL $h[n] = 0 \quad \forall \quad n < 0$

NÃO CAUSAL CASO CONTRÁRIO

-Estabilidade

SE $|x[n]| < B_x < \infty \quad \forall \ n$

ENTÃO $|y[n]| < B_y < \infty \quad \forall \ n$

$$|y[n]| = \left|\sum h[k] . x[n-k]\right| \leq \left|\sum h[k] . B_x\right| = \left|\sum h[k]\right| . |B_x| < \infty$$

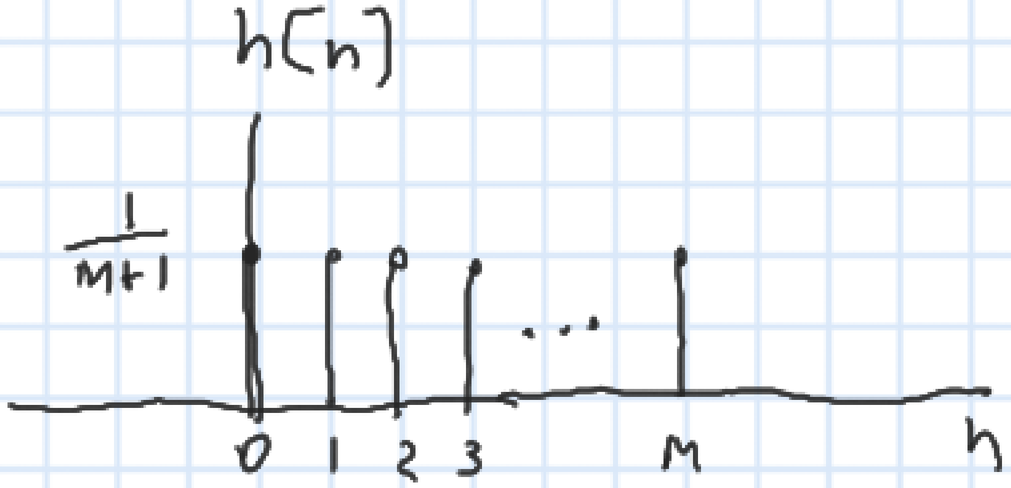
$\left|\sum h[k]\right| < \infty$ LOGO $\boxed{\sum |h[k]| < \infty}$

A RESPOSTA AO IMPULSO É ABSOLUTAMENTE SOMÁVEL

Seja o sistema média móvel definido pela equação de diferenças abaixo. Diga se este sistema é: i)com memória, ii) causal e iii) estável.

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^{M} x[n-k]$$

$$h[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^{M} \delta[n-k]$$



i) COM MEMÓRIA

ii) CAUSAL

iii) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{M} \left(\frac{1}{M+1}\right) = 1 < \infty$

É ESTÁVEL

A mesma coisa do exemplo anterior aplicado ao sistema acumulador definido pela equação:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \begin{cases} 0 & p/\ n < 0 \\ 1 & p/\ n \geq 0 \end{cases}$$

$$h[n] = u[n]$$

i) COM MEMÓRIA

ii) CAUSAL

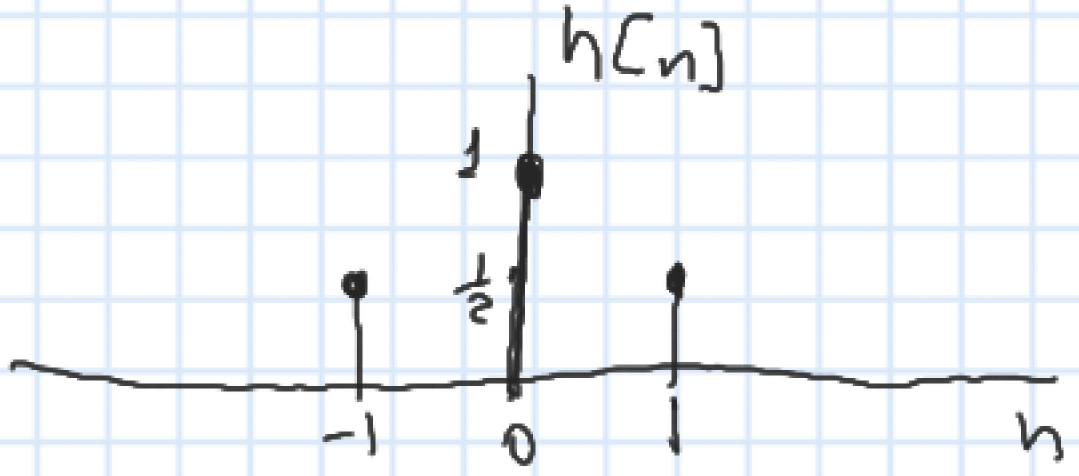
iii) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ NÃO É ABSOLUTAMENTE SOMÁVEL

