UNIVERSTAT AUTÒNOMA
DE BARCELONA

FACULTAT DE CIÈNCIES

# Optimalitat d'A* amb heurístiques admissibles i no admissibles però acotades.

**Autor**: Carles Moya Guerrero
**Tutor**: Toni Lozano Bagen

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Barcelona, Febrer, 2023

# Continguts

# 1 Introducció

A* és un algoritme popular que pot trobar un camí òptim entre dos nodes d'un graf eficientment pel que respecta al temps. Hi ha molts problemes que es poden reduir a trobar un camí en un graf i pels que s'utilitza A*, com trobar la ruta més curta o més ràpida entre dos punts en un mapa, solucionar laberints o resoldre trencaclosques. També s'utilitza en videojocs per trobar la millor ruta per un personatge en el seu entorn. Aquest mètode és una evolució de l'algoritme de Dijkstra que afegeix una funció heurística per aproximar la distància que queda per recórrer fins arribar a l'objectiu.

Ens centrarem en estudiar l'eficàcia del mètode, veurem que amb una heurística admissible o consistent el mètode sempre troba un camí òptim. Estudiarem amb quines condicions podem utilitzar heurístiques no admissibles i que podem dir del resultat que proporcionarà A* en aquest cas.

Realitzarem alguns experiments amb el mapa d'Espanya i amb el cub de butxaca (Rubik $2 \times 2 \times 2$) per verificar que els resultats obtinguts amb heurístiques no admissibles poden ser vàlids en certes condicions.

# 2 Algoritme A*

## 2.1 Descripció i funcionament d'A*

El mètode que utilitzarem és A*, és un algoritme de cerca unidireccional amb una estratègia del tipus Best-First. Aclarim aquests dos conceptes

- Unidireccional: Diem que un algoritme de cerca és unidireccional si utilitza una cerca en una única direcció (P.ex : Comença la cerca en el node inicial i va explorant nodes fins arribar al node final). Hi ha algoritmes que utilitzen dues cerques, una d'elles comença des de l'inici i l'altra des del final i combinant-les es troba una solució, a aquests mètodes se'ls anomena bidireccionals [8].

- Best-First: Aquesta estratègia consisteix en prioritzar l'expansió dels nodes que són *millors*, aquesta decisió es basa en l'avaluació d'una funció $f(n)$. Considerarem *millor* d'entre la llista de nodes per expandir aquell que presenti un valor $f(n)$ menor. Altres estratègies també molt conegudes són Depth-First (prioritza profunditat en l'expansió de nodes, és a dir, prioritza arribar al final d'un camí abans de canviar) i Breadth-First(prioritza l'amplitud, expandeix nodes en totes direccions alhora)[7].

**Definició 1** (Funció $f$)**.** En el cas de l'A* la funció $f(n)$ és additiva i està composta per dues funcions més : el cost $g$ i la heurística $h$.

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ n &\longrightarrow g(n) + h(n) \end{aligned} \tag{1}$$

**Definició 2** (Funció cost $g$)**.** El *cost* representa la dificultat d'arribar des del node inici fins al node $n$. Es una funció recursiva que depèn del cost per al node anterior i del cost per anar d'un node a l'altre. Definim $g$ de la següent manera

$$\begin{aligned} g : V &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ n &\longrightarrow \begin{cases} g(m) + w(m,n) & si \quad \exists m \text{ node previ} \\ \\ 0 & si \quad \nexists m \text{ node previ} \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

on denotem $w(m,n)$ el pes de l'única aresta que va del node $m$ al node $n$.

**Definició 3** (Funció heurística $h$)**.** La *funció heurística* és una aproximació del cost del node $n$ al node final

$$h : V \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \tag{3}$$

No definim l'aplicació concreta d'aquesta funció ja que depèn del problema que vulguem resoldre.

El mètode A* treballa amb dues llistes, `OPEN` i `CLOSED`. La llista `OPEN` conté els nodes que han sigut observats però no visitats. La llista `CLOSED` conté tots els nodes que han sigut visitats. Treballant amb aquestes dues llistes i la funció $f$ podem trobar un camí òptim de qualsevol graf. Vegem els seu funcionament amb pseudocodi.

1. Afegir el `node_inicial` a `OPEN`.
2. Si `OPEN` està buida acabar amb error
3. Eliminar de `OPEN` i afegir a `CLOSED` un node `node_actual` tal que f és mínima
4. Si `node_actual` és el `node_final`, acaba retornant la solució fent marxa enrere al node pare de cada node començant des del final.
5. Iterem per a tot `node_adjacent` de `node_actual`:
    (a) Si `node_actual` està a `OPEN` o a `CLOSED` comprovar si el nou camí és més curt que l'anterior. En aquest cas actualitzar el node pare de `node_adjacent` per `node_actual` i calcular de nou `g(node_adjacent)` i `f(node_adjacent)`. Si el node estava a `CLOSED` reobrirlo afegint-lo de nou a `OPEN`.
    (b) Si `node_actual` no està a `OPEN` ni a `CLOSED`, afegim el `node_adjacent` a `OPEN`. Calculem `h(node_adjacent)` i també `f(node_adjacent) = g(node_adjacent) + h(node_adjacent)` on `g(node_adjacent) = g(node_actual) + w(node_actual, node_adjacent)`
6. Tornar al pas 2

És molt important escollir una bona funció heurística ja que influenciarà directament l'eficiència del mètode i l'admissibilitat. Una heurística menys informada està destinada a visitar els mateixos o més nodes que una heurística més informada [1], de manera que si escollim una heurística poc informada A* necessitarà visitar molts nodes innecessaris per trobar el camí òptim, mentre que si l'heurística és molt informada trobarà la solució amb un nombre mínim de nodes visitats. Per altra part és important assegurar que el mètode trobarà una solució òptima, en aquest cas cal que l'heurística sigui admissible.

L'objectiu de la funció heurística és aportar informació per guiar la cerca, i obtenir una millora respecte utilitzar únicament la funció cost. Si escollim l'heurística menys informada de totes, la funció $h = 0$ aleshores el mètode degenera en el mètode de Dijkstra.

**Definició 4** (Heurística més informada)**.** Siguin $h_1$ i $h_2$ funcions heurístiques admissibles. Direm que $h_1$ és *més informada* que $h_2$ si per a $n \neq \beta$ es compleix que:

$$0 \leq h_2(n) < h_1(n) \qquad \forall n \in V$$

**Definició 5** (Heurística admissible)**.** Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Una funció heurística $h$ es diu que és *admissible* si

$$h(n) \leq h^*(n) \qquad \forall n \in V$$

Existeix una condició més forta que l'admissibilitat, aquesta és la consistència. La idea intuïtiva d'una heurística consistent és que la distància més curta entre dos punts és una línia recta, de fet la distància en línia recta en un mapa és una heurística consistent.

**Definició 6** (Heurística consistent)**.** Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Sigui $n \in V$ un node qualsevol tal que $n \neq \beta$. Siguin $M \subset V$ els nodes de $G$ que són adjacents a $n$. Una funció heurística h es diu que és *consistent* si

$$h(n) \leq h(m) + w(n, m) \qquad \forall m \in M$$

*Nota.* A partir d'ara a no ser que es mencioni el contrari treballarem amb grafs que compleixin aquestes característiques

- Grau finit: Nombre de nodes finit ($|V| < \infty$).
- Graf simple: No hi ha arestes múltiples entre dos nodes (si existeix una aresta entre dos nodes és única, en el cas de nodes dirigits pot haver-hi una en cada direcció).
- Graf ponderat amb pesos no negatius: Considerarem que tenen pesos a les arestes i que aquests són no negatius, en cas de no tenir pesos a les arestes considerarem que tots són 1.
- Graf sense bucles: Considerarem que no hi ha arestes que uneixen un node amb ell mateix.

Una vegada aclarit el tipus de graf amb el que treballarem cal definir formalment què és un camí i que entendrem nosaltres quan parlem de camí d'un node a un altre.

**Definició 7.** Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Un *camí* o *ruta* és un seqüència de vèrtexs d'un graf tal que hi ha una aresta entre un node i el següent. Formalment un camí es el subgraf $G' = \{V', E'\}$ on $V' \subset V$ és el subconjunt de nodes que formen el camí i $E' \subset E$ és el subconjunt d'arestes que uneixen els nodes del camí.

