INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CEARÁ

Equações de Maxwell

Prof. Fábio Alencar Mendonça

Equações de Maxwell	Forma pontual (diferencial)	Forma integral
Lei de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$\oint \mathbf{D} \cdot dS = Q_{enc}$
Lei de Gauss para campos magnéticos	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot dS = 0$
Lei de Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
Lei circuital de Ampère	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$
	Equação da força de Lorentz	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$
	Relações constitutivas	$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \text{ (Lei de Ohm)} \end{cases}$
	Equação da continuidade da corrente	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$

Demonstração da não existência de carga magnética isolada

σ, ε e μ são também chamados de **parâmetros constitutivos do meio**.

Para o **vácuo ou espaço livre**, considera-se:

$$\sigma = 0 \text{ S/m}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

E = Vetor campo elétrico [V/m]
D= Vetor densidade de fluxo elétrico [C/m^2]
H = Vetor campo magnético [A/m]
B = Vetor densidade de fluxo magnético [T]
J = Vetor densidade de corrente elétrica [A/m^2]
ρ_V = densidade volumétrica de cargas [C/m^3]
ε = permissividade elétrica do meio[F/m]
μ= permeabilidade magnética do meio [H/m]
σ= condutividade elétrica do meio [S/m]

Equações de Maxwell

Permissividade e Permeabilidade Relativas

Geralmente, a permissividade elétrica e a permeabilidade elétrica de outros meios são fornecidas em relação ao valor da permissividade elétrica do vácuo e da permeabilidade magnética do vácuo conforme a seguintes relações:

$$\varepsilon_{R_{meio}} = \frac{\varepsilon_{meio}}{\varepsilon_0} \quad \text{e} \quad \mu_{R_{meio}} = \frac{\mu_{meio}}{\mu_0}$$

Por exemplo, se um determinado meio tem

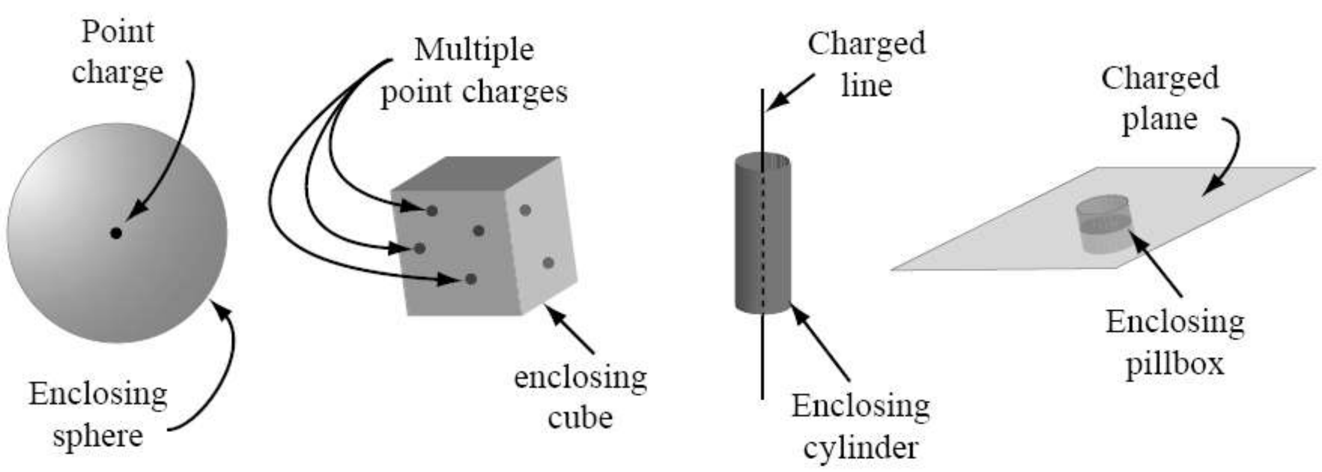
$$\varepsilon_{meio} = 2 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} = 2 \times \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad \mu_{meio} = 4 \times 4\pi \times 10^{-7} = 4 \times \mu_0$$

Então: $\varepsilon_{R_{meio}} = 2$ e $\mu_{R_{meio}} = 4$

Equações de Maxwell

A tabela 1 contém as versões pontual e integral das equações de Maxwell. Ambas são úteis em diferentes situações.

