

# Équation d'advection–diffusion–dissipation–production

Notes de cours

## 1. Modèle d'advection–diffusion–dissipation–production

On considère l'équation suivante pour l'évolution d'une quantité  $u(t, s) \geq 0$  dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  :

$$\partial_t u(t, s) + V(t, s) \cdot \nabla u(t, s) - \nabla \cdot (\nu \nabla u(t, s)) = -\lambda u(t, s) + f(t, s), \quad s = (s_1, s_2) \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

où  $\nu > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $V(t, s) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(t, s) \in \mathbb{R}$ .

### Rôle des termes

- $\partial_t u$  : variation temporelle de  $u$ .
- $V \cdot \nabla u$  : advection, transport par le champ de vitesse  $V$ .
- $-\nabla \cdot (\nu \nabla u)$  : diffusion, effet de lissage (si  $\nu$  constant :  $-\nu \Delta u$ ).
- $-\lambda u$  : dissipation linéaire (perte proportionnelle à  $u$ ).
- $f(t, s)$  : source ou forçage externe.

### Forme explicite (dérivées partielles)

Si  $\nu$  est constant et  $V = (V_1, V_2)$ , on obtient :

$$\partial_t u + V_1(t, s) \partial_{s_1} u + V_2(t, s) \partial_{s_2} u - \nu (\partial_{s_1}^2 u + \partial_{s_2}^2 u) = -\lambda u + f(t, s). \quad (2)$$

Si  $\nu = \nu(t, s)$  est variable :

$$\partial_t u + V \cdot \nabla u - \partial_{s_1} (\nu \partial_{s_1} u) - \partial_{s_2} (\nu \partial_{s_2} u) = -\lambda u + f(t, s). \quad (3)$$

### Conditions initiales

Une condition initiale typique est :

$$u(0, s) = u_0(s), \quad s \in \Omega, \quad u_0(s) \geq 0. \quad (4)$$

Exemple : un profil gaussien ou une concentration localisée.

## Conditions aux limites

Soit  $\mathbf{n}(s)$  la normale sortante sur  $\partial\Omega$ . Exemples :

- **Dirichlet** :  $u(t, s) = g_D(t, s)$  sur  $\Gamma_D$  (valeur imposée, par ex. température fixée sur un mur).
- **Neumann** :  $\nu \nabla u \cdot \mathbf{n} = g_N(t, s)$  sur  $\Gamma_N$  (flux imposé, souvent  $g_N = 0$  pour une paroi isolante).
- **Robin** :  $\nu \nabla u \cdot \mathbf{n} + \alpha u = g_R(t, s)$  sur  $\Gamma_R$  (échange avec l'extérieur).
- **Inflow/Outflow** : sur  $\{s \in \partial\Omega : V \cdot \mathbf{n} < 0\}$ , imposer  $u = g_{\text{in}}$  ; sur  $\{s \in \partial\Omega : V \cdot \mathbf{n} > 0\}$ , condition libre.
- **Périodiques** :  $u$  périodique en  $s_1, s_2$ .

## 2. Réduction de dimension spatiale

On considère maintenant le domaine unidimensionnel  $\Omega = ]0, L[$  (dérivé du modèle (1)) et l'équation suivante :

$$\partial_t u(t, s) + V(t, s) \partial_s u(t, s) - \nu \partial_s^2 u(t, s) = -\lambda u(t, s) + f(t, s), \quad s \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

avec les conditions aux limites et initiale

$$u(t, 0) = u_\ell(t), \quad (6)$$

$$\partial_s u(t, L) = 0, \quad (7)$$

$$u(0, s) = u_0(s). \quad (8)$$

### Interprétation des conditions aux bords

- (6) (à  $s = 0$ ) : condition de *Dirichlet* imposant la valeur de la variable à l'entrée  $s = 0$ . Physiquement, par exemple,  $u_\ell(t)$  peut représenter une température ou une concentration imposée à l'entrée du domaine (flux entrant contrôlé).
- (7) (à  $s = L$ ) : condition de *Neumann* homogène (dérivée spatiale nulle) signifiant *pas de flux* sortant à  $s = L$ . C'est typiquement une paroi isolante ou une borne où le gradient (donc le flux diffusif) est nul.