**Definició 8** (Camí de $\alpha$ a $\beta$)**.** Un *camí simple* és un camí que no repeteix ni vèrtexs ni arestes. A partir d'ara sempre que parlem d'un camí ens referirem a un camí simple. Si especifiquem que el camí és de $\alpha$ a $\beta$, aleshores ens referirem a un camí simple tal que el primer vèrtex és $\alpha$ i l'últim és $\beta$.

*Nota.* Per estalviar notació i facilitar la lectura denotarem un camí com $\{a_i\}_{i=0}^n$. És a dir amb la successió de nodes que forma el camí, sent $a_0$ el primer node i $a_n$ l'últim node. No ens cal especificar quines són les arestes ja que el nostre graf no presenta arestes múltiples.

**Definició 9** (Nodes connectats)**.** Sigui $G$ un graf graf $G = \{V, E\}$ i siguin $n, m \in V$ nodes. Direm que $n$ està *connectat* a $m$ si existeix un camí que va de $n$ a $m$. Si $G$ és no dirigit $n$ connectat a $m$ és equivalent a $m$ connectat a $n$.

**Definició 10** (Notació)**.** Definirem certa notació que utilitzarem a continuació:

- $w(m, n)$ : és el pes de l'única aresta que va del node $m$ al node $n$.
- $g(\{a_n\})$ : cost d'una successió. Simplement el cost afegit dels pesos de les arestes entre els nodes de la successió.

$$g(\{a_n\}) = \sum_{i=0}^{n-1} w(a_i, a_{i+1})$$

- $g^*(n)$ : cost més petit dels camins que van de $\alpha$ a un node $n$.
- $k(\alpha, \beta)$ : cost més petit dels camins que van de $\alpha$ a $\beta$.

$$k(\alpha, \beta) = \min_{\{a_j\} \in A} g(\{a_j\}) \qquad \text{on } A = \{\{a_j\}_{j=0}^{n} \text{ camins} : a_o = \alpha, a_n = \beta\}$$

$$g^*(n) = k(\alpha, n)$$

- $h^*(n)$ : cost més petit dels camins que van de $n$ a $\beta$.

$$h^*(n) = k(n, \beta)$$

- $f^*(n)$ : cost més petit dels camins que van de $\alpha$ a $\beta$ i passen per $n$. És a dir:

$$f^*(n) = k(\alpha, n) + k(n, \beta) = g^*(n) + h^*(n)$$

## 2.2 Propietats bàsiques d'A*

Ara que ja sabem quina és la importància del mètode i quin és el seu funcionament estudiarem dues propietats molt importants, la completesa i l'admissibilitat.

**Definició 11** (Completesa)**.** Direm que un mètode és *complet* si quan existeix alguna solució assegura trobar-ne una. És a dir, si $\alpha$ i $\beta$ són els nodes inici i final del mètode i $\alpha$ està connectat a $\beta$, direm que el nostre mètode és *complet* si assegura trobar una solució.

**Definició 12** (Admissibilitat)**.** Siguin $\alpha$ i $\beta$ els nodes inici i final del mètode. Diem que un mètode és *admissible* si quan troba una solució aquesta és òptima, és a dir

$$f(\beta) = f^*(\beta)$$

### 2.2.1 Completesa d'A*

**Lema 1.** *Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Aleshores A* sempre acaba.*

*Demostració.* Aquesta demostració no és directa ja que A* pot reobrir nodes que estan a `CLOSED`. Primer veurem que A* sempre acaba, provarem que no podem visitar un node dues vegades pel mateix camí i per tant com el nombre de nodes és finit i el nombre de camins pels que podem visitar cada node també és finit sabrem que en algun moment o trobarem una solució o la llista `OPEN` es buidarà.

Sigui $\{a_n\}$ un camí, visitem un node del camí $a_i$ tal que tots els nodes previs són $\{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$ és a dir el visitem venint pel camí $\{a_n\}$. Aleshores sabem que a partir d'aquest moment

$$f(a_i) \leq g(a_i) + h(a_i)$$

ja que el valor de $f$ només s'actualitza si es visita per un camí més curt. Suposem que visitem $a_{i-1}$ pel camí $\{a_n\}$ aleshores si explorem $a_i$, ho farem amb

$$f(a_i) = g(a_i) + h(a_i)$$

i per tant no actualitzem ni reobrim el node $a_i$ de manera que no el visitarem.

Hem vist que no podem visitar un node més d'un cop seguint el mateix camí. Així doncs podem acotar el nombre de visites que A* necessitarà per visitar tots els nodes per el nombre de nodes del graf multiplicat pel nombre de camins que existeixen fins a un node. Tots dos valors són finits per tant sabem que en un nombre finit de visites acabarem visitant tots els nodes i per tant trobant una solució o acabar amb la llista `OPEN` buida. □

**Lema 2.** *Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Siguin $\alpha$ i $\beta$ els nodes inici i final del nostre mètode. Suposem $\exists\{a_n\}$ un camí de $\alpha$ a $\beta$. Aleshores sempre existeix com a mínim un node de $\{a_n\}$ a la llista `OPEN` abans que A* trobi una solució.*

*Demostració.* La cerca de A* comença amb el node $\alpha$. Cada vegada que visitem un node del camí $\{a_n\}$ (l'eliminem de `OPEN` i l'afegim a `CLOSED`), estem afegint a la llista `OPEN` tots els nodes adjacents incloent el pròxim node del camí $\{a_n\}$ a la llista `OPEN` (Sempre que no hagi sigut visitat anteriorment). De manera que l'única manera de que a la llista `OPEN` no hi hagi cap node de $\{a_n\}$ es haver visitat tots els nodes del camí, incloent $\beta$ i per tant A* ja hauria acabat. □

**Teorema 1** (A* és complet)**.** *Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Aleshores A* sobre G és complet (Si existeix alguna solució assegura trobar-ne una). A més A* sempre acaba.*

*Demostració.* Vegem que si existeix una solució A* la troba. Considerem un camí $\{a_n\}$ de $\alpha$ a $\beta$. Sabem que aquest camí tindrà sempre un node a `OPEN` abans que A* trobi una solució (Lema 2). Per tant la llista `OPEN` no pot quedar buida abans que A* trobi una solució. □

### 2.2.2 Admissibilitat d'A*

Ara que ja hem vist que el mètode assegura trobar una solució cal centrar la nostra atenció en que la solució trobada sigui òptima. Veurem que la condició necessària per l'admissibilitat del mètode és que l'heurística $h$ sigui admissible. No només això sinó que demostrarem que si l'heurística $h$ també és consistent aleshores podem assegurar que el camí a tot node visitat serà òptim.

**Definició 13** (Camí òptim)**.** Un camí $\{a_n\}$ amb $a_0 = \alpha$ i $a_n = \beta$ direm que és *òptim* si

$$g(a_n) \leq g(\{b_m\}) \qquad \forall \, \{b_m\} \text{ camins de } \alpha \text{ a } \beta$$

*Nota.* Sempre que existeixi algún camí sabem que existeix un camí òptim ja que el nostre graf és finit i per tant el conjunt de camins de $\alpha$ a $\beta$ és finit i s'assoleix el mínim.

**Lema 3.** *Sigui $\{a_m\}_{m=0}^{n}$ un camí òptim entre $a_0$ i $a_n$, i sigui $a_i \in \{a_m\}$ node qualsevol tal que $a_i \neq a_0$. Aleshores la subsuccessió $\{a_0, \ldots, a_i\}$ és un camí òptim entre $a_0$ i $a_i$.*

*Demostració.* Sabem que $\{a_m\}_{m=0}^{n}$ és un camí òptim de $a_0$ a $a_m$, suposem que $\{b_m\} = \{a_m\}_{m=0}^{i}$ no es un camí òptim. Aleshores ha d'existir un camí $\{c_m\}_{m=0}^{i}$ amb un cost menor entre $a_0$ i $a_i$, però aleshores el camí $\{c_0, ..., c_i, a_i + 1, ..., a_m\}$ que va de $c_0 = a_0$ a $a_m$ té un cost menor que $\{a_m\}_{m=0}^{n}$ i aleshores aquest no és un camí òptim, arribant així a contradicció. Per tant la subsuccessió fins a $a_i$ és un camí òptim. Com volíem veure. □

Hem comentat que la condició de consistència es més forta que la d'admissibilitat vegem que de fet tota heurística consistent es admissible.

