Álgebra lineal

Taller 9

Combinaciones lineales; independencia lineal.

Fecha de entrega: 03 de abril de 2025

0. *Recuerda escribir el número del grupo y los nombres de todos los integrantes bien visible y legible en la primera hoja de la entrega e indicar claramente si un integrante no aportó a la elaboración de la solución. Si estos datos faltan, el taller no será calificado y tendrá la nota* 0.

2 pts. 1. (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Escriba $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

2 pts. (b) ¿Es $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ combinación lineal de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$?

2 pts. (c) ¿Es $\vec{q} = -X^2 + 4X - 12$ combinación lineal de $p_1 = 2X^2 - 3X + 5$, $p_2 = X^2 + 2X - 4$, $p_3 = 3X^2 - X + 2$?

2 pts. (d) ¿Es $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 50 & 8 \end{pmatrix}$ combinación lineal de

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}?$$

2 pts. 2. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Sea E el plano $E = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

(a) Escriba E en la forma $E : ax + by + cz = d$.

(b) Encuentre un vector $w \in \mathbb{R}^3$, distinto de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, tal que $\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, w\} = E$.

(c) Encuentre un vector $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathbb{R}^3$.

2 pts. 3. Sea F el plano dado por $F : 2x - 5y + 3z = 0$ y sea P el plano dado por $P : 2x - 5y + 3z = 3$.

(a) Demuestre que F es subespacio de $\mathbb{R}^3$ y encuentre vectores $\vec{u}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$.

(b) ¿Es P un subespacio de $\mathbb{R}^3$? ¿Es un subespacio afín? Si su respuesta es "sí", encuentre $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ y un subespacio P_0 tal que $P = \vec{v}_0 + P_0$. Diga geométricamente qué es P_0.

3 pts. 4. (a) ¿El siguiente conjunto genera las matrices simétricas 2×2?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M_{\text{sym}}(2 \times 2) \setminus \text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$.

2 pts. (b) ¿El siguiente conjunto genera las matrices simétricas 2×2?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M_{\text{sym}}(2 \times 2) \setminus \text{span}\{B_1, B_2, B_3\}$.

3 pts. (c) ¿El siguiente conjunto genera las matrices triangulares superiores 2×2?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M(2 \times 2)$ que es triangular superior pero que no pertenece a $\text{span}\{C_1, C_2, C_3\}$.

Ejercicios voluntarios[1]

5. (a) ¿Es $\mathbb{C}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?
   (b) ¿Es $\mathbb{C}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?
   (c) ¿Es $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?
   (d) ¿Es $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?
   (e) ¿Es $\mathbb{Q}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?
   (f) ¿Es $\mathbb{Q}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?

6. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2\}$.
   (a) Diga qué es U geométricamente.
   (b) Encuentre tres vectores diferentes en U.
   (c) Encuentre tres vectores diferentes en $\mathbb{R}^3$ que no pertenecen a U.
   (d) ¿Los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{a}, \vec{b}$ pertenecen a U?

7. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea V el conjunto de las matrices simétricas $n \times n$ con la suma y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ usual.
   (a) Demuestre que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
   (b) Encuentre matrices que generan V. ¿Cual es el número mínimo de matrices que se necesitan para generar V?

8. Sean V y W espacios vectoriales.
   (a) Sea $U \subset V$ un subspacio y sean $u_1, \dots, u_k \in U$. Demuestre que $\operatorname{gen}\{u_1, \dots u_k\} \subset U$.
   (b) Sean $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m \in V$. Demuestre que lo siguiente es equivalente:
      (I) $\operatorname{gen}\{u_1, \dots, u_k\} = \operatorname{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$.
      (II) Para todo $j = 1, \dots, k$ tenemos $u_j \in \operatorname{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$ y para todo $\ell = 1, \dots, m$ tenemos $w_\ell \in \operatorname{gen}\{u_1, \dots, u_k\}$.
   (c) Sean $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m \in V$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que
   $$\operatorname{gen}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\} = \operatorname{gen}\{v_1 + cv_2, v_2, v_3, \dots, v_m\}.$$
   (d) Sean $v_1, \dots, v_k \in V$ y sea $A : V \to W$ una función lineal invertible. Demuestre que $\dim \operatorname{gen}\{v_1, \dots, v_k\} = \dim \operatorname{gen}\{Av_1, \dots, Av_k\}$. ¿Es verdad si A no es invertible?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.