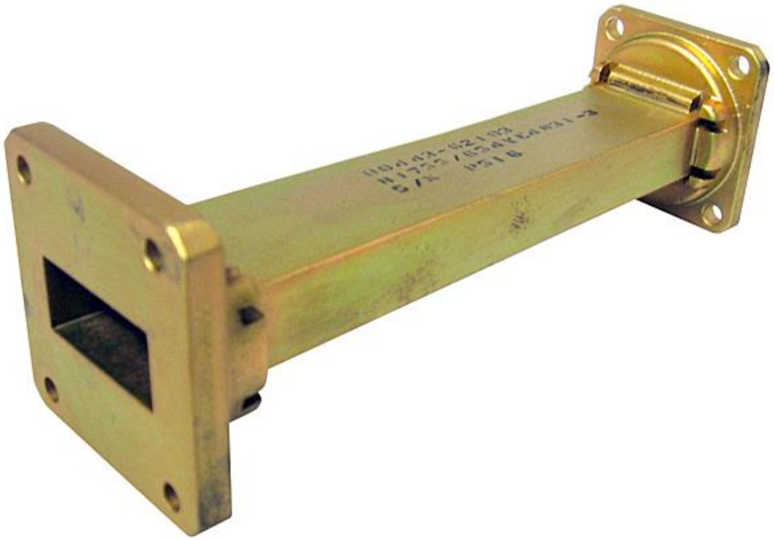
Ondas, Números Complexos e Fasores

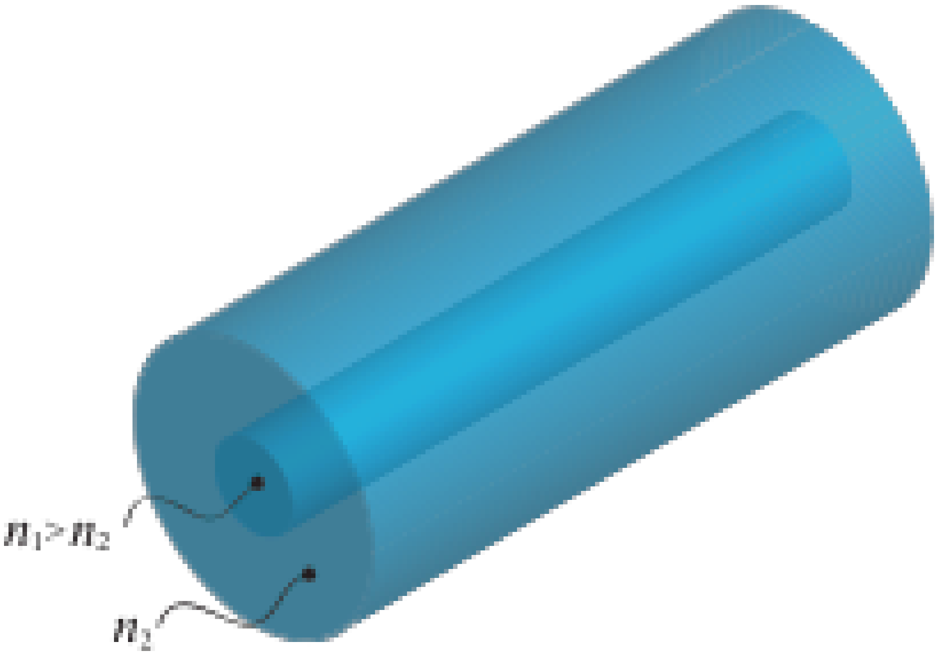
Que é uma Onda?

- É um fenômeno físico em que há o transporte de energia ou informação de um ponto a outro do espaço
- Principais tipos de ondas:
  – Mecânicas
  – Eletromagnéticas

Guias de ondas



Guia retangular metálico



Guia cilíndrico dielétrico
(Fibra óptica)

