INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CEARÁ

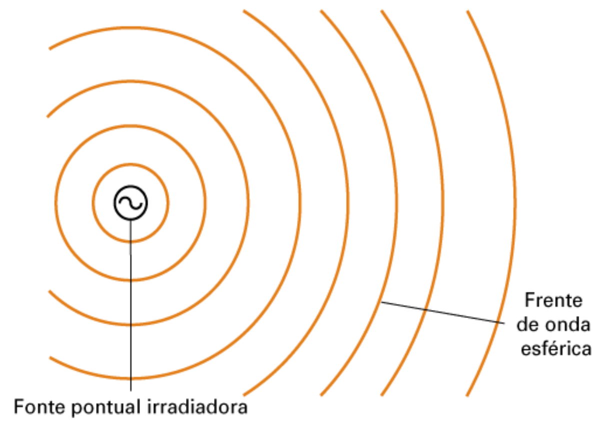
Equação de Onda Eletromagnética Plana e Uniforme no Domínio Fasorial

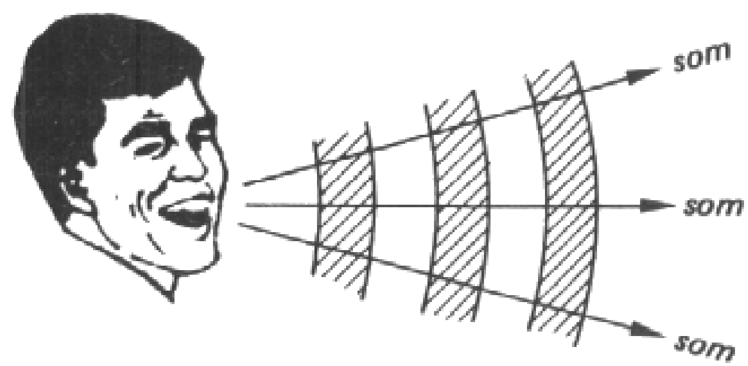
Prof. Fábio Alencar Mendonça

O conceito de Onda Eletromagnética Plana e Uniforme (OEMPU) – Uma aproximação

Ondas planas

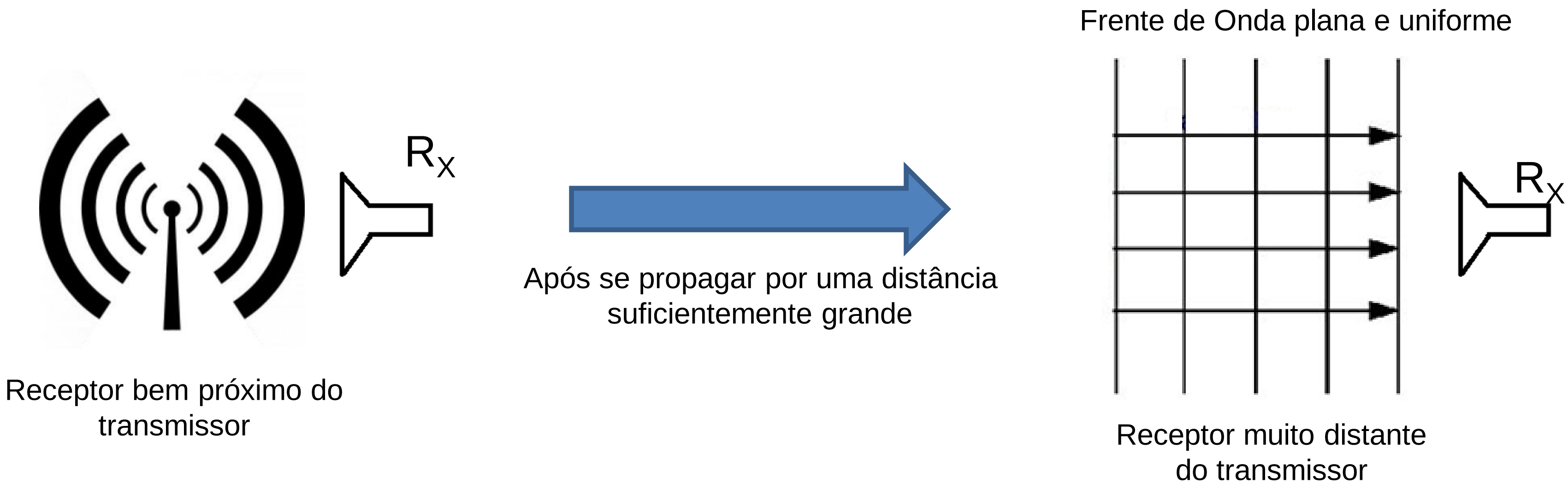
Um caso especial, particularmente útil e didático é considerar a OEM como sendo **plana e uniforme**. Nos exemplos abaixo, nota-se que a frente de onda global apresenta formato esférico.





