Capítulo 2

Sinais e sistemas de tempo discreto

Introdução

- O termo *sinal* geralmente é aplicado a algo que transmite informação. Os sinais são representados matematicamente como funções de uma ou mais variáveis independentes.

- A variável independente na representação matemática de um sinal pode ser contínua ou discreta.

- Sistemas de processamento de sinais podem ser classificados seguindo as mesmas linhas do que foi feito com os sinais.

Sinais de tempo discreto

- Uma sequência de números *x*, em que o *n*-ésimo número na sequência é indicado por *x*[*n*], é escrita formalmente como

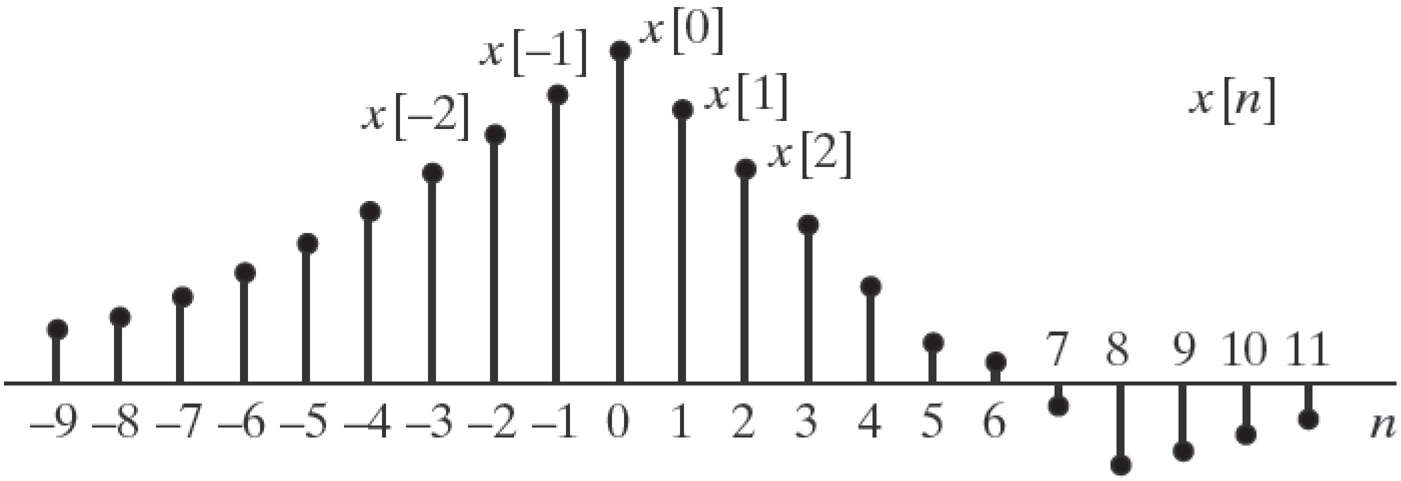
$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty$$

- Na prática, tais sequências surgem frequentemente da amostragem periódica de um sinal analógico (ou seja, de tempo contínuo) $x_a(t)$.

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

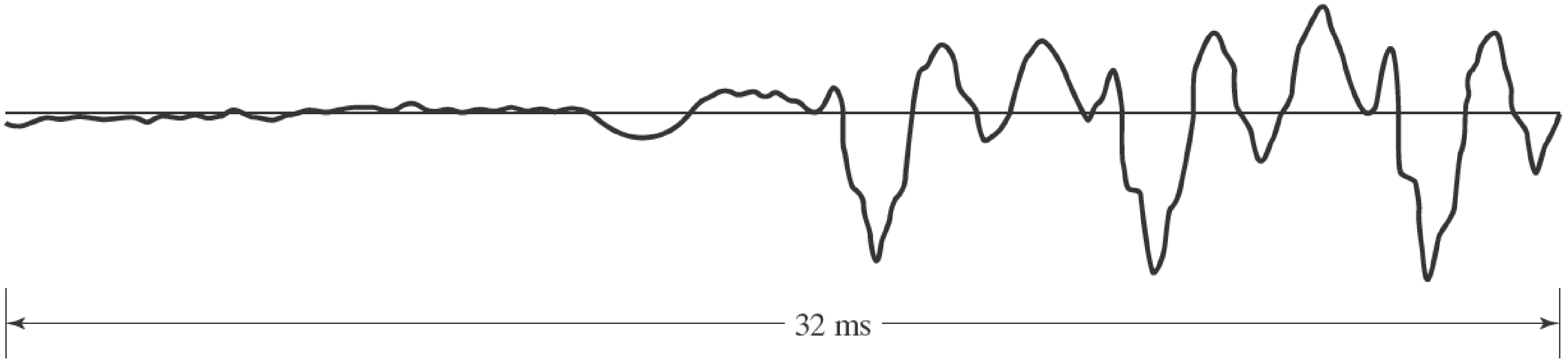
Sinais de tempo discreto

- Representação gráfica de um sinal de tempo discreto.



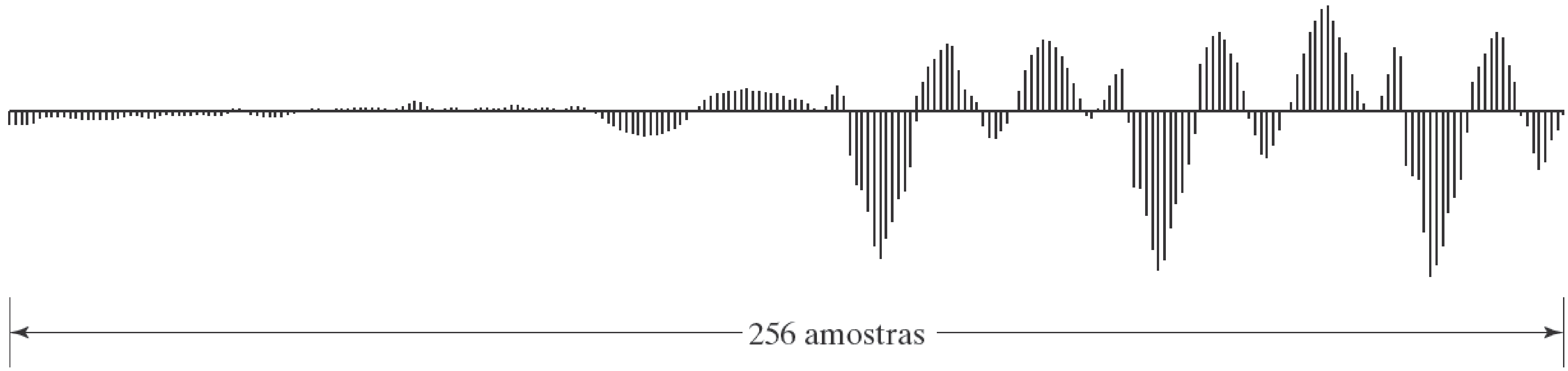
Sinais de tempo discreto

- Segmento de um sinal de voz em tempo contínuo $x_a(t)$.



