Seja um sistema com resposta ao impulso h[n], com entrada x[n] e saída y[n]

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \cdot H(e^{j\Omega}) \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}$$

$$\boxed{H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}}$$

Sistema Inverso

$$x[n] \longrightarrow \boxed{H_1} \xrightarrow{g[n]} \boxed{H_2} \longrightarrow x[n]$$

$$g[n] = x[n] * h_1[n]$$

$$x[n] = g[n] * h_2[n]$$

$$x[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] \quad \longrightarrow \quad X(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \cdot \underbrace{H_1(e^{j\Omega}) \cdot H_2(e^{j\Omega})}_{1}$$

Logo $\boxed{H_2(e^{j\Omega}) = \dfrac{1}{H_1(e^{j\Omega})}}$

Resposta em frequência e equação de diferenças

Seja um sistema representado pela equação de diferenças:

$$b_0 . x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M . x[n-M] = y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N . y[n-N]$$

$$b_0 . X(e^{j\Omega}) + b_1 . e^{-j\Omega} . X(e^{j\Omega}) + \cdots + b_M e^{-j\Omega M} . X(e^{j\Omega}) = Y(e^{j\Omega}) + a_1 . e^{-j\Omega} . Y(e^{j\Omega}) + \cdots + a_N e^{-j\Omega N} . Y(e^{j\Omega})$$

$$X(e^{j\Omega}) \left(b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + \cdots + b_M e^{-j\Omega M} \right) = Y(e^{j\Omega}) \left(1 + a_1 e^{-j\Omega} + \cdots + a_N . e^{-j\Omega N} \right)$$

$$\boxed{\frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + \cdots + b_M e^{-j\Omega M}}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + \cdots + a_N e^{-j\Omega N}} = H(e^{j\Omega})}$$

Seja um sistema estável com entrada x[n] e saída y[n]. Determine sua resposta ao impulso h[n].

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n] \quad , \quad y[n] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n]$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} \qquad X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \, , \quad Y(e^{j\Omega}) = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$\frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}} = H(e^{j\Omega})$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{4} + \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}} - \frac{\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$\boxed{h[n] = \frac{1}{4}\delta[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]}$$

Seja um sistema estável com entrada x[n] e saída y[n]. Determine sua resposta ao impulso h[n].

$$x[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot u[n], \quad y[n] = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot u[n] - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot u[n-1]$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} \qquad X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-\frac{2}{3}e^{-j\Omega}}, \quad Y(e^{j\Omega}) = \frac{2}{1-\frac{2}{3}e^{-j\Omega}} - \frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{2}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$\frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \left(\frac{2 - e^{-j\Omega}}{\cancel{1-\frac{2}{3}e^{-j\Omega}}}\right)\left(\cancel{1-\frac{2}{3}e^{-j\Omega}}\right) = 2 - e^{-j\Omega} = H(e^{j\Omega})$$

$$H(e^{j\Omega}) = 2 - e^{-j\Omega}$$

EQ. DE DIFERENÇA DO SISTEMA

$$h[n] = 2\cdot\delta[n] - \delta[n-1] \qquad 2\cdot x[n] - x[n-1] = y[n]$$

Determine a resposta ao impulso do sistema cuja a equação de diferença é:
x[n]-2.x[n-1] = y[n]-1/4. y[n-1] - 1/8 .y[n-2]

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1 - 2e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j\Omega 2}}$$

$$d_1 . d_2 = -\frac{1}{8}$$

$$d_1 + d_2 = \frac{1}{4}$$

$$d_1 = 1/2 \quad , \quad d_2 = -\frac{1}{4}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$A = \frac{1 - 2e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}\Bigg|_{e^{j\Omega} = \frac{1}{2}} = \frac{1 - 2.2}{1 + \frac{1}{4}.2} = \frac{-3}{3/2} = -2$$

$$B = \frac{1 - 2e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\Bigg|_{e^{j\Omega} = -\frac{1}{4}} = \frac{1 + 2.4}{1 + \frac{1}{2}.4} = \frac{9}{3} = 3$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{-2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{3}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$\boxed{h[n] = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n . u[n] + 3.\left(-\frac{1}{4}\right)^n . u[n]}$$

Determine a equação de diferença que descreve o sistema cuja a resposta em frequência é:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} = \frac{2 - e^{-j\Omega} + 1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)} =$$

$$= \frac{3 - \frac{4}{3}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{5}{6}e^{-j\Omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\Omega}}$$

EQ. DE DIFERENSA: $\boxed{3 \cdot x[n] - \frac{4}{3}x[n-1] = y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2]}$

Determine a resposta ao impulso do sistema cuja a equação de diferença é:

y[n] - 1/4 .y[n-1] - 1/8. y[n-2] = 3.x[n] -3/4. x[n-1]

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{3 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$A = \left.\frac{3 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}\right|_{e^{j\Omega} = \frac{1}{2}} = \frac{3 - \frac{3}{4}\cdot 2}{1 + \frac{1}{4}\cdot 2} = \frac{3/2}{3/2} = 1$$

$$B = \left.\frac{3 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\right|_{e^{j\Omega} = -\frac{1}{4}} = \frac{3 + \frac{3}{4}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}\cdot 4} = \frac{6}{3} = 2$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{2}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \quad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Determine a equação de diferença que representa o sistema cuja a resposta ao impulso é:

$$h[n] = \alpha^n \cdot u[n] \quad \text{com} \quad |\alpha| < 1$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

EQ. DE DIFERENÇA

$$\boxed{x[n] = y[n] - \alpha \cdot y[n-1]}$$

Determine a equação de diferença que representa o sistema cuja a resposta ao impulso é:

$$h[n] = \delta[n] + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]$$

$$H(e^{j\Omega}) = 1 + \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} =$$

$$= \frac{1-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega} + 2 + e^{-j\Omega} + 1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}} =$$

$$= \frac{4+\frac{1}{2}e^{-j\Omega} - \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}} = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} \Rightarrow Y(e^{j\Omega})\left(1-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}\right) = X(e^{j\Omega})\left(4+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}\right)$$

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = 4\cdot x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] - \frac{1}{4}x[n-2]$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{-j2\Omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j3\Omega}}$$

EQ. DE DIFERENÇA

$$x[n-2] = y[n] - \frac{1}{2} \cdot y[n-3]$$