INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CEARÁ

Tangente de Perdas e Classificação de Meios

Prof. Fábio Alencar Mendonça

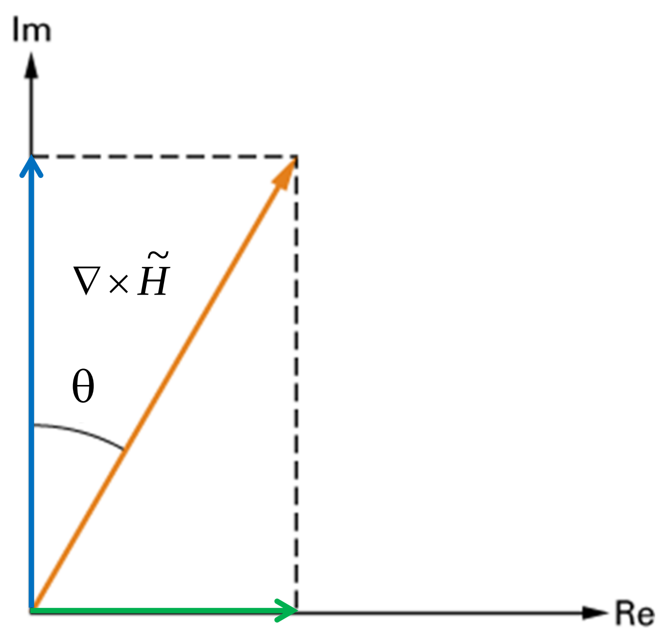
Tangente de Perdas

A equação de Ampère-Maxwell na forma fasorial é dada por

$$\nabla \times \vec{\tilde{H}} = \underbrace{\sigma \vec{\tilde{E}}}_{\vec{\tilde{J}}_{COND.}} + \underbrace{j\omega\varepsilon \vec{\tilde{E}}}_{\vec{\tilde{J}}_{DESL.}} = \vec{\tilde{J}}_{COND.} + \vec{\tilde{J}}_{DESL.}$$

Graficamente:

$$\vec{\tilde{J}}_{DESL.} = j\omega\varepsilon\vec{\tilde{E}}$$



$$\vec{\tilde{J}}_{COND.} = \sigma\vec{\tilde{E}}$$

$$tg\,\theta = \left| \frac{\tilde{J}_{COND.}}{\tilde{J}_{DESL.}} \right| = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

Tangente de Perdas

A razão entre a magnitude do vetor densidade corrente da corrente de condução e a magnitude do vetor densidade de corrente de deslocamento é denominada ***tangente de perdas***, sendo dada por

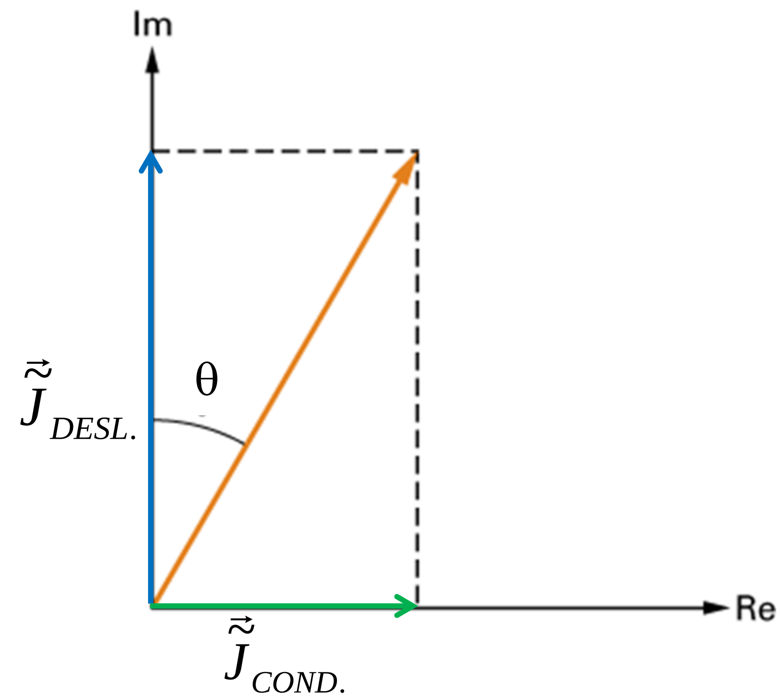
$$tg\theta = \left|\frac{\tilde{J}_{COND.}}{\tilde{J}_{DESL.}}\right| = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \;\; \Rightarrow \theta = tg^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

A tangente de perdas é uma medida da qualidade de um dielétrico.

