Réduction d'un problème 2D à 1D et schéma numérique

1. Problème initial en 2D

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante sur un domaine rectangulaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\lambda u + f(t, \mathbf{s}), \tag{1}$$

où

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2), \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

2. Passage en 1D

Si le problème est homogène ou indépendant de y, on peut poser :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

L'équation se réduit alors à une dimension :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\lambda u + f(t, x), \tag{2}$$

avec $u = u(t, x)$ et $f = f(t, x)$.

3. Conditions initiales et aux limites

- **Condition initiale** :
$$u(t = 0, x) = u_0(x), \tag{3}$$
compatible avec les conditions aux limites.

- **Conditions aux limites** :

$$u(t, x = 0) = u_l(t) \qquad \text{(Dirichlet non homogène à gauche)}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = L) = g(t) \qquad \text{(Neumann non homogène à droite)}. \tag{5}$$

4. Schéma numérique en temps explicite

On discrétise l'espace sur $N + 1$ points $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_N = L$ avec un pas Δx.

Le schéma d'Euler explicite pour $i = 1, \ldots, N - 1$ est :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left[-v_1 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \lambda u_i^n + f_i^n \right]. \tag{6}$$

Conditions aux limites discrétisées

$$u_0^{n+1} = u_l^{n+1} \qquad \text{(Dirichlet gauche)}, \tag{7}$$

$$u_N^{n+1} = u_{N-1}^{n+1} + g^n \Delta x \qquad \text{(Neumann droite, approximation première ordre)}. \tag{8}$$

Initialisation compatible avec les conditions aux limites

1) Problème

On cherche $u_0(x)$ tel que :

$$u_0(0) = u_l \quad \text{(Dirichlet à gauche)}, \qquad u_0'(L) = g \quad \text{(Neumann à droite)}.$$

Une forme simple et compatible est une **fonction affine** (droite) :

$$u_0(x) = u_l + gx$$

Car alors :

$$u_0(0) = u_l, \quad u_0'(x) = g \implies u_0'(L) = g.$$

C'est la solution la plus simple et linéaire qui respecte exactement les deux conditions.

2) Vérification

À la main :

$$u_0(0) = u_l + g \cdot 0 = u_l \quad \checkmark$$

$$u_0'(x) = g \implies u_0'(L) = g \quad \checkmark$$