

Modélisation Numérique de la Dynamique des Gaz Compressibles

Approche par Solveurs de Riemann

ROUSSELLE Carla

CHOQUERT Ronan

Dirigé par : VILAR François

Université de Montpellier

M1 MANU / 2025



Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 1 |
| 2 | Modèle d'Euler | 2 |
| 2.1 | Définition du modèle d'Euler | 2 |
| 2.2 | Forme conservative | 3 |
| 3 | Méthode des Volumes Finis | 6 |
| 3.1 | Principe de la méthode | 6 |
| 4 | Problème de Riemann | 8 |
| 4.1 | Définition d'un problème de Riemann | 8 |
| 5 | Schéma de Godunov | 11 |
| 5.1 | Définition du schéma de Godunov unidimensionnel | 11 |
| 5.2 | Limites du schéma | 12 |
| 6 | Solveurs approchés de Riemann | 13 |
| 6.1 | Solveur Rusanov | 14 |
| 6.2 | Cas supersonique et subsonique | 16 |
| 6.3 | Solveur HLL | 17 |
| 6.4 | Solveur HLLC | 19 |
| 6.5 | Estimations de la vitesse des ondes acoustiques | 23 |
| 6.6 | Solveur Roe | 25 |
| 7 | Positivité des méthodes | 32 |
| 7.1 | Positivité du schéma Rusanov | 32 |
| 7.2 | Positivité du schéma HLL | 33 |
| 7.3 | Positivité du schéma HLLC | 33 |
| 7.4 | Positivité de Roe et des schémas dérivés du problème de Riemann linéarisé | 35 |
| 8 | Résultats Numériques | 39 |
| 9 | Conclusion | 51 |

1 Introduction

La modélisation numérique des écoulements de gaz compressibles joue un rôle majeur dans de nombreuses applications en ingénierie et en physique. On la retrouve dans le domaine aérospatial et aéronautique, par exemple dans l'étude des écoulements supersoniques ou hypersoniques autour des ailes d'avion ou des nez de fusée. Ce type de phénomène doit être étudié pour en comprendre les mécanismes.

Dans une première partie, nous verrons que pour ces écoulements nous utiliserons les équations d'Euler, un système hyperbolique de lois de conservation qui modélise le comportement d'un fluide.

Ensuite, nous montrerons que pour résoudre ces équations numériquement, les méthodes de volumes finis se sont montrées les plus efficaces en raison de leur robustesse et de leur fiabilité. Dans ce projet, nous nous intéressons surtout aux solveurs approchés de Riemann, particulièrement ceux proposés par Rusanov, Harten, Lax et van Leer (HLL), ainsi qu'à la version améliorée HLLC (Harten–Lax–van Leer–Contact) et au solveur de Roe. Ces méthodes permettent de capturer les ondes de choc et les discontinuités de contact tout en respectant certaines propriétés telles que la conservation des grandeurs physiques et la positivité.

Nous verrons entre autres que le schéma de Roe ne garantit pas toujours cette positivité. On regardera le rôle important du choix des vitesses d'ondes dans ces solveurs, qui permet d'assurer la stabilité numérique, la précision des résultats et le respect des conditions d'entropie.

Enfin, une grande partie du projet sera consacrée à l'implémentation et à l'analyse de ces méthodes dans le cadre de cas tests classiques, comme le problème de Sod. L'objectif est d'évaluer les performances numériques des différents solveurs, de mettre en évidence leurs points forts mais aussi leurs limites, et de mieux comprendre les enjeux liés à la modélisation des écoulements compressibles.

2 Modèle d'Euler

2.1 Définition du modèle d'Euler

Le modèle d'Euler représente la description mathématique des écoulements de gaz compressibles dans le cadre de la mécanique des fluides. Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) exprimant les lois fondamentales de la physique sous forme conservative. Ces équations nous donnent la conservation de trois grandeurs physiques : la masse, la quantité de mouvement, et l'énergie totale.

En trois dimensions, les trois lois de conservation sont :

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0, \quad (1)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0, \quad (2)$$

$$(\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y + (\rho vw)_z = 0, \quad (3)$$

$$(\rho w)_t + (\rho uw)_x + (\rho vw)_y + (\rho w^2 + p)_z = 0, \quad (4)$$

$$E_t + [u(E + p)]_x + [v(E + p)]_y + [w(E + p)]_z = 0. \quad (5)$$

où E est l'énergie totale par unité de volume :

$$E = \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}^2 + e \right), \quad (6)$$

avec :

$$\frac{1}{2} \mathbf{V}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)$$

Ce qui nous donne en une dimension :

- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0$$

- Conservation de l'énergie totale :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [(E + p)u]}{\partial x} = 0$$

où :

- ρ est la densité du fluide
- u est la vitesse
- p est la pression
- E est l'énergie totale par unité de volume définie par :

$$E = \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right), \quad (7)$$

avec e l'énergie interne spécifique du fluide.

2.2 Forme conservative

Ainsi, on peut regrouper ces trois équations sous une forme appelée « **forme conservative** », donnée par :

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0 \quad (8)$$

avec :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}$$

On peut alors réécrire l'équation :

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x = 0 \quad (9)$$

avec $A(U) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$ la matrice jacobienne.

Ce système est hyperbolique car les valeurs propres sont toutes réelles et les vecteurs propres forment un ensemble complet de vecteurs propres linéairement indépendants

Preuve :

La matrice jacobienne est donnée par :

$$A(U) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} & \frac{\partial F_1}{\partial (\rho u)} & \frac{\partial F_1}{\partial E} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \rho} & \frac{\partial F_2}{\partial (\rho u)} & \frac{\partial F_2}{\partial E} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \rho} & \frac{\partial F_3}{\partial (\rho u)} & \frac{\partial F_3}{\partial E} \end{pmatrix}$$

L'énergie totale est donnée par :

$$E = \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right) \quad (10)$$

et l'énergie interne spécifique par :

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad (11)$$

Ainsi en utilisant $F_1 = \rho u$, $F_2 = \rho u^2 + p$, $F_3 = u(E + p)$, et en exprimant la pression d'après (10) et (11), on obtient :

$$p = (\gamma - 1) \left[E - \frac{1}{2} \left(\frac{(\rho u)^2}{\rho} \right) \right] \quad (12)$$

et

$$F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \frac{1}{2}(3-\gamma)\frac{(\rho u)^2}{\rho} + (\gamma-1)E \\ \gamma\frac{\rho u}{\rho}E - \frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{(\rho u)^3}{\rho^2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Ainsi la jacobienne devient :

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{1}{2}(\gamma-2)u^3 - \frac{a^2 u}{\gamma-1} & \frac{3-2\gamma}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} & \gamma u \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres λ de $A(U)$ sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

cela conduit à :

$$(\lambda - u)(\gamma u - \lambda) \left[(2u - \gamma u - \lambda) + (\lambda - u) \left[-a^2 - (\gamma - 1)u^2 + (\gamma - 1)\gamma u^2 \right] \right] + \Delta = 0$$

où :

$$\Delta = \frac{1}{2}(\gamma u - \lambda)(1 - \gamma)u^2 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^2 [(1 - 2\gamma)\lambda + \gamma u].$$

On voit que Δ contient $(\lambda - u)$, ainsi on a directement que $\lambda_2 = u$ est une racine du polynôme caractéristique et donc une valeur propre de A . En simplification par $(\lambda - u)$, ils restent :

$$\lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - a^2 = 0,$$

dont les racines réelles sont :

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_3 = u + a.$$

Ainsi les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a,$$

où $a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ est la vitesse du son dans le gaz.

Pour trouver les vecteurs propres à droite, nous recherchons un vecteur $K = [k_1, k_2, k_3]^T$ tel que :

$$AK = \lambda K.$$

En substituant successivement $\lambda = \lambda_i$, en résolvant pour les composantes du vecteur K et en choisissant les bons facteurs, nous obtenons que les vecteurs propres droits associés sont :

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{u^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{pmatrix},$$

où $H = \frac{E+p}{\rho}$ est l'enthalpie totale.

Les valeurs propres sont toutes réelles et les vecteurs propres forment un ensemble complet de vecteurs propres linéairement indépendants. Nous avons ainsi démontré que les équations d'Euler unidimensionnelles , pour les gaz parfaits sont hyperboliques. En fait, ces équations sont strictement hyperboliques, car les valeurs propres sont toutes réelles et distinctes, tant que la vitesse du son a reste positive.

Fin de la preuve.

Ces valeurs propres correspondent aux différentes vitesses acoustiques :

1. $\lambda_1 = u - a$: onde se propageant vers la gauche
2. $\lambda_2 = u$: onde de contact
3. $\lambda_3 = u + a$: onde se propageant vers la droite.

Dans la suite de notre projet , nous utiliserons à plusieurs reprises ces valeurs et vecteurs propres qui nous permettront de mettre en oeuvre plusieurs schéma numérique.

3 Méthode des Volumes Finis

Dans la section précédente, nous avons présenté le modèle d'Euler pour les gaz compressibles, un système d'équations de conservation hyperbolique. Cependant à cause de la non-linéarité du système nous cherchons une méthode capable de gérer ces difficultés. Pour cela nous devons utiliser des méthodes numériques robustes et fiables. La méthode des volumes finis s'est montrée être la plus efficace pour simuler les écoulements compressibles.

Dans cette partie, nous allons présenter les principes de la méthode des volumes finis, en détaillant la discrétisation spatiale, le rôle des flux numériques, et les avantages de cette approche dans le contexte du modèle d'Euler. Cela nous dirigera dans la partie suivante sur le problème de Riemann, qui joue un rôle majeur dans le calcul des flux.

3.1 Principe de la méthode

La méthode des volumes finis est une méthode utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Elle est comparable à la méthode des différences finies et à celle des éléments finis.

Contrairement à la méthode des différences finies basée sur des approximations locales des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis utilisent des intégrales pour approcher les équations aux dérivées partielles. Cependant ces deux approches sont très différentes dans leur formulation. La méthode des volumes finis utilise la forme forte de l'équation alors que la méthode des éléments finis repose sur une formulation variationnelle, appelée aussi forme faible.

La méthode des volumes finis consiste à subdiviser le domaine en volumes élémentaires tel que chaque volume entoure un noeud principal du maillage. On applique ensuite une intégration locale de l'équation sur chacun de ces volumes. Grâce à la formule de Green, les intégrales de volume sont transformées en intégrales de surface, ce qui permet d'évaluer les flux à travers les interfaces entre les volumes. Cela permet de garantir la conservation des quantités physiques ce qui correspond à nos attentes dans le contexte de la dynamique des gaz.

Dans notre cas du modèle d'Euler en 1D on a :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}$$

Maillage :

Le domaine spatial $[a, b]$ est discréteisé en N cellules de taille uniforme :

$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

Chaque cellule I_i est définie par :

$$I_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \quad \text{avec} \quad x_i = \frac{x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}}{2}$$

Dans la méthode des Volumes Finis, la solution est approximée par sa valeur moyenne dans chaque cellule $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ de largeur Δx :

$$\bar{U}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} U(x, t) dx \quad (14)$$

La variation de cette moyenne est dirigé par les flux aux bords de la cellule, ce qui donne :

$$\frac{d\bar{U}_i}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}})$$

Pour avancer dans le temps, nous utilisons un schéma explicite, ici nous utiliserons le schéma Euler, ce qui donne finalement :

$$\bar{U}_i^{n+1} = \bar{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}) \quad (15)$$

Où $F_{i\pm\frac{1}{2}}$ est le flux numérique approché à l'interface entre deux cellules. Ces flux ne sont pas calculés directement à partir des valeurs de U , nous approfondirons ainsi le calcul de ces flux dans les parties suivantes .

Avantage de la méthode

La méthode des volumes finis ne suppose pas la continuité de la solution, ce qui est un avantage important pour les problèmes discontinus.

Un autre avantage de la méthode des volumes finis est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés. En effet sa formulation ne tient pas compte de la complexité du maillage

4 Problème de Riemann

4.1 Définition d'un problème de Riemann

Un problème de Riemann désigne un problème à donnée initiale composé d'un système d'équations hyperboliques où les conditions initiales sont définies par une discontinuité entre deux états constants.

Les problèmes de Riemann permettent d'obtenir des solutions explicites à des équations non linéaires complexes ce qui les rend parfaitement adaptés pour nos équations d'Euler.

Dans le cadre de notre sujet nous nous intéressons au problème de Riemann pour les équations d'Euler en une dimension. C'est le problème de valeur initiale pour les lois de conservation.

Celui-ci est donné par :

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0, \quad (16)$$

Avec la condition initiale :

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^{(0)}(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où \mathbf{U}_L et \mathbf{U}_R sont des états constants à gauche et à droite de l'origine.

On considère des points (x, t) dans le plan espace-temps, avec :

- $x \in [-\infty, +\infty]$
- $t > 0$

Travailler sur l'axe des réels serait compliqué donc on choisit de le faire sur un intervalle fini $[x_L, x_R]$ centré autour de $x = 0$.

Au lieu d'utiliser les variables conservées \mathbf{U} nous allons plutôt utiliser le vecteur de variables primitives \mathbf{W} .

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}$$

où :

- ρ est la densité du gaz,
- u est la vitesse des particules,
- p est la pression.

Dans notre problème, à l'instant initial l'espace est divisé en deux moitiés :

$$\mathbf{W}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{W}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{W}_R & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

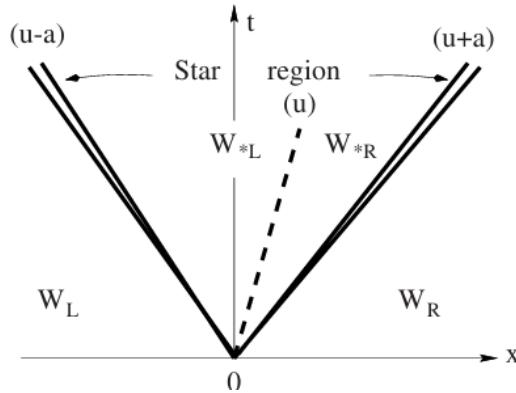
- À gauche de $x = 0$, le gaz est dans un état constant :

$$\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \\ p_L \end{pmatrix} = (\rho_L, u_L, p_L)^T$$

- À droite de $x = 0$, le gaz est dans un autre état constant :

$$\mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \\ p_R \end{pmatrix} = (\rho_R, u_R, p_R)^T$$

Ainsi ces deux états sont séparés par une discontinuité en $x=0$.



La solution contient trois ondes comme on a pu le voir dans la section 1 du document :

1. $u - a$: onde gauche avec a vitesse du son.
2. u : onde de contact.
3. $u + a$: onde droite.

Ces ondes séparent quatre états constants dans le plan :

- \mathbf{W}_L : état gauche
- \mathbf{W}_L^* : état étoilé gauche (entre l'onde de choc/détente gauche et l'onde de contact)
- \mathbf{W}_R^* : état étoilé droit (entre l'onde de contact et l'onde de choc/détente droite)
- \mathbf{W}_R : état droit

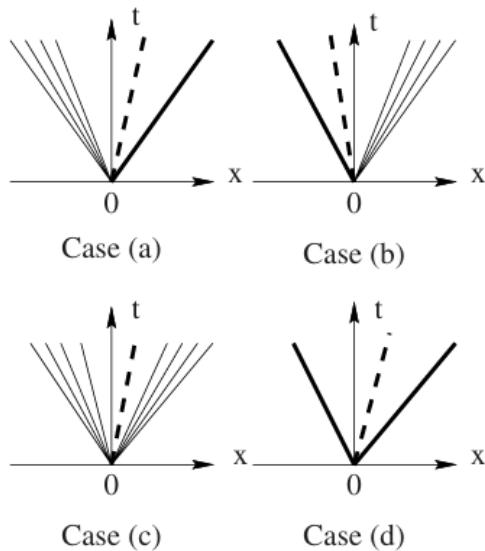
L'ensemble des états \mathbf{W}_L^* et \mathbf{W}_R^* forme la région étoile, séparée par une discontinuité de contact où :

- la pression p et la vitesse u sont constantes ($p_L^* = p_R^*, u_L^* = u_R^*$)
- la densité ρ peut présenter une discontinuité ($\rho_L^* \neq \rho_R^*$)

Ainsi, les ondes gauche et droite peuvent être de deux types :

- **Choc**
- **Détente**

On distingue ainsi quatre cas possibles :



- a. Détente - Contact - Choc
- b. Choc - Contact - Détente
- c. Détente - Contact - Détente
- d. Choc - Contact - Choc

Cette analyse montre la difficulté de résolution analytique du problème :

- Chaque onde a besoin d'une modélisation spécifique selon son type (choc / détente).
- Il faudrait résoudre une équation non-linéaire pour p^* par une méthode numérique.