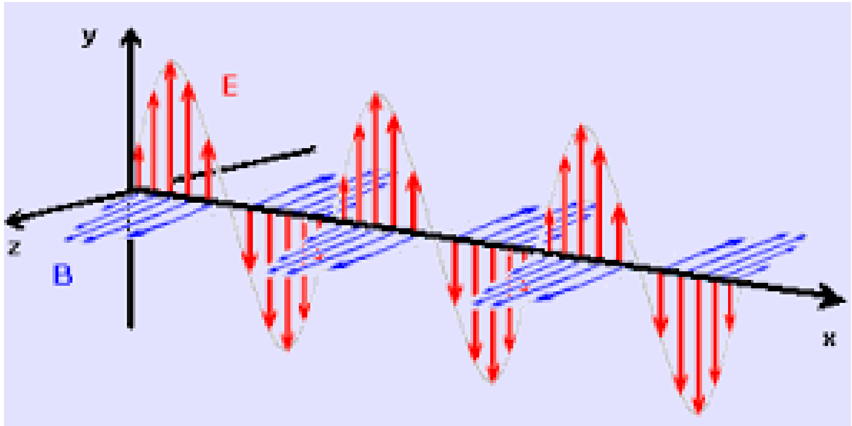
Ondas planas

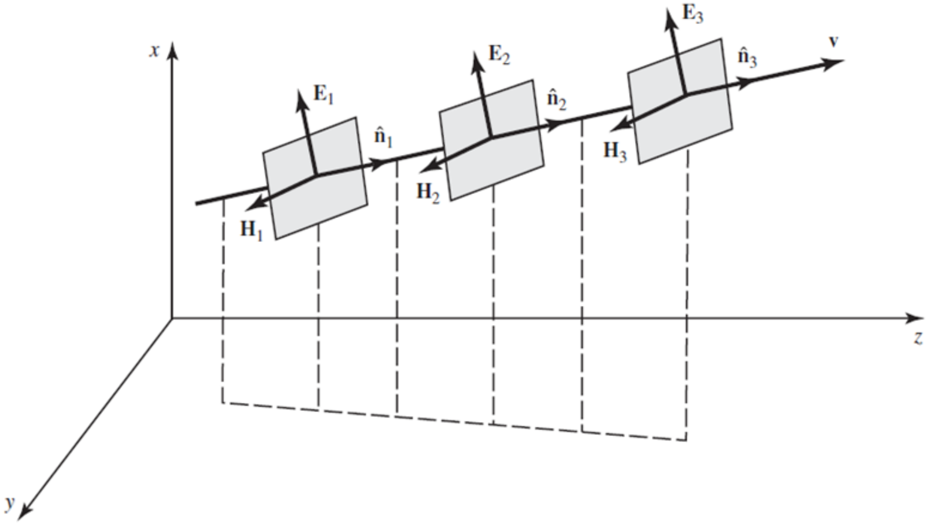
No entanto, para um receptor (observador) a uma distância muito grande da fonte, a frente de onda pode ser considerada como sendo **plana** e com distribuição **uniforme**.