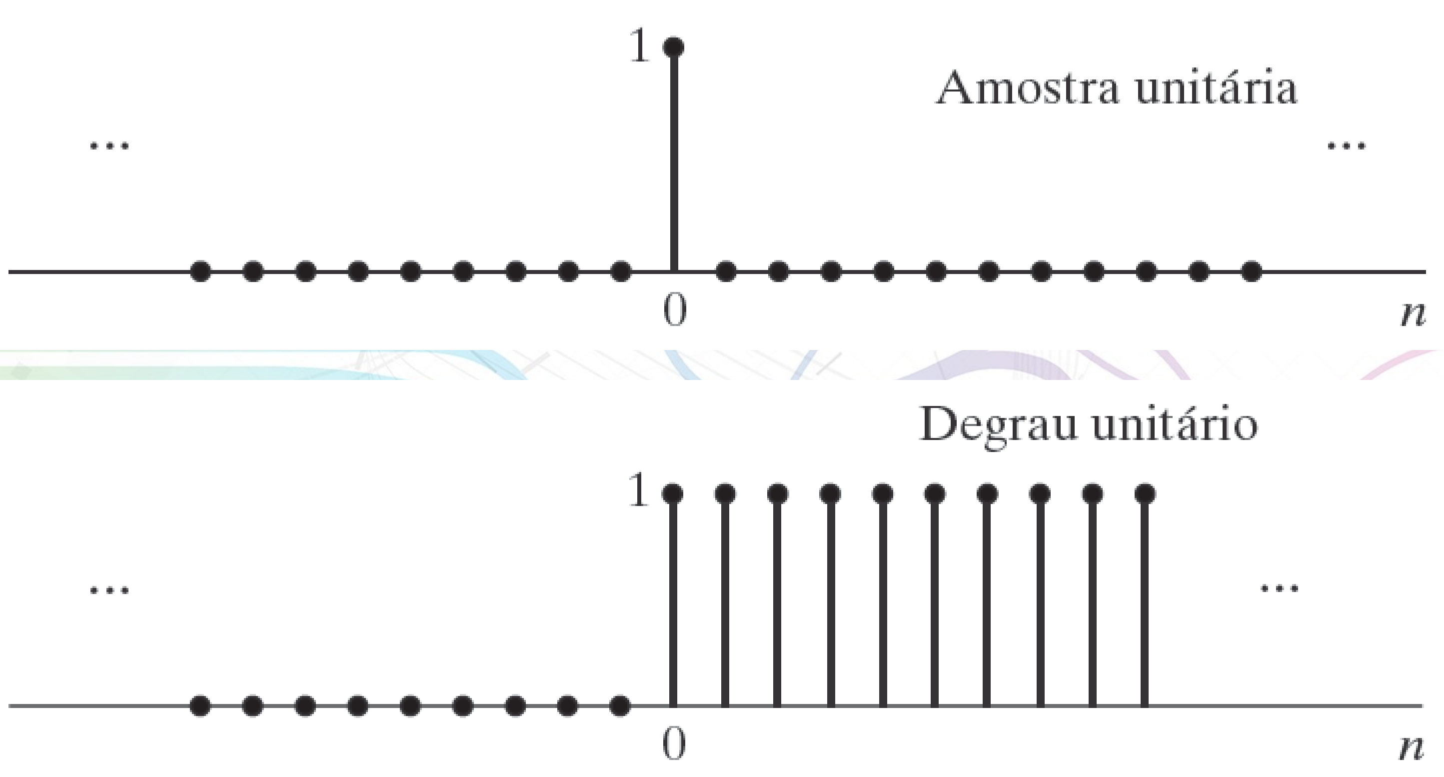
Sinais de tempo discreto

- Sequência de amostras do sinal de voz.



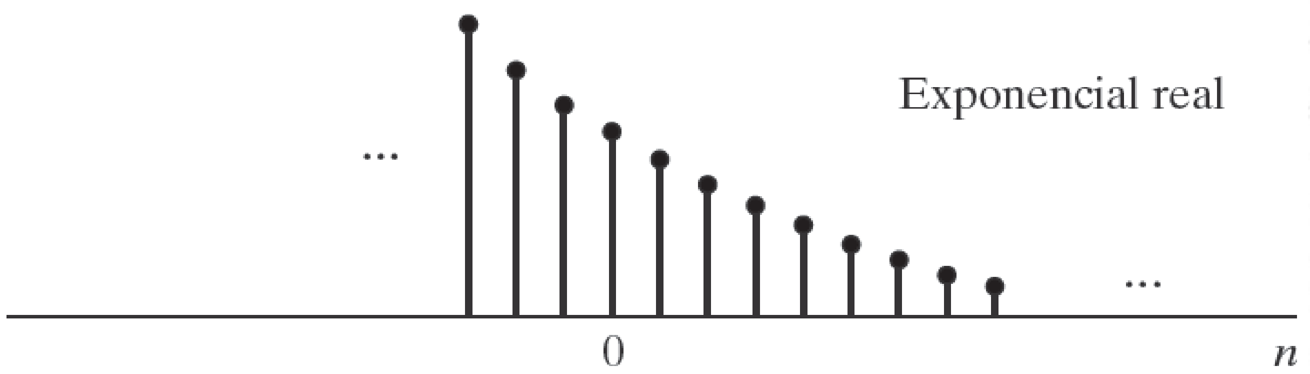
Sinais de tempo discreto

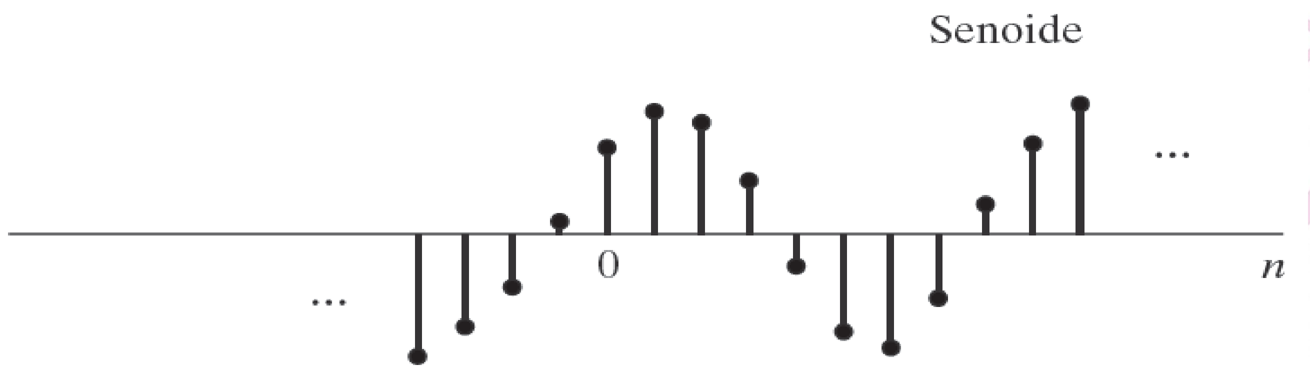
- Algumas sequências básicas.