En résumé : Comme le problème de Riemann est complexe à résoudre analytiquement nous allons nous tourner vers d'autres solutions pour approcher la solution de ce problème.

5 Schéma de Godunov

La méthode de Godunov a été suggérée par Sergueï Godounov en 1959. C'est l'un des premiers schémas numériques créés pour résoudre des équations hyperboliques de conservation comme le système d'Euler.

Elle utilise la méthode numérique des Volumes Finis et repose sur l'idée de considérer la solution comme constante par morceaux dans chaque cellule du maillage, et d'évaluer le flux entre les cellules en résolvant un problème de Riemann à chaque interface.

Dans cette section, nous allons étudier les détails de la méthode et en donner aussi ses limites.

5.1 Définition du schéma de Godunov unidimensionnel

Reprenons notre maillage comme nous l'avons défini dans la section des Volumes Finis.

- **Discrétisation du domaine :** Le domaine est divisé en cellules $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ avec :

$$\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$$

- **Solution par morceaux constants :** À chaque temps t^n , la solution est constante dans chaque cellule :

$$\mathbf{U}(x, t^n) = \mathbf{U}_i^n \quad \text{pour } x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$$

- **Problème de Riemann aux interfaces :** Le flux numérique $\mathbf{F}_{i+1/2}$ est obtenu en résolvant le problème de Riemann entre \mathbf{U}_i^n et \mathbf{U}_{i+1}^n à l'interface $x_{i+1/2}$.

- **Mise à jour du Schéma :** La solution au temps t^{n+1} s'obtient par :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2})$$

Avec le Flux numérique : $\mathbf{F}_{i+1/2} = \mathcal{F}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n)$

où \mathcal{F} est la fonction de flux obtenue par la solution exacte du problème de Riemann.

Maintenant pour pouvoir assurer la stabilité de notre schéma nous avons besoin de certaines conditions :

- Une condition CFL :

$$\Delta t \leq \text{CFL} \cdot \frac{\Delta x}{\max |a(\mathbf{U})|}$$

où $a(\mathbf{U})$ est la vitesse caractéristique.

5.2 Limites du schéma

Malgré sa robustesse théorique, la méthode de Godunov présente plusieurs limites qui rendent compliquée son application aux équations d'Euler en une dimension .

En effet, le schéma est d'ordre 1 en espace et en temps ce qui capture mal les discontinuités de contact, qui sont pourtant un élément important dans les écoulements compressibles. On souhaiterait avoir un ordre plus élevé pour une meilleure précision.

Le schéma repose sur la résolution exacte du problème de Riemann à chaque interface, ce qui implique de résoudre une équation non linéaire pour la pression intermédiaire et de calculer les vitesses d'onde et les états intermédiaires par des itérations numériques, comme nous avons pu le voir dans la section précédente. Ainsi, le coût de résolution exact du problème de Riemann est élevé.

Pour remédier à ces problèmes, nous allons nous tourner vers des méthodes qui ont été développées plus tard et qui évitent le coût du solveur exact.

Ce sont *les solveurs approchés de Riemann* que nous allons détailler dans la section suivant.

6 Solveurs approchés de Riemann

Un solveur de Riemann est un outil numérique créé pour résoudre localement un problème de Riemann. Ces solveurs jouent un rôle majeur dans le calcul des flux aux interfaces entre cellules, notamment dans les méthodes de volumes finis.

Les solveurs de Riemann approchés donnent une alternative aux solveurs exacts, qui sont complexes et très coûteux en termes de calculs. Ces méthodes reposent sur deux idées principales :

La décomposition en ondes caractéristiques : Les systèmes hyperboliques admettent des solutions qui peuvent se décomposer en ondes se propageant à des vitesses distinctes, appelées vitesses caractéristiques. Ces ondes sont associées aux valeurs propres et vecteurs propres du système.

La linéarisation : Au lieu de résoudre le problème non linéaire exact, les solveurs approximatifs utilisent des approximations linéaires locales pour estimer les flux. Cette approche permet d'avoir de la précision et de l'efficacité.

Ces méthodes sont utilisées en simulation numérique, car elles permettent de capturer les discontinuités tout en réduisant considérablement les coûts de calcul.

Dans cette section nous allons nous intéresser en particulier aux solveurs approchés de **Rusanov**, **HLL**, **HLLC** et **Roe**. Nous allons détailler chacune de ces méthodes et en exprimer les avantages et leurs limites.

Pour cela, on considère toujours notre système sous forme conservative :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$$

qu'on va résoudre avec un schéma de volumes finis :

$$\bar{U}_i^{n+1} = \bar{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad (17)$$

Les différents schémas qu'on propose à l'étude reposent sur le calcul du flux numérique $F_{i+\frac{1}{2}}$ qui approxime le flux réel au bord des mailles.

6.1 Solveur Rusanov

Le schéma de **Rusanov**, également connu sous le nom de schéma **local de Lax-Friedrichs**, a été introduit en 1961 par Vladimir V. Rusanov, un mathématicien soviétique travaillant sur les méthodes numériques pour la dynamique des gaz.

L'idée principale de Rusanov était de créer un solveur de Riemann approché, capable de capturer les discontinuités tout en restant simple et robuste. Contrairement aux solveurs exacts de Riemann, qui ont besoin de la résolution explicite des ondes, le schéma de Rusanov fournit une approximation très simple.

Le flux de Rusanov s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{F}_{\text{Rusanov}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)] - \frac{1}{2} \lambda_{\max} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

où \mathbf{U}_L et \mathbf{U}_R représentent les états gauche et droit à l'interface, et λ_{\max} est une estimation de la vitesse maximale de propagation des ondes donnée par :

- $\lambda_{\max} = \max(|\lambda_i|)$ est la vitesse maximale du système
- λ_i sont les valeurs propres du Jacobien $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{U}$

Ainsi d'après les calculs fait dans les sections précédentes , dans le cas de Euler 1D :

$$\lambda_{\max} = \max(|\mathbf{U}_L| + c_L, |\mathbf{U}_R| + c_R)$$

avec :

$$c_L = \sqrt{\gamma \frac{p_L}{\rho_L}} \quad \text{et} \quad c_R = \sqrt{\gamma \frac{p_R}{\rho_R}}$$

Exemple : Pour la loi de Burgers :

$$\text{On considère } f(u) = \frac{1}{2}u^2, \text{ ainsi } f'(u) = u.$$

Ainsi

$$\lambda_{\max} = \max (|f'(u_L)|, |f'(u_R)|)$$

ainsi le Flux de Rusanov est alors :

$$\mathbf{F}_{\text{Rusanov}}(u_L, u_R) = \frac{1}{4} (u_L^2 + u_R^2) - \frac{1}{2} \max (|u_L|, |u_R|) (u_R - u_L)$$

Stabilité

Le schéma de Rusanov est conditionnellement stable, avec une contrainte sur le pas de temps Δt imposée par la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lowy) :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \lambda_{\max} \leq \text{CFL}$$

où $\text{CFL} \in]0, 1]$

Avantages

Le schéma de Rusanov (ou LF local) présente plusieurs avantages qui justifient son utilisation :

- Ne nécessite pas la résolution exacte du problème de Riemann
- Calcul du flux par une formule simple, facilitant son implémentation
- Robuste même pour des données initiales discontinues
- Évite les oscillations non physiques
- Applicable à la fois :
 - Aux équations scalaires (équation de Burgers, etc.)
 - Aux systèmes hyperboliques (équations d'Euler)
- Peut servir de base pour développer ou tester des schémas plus complexes

Inconvénients

- Possède une seule onde globale donc très diffusif. C'est à dire qu'on constate une perte de précision dans les endroits où la solution est continue. (voir dans la section résultat numérique)
- Il est du premier ordre en espace. On observe un manque de précision assez importante.

Dans la section des résultats numériques, nous illustrerons visuellement les limites du schéma de Rusanov. Ces exemples mettront en évidence l'effet de sa diffusion numérique trop importante. Même si le schéma est robuste et simple à implémenter, la méthode de Rusanov reste trop simple pour transcrire toutes les caractéristiques des solutions des systèmes hyperboliques.

6.2 Cas supersonique et subsonique

En 1983, Harten, Lax et van Leer ont proposés une nouvelle approche pour approximer la solution du problème de Riemann, qui est connue sous le nom de solveur de HLL. Contrairement à la solution exacte qui est complexe, la méthode HLL est plus simple car elle considère moins d'états intermédiaires. En effet, ce solveurs fait la moyenne des sections de la solution exacte sur l'éventail de Riemann, ainsi HLL permet de réduire la complexité du calcul tout en gardant les principales caractéristiques de la solution.

Dans le cas des équations d'Euler, la solution exacte du problème de Riemann se compose de trois ondes :

- **Deux ondes acoustiques** (chocs ou détentes) délimitant la structure :
- Onde gauche de vitesse S_L (la plus lente)
- Onde droite de vitesse S_R (la plus rapide)
- **Une onde de contact** centrale de vitesse S_M , caractérisée par :

$$p_L^* = p_R^* \quad \text{et} \quad u_L^* = u_R^* \quad (18)$$

où les * désignent les états intermédiaires.

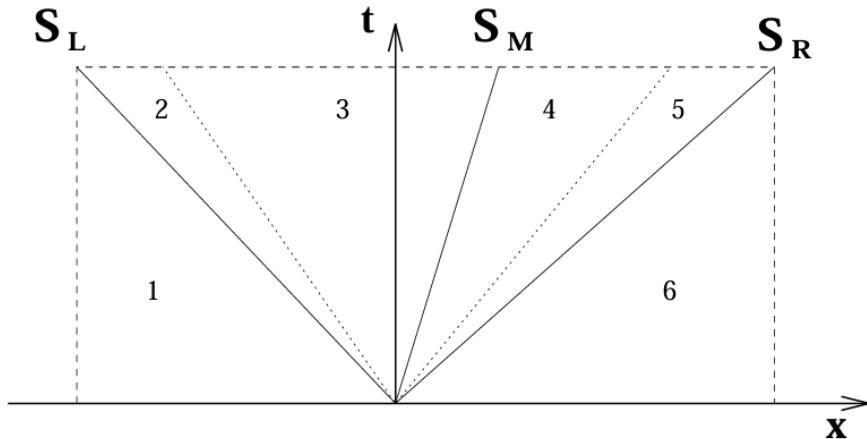


FIG. 1. General Riemann fan for the Euler equations.

Cas supersonique

- Écoulement vers la droite ($S_L > 0$) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)$$

L'état gauche domine le flux.

— Écoulement vers la gauche ($S_R < 0$) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$$

L'état droit domine le flux.

Cas subsonique ($S_L < 0 < S_R$)

La solution doit être traitée différemment : Dans ce cas là, il devient nécessaire d'utiliser un flux approché. Nous allons avoir deux solveurs HLL et sa version améliorée HLLC pour traiter ce cas. Ces deux solveurs montrent leur utilité, en proposant un flux basé sur une estimation des vitesses d'onde.

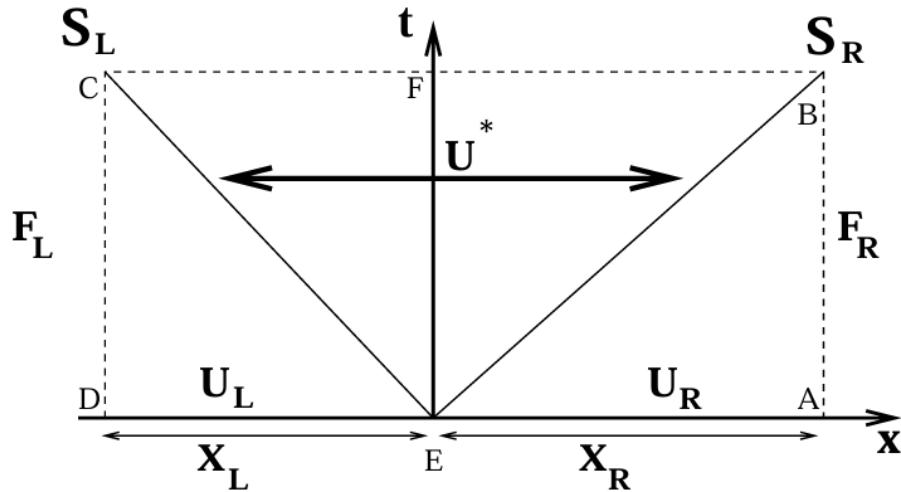
6.3 Solveur HLL

Une solution approchée du problème de Riemann peut être obtenue en ne prenant pas en compte la discontinuité de contact et en considérant un état intermédiaire U^* entre les deux ondes acoustiques S_L et S_R . Cette solution approchée est donnée par :

$$U_{\text{HLL}} = \begin{cases} U_L & \text{si } S_L > 0, \\ U^* & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ U_R & \text{si } S_R < 0. \end{cases}$$

où l'état intermédiaire U^* du schéma HLL s'exprime par :

$$U^* = \frac{S_R U_R - S_L U_L - (F_R - F_L)}{S_R - S_L} \quad (19)$$



Son flux s'écrit alors :

$$F_{\text{HLL}} = \begin{cases} F_L & \text{si } S_L > 0, \\ F_{LR}^* & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R, \\ F_R & \text{si } S_R < 0. \end{cases}$$

ainsi :

$$F_{\text{HLL}} = \begin{cases} F(\mathbf{U}_L) & \text{si } 0 \leq S_L \\ \frac{S_R F(\mathbf{U}_L) - S_L F(\mathbf{U}_R) + S_L S_R (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L} & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F(\mathbf{U}_R) & \text{si } S_R \leq 0 \end{cases}$$

Nous verrons après l'étude du deuxième solveur (HLLC), le calcul précis de ces vitesses d'ondes.

Avantages : Ce solveur possède de nombreux avantages à savoir :

- Il est robuste et stable. En effet, il peut gérer des discontinuités sans instabilité et résiste aux oscillations non physiques (voir dans la section résultat numérique)
- Il évite le calcul de la solution exacte du problème de Riemann
- Il ne nécessite pas le calcul des vecteurs propres du système (voir plus tard solveur de Roe)
- Contrairement au schéma de Rusanov, HLL introduit deux vitesses d'onde.
- Il garantit la conservation des quantités physiques.

Inconvénients :

- Il n'utilise pas l'onde de contact.
- L'estimation des vitesses d'onde doit être correcte car sinon cela pourrait dégrader la précision ou la stabilité.
- Schéma du premier ordre. On aimerait un ordre un plus élevé.

En résumé, le schéma de Harten–Lax–van Leer (HLL) constitue une grande avancée dans les solveurs approchés pour les lois de conservation hyperboliques. Grâce à sa construction simple fondée sur deux vitesses d'onde, il donne un bon compromis entre robustesse, simplicité d'implémentation. En effet il se montre beaucoup plus efficace et précis que la méthode de Rusanov.

Cependant, cette approche n'est pas assez complète pour certains phénomènes physiques, car l'onde de contact n'est pas prise en compte ce qui limite sa précision.

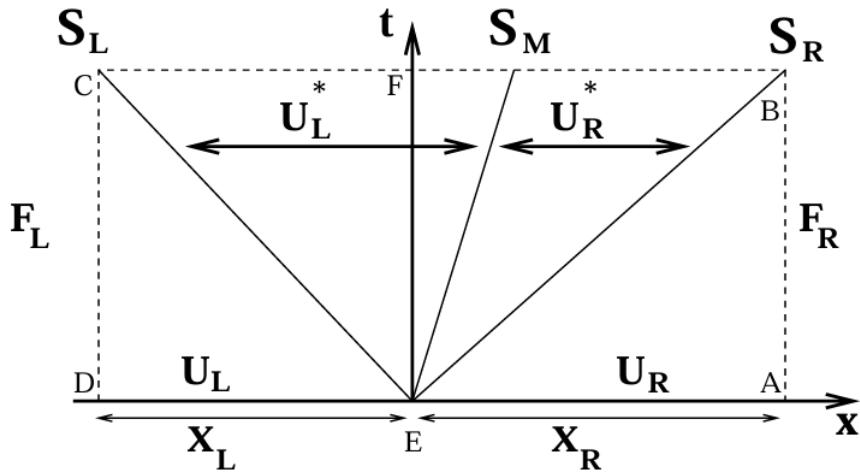
Ainsi, le schéma HLL est bien adapté pour des simulations où la robustesse et la conservation sont les caractéristiques recherchées, mais il peut montrer ses limites dans des cas précis. C'est pourquoi ce schéma a donné vie à des variantes améliorées, telles que le solveur HLLC.