Ondas Eletromagnética Planas e Uniformes

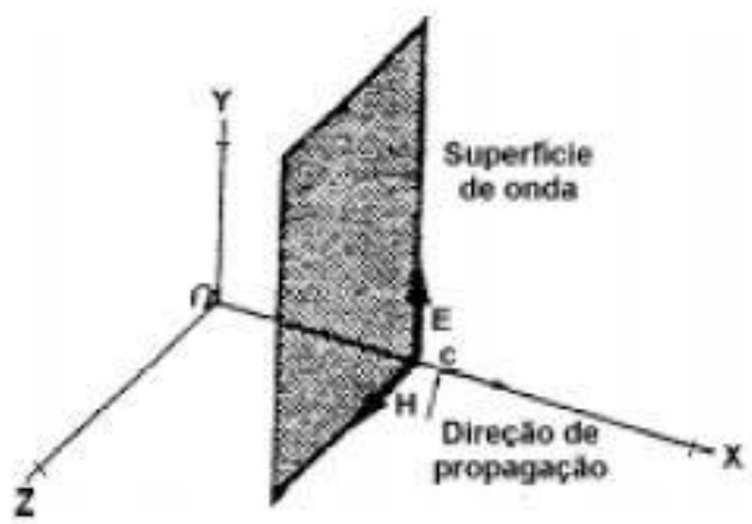
No caso de uma OEMPU, os campos **E** e **H** são ortogonais (transversais) e estão contidos em um plano transversal à direção de propagação da onda. Por essa razão, tais ondas são também chamadas de **ondas TEM (Transversal Electric-Magnetic).**





Ondas Eletromagnética Planas e Uniformes

Além disso, em uma OEMPU a magnitude e a fase dos campos **E** e **H** que a constituem são uniformes nesse plano transversal.



Solução das Equações de Onda para OEMPU

Solução das Equações de Onda

Uma vez que temos as equações de onda de uma OEM na forma fasorial como sendo:

$$\nabla^2 \widetilde{E} - \gamma^2 \widetilde{E} = 0$$

$$\nabla^2 \widetilde{H} - \gamma^2 \widetilde{H} = 0$$

devemos agora determinar **E** e **H** fasores que sejam solução para essas equações.

Solução para $\vec{E}$

Determina **E** solução da equação de onda

Aplica **E** na relação:

$$\nabla \times \widetilde{E} = -j\omega\mu\widetilde{H}$$

Determina **H**

OU

Determina **H** solução da equação de onda

Aplica **H** na relação:

$$\nabla \times \widetilde{H} = \left(\sigma + j\omega\varepsilon\right)\widetilde{E}$$

Determina **E**

Solução para $\vec{E}$

Sabe-se que um campo vetorial ***A*** na forma fasorial pode ser representado em coordenadas cartesianas por:

