

Análise e Transformação de Dados

Ficha Prática nº 5

Objetivo: Pretende-se ilustrar os conceitos de frequência e efetuar a análise de sinais periódicos pela Série de Fourier trigonométrica e complexa.

Linguagem de Programação:

- MATLAB (Symbolic Math, Signal Processing Toolboxes)
- Python (módulos: *numpy*, *sympy*, *random*, *scipy.signal*, *matplotlib.pyplot*)

Exercícios:

1. Pretende-se determinar e representar os coeficientes da **Série de Fourier trigonométrica** de um sinal periódico, $x(t)$, e apresentar graficamente o sinal original e o aproximado pela Série com um dado número de harmónicos.
 - 1.1. Para isso, escrever um *script* que efetue as seguintes operações:
 - 1.1.1. Pedir o valor do período fundamental, T_0 , do sinal a analisar.
 - 1.1.2. Definir a sequência temporal t , **durante um período**, com, por exemplo, 500 elementos.
 - 1.1.3. Obter o sinal $x(t)$ usando um menu que permita escolher uma onda quadrada periódica (use a função *square*), uma onda periódica em dente de serra (use a função *sawtooth*) ou uma expressão simbólica a introduzir. Representar graficamente $x(t)$.
 - 1.1.4. Determinar e representar graficamente os valores dos coeficientes (C_m e θ_m) da Série de Fourier trigonométrica com o valor de m_max da Série de Fourier pedido ao utilizador. Considerar o seguinte algoritmo para o cálculo dos coeficientes (implementação em MATLAB no final deste documento):

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m) = \sum_{m=0}^{\infty} C(m) \cos\left(m \frac{2\pi}{T_0} t + \theta(m)\right) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a(m) \cos\left(m \frac{2\pi}{T_0} t\right) - \sum_{m=0}^{\infty} b(m) \sin\left(m \frac{2\pi}{T_0} t\right) \end{aligned} \quad \text{com: } \begin{cases} a(m) = C(m) \cos(\theta(m)) \\ b(m) = C(m) \sin(\theta(m)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C(m) = \sqrt{a(m)^2 + b(m)^2} \\ \theta(m) = \arctg\left(\frac{b(m)}{a(m)}\right) \end{cases}$$

- 1.1.5. Obter e representar graficamente a sobreposição do sinal original e dos sinais aproximados a partir dos coeficientes da Série de Fourier trigonométrica para vários valores limites de m (entre 0 e m_max), pedidos ao utilizador através de um vetor.
- 1.1.6. Obter e representar graficamente a amplitude e a fase dos coeficientes da **Série de Fourier complexa** c_m , para m entre $-m_max$ e m_max , usando os coeficientes C_m e θ_m .

1.2. Aplicar o *script* de 1.1 para os seguintes sinais:

1.2.1. Onda quadrada periódica de amplitude 1 e período $2\pi s$ (sugestão $m_{\max}=50$).

1.2.2. Onda periódica em dente de serra de amplitude 1 e período $2\pi s$ (sugestão $m_{\max}=50$).

1.2.3. Sinal $x(t) = -2 + \cos(\pi t) + \sin(\pi t + \frac{\pi}{4})$ (sugestão: $m_{\max}=5$).

1.2.4. Sinal $x(t) = 2 \sin(5\pi t)^2 + 4 \cos(20\pi t - \frac{\pi}{4}) \sin(45\pi t)$ (sugestão: $m_{\max}=20$).

1.2.5. Sinal $x(t) = -2 + 4 \cos(4\pi t + \frac{\pi}{3}) - 2 \sin(10\pi t)$ (sugestão: $m_{\max}=10$).

1.3. Determinar analiticamente os coeficientes da Série de Fourier trigonométrica, C_m e θ_m , dos sinais indicados em 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5. Comparar com os resultados obtidos em 1.2.

1.4. Determinar analiticamente os coeficientes da Série de Fourier complexa, c_m , dos sinais indicados em 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5, a partir dos coeficientes da Série de Fourier trigonométrica, C_m e θ_m , obtidos em 1.3. Comparar com os resultados obtidos em 1.2.

1.5. Determinar os coeficientes da Série de Fourier complexa, c_m , dos sinais indicados em 1.2.3,

1.2.4 e 1.2.5, através da expressão $c_m = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt$. Comparar com os resultados obtidos em 1.2 e em 1.4.

1.6. Determinar os coeficientes da Série de Fourier trigonométrica, C_m e θ_m , dos sinais indicados em 1.2.3, 1.2.4 e 1.2.5, a partir dos coeficientes da Série de Fourier complexa, c_m , obtidos em 1.4. Comparar com os resultados obtidos em 1.2 e em 1.3.

- Função em MATLAB para o cálculo dos coeficientes da Série de Fourier trigonométrica:

```
function [Cm,tetam]=SerieFourier(t,x,T0,m_max)
% t e x devem ser vetores coluna
A=zeros(length(t),2*m_max+2);
for k=0:m_max
    A(:,k+1)=cos(2*pi/T0*t*k);
    A(:,m_max+1+k+1)=-sin(2*pi/T0*t*k);
end
coef=pinv(A)*x;
a=coef(1:m_max+1);
b=coef(m_max+2:2*m_max+2);
[nl,nc]=size(a);
for lin=1:nl,
    for col=1:nc,
        if abs(a(lin,col))<0.001 & abs(b(lin,col))<0.001,
            a(lin,col)=0; b(lin,col)=0;
        end
    end
end
Cm=abs(a+b*j); % ⇔ Cm=(a.^2+b.^2).^0.5
tetam=angle(a+b*j); % ⇔ tetam=atan(b./a)
end
```