Tangente de Perdas

Lembrando que a fase da impedância intrínseca do meio é dada por

$$\theta_\eta = \frac{1}{2} tg^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \Rightarrow \theta = 2\theta_\eta$$



Note que:

a) Se $\theta \to 0 \Rightarrow J_{CONDUÇÃO} << J_{DESLOCAMENTO}$ ($\theta_\eta \to 0$), ou seja, o meio tende a um comportamento dielétrico.

b) Se $\theta \to \pi/2 \Rightarrow J_{CONDUÇÃO} >> J_{DESLOCAMENTO}$ ($\theta_\eta \to \pi/4$), ou seja, o meio tende a um comportamento condutor.

Classificação de Meios

Uma possível classificação de um meio pode ser feita considerando os valores assumidos pela tangente de perdas ($\sigma/\omega\varepsilon$):

- **$0<\sigma/\omega\varepsilon<10^{-2}$: dielétrico imperfeito**

- **$10^{-2} \leq\sigma/\omega\varepsilon\leq 10^{2}$: meio genérico com perdas (ou quase condutor)**

- **$\sigma/\omega\varepsilon>10^{2}$: bom condutor**

Dielétricos Imperfeitos

$$\sigma/\omega\varepsilon<10^{-2}$$

Dielétrico Imperfeito

Um meio classificado como dielétrico imperfeito é aquele que possui tangente de perdas pequena, menor que 10^{-2}, ou seja, $\sigma/\omega\varepsilon \ll 1$.

Nesse caso específico, as expressões dos parâmetros de onda considerando uma aproximação de um expansão de uma série binomial podem ser aproximadas por:

$$\gamma = \alpha + \beta j = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2}$$

$$\approx j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1 - j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) = \underbrace{\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}_{\alpha} + \underbrace{j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}_{\beta}$$

Dielétricos Imperfeitos

Portanto, para meios dielétricos imperfeitos:

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2}\eta_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\varepsilon_R}} \qquad\qquad \beta \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_R\varepsilon_R}$$

No caso da impedância intrínseca, pode-se verificar que:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \Rightarrow |\eta| \approx \eta_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\varepsilon_R}} \quad e \quad \theta_\eta \approx 0$$

Dielétricos Imperfeitos

Ou seja, dielétricos imperfeitos possuem, aproximadamente, a mesma constante de fase e impedância intrínseca de dielétricos perfeitos sem perdas. No entanto, atenuação não nula.

Dielétrico Imperfeito

Nota:

Para uma expansão em uma série binominal dada por

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots$$

Quando x<<1:

$$(1+x)^n \cong 1 + nx$$

Dielétricos Imperfeitos

Exemplo:

Considere que o solo seco apresenta ε_R=3, μ_R=1 e σ=10^{-4} S/m. A faixa de frequência que ele se comporta como um dielétrico imperfeito é:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\pi f \varepsilon_R \varepsilon_0} < 10^{-2} \Rightarrow f > \frac{1}{10^{-2}} \frac{\sigma}{2\pi \varepsilon_R \varepsilon_0} \Rightarrow f > 60MHz$$

Assim, para uma OEM com f=1GHz:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\pi f \varepsilon_R \varepsilon_0} = 5{,}99.10^{-4} < 10^{-2}$$

Dielétricos Imperfeitos

Solo seco: ε_R=3, μ_R=1, σ=10^{-4} S/m e f=1GHz

Expressões exatas:

$$\alpha = 1{,}08753 \times 10^{-2}\ \text{Np/m}$$

$$\beta = 36{,}3011\,\text{rad/m}$$

$$\eta = 217{,}51 + j0{,}06516 \Rightarrow$$

$$|\eta| = 217{,}5\Omega \quad e \quad \theta_\eta = 0{,}0172^{\text{o}}$$

Expressões aproximadas:

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2}\eta_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\varepsilon_R}} = 1{,}09 \times 10^{-2}\ \text{Np/m}$$

$$\beta \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_R \varepsilon_R} = 36{,}40\,\text{rad/m}$$

$$|\eta| \approx \eta_0\sqrt{\frac{\mu_R}{\varepsilon_R}} = 217{,}51\Omega \quad e \quad \theta_\eta \approx 0$$

Bom Condutor

$$\sigma/\omega\varepsilon > 10^2$$

Bons Condutores

Um meio classificado como bom condutor é aquele que possui tangente de perdas alta, maior que 10^2, ou seja, $\sigma/\omega\varepsilon$>>1. Nesse caso específico, teremos:

$$\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\pm 1\right)\approx\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

Assim, pode-se verificar que α, β e η podem ser aproximadas por:

$$\alpha \overset{(N)}{=} \beta \cong \sqrt{\pi f \mu_R \mu_0 \sigma} \qquad |\eta| \cong \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{2} \qquad \theta_\eta \cong \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad} = 45^{\circ}$$

Por exemplo, para o cobre ($\sigma = 5{,}8\times10^7$ S/m, $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$) em f = 100 MHz tem $\eta\approx3{,}7$ mΩ.