6.4 Solveur HLLC

Nous allons maintenant aborder une seconde approche pour traiter le cas subsonique, en prenant cette fois en compte les deux ondes comme précédemment, mais également l'onde de contact. Cette méthode repose donc sur une approximation à trois ondes, et porte le nom de méthode HLLC (Harten–Lax–van Leer–Contact). Il s'agit d'une version plus précise du schéma HLL, proposée en 1994 par Toro, Spruce et Speares, dans le but de mieux capturer les discontinuités.

Pour cela nous devons considérer deux états intermédiaires \mathbf{U}_L^* et \mathbf{U}_R^* séparés par l'onde de contact, dont la vitesse est notée \mathbf{S}_M .

Voici une représentation de cette situation ci-dessous :



Ainsi, la solution a été définie par :

$$U_{HLLC} = \begin{cases} U_L & \text{si } S_L > 0, \\ U_L^* & \text{si } S_L \leq 0 < S_M, \\ U_R^* & \text{si } S_M \leq 0 \leq S_R, \\ U_R & \text{si } S_R < 0. \end{cases}$$

Le flux à l'interface, noté F_{HLLC} , est défini par

$$F_{HLLC} = \begin{cases} F_L & \text{si } S_L > 0, \\ F_L^* & \text{si } S_L \leq 0 < S_M, \\ F_R^* & \text{si } S_M \leq 0 \leq S_R, \\ F_R & \text{si } S_R < 0. \end{cases}$$

Harten, Lax et van Leer ont proposé différentes méthodes pour calculer les états intermédiaires U_L^* et U_R^* à partir d'estimations du flux à travers la ligne de contact. Cependant, l'approche la plus simple pour calculer ces états étoilés a été suggérée par Toro, Spruce et Speares, qui ont remarqué qu'en laissant de côté l'influence des ondes de détente, la vitesse des particules peut être considérée comme constante entre les ondes acoustiques.

Ainsi en appliquant les conditions de Rankine-Hugoniot à travers l'onde S_L , on a :

$$F_L^* = F_L + S_L(U_L^* - U_L). \quad (20)$$

De même en appliquant les conditions de Rankine-Hugoniot à travers l'onde S_R , on a :

$$F_R^* = F_R + S_R(U_R^* - U_R). \quad (21)$$

Ainsi en reformulant l'équation (20), on obtient :

$$S_L U_L^* - F_L^* = S_L U_L - F_L. \quad (22)$$

Pour les équations d'Euler 1D, avec les états U_L et U_R séparés par une interface, l'équation (22) devient :

$$S_L \begin{bmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L u_L^* \\ E_L^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_L^* u_L^* \\ \rho_L^*(u_L^*)^2 + p_L^* \\ (E_L^* + p_L^*)u_L^* \end{bmatrix} = S_L \begin{bmatrix} \rho_L \\ \rho_L u_L \\ E_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_L u_L \\ \rho_L u_L^2 + p_L \\ (E_L + p_L)u_L \end{bmatrix}, \quad (23)$$

où :

- ρ est la masse volumique
- u est la vitesse selon x
- p est la pression
- E est l'énergie totale par unité de volume

Pour déterminer U_L et donc F_L , le solveur HLLC utilise une hypothèse concernant la structure des ondes dans la solution de Riemann :

$$S_M = q_L^* = q_R^* = q^* \quad (24)$$

où S_M est la vitesse de l'onde de contact, et q^* est la vitesse dirigée moyenne entre les deux ondes acoustiques.

Ainsi cette hypothèse pour la vitesse de l'onde de contact, S_M , consiste donc à extraire la vitesse moyenne de l'approximation HLL de U (19). Cela donne l'expression suivante pour S_M :

$$S_M = \frac{\rho_R q_R (S_R - q_R) - \rho_L q_L (S_L - q_L) + p_L - p_L}{\rho_R (S_R - q_R) - \rho_L (S_L - q_L)} \quad (25)$$

En utilisant (25) et (23), on a :

$$\rho_L^* = \rho_L \frac{S_L - q_L}{S_L - S_M} \quad (26)$$

et de même :

$$\rho_R^* = \rho_R \frac{S_R - q_R}{S_R - S_M} \quad (27)$$

Ainsi la pression dans la région intermédiaire s'obtient par :

$$p^* = \rho_L(q_L - S_L)(q_L - S_M) + p_L \quad (28)$$

Cette expression nous garantit la continuité de la pression à travers l'onde de contact.

Les composantes de quantité de mouvement se calculent par :

$$(\rho u)_L^* = \frac{(S_L - q_L)\rho_L u_L + (p^* - p_L)n_x}{S_L - S_M} \quad (29)$$

L'énergie totale dans la région étoilée est :

$$E_L^* = \frac{(S_L - q_L)E_L - p_L q_L + p^* S_M}{S_L - S_M} \quad (30)$$

Ainsi pour finir le flux HLLC complet s'écrit :

$$F_{HLLC} = \begin{cases} F_L & \text{si } 0 \leq S_L \\ F_L + S_L(U_L^* - U_L) & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_M \\ F_R + S_R(U_R^* - U_R) & \text{si } S_M \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{si } 0 \geq S_R \end{cases} \quad (31)$$

Nous allons regarder les avantages et les inconvénients de ce solveur :

Avantages :

1. Contrairement à HLL, HLLC est capable de capturer les discontinuités de contact.
2. Il est plus simple et moins coûteux que les solveurs exacts de Riemann.
3. Il possède une bonne robustesse.
4. La formule du flux est explicite donc l'implémentation reste assez facile.

Inconvénients :

1. Il n'est évidemment pas aussi précis que les solveurs exacts.
2. Il suppose des vitesses d'onde estimées donc en cas de mauvaise estimation cela peut affecter le flux.

En résumé : le solveur HLLC améliore HLL en ajoutant la capture des ondes de contacts. Il offre ainsi une meilleure résolution des structures du flux tout en restant simple et efficace.

Avant d'aborder l'étude de notre dernier solveur de Riemann, nous allons d'abord préciser comment estimer les vitesses des ondes acoustiques utilisées dans les solveurs HLL et HLLC.

6.5 Estimations de la vitesse des ondes acoustiques

Ces vitesses souvent appelées "acoustic wavespeed estimates", correspondent à des approximations des vitesses caractéristiques du système hyperbolique, telles que la vitesse de propagation des ondes de choc, des contacts ou des détentes. Une bonne estimation des vitesses d'onde est très importante, en effet elle permet la stabilité numérique du solveur, la précision et la robustesse. Dans cette section, nous présenterons les principes de l'estimation des vitesses acoustiques

Soit toujours notre même système :

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0, \quad (32)$$

Si le système (32) a m composantes, la solution du problème de Riemann consiste en des états U_k ($k = 0, 1, 2, \dots, m$), où $U_0 = U_I$ et $U_m = U_r$. Ces états sont séparés par des ondes dont les vitesses caractéristiques sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. On cherche à estimer $S_L = \lambda_1$ et $S_R = \lambda_m$ à partir des données initiales U_I, U_r .

Pour les équations d'Euler, trois cas sont possibles :

1. **Onde de contact** : Si $\lambda_k(U_{k-1}) = \lambda_k(U_k)$, l'onde k est une discontinuité de contact se déplaçant à la vitesse $a_k = \lambda_k$.
2. **Onde de détente** : Si $\lambda_k(U_{k-1}) < \lambda_k(U_k)$, l'onde k est une détente continue entre U_{k-1} et U_k .
3. **Onde de choc** : Si $\lambda_k(U_{k-1}) > \lambda_k(U_k)$, l'onde k est un choc de vitesse s vérifiant $\lambda_k(U_{k-1}) > s > \lambda_k(U_k)$.

Davis propose une première approximation pour les ondes de détente :

$$S_L = \lambda_1(U_L), \quad S_R = \lambda_m(U_R) \quad (33)$$

Cependant, cette méthode sous-estime les vitesses des chocs. Davis propose ensuite de comparer les vitesses caractéristiques des deux états U_L et U_R :

$$S_L = \min[\lambda_1(U_L), \lambda_1(U_R)], \quad S_R = \max[\lambda_m(U_L), \lambda_m(U_R)] \quad (34)$$

Einfeldt et al améliorent cette approche en 1991 en utilisant un **état intermédiaire de Roe** :

$$S_L = \min[\lambda_1(U_L), \lambda_1(U^{Roe})], \quad S_R = \max[\lambda_m(U^{Roe}), \lambda_m(U_R)] \quad (35)$$

Cette méthode présente deux avantages :

- Elle est moins diffuse que la méthode (34)
- Elle donne la vitesse exacte pour un choc isolé

Les algorithmes (34) et (35) peuvent sous-estimer la vitesse des chocs dans certains cas particuliers, par exemple lorsque plusieurs ondes s'effondrent (problème de tube à choc).

Pour résoudre ce problème on peut :

- Utiliser un **nombre CFL légèrement réduit** jusqu'à ce que les ondes se soient propagées sur deux cellules ou plus (dans le cas du tube à choc)
- Calculer un **état intermédiaire**. En effet, lorsque plusieurs chocs s'effondrent dans une cellule, il semble y avoir un avantage à calculer un état intermédiaire afin de détecter les pics de pression au point d'impact, jamais observés par (34). Ainsi, pour le calcul de l'état intermédiaire on peut faire :
 - une moyenne de Roe
 - une moyenne arithmétique

Cette approche permet de mieux capturer les pics de pression lors de l'effondrement.

En pratique (35), s'est montré très robuste et comme il nous donne la vitesse exacte pour des chocs isolés, c'est cette méthode que nous allons utiliser pour le calcul de nos vitesses acoustiques dans nos solveurs approchés de Riemann.

Au final, la méthode (35) est donnée par :

$$\begin{aligned} S_L &= \min[q_L - c_L, \tilde{q} - \tilde{c}] \\ S_R &= \max[q_R + c_R, \tilde{q} + \tilde{c}] \end{aligned} \tag{36}$$

avec :

$$\tilde{q} = \tilde{u} n_x \tag{37}$$

$$\tilde{u} = \frac{u_L + u_R R_\rho}{1 + R_\rho}, \tag{38}$$

$$\tilde{c}^2 = (\gamma - 1) \left[\tilde{H} - \frac{1}{2} (\tilde{u}^2) \right], \tag{39}$$

$$\tilde{H} = \frac{H_L + H_R R_\rho}{1 + R_\rho}, \tag{40}$$

$$R_\rho = \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_L}}. \tag{41}$$

où on a utilisé que :

- γ est le rapport de chaleur spécifique. Pour un gaz parfait comme l'air par exemple, on peut prendre $\gamma = 1.4$.
- H est l'enthalpie totale donnée par $H = (E + p)/\rho$

Maintenant que nous avons établi comment définir les vitesses d'onde acoustiques pour les deux premiers solveurs, nous allons dans la prochaine section, nous intéresser à un autre solveur approché qui utilise aussi certains éléments du calcul des vitesses.

6.6 Solveur Roe

Après avoir étudié les solveurs HLL et HLLC, nous étudierons le solveur approché de Roe. Ce schéma repose sur une linéarisation locale du système d'équations hyperboliques, qui permet d'avoir une approximation plus précise du flux numérique. Contrairement aux méthodes HLL qui reposent uniquement sur des estimations des vitesses d'onde, la méthode de Roe repose sur une décomposition qui utilise les caractéristiques, ce qui permet de mieux capturer la solution près des discontinuités. Dans cette section, nous détaillerons les principes de la méthode, la construction du flux de Roe, ainsi que ses avantages et ses limites.

ce schéma a été présenté pour la première fois dans la littérature scientifique en 1981. Depuis, cette méthode a été améliorée, mais également appliquée à une grande variété de problèmes physiques.

Pour commencer, on considère toujours notre système sous forme conservative :

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{0}$$

En introduisant la matrice jacobienne

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \quad (42)$$

En utilisant la règle de chaîne, la forme conservative peut s'écrire :

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x = \mathbf{0}. \quad (43)$$

Dans son article original, Roe propose de construire une matrice jacobienne moyenne \tilde{A} , appelée matrice de Roe, à partir de laquelle on va pouvoir trouver les valeurs propres moyennes $\tilde{\lambda}_i$, les vecteurs propres moyens $\tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$, ainsi que les forces d'onde moyennes $\tilde{\alpha}_i$. La matrice jacobienne moyenne est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R), \quad (44)$$

qui dépend des états initiaux \mathbf{U}_L et \mathbf{U}_R .

Ainsi, la forme conservative devient :

$$\mathbf{U}_t + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{U}_x = \mathbf{0}. \quad (45)$$

Ainsi, il s'agit d'un système linéaire à coefficients constants. Le problème de Riemann original est ainsi remplacé par le problème approché :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{U}_x = 0 \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0 \\ \mathbf{U}_R, & x > 0 \end{cases}, \end{cases} \quad (46)$$

Cette approximation consiste à remplacer les lois de conservation non-linéaires par un système linéarisé à coefficients constants, tout en conservant les conditions initiales du problème exact.

La matrice jacobienne de Roe $\tilde{\mathbf{A}}$ doit satisfaire les propriétés suivantes :

1. Le système doit être hyperbolique. La matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ doit posséder :
 - Des valeurs propres réelles $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$.
 - des vecteurs propres linéairement indépendants :

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{K}}^{(2)}, \dots, \tilde{\mathbf{K}}^{(m)}. \quad (47)$$

2. Une cohérence avec la jacobienne exact :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{A}(\mathbf{U}). \quad (48)$$

3. Une propriété de conservation ;

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L). \quad (49)$$

On remarque qu'on peut trouver des matrices qui satisfont les deux premières propriétés. En revanche, la propriété 3 est très importante, car c'est elle qui restreint le plus les choix possibles. Roe a montré que l'existence de cette matrice qui respecte la propriété 3 est garantie par le théorème des valeurs intermédiaires.

Une fois la matrice $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$, ses valeurs propres $\tilde{\lambda}_i(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ et ses vecteurs propres à droite $\tilde{\mathbf{K}}^{(i)}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ déterminés, on résout le problème de Riemann pour les systèmes hyperboliques li-

néaires à coefficients constants.

En projetant la différence des données

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L \quad (50)$$

sur les vecteurs propres, on obtient :

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}, \quad (51)$$

ce qui permet de déterminer les amplitudes des ondes $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_i(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$. La solution $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$ est donnée par :

$$\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0) = \mathbf{U}_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i \leq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}, \quad (52)$$

ou

$$\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0) = \mathbf{U}_R - \sum_{\tilde{\lambda}_i \geq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}. \quad (53)$$

Le système de lois de conservation a été remplacé par le système linéaire à coefficients constants, qui peut se voir comme un système modifié de lois de conservation :

$$\bar{\mathbf{U}}_t + \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{U}})_x = \mathbf{0}, \quad (54)$$

La fonction de flux associée s'écrit :

$$\bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{U}}) = \tilde{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{U}}. \quad (55)$$

Le flux numérique correspondant n'est pas le choix évident :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0), \quad (56)$$

où $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0)$ est donné comme précédemment.

Cette formulation serait plutôt incorrecte, comme le montre le cas d'un écoulement supersonique à droite où l'on calculerait un flux $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} \neq \mathbf{F}_L$.

La bonne expression pour le flux numérique s'obtient en utilisant les relations intégrales. Ainsi, on obtient le flux numérique final :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$$

où :

- $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$ est le flux numérique à l'interface
- \mathbf{F}_L et \mathbf{F}_R sont les flux gauche et droit
- $\tilde{\alpha}_i$ sont les coefficients de décomposition
- $\tilde{\lambda}_i$ sont les valeurs propres
- $\tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$ sont les vecteurs propres

Roe pour les équations d'Euler unidimensionnelles

Pour résoudre approximativement le problème de Riemann pour les équations d'Euler unidimensionnelles, Roe introduit la matrice jacobienne :

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 2)u^3 - \frac{c^2 u}{\gamma - 1} & \frac{3 - 2\gamma}{2}u^2 + \frac{c^2}{\gamma - 1} & \gamma u \end{bmatrix}.$$

Dans la section Modèle d'Euler de notre projet , nous avons montré que les valeurs propres de la matrice jacobienne sont :

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a,$$

où $a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ est la vitesse du son dans le gaz.

et que les vecteurs propres associés sont :

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix}.$$

où l'enthalpie totale H est donnée par :

$$H = \frac{E + p}{\rho} \tag{57}$$

où E représente l'énergie totale volumique :

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\rho u^2}_{\text{Énergie cinétique}} + \underbrace{\rho e}_{\text{Énergie interne}} \tag{58}$$

Et dans le cas des gaz parfaits, on a :

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \tag{59}$$

Nous avons vu précédemment que pour la méthode de Roe, il faut introduire une matrice jacobienne moyenne notée \tilde{A} qui doit satisfaire trois propriétés fondamentales.