Sinais de tempo discreto

- Algumas sequências básicas.





Sinais de tempo discreto

- A sequência amostra unitária é definida como a sequência

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

- De modo geral, qualquer sequência pode ser expressa como

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- A sequência degrau unitário é definida como $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$

Sinais de tempo discreto

- O degrau unitário está relacionado ao impulso unitário por

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

- Os valores não nulos são todos unitários, de modo que

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots$$

- ou

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Sinais de tempo discreto

- Como outra alternativa, a sequência impulso pode ser expressa como a primeira diferença regressiva da sequência degrau unitário, ou seja, $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

- A forma geral de uma sequência exponencial é $x[n] = A\,\alpha^n$

- Especificamente, se $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ e $A = |A|e^{j\varphi}$, a sequência $A\,\alpha^n$ pode ser expressa em qualquer uma das seguintes maneiras:

Sinais de tempo discreto

$$\begin{aligned} x[n] = A\,\alpha^n &= |A|e^{j\phi}\,|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} \\ &= |A|\,|\alpha|^n e^{j(\omega_0 n+\phi)} \\ &= |A|\,|\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \phi) \\ &\quad + j\,|A|\,|\alpha|^n \operatorname{sen}(\omega_0 n + \phi) \end{aligned}$$

- Quando $|\alpha| = 1$, a sequência tem a forma

$$\begin{aligned} x[n] &= |A|e^{j(\omega_0 n+\phi)} \\ &= |A|\cos(\omega_0 n + \phi) + j\,|A|\operatorname{sen}(\omega_0 n + \phi) \end{aligned}$$

Sinais de tempo discreto

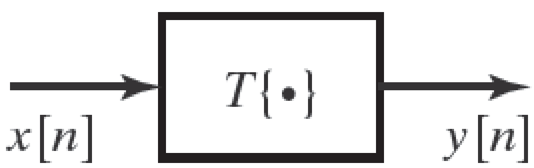
- No caso de tempo discreto, uma sequência periódica é uma sequência para a qual
$$x[n] = x[n + N], \text{para todo } n$$
- Se essa condição para periodicidade for testada para a senoide de tempo discreto, então
$$A\cos(\omega_0 n + \phi) = A\cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi)$$
- O que requer que $$\omega_0 N = 2\pi k$$
- A periodicidade com período *N* requer que $e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$

Sistemas de tempo discreto

- Um sistema de tempo discreto é definido matematicamente como

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

- Representação de um sistema de tempo discreto



Sistemas sem memória

- Um sistema é denominado sem memória se a saída $y[n]$ para cada valor de n depender somente da entrada $x[n]$ no mesmo valor de n.

Sistemas lineares

- A classe dos sistemas lineares é definida pelo princípio da superposição.

Sistemas lineares

- Se $y_1[n]$ e $y_2[n]$ são as respostas de um sistema quando $x_1[n]$ e $x_2[n]$ são as respectivas entradas, então o sistema é linear se e somente se

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$$
$$= y_1[n] + y_2[n]$$

e

$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n]$$

Sistemas lineares

- A primeira propriedade é a *propriedade da aditividade*.
- A segunda, a *propriedade da homogeneidade* ou *da mudança de escala*.
- Essas duas propriedades juntas compreendem o princípio da superposição, formulado como

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$

Sistemas invariantes no tempo

Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

- Um sistema invariante no tempo é um sistema para o qual um deslocamento ou atraso no tempo da sequência de entrada causa um deslocamento correspondente na sequência de saída.

- Provar que um sistema é invariante no tempo exige uma prova geral em que não sejam feitas suposições específicas sobre os sinais de entrada.

- Provar a não invariância no tempo exige somente um contraexemplo para a invariância no tempo.

Causalidade

- Um sistema é causal se, para cada escolha de n_0, o valor da sequência de saída no índice $n = n_0$ depender somente dos valores da sequência de entrada para $n \leq n_0$.

Estabilidade

- A estabilidade requer que, para toda entrada limitada, exista um valor fixo positivo e finito B_v tal que

$$|y[n]| \leq B_y < \infty, \quad \text{para todo } n.$$

Sistemas LIT

- A propriedade de invariância de tempo implica que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k], \qquad \text{para todo } n$$

- Uma consequência dessa equação é que um sistema LIT é completamente caracterizado por sua resposta ao impulso $h[n]$ no sentido de que, dadas as sequências $x[n]$ e $h[n]$ para todo n, é possível usar a equação acima para calcular cada amostra da sequência de saída $y[n]$.

Sistemas LIT

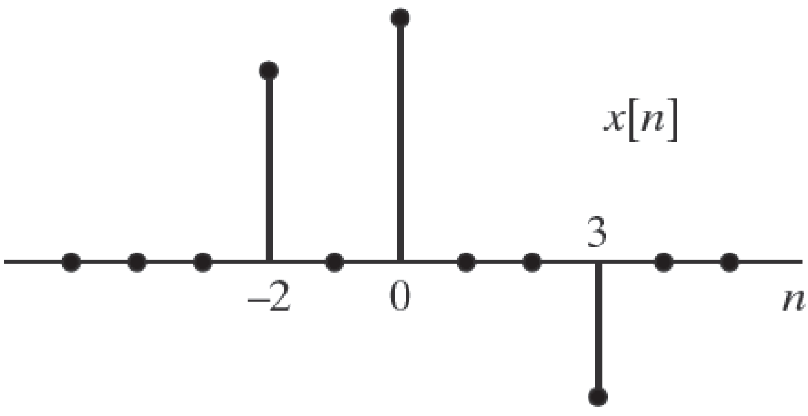
- Essa equação é chamada de *soma de convolução*, e é representada pela notação operacional $y[n] = x[n] * h[n]$

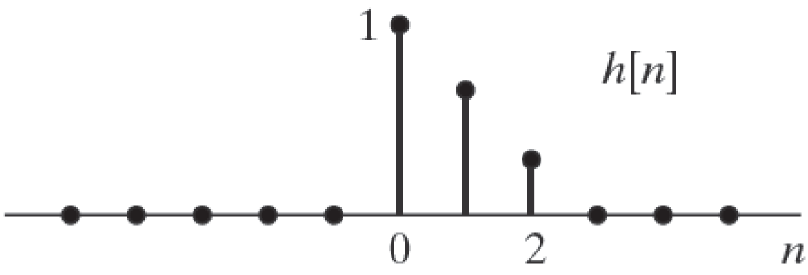
- Embora a expressão da soma de convolução seja semelhante à integral de convolução da teoria dos sistemas lineares de tempo contínuo, a soma da convolução não deve ser considerada como uma aproximação da integral de convolução.