Atmosfera como um guia de onda natural

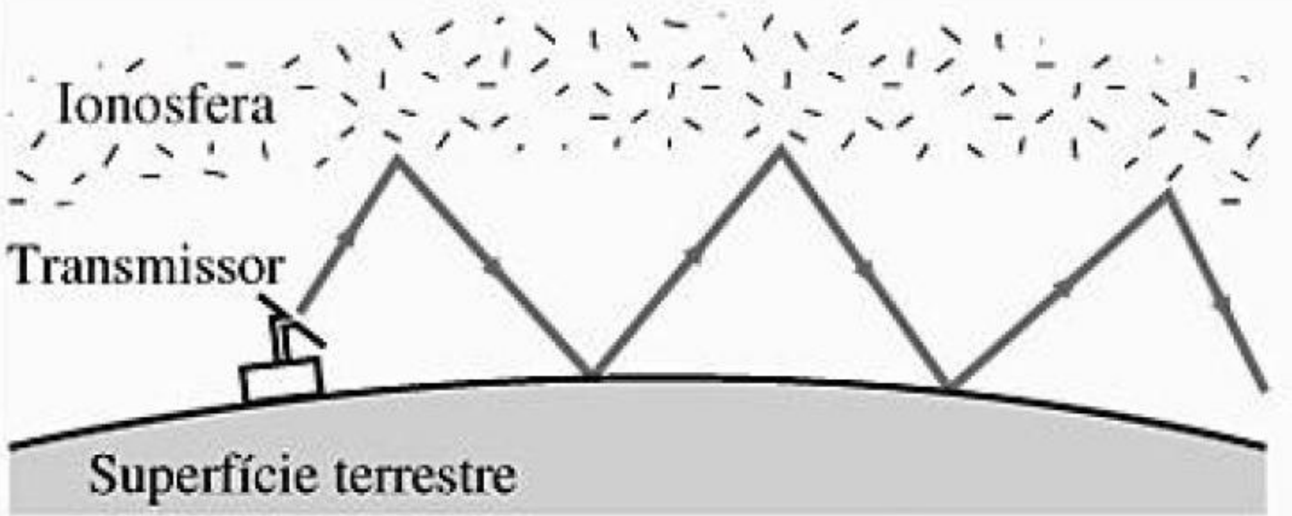
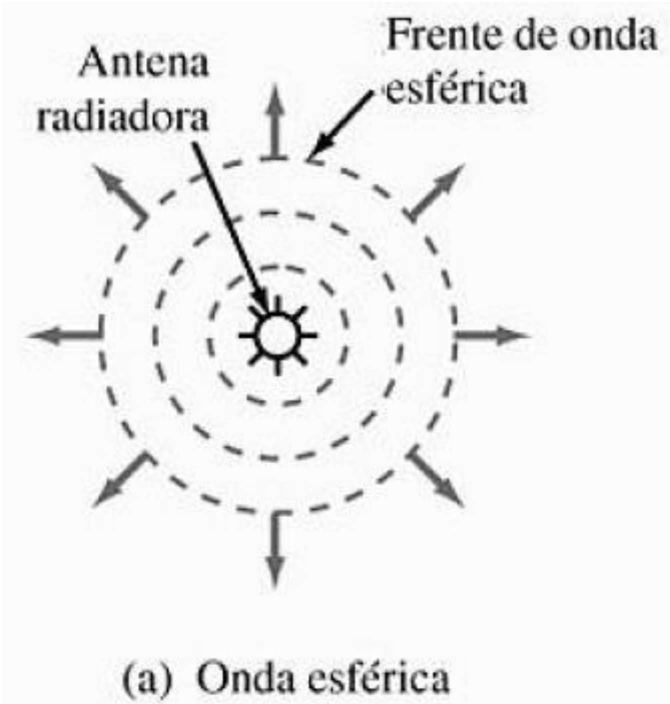


Figura 7-1 A camada da atmosfera na parte superior, ionosfera, e a superfície da Terra na parte inferior formam uma estrutura de guia de ondas para a propagação de ondas de rádio na faixa HF.

Onda Esférica e Onda Plana



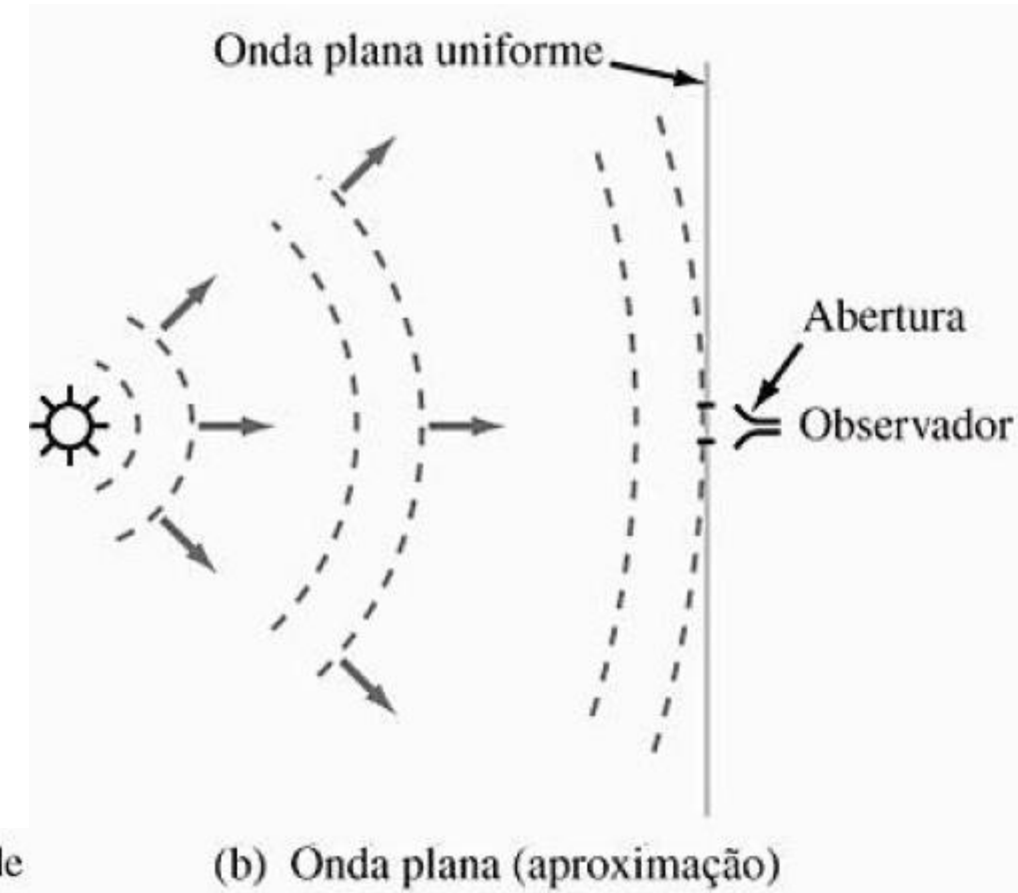


Figura 7-2 Ondas radiadas por uma fonte de ondas eletromagnéticas, como uma lâmpada ou uma antena, sendo as frentes de onda esféricas como mostrado em (a); para um observador distante, a frente de onda se mostra aproximadamente plana, como mostrado em (b).