Pour garantir la troisième propriété, qui correspond à la conservation, une grande avancée a été proposée par Roe : l'introduction d'un vecteur de paramètres \mathbf{Q} , permettant d'exprimer à la fois le vecteur des variables conservées \mathbf{U} et le flux $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ en fonction de \mathbf{Q} .

Pour notre schéma, on va utiliser le vecteur paramètre suivant :

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_5 \end{bmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ H \end{bmatrix}, \quad (60)$$

Maintenant, on peut exprimer les sauts ΔU et ΔF en fonction du saut ΔQ en utilisant deux matrices \tilde{B} et \tilde{C} . Ainsi, on propose les expressions suivantes :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2\tilde{q}_1 & 0 & 0 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 & 0 \\ \tilde{q}_3 & \frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_2 & \frac{\tilde{q}_1}{\gamma} \end{pmatrix} \quad (61)$$

et

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_3 & \frac{\gamma+1}{\gamma}\tilde{q}_2 & \frac{\gamma-1}{\gamma}\tilde{q}_1 \\ 0 & \tilde{q}_3 & \tilde{q}_2 \end{pmatrix} \quad (62)$$

La matrice de Roe est donnée par :

$$\tilde{A} = \tilde{B}\tilde{C}^{-1} \quad (63)$$

Les valeurs propres de \tilde{A} sont donc :

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u} - \tilde{a}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{u}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{u} + \tilde{a} \quad (64)$$

Ainsi les vecteurs propres s'écrivent :

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{a} \\ \hat{H} - \tilde{u}\tilde{a} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \frac{1}{2}\tilde{u}^2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{K}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{a} \\ \hat{H} + \tilde{u}\tilde{a} \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Ainsi dans ce schéma le symbole \tilde{n} désigne la moyenne de Roe pour la variable n . Les moyennes utilisées ci-dessus sont données par :

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad (66)$$

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L}v_L + \sqrt{\rho_R}v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad (67)$$

$$\tilde{w} = \frac{\sqrt{\rho_L}w_L + \sqrt{\rho_R}w_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad (68)$$

$$\hat{H} = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad (69)$$

$$\tilde{a} = \left((\gamma - 1) \left(\hat{H} - \frac{1}{2}\tilde{u}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (70)$$

Pour déterminer le flux numérique de Roe $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$, nous devons calculer les amplitudes d'onde $\tilde{\alpha}_i$. Ces dernières sont obtenues en projetant le saut $\Delta\mathbf{U}$ sur les vecteurs propres moyens :

$$\Delta\mathbf{U} = \sum_{i=1}^5 \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}. \quad (71)$$

On rappelle que le vecteur \mathbf{U} pour les équations d'Euler en 1D est défini par :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix},$$

Ainsi on obtient en développant la formule pour $\Delta\mathbf{U}$:

$$\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3 = \Delta(u_1), \quad (72)$$

$$\tilde{\alpha}_1(\tilde{u} - \tilde{a}) + \tilde{\alpha}_2\tilde{u} + \tilde{\alpha}_3(\tilde{u} + \tilde{a}) = \Delta(u_2), \quad (73)$$

$$\tilde{\alpha}_1(\tilde{H} - \tilde{u}\tilde{a}) + \frac{1}{2}\tilde{u}^2\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3(\tilde{H} + \tilde{u}\tilde{a}) = \Delta(u_3), \quad (74)$$

où :

- Δu_i représente la variation de la i -ème composante conservative
- \tilde{a} est la vitesse moyenne du son

Les termes de droite des équations représentent les sauts Δu_i des quantités conservatives :

$$\Delta u_i = (u_i)_R - (u_i)_L.$$

On résout ensuite (72) , (73) et (74) pour $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$. On trouve ainsi les valeurs suivants :

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{\gamma - 1}{\tilde{a}^2} [\Delta u_1 (\tilde{H} - \tilde{u}^2) + \tilde{u} \Delta u_2 - \overline{\Delta u_3}] \quad (75)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2\tilde{a}} [\Delta u_1 (\tilde{u} + \tilde{a}) - \Delta u_2 - \tilde{a} \tilde{\alpha}_2], \quad (76)$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \Delta u_1 - (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2), \quad (77)$$

avec

$$\overline{\Delta u_3} = \Delta u_3 \quad (78)$$

Nous avons donc maintenant tous les éléments permettant de calculer le flux numérique de Roe :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$$

Nous allons maintenant étudier ses avantages et ses limites.

Avantages

- La méthode permet une décomposition flux en ondes simple (chocs, contact, raréfactions), ce qui facilite l'étude des discontinuités.
- L'implémentation n'est pas complexe.
- Le schéma n'est pas très diffusif contrairement à Rusanov par exemple.
- Elle peut être adaptée à divers systèmes physiques et étendue à plusieurs dimensions.

Limites

- Le schéma ne respecte pas la condition d'entropie, ce qui peut causer des chocs de raréfaction non physiques. Nous détaillerons ce problème dans les sections suivantes.
- Le choix de la matrice moyenne \tilde{A} (ou du vecteur de paramètres \mathbf{Q}) n'est pas unique. Certains choix peuvent apporter des erreurs numériques.
- Pour d'autres cas que les équations d'Euler unidimensionnelles, le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres devient difficile.

Pour remédier à ces inconvénients, il existe des versions améliorées du schéma de Roe qui ajoutent une correction d'entropie. Ces améliorations ont été proposées par exemple par Harten et Hyman, qui permettent le respect de la condition d'entropie tout en gardant la précision de la méthode. Cependant, ces améliorations ne seront pas étudiées dans le cadre de ce projet. Notre analyse se concentre sur la version classique du schéma de Roe, qui suffit pour les objectifs de comparaison que nous nous sommes fixés dans la section des résultats numériques.

7 Positivité des méthodes

Dans cette section, nous allons étudier la positivité des méthodes, c'est-à-dire s'assurer de ne pas dériver vers des solutions non physiques (qui ne peuvent absolument pas exister physiquement).

Definition 7.1 (Positive Conservative Scheme). Un solveur de Riemann approché est dit positif conservatif si tous les états générés sont physiquement réels.

Dans le contexte des équations d'Euler, nous considérerons comme physiquement réels les états avec des densités positives et une énergie interne positive :

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, \quad \rho > 0 \quad \text{et} \quad e - \frac{1}{2}\rho u^2 > 0 \right\}. \quad (79)$$

L'heuristique de la preuve réside dans le fait que les méthodes HLL(-C) et Rusanov mettent à jour les valeurs selon une somme convexe des états, ce qui conserve l'état $n+1$ dans l'ensemble convexe G (si l'état n est dans G aussi).

On rappelle le problème :

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{f}(\mathbf{w})_x = 0, \quad (80)$$

$$\mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{w}_R & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + p \\ (e + p)\frac{m}{\rho} \end{pmatrix}$$

$$m = \rho u, \quad e = \rho \epsilon + \frac{1}{2}\rho u^2, \quad p = (\gamma - 1)\epsilon \rho$$

7.1 Positivité du schéma Rusanov

On considère une cellule saine (avec un état physique réel) i au temps n : U_i^n et ses deux voisins sains également. Selon le schéma de Rusanov (6.1),

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{dt}{dx} [F_{i+1/2} - F_{i-1/2}]$$

donc pour ρ , c'est-à-dire U_1 :

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} &= \rho^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(U_{i+1}^n) - F(U_{i-1}^n) + c_{i+1/2}^n(\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) + c_{i-1/2}^n(\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)] \\ \rho_i^{n+1} &= \rho^n - \lambda [\rho_{i+1}^n u_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n u_{i-1}^n + c_{i+1/2}^n(\rho_i^n - \rho_{i+1}^n) + c_{i-1/2}^n(\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)] \\ \rho_i^{n+1} &= (1 - \lambda(c_{i+1/2}^n + c_{i-1/2}^n))\rho^n + \rho_{i+1}^n \lambda(c_{i+1/2}^n - u_{i+1}^n) + \rho_{i-1}^n \lambda(c_{i-1/2}^n + u_{i-1}^n) \end{aligned}$$

Par définition de $c_{i \pm 1/2}^n$ et par la condition CFL, les termes sont positifs donc la somme est positive. Un calcul adorabile du même acabit donne sûrement le résultat pour l'énergie interne spécifique.

$$2u_1^{n+1}u_3^{n+1} - (u_2^{n+1})^2 \geq 0$$

7.2 Positivité du schéma HLL

Éventuellement, faire pareil que pour la section précédente. J'avais l'idée de reprendre une preuve de [7] indiquant "The numerical signal velocities (S_L et S_R) are lower and upper bounds for the physical signal velocity. Therefore the average state is given by : (l'intégrale sur le domaine). As long as no vacuum is present, all states in the exact solution to the Riemann problem are inside the set G. Since G is convex, the average state is inside G. [etc]". Aussi selon [1] il y a une inexactitude, les signal velocities ne seraient pas réellement "bounding", contrairement à ce qui est affirmé.

Je me suis torturé l'esprit entre les différentes façons de démontrer la conservation de la positivité. Notamment, je pense qu'on peut réduire HLLC à HLL, et HLL à Rusanov et donc conclure. Précisément en partant de l'idée qu'ils englobent un espace convexe de solutions. Je n'ai pas trouvé d'angle mathématique qui me paraissait limpide alors je me suis résolu aux calculs brutaux, que j'ai globalement laissés sur mes brouillons. Je pense bien que le mieux serait de passer par un raisonnement sur les intégrales comme la citation ci-dessus.

7.3 Positivité du schéma HLLC

Supposons donc que \mathbf{U}_L et $\mathbf{U}_R \in G$. On considère le cas d'une détente. On obtient alors les conditions suivantes pour l'état gauche étoile (l'état droit étoile suit par symétrie) :

$$\begin{aligned} \rho_L^* &= \rho_L \frac{S_L - q_L}{S_L - S_M} > 0 \\ e_L^* - \frac{1}{2}\rho_L^*(u_L^*)^2 &> 0 \end{aligned} \tag{81}$$

Et par (36) et comme S_M est un état moyen entre S_L et S_R ,

$$S_L = \min[q_L - c_L, \tilde{q} - \tilde{c}] \leq q_L - c_L \leq q_L \text{ et } S_L - S_M < 0 \tag{82}$$

Donc,

$$\rho_L^* > 0 \tag{83}$$

Aussi, par (28), (29) et (81),

$$\begin{aligned}
& \frac{(S_L - q_L)E_L - p_L q_L + p^* S_M}{S_L - S_M} - \frac{1}{2\rho_L \frac{S_L - q_L}{S_L - S_M}} \left(\frac{(S_L - q_L)\rho_L u_L + (p^* - p_L)n_x}{S_L - S_M} \right)^2 > 0 \\
\Leftrightarrow & (q_L - S_L)E_L + p_L q_L - p^* S_M + \frac{((S_L - q_L)\rho_L u_L + p^* n_x - p_L n_x)^2}{2\rho_L(S_L - q_L)} > 0 \\
\Leftrightarrow & (q_L - S_L)E_L + p_L q_L - (\rho_L(q_L - S_L)(q_L - S_M) + p_L)S_M \\
& + \frac{((S_L - q_L)\rho_L u_L + \rho_L(q_L - S_L)(q_L - S_M)n_x)^2}{2\rho_L(S_L - q_L)} > 0 \\
\Leftrightarrow & (q_L - S_L)E_L + p_L q_L - (\rho_L(q_L - S_L)(q_L - S_M) + p_L)S_M + \frac{\rho_L(S_L - q_L)}{2}(u_L + (S_M - q_L)n_x)^2 > 0 \\
\Leftrightarrow & (q_L - S_L)\left(\frac{p_L}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho_L u_L^2\right) + p_L(q_L - S_M) - \rho_L(q_L - S_L)(q_L - S_M)S_M \\
& + \frac{\rho_L(S_L - q_L)}{2}\left[2q_L(S_M - q_L) + (S_M - q_L)^2\right] > 0 \\
\Leftrightarrow & (q_L - S_L)\left(\frac{p_L}{\gamma - 1} - \rho_L(q_L - S_M)S_M - \frac{\rho_L}{2}\left[2q_L(S_M - q_L) + (S_M - q_L)^2\right]\right) + p_L(q_L - S_M) > 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{p_L}{\gamma - 1} + \rho_L(q_L - S_M)^2 - \frac{\rho_L(S_M - q_L)^2}{2} + \frac{p_L(q_L - S_M)}{q_L - S_L} > 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\rho_L(q_L - S_M)^2}{2} - \frac{p_L(S_M - q_L)}{q_L - S_L} + \frac{p_L}{\gamma - 1} > 0
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne une équation du second degré en $\alpha = S_M - q_L$:

$$\frac{\rho_L}{2}\alpha^2 - \frac{p_L}{q_L - S_L}\alpha + \frac{p_L}{\gamma - 1} > 0 \quad (84)$$

Étudions le discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{p_L^2}{(q_L - S_L)^2} - 4\frac{\rho_L}{2}\frac{p_L}{\gamma - 1} < 0 \\
\Leftrightarrow & \sqrt{\frac{(\gamma - 1)p_L}{2\rho_L}} < q_L - S_L \text{ car } q_L - S_L > 0 \\
\Leftrightarrow & q_L - \beta c_L > S_L \text{ où } c_L = \sqrt{\frac{\gamma p_L}{\rho_L}} \text{ et } \beta = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}}
\end{aligned}$$

Or $\gamma > 1$, d'où $\beta < 1$. Donc par définition de S_L (36), c'est toujours vrai. On obtient alors un discriminant négatif, ce qui nous donne (81). On obtient alors la positivité de tous les états intermédiaires.

7.4 Positivité de Roe et des schémas dérivés du problème de Riemann linéarisé

Spoiler, le schéma de Roe ne conserve pas la positivité. Plus général encore, aucun schéma issu de la linéarisation du problème de Riemann ne peut conserver la positivité, comme l'ont démontré Einfeldt, Munz, Roe et Sjögren dans [7] dont nous allons retranscrire et détailler la preuve.

On reprend les notations du papier, avec le problème de Riemann :

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{f}(\mathbf{w})_x = 0, \quad (85)$$

$$\mathbf{w}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_L & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{w}_R & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + p \\ (e + p)\frac{m}{\rho} \end{pmatrix}$$

$$m = \rho u, \quad e = \rho \epsilon + \frac{1}{2}\rho u^2, \quad p = (\gamma - 1)\epsilon\rho$$

Pour le problème de Riemann avec les données initiales $w_L = (\rho, -m, e)^T$ et $w_R = (\rho, m, e)^T$ où $m > 0$, on peut distinguer les trois cas suivants :

- (a) Si $\frac{4\gamma pe}{3\gamma-1} - m^2 \leq 0$, un vide apparaît dans la solution ($\rho = 0$).
- (b) Si $\frac{4\gamma pe}{3\gamma-1} - m^2 > 0$ et $(\gamma - 1)pe - m^2 \leq 0$, le problème admet une solution avec une densité et une énergie interne positives, mais n'est pas linéarisable.
- (c) Si $(\gamma - 1)pe - m^2 > 0$, le problème admet une solution avec une densité et une énergie interne positives et est linéarisable.