**Lema 4.** *Sigui $h$ una heurística consistent, aleshores $h$ també és admissible.*

*Demostració.* Volem veure que $h(n) \leq g^*(n) = k(n, \beta)$. Agafem un node $n$ qualsevol, escollim $\{a_i\}_{i=0}^{m}$ un camí òptim entre $n$ i $\beta$ on $a_0 = n$ i $a_m$. Podem veure doncs que

$$h(n) = h(a_0) \leq h(a_1) + w(a_0, a_1) \leq \cdots \leq h(a_n) + \sum_{i=0}^{m-1} w(a_i, a_i + 1)$$

Però com el camí de $n = a_0$ a $a_m = \beta$ és òptim i $h(\beta) = 0$ aleshores

$$h(a_n) + \sum_{i=0}^{m-1} w(a_i, a_i + 1) = h(a_n)k(a_0, a_n) = k(a_0, a_n)$$

de manera que $h(n) \leq k(a_0, a_n)$ és a dir que l'heurística no sobreestima mai el cost real i per tant l'heurística és admissible, com volíem veure. □

**Lema 5.** *Sigui $\{a_m\}$ un camí òptim de $\alpha$ a $\beta$. Aleshores el valor de $f^*(n)$ es manté constant per a tot node $n \in \{a_m\}$. Es compleix que*

$$f^*(n) = h^*(\alpha) = k(\alpha, \beta) \qquad \forall n \in \{a_m\}$$

*Demostració.* Vegem els casos dels extrems, com $g^*(\alpha) = 0$ per al node inicial tenim que

$$f^*(\alpha) = g^*(\alpha) + h^*(\alpha) = h^*(\alpha) = k(\alpha, \beta)$$

I com $h^*(\beta) = 0$ en el cas del node final tenim que

$$f^*(\beta) = g^*(\beta) + h^*(\beta) = g^*(\beta) = k(\alpha, \beta)$$

Vegem ara el cas general. Qualsevol node $n$ del camí òptim compleix que

$$f^*(n) = g^*(n) + h^*(n) = k(\alpha, n) + k(n, \beta) = k(\alpha, \beta)$$

Ja que $n$ està en un camí òptim i per tant el camí que passa per $n$ te cost $k(\alpha, \beta)$. Com volíem veure. □

**Lema 6.** *Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Siguin $\alpha$ el node inici del nostre mètode i $n$ un node qualsevol, on $\alpha$ està connectat a $n$, sigui $\{a_m\}$ un camí òptim entre $\alpha$ i $n$. Aleshores si tots els nodes de $\{a_n\}$ estan a `CLOSED` el camí trobat fins a $n$ serà serà òptim.*

*Demostració.* Suposem que tots els nodes del camí òptim estan a `CLOSED` però que el camí trobat és no òptim, és a dir que $g(n) > g^*(n)$.

Tots els nodes del camí òptim estan a `CLOSED` però $g(n) > g^*(n)$ per tant podem dir que existeixen dos nodes consecutius del camí òptim, $a_i$ i $a_{i+1}$ tal que $g(a_i) = g^*(a_i)$ però $g(a_{i+1}) > g^*(a_{i+1})$, veurem que això no és possible.

En el moment en que $a_i$ s'ha afegit a `CLOSED` el node $a_{i+1}$ ha sigut explorat per $a_i$, amb $f(a_{i+1}) = g^*(a_{i+1}) + h(a_{i+1})$. Es poden donar dos casos

- El node estava a la llista `OPEN` o `CLOSED` i tenia un valor $f(a_{i+1}) > g^*(a_{i+1}) + h(a_{i+1})$. Aleshores actualitzem el node i en cas d'estar a `CLOSED` el reobrim.
- El node no havia sigut visitat. L'afegim a `OPEN` amb el nou valor de $f$.
- El node estava a la llista `OPEN` o `CLOSED` i ja tenia $f(a_{i+1}) \leq g^*(a_{i+1}) + h(a_{i+1})$. Aleshores no el modifiquem.

En qualsevol cas després de la visita de $a_i$ sabem que $f(a_{i+1}) \leq g^*(a_{i+1}) + h(a_{i+1})$ i per tant $g(a_{i+1}) \leq g^*(a_{i+1})$. Per tant no poden existir dos nodes del camí òptim consecutius tal que $g(a_i) = g^*(a_i)$ però $g(a_{i+1}) > g^*(a_{i+1})$, i com $g(\alpha) = 0$ podem assegurar que si tots els nodes del camí òptim estan a `CLOSED` aleshores $g(n) = g^*(n)$ com volíem. □

**Lema 7.** *Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Siguin $\alpha$ i $\beta$ els nodes inici i final del nostre mètode, on $\alpha$ està connectat a $\beta$. Si existeix un node d'un camí òptim $\{a_n\}$ a `OPEN` aleshores existeix un node de $\{a_n\}$ que està a `OPEN` tal que tots els nodes previs del camí estan a `CLOSED`.*

*Demostració.* Denotem $a_i$ el node més profund de $\{a_n\}$(més proper al final) a `CLOSED` tal que tots els nodes previs estan a `CLOSED`. Sabem doncs que $a_{i+1}$ pot estar a `OPEN` o a `CLOSED` ja que en ser visitat $a_i$ aquest node ha sigut afegit a `OPEN`. No pot estar a `CLOSED` per com hem escollit $a_i$. Per tant $a_{i+1}$ ha d'estar a `OPEN`, de manera que existeix un node del camí òptim a `OPEN` tal que tots els nodes previs són a `CLOSED`.

Per al primer pas del mètode en que el node inicial $\alpha$ està a `OPEN` i no hi ha cap node més explorat aquesta afirmació es continua complint ja que el conjunt de nodes previs de $\alpha$ es $\emptyset$. □

**Teorema 2** (A* es admissible)**.** *Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Siguin $\alpha$ i $\beta$ els nodes inici i final del nostre mètode, on $\alpha$ està connectat a $\beta$ i sigui $h$ una heurística admissible, aleshores $A^*$ és admissible.*

*Demostració.* Sabem que A* troba una solució ja que és complet (Teorema 1), així doncs suposem que el mètode ha trobat una solució i veurem que $f(\beta) = f^*(\beta)$. Sigui $\{a_n\}$ un camí òptim, si tots els nodes d'aquest estan a `CLOSED` aleshores el camí trobat serà òptim (Lema 6) i ja hauríem acabat.

Vegem el cas contrari, suposem que existeix algun node de $\{a_n\}$ a `OPEN`. Sabem doncs que existeix un node del camí òptim $a_i$ a `OPEN` tal que tots els nodes previs estan a `CLOSED` (Lema 7). Com $a_i$ ha sigut explorat per $a_{i-1}$ que està a `CLOSED` juntament amb tots els nodes previs tenim que $g(a_{i-1}) = g^*(a_{i-1})$(Lema 6). I per tant

$$f(a_i) \leq g^*(a_i) + h(a_i)$$

Per poder aplicar el lema estem utilitzant també que la subsuccessió $\{a_0 = \alpha, \ldots, a_i\}$ es un camí òptim fins a $a_i$ (Lema 3). Per tant si el mètode acaba abans de visitar $a_i$ vol dir que $f(\beta) \leq f(a_i)$, a més com $h$ és admissible sabem que $h(a_i) \leq h^*(a_i)$. Així doncs

$$f(\beta) \leq f(a_i) = g^*(a_i) + h(a_i) \leq g^*(a_i) + h^*(a_i) = f^*(a_i) = f^*(\beta)$$

l'última igualtat ve donada per que $f^*$ es manté constant al llarg d'un camí òptim. (Lema 5). Per tant $f(\beta) = f^*(\beta)$. Com volíem veure. □

Hem vist doncs que el mètode A* és admissible si l'heurística és admissible, vegem ara que si l'heurística és consistent aleshores tot node visitat es visita per un camí òptim.

**Teorema 3.** *Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Siguin $\alpha$ i $\beta$ els nodes inici i final del nostre mètode, on $\alpha$ està connectat a $\beta$ i sigui $h$ una heurística consistent, aleshores tot node que el mètode visiti ho farà per un camí òptim ($f(n) = g^*(n) + h(n)$).*

*Demostració.* Notem que la condició de $f(n) = g^*(n) + h(n)$ és equivalent a $g(n) = g^*(n)$. Agafem $n$ un node qualsevol i $\{a_n\}$ un camí òptim fins a $n$.