Representação matemática para uma onda harmônica em um meio sem perdas

- Qualquer tipo de onda caracterizada matematicamente por um função seno ou cosseno é conhecida como onda harmônica.
- Considere uma onda se propagando na superfície de uma lago. Se **y** indica a altura da onda com relação ao nível sem distúrbio e **x** é a direção de deslocamento da onda na superfície, podemos então descrever uma onda harmônica como sendo função de **x** e do tempo **t**:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - \beta x + \phi_0)$$

Representação matemática para uma onda em um meio sem perdas

Em que:

$\frac{2\pi}{T} = \omega$ é a frequência angular da onda [rad/s].

$\frac{2\pi}{\lambda} = \beta$ é a constante de fase da onda [rad/m].

ϕ_0 é a fase inicial da onda [rad ou graus]

T é o período da onda e f=1/T é a frequência da onda.

Podemos então reescrever y (x,t) com sendo:

$$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_0\right)$$

Representação matemática para uma onda em um meio sem perdas

Vamos analisar o caso: $$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

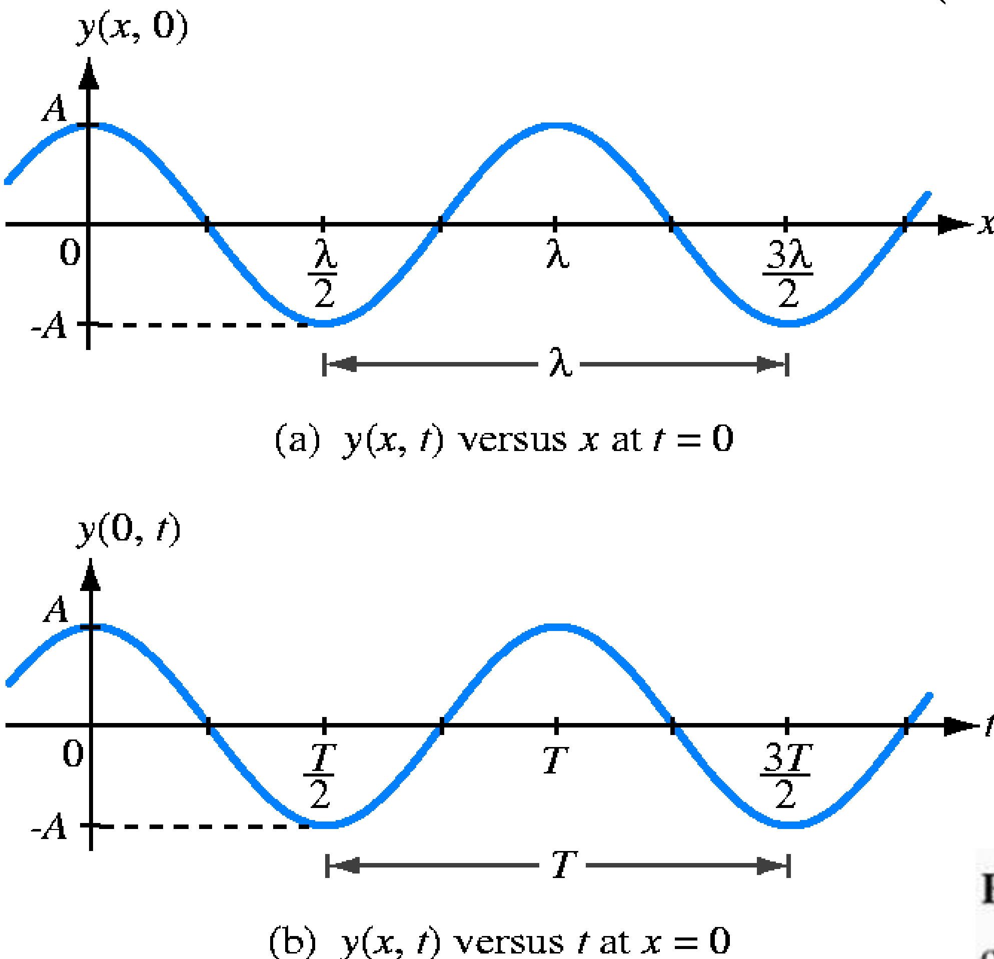


Figure 7-3

Figura 7-3 Gráficos de $y(x, t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ como uma função de (a) x para $t = 0$ e (b) t para $x = 0$.

