Para verificar, se calculan los determiantes de todas las matrices mediante la regla de Sarrus:

$$det(A) = 3(1)(6) + 0(0)(0) + 0(0)(0) - [0(1)(0) + 0(0)(3) + 6(0)(0)] = 18$$

$$det(B) = 3(1)(6) + \pi(0)(0) + 20(0)(0) - [0(1)(20) + 0(0)(3) + 6(0)(\pi)] = 18$$

$$det(C) = 3(1)(6) + \frac{41}{3}(\sqrt{e})(0) - 5(0)(0) - [0(1)(-5) + 0(\sqrt{e})(3) + 6(0)(\frac{41}{3})] = 18$$

$$\det(D) = 3(1)(6)+0(0)(-9^{e^\pi}\sqrt{\phi})-0(0)(0)-\Big[(-9^{e^\pi}\sqrt{\phi})(1)(0) + 0(0)(3) + 6(0)(0)\Big] = 18$$

3. Calcule $det(B_n)$ donde B_n es la matriz en $M(n \times n)$ cuyas entradas en la diagonal son 0 y todas las demás entradas son 1, es decir:

$$B_1 = 0 \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ...$$

¿Cómo cambia la respuesta si en vez de 0 hay x en la diagonal?

Tomando una matriz $B_n \in M(n \times n)$ con $n \in \mathbb{N}$, sumando cada fila a la primera, se obtiene que:

$$det(B_n) = det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pues en cada columna hay $n-1$ términos que son 1 y un término que es 0.

Se tiene que $det(A) = det(A)^t$, entonces:

$$det(B_n) = det \begin{pmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que el determinante es lineal en las columnas, por lo que se obtiene que:

$$det(B_n) = det\begin{pmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (n-1)det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Al restar la primera fila a cada otra fila, por las propiedades mencionadas previamente, se tiene que:

$$det(B_n) = (n-1)det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (n-1)det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Pues para todo $i > 1$, si $B_{ij} = 1$ al restar la primera fila se tiene que $B'_{ij} = 0$. Y si $B_{ij} = 0$, se tiene que $B'_{ij} = -1$.

Nótese que todo valor debajo de la diagonal es 0, es decir, la matriz obtenida es triangular superior.

Teniendo que el determinante de una mantriz triangular (superior o inferior) es el producto de su diagonal, se concluye que:

$$det(B_n) = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = (n-1)(1)(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

Así,

$$det(B_n) = (-1)^{n-1}(n-1)$$

Si encambio de 0, se tiene x en la diagonal, se sigue:

$$det(B_{nx}) = det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} (n-1)+x & (n-1)+x & (n-1)+x & \cdots & (n-1)+x \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Pues en cada columna hay $n-1$ términos que son 1 y un término que es x.

Continuando:

$$= det \begin{pmatrix} (n-1)+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (n-1)+x & x & 1 & \cdots & 1 \\ (n-1)+x & 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)+x & 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix} = ((n-1)+x) det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

$$= ((n-1)+x) det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{pmatrix}$$

$$= ((n-1)+x)(1)(x-1)^{n-1} = (x-1)^{n-1}((n-1)+x)$$

Así,

$$det(B_{nx}) = (x-1)^{n-1}((n-1)+x)$$

4. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. De la siguiente lista escoja 6 numerales y diga si o no son subespacios de $M(m \times n)$. Pruebe su afirmación.

   Sean V un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V. Entonces W es un subespacio de V si y sólo si:

   Si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$, es decir, W es cerrado bajo la suma. Si $u \in W$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $cu \in W$, es decir, W es cerrado bajo el producto por escalar.

   (a) Todas matrices con $A_{11} = 0$.

   Cerradura bajo la suma: Sean $u, v \in M(m \times n)$ con $m, n \in \mathbb{N}$. Sea W el conjunto de las matrices con $A_{11} = 0$. Sean $u, v \in W$.