Suposem que visitem $n$ i veurem que ho farem per un camí tal que

$$f(n) \leq g^*(n) + h(n)$$

Sabem que si tots els nodes de $\{a_n\}$ estan a `CLOSED` aleshores el camí trobat és òptim (Lema 6) i ja hauríem acabat. Per tant suposem el cas contrari, suposem que existeix com a mínim un node a `OPEN`, aleshores sabem que existeix un node amb tots els nodes previs a `CLOSED` (Lema 7). Agafem el node $a_i$ de `OPEN` que compleix que tots els nodes previs són a `CLOSED`, aleshores sabem que

$$f(a_i) \leq g^*(a_i) + h(a_i)$$

ja que ha sigut explorat per $a_{i-1}$ i $g(a_{i-1}) = g^*(a_{i-1})$. Com l'heurística és consistent tenim que

$$f(a_i) = g^*(a_i) + h(a_i) \leq g^*(a_i) + w(a_i, a_{i+1}) + h(a_{i+1}) = g^*(a_{i+1}) + h(a_{i+1})$$

així doncs

$$f(a_i) \leq \cdots \leq g^*(n) + h(n)$$

però el mètode ha explorat $n$ abans que $a_i$, és a dir amb que $f(n) \leq f(a_i)$. Per tant si visitem $n$ serà amb

$$f(n) \leq g^*(n) + h(n)$$

però com no hi ha cap camí més curt que l'òptim podem assegurar que si visitem $n$ ho farem amb

$$f(n) = g^*(n) + h(n)$$

com volíem veure. □

Vegem ara un petit corol·lari que demostra l'admissibilitat de A* per a $h$ consistent.

**Corol·lari 1.** *En les condicions del teorema A* és admissible.*

*Demostració.* Hem vist que tot node visitat per A* compleix que $f(n) = g^*(n) + h(n)$ per tant, com el mètode és complet visitarem $\beta$ i es complirà que

$$f(\beta) = g^*(\beta) + h(\beta) = g^*(\beta) = f^*(\beta)$$

Ja que $h(\beta) = 0$ degut a $h$ és admissible (Lema 4). Per tant el camí trobat per A* es òptim. □

### 2.3 Admissibilitat d'A* amb heurístiques semi-admissibles

Hem vist que si una heurística és admissible aleshores podem assegurar que el mètode també és admissible però, que podem dir quan l'heurística no és admissible? ¿Funcionen igual dues heurístiques no admissibles independentment de per quant sobrepassin la condició d'admissibilitat? Sembla intuïtiu pensar que una heurística que sobrepassa molt poc la condició d'admissibilitat no pot proporcionar un resultat molt diferent del camí òptim.

Veurem justament que si aconseguim acotar l'heurística en relació a un heurística admissible aleshores podrem acotar també l'error de la solució obtinguda. Més formalment veurem que

- Si $h(n) \leq h'(n) + \epsilon$ aleshores $f(\beta) \leq f^*(\beta) + \epsilon$
- Si $h(n) \leq (1+\epsilon)h'(n)$ aleshores $f(\beta) \leq (1+\epsilon)f^*(\beta)$

on $h'(n)$ és una heurística admissible i $\epsilon > 0$.

### 2.3.1 Cas additiu

**Teorema 4** (A* és $\epsilon$-admissible per la suma)**.** *Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Siguin $\alpha$ i $\beta$ els nodes inici i final del nostre mètode, on $\alpha$ està connectat a $\beta$ i sigui $h(n)$ una heurística qualsevol (no necessàriament admissible) que compleix*

$$h(n) \leq h'(n) + \epsilon \qquad \forall n \in V$$

*on $h'(n)$ és una heurística admissible i $\epsilon > 0$. Aleshores A* trobarà un camí amb un cost $f(\beta) \leq f^*(\beta) + \epsilon$*

*Demostració.* La prova és molt semblant a veure que A* es admissible però simplement canviant la condició que s'ha de complir i l'heurística amb la que treballem. La farem sencera per més claredat.

Sabem que A* troba una solució ja que és complet (Teorema 1) per tant suposem que el mètode ha trobat una solució i veurem que $f(\beta) \leq f^*(\beta)+\epsilon$. Sigui $\{a_n\}$ un camí òptim, si tots els nodes d'aquest estan a `CLOSED` aleshores sabem que $g(\beta) = g^*(\beta)$ (Lema 6) i per tant

$$f(\beta) = g^*(\beta) + h(\beta) \leq g^*(\beta) + \epsilon = f^*(\beta) + \epsilon$$

i ja hauríem acabat, suposem doncs el cas contrari. Suposem que existeix algun node de $\{a_n\}$ a `OPEN`. Aleshores sabem que existeix un node del camí òptim $a_i$ a `OPEN` tal que tots els nodes previs estan a `CLOSED` (Lema 7). Com $a_i$ ha sigut explorat per $a_{i-1}$ i juntament amb tots els nodes previs està a `CLOSED` tenim que $g(a_{i-1}) = g^*(a_{i-1})$(Lema 6). I per tant

$$f(a_i) \leq g^*(a_i) + h(a_i)$$

Per poder aplicar el Lema 6 estem utilitzant també que la subsuccessió $\{a_0 = \alpha, \ldots, a_i\}$ és un camí òptim fins a $a_i$ (Lema 3). Per tant si el mètode acaba abans de visitar $a_i$ vol dir que $f(\beta) \leq f(a_i)$ a més, com $h'$ és admissible sabem que $h'(a_i) \leq h^*(a_i)$. Així doncs

$$\begin{aligned} f(\beta) &\leq f(a_i) \\ &= g^*(a_i) + h(a_i) \\ &\leq g^*(a_i) + h'(a_i) + \epsilon \\ &\leq g^*(a_i) + h^*(a_i) + \epsilon \\ &= f^*(a_i) + \epsilon \\ &= f^*(\beta) + \epsilon \end{aligned}$$

De manera que $f(\beta) \leq f^*(\beta) + \epsilon$. Com volíem veure. □

### 2.3.2 Cas multiplicatiu

**Teorema 5** (A* és $\epsilon$-admissible per la multiplicació)**.** *Sigui $G = \{V, E\}$ un graf. Siguin $\alpha$ i $\beta$ els nodes inici i final del nostre mètode, on $\alpha$ està connectat a $\beta$ i sigui $h(n)$ una heurística qualsevol (no necessàriament admissible) que compleix*

$$h(n) \leq (1+\epsilon) \cdot h'(n) \qquad \forall n \in V$$

*on $h'(n)$ és una heurística admissible i $\epsilon > 0$. Aleshores A* trobarà un camí amb un cost $f(\beta) \leq (1+\epsilon) f^*(\beta)$*

*Demostració.* La prova és pràcticament idèntica al cas additiu. Sabem que A* troba una solució ja que és complet (Teorema 1), per tant suposarem que el mètode ha trobat una solució i veurem que $f(\beta) \leq (1+\epsilon) f^*(\beta)$.

Sigui $\{a_n\}$ un camí òptim, si tots els nodes d'aquest estan a `CLOSED` aleshores sabem que $g(\beta) = g^*(\beta)$ (Lema 6) i per tant

$$f(\beta) = g^*(\beta) + h(\beta) \leq g^*(\beta) + (1+\epsilon) h^*(\beta) \leq (1+\epsilon) f^*(\beta)$$

i ja hauríem acabat, suposem doncs el cas contrari. Suposem que existeix algun node de $\{a_n\}$ a `OPEN`. Fent el mateix raonament que en el cas additiu deduïm que si el mètode acaba abans de visitar $a_i$, vol dir que $f(\beta) \leq f(a_i)$, a més com $h$ compleix que $h(n) \leq (1+\epsilon) \cdot h'(n)$ on $h'$ és admissible ($h'(n) \leq h^*(n)$) tenim que

$$\begin{aligned} f(\beta) &\leq f(a_i) \\ &= g^*(a_i) + h(a_i) \\ &\leq g^*(a_i) + (1+\epsilon) h'(a_i) \\ &\leq g^*(a_i) + (1+\epsilon) h^*(a_i) \\ &= f^*(a_i) + \epsilon h^*(a_i) \\ &\leq (1+\epsilon) f^*(a_i) \\ &= (1+\epsilon) f^*(\beta) \end{aligned}$$

De manera que $f(\beta) \leq (1+\epsilon) f^*(\beta)$. Com volíem veure. □

*Nota.* El cas anterior és equivalent a dir: Si $h(n) \leq C \cdot h'(n)$ aleshores $f(\beta) \leq C \cdot f^*(\beta)$ on $h'(n)$ és una heurística admissible i $C > 1$.