A forma integral são geralmente úteis em situações que apresentam completa simetria tais como: cartesiana, cilíndrica ou esférica;



Lei de Gauss

Integral

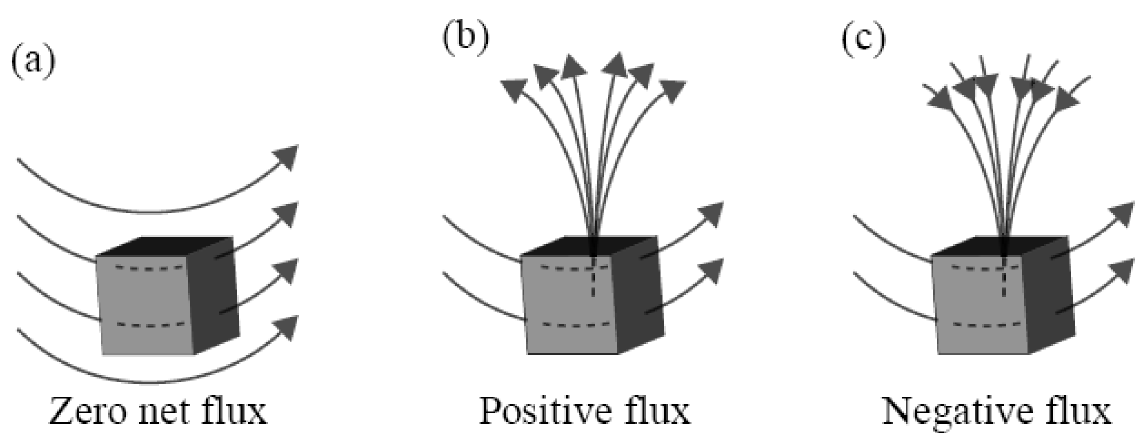
$$\oint_S \vec{E} \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Cargas elétricas produzem campo elétrico, e o fluxo desse campo atravessando qualquer superfície fechada é proporcional à carga total contida dentro da superfície.

Diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon}$$

O campo elétrico produzido cargas elétricas diverge, enquanto converge no caso de cargas negativas.



Lei de Gauss para o magnetismo

Integral

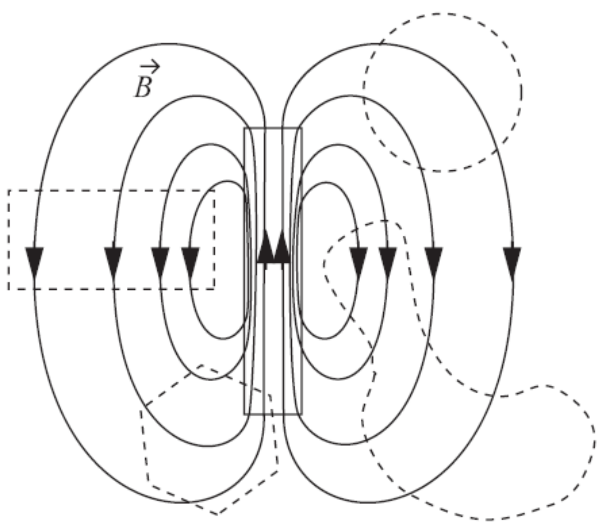
$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

O fluxo magnético total que passa através de uma superfície fechada é zero. Ou seja, não existe “carga magnética”.

Diferencial

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

A divergência do campo magnético em qualquer ponto é zero.