- A soma de convolução é um resultado direto da linearidade e da invariância no tempo.

Sistemas LIT

- Representação da saída de um sistema LIT como a superposição de respostas a amostras individuais da entrada.



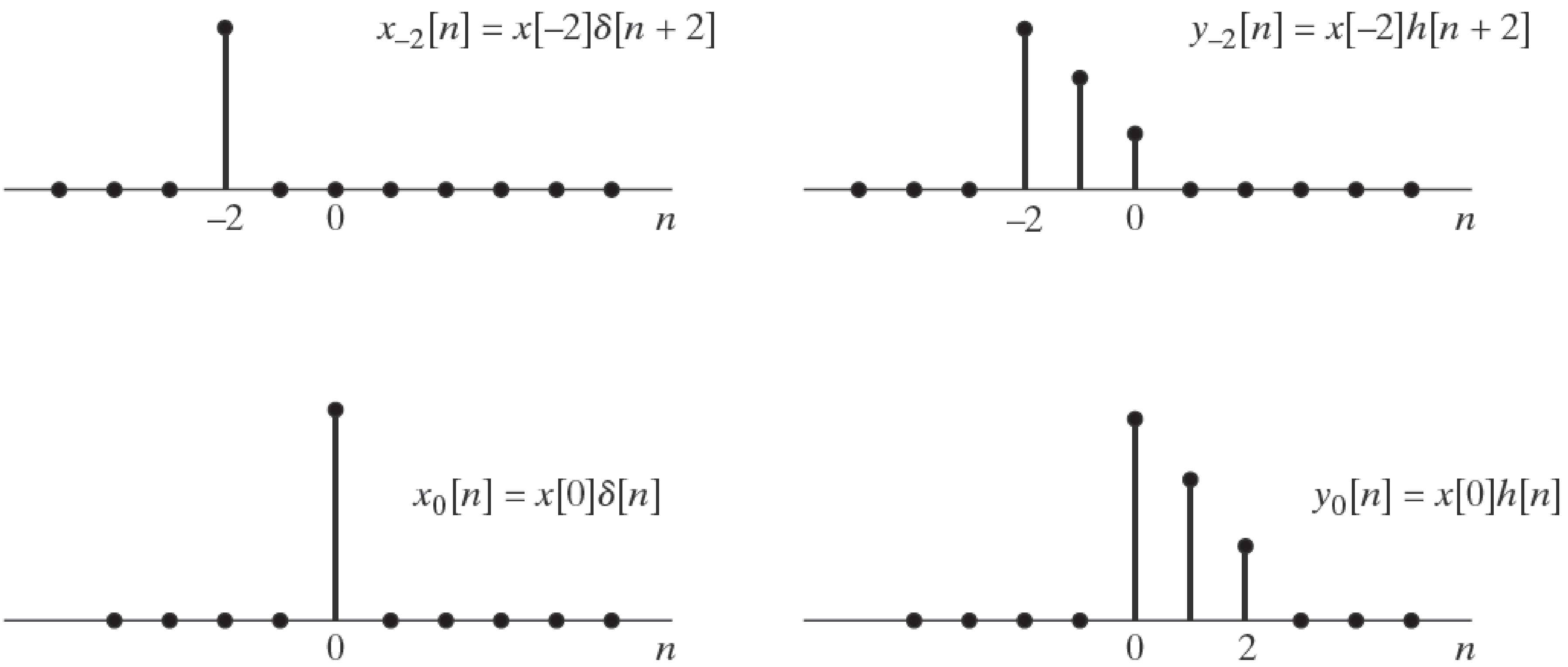


Oppenheim • Schafer

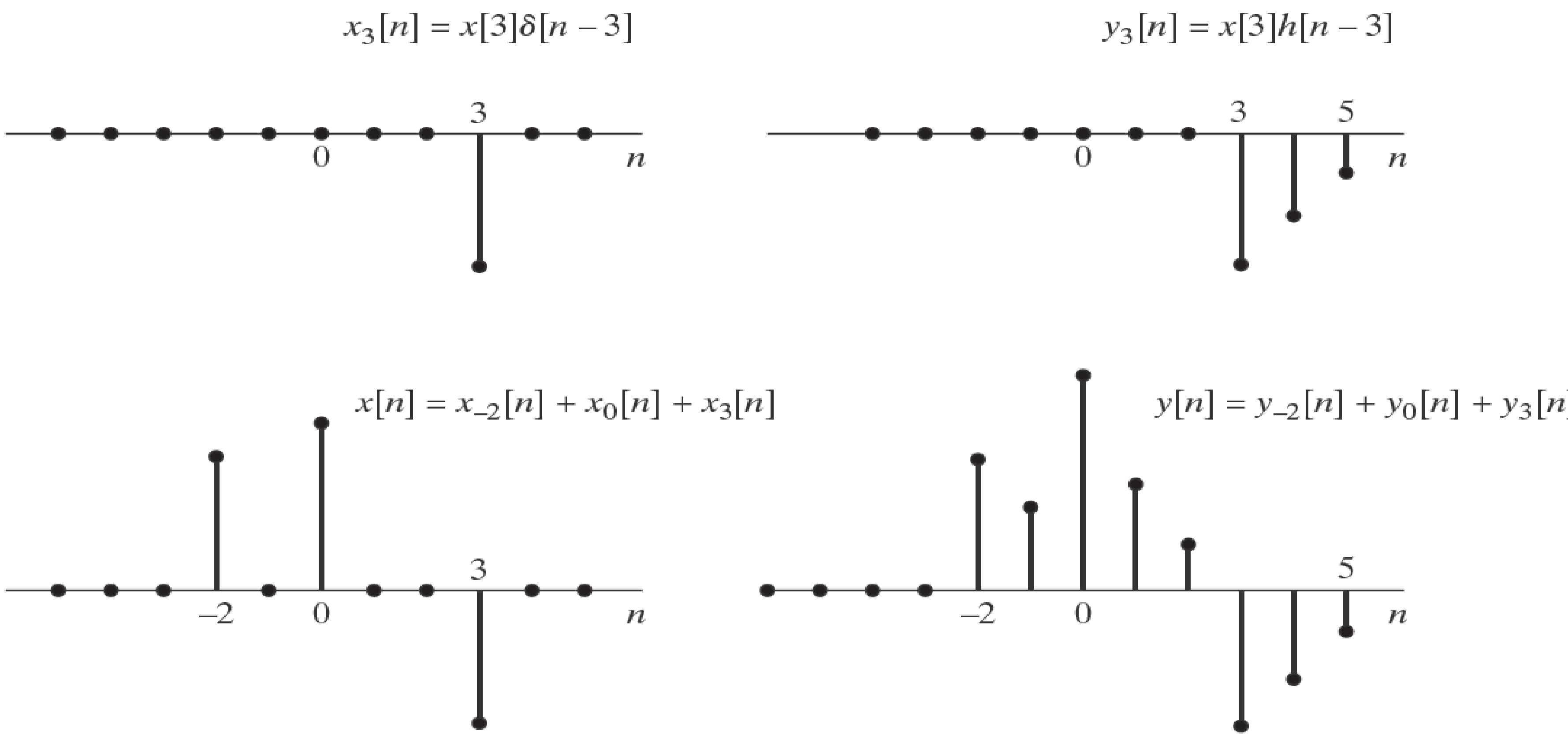
Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