Representação matemática para uma onda em um meio sem perdas

Vamos analisar o caso: $$y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

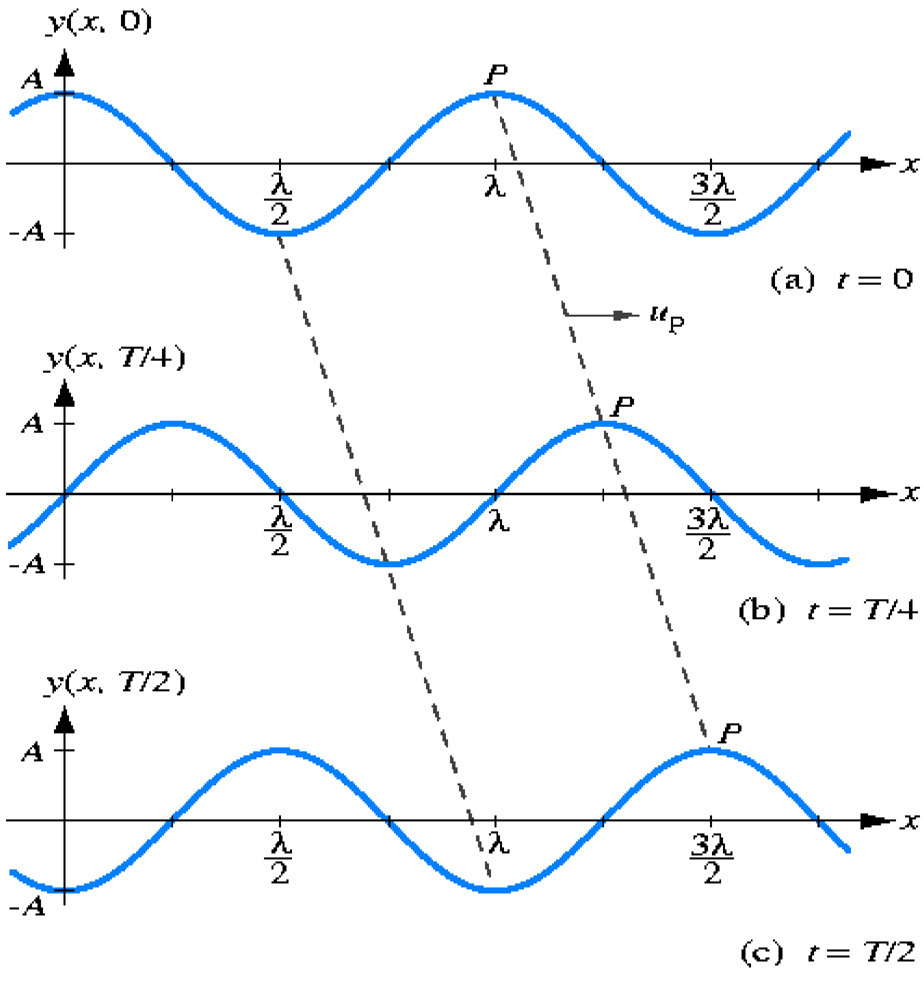


Figure 7-4

Pode-se demonstrar que a velocidade de fase da onda é dada por:

$$v_{fase} = \lambda f$$

Figura 7-4 Gráficos de $y(x, t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ como uma função de (a) x para $t = 0$, (b) $t = T/4$ e (c) $t = T/2$. Observe que as ondas se movem na direção positiva de x com uma velocidade $u_p = \lambda / T$.

Representação matemática para uma onda em um meio sem perdas

Vamos analisar o caso: $y(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_0\right)$

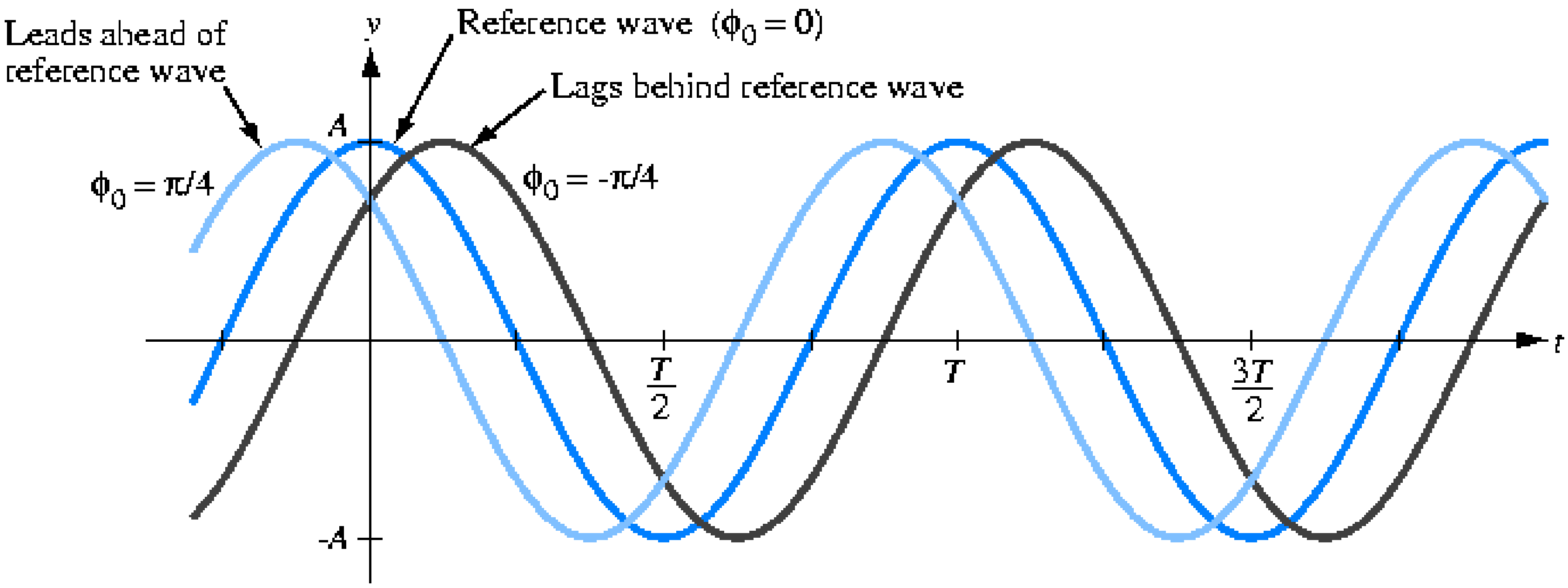


Figure 7-5

Representação matemática para uma onda em um meio com perdas

- Se uma onda harmônica se propaga em um meio com perdas na direção **x**, sua amplitude diminuirá conforme um fator de atenuação $e^{-\alpha x}$.
- α é chamado de constante de atenuação do meio, sendo sua unidade o neper por metro (Np/m).
- Portanto, em geral,