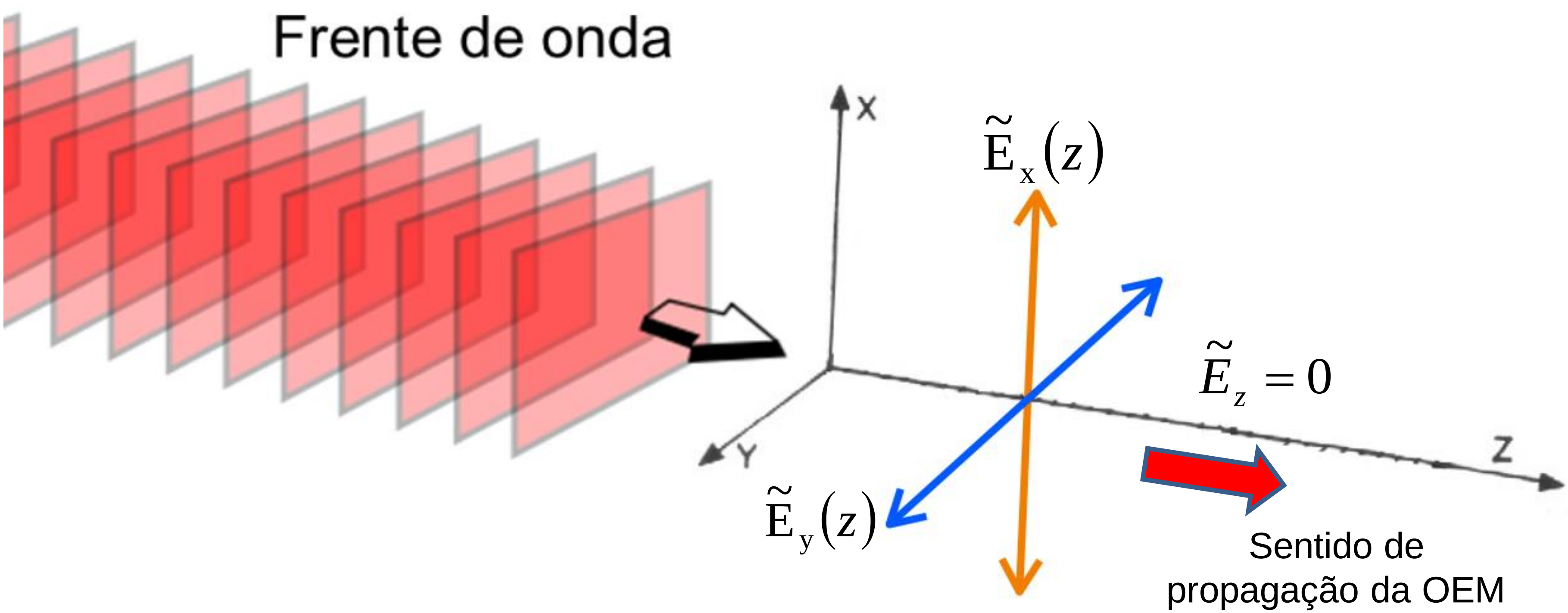
$$\vec{\tilde{\mathrm{A}}}(x, y, z) = \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{x}}(x, y, z)\hat{\mathrm{x}} + \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{y}}(x, y, z)\hat{\mathrm{y}} + \tilde{\mathrm{A}}_{\mathrm{z}}(x, y, z)\hat{\mathrm{z}} \qquad (1)$$

Vamos considerar, nesse momento, uma OEMPU que se propaga na direção arbitrária z. Desse modo, o campo elétrico **E** pode ser representado como sendo:

$$\vec{\tilde{\mathrm{E}}}(z) = \tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{x}}(z)\hat{\mathrm{x}} + \tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{y}}(z)\hat{\mathrm{y}} \qquad (2)$$

$$\tilde{E}_{\mathrm{z}} = 0$$

Solução para $\vec{E}$



$$\vec{\tilde{E}}(z) = \tilde{E}_x(z)\hat{x} + \tilde{E}_y(z)\hat{y}$$

Solução para $\vec{E}$

Substituindo (2) na equação de onda para o campo elétrico na forma fasorial para uma OEMPU , temos:

$$\nabla^2\left(\tilde{E}_x\hat{x}+\tilde{E}_y\hat{y}\right)-\gamma^2\left(\tilde{E}_x\hat{x}+\tilde{E}_y\hat{y}\right)=0 \qquad (3)$$

Logo podemos escrever:

$$\left(\nabla^2-\gamma^2\right)\tilde{E}_x\hat{x}+\left(\nabla^2-\gamma^2\right)\tilde{E}_y\hat{y}=0 \qquad (4)$$

