INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CEARÁ

Equações de Onda Eletromagnética Plana e Uniforme

Prof. Fábio Alencar Mendonça

Ondas em Geral

Ondas em Geral

- **Onda** é um fenômeno físico em que há o transporte de energia ou informação.
- Uma **Onda** é função do espaço e do tempo que deve satisfazer a uma **equação de onda**. Como exemplo, uma equação de onda escalar, em uma dimensão, tem a forma de

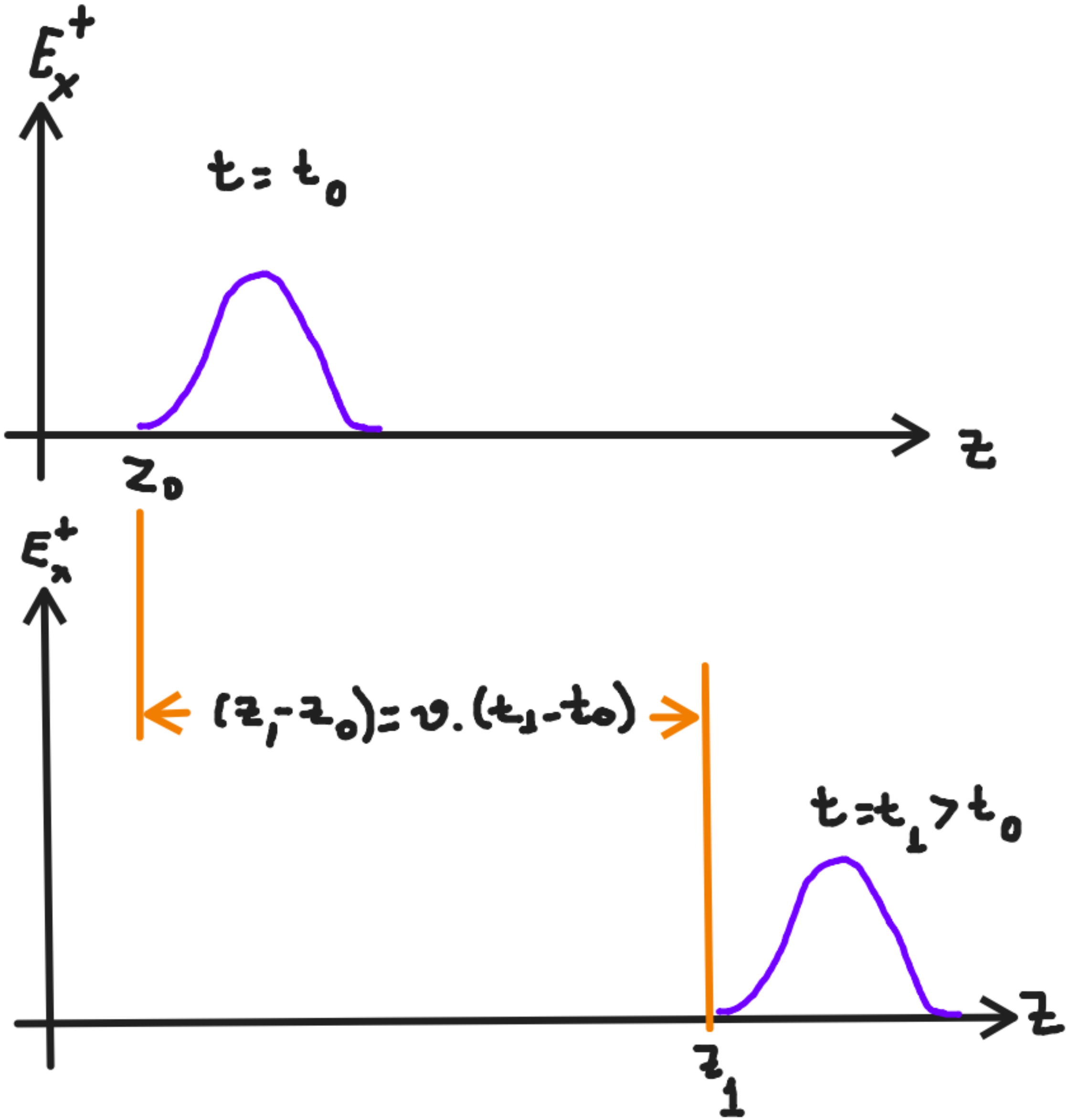
$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$

em que *v* é a velocidade da onda. Suas soluções tem a forma

$$E^{+} = g(z - vt)$$
$$E^{-} = f(z + vt)$$
$$E = f(z + vt) + g(z - vt)$$

em que *f* e *g* representam qualquer função em *z-vt* e *z+vt* respectivamente.