Démonstration. Pour étudier la propriété de linéarisation, nous résolvons un problème de Riemann pour l'équation linéaire avec les états initiaux $w_L = (p, -m, e)^T$ et $w_R = (p, m, e)^T$. On linéarise l'équation autour d'un état moyen $\hat{\mathbf{w}}$:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + A(\hat{\mathbf{w}}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0, \quad A(\hat{\mathbf{w}}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}}(\hat{\mathbf{w}}).$$

L'état moyen est donné par la moyenne arithmétique des états initiaux :

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}_L + \mathbf{w}_R}{2} = \frac{(\rho, -m, e) + (\rho, m, e)}{2} = (\rho, 0, e)^T.$$

À $\hat{\mathbf{w}} = (\rho, 0, e)^T$, on a :

$$\hat{\rho} = \rho, \quad \hat{m} = 0, \quad \hat{e} = e, \quad \hat{u} = \frac{\hat{m}}{\hat{\rho}} = 0,$$

$$\hat{p} = (\gamma - 1) \left(\hat{e} - \frac{1}{2} \frac{\hat{m}^2}{\hat{\rho}} \right) = (\gamma - 1)e,$$

$$\hat{c} = \sqrt{\frac{\gamma \hat{p}}{\hat{\rho}}} = \sqrt{\frac{\gamma(\gamma - 1)e}{\rho}}.$$

La matrice Jacobienne $A(w)$ est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2} \frac{m^2}{\rho^2} & \frac{3-\gamma}{\rho} m & \gamma - 1 \\ -\frac{m}{\rho^2} \left(\gamma e - \frac{(\gamma-1)}{2} \frac{m^2}{\rho} \right) + \frac{(\gamma-1)m^3}{2\rho^3} & \frac{\gamma e}{\rho} - \frac{3(\gamma-1)}{2} \frac{m^2}{\rho^2} & \frac{\gamma m}{\rho} \end{bmatrix},$$

et à $\hat{\mathbf{w}}$ (avec $\hat{m} = 0$) :

$$A(\hat{\mathbf{w}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - 1 \\ 0 & \frac{\gamma e}{\rho} & 0 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de $A(\hat{\mathbf{w}})$ sont obtenues en résolvant :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & \gamma - 1 \\ 0 & \frac{\gamma e}{\rho} & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \left(\lambda^2 - (\gamma - 1) \frac{\gamma e}{\rho} \right) = 0,$$

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \pm \sqrt{(\gamma - 1) \frac{\gamma e}{\rho}} = \pm \hat{c},$$

correspondant aux vitesses caractéristiques $-\hat{c}$, 0 , \hat{c} , qui sont cohérentes avec les équations d'Euler en 1D ($\hat{u} - \hat{c}$, \hat{u} , $\hat{u} + \hat{c}$, avec $\hat{u} = 0$).

Les vecteurs propres associés sont :

- Pour $\lambda_1 = -\hat{c}$:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{c} \\ \frac{\hat{c}^2}{\gamma-1} \end{pmatrix},$$

- Pour $\lambda_2 = 0$:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- Pour $\lambda_3 = \hat{c}$:

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{c} \\ \frac{\hat{c}^2}{\gamma-1} \end{pmatrix}.$$

La solution du problème linéarisé est constituée de quatre états \mathbf{w}_R , \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 , \mathbf{w}_L , séparés par des ondes de vitesses $-\hat{c}$, 0 , \hat{c} . On exprime le saut $\mathbf{w}_L - \mathbf{w}_R$ dans la base des vecteurs propres :

$$\mathbf{w}_R - \mathbf{w}_L = (\rho, m, e) - (\rho, -m, e) = (0, 2m, 0) = \alpha_1 \mathbf{R}_1 + \alpha_2 \mathbf{R}_2 + \alpha_3 \mathbf{R}_3,$$

$$(0, 2m, 0) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{c} \\ \frac{\hat{c}^2}{\gamma-1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{c} \\ \frac{\hat{c}^2}{\gamma-1} \end{pmatrix},$$

ce qui donne les équations :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 \hat{c} + \alpha_3 \hat{c} = 2m, \\ (\alpha_1 + \alpha_3) \frac{\hat{c}^2}{\gamma-1} = 0 \end{cases} \quad (86)$$

On résout :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \implies \alpha_3 = -\alpha_1, \\ (\alpha_3) \hat{c} + \alpha_3 \hat{c} = 2\alpha_3 \hat{c} = 2m \implies \alpha_1 = -\frac{m}{\hat{c}}, \quad \alpha_3 = \frac{m}{\hat{c}}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{m}{\hat{c}} + \alpha_2 + \frac{m}{\hat{c}} = 0 \implies \alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (87)$$

Les états intermédiaires sont :

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_L + \alpha_1 \mathbf{R}_1 = (\rho, m, e) - \frac{m}{\hat{c}} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{c} \\ \frac{\hat{c}^2}{\gamma-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho - \frac{m}{\hat{c}} \\ 0 \\ e - \frac{m\hat{c}}{\gamma-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{R}_2 = \mathbf{w}_1 \quad (\text{car } \alpha_2 = 0),$$

$$\mathbf{w}_R = \mathbf{w}_2 + \alpha_3 \mathbf{R}_3 = \left(\rho - \frac{m}{\hat{c}}, 0, e - \frac{m\hat{c}}{\gamma-1} \right) + \left(\frac{m}{\hat{c}}, m, \frac{m\hat{c}}{\gamma-1} \right) = (\rho, m, e),$$

ce qui correspond bien à \mathbf{w}_R .

On vérifie les conditions physiques pour \mathbf{w}_1 (ou \mathbf{w}_2 , c'est pareil du coup) :

$$\rho_1 = \rho - \frac{m}{\hat{c}} \geq 0 \implies \rho \geq \frac{m}{\hat{c}} \implies \hat{c} \geq \frac{m}{\rho},$$

$$p_1 = (\gamma - 1) \left(e_1 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{\rho_1} \right) = (\gamma - 1) \left(e - \frac{m\hat{c}}{\gamma-1} \right) = (\gamma - 1)e - m\hat{c} \geq 0,$$

$$\hat{c} \leq \frac{(\gamma - 1)e}{m},$$

$$\frac{m}{\rho} \leq \hat{c} \leq \frac{(\gamma - 1)e}{m} \implies (\gamma - 1)\rho e - m^2 \geq 0,$$

ce qui est cohérent avec le cas (c) de l'énoncé. Ainsi, la solution est linéarisable et les conditions physiques sont satisfaites. Dans le cas (a), m est suffisamment grand pour engendrer un vide. Je n'ai pas trouvé dans les papiers des explications claires du problème mais j'imagine que c'est non

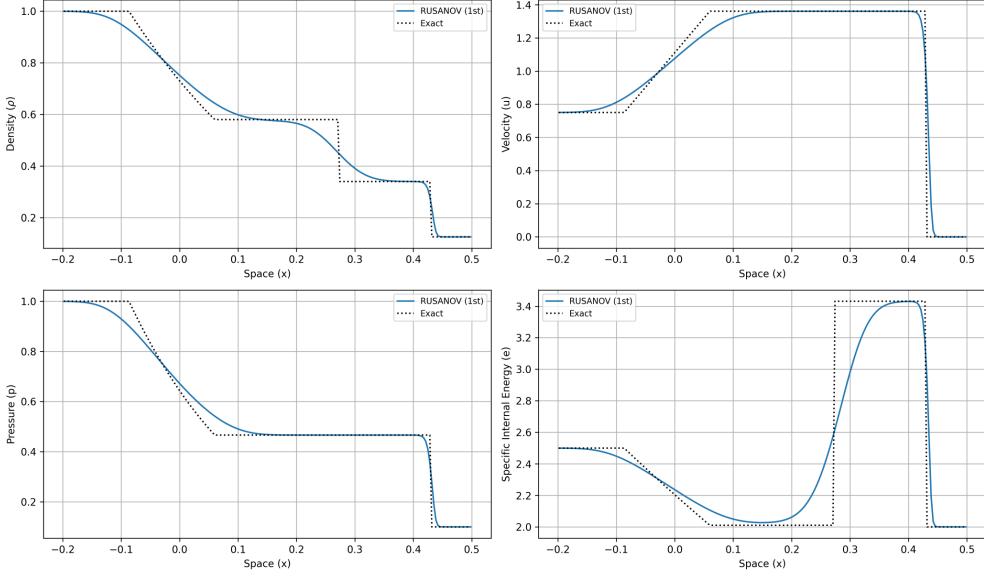
physique ? En tout cas, ce serait non linéarisable et donc instable. L'expérimentation le confirme. Dans le cas (b), pareil je ne suis pas sûr mathématiquement, cependant il semblerait que ce soit le même style de soucis. C'est à dire que l'on peut éviter le vide mais non linéairement.

□

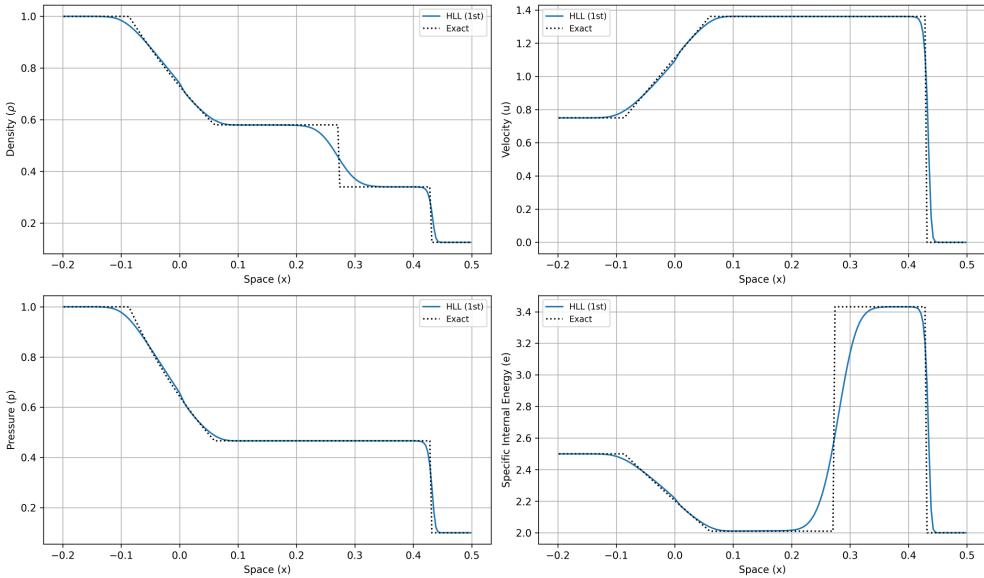
La raison de l'échec de la linéarisation en une dimension est l'apparition de deux ondes de raréfaction dans la solution exacte du problème de Riemann.

8 Résultats Numériques

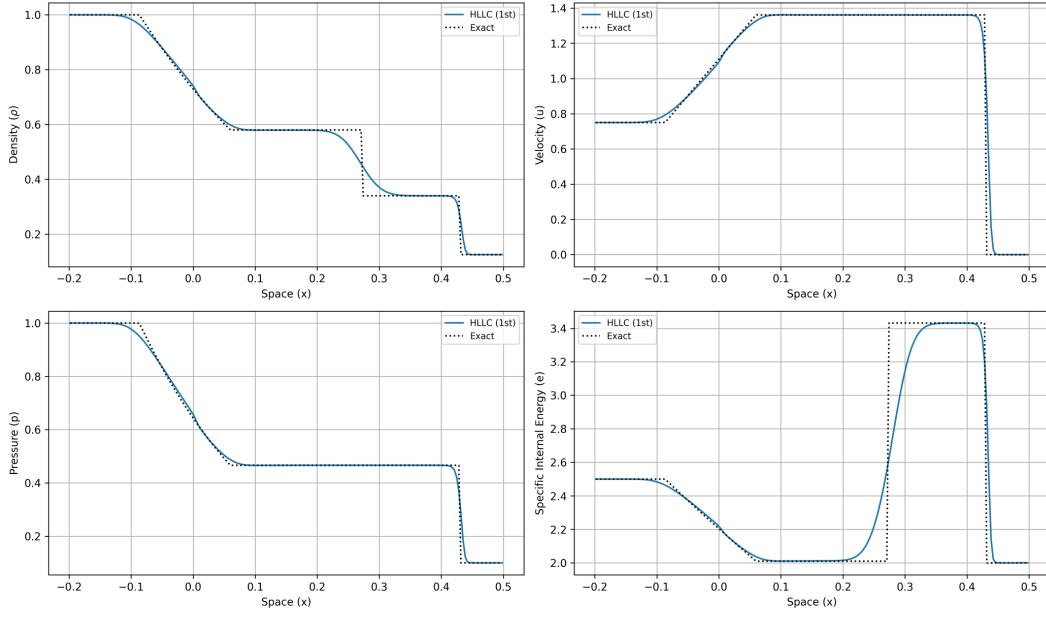
Analysis: RUSANOV (1st Order) on Sod's Problem (Toro 1 Variant)
(200 cells, CFL=0.5, T=0.2)



Analysis: HLL (1st Order) on Sod's Problem (Toro 1 Variant)
(200 cells, CFL=0.5, T=0.2)

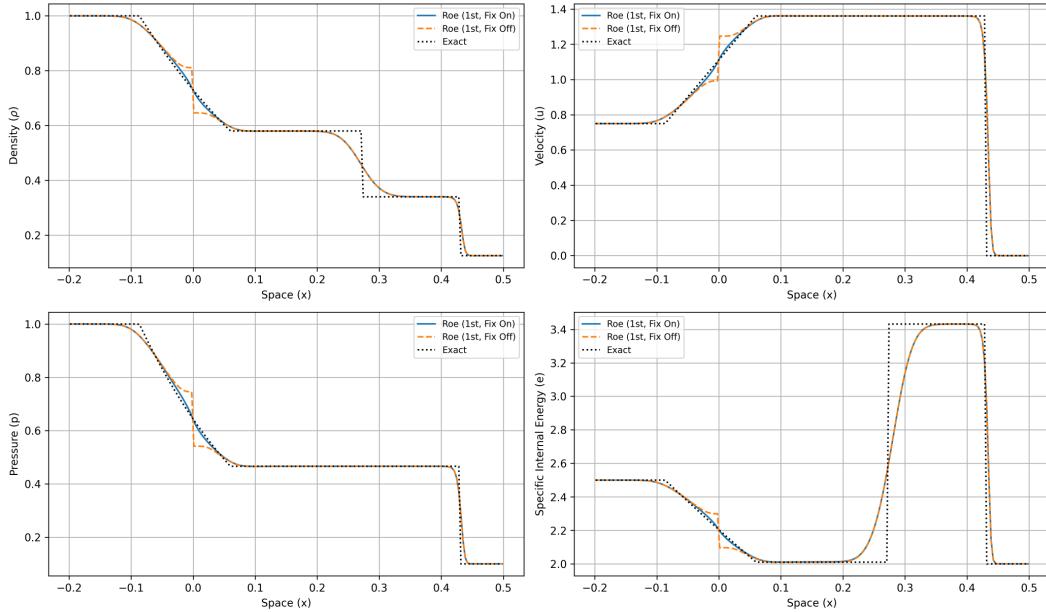


Analysis: HLLC (1st Order) on Sod's Problem (Toro 1 Variant)
(200 cells, CFL=0.5, T=0.2)



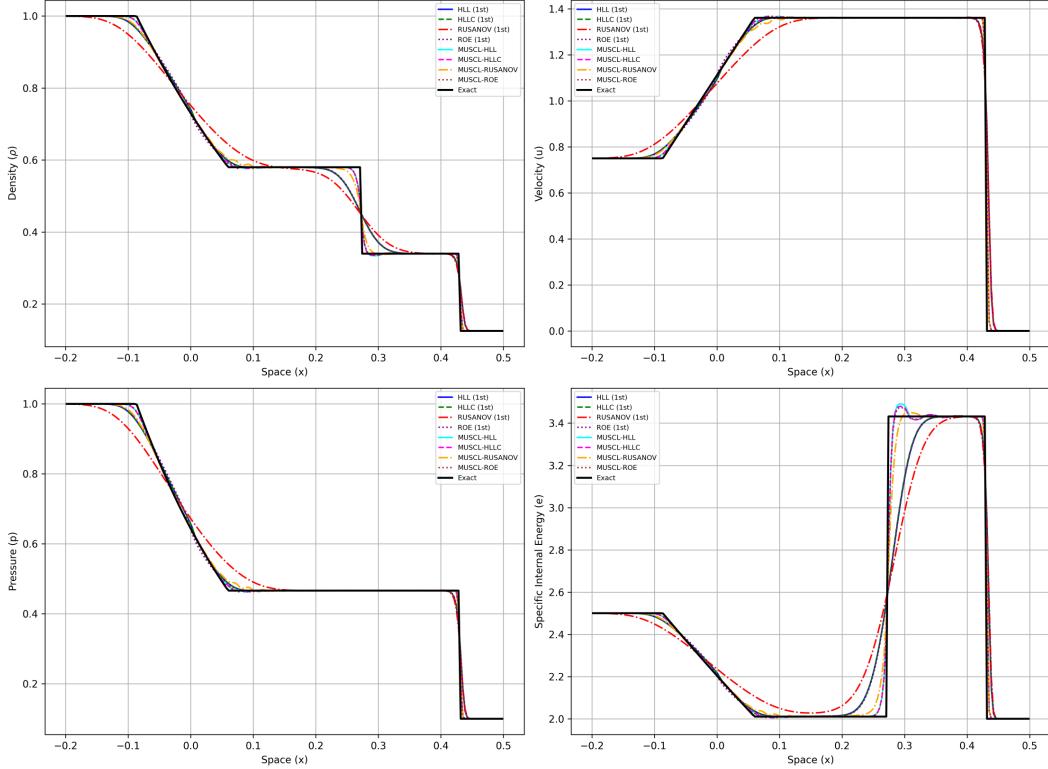
HLLC (1st Order): Good overall resolution of waves for a 1st order scheme, especially the contact.