Sistemas LIT



Sistemas LIT



Propriedades dos sistemas lineares invariantes no tempo

- Algumas propriedades gerais da classe dos sistemas LIT podem ser encontradas considerando-se propriedades da operação de convolução.

- A operação de convolução é comutativa:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

- Também é distributiva com relação à adição

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

Propriedades dos sistemas lineares invariantes no tempo

- A operação de convolução também satisfaz a propriedade associativa, ou seja,

$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

- Além disso, como a operação de convolução é comutativa, a equação anterior é equivalente a

$$y[n] = x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]$$

Propriedades dos sistemas lineares invariantes no tempo

- Se dois sistemas LIT com respostas ao impulso $h_1[n]$ e $h_2[n]$ são colocados em cascata em qualquer ordem, a resposta ao impulso total equivalente $h[n]$ é

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$$

- Em uma conexão paralela, os sistemas têm a mesma entrada, e suas saídas são somadas para produzir uma saída total.

- O conceito de convolução como uma operação entre duas sequências leva à simplificação de muitos problemas que envolvem sistemas.

Propriedades dos sistemas lineares invariantes no tempo

- A convolução de uma sequência impulso deslocado com qualquer sinal $x[n]$ é facilmente obtida simplesmente deslocando $x[n]$ do atraso do impulso.

- Como o atraso é uma operação fundamental na implementação de sistemas lineares, o resultado anterior muitas vezes é útil na análise e simplificação de associações de sistemas LIT.

Equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

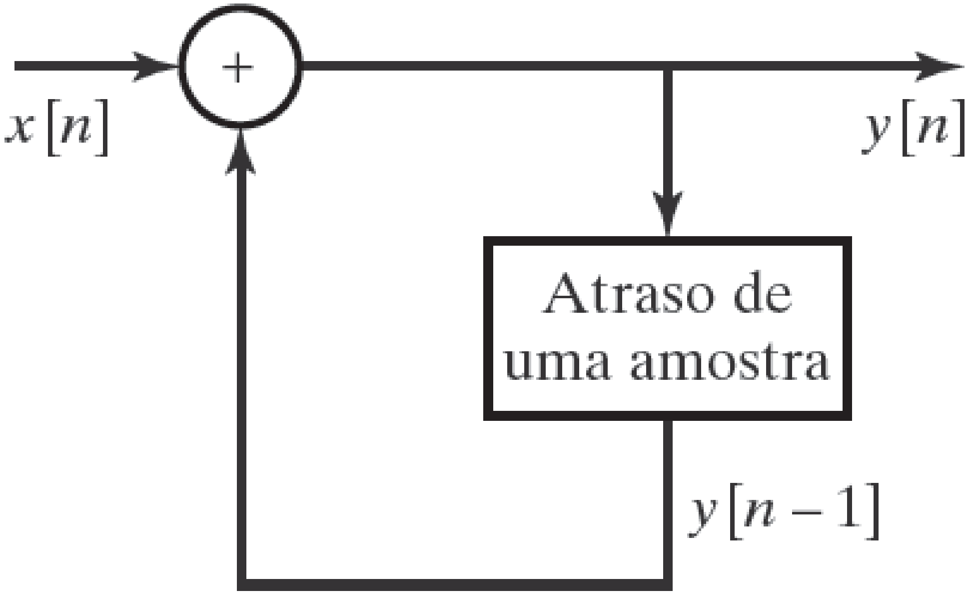
- Uma classe importante de sistemas LIT consiste naqueles sistemas para os quais a entrada *x*[*n*] e a saída *y*[*n*] satisfazem uma equação de diferenças linear de *N*-ésima ordem com coeficientes constantes na forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

- A equação $y[n] = x[n] + y[n-1]$ grama de blocos na figura a seguir são chamados de representação recursiva do sistema.

Equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

- Diagrama de blocos de uma equação de diferenças recursiva representando um acumulador.



Equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

- Uma equação de diferenças linear com coeficientes constantes para sistemas de tempo discreto não fornece uma especificação única da saída para uma dada entrada.

- Em um sistema para o qual a entrada e a saída satisfazem uma equação de diferenças linear com coeficientes constantes:

- A saída para uma dada entrada não é unicamente especificada.

Equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

- Se a informação auxiliar estiver em forma de N valores sequenciais da saída, os valores subsequentes poderão ser obtidos rearranjando-se a equação de diferenças como uma relação recursiva progressiva em n, e valores anteriores poderão ser obtidos rearranjando-se a equação de diferenças como uma relação recursiva regressiva em n.

- A linearidade, a invariância no tempo e a causalidade do sistema dependerão das condições auxiliares.

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- Especificamente, com entrada $x[n] = e^{j\omega n}$ para $-\infty < n < \infty$, pode-se mostrar facilmente que a saída correspondente de um sistema LIT com resposta ao impulso $h[n]$ é

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

- em que

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

- Em geral,

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}.$$

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- O conceito da resposta em frequência dos sistemas LIT é essencialmente o mesmo para sistemas de tempo contínuo e tempo discreto.