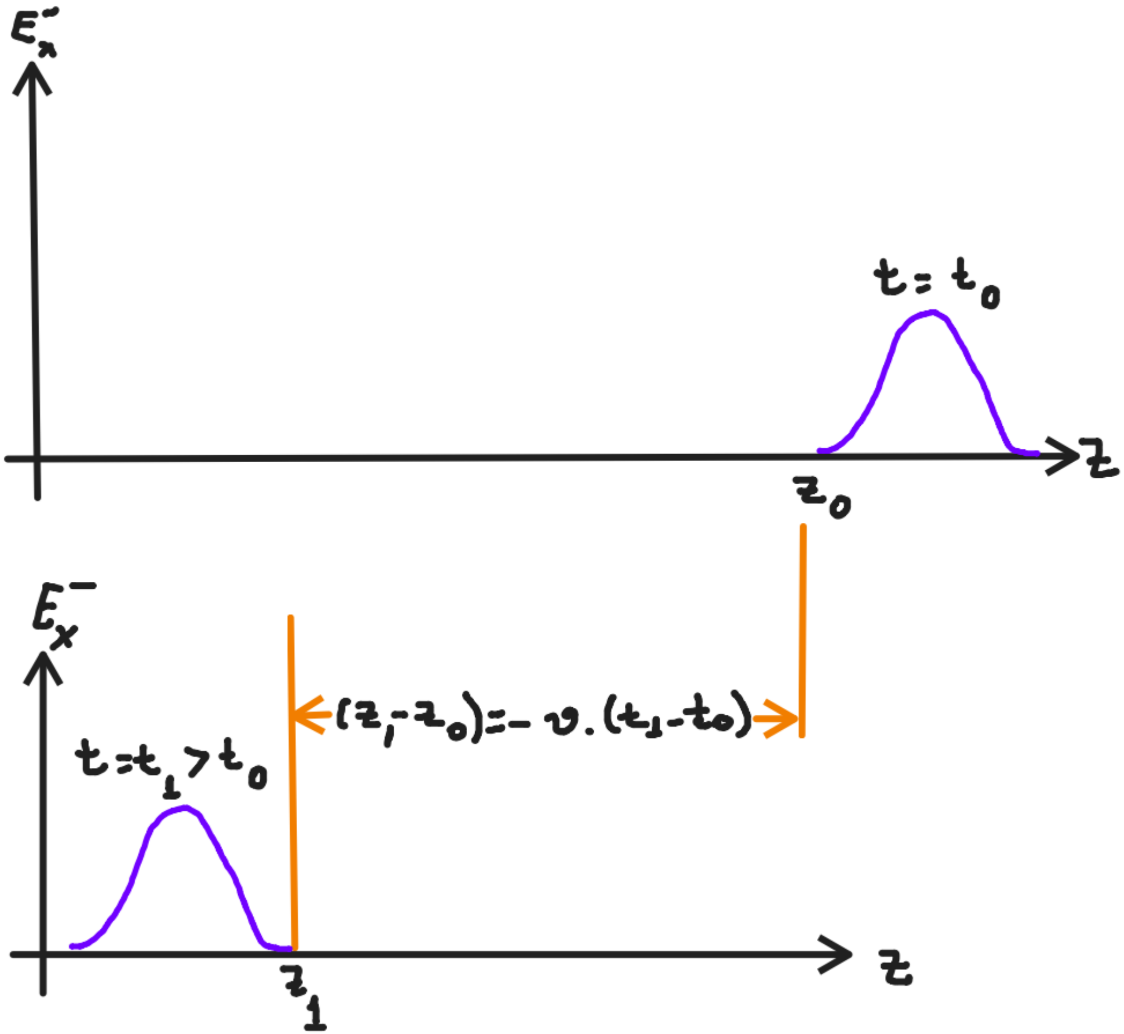
Ondas em Geral



Uma possível forma de onda para $E_x^+(z\text{-}vt)$ em dois instantes de tempo.