Para que (4) seja satisfeita, devemos ter:

$$\left(\nabla^2-\gamma^2\right)\tilde{E}_x\hat{x}=0 \qquad (5)$$

$$\left(\nabla^2-\gamma^2\right)\tilde{E}_y\hat{y}=0 \qquad (6)$$

Solução para $\vec{E}$

Usando a definição do **operador laplaciano** em coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

As equações (5) e (6) para **$E_x(z)$ e $E_y(z)$** podem ser escritas como sendo:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right) \tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{x}}(z)\hat{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{x}}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 \tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{x}}(z) = 0 \qquad (7)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{y}}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 \tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{y}}(z) = 0 \qquad (8)$$

Solução para $\vec{E}$

Apresentaremos a demonstração para determinar **E_x(z)** que seja solução da equação (7). O mesmo procedimento pode ser feito para determinar **E_y(z)** que seja solução da equação (8).

A equação (7) é classificada como sendo uma **equação diferencial ordinária de 2ª ordem, linear e homogênea** do tipo:

$$\frac{d^2\mathrm{F}(z)}{dz^2} - \gamma^2\mathrm{F}(z) = 0$$

Sua solução já é conhecida e é dada por:

$$\mathrm{F}(z) = F_0^+ e^{-\gamma z} + F_0^- e^{+\gamma z}$$

Solução para $\vec{E}$

Assim, $\mathbf{E_x(z)}$ solução da equação (7) deve ser no formato:

$$\widetilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{x}}(z) = \left[E_{0x}^{+} e^{-\gamma z} + E_{0x}^{-} e^{\gamma z}\right]\hat{x} = \left[E_{0x}^{+} e^{-(\alpha + j\beta)z} + E_{0x}^{-} e^{(\alpha + j\beta)z}\right]\hat{x} \Rightarrow$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{x}}(z) = \left[E_{0x}^{+} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + E_{0x}^{-} e^{\alpha z} e^{j\beta z}\right]\hat{x} \qquad (9)$$

Solução para $\vec{E}$

Se considerarmos: $\mathrm{E}_{0x}^{+} = \left|\mathrm{E}_{0x}^{+}\right| . e^{j\varphi_{0x}^{+}}$ e $\mathrm{E}_{0x}^{-} = \left|\mathrm{E}_{0x}^{-}\right| . e^{j\varphi_{0x}^{-}}$

Então: $$\widetilde{\mathrm{E}}_x(z) = \left|E_{0x}^{+}\right| e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\phi_{0x}^{+}} \hat{x} + \left|E_{0x}^{-}\right| e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\phi_{0x}^{-}} \hat{x} \qquad (10)$$

A equação (10) pode também ser escrita no domínio temporal, dada por:

$$\vec{\mathrm{E}}_x(\mathrm{z},\mathrm{t}) = \underbrace{\left|E_{0x}^{+}\right| e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \phi_{0x}^{+}\right)\hat{x}}_{\text{Propagação em +z}} + \underbrace{\left|E_{0x}^{-}\right| e^{\alpha z} \cos\left(\omega t + \beta z + \phi_{0x}^{-}\right)\hat{x}}_{\text{Propagação em -z}} \qquad (11)$$

As equações (10) e (11) são a solução no domínio fasorial e temporal para o campo elétrico respectivamente. Falta então determinar a solução para o campo magnético $\mathbf{H}_y$ associado a $\mathbf{E}_x$.

Solução para $\vec{H}$

Sabemos que: $\nabla \times E = -\mu \dfrac{\partial H}{\partial t}$

No domínio fasorial, essa mesma equação fica:

$$\nabla \times \tilde{E} = -j\omega\mu\tilde{H}$$

O operador rotacional aplicado a um campo ***A*** em coordenadas cartesianas é dado por:

$$\nabla \mathrm{x} \mathrm{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{x}} & \hat{\mathrm{y}} & \hat{\mathrm{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{A_x} & \mathrm{A_y} & \mathrm{A_z} \end{vmatrix}$$