- Porém, surge uma distinção importante, porque a resposta em frequência dos sistemas LIT de tempo discreto é sempre uma função periódica da variável de frequência ω com período 2π.

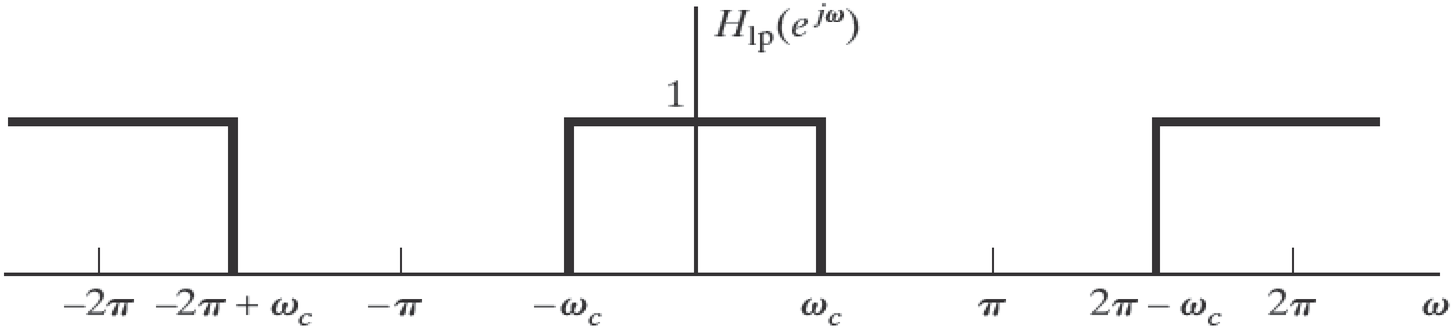
$$H\left(e^{j(\omega+2\pi r)}\right) = H\left(e^{j\omega}\right), \quad \text{para } r \text{ inteiro.}$$

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

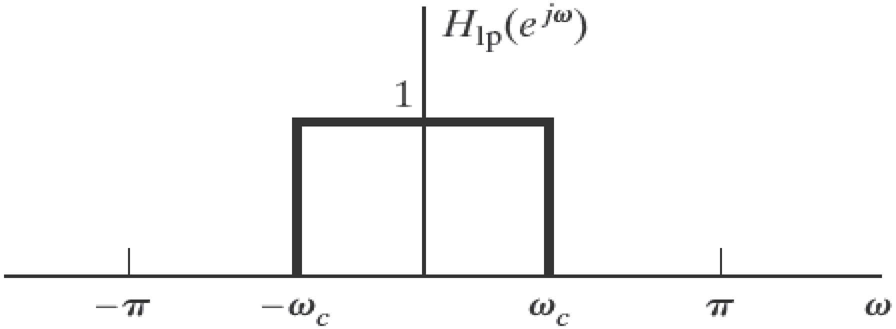
- Uma classe importante de sistemas LIT inclui aqueles sistemas para os quais a resposta em frequência é unitária em uma certa faixa de frequências e é nula nas frequências restantes, correspondendo aos filtros ideais seletivos em frequência.

- A figura a seguir mostra um filtro passa-baixas ideal mostrando (a) periodicidade da resposta em frequência e (b) um período da resposta em frequência periódica.

Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo



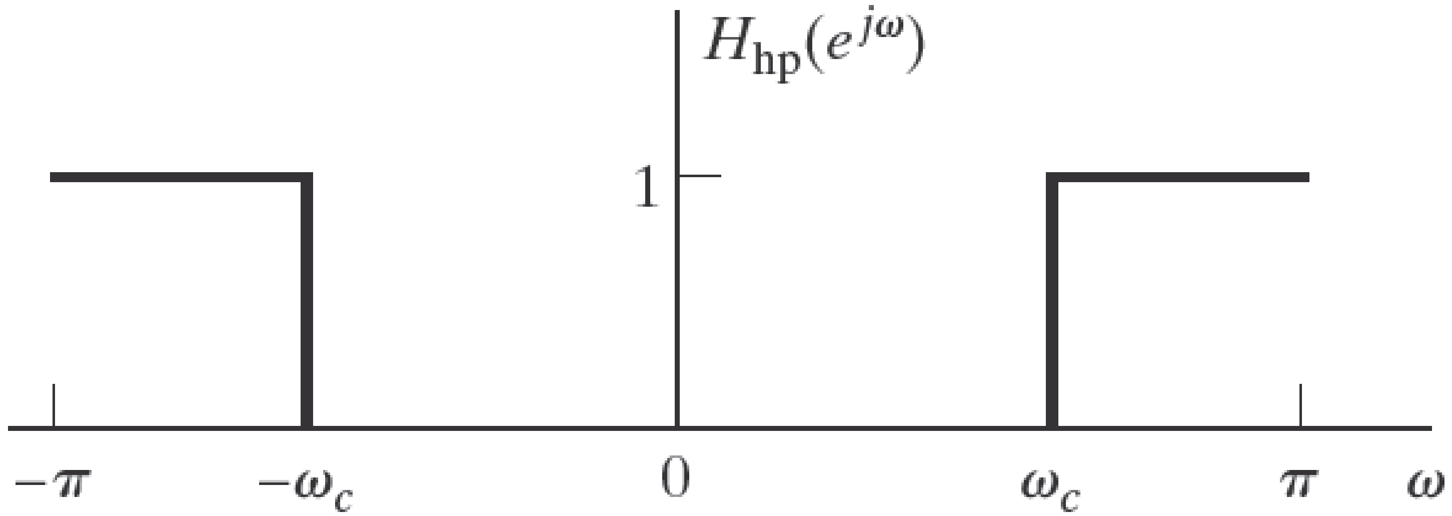
(a)



(b)