Bons Condutores

Exemplo:

Considere que o cobre apresenta $\varepsilon_R=1$, $\mu_R=1$ e $\sigma=5{,}8\text{x}10^7$ S/m. A faixa de frequência que ele se comporta como um bom condutor é:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\pi f \varepsilon_R \varepsilon_0} > 10^2 \Rightarrow f < \frac{1}{10^2}\frac{\sigma}{2\pi \varepsilon_R \varepsilon_0} \Rightarrow f < 1{,}04 \times 10^{16} Hz$$

Assim, para uma OEM com f=1GHz:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\pi f \varepsilon_R \varepsilon_0} = 1{,}04256 \times 10^{9} > 10^2$$

Bons Condutores

Cobre: ε_R=1, μ_R=1 , σ=5,8x10^7 S/m e f=1GHz

Expressões exatas:

$$\alpha = 4{,}78513 \times 10^5 \text{ Np/m}$$

$$\beta = 4{,}78513 \times 10^5 \text{ rad/m}$$

$$\eta = 0{,}00825 + j0{,}00825 \Rightarrow$$

$$|\eta| = 11{,}668 \times 10^{-3} \Omega \quad e \quad \theta_\eta = 45^{\text{o}}$$

Expressões aproximadas:

$$\alpha \overset{(N)}{=} \beta \cong \sqrt{\pi f \mu_R \mu_0 \sigma} = 4{,}7851 \times 10^5$$

$$|\eta| \cong \frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{2} = 11{,}7 \times 10^{-3} \Omega$$

$$\theta_\eta \cong \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^{\text{o}}$$

Meio Geral com Perdas

Para uma situação em que

$$10^{-2} \leq \sigma/\omega\varepsilon \leq 10^{2}$$

devem ser consideradas as expressões gerais exatas e o meio é classificado com sendo um meio geral com perdas.