Aplicando esse operador ao campo elétrico fasorial $\mathbf{E_x(z)}$ que já determinamos, temos:

Solução para $\vec{H}$

$$\nabla \times \tilde{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \tilde{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z}\hat{y} - \underbrace{\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y}}_{0}\hat{z}$$

Logo:

$$\nabla \times \tilde{E} = \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z}\hat{y} = -j\omega\mu\tilde{H} \Rightarrow \tilde{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z}\hat{y} \qquad (12)$$

Mas de (9):

$$\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} = \left(-\gamma E_{0x}^{+}e^{-\gamma z} + \gamma E_{0x}^{-}e^{\gamma z}\right)$$

Assim, $\boldsymbol{H_y}$ fica:

$$\tilde{H}_y(z) = \left(\frac{\gamma}{j\omega\mu}E_{0x}^{+}e^{-\gamma z} - \frac{\gamma}{j\omega\mu}E_{0x}^{-}e^{\gamma z}\right)\hat{y} \qquad (13)$$

Solução para $\vec{H}$

Observe que

$$\tilde{H}_y(z) = \left(H_{0y}^{+} e^{-\gamma z} + H_{0y}^{-} e^{\gamma z}\right)\hat{y}$$

em que

$$H_{0y}^{+} = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_{0x}^{+} \Rightarrow \frac{E_{0x}^{+}}{H_{0y}^{+}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \eta$$

$$H_{0y}^{-} = -\frac{\gamma}{j\omega\mu} E_{0x}^{-} \Rightarrow -\frac{E_{0x}^{-}}{H_{0y}^{-}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \eta$$

O parâmetro η é definido como sendo a **impedância intrínseca do meio [Ω]**

Solução para $\vec{H}$

Lembrando que:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\left(\sigma + j\omega\varepsilon\right)} = \alpha + j\beta$$

A impedância intrínseca do meio fica:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = |\eta| e^{j\theta_\eta} \qquad (14)$$

- $|\eta|$, a magnitude da impedância intrínseca, relaciona as amplitudes de campo elétrico e magnético:

$$|\eta| = \frac{\left|E_{0x}^{+}\right|}{\left|H_{0y}^{+}\right|} = \frac{\left|E_{0x}^{-}\right|}{\left|H_{0y}^{-}\right|}$$

- θ_η , a fase da impedância intrínseca, representa a defasagem entre os campos elétrico e magnético;

Solução para $\vec{H}$

Pode-se demonstrar que:

$$|\eta| = \frac{\eta_0 \sqrt{\dfrac{\mu_R}{\varepsilon_R}}}{\left[1 + \left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}} \ \Omega$$

$$\theta_\eta = \frac{1}{2} tg^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

Solução para $\vec{H}$

Assim, a expressão fasorial para o campo magnético **H_y(z)** pode ser escrita em função da amplitude do campo elétrico e da impedância intrínseca do meio como sendo:

$$\tilde{\mathrm{H}}_y(z) = \frac{\left|E_{0x}^{+}\right|}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\phi_{0x}^{+}} e^{-j\theta_\eta}\,\hat{y} - \frac{\left|E_{0x}^{-}\right|}{|\eta|} e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\phi_{0x}^{-}} e^{-j\theta_\eta}\,\hat{y} \quad (16)$$

Já a forma temporal para o campo magnético fica:

$$\vec{\mathrm{H}}_y(\mathrm{z},\mathrm{t}) = \underbrace{\frac{\left|E_{0x}^{+}\right|}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \phi_{0x}^{+} - \theta_\eta\right)\hat{y}}_{\text{Propagação em +z}} - \underbrace{\frac{\left|E_{0x}^{-}\right|}{|\eta|} e^{\alpha z} \cos\left(\omega t + \beta z + \phi_{0x}^{-} - \theta_\eta\right)\hat{y}}_{\text{Propagação em -z}} \quad (17)$$