# 3 Aplicació del mètode en casos pràctics

Hem vist que el cas òptim és trobar una heurística admissible i que aporti la màxima informació per tal que el mètode tingui la major eficiència i asseguri trobar un camí òptim, però a la pràctica no és tan fàcil aconseguir l'heurística perfecta. Ja sigui per falta d'informació, informació imprecisa o perquè per la naturalesa del problema no és viable, crear una heurística admissible, informada i que no tingui un cost computacional immens pot resultar molt complicat. Per exemple en el cas del mapa és directe trobar una heurística no només admissible sinó consistent, aquesta és la distància en línia recta entre dos punts, però en el cas del cub de butxaca no és gens trivial trobar una bona heurística.

Ara bé, amb els resultats teòrics trobats si relaxem la condició d'admissibilitat poden entrar en joc moltes altres heurístiques que no sempre produiran un resultat òptim però que poden produir una solució suficientment bona depenent dels nostres requeriments.

Per treballar amb heurístiques no admissibles de manera fàcil i poder conèixer quant poden sobreestimar el cost real hem creat funcions afegint un cert soroll a l'heurística admissible que utilitzem en cada mètode. L'heurística admissible $h$ dependrà del cas que estem treballant, la definirem més endavant en cada cas. Les heurístiques modificades que utilitzarem seran

- Per al cas additiu

$$\begin{aligned} h' : V &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ n &\longrightarrow h(n) + r \end{aligned} \tag{4}$$

- Per al cas multiplicatiu

$$\begin{aligned} h'' : V &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ n &\longrightarrow h(n) \cdot (1 + r) \end{aligned} \tag{5}$$

on $r \sim Unif(0, \epsilon)$, notem però que en la implementació només avaluem el valor de $h$ un únic cop i després s'emmagatzema de manera que no ho hem d'entendre com estar tractant amb una funció aleatòria sinó que estem tractant amb una heurística que no coneixem i que està acotada com es menciona.

D'aquesta manera hem construït una funció heurística per a cada cas i que podem modificar canviant $\epsilon$ (quant pot l'heurística sobreestimar el cost real). Hem implementat el mètode en dos casos diferents, vegem quins són els resultats i si coincideixen amb el que hem vist fins ara.

## 3.1 Trobant el camí més curt entre dos punts d'Espanya amb A*

Una de les principals aplicacions d'A* són els sistemes de navegació, s'utilitza per trobar el camí més adequat per anar d'un punt a un altre (el més curt, el més ràpid, o la condició que necessitem) en tot tipus de mapes. Hem de comentar que quan es tracta de mapes molt grans o es vol un temps de càlcul molt ràpid s'utilitzen altres mètodes que permeten precalcular part del graf i troben un resultat d'una manera més ràpida.

### 3.1.1 Aplicació del mètode

En aquest cas treballarem amb un graf $G = \{V, E\}$ amb la informació d'un mapa de les carreteres d'Espanya [3], i el nostre objectiu serà trobar el camí més curt entre dos punts del mapa.

Tindrem un conjunt de nodes $V$ on cada node $n \in \mathbb{R}^3$ representarà un punt del mapa, és a dir la posició espacial dels nodes respecte el centre de la terra (el considerarem l'origen de coordenades). El conjunt d'arestes $E$ representarà les carreteres que uneixen els diferents punts, i tindran un pes representant la distància en línia recta entre els nodes que uneixen. En aquest cas com no totes les carreteres són en les dues direccions estarem treballant amb un graf dirigit.

Definim formalment el pes d'una aresta entre $a$ i $b$ com

$$\begin{aligned} w : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (a, b) &\longrightarrow \|a - b\| \end{aligned} \tag{6}$$

Com a funció heurística admissible i consistent utilitzarem la distància en línia recta entre els dos punts, (sense tenir en compte que estem sobre una esfera).

$$\begin{aligned} h : V &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ n &\longrightarrow \|n - \beta\| \end{aligned} \tag{7}$$

Sabem que $\|a - c\| \leq \|a - b\| + \|b - c\|$ es compleix (desigualtat triangular), per tant la nostra heurística és consistent.

### 3.1.2 Resultats amb heurístiques $\epsilon$-admissibles (Cas additiu)

Hem vist que quan l'heurística utilitzada sobrepassa l'admissibilitat com a màxim per una certa constant ($h(n) \leq h'(n) + \epsilon$) el mètode A* assegura produir resultats que com a màxim sobrepassin el camí òptim per $\epsilon$. En aquest cas no només es manté la cota mencionada sinó que els resultats es mantenen notablement per sota, és a dir els resultats obtinguts són millors del que la cota assegura (Figura 1).

Podem observar a més que conforme $\epsilon$ augmenta els resultats es desvien més de la cota teòrica. Per a $\epsilon = 1000$ el resultat més desviat del camí òptim es desvia per uns 250 metres, en canvi quan $\epsilon = 1.000.000$ el camí menys òptim només és uns 50.000 metres més llarg.

Però estem parlant dels pitjors resultats obtinguts, en general els resultats són

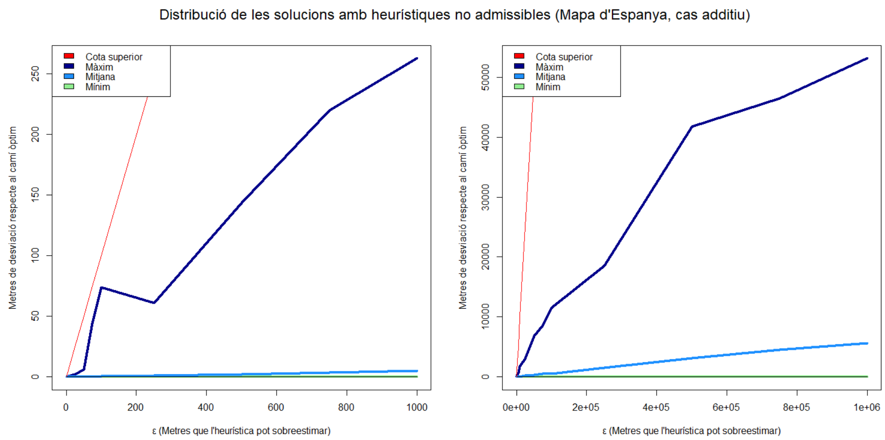


Figura 1: Distribució de les solucions trobades en funció de la quantitat de metres que l'heurística pot sobrepassar a l'heurística admissible.

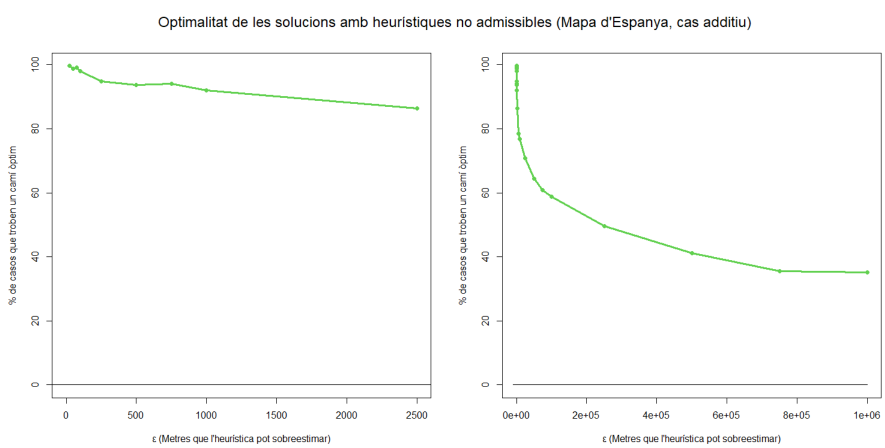


Figura 2: Percentatge de solucions òptimes en funció de la quantitat de metres que l'heurística pot sobrepassar a l'heurística admissible.