Ondas em Geral

Uma possível forma de onda para $E_x^-(z+vt)$ em dois instantes de tempo.



Exemplo

1.1 - VERIFIQUE QUE $E_x(z,t) = E_x^+(z - vt) + E_x^-(z + vt)$ É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ONDA, EM QUE $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ E E_x^+ e E_x^- INDICAM FUNÇÕES ARBITRÁRIAS E SEUS RESPECTIVOS ARGUMENTOS.

<u>SOLUÇÃO</u>: $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = E_x^{+''} + E_x^{-''}$ E $\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 . E_x^{+''} + v^2 . E_x^{-''}$

EM QUE $E_x^{+''}$ e $E_x^{-''}$ INDICAM AS DERIVADAS SEGUNDAS EM RELAÇÃO À z OU t. A SUBSTITUIÇÃO EM $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$ RESULTA EM

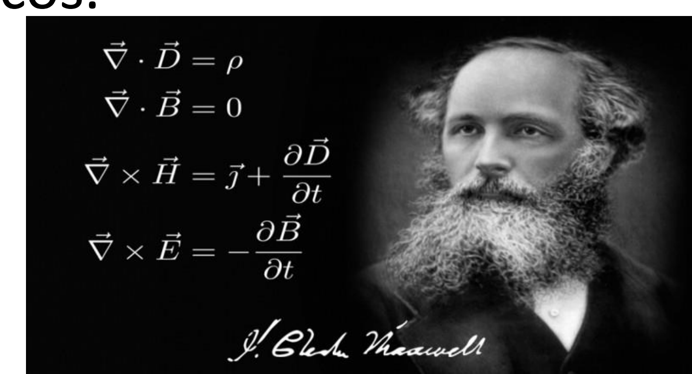
$$E_x^{+''} + E_x^{-''} - \mu\varepsilon v^2 E_x^{+''} - \mu\varepsilon v^2 E_x^{-''} = 0 \Rightarrow (1 - \mu\varepsilon v^2) E_x^{+''} + (1 - \mu\varepsilon v^2) . E_x^{-''} = 0$$

SE $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$

Relembrando as Equações de Maxwell

As Equações de Maxwell

- James Clerk Maxwell (1831- 1879) publicou a primeira teoria unificada da eletricidade e magnetismo, que compreendeu todos os resultados já conhecidos (experimentais e teóricos), resultando na Teoria Eletromagnética Clássica já conhecida há bastante tempo;
- Sua principal contribuição foi a introdução do conceito da **corrente de deslocamento** e a previsão da existência de **ondas eletromagnéticas**;
- Basicamente, Maxwell compilou as leis do eletromagnetismo em quatro equações que descrevem matematicamente os fenômenos elétricos, magnéticos, ou eletromagnéticos.



As equações de Maxwell

Previsão de que não existe carga magnética!!!

Equações de Maxwell	Forma pontual (diferencial)	Forma integral
Lei de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint \mathbf{D} \cdot dS = Q_{\text{enc}}$
Lei de Gauss para campos magnéticos	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot dS = 0$
Lei de Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Lei circuital de Ampère	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \dfrac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$
	Equação da força de Lorentz	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$
	Relações constitutivas	$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \text{ (Lei de Ohm)} \end{cases}$
	Equação da continuidade da corrente	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\dfrac{\partial \rho_v}{\partial t}$