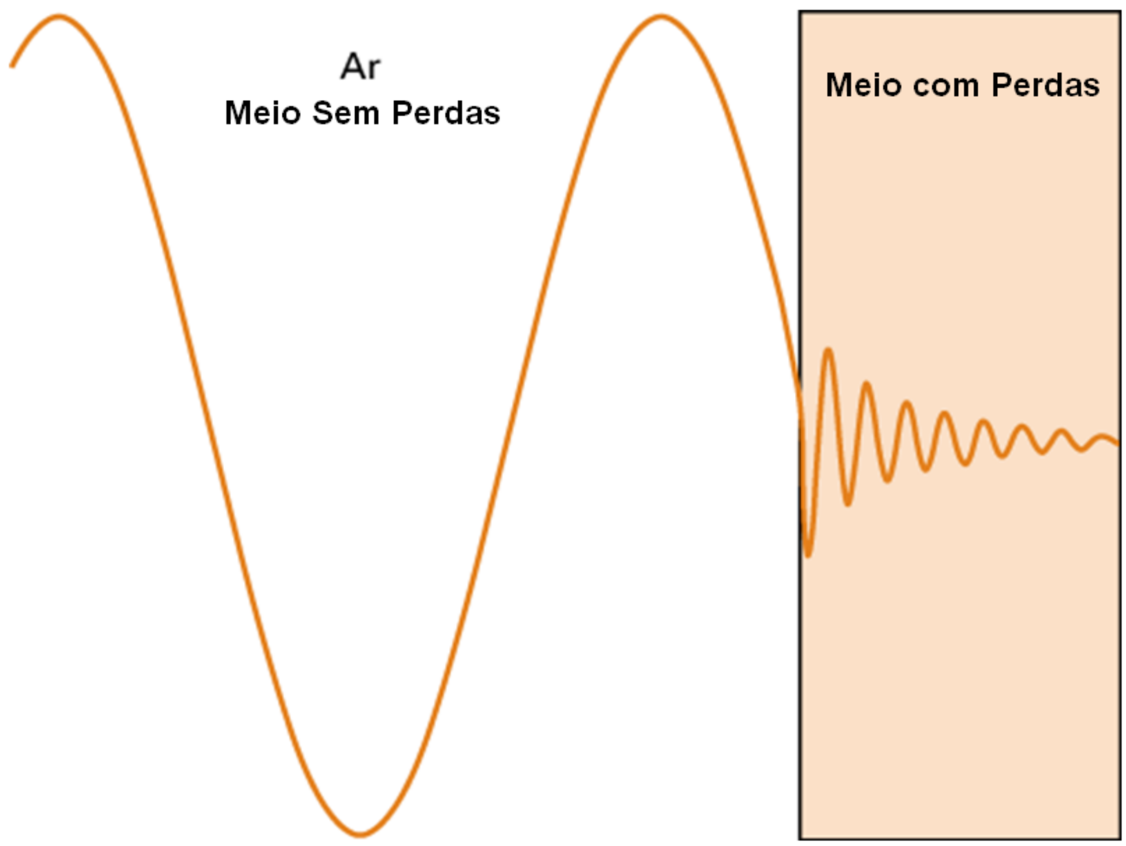
INSTITUTO
FEDERAL
Ceará

INSTITUTO
FEDERAL
Ceará

Profundidade Pelicular

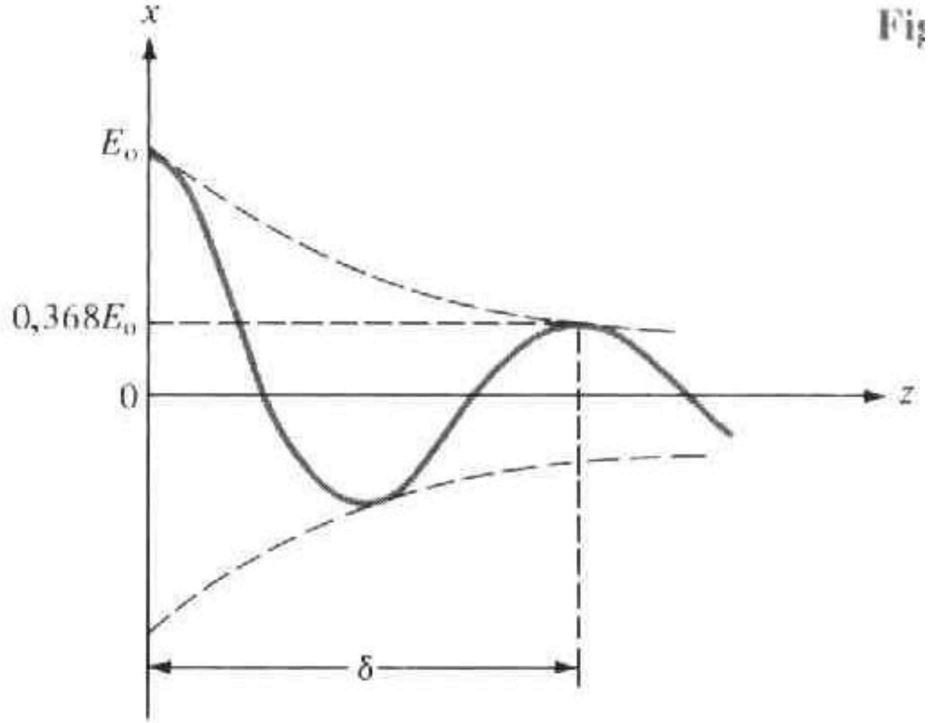
Profundidade pelicular

- Comparativo da propagação de uma OEM em um meio sem perdas e com perdas:

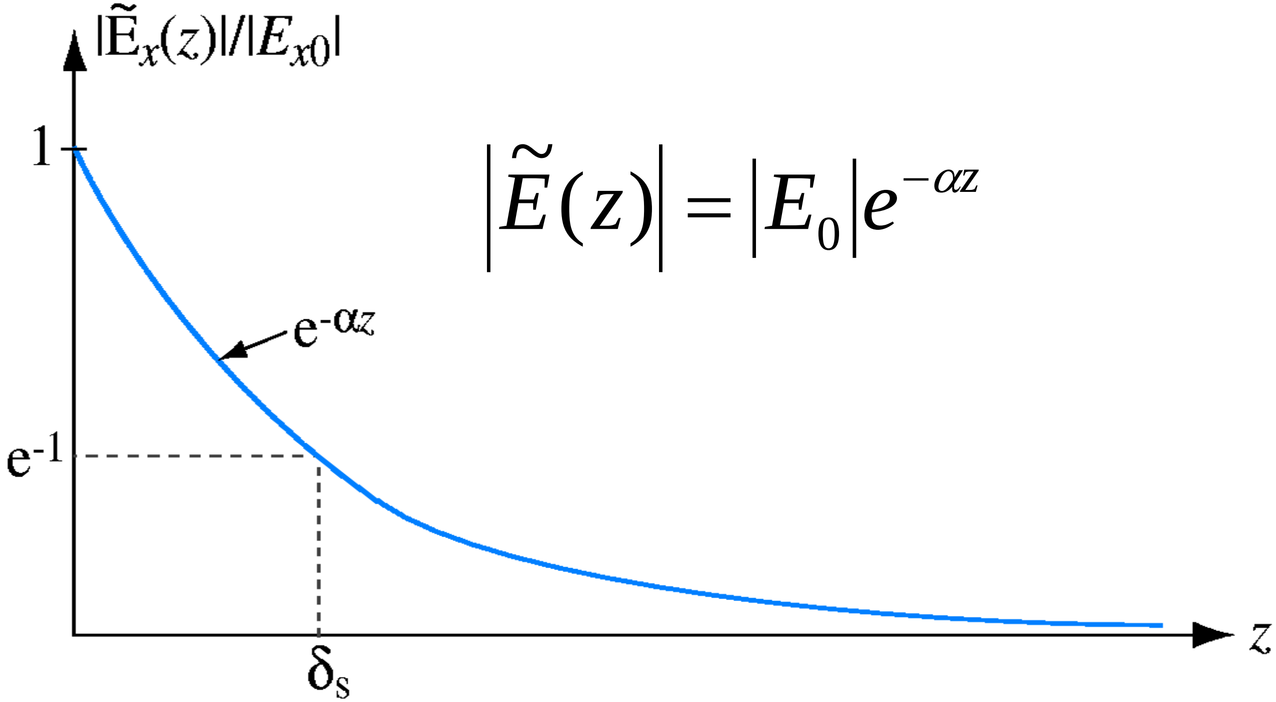


Profundidade Pelicular

- **Profundidade de penetração pelicular (δ):** é definida como sendo a distância que uma OEM percorre até que sua amplitude do campo elétrico decresça por um fator $\mathbf{e^{-1}}$, ou seja, seja reduzida de $\mathbf{E_0}$ na origem para $\mathbf{E_0}/e$ ou $\approx\mathbf{37\%E_0}$. Portanto, representa uma medida da profundidade de penetração de um OEM em um meio.



Profundidade Pelicular



$$\left|\tilde{E}(z)\right| = \left|E_0\right| e^{-\alpha z}$$

$$\left|E(z=\delta)\right| = \left|E_0\right|.e^{-\alpha\delta} = \left|E_0\right|.e^{-1} \Rightarrow \alpha\delta = 1 \Rightarrow$$

Profundidade pelicular: $\boxed{\delta = \dfrac{1}{\alpha} \quad [\mathrm{m}]}$

Profundidade Pelicular

- Para um dielétrico perfeito com $\sigma=0$ e $\alpha=0$. Assim $\delta\rightarrow\infty$.
- Para um condutor perfeito com $\sigma=\infty$ e $\alpha=\infty$. Assim $\delta=0$.

Profundidade Pelicular

profundidade pelicular para bons condutores

$$\boxed{\delta \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \mu f \sigma}},}$$

profundidade pelicular para o cobre

$$\boxed{\delta_{\mathrm{Cu}} \approx \frac{66}{\sqrt{f}}\ \mathrm{mm} \quad (f \text{ em Hz}),}$$

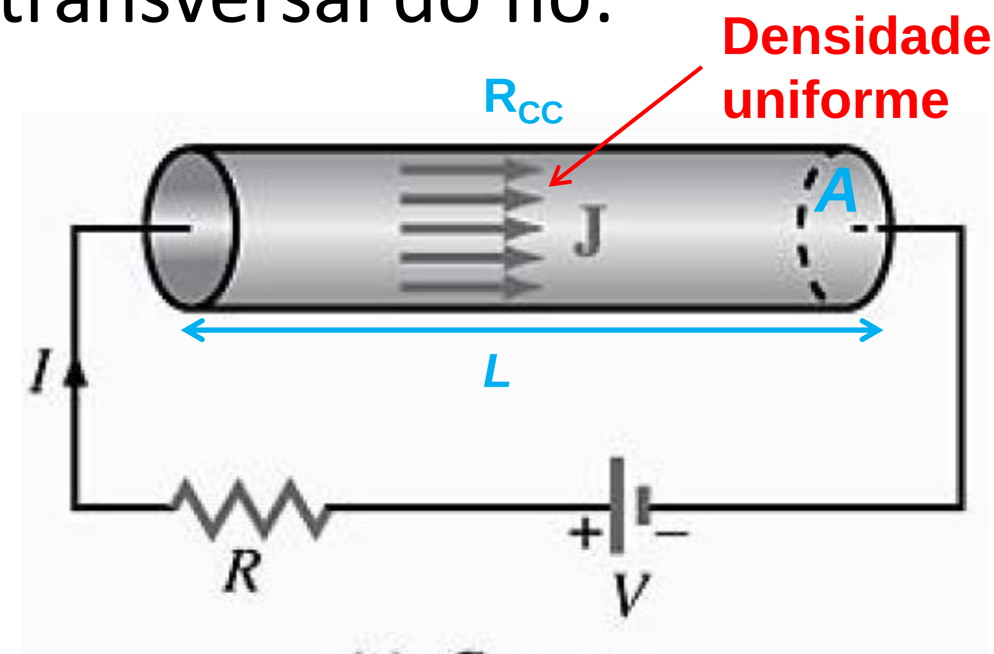
Tabela 9.2. Profundidade pelicular para alguns materiais, δ (m), em frequências diferentes, f

Material	f **= 60 Hz**	**1 kHz**	**100 kHz**	**1 MHz**	**100 MHz**	**1 GHz**
Cobre	$8{,}61 \times 10^{-3}$	$2{,}11 \times 10^{-3}$	$2{,}11 \times 10^{-4}$	$6{,}67 \times 10^{-5}$	$6{,}67 \times 10^{-6}$	$2{,}11 \times 10^{-6}$
Ferro	$6{,}5 \times 10^{-4}$	$1{,}6 \times 10^{-4}$	$1{,}6 \times 10^{-5}$	$5{,}03 \times 10^{-6}$	$5{,}03 \times 10^{-7}$	$1{,}6 \times 10^{-7}$
Água do mar	32,5	7,96	0,796	0,252	$2{,}66 \times 10^{-2}$	$1{,}28 \times 10^{-2}$
Terreno rural	649,7	159,2	15,92	5,233	1,99	1,986