Analysis: ROE (1st Order) on Sod's Problem (Toro 1 Variant)
(200 cells, CFL=0.5, T=0.2)

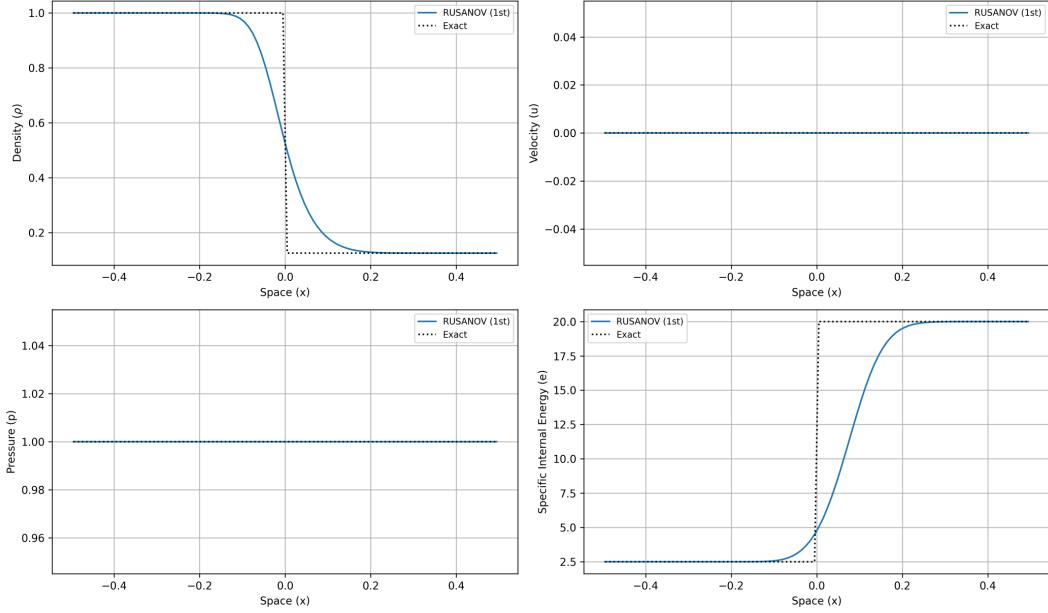


Roe (1st Order): Compares with/without entropy fix. Without fix, unphysical expansion shocks or glitches may appear in rarefactions. The fix should mitigate this. Both versions show sharp shocks.

Test: Sod's Problem (Toro 1 Variant) at T=0.2 (200 cells, CFL=0.5)

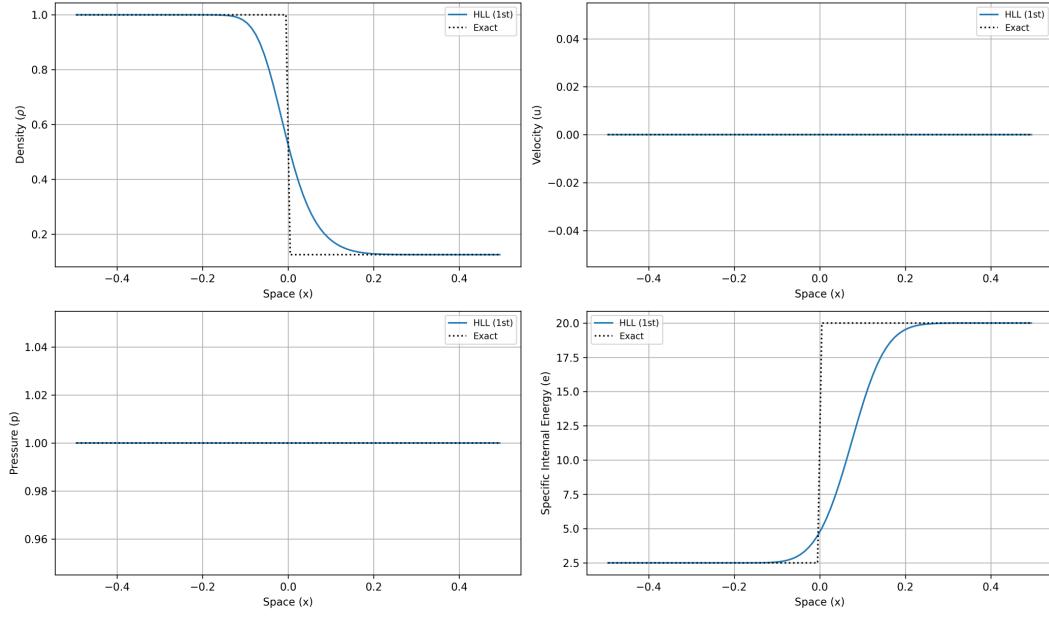


Analysis: RUSANOV (1st Order) on Stationary Contact Discontinuity
(100 cells, CFL=0.5, T=0.2)



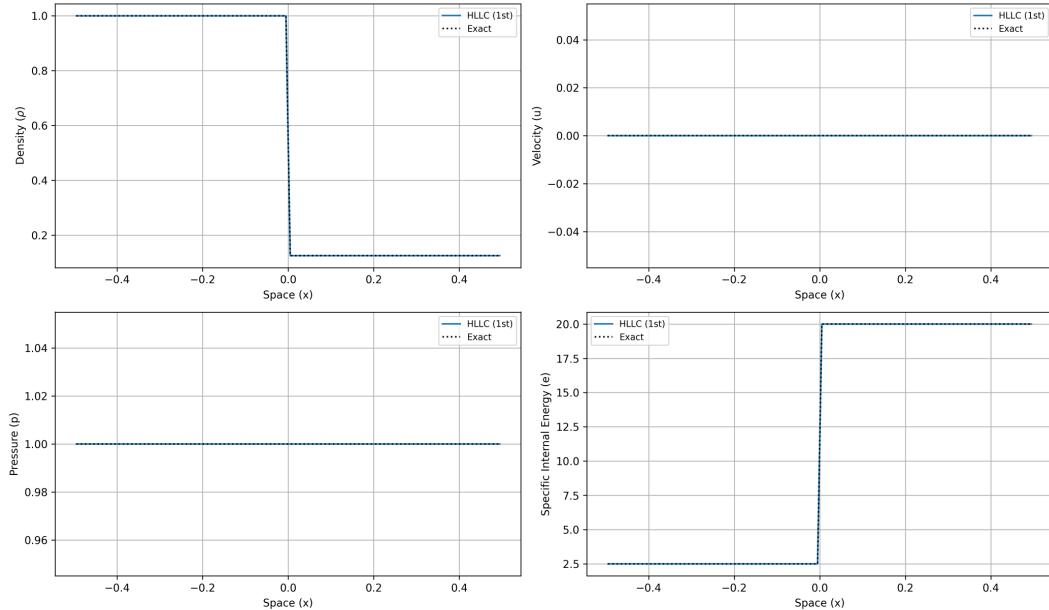
Rusanov (1st Order): Extremely diffusive, contact is almost entirely smeared out.

Analysis: HLL (1st Order) on Stationary Contact Discontinuity
(100 cells, CFL=0.5, T=0.2)



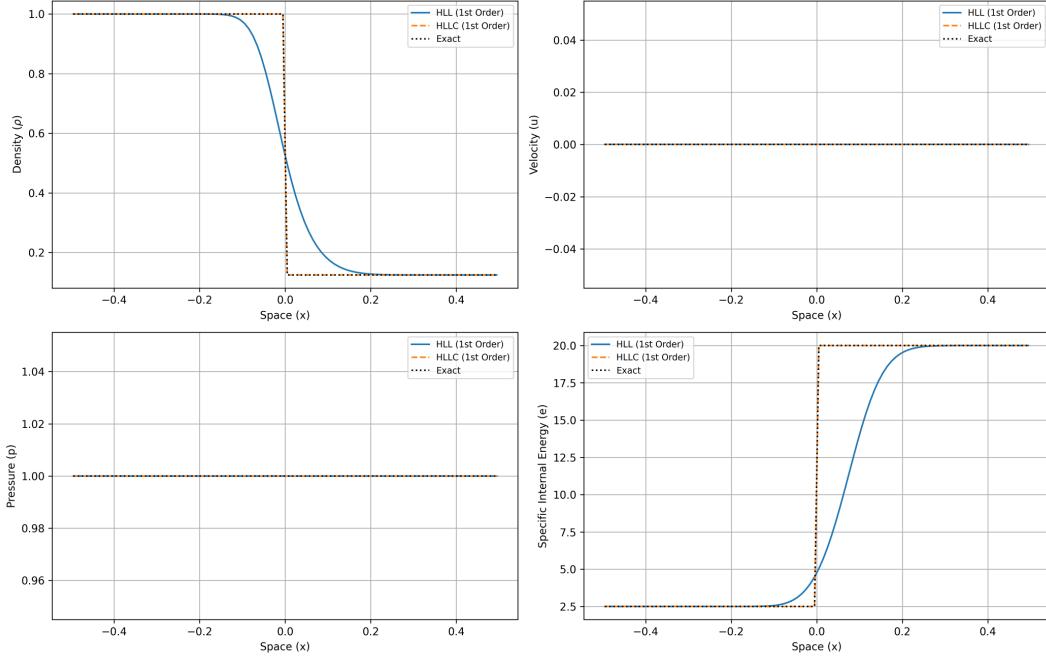
HLL (1st Order): Highly diffusive, smearing the contact discontinuity significantly.

Analysis: HLLC (1st Order) on Stationary Contact Discontinuity
(100 cells, CFL=0.5, T=0.2)

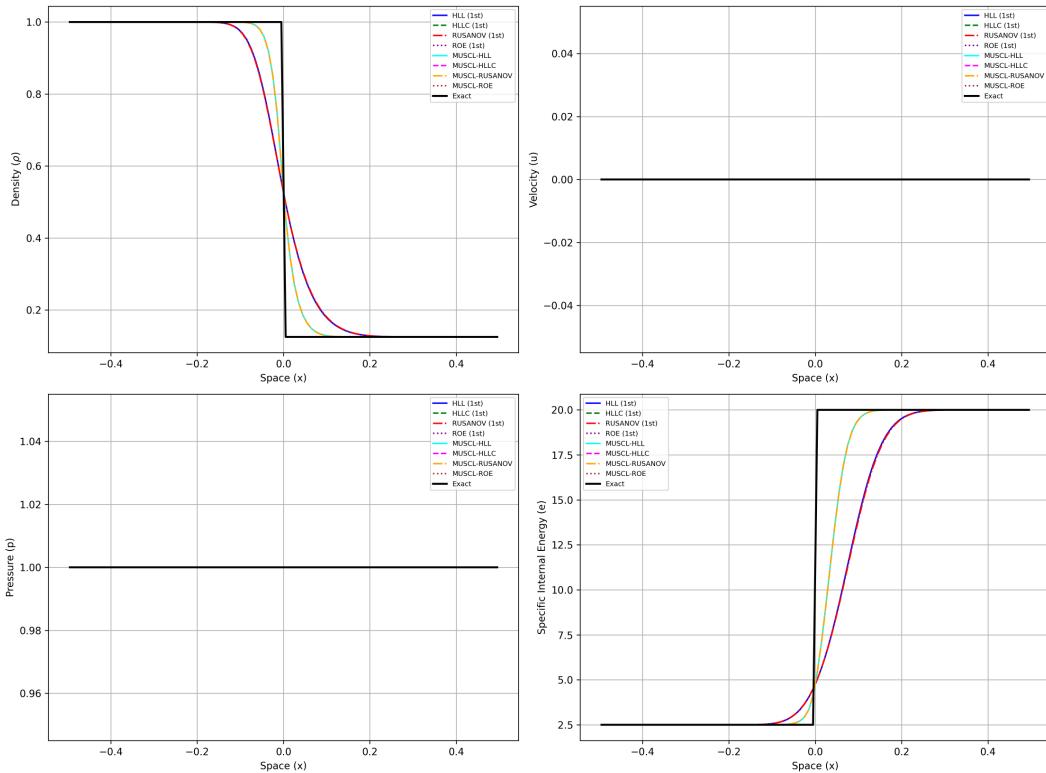


HLLC (1st Order): Resolves contact discontinuity much better than HLL, but still shows some diffusion.

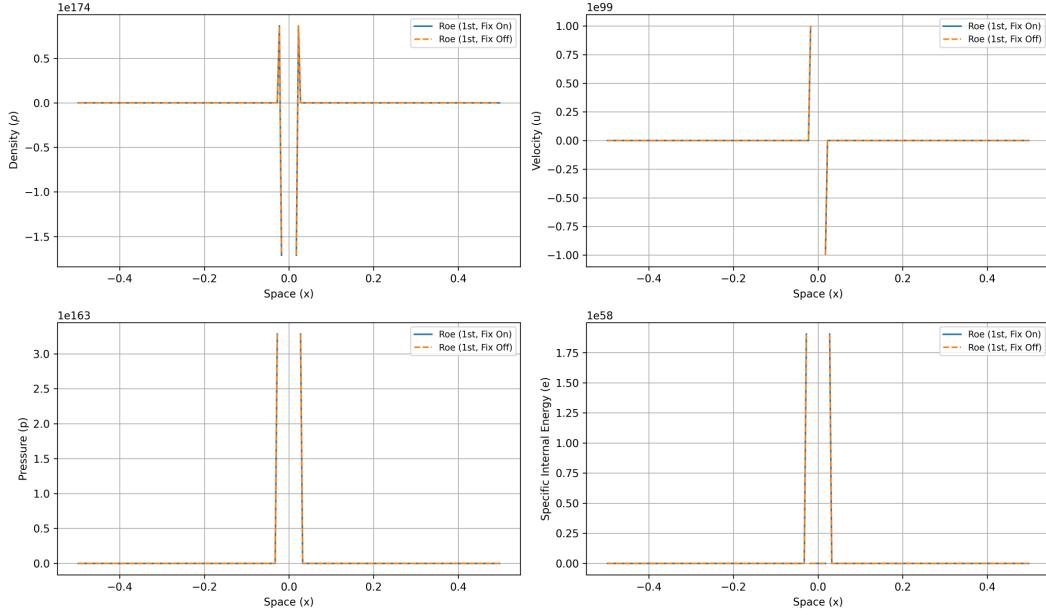
HLL vs HLLC (1st Order) on Stationary Contact Discontinuity
(100 cells, CFL=0.5, T=0.2)



Test: Stationary Contact Discontinuity at T=0.2 (100 cells, CFL=0.5)

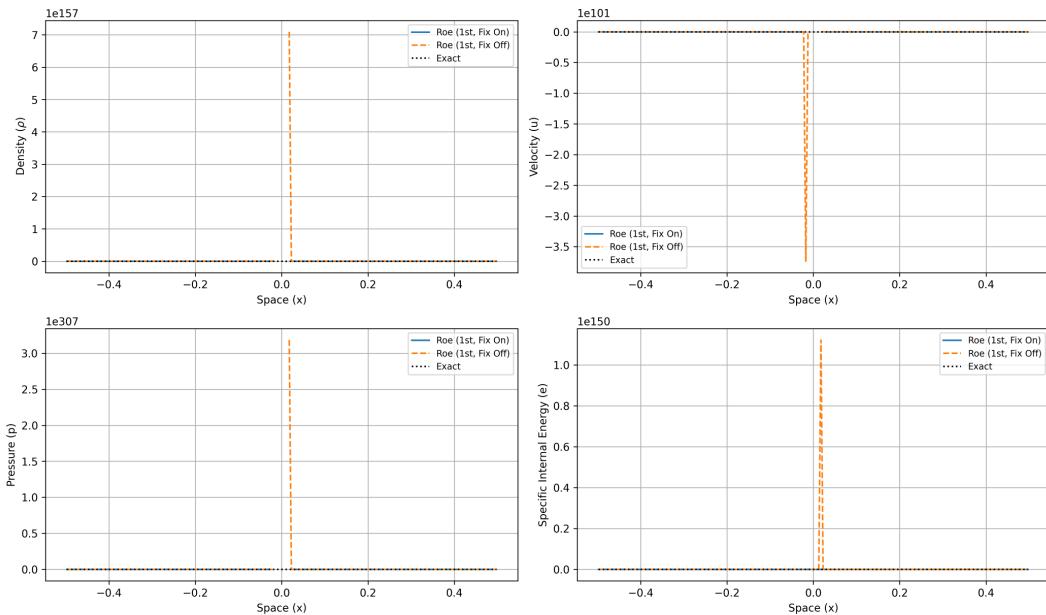


Analysis: ROE (1st Order) on Roe Linearization Test (Case a: Vacuum Formation)
 (200 cells, CFL=0.5, T=0.05)