$$y(x,t) = Ae^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x + \phi_0)$$

Representação matemática para uma onda em um meio com perdas

- Vamos analisar o caso: $y(x,t) = 10e^{-0,2x}\cos(\pi x)$

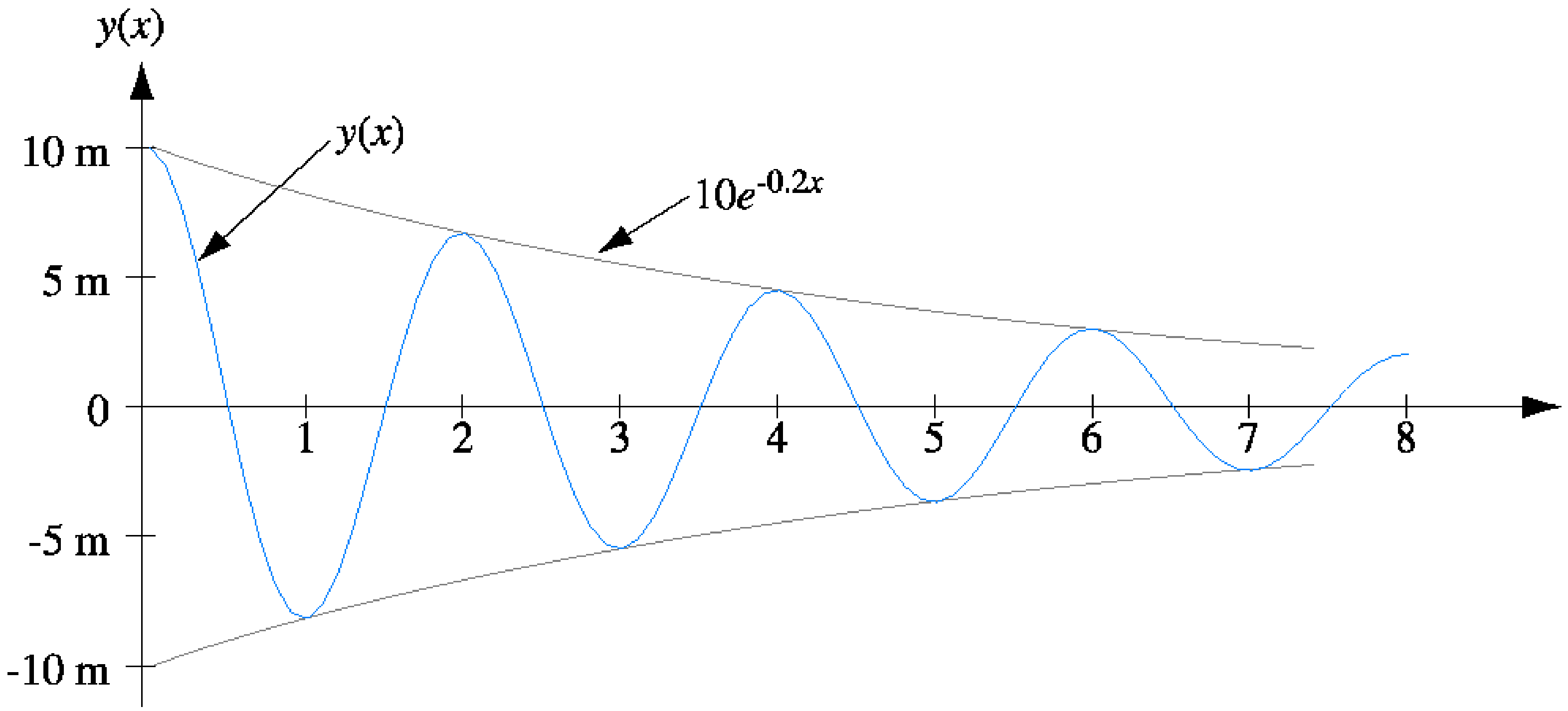


Figure 7-6

Exemplo

Exemplo 7-1 **Onda Sonora na Água**

Uma onda acústica que se desloca na direção x em um fluido (líquido ou gás) é caracterizada por uma pressão diferencial $p(x,t)$. A unidade de pressão é o newton por metro quadrado (N/m^2). Determine uma expressão para $p(x,t)$ para uma onda sonora senoidal que se desloca na água na direção positiva de x, dado que a freqüência da onda é 1 kHz, a velocidade do som na água é 1,5 km/s, a amplitude da onda é 10 N/m^2 e $p(x,t)$ apresenta seu valor máximo em $t = 0$ e $x = 0{,}25$ m. Considere a água como um meio que não apresenta perdas.