Condução de Corrente em um Bom Condutor – Efeito Pelicular

Efeito pelicular

Quando uma tensão CC é aplicada à extremidades de um fio condutor, a densidade de corrente **J** que percorre o fio tem uma densidade uniforme ao longo da seção transversal do fio:



(a) Caso cc

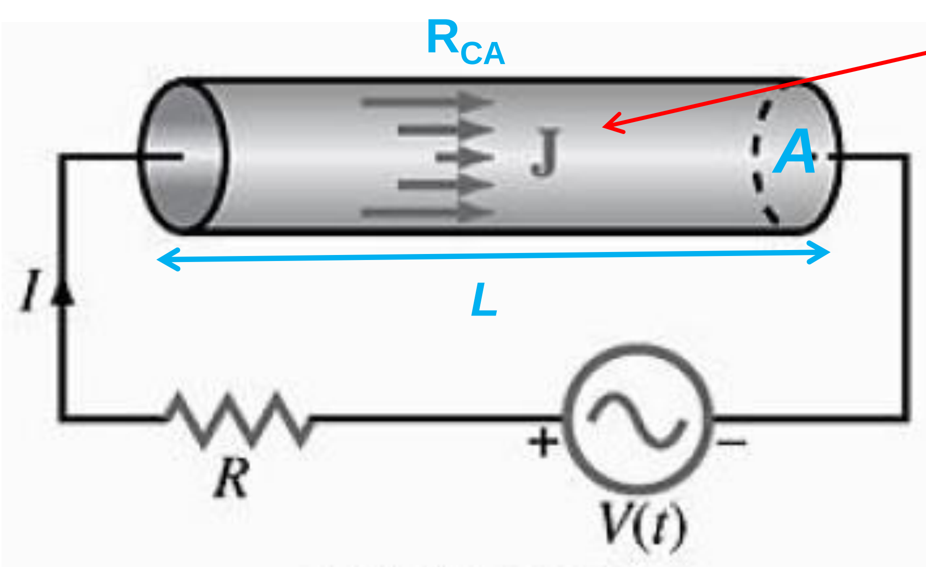
Resistência CC

$$R_{CC} = \frac{L}{\sigma A}$$

L = comprimento do fio
A = área da seção transversal
σ = condutividade elétrica do material

Efeito pelicular

No caso de uma tensão CA, não é o que acontece. A densidade de corrente **J,** variante no tempo, é máxima ao longo de seu perímetro e diminui exponencialmente como uma função da distância em direção ao eixo. Esse fenômeno é chamado de **efeito pelicular**:



(b) Caso ca

Densidade de corrente não uniforme

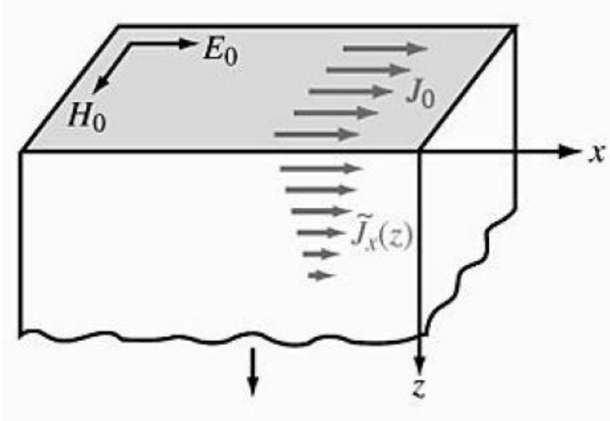
Resistência CA

$$R_{CA}?$$

Cálculo da Resistência CA

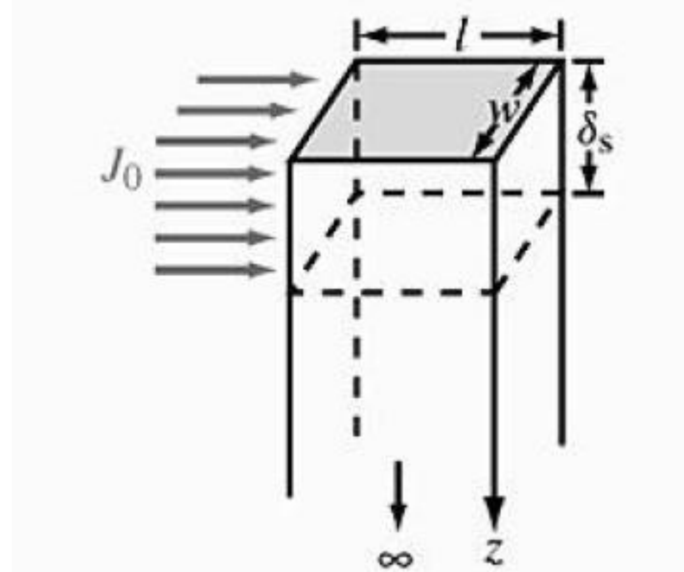
Efeito pelicular

A resistência CA é obtida considerando a densidade de corrente uniforme numa espessura correspondente a uma profundidade pelicular (δ) no condutor.