LOGO O SISTEMA NÃO É ESTÁVEL

A mesma coisa para o sistema interpolador definido pela equação:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}\left(x[n+1] + x[n-1]\right)$$

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\left(\delta[n+1] + \delta[n-1]\right)$$



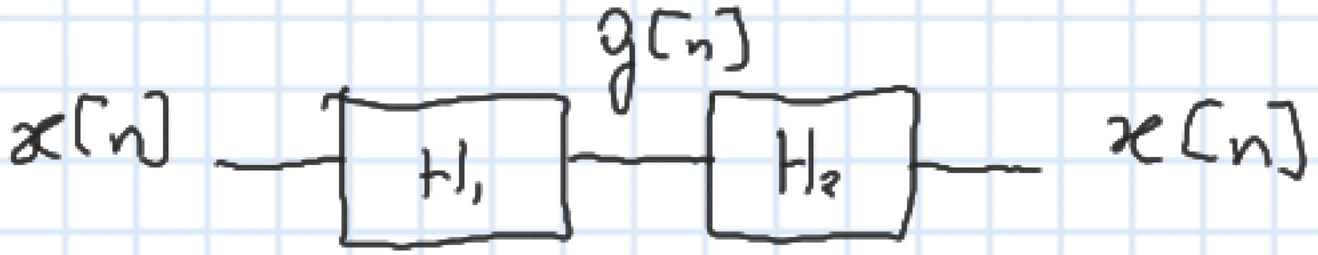
i) COM MEMÓRIA

ii) NÃO CAUSAL

iii) $\sum_{n=-1}^{1} |h[n]| = 2$ É ESTÁVEL

Sistema Inverso

Um sistema H1 com resposta ao impulso h1[n] possui inversa se existir um sistema H2 com resposta ao impulso h2[n] tal que:



$$g[n] = x[n] * h_1[n]$$

$$x[n] = g[n] * h_2[n]$$

$$x[n] = x[n] * \underbrace{h_1[n] * h_2[n]}_{\delta[n]} \Rightarrow \boxed{h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]}$$

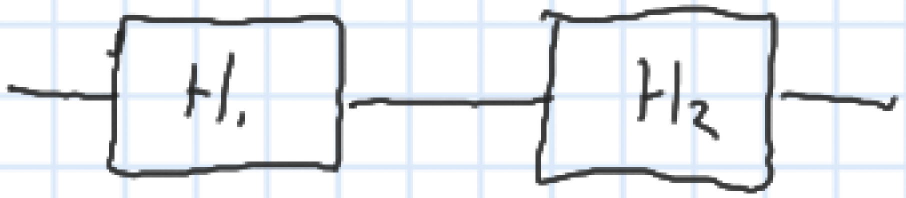
Exemplo de aplicação de sistema inverso

Seja um sinal x[n] que é transmitido através de um canal de comunicação. O sinal é recebido no destino. Para realizar a recuperação da informação original, é usado um filtro que implementa o sistema inverso do canal de comunicação.

Calcule a resposta ao impulso da cascata de dois sistemas: H1 e H2, os quais são definidos pelas equações:

$H_1 \qquad y[n] = \sum_{K=-\infty}^{n} x[K] \qquad h_1[n] = \sum_{K=-\infty}^{n} \delta[K] = u[n]$

$H_2 \qquad y[n] = x[n] - x[n-1] \qquad h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$



$$h_{EQ}[n] = h_1[n] * h_2[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) =$$
$$= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

$$h_{EQ}[n] = \delta[n]$$

Resposta ao Degrau s[n]

$$u[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow s[n]$$

$$s[n] = u[n] * h[n] = h[n] * u[n]$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \cdot$$

$$\boxed{s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]}$$

Resposta senoidal de um sistema (Resposta em Frequência)

Seja um sistema com entrada x[n] e saída y[n]