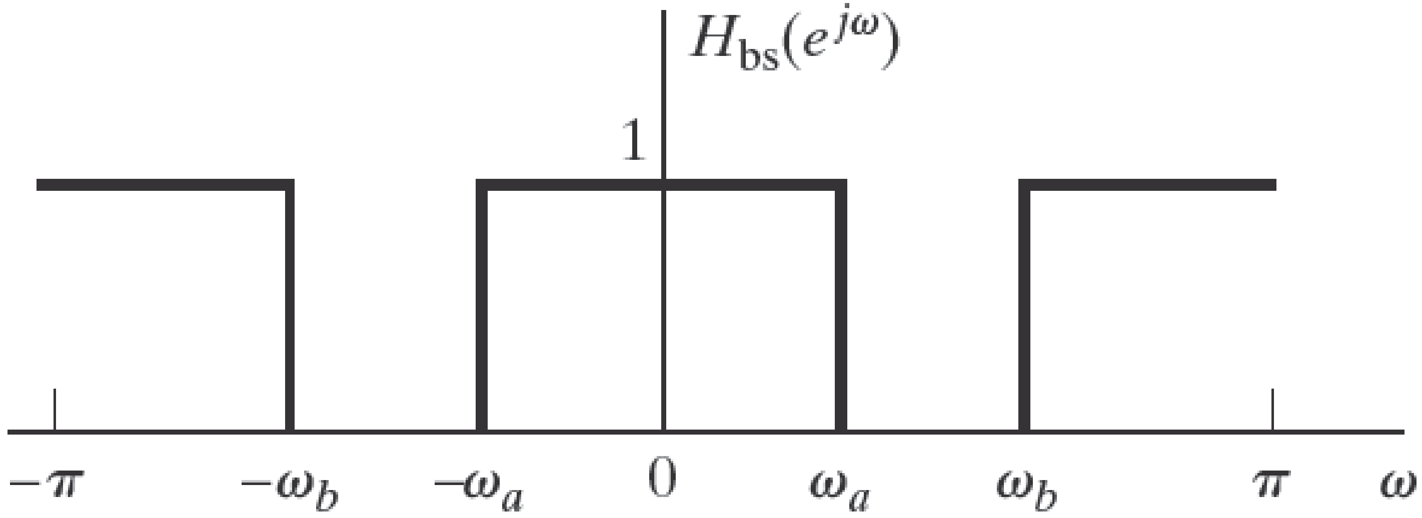
Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- Filtros seletivos em frequência ideais. Filtro passa-altas.



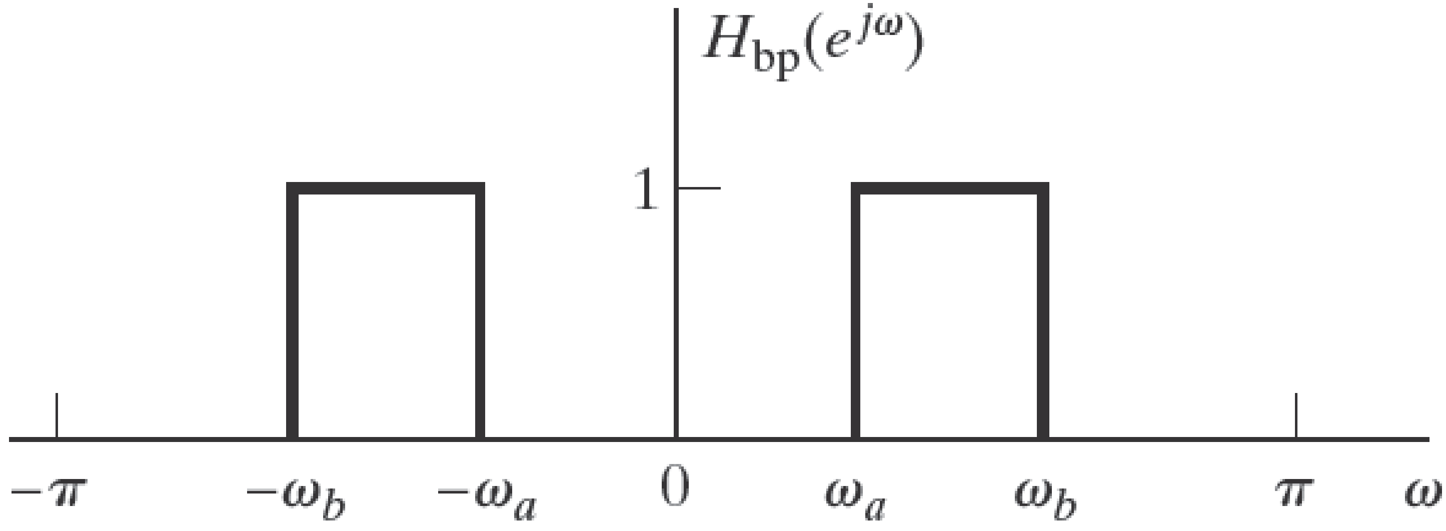
Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- Filtros seletivos em frequência ideais. Filtro rejeita-faixa.



Autofunções para sistemas lineares invariantes no tempo

- Filtros seletivos em frequência ideais. Filtro passa-banda.



Entradas exponenciais complexas abruptamente aplicadas

- Podemos ganhar conhecimento adicional sobre os sistemas LIT considerando entradas da forma $x[n] = e^{j\omega n}u[n]$

- Usando a soma de convolução, a saída correspondente de um sistema LIT causal com resposta a impulso *h*[*n*] é

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n}, & n \geq 0. \end{cases}$$

Entradas exponenciais complexas abruptamente aplicadas

- Se considerarmos a saída para *n* ≥ 0, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} \\
&\quad - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} \\
&= H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n}
\end{aligned}
$$

Entradas exponenciais complexas abruptamente aplicadas

- Sua magnitude é limitada da seguinte forma:

$$|y_t[n]| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]|$$

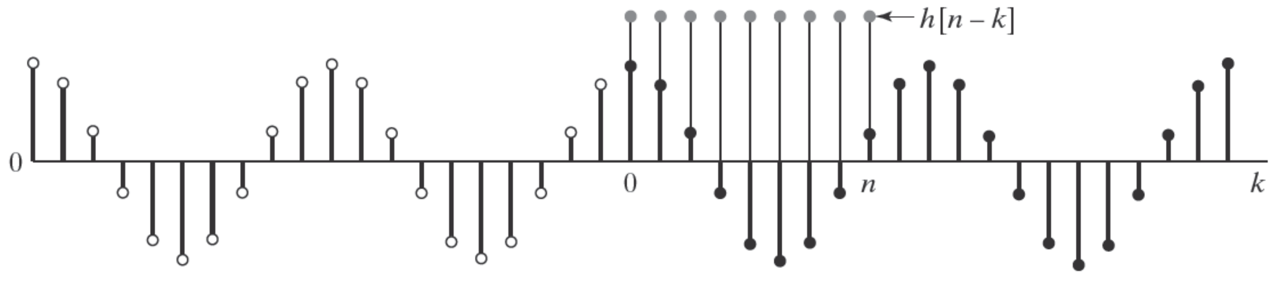
- Quando a resposta ao impulso tem duração infinita,

$$|y_t[n]| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} e^{j\omega n} \right|$$