### Compatibilité de la condition initiale avec les conditions aux bords

La condition initiale  $u_0(s)$  doit être compatible avec la condition de Dirichlet en  $s = 0$  et avec la condition Neumann en  $s = L$  au temps  $t = 0$ . Cela signifie notamment

$$u_0(0) = u_\ell(0), \quad \partial_s u_0(L) = 0.$$

Exemples compatibles :

- **Solution stationnaire constante** :  $u_0(s) = u_\ell(0)$ .
- **Mode singulier compatible** :

$$u_0(s) = u_\ell(0) + A \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} s\right),$$

pour un entier  $k \geq 0$  et  $A \in \mathbb{R}$ . En effet  $\sin(0) = 0$  (donc  $u_0(0) = u_\ell(0)$ ) et  $\partial_s \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} s\right)\big|_{s=L} = 0$  car  $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$ .

- Toute combinaison lisse de fonctions satisfaisant ces deux contraintes aux bords.

### Trouver $f(t, s)$ à partir d'une solution a priori $u(t, s)$

Si l'on suppose connaître (a priori) une fonction  $u(t, s)$ , alors le terme source  $f(t, s)$  est déterminé par la réécriture de (5) :

$$f(t, s) = \partial_t u + V(t, s) \partial_s u - \nu \partial_s^2 u + \lambda u. \quad (9)$$

Cette formule servira à construire des solutions exactes (utiles pour tester des schémas numériques) : on pose une  $u$  choisie et l'on déduit  $f$  par (9).

### Exemples de constructions (pour tests numériques)

**(A) Solution stationnaire simple** Choisissons une solution stationnaire constante  $u_{\text{st}}(s) \equiv U_0$  (indépendante de  $t$  et  $s$ ). Alors  $\partial_t u_{\text{st}} = \partial_s u_{\text{st}} = \partial_s^2 u_{\text{st}} = 0$  et d'après (9) on obtient

$$f_{\text{st}}(t, s) = \lambda U_0.$$

Pour respecter la condition de Dirichlet  $u(t, 0) = u_\ell(t)$  on prend  $U_0 = u_\ell(t)$  constant (donc  $u_\ell$  indépendant de  $t$ ): avec  $U_0 = u_\ell$  on a une solution exacte et compatible avec la Neumann en  $s = L$ . Ce cas est un bon test de base (équilibre constant).

**(B) Solution instationnaire (mode temporel amorti)** Construisons une solution non stationnaire satisfaisant les conditions aux bords : posons, pour des constantes  $A, \beta > 0$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$u(t, s) = u_\ell + A e^{-\beta t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} s\right). \quad (10)$$

Vérifications :

- $u(t, 0) = u_\ell$  car  $\sin(0) = 0$  (Dirichlet en  $s = 0$ ).
- $\partial_s u(t, L) = A e^{-\beta t} \frac{(2k+1)\pi}{2L} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$  (Neumann en  $s = L$ ).

En substituant (10) dans (9) on obtient explicitement le forçage nécessaire (écriture compacte) :

$$\begin{aligned} f(t, s) &= \partial_t u + V(t, s) \partial_s u - \nu \partial_s^2 u + \lambda u \\ &= -\beta A e^{-\beta t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} s\right) + V(t, s) A e^{-\beta t} \frac{(2k+1)\pi}{2L} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} s\right) \\ &\quad - \nu A e^{-\beta t} \left(-\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2\right) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} s\right) + \lambda u(t, s). \end{aligned} \quad (11)$$

On peut simplifier (11) en regroupant les termes en sin et en cos si besoin. Dans le cas particulier  $V \equiv 0$  on obtient la forme plus simple

$$f(t, s) = \left(-\beta + \nu \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2\right) A e^{-\beta t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} s\right) + \lambda u(t, s).$$

### 3. Discrétisation et analyse de stabilité

On considère l'équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$u_t + V u_x - K u_{xx} = -\lambda u + f, \quad x \in (0, L), \quad t > 0.$$

#### Schéma numérique utilisé

- **Discrétisation spatiale :**

$$u_x(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \quad (\text{différence centrée d'ordre 2}),$$

$$u_{xx}(x_j) \approx \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2} \quad (\text{différence centrée d'ordre 2}).$$

- **Discrétisation temporelle :**

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \left( -V D_0 u_j^n + \tilde{\nu} D_2 u_j^n - \lambda u_j^n + F_j \right),$$

où  $D_0$  et  $D_2$  désignent respectivement les opérateurs centrés en espace et  $\tilde{\nu}$  une viscosité effective (voir ci-dessous). Il s'agit d'un schéma **d'Euler explicite (ordre 1 en temps)**.