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] = e^{j\Omega n}$$

$$x[n] = \cos(\Omega n) + j\,\mathrm{SEN}(\Omega . n)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} h[K] . x[n-K] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} h[K] . e^{j\Omega(n-K)} =$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{\infty} h[K] . e^{j\Omega n} . e^{-j\Omega K} = e^{j\Omega n} . \sum_{K=-\infty}^{\infty} h[K] . e^{-j\Omega K}$$

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} h[K] . e^{-j\Omega K} = H(e^{j\Omega})$$ É UM NÚMERO COMPLEXO

$$y[n] = e^{j\Omega n} . H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| . e^{j(\Omega n + \angle H(e^{j\Omega}))}$$

NO DOMÍNIO DO TEMPO n

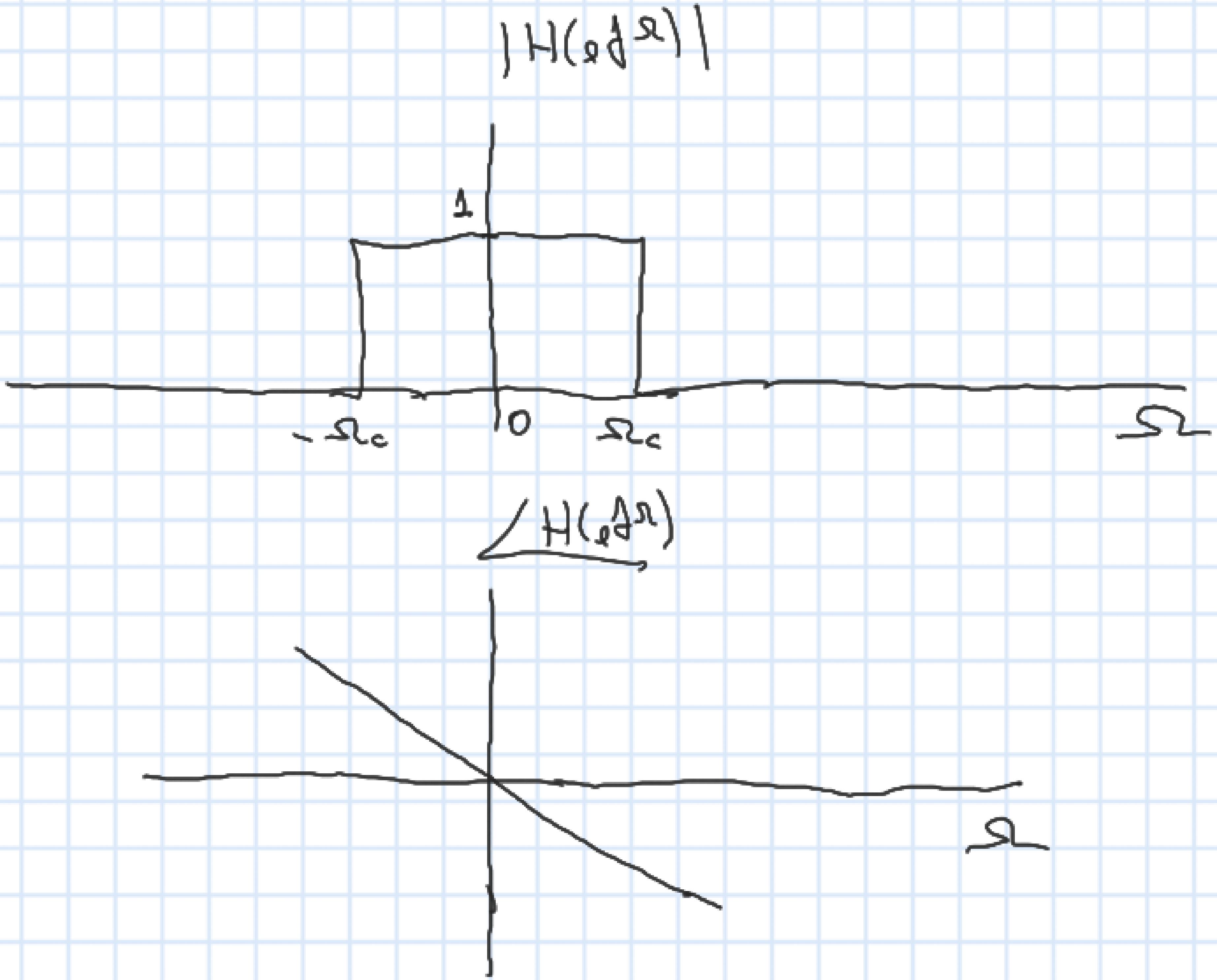
$H(e^{j\Omega})$ É UMA CONSTANTE

NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA Ω

$H(e^{j\Omega})$ É UMA FUNÇÃO CHAMADA DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