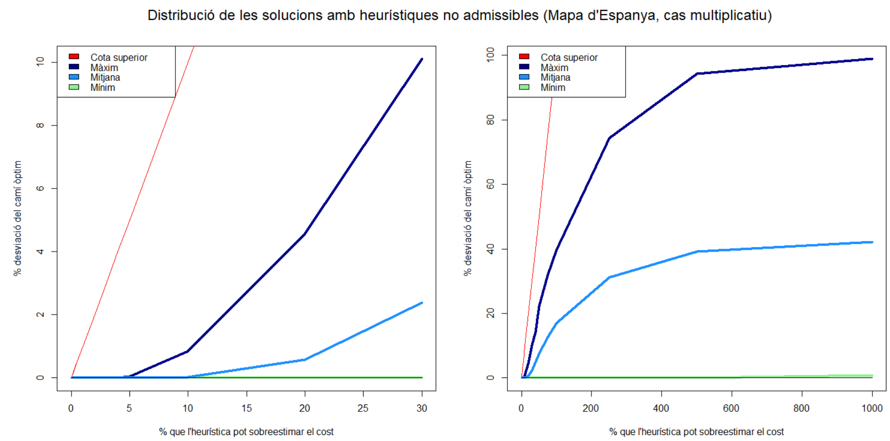


Figura 3: Distribució de les solucions trobades en funció del percentatge que l'heurística pot sobrepassar l'heurística admissible $h$.

molt millors (Figura 2), de fet un gran percentatge de solucions són òptimes. Per a $\epsilon < 2500$ metres més del 90% dels camíns són òptims i fins que $\epsilon$ no supera els 100.000 metres més de la meitat dels camins trobats són òptims, a partir d'aquí l'optimalitat decreix molt lentament conforme $\epsilon$ augmenta, tan lentament que quan l'heurística pot sobreestimar fins a un milió de metres el mètode encara troba un 40% de solucions òptimes.

### 3.1.3 Resultats amb heurístiques $\epsilon$-admissibles (Cas multiplicatiu)

En el cas en que acotem l'heurística no admissible amb $1+\epsilon$ vegades l'heurística admissible ($h(n) \leq h'(n) + \epsilon$) els resultats també es mantenen notablement per sota de la cota (Figura 3). Tractarem la no admissibilitat de l'heurística amb percentatges (si $\epsilon = 0.05$), aleshores l'heurística pot sobrepassar fins a un 5% l'heurística admissible.

Podem observar que hi ha un canvi de tendència en l'evolució de la desviació conforme augmenta la no admissibilitat. Fins al 30% sembla un creixement exponencial mentre que a partir d'aquí el creixement comença a estabilitzar-se. Podem observar que quan sobrepassem la no admissibilitat per un 1000% la desviació mitjana dels camins es manté al voltant del 40%, és a dir que fins i tot amb una heurística totalment desfigurada i que conté més soroll que informació el mètode troba solucions considerablement acceptables. Vegem que fins a un 1% de no admissibilitat totes les solucions trobades són òptimes i per a menys d'un 5% obtenim més d'un 98% de camins òptims, conforme augmenta la no admissibilitat de l'heurística es redueix la quantitat de solucions òptimes trobades fins apropar-nos a 0 (Figura ,4). Podem apreciar que els resultats per al cas multiplicatiu són menys prometedors que en el cas additiu. En aquest cas

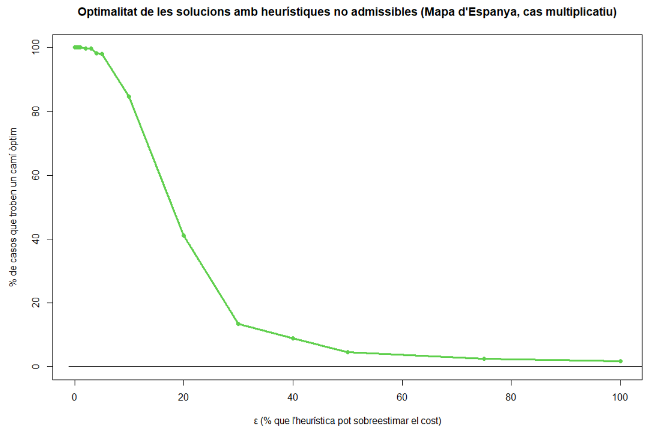


Figura 4: Percentatge de solucions òptimes en funció del percentatge que l'heurística pot sobrepassar l'heurística admissible $h$.

el percentatge de solucions òptimes està proper a 0 per a un 100% de desviació de l'heurística.

Podem veure en un cas real la variació entre els camins trobats per heurístiques no admissibles i el camí òptim en un exemple de camins entre Girona i Lugo (Figura 5). Vegem que els camins no òptims tot i no ser ideals avancen en la direcció correcta i podrien semblar acceptables. Notem també que només són visibles alguns colors de l'espectre ja que els camins amb $\epsilon$ menor són idèntics al camí òptim o tenen variacions mínimes no visibles.

## 3.2 Solucionant el cub de Rubik 2x2x2 amb A*

El cub de Rubik $2 \times 2 \times 2$ (també anomenat cub de butxaca) és una reducció del cub de Rubik original ($3 \times 3 \times 3$) que només presenta les cantonades. Treballarem amb el cub de butxaca ja que te un nombre d'estats molt més reduït i és més raonable computacionalment.

El nombre d'estats ve donat per la manera d'ordenar les 8 cantonades del cub. Tenim 8 peces que podem col·locar de totes les maneres possibles (8!). Pel que fa a la orientació, podem orientar 7 de les 8 peces ja que l'orientació de l'última peça ve donada per la resta, cadascuna de 3 maneres diferents ($3^7$). Ara bé l'orientació del cub en el espai no canvia l'estat, per tant hem de tenir en compte que hi ha 24 maneres d'orientar el mateix estat. Així doncs el nombre d'estats és

$$\frac{8! \times 3^7}{24} = 7! \times 3^6 = 3.674.160$$

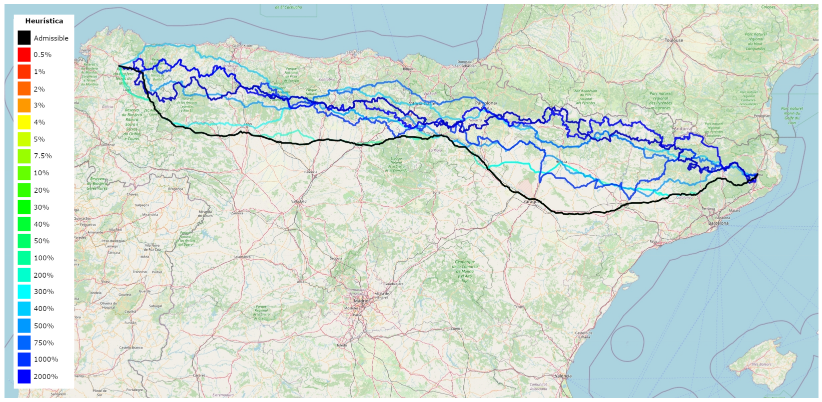


Figura 5: Camins trobats entre Girona i Lugo amb l'heurística admissible $h$ i amb la heurística no admissible $h''$ per a diferents valors de $\epsilon$. Amb l'espectre de colors està representat quant pot l'heurística $h''$ superar a l'admissible.

Podem veure que el cub de Rubik original te un nombre d'estats molt major, el que fa que sigui impracticable mantenir en memòria el graf complet de tots els estats

$$\frac{8! \times 3^7 \times 12! \times 2^{11}}{2} = 43.252.003.274.489.856.000$$

El cub de butxaca tot i la seva mida reduïda no presenta una resolució gens trivial i per tant sembla un problema prou interessant per a l'estudi. El nombre màxim de moviments necessaris per resoldre el cub des de qualsevol estat informalment es coneix com el número de Déu i es denota com a $\delta$. En aquest cas des de qualsevol estat podem arribar a l'estat solucionat utilitzant com a màxim $\delta = 11$ moviments (Considerant com a moviments possibles els girs de quart i mitja volta en tots dos sentits de totes les cares).