Solução para $E_y(z)$ e $H_x(z)$

Seguindo o mesmo procedimento, pode ser verificado que **$E_y(z)$** e **$H_x(z)$**:

$$\tilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{y}}(z) = \left|E_{0y}^{+}\right| e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\phi_{0y}^{+}} \hat{y} + \left|E_{0y}^{-}\right| e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\phi_{0y}^{-}} \hat{y}$$

$$\vec{\mathrm{E}}_{\mathrm{y}}(\mathrm{z},\mathrm{t}) = \left|E_{0y}^{+}\right| e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \phi_{0y}^{+}\right)\hat{y} + \left|E_{0y}^{-}\right| e^{\alpha z} \cos\left(\omega t + \beta z + \phi_{0y}^{-}\right)\hat{y}$$

$$\tilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{x}}(z) = \frac{\left|E_{0y}^{+}\right|}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\phi_{0y}^{+}} e^{-j\theta_\eta} \hat{x} - \frac{\left|E_{0y}^{-}\right|}{|\eta|} e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\phi_{0y}^{-}} e^{-j\theta_\eta} \hat{x}$$

$$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{x}}(\mathrm{z},\mathrm{t}) = \frac{\left|E_{0y}^{+}\right|}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z + \phi_{0y}^{+} - \theta_\eta\right)\hat{x} - \frac{\left|E_{0y}^{-}\right|}{|\eta|} e^{\alpha z} \cos\left(\omega t + \beta z + \phi_{0y}^{-} - \theta_\eta\right)\hat{x}$$

E e **H** para um meio sem perdas

Expressões para meios sem perdas (σ=0)

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_R \varepsilon_R}$$

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\varepsilon_R}} \qquad \theta_\eta = 0$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_{\mathrm{x}}(z) = \left|E_{0\mathrm{x}}^{+}\right| e^{-j\beta z} e^{j\phi_{0\mathrm{x}}^{+}} \hat{x} + \left|E_{0\mathrm{x}}^{-}\right| e^{j\beta z} e^{j\phi_{0x}^{-}} \hat{x}$$

$$\vec{\mathrm{E}}_{\mathrm{x}}(\mathrm{z,t}) = \left|E_{0x}^{+}\right| \cos\left(\omega t - \beta \mathrm{z} + \phi_{0x}^{+}\right)\hat{x} + \left|E_{0x}^{-}\right| \cos\left(\omega t + \beta \mathrm{z} + \phi_{0x}^{-}\right)\hat{x}$$

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{y}}(z) = \frac{\left|E_{0x}^{+}\right|}{\eta} e^{-j\beta z} e^{j\phi_{0x}^{+}} \hat{y} - \frac{\left|E_{0x}^{-}\right|}{\eta} e^{j\beta z} e^{j\phi_{0x}^{-}} \hat{y}$$

$$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{y}}(\mathrm{z,t}) = \frac{\left|E_{0x}^{+}\right|}{\eta} \cos\left(\omega t - \beta \mathrm{z} + \phi_{0x}^{+}\right)\hat{y} - \frac{\left|E_{0x}^{-}\right|}{\eta} \cos\left(\omega t + \beta \mathrm{z} + \phi_{0x}^{-}\right)\hat{y}$$

Relação Geral Entre **E** e **H**

Pode-se demonstrar que, para qualquer onda plana e uniforme que se propaga em uma direção arbitrária indicada pelo vetor unitário **k** , os fasores campo elétrico e campo magnético estão interrelacionados pelas seguintes expressões:

$$\tilde{H} = \frac{1}{\eta}\left[\hat{k} \times \tilde{E}\right]$$

$$\tilde{E} = -\eta\left[\hat{k} \times \tilde{H}\right]$$

Em que **k** é o sentido de propagação da onda e $\eta = |\eta| e^{j\theta_\eta}$

Ver o site e praticar:

http://www.amanogawa.com/archive/PlaneWave/PlaneWave-2.html