Solução: De acordo com a forma geral dada pela Eq. (7.1) para uma onda que se desloca na direção positiva de x,

$$p(x,t) = A\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_0\right)\ (\mathrm{N/m^2}).$$

A amplitude $A = 10\ \mathrm{N/m^2}$, $T = 1/f = 10^{-3}$ s e, a partir de $u_p = f\lambda$,

$$\lambda = \frac{u_p}{f} = \frac{1{,}5 \times 10^3}{10^3} = 1{,}5\ \mathrm{m}.$$

Portanto,

$$p(x,t) = 10\cos\left(2\pi \times 10^3 t - \frac{4\pi}{3}x + \phi_0\right)\quad (\mathrm{N/m^2}).$$

Visto que em $t = 0$ e $x = 0{,}25$ m, $p(0{,}25{,}0) = 10\ \mathrm{N/m^2}$, temos

$$10 = 10\cos\left(\frac{-4\pi}{3}0{,}25 + \phi_0\right) = 10\cos\left(\frac{-\pi}{3} + \phi_0\right),$$

que resulta em $(\phi_0 - \pi/3) = \cos^{-1}(1)$ ou $\phi_0 = \pi/3$. Portanto,

$$p(x,t) = 10\cos\left(2\pi \times 10^3 t - \frac{4\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)\quad (\mathrm{N/m^2}).$$ ■

Exemplo 7-2 Perda de Potência

Um feixe *laser* de luz que se propaga na atmosfera é caracterizado por uma intensidade de campo elétrico dada por

$$E(x,t) = 150e^{-0,03x}\cos(3\times10^{15}t - 10^{7}x) \quad \text{(V/m)},$$

onde x é a distância em metros a partir da fonte. A atenuação se deve à absorção pelos gases da atmosfera. Determine (a) a direção de deslocamento da onda, (b) a velocidade da onda e (c) a amplitude da onda a uma distância de 200 m.

Solução: (a) Como os coeficientes de t e x no argumento da função co-seno têm sinais opostos, a onda tem de se deslocar na direção positiva de x.

(b)

$$u_\mathrm{p} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{3\times10^{15}}{10^{7}} = 3\times10^{8}\ \text{m/s},$$

que é igual a c, a velocidade da luz no espaço livre.

(c) Para $x = 200$ m, a amplitude de $E(x, t)$ é

$$150e^{-0,03\times200} = 0,37 \qquad \text{(V/m)}. \quad ■$$

Números complexos

$$z = x + jy, \qquad x = \Re e(z), \qquad y = \Im m(z).$$

Alternativamente, z pode ser escrito na ***forma polar*** como a seguir:

$$z = |z|e^{j\theta} = |z|\angle\theta$$

$|z|$ é o módulo $\qquad$ θ é o ângulo de fase.

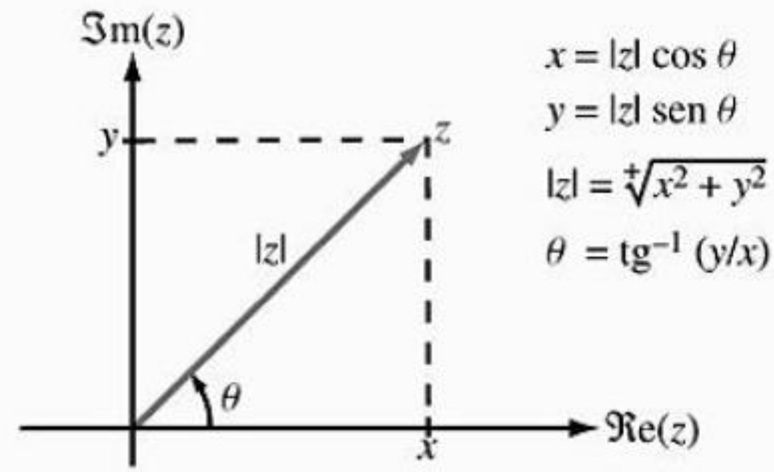


Figura 7-7 Relação entre as representações retangular e polar de um número complexo $z = x + jy = |z|e^{j\theta}$.

identidade de Euler: $e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$.

$$z = |z|e^{j\theta} = |z|\cos\theta + j|z|\operatorname{sen}\theta$$

$$x = |z|\cos\theta, \qquad y = |z|\operatorname{sen}\theta,$$

$$|z| = \sqrt[+]{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1}(y/x)$$

complexo conjugado de z

$$z^* = (x + jy)^* = x - jy = |z|e^{-j\theta} = |z|\angle{-\theta}.$$

O módulo $|z|$ é igual à raiz quadrada positiva do produto de z pelo seu conjugado complexo:

$$|z| = \sqrt[+]{z\, z^*}$$

Igualdade: Se dois números complexos z_1 e z_2 são dados por

$$z_1 = x_1 + jy_1 = |z_1|e^{j\theta_1}, \qquad (7.27)$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = |z_2|e^{j\theta_2}, \qquad (7.28)$$

então $z_1 = z_2$ se e apenas se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ ou, de forma equivalente, $|z_1| = |z_2|$ e $\theta_1 = \theta_2$.

Multiplicação:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \qquad (7.30a) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|e^{j\theta_1} \cdot |z_2|e^{j\theta_2} \\ &= |z_1||z_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)} \\ &= |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

$$(7.30b)$$

Adição:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2). \quad (7.29)$$

Divisão: Para $z_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} \\ &= \frac{(x_1 + jy_1)}{(x_2 + jy_2)} \cdot \frac{(x_2 - jy_2)}{(x_2 - jy_2)} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|e^{j\theta_1}}{|z_2|e^{j\theta_2}} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \\ &\quad j\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Potências: Para qualquer inteiro positivo n,

$$z^n = (|z|e^{j\theta})^n$$
$$= |z|^n e^{jn\theta} = |z|^n(\cos n\theta + j \operatorname{sen} n\theta) \quad (7.32)$$
$$z^{1/2} = \pm|z|^{1/2}e^{j\theta/2}$$
$$= \pm|z|^{1/2}[\cos(\theta/2) + j \operatorname{sen}(\theta/2)] \quad (7.33)$$