### 3.2.1 Aplicació del mètode

Considerarem un graf amb 3.674.160 nodes, un per a cada estat del cub de butxaca i que estan conectats per els moviments que podem fer. El pes de les arestes del graf sempre serà 1, de manera que la imatge de la funció cost $g$ és $\mathbb{N}$ i no $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. També cal comentar que en aquest cas treballem amb un graf no dirigit ja que els moviments es poden realitzar en tots dos sentits.

Trobar una bona heurística admissible i informada no és un cas gens trivial per al cub de butxaca, considerem diferents opcions com a heurística

- Heurística nul·la $h_0(n) = 0 \quad \forall n \in V$. Aquesta heurística és admissible i consistent però no aporta cap informació.
- Cantonades col·locades incorrectament (sense precisar orientació):

$$h_1(n) = 8 - \#\{\text{cantonades ben col·locades}\}$$

Aquesta heurística aporta certa informació però no és admissible. Si considerem l'estat $n$ un estat a només un gir de l'estat resolt l'heurística retornaria $h(n) = 4$ (hi ha 4 cantonades col·locades incorrectament) però $h^*(n) = 1$.

- Cantonades col·locades incorrectament i/o mal orientades:

  $$h_2(n) = 8 - \#\{\text{cantonades ben col·locades i orientades}\}$$

  Aquesta heurística aporta encara més informació però continua sense ser admissible. El mateix contraexemple d'abans aplica per aquest cas.

El nostre objectiu era treballar amb heurístiques no admissibles però amb les que poguéssim controlar aquesta no admissibilitat. Per poder construir-les necessitem primer una heurística admissible acceptable (que no sigui $h(n) = 0$).

Aquesta heurística admissible que utilitzarem és un tant artificial ja que la tindrem precalculada abans de començar el mètode. És l'heurística perfecta (retorna el cost real per arribar al final), és a dir, $h^*(n) = k(n, \beta)$. La construirem amb $h_0$, definim-la formalment.

$$\begin{aligned} h_0 : V &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ n &\longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Aquesta heurística és consistent i per tant utilitzant el lema 3 sabem que tots els nodes que visita ho fa per un camí òptim. Aleshores si s'executa A* amb node inicial $\beta$ sense un node objectiu el mètode visitarà tots els nodes fins a buidar la llista `OPEN` trobant així un camí òptim des de $\beta$ fins a cada node alhora, és a dir les solucions òptimes a tots els estats del cub de Rubik alhora. Amb aquestes dades trobades podem construir l'heurística que utilitzarem

$$\begin{aligned} h : V &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ n &\longrightarrow h^*(n) = k(n, \beta) \end{aligned} \tag{9}$$

### 3.2.2 Resultats

Al construir la nostra heurística hem pogut trobar el nombre de moviments necessari per solucionar qualsevol estat del cub. Així doncs podem provar que realment $\delta = 11$, de fet podem veure el nombre d'estats que requereixen un mínim de $n$ moviments per ser resolts (Figura 6).

Com a curiositat, un dels pocs estats que requereixen 11 moviments per ser resolt és l'estat que té dues cantonades adjacents intercanviades conservant una certa orientació (Figura 7). Als moviments necessaris per resoldre aquest estat se'ls anomena permutació de tipus T (aquesta és molt coneguda en el món dels cubs de Rubik).

| $n$ | Nombre d'estats |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 9 |
| 2 | 54 |
| 3 | 321 |
| 4 | 1.847 |
| 5 | 9.992 |
| 6 | 50.136 |
| 7 | 227.536 |
| 8 | 870.072 |
| 9 | 1.887.748 |
| 10 | 623.800 |
| 11 | 2644 |
| 12 | 0 |

Figura 6: Nombre d'estats del cub de butxaca que requereixen $n$ moviments per ser resolts

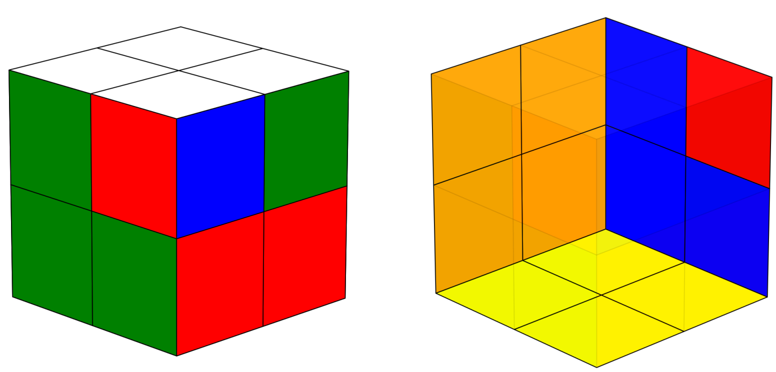

Figura 7: Estat amb únicament dues cantonades intercanviades i ben orientades, és un dels estats que requereixen 11 moviments per ser solucionat (Al conjunt de moviments per resoldre aquest cas se l'anomena permutació de tipus T).

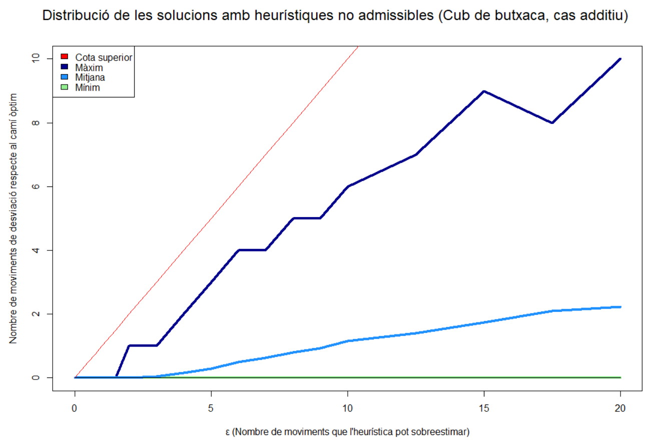


Figura 8: Distribució de les solucions trobades en funció del nombre de moviments que l'heurística no admissible pot sobreestimar.

#### 3.2.3 Resultats amb heurístiques $\epsilon$-admissibles (Cas additiu)

Hem vist que quan l'heurística utilitzada sobrepassa l'admissibilitat com a màxim per una certa constant ($h(n) \leq h'(n) + \epsilon$) el mètode A* assegura produir resultats que com a màxim sobrepassin el camí òptim per $\epsilon$. En aquest cas $\epsilon$ és la quantitat de moviments que podem sobrepassar l'admissibilitat. Podem observar que en aquest cas els resultats obtinguts també es mantenen per sota de la cota teòrica (Figura 8). Quan l'heurística sobreestima fins a 20 moviments tots els resultats que hem obtingut com a màxim han sigut 10 moviments més llargs que l'òptim però de mitjana només hi ha hagut una desviació d'uns 2 moviments.

Notem que quan l'heurística sobreestima 2 o menys moviments totes les solucions trobades són òptimes y que aquest nombre poc a poc es va reduint mentre augmenta $\epsilon$ fins a $\epsilon = 20$ on aproximadament un 30% dels camins trobats són òptims (Figura 9).

#### 3.2.4 Resultats amb heurístiques $\epsilon$-admissibles (Cas multiplicatiu)

Com en la resta de casos es confirma el resultat teòric i la cota mai es sobrepassada, com volíem veure (Figura 10). Notem que en aquest cas el gràfic és una mica irregular degut a la naturalesa de les dades, com parlem de moviments estem parlant de dades discretes i per aquesta raó per sota del 10% tots els camins són òptims i després creix de manera tan sobtada.

En aquest cas obtenim sempre camins òptims mentre que l'heurística no sobrepassi l'admissibilitat per més d'un 10% i conforme augmenta la no admissibilitat, va disminuint l'optimalitat, fins arribar al voltant d'un 40% quan l'heurística pot sobrepassar l'admissibilitat per un 100%(Figura 11).