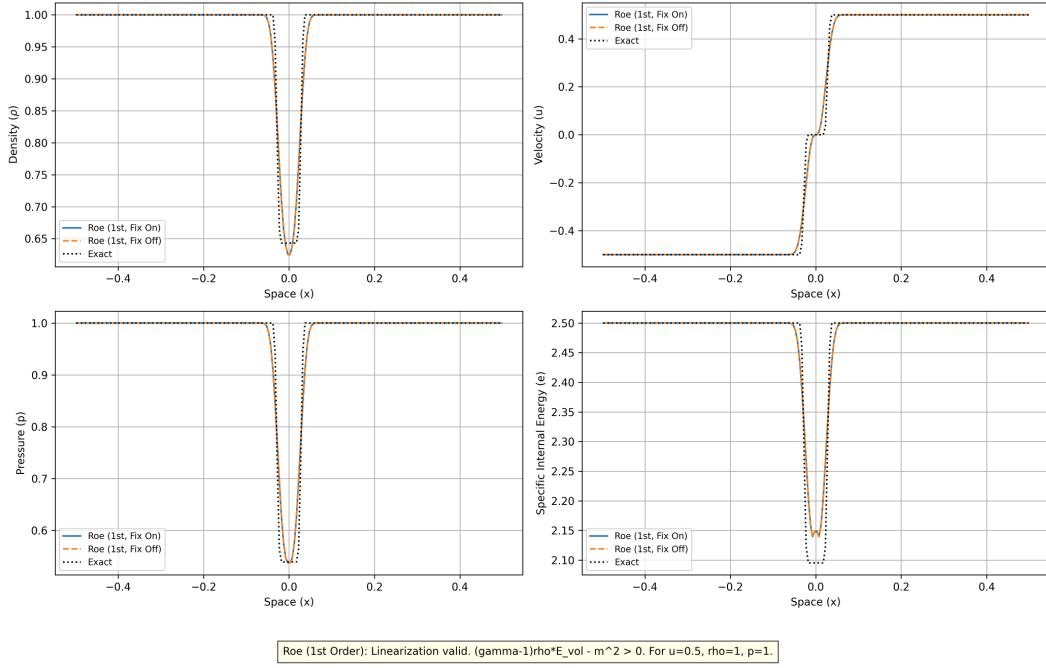
Roe (1st Order): Vacuum formation in exact solution. Linearization fails ($\rho_1 < 0$). $(4\gamma\rho E_{vol})/(3(\gamma-1)) - m^2 \leq 0$. For $u=6.0$, $\rho=1$, $p=1$.

Analysis: ROE (1st Order) on Roe Linearization Test (Case b: Non-linearizable, Positive Density)
 (200 cells, CFL=0.5, T=0.15)

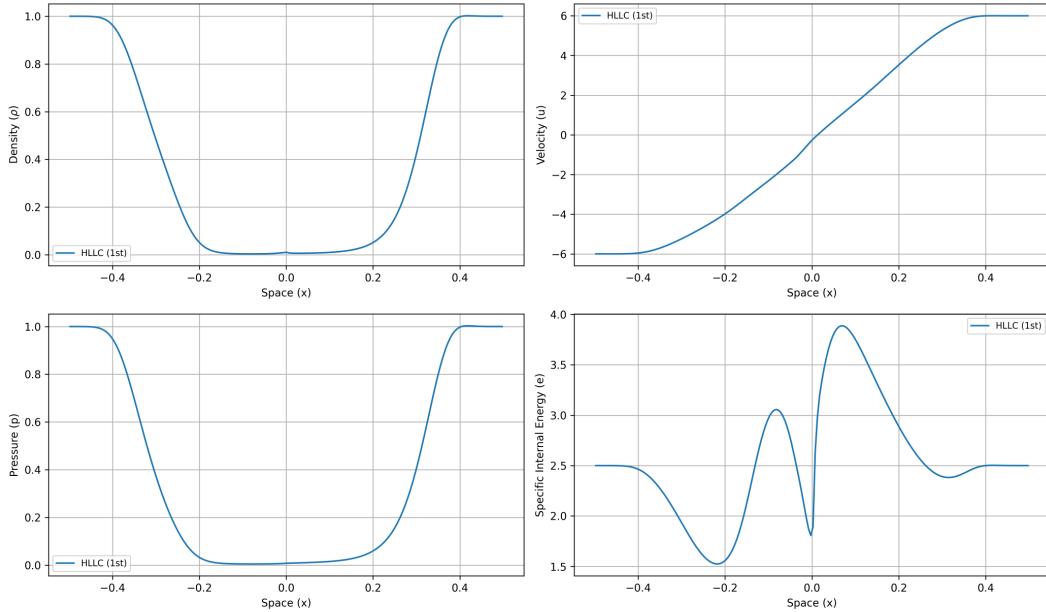


Roe (1st Order): Linearization fails ($\rho_1 < 0$). Exact solution has positive density. $(\gamma-1)\rho E_{vol} - m^2 \leq 0$. For $u=\sqrt{2}$, $\rho=1$, $p=1$.

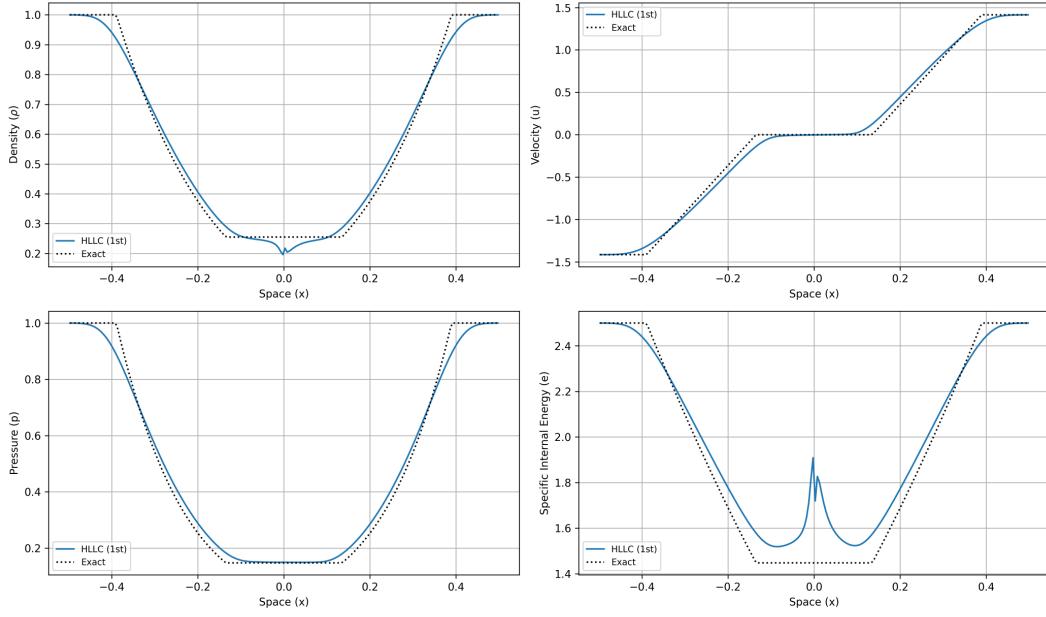
Analysis: ROE (1st Order) on Roe Linearization Test (Case c: Linearizable)
(200 cells, CFL=0.5, T=0.02)



Analysis: HLLC (1st Order) on Roe Linearization Test (Case a: Vacuum Formation)
(200 cells, CFL=0.5, T=0.05)

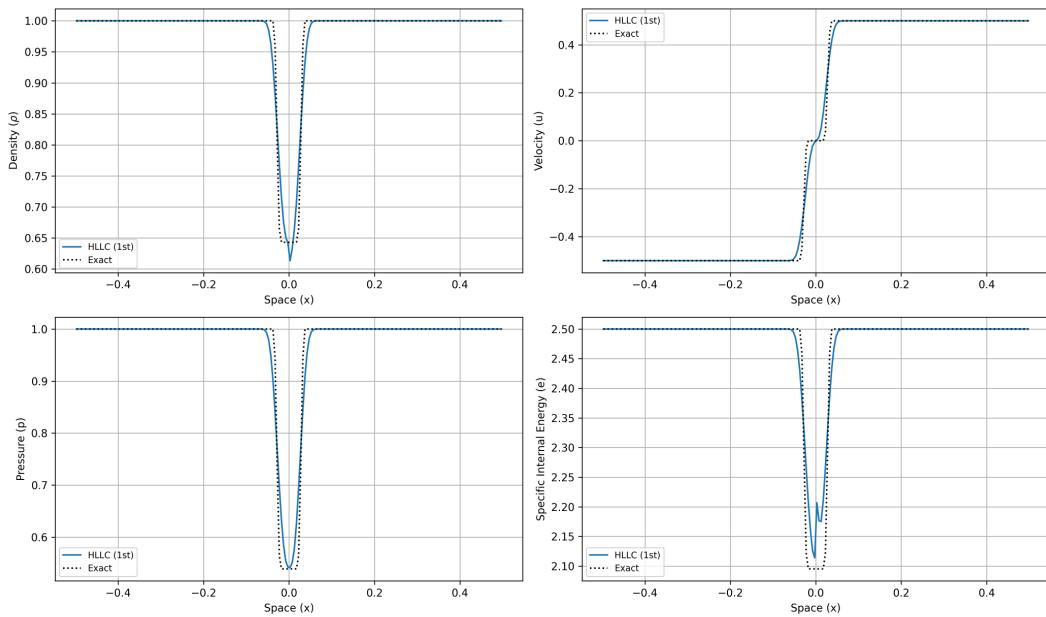


Analysis: HLLC (1st Order) on Roe Linearization Test (Case b: Non-linearizable, Positive Density)
 (200 cells, CFL=0.5, T=0.15)



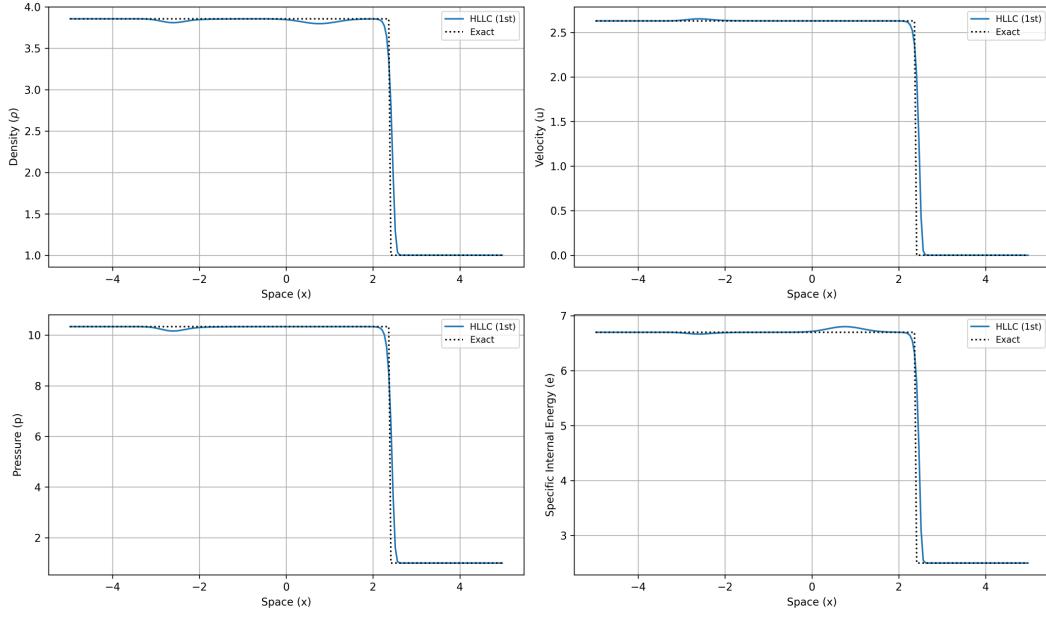
Roe (1st Order): Linearization fails ($p_1 < 0$). Exact solution has positive density. ($\gamma-1$) $\rho E_{vol} - m^2 \leq 0$. For $u=\sqrt{2}$, $\rho=1$.

Analysis: HLLC (1st Order) on Roe Linearization Test (Case c: Linearizable)
 (200 cells, CFL=0.5, T=0.02)



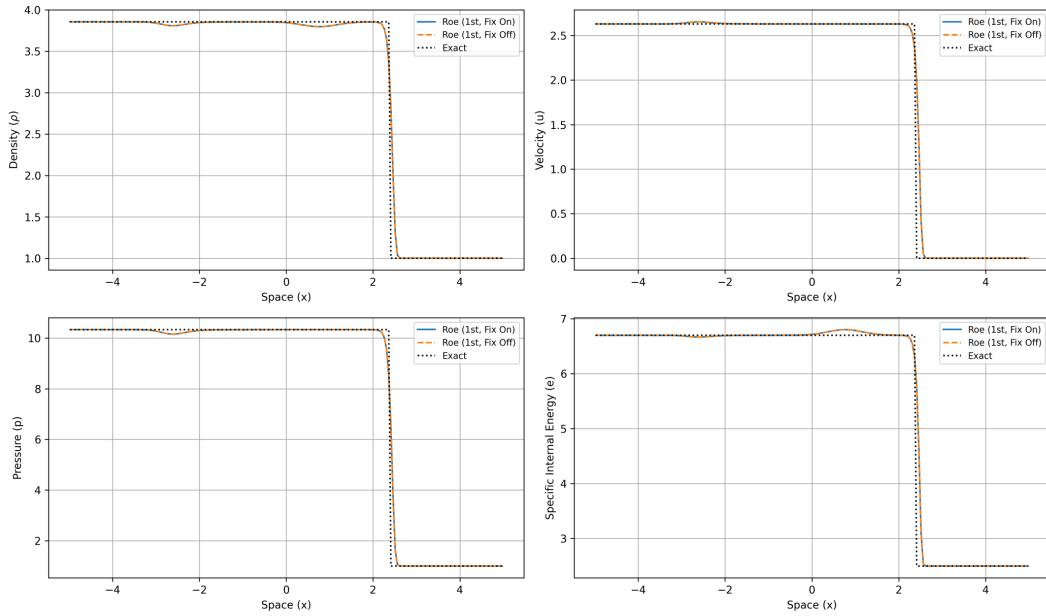
Roe (1st Order): Linearization valid. ($\gamma-1$) $\rho E_{vol} - m^2 > 0$. For $u=0.5$, $\rho=1$, $p=1$.