Relações úteis:

$$-1 = e^{j\pi} = e^{-j\pi} = 1\angle 180^\circ,$$
$$j = e^{j\pi/2} = 1\angle 90^\circ, \quad (7.34)$$
$$-j = -e^{j\pi/2} = e^{-j\pi/2} = 1\angle -90^\circ, \quad (7.35)$$
$$\sqrt{j} = (e^{j\pi/2})^{1/2} = \pm e^{j\pi/4} = \frac{\pm(1+j)}{\sqrt{2}}, \quad (7.36)$$
$$\sqrt{-j} = \pm e^{-j\pi/4} = \frac{\pm(1-j)}{\sqrt{2}}. \quad (7.36)$$

Exemplo

Exemplo 7-3 **Trabalhando com Números Complexos**

Dados dois números complexos

$$V = 3 - j4,$$
$$I = -(2 + j3).$$

(a) Expresse V e I na forma polar e determine (b) VI, (c) VI^*, (d) V/I e (e) $\sqrt{I}$.

Solução:

(a) $$|V| = \sqrt[+]{VV^*} = \sqrt[+]{(3-j4)(3+j4)} = \sqrt[+]{9+16} = 5,$$
$$\theta_V = \text{tg}^{-1}(-4/3) = -53{,}1°,$$
$$V = |V|e^{j\theta_V} = 5e^{-j53{,}1°} = 5\angle{-53{,}1°},$$

$$|I| = \sqrt[+]{2^2+3^2} = \sqrt[+]{13} = 3{,}61.$$

Como $I = (-2 - j3)$ está no terceiro quadrante no plano complexo [Fig. 7-8],

$$\theta_I = 180° + \text{tg}^{-1}\left(\tfrac{3}{2}\right) = 236{,}3°,$$
$$I = 3{,}61\angle{236{,}3°}.$$

(b) $$VI = 5e^{-j53{,}1°} \times 3{,}61e^{j236{,}3°} = 18{,}05e^{j(236{,}3°-53{,}1°)} = 18{,}05e^{j183{,}2°}.$$

(c) $$VI^* = 5e^{-j53{,}1°} \times 3{,}61e^{-j236{,}3°} = 18{,}05e^{-j289{,}4°} = 18{,}05e^{j70{,}6°}.$$

(d) $$\frac{V}{I} = \frac{5e^{-j53{,}1°}}{3{,}61e^{j236{,}3°}} = 1{,}39e^{-j289{,}4°} = 1{,}39e^{j70{,}6°}.$$

(e) $$\sqrt{I} = \sqrt{3{,}61e^{j236{,}3°}} = \pm\sqrt{3{,}61}\, e^{j236{,}3°/2} = \pm 1{,}90e^{j118{,}15°}.$$ ■

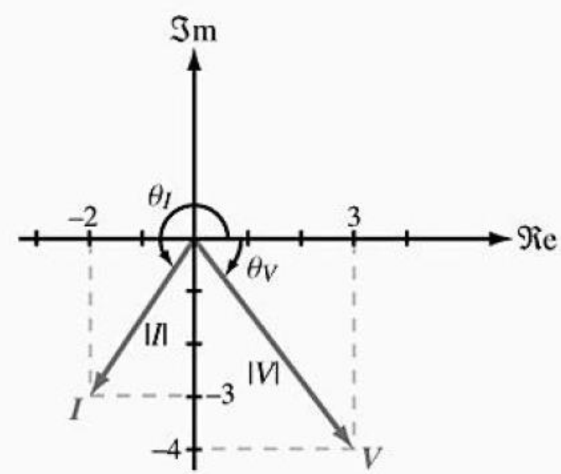


Figura 7-8 Os números complexos V e I no plano complexo (Exemplo 7-3).

Fasores

- A análise fasorial é uma ferramenta matemática usada na análise e solução de problemas que envolvem sistemas lineares nos quais a excitação é uma função periódica no tempo.
- Se a excitação é harmônica (varia senoidalmente com o tempo), o uso da notação fasorial nos permite converter uma equação integral/diferencial em uma equação linear.

- A representação fasorial também é útil para sistemas lineares em que a excitação é qualquer função periódica no tempo (não-senoidal), por exemplo: uma onda quadrada ou uma sequência de pulsos. Nesse caso, pode-se expandir a excitação em um série de Fourier, calcula-se a variável desejada usando análise fasorial para cada componente da série.
- Pelo princípio da superposição, a soma das soluções referentes a todas as componentes da série fornece o mesmo resultado que seria obtido caso o problema fosse solucionado inteiramente no domínio do tempo sem a ajuda da representação de Fourier.

- No caso de funções não-periódicas, tais como um único pulso, as funções podem ser expressas como integrais de Fourier e uma aplicação similar do princípio da superposição também pode ser usada

Exemplo – Circuito RC simples

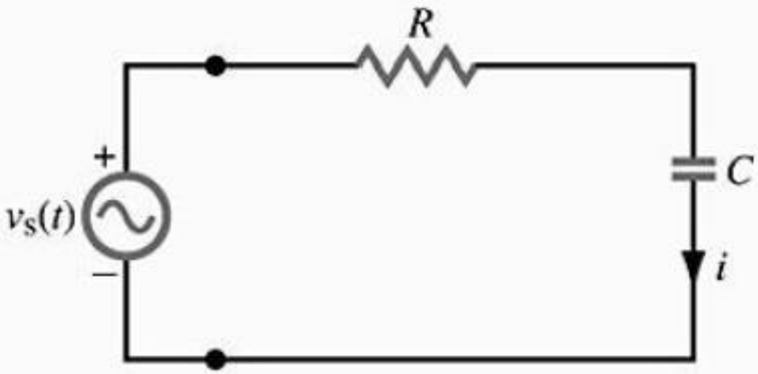


Figura 7-9 Circuito *RC* conectado a uma fonte de tensão.

$$v_s(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0).$$

$$\boxed{R\,i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = v_s(t)}$$

(domínio do tempo) (7.39)

1 – Adotar um referência co-seno

$$\begin{aligned} v_s(t) &= V_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \\ &= V_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t - \phi_0\right) \\ &= V_0 \cos\left(\omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

onde usamos as propriedades sen $x = \cos(\pi/2 - x)$ e $\cos(-x) = \cos x$.