$$\boxed{H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\Omega k}}$$

O gráfico do módulo da resposta em frequência de um sistema representa o ganho deste sistema em função da frequência. A fase da resposta em frequência representa a fase que será adicionada pelo sistema ao sinal em função da frequência.



$$\boxed{\begin{aligned} e^{j\alpha} &= \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} &= \cos\alpha \\ \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} &= \mathrm{sen}\,\alpha \end{aligned}}$$

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$|e^{j\alpha}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha} = 1$$

Determine a resposta em frequência do sistema definido pela equação:

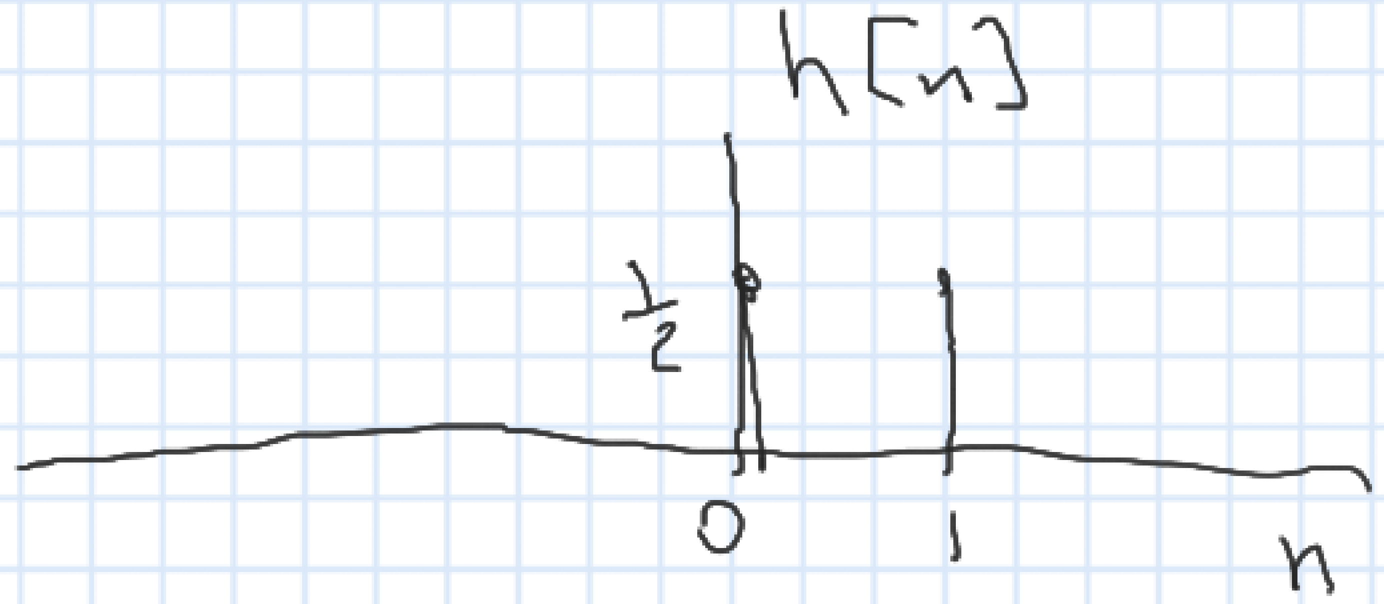
$$y[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[n-1] \right)$$

$$h[n] = \frac{1}{2}\left(\delta[n] + \delta[n-1] \right)$$

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} h[K]\, e^{-j\Omega K} = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\delta[K] + \delta[K-1] \right) \cdot e^{-j\Omega K} =$$

$$= \sum_{K=0}^{1} \frac{1}{2}\left(\delta[K] + \delta[K-1] \right) e^{-j\Omega K} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\Omega} = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \left(\frac{1}{2} e^{j\frac{\Omega}{2}} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\Omega}{2}} \right)$$

$$= e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot \left(\frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2} \right) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