Analysis: HLLC (1st Order) on Shu-Osher Problem
(199 cells, CFL=0.5, T=1.8)



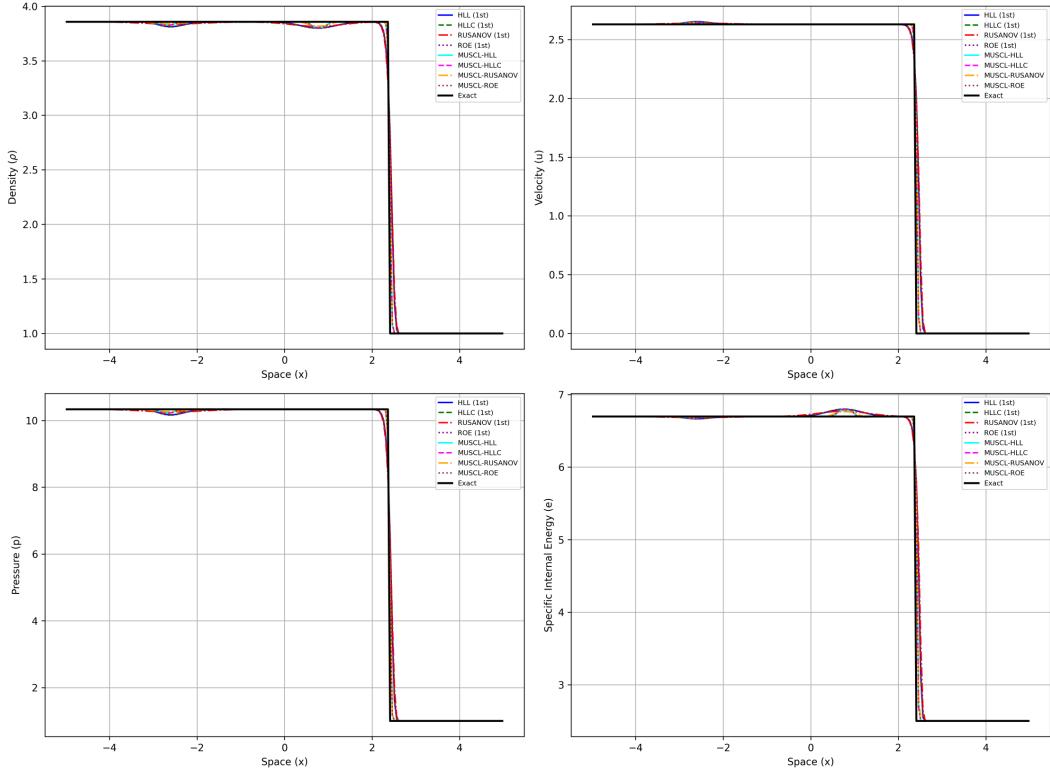
HLLC (1st Order): Tests interaction of shock with entropy/density waves.

Analysis: Roe (1st Order) on Shu-Osher Problem
(199 cells, CFL=0.5, T=1.8)

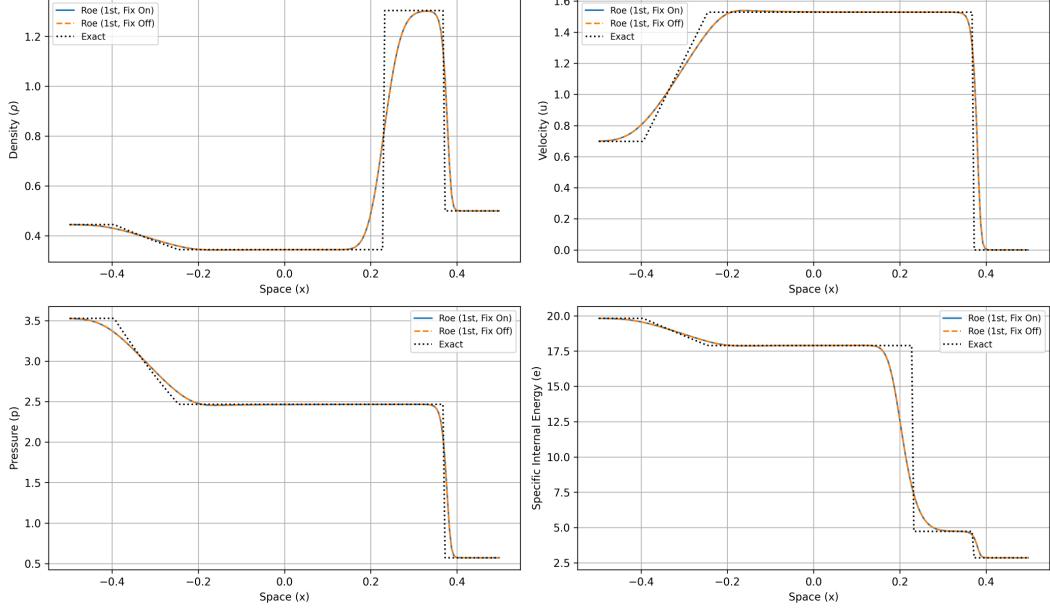


Roe (1st Order) on Shu-Osher: Tests shock-entropy wave interaction. Compare with/without entropy fix.

Test: Shu-Osher Problem at T=1.8 (199 cells, CFL=0.5)

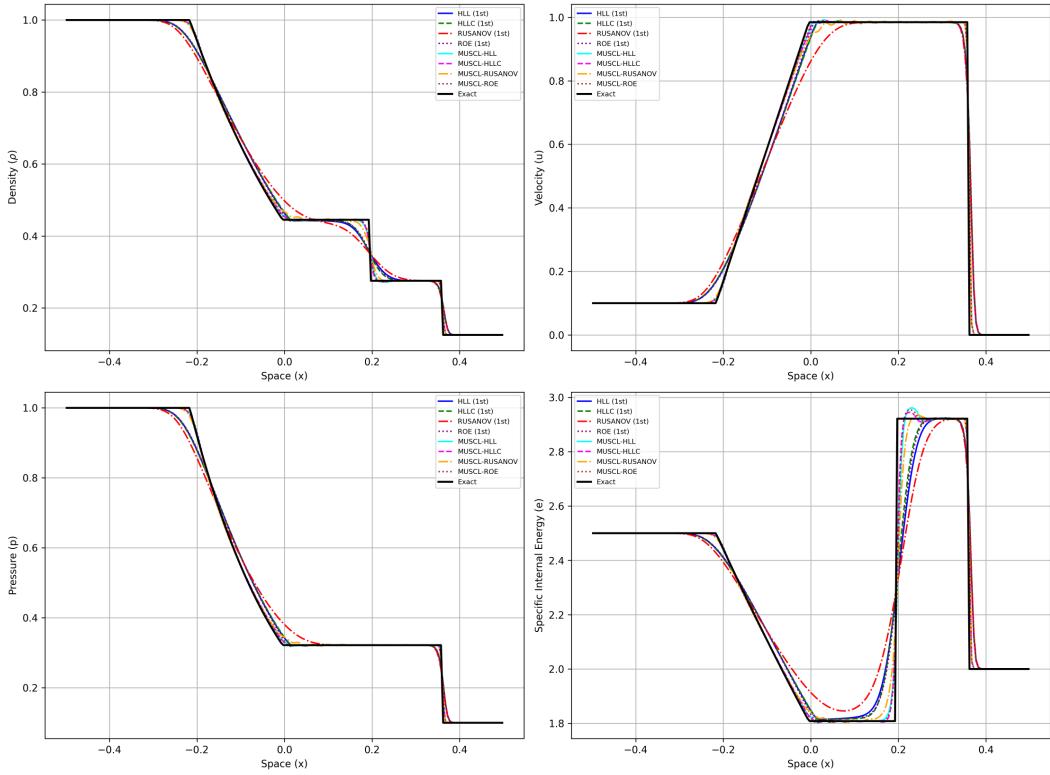


Analysis: ROE (1st Order) on Lax Problem (Toro 3 Variant)
(200 cells, CFL=0.5, T=0.15)

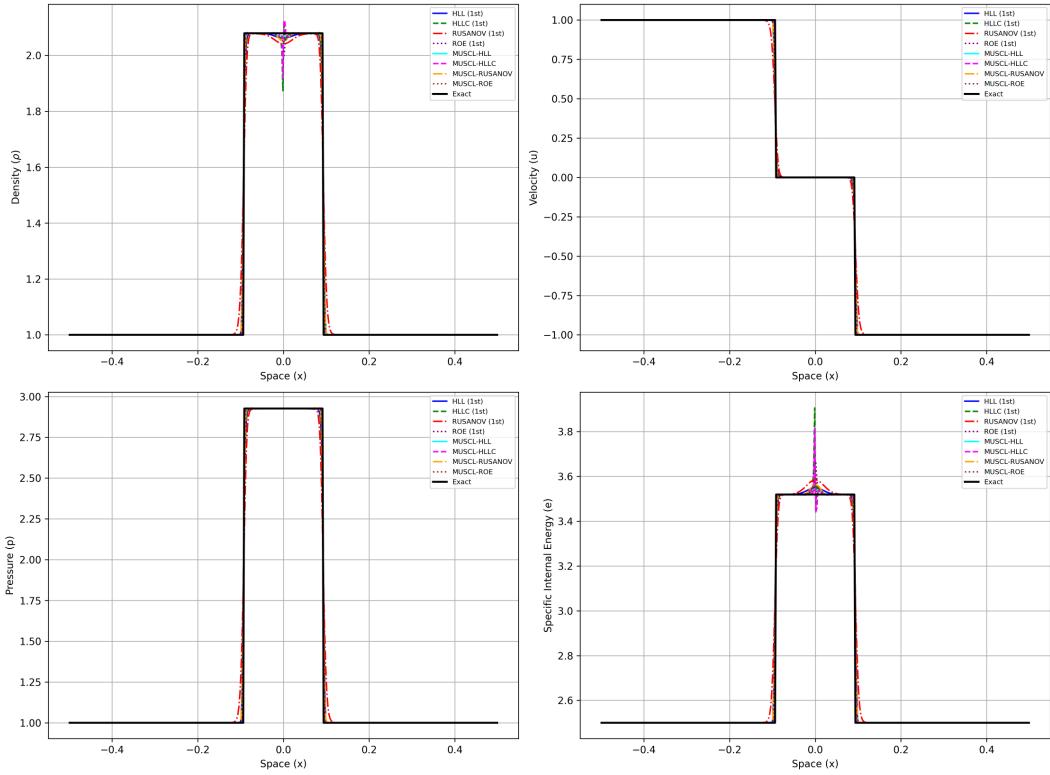


Roe (1st Order) on Lax Problem: Tests strong rarefaction. Compare with/without entropy fix.

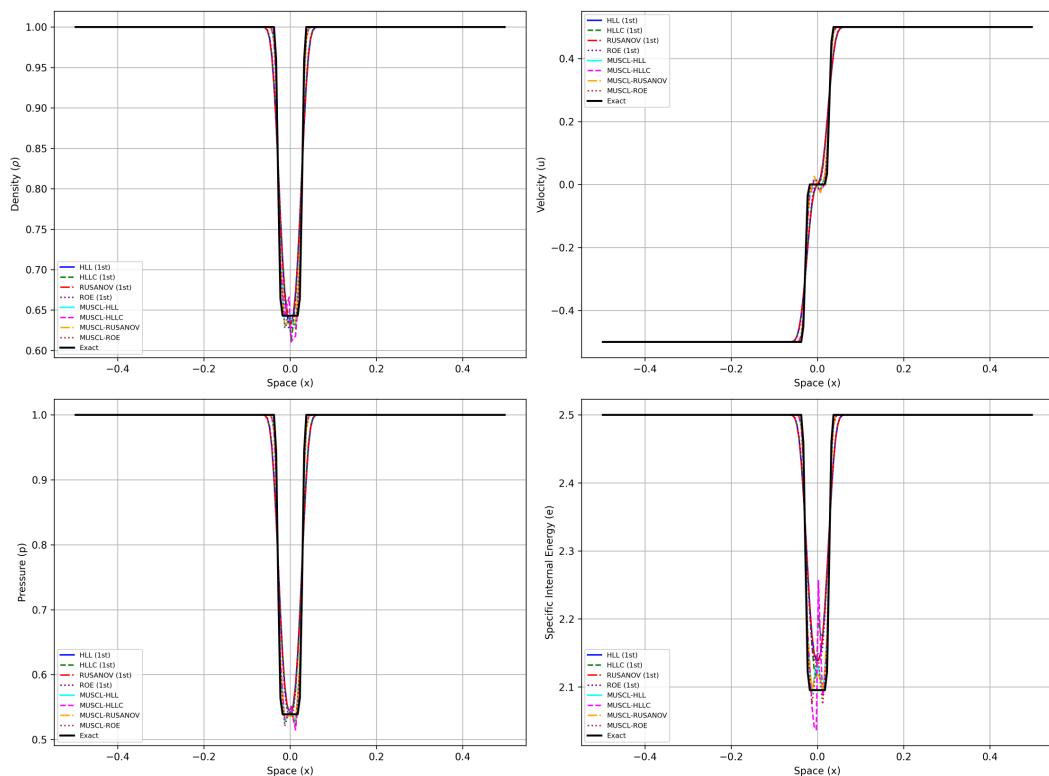
Test: Slowly Moving Shock (Toro Test 4 like) at T=0.2 (200 cells, CFL=0.5)



Test: Collision of Two Shocks (Symmetric) at T=0.1 (400 cells, CFL=0.4)



Test: Roe Linearization Test (Case c: Linearizable) at T=0.02 (200 cells, CFL=0.5)



9 Conclusion

Dans ce projet, nous avons étudié la modélisation numérique des écoulements de gaz compressibles en utilisant les équations d'Euler qui est un système hyperbolique de lois de conservation. Nous avons présenté la méthode des volumes finis comme une approche numérique privilégiée pour résoudre ce type de système, grâce à sa capacité à gérer les discontinuités.

Nous nous sommes concentrés sur les solveurs de Riemann approchés qui permettent de calculer les flux aux interfaces des mailles sans résoudre le problème de Riemann exact qui est souvent coûteux. Parmi les méthodes analysées, nous avons étudié en détail les schémas de Rusanov, HLL, HLLC et Roe. Chaque méthode a ses avantages et ses limites, que nous avons montré dans une partie théorique et par des résultats numériques.

Nous avons ainsi mis en évidence que :

- Le schéma de Rusanov est simple et robuste mais très diffusif.
- Le schéma HLL améliore la précision en utilisant deux vitesses d'onde, mais néglige l'onde de contact.
- Le schéma HLLC corrige ce problème en prenant en compte l'onde de contact, cela permet d'obtenir un compromis entre précision et robustesse.
- Le schéma de Roe est plus précis mais présente des problèmes de positivité et de respect de la condition d'entropie.

Les résultats numériques ont confirmé ces observations en mettant en évidence la capture des discontinuités selon les méthodes utilisées.

Ainsi ce travail de recherche nous aura permis de comprendre le bases et les subtilités de la simulation des écoulements compressibles. Il constitue pour nous une première expérience solide qui nous permettra à l'avenir de pouvoir étudier des méthodes plus avancées.

La suite logique pour compléter ce projet serait d'étendre ces méthodes dans les cas bidimensionnel et tridimensionnel. Aussi, l'amélioration de ces schémas par des schémas d'ordre plus élevés nous permettrait d'améliorer la précision tout en gardant la robustesse.

Enfin, utiliser ces approches dans des codes industriels ou dans des simulations réels représenterait une application concrète de ces outils numériques à la modélisation.

Références

- [1] Paul BATTEN et al. « On the Choice of Wavespeeds for the HLLC Riemann Solver ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* (1997).
- [2] F. BENHALDOUN. *MÉTHODE DES VOLUMES FINIS*. Cours magistral, Université de Paris. Support de cours PDF. 2010.
- [3] Nicolas BERTIER. *Introduction aux méthodes de volumes finis*. Cours magistral, INSA Toulouse. Support de cours PDF. 2023.
- [4] Marc BUFFAT. *Cours CFD pour les écoulements compressibles*. URL : https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/2018/CFD_schemaEuler/index.html.
- [5] Marc BUFFAT. *Écoulements compressibles 1D — Cours de mécanique des fluides approfondie*. URL : https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/COURS/BOOK_MECAFLU_HTML/AERO/chap3.html.
- [6] François DUBOIS. *Cinq leçons d'introduction aux systèmes hyperboliques de lois de conservation*. Support de cours PDF. 2023.
- [7] B. EINFELDT et al. « On Godunov-type Methods near Low Densities ». In : *Journal of Computational Physics* (1991).
- [8] Sergei K. GODUNOV. « Finite Difference Method for Numerical Computation of Discontinuous Solutions ». In : *Matematicheskii Sbornik* (1959). Translated by I. Bohachevsky.
- [9] Amiram HARTEN, Peter D. LAX et Bram van LEER. « On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* (1983).
- [10] Randall J. LEVEQUE. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [11] *Méthode des volumes finis*. 2024. URL : https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A9thode_des_volumes_finis&oldid=220780199.
- [12] *Résolution numérique des équations d'Euler monodimensionnelles*. 2011. URL : <https://cel.hal.science/cel-00556980>.
- [13] *Riemann solver*. 2024. URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_solver.
- [14] Philip L. ROE. « Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes ». In : *Journal of Computational Physics* (1981).
- [15] *Schéma de Godounov*. 2024. URL : https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Sch%C3%A9ma_de_Godounov&oldid=214981656.
- [16] *Systèmes hyperboliques de lois de conservation ; application à la dynamique des gaz*. 2023. URL : <https://hal.science/hal-04139341v1>.

- [17] E. F. TORO. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : A Practical Introduction*. Springer, 2009.
- [18] François VILAR. *Schémas Volume Finis appliqués aux Lois de Conservation Scalaires*. Cours magistral, Université de Montpellier. Support de cours PDF.