#### Critère de stabilité en temps

Dans le cas explicite, la stabilité impose que le rayon spectral de la matrice d'itération satisfasse  $\rho(\Delta t A) < 1$ . Deux analyses sont possibles :

- **Analyse de Gershgorin / diagonale dominante :** conduit à une borne du type

$$\Delta t \lesssim \mathcal{O}\left(\min\left(\frac{\Delta x}{|V|}, \frac{\Delta x^2}{K}\right)\right).$$

$$\Delta t \leq \min\left(\frac{\Delta x}{|V|}, \frac{\Delta x^2}{2K}\right).$$

## Viscosité numérique

Dans le code, on définit :

$$\nu_{\text{eff}} = K + \frac{|V| \Delta x}{2}.$$

La partie

$$\nu_{\text{num}} = \frac{|V| \Delta x}{2}$$

correspond à une **viscosité numérique artificielle**, analogue à celle du schéma de Lax–Friedrichs. Elle stabilise le schéma centré en advection.

## Modification : schéma upwind (ordre 1)

Pour privilégier l'information de l'amont, on remplace la dérivée centrée par une différence amont (upwind) :

$$u_x(x_j) \approx \begin{cases} \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}, & V > 0, \\ \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}, & V < 0. \end{cases}$$

## Viscosité numérique en upwind

Développement de Taylor (cas  $V > 0$ ) :

$$\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} = u_x - \frac{\Delta x}{2} u_{xx} + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Ainsi, l'approximation upwind introduit un terme diffusif équivalent à

$$\nu_{\text{num}}^{\text{upwind}} = \frac{|V| \Delta x}{2}.$$

Donc la viscosité totale devient

$$\nu_{\text{eff}} = K + \frac{|V| \Delta x}{2}.$$

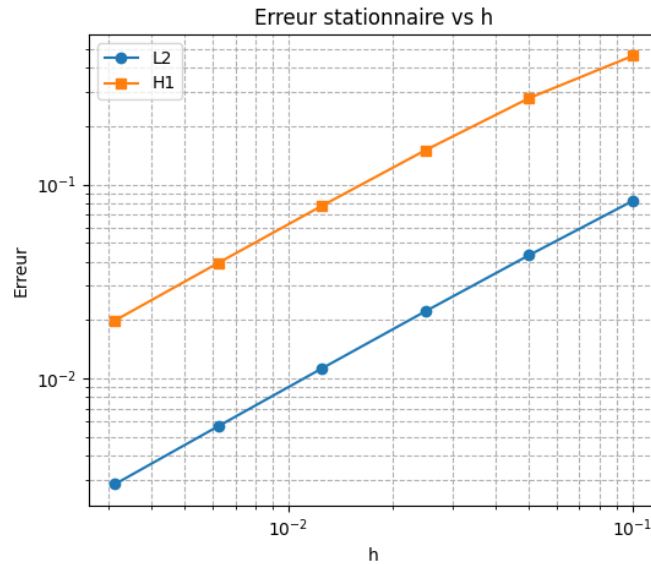
## 4. Estimation d'erreur a posteriori en stationnaire

Nous considérons maintenant les solutions stationnaires du problème :

$$V \cdot \nabla u - \nabla \cdot (\nu \nabla u) + \lambda u - f = 0, \quad s \in \Omega,$$

qui correspondent au cas  $t \rightarrow \infty$  d'une marche en temps artificielle pour l'itération vers la solution stationnaire.

## Tracer erreur L2 et H1



## Identification des constantes par moindres carrés pour les normes L2 et H1

```
L2: ordre observé k+1 = 0.972, C = 7.868e-01  
H1: ordre observé k = 0.916, C = 4.144e+00
```

L'ordre observé pour la norme  $L^2$  est d'environ 1, alors qu'un ordre théorique de 2 était attendu. Cette réduction s'explique par l'utilisation d'un schéma central pour l'advection. L'ordre observé pour la norme  $H^1$  est également proche de 1, conforme au schéma P1.

L'analyse de l'interpolation linéaire P1 montre que l'erreur numérique se rapproche de l'erreur minimale due à l'interpolation, avec une constante  $M$  légèrement supérieure à 1 et décroissante avec le raffinement.

Conclusion : Le schéma P1 explicite capture correctement la solution stationnaire, mais l'ordre  $L^2$  est limité par la discrétisation centrale de l'advection. Pour atteindre l'ordre théorique, il faudrait utiliser un schéma upwind ou un schéma implicite et raffiner le maillage.