Lei de Faraday

Integral

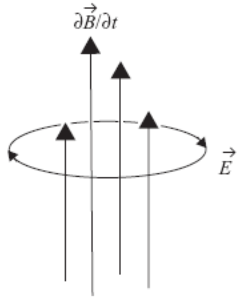
$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

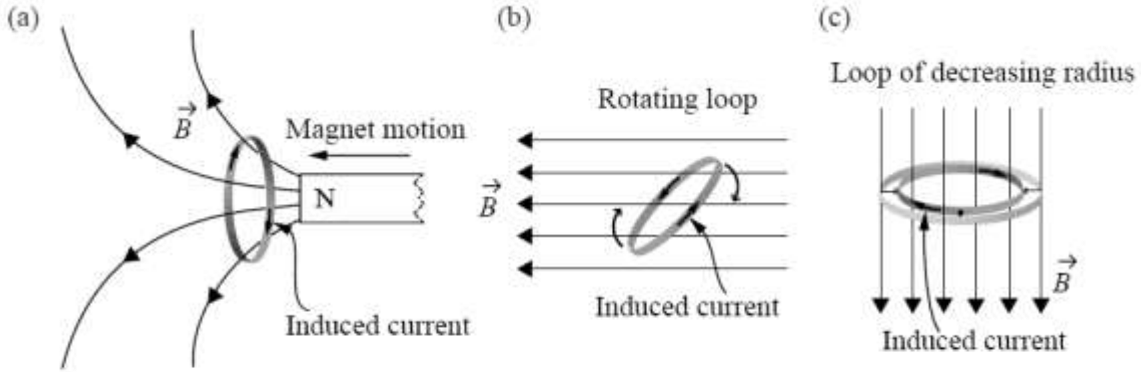
A variação do fluxo magnético através de uma superfície fechada induz uma força eletromotriz no caminho que contorna a superfície ou a variação do campo magnético induz um campo elétrico circulante.

Diferencial

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

A variação temporal de um campo magnético produz um campo elétrico circulante.





Lei de Ampère

Integral

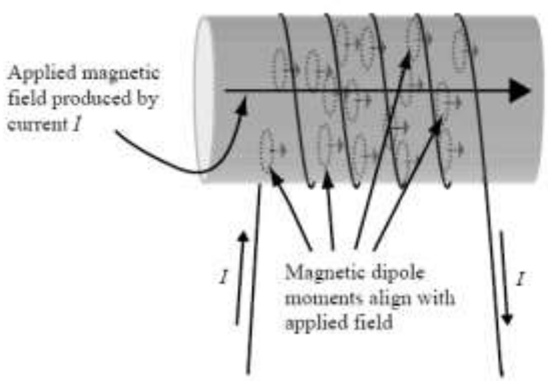
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Um corrente elétrica ou uma variação do campo elétrico através de uma superfície produz um campo magnético circulante ao redor de caminho da superfície.

Diferencial

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Um campo magnético circulante é produzido ou por uma corrente elétrica e/ou por campo elétrico variante com o tempo.



Equações de Maxwell

Um aspecto importante dessas equações é a interdependência dos campos elétrico e magnético. Como um campo elétrico variante no tempo é uma fonte de campo magnético, e vice-versa, isso inspirou Maxwell a prever a existência das ondas eletromagnéticas.

Equações de Maxwell na forma fasorial

equações de Maxwell no domínio complexo, forma integral

$$\begin{cases} \oint_C \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\mathrm{j}\omega \int_S \underline{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ \oint_C \underline{\mathbf{H}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\underline{\mathbf{J}} + \mathrm{j}\omega \underline{\mathbf{D}}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ \oint_S \underline{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_v \underline{\rho}\, \mathrm{d}v \\ \oint_S \underline{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \\ \underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}},\ \underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}},\ \underline{\mathbf{J}} = \sigma \left(\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{i}}\right) \end{cases},$$

equações de Maxwell no domínio complexo, forma diferencial

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega \underline{\mathbf{B}} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + \mathrm{j}\omega \underline{\mathbf{D}} \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = \underline{\rho} \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0 \end{cases}.$$