(a) Decaimento exponencial de $\widetilde{J}_x(z)$

$\equiv$



(b) J_0 equivalente ao longo de uma profundidade δ_s

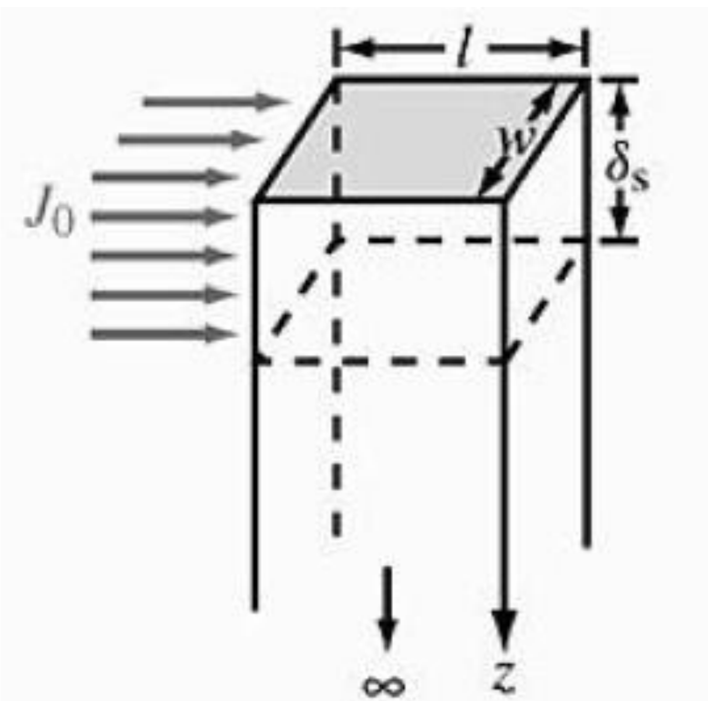
$$\widetilde{\mathbf{H}}(z) = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_0}{\eta_c} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}(z) = \hat{\mathbf{x}} E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$\widetilde{J}_x(z) = \sigma E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = J_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

Efeito pelicular

Portanto, por exemplo, a resistência CA para uma placa condutora de comprimento l e largura w é definida em termos da profundidade pelicular como sendo:



$$R_{CA} = \frac{l}{\sigma\delta w} = R_S \frac{l}{w}$$

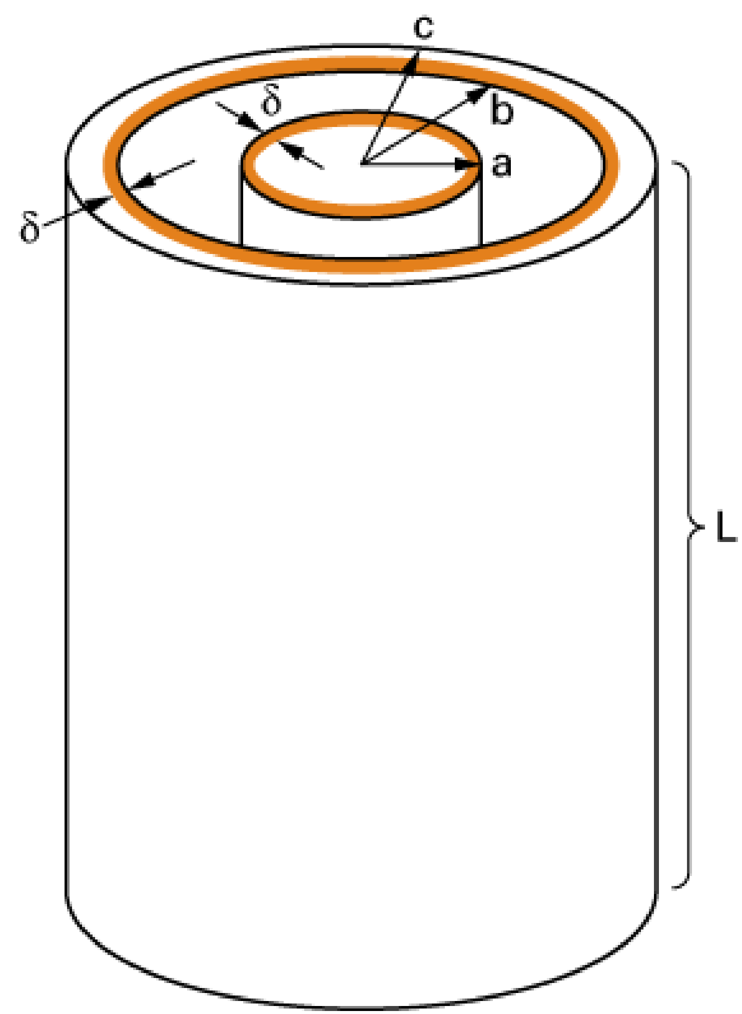
em que **R_S=1/σδ** (Ω/m²) é a **resistência superficial**. Para um bom condutor:

$$R_S = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

Efeito pelicular

Exemplo:

O conceito de resistência CC e CA (pelicular) pode ser usado para obter uma expressão da resistência distribuída de um cabo coaxial mostrado na figura ao lado. Primeiro, deve-se admitir que a profundidade pelicular seja consideravelmente menor que a espessura dos condutores interno e externo do cabo coaxial. Assim, a resistência para um comprimento L de cabo coaxial é a combinação série da resistência (CC ou CA) do condutor interno, $\mathbf{R_{int(CC/CA)}}$, e a resistência do condutor externo, $\mathbf{R_{ext(CC/CA)}}$, ou seja:



$$R_{Total\,(CC/CA)} = R_{int(CC/CA)} + R_{ext(CC/CA)}$$

Efeito pelicular

Expressão para $R_{total(CA)}$ do cabo coaxial:

$$R_{Total\ (CA)} = R_{int(CA)} + R_{ext(CA)}$$

Resistência CA do condutor interno: $R_{int(CA)} = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{\delta 2\pi a}$

Resistência CA do condutor externo: $R_{ext(CA)} = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{\delta 2\pi b}$

$$R_{Total\ (CA)} = R_{int(CA)} + R_{ext(CA)} = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{\delta 2\pi a} + \frac{1}{\sigma}\frac{L}{\delta 2\pi b} = \frac{L}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{1}{\sigma\delta} \Rightarrow$$

$$R'_{CA} = \frac{R_{Total\ (CA)}}{L} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

Efeito pelicular

Expressão para $R_{total(CC)}$ do cabo coaxial:

$$R_{Total\,(CC)} = R_{int(CC)} + R_{ext(CC)}$$

Resistência CC do condutor interno: $R_{int(CC)} = \frac{L}{\sigma S_a} = \frac{L}{\sigma \pi a^2}$

Resistência CC do condutor externo: $R_{ext(CC)} = \frac{L}{\sigma S_b} = \frac{L}{\sigma \pi [c^2 - b^2]}$

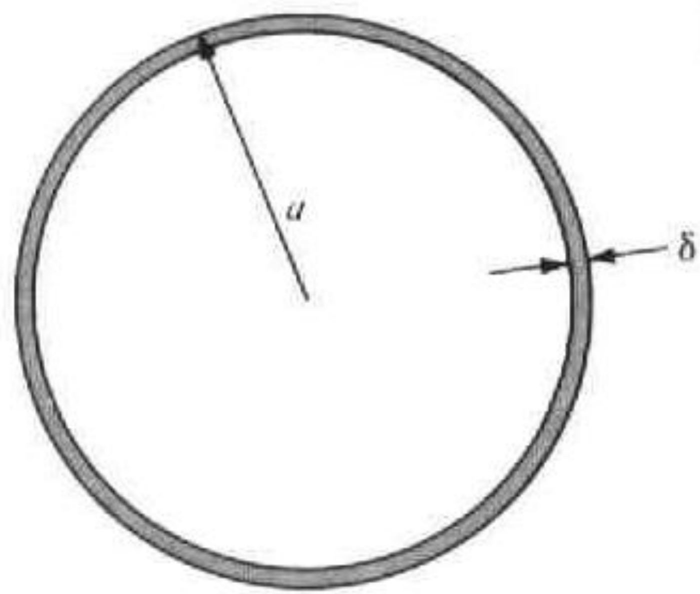
$$R_{Total\,(CC)} = R_{int(CC)} + R_{ext(CC)} = \frac{L}{\sigma \pi a^2} + \frac{L}{\sigma \pi [c^2 - b^2]} \Rightarrow$$

$$R'_{CC} = \frac{R_{Total\,(CC)}}{L} = \frac{1}{\sigma \pi}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{[c^2 - b^2]}\right)$$

Efeito pelicular

Em frequências muito altas a maior parte da corrente percorre uma fina camada externa do fio. Se o material fosse um condutor perfeito, a corrente percorre completamente a superfície do fio.

Corte transversal de um fio condutor com raio a



Profundidade pelicular em altas freqüências, $\delta \ll a$.

Efeito pelicular

O efeito pelicular aparece de diferentes formas em várias situações. Por exemplo:

- Atenuação em guias de ondas
- Blindagem eletromagnética
- Resistência efetiva ou CA em linhas de transmissão

INSTITUTO
FEDERAL
Ceará