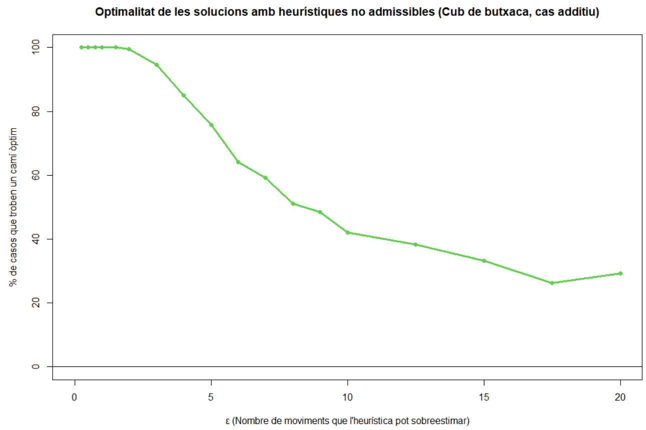


Figura 9: Percentatge de solucions òptimes en funció del nombre de moviments que l'heurística no admissible pot sobreestimar.

Després de veure que les heurístiques no admissibles que hem creat de manera artifical confirmen la teoria, confirmem els resultats amb una heurística particular. Aquesta heurística és $h_1$ (heurística de les cantonades no col·locades), podem acotar aquesta heurística per $h_1(n) \leq h^*(n) + 5$, així doncs hauríem de confirmar que cap resultat no excedeix en més de 5 moviments el resultat òptim. Utilitzant l'heurística $h_1$ obtenim que la gran majoria dels camins trobats són òptims i que de fet els camins trobats no òptims només s'han desviat per un moviment (Figura 12).

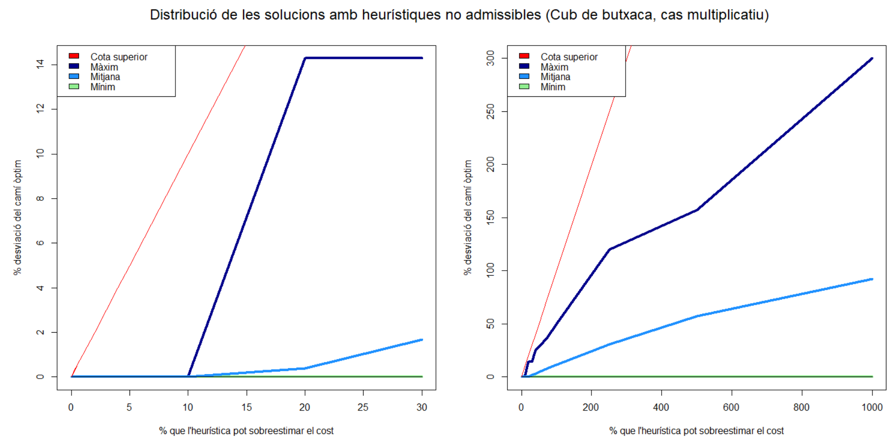


Figura 10: Distribució de les solucions trobades en funció del percentatge que l'heurística pot sobrepassar l'heurística admissible $h$.

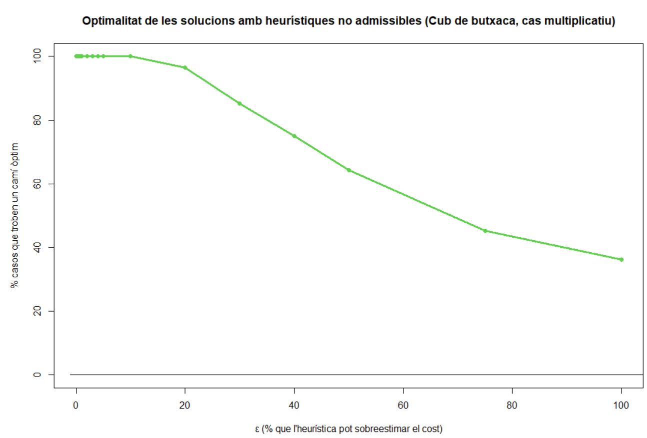


Figura 11: Percentatge de solucions òptimes en funció del percentatge que l'heurística pot sobrepassar l'heurística admissible $h$.

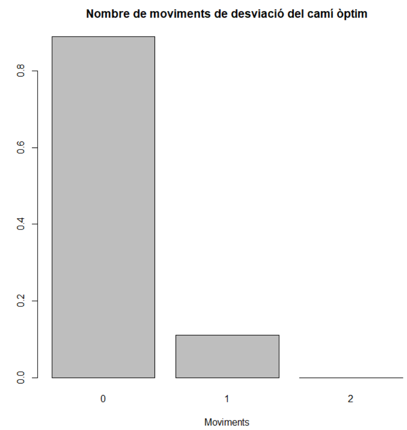


Figura 12: Percentatge de solucions trobades amb $n$ moviments de desviació respecte el camí òptim amb l'heurística de les cantonades no col·locades pel cub de butxaca.

# 4 Conclusions

A* es un mètode de cerca de camins en grafs que combina la informació de la distància recorreguda (funció cost) i la distància que queda per recórrer (funció heurística) per trobar una solució òptima d'una manera eficient. Tot i això requereix escollir una bona funció heurística per assegurar la seva eficiència i optimalitat.

Per poder assegurar que el camí trobat és òptim cal que l'heurística utilitzada sigui admissible, però cal mantenir una certa eficiència i no haver de visitar més nodes dels necessaris, raó per la que necessitem que l'heurística sigui el més informada possible.

Trobar una heurística complint aquestes dues condicions en alguns casos no és gens fàcil, de manera que relaxar la condició d'admissibilitat és una opció a tenir en compte, produint així resultats no sempre òptims però amb una desviació respecte el camí òptim acotada. D'aquesta manera tenim més flexibilitat a l'hora d'escollir una heurística tenint en compte que els resultats no sempre seran òptims.

Les cotes demostrades per a les solucions amb heurístiques no admissibles són les següents.

- Si una heurística sobrepassa per $\epsilon$ o menys una heurística admissible ($h(n) \leq h'(n) + \epsilon$) aleshores el camí trobat no sobrepassarà per més de $\epsilon$ el camí òptim ($f(\beta) \leq f^*(\beta) + \epsilon$).

- Si una heurística no sobrepassa $1+\epsilon$ vegades una heurística admissible ($h(n) \leq (1+\epsilon)h'(n)$) aleshores el camí trobat no sobrepassarà per més de $1+\epsilon$ vegades el camí òptim ($f(\beta) \leq (1+\epsilon)f^*(\beta)$).

Els resultats depenen completament de les dades i l'heurística utilitzada per fer les proves però, en els casos pràctics hem pogut observar que les solucions trobades amb les heurístiques no admissibles produïen resultats notablement per sota de la cota teòrica.

Una possible continuació per a aquest treball es veure l'impacte computacional d'escollir heurístiques no admissibles. Si A* utilitza una heurística consistent i el màxim d'informada ($h^*(n)$), aleshores el mètode visitarà el mínim número de nodes possibles per a un mètode unidireccional [1]. Ara bé si l'heurística no és consistent s'afegeix la possibilitat de visitar nodes més d'un cop. Si a més l'heurística no és admissible s'afegeix també el problema de visitar nodes que amb h admissible no visitaríem. De manera que seria interessant col·locar en una balança una heurística amb més informació no admissible versus una heurística admissible menys informada.

## Referències


[1] Pearl, J. (1984). Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving. Van Haren Publishing.

[2] Wikipedia contributors. (2023, 17 Gener). A* search algorithm. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/A*_search_algorithm

[3] Optimisation 2009—2021. (2022, 3 Agost). https://mat.uab.cat/%7Ealseda/MasterOpt/index.html

[4] Ghallab, Malik; Dennis Allard (August 1983). A$\epsilon$ – an efficient near admissible heuristic search algorithm. Proceedings of the Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-83). Vol. 2. Karlsruhe, Germany. pp. 789–791

[5] Dechter, Rina; Judea Pearl (1985). Generalized best-first search strategies and the optimality of A*. Journal of the ACM. 32 (3): 505–536.

[6] Wikipedia contributors. (2023, 15 Gener). Graph theory. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory

[7] Wikipedia contributors. (2022, 27 Febrer). Best-first search. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Best-first_search

[8] Wikipedia contributors. (2021, 22 Juny). Bidirectional search. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Bidirectional_search

[9] Sebastian Lague. (2014, 16 Desembre). A* Pathfinding (E01: algorithm explanation). YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=-L-WgKMFuhE

[10] Wikipedia contributors. (2023, 19 Gener). Pocket Cube. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Pocket_Cube