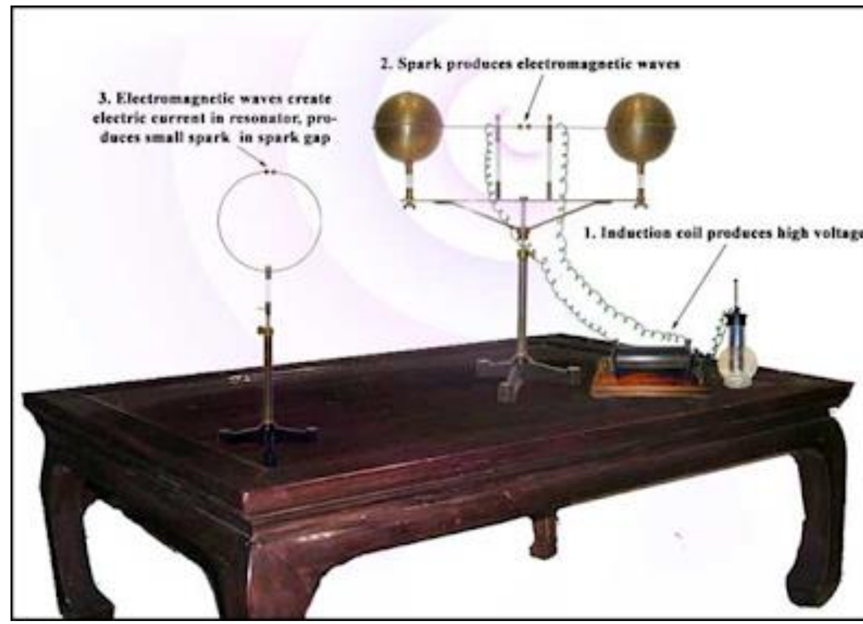
E = Vetor campo elétrico [V/m]
D= Vetor densidade de fluxo elétrico [C/m^2]
H = Vetor campo magnético [A/m]
B = Vetor densidade de fluxo magnético [T]
J = Vetor densidade de corrente elétrica [A/m^2]
ρ_V = densidade volumétrica de cargas [C/m^3]
ε = permissividade elétrica do meio[F/m]
μ= permeabilidade magnética do meio [H/m]
σ= condutividade elétrica do meio [S/m]

σ, ε e μ são também chamados de **parâmetros constitutivos do meio**.

Para o **vácuo ou espaço livre**, temos:

$$\sigma = 0\,\mathrm{S/m} \qquad \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\,\mathrm{F/m} \qquad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

- Coube ao Professor alemão Heirich Rudolf Hertz (1857-1894) a bem-sucedida geração e detecção das **ondas de rádio**;



Equação de Onda Eletromagnética (OEM) em um meio com perdas ($\sigma \neq 0$)

- Um meio dielétrico com perdas (dielétrico imperfeito) é aquele em que a energia da OEM é dissipada à medida que se propaga, devido à condutividade elétrica não nula ($\sigma \neq 0$) desse meio.
- Já um dielétrico sem perdas (dielétrico perfeito) ($\sigma=0$), não há dissipação de energia.

OEM- Equações de Onda

Consideremos uma OEMPU um meio com perdas, linear, isotrópico e homogêneo que está livre de cargas (ρ_V=0). Vamos usar as equações de Maxwell para determinar as expressões que governam a propagação de uma OEMPU nesse meio:

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (1)$$

$\nabla \circ \;\rightarrow\;$ Divergente

$\nabla \times \;\rightarrow\;$ Rotacional

$\nabla^2 \;\rightarrow\;$ Laplaciano

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla \circ \vec{E} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla \circ \vec{H} = 0 \qquad (4)$$

OEM- Equações de Onda

Aplicando o rotacional à equação (2), temos:

$$\nabla \mathrm{x}\left(\nabla \mathrm{xE}\right)=\nabla \mathrm{x}\left(-\mu \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\right)=-\mu \frac{\partial\left(\nabla \mathrm{xH}\right)}{\partial t} \qquad (5)$$

Substituindo (1) em (5), temos:

$$\nabla \mathrm{x}\left(\nabla \mathrm{xE}\right)=-\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma \mathrm{E}+\varepsilon \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}\right)=-\mu\sigma \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial t^2} \qquad (6)$$

Dada a identidade vetorial para qualquer campo vetorial $\vec{A}$:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A}=\nabla\left(\nabla \circ \vec{A}\right)-\nabla^2 \vec{A}$$

A equação (6) fica então:

$$\nabla\left(\nabla \circ \vec{E}\right)-\nabla^2 \vec{E}=-\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Como $\nabla \circ \vec{E}=0$ (3), temos então:

OEM - Equações de Onda

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (7)$$

Esta última equação (7) é conhecida como **equação de onda de Helmholtz temporal para o campo elétrico E.**

Seguindo a mesma metodologia, apliquemos o rotacional na eq. (1):

$$\nabla \mathrm{x} \left(\nabla \mathrm{x} \mathrm{H} \right) = \nabla \mathrm{x} \left(\sigma \mathrm{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} \right) = \sigma \nabla \mathrm{x} \mathrm{E} + \varepsilon \frac{\partial \left(\nabla \mathrm{x} \mathrm{E} \right)}{\partial t}$$

Substituindo (2) na última equação, temos:

$$\nabla \mathrm{x} \left(\nabla \mathrm{x} \mathrm{H} \right) = -\sigma\mu \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial t^2} \qquad (8)$$

Usando novamente a mesma identidade vetorial para **∇x∇xA** usada anteriormente, a eq. (8) fica:

OEMPU - Equações de Onda

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \qquad (9)$$

Que é conhecida como **equação de onda de Helmholtz temporal para o campo magnético H**.

Portanto E e H devem existir de tal modo que satisfaçam, respectivamente, as equações de onda (7) e (9).

Equação de OEM em um meio sem perdas (σ=0)

Equação de OEM em meio sem perdas (σ=0)

- É fácil verificar que as equações de onda para uma OEM em um meio sem perdas. Basta considerar σ=0 nas equações de onda para o caso do meio com perdas:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \cancelto{0}{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Longrightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \cancelto{0}{\sigma} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Longrightarrow \nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Equações de OEM na forma fasorial

Equações de Onda na Forma Fasorial

Um caso especial, particularmente útil e didático é considerar a OEM tendo uma variação harmônica do espaço e do tempo.

Lembrando que, para um sinal harmônico *f(z,t)*:

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} \rightarrow j\omega\tilde{F}(z) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f(z,t)}{\partial t^2} \rightarrow j^2\omega^2\tilde{F}(z) \Rightarrow \tilde{F}(z) \text{ é o fasor de } f(z,t)$$

Temos então:

$$\nabla^2\tilde{E} = \overbrace{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}^{\gamma^2}\tilde{E} \qquad (10)$$

$$\nabla^2\tilde{H} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\tilde{H} \qquad (11)$$

As equações (11) e (12) são geralmente escritas na forma:

$$\nabla^2\tilde{E} - \gamma^2\tilde{E} = 0 \qquad (12)$$

$$\nabla^2\tilde{H} - \gamma^2\tilde{H} = 0 \qquad (13)$$

Equações de Onda na Forma Fasorial

Em que γ é a **constante de propagação** da onda, definida como sendo:

$$\boxed{\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta} \qquad (14)$$

em que:

$\alpha = Re\{\gamma\}$ é a constante de atenuação em Np/m (Néper por metro)

$\beta = \mathrm{Im}\{\gamma\}$ é a constante de fase em rad/m (radianos por metro)

Equações de Onda na Forma Fasorial

- A constante de atenuação (α) está relacionada à perda de energia (meios com $\sigma \neq 0$);
- Pode ser calculada em termos de ω e dos parâmetros constitutivos pela expressão :

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right\}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\varepsilon_r}{2}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right\}} \qquad (15)$$

em que: $\mu_r = \dfrac{\mu}{\mu_0}$ é a permeabilidade magnética relativa do meio,

$\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ é a permissividade elétrica relativa do meio e

$c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3\times10^8 \text{ m/s}$ é a velocidade da luz no vácuo.

Equações de Onda na Forma Fasorial

- A constante de fase (β) está relacionada à fase adquirida pela onda após se propagar por uma distância específica;
- Pode ser calculada em termos de ω e dos parâmetros constitutivos pela expressão :

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right\}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu_r\varepsilon_r}{2}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right\}} \qquad (16)$$

Equações de Onda Gerais na Forma Fasorial

Em um meios sem perdas (σ=0), pode ser verificado facilmente que:

$$\nabla^2 \widetilde{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \widetilde{E} = 0$$

$$\nabla^2 \widetilde{H} + \omega^2 \mu\varepsilon \widetilde{H} = 0$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \rightarrow \alpha = 0 \text{ e } \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$