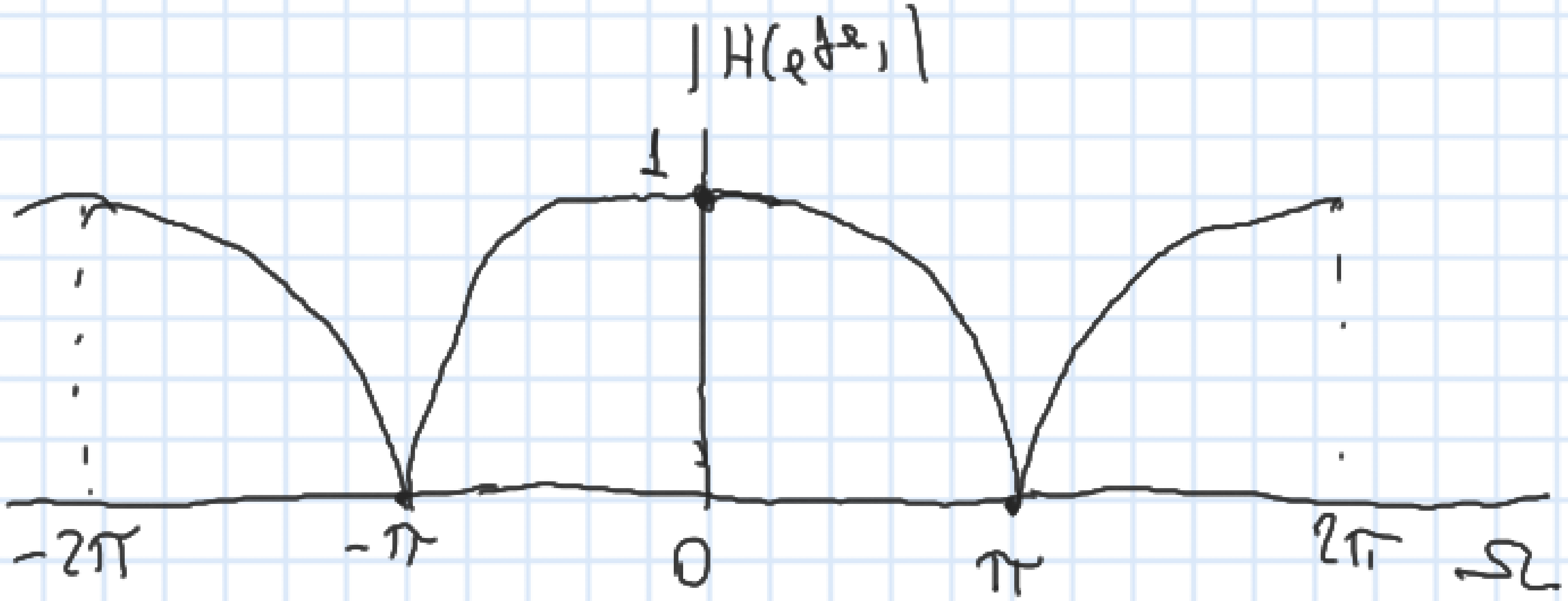


$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

GANHO DO SISTEMA

$$|H(e^{j\Omega})| = \left|e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right| = \left|e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right| \cdot \left|\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right|$$

$$|H(e^{j\Omega})| = \left|\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right|$$



Determine a resposta em frequência do sistema abaixo.

$$y[n] = \frac{1}{2} \cdot (x[n] - x[n-1])$$

$$h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] - \delta[n-1]) \qquad H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\Omega k}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{2}(\delta[k] - \delta[k-1])\, e^{-j\Omega k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-j\Omega} = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{j\frac{\Omega}{2}} - \frac{1}{2} e^{-j\frac{\Omega}{2}} \right) =$$

$$= e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot \left(\frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2} \right) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot j \cdot SEN\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot j \cdot SEN\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

GANHO $|H(e^{j\Omega})| = \left| e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot j \cdot SEN\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right| = \left| e^{-j\frac{\Omega}{2}} \cdot j \right| \cdot \left| SEN\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right| =$

$$\left| SEN\left(\frac{\Omega}{2}\right) \right|$$

$$|H(e^{j\Omega})| = |\mathrm{SEN}(\tfrac{\Omega}{2})|$$