2 – Expressar as variáveis dependentes do tempo como fasores

Qualquer função senoidal variante no tempo $z(t)$ pode ser expressa na forma

$$z(t) = \mathfrak{Re}\left[\widetilde{Z}\, e^{j\omega t}\right]$$

onde $\widetilde{Z}$ é uma função independente do tempo denominada ***fasor*** da função ***instantânea*** $z(t)$.

$$\begin{aligned} v_s(t) &= \mathfrak{Re}\left[V_0 e^{j(\omega t+\phi_0-\pi/2)}\right] \\ &= \mathfrak{Re}\left[V_0 e^{j(\phi_0-\pi/2)} e^{j\omega t}\right] \\ &= \mathfrak{Re}\left[\widetilde{V}_s e^{j\omega t}\right], \end{aligned}$$

$$\widetilde{V}_s = V_0 e^{j(\phi_0-\pi/2)}$$

$$i(t) = \mathfrak{Re}(\tilde{I} e^{j\omega t}),$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{Re}(\tilde{I} e^{j\omega t})\right] \\ &= \mathfrak{Re}\left[\frac{d}{dt}(\tilde{I} e^{j\omega t})\right] \\ &= \mathfrak{Re}[j\omega \tilde{I} e^{j\omega t}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int i\, dt &= \int \mathfrak{Re}(\tilde{I} e^{j\omega t})\, dt \\ &= \mathfrak{Re}\left(\int \tilde{I} e^{j\omega t}\, dt\right) \\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{\tilde{I}}{j\omega} e^{j\omega t}\right). \end{aligned}$$

3 – Rearranjar a equação diferencial/integral na forma fasorial

$$R\,\Re e(\tilde{I}e^{j\omega t}) + \frac{1}{C}\Re e\left(\frac{\tilde{I}}{j\omega}e^{j\omega t}\right) = \Re e(\widetilde{V}_s e^{j\omega t})$$

$$\Rightarrow$$

$$\tilde{I}\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) = \widetilde{V}_s$$

4 – Calcular a equação no domínio fasorial

$$\tilde{I} = \frac{\widetilde{V}_s}{R + 1/(j\omega C)}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= V_0 e^{j(\phi_0 - \pi/2)}\left[\frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}\right] \\
&= V_0 e^{j(\phi_0 - \pi/2)}\left[\frac{\omega C e^{j\pi/2}}{\sqrt[+]{1 + \omega^2 R^2 C^2}\, e^{j\phi_1}}\right] \\
&= \frac{V_0 \omega C}{\sqrt[+]{1 + \omega^2 R^2 C^2}} e^{j(\phi_0 - \phi_1)}, \quad \phi_1 = \mathrm{tg}^{-1}(\omega RC)
\end{aligned}$$

5 – Determinar o expressão instantânea

$$i(t) = \Re\mathfrak{e}\left[\tilde{I}e^{j\omega t}\right]$$

$$= \Re\mathfrak{e}\left[\frac{V_0\omega C}{\sqrt[+]{1+\omega^2R^2C^2}}e^{j(\phi_0-\phi_1)}e^{j\omega t}\right]$$

$$= \frac{V_0\omega C}{\sqrt[+]{1+\omega^2R^2C^2}}\cos(\omega t+\phi_0-\phi_1)$$

Resumo de algumas funções no domínio do tempo e suas representações no domínio fasorial

Tabela 7-1 Funções senoidais $z(t)$ no domínio do tempo e suas respectivas funções equivalentes $\tilde{Z}$ no domínio fasorial com referência em co-seno, onde $z(t) = \Re\mathfrak{e}[\tilde{Z}e^{j\omega t}]$.

$z(t)$		$\tilde{Z}$
$A\cos\omega t$	$\leftrightarrow$	A
$A\cos(\omega t + \phi_0)$	$\leftrightarrow$	$Ae^{j\phi_0}$
$A\cos(\omega t + \beta x + \phi_0)$	$\leftrightarrow$	$Ae^{j(\beta x+\phi_0)}$
$Ae^{-\alpha x}\cos(\omega t + \beta x + \phi_0)$	$\leftrightarrow$	$Ae^{-\alpha x}e^{j(\beta x+\phi_0)}$
$A\,\mathrm{sen}\,\omega t$	$\leftrightarrow$	$Ae^{-j\pi/2}$
$A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)$	$\leftrightarrow$	$Ae^{j(\phi_0-\pi/2)}$
$\dfrac{d}{dt}(z_1(t))$	$\leftrightarrow$	$j\omega\tilde{Z}_1$
$\dfrac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \phi_0)]$	$\leftrightarrow$	$j\omega Ae^{j\phi_0}$
$\int z_1(t)\,dt$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{1}{j\omega}\tilde{Z}_1$
$\int A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)\,dt$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{1}{j\omega}Ae^{j(\phi_0-\pi/2)}$