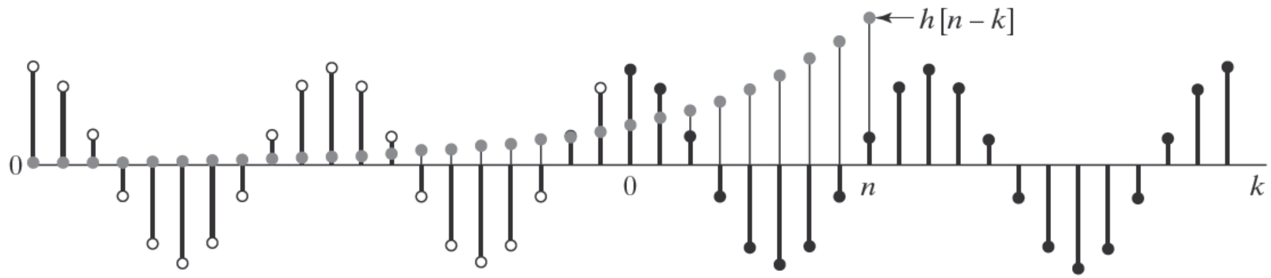
$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|$$

Entradas exponenciais complexas abruptamente aplicadas

Exemplo de uma parte real da entrada exponencial complexa abruptamente aplicada com (a) FIR e (b) IIR.



(a)



(b)

Representação de sequências por transformadas de Fourier

- Muitas sequências podem ser representadas por uma integral de Fourier na forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

- em que $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

- Assim como ocorre com a resposta em frequência, podemos expressar $X(e^{j\omega})$ na forma retangular, como

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

Representação de sequências por transformadas de Fourier

- ou na forma polar, como $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}$

- A resposta ao impulso pode ser obtida a partir da resposta em frequência aplicando a integral da transformada de Fourier inversa; isto é,

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

- A somabilidade em valor absoluto é uma condição suficiente para a existência de uma representação por transformada de Fourier.

Somabilidade em valor absoluto para uma exponencial abruptamente aplicada

- A somabilidade em valor absoluto é uma condição *suficiente* para a existência de uma representação por transformada de Fourier, e também garante a convergência uniforme.

- Algumas sequências não são somáveis em valor absoluto, mas são quadraticamente somáveis,ou seja,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

- Qualquer sequência $x[n]$ pode ser expressa como a soma de uma sequência simétrica conjugada e de uma sequência antissimétrica conjugada. Especificamente,

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

- sendo

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n]$$

- e

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n]$$

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

- Uma transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ pode ser decomposta em uma soma de uma função simétrica conjugada e uma função antissimétrica conjugada como

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

- em que

$$X_e(e^{j\omega}) = ½\,[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

- e

$$X_o(e^{j\omega}) = ½\,[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

Propriedades de simetria da transformada de Fourier

- Propriedades de simetria da transformada de Fourier.

	Sequência $x[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$
1.	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2.	$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3.	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (componente simétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
4.	$j\,\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (componente antissimétrica conjugada de $X(e^{j\omega})$)
5.	$x_e[n]$ (componente simétrica conjugada de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6.	$x_o[n]$ (componente antissimétrica conjugada de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\,\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
	As propriedades a seguir se aplicam somente quando $x[n]$ é real:	
7.	Qualquer $x[n]$ real	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (a transformada de Fourier é simétrica conjugada)
8.	Qualquer $x[n]$ real	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (a parte real é par)
9.	Qualquer $x[n]$ real	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (a parte imaginária é ímpar)
10.	Qualquer $x[n]$ real	$\|X(e^{j\omega})\| = \|X(e^{-j\omega})\|$ (a magnitude é par)
11.	Qualquer $x[n]$ real	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (a fase é ímpar)
12.	$x_e[n]$ (componente par de $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13.	$x_o[n]$ (componente ímpar de $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

Teoremas da transformada de Fourier

Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

Sequência $x[n]$ $y[n]$	Transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d um inteiro)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ se $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j \dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Teorema de Parseval:

8. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

9. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega$$

Teoremas da transformada de Fourier.

Teoremas da transformada de Fourier

Oppenheim • Schafer

Processamento em tempo discreto de sinais

3ª edição

Sequência	Transformada de Fourier
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (\|a\| < 1)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (\|a\| < 1)$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \operatorname{sen} \omega_p(n+1)}{\operatorname{sen} \omega_p} u[n] \quad (\|r\| < 1)$	$\frac{1}{1-2r\cos\omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\operatorname{sen} \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \|\omega\| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \|\omega\| \le \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$\frac{\operatorname{sen}[\omega(M+1)/2]}{\operatorname{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k) + \pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

Pares transformados de Fourier.

Sinais aleatórios de tempo discreto

- Um sinal aleatório é considerado como um membro de um conjunto de sinais de tempo discreto que é caracterizado por um conjunto de funções densidade de probabilidade.

- Muitas (mas não todas) das propriedades dos sinais aleatórios podem ser resumidas em termos de médias como as sequências de autocorrelação ou autocovariância, para as quais a transformada de Fourier frequentemente existe.

Sinais aleatórios de tempo discreto

- As médias dos processos de entrada e saída são, respectivamente,
$$m_{x_n} = \mathcal{E}\{\mathrm{x}_n\}, \quad m_{y_n} = \mathcal{E}\{\mathrm{y}_n\}$$

- Por exemplo, a equação acima será escrita de forma alternativa como
$$m_x[n] = \mathcal{E}\{x[n]\}, \quad m_y[n] = \mathcal{E}\{y[n]\}$$

- A média do processo de saída é
$$m_y[n] = \mathcal{E}\{y[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\mathcal{E}\{x[n-k]\}$$

- Como a entrada é estacionária,
$$m_y[n] = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]$$

Sinais aleatórios de tempo discreto

- Outro resultado importante diz respeito à correlação cruzada entre a entrada e a saída de um sistema LIT:

$$\begin{aligned}\phi_{yx}[m] &= \mathcal{E}\{x[n]y[n+m]\} \\ &= \mathcal{E}\left\{x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n+m-k]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\phi_{xx}[m-k].\end{aligned}$$

Sinais aleatórios de tempo discreto

Oppenheim • Schafer
Processamento em tempo discreto de sinais
3ª edição

- A transformada de Fourier é $\Phi_{yx}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega})$
- Fazendo a substituição, notamos que $\phi_{yx}[m] = \sigma_x^2 h[m]$
- De modo similar, o espectro de potência de uma entrada ruído branco é

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2, \quad -\pi \le \omega \le \pi$$

- Assim, $\Phi_{yx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 H(e^{j\omega})$