MATRICE ASSOCIATA AD UN'APPLICAZIONE LINEARE:

SIANO V e W DUE SPAZI VETTORIALI E $T: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE. INOLTRE, CHIAMIAMO $n = \dim(V)$ e $m = \dim(W)$.
FISSIAMO UNA BASE $\mathcal{B}$ per W e $\mathcal{E}$ per W. SCRIVIAMO PER ESTESO

$$\mathcal{B} = \{\underline{b}_1; \dots; \underline{b}_n\} \qquad \mathcal{E} = \{\underline{e}_1; \dots; \underline{e}_m\}$$

DEF:

LA MATRICE ASSOCIATA A T CON SCELTA DI BASI

$\mathcal{B}$ = BASE PARTENZA e $\mathcal{E}$ = BASE DI ARRIVO

È LA MATRICE che ha come j-ma colonna le coordinate di $T(\underline{b}_j)$ RISPETTO ALLA BASE $\mathcal{E}$.
QUESTA È UNA MATRICE m RIGHE E n COLONNE DIPENDENTE DALLA SCELTA DELLE BASI.
INDICHIAMO LA MATRICE ASSOCIATA A T CON $M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}(T)$

BASE DI ARRIVO

BASE DI PARTENZA

CON $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ FISSATE, POSSIAMO VEDERE $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\quad)$ COME UN'APPLICAZIONE DALL'INSIEME DELLE APPLICAZIONI LINEARI TRA V e W e L'INSIEME DELLE MATRICI $m \times n$:

$$M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}(\quad): \mathrm{Hom}(V, W) \mapsto M_{\dim(W)\dim(V)}(\mathbb{K})$$

$$T \qquad\qquad M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}(T)$$

TEO:

L'APPLICAZIONE

$$M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}(\ ): \mathrm{Hom}(V;W) \to M_{\dim(W);\dim(V)}(\mathbb{K})$$

è LINEARE ED è UN ISOMORFISMO DI SPAZI VETTORIALI

Se $\underline{x}$ SONO LE COORDINATE DI $\underline{v}$ IN BASE $\mathcal{B}$ e $\underline{y}$ QUELLE DI $T(\underline{v})$ IN BASE $\mathcal{E}$ ALLORA SI HA:

$T(\underline{v}) = T(x_1\underline{b}_1 + \dots + x_n\underline{b}_n) = x_1T(\underline{b}_1) + \dots + x_nT(\underline{b}_n) = y_1\underline{e}_1 + \dots + y_m\underline{e}_m$ IN BASE $\mathcal{E}$

Pongo $A := M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}(T)$, PER DEFINIZIONE DI A $T(\underline{b}_j) = a_{1j}\underline{e}_1 + a_{2j}\underline{e}_2 + \dots + a_{mj}\underline{e}_m$

(LE COLONNE DI A SONO LE COORD DI b_j IN BASE $\mathcal{E}$

QUINDI:

$x_1T(\underline{b}_1) + \dots + x_nT(\underline{b}_n) = x_1(a_{11}\underline{e}_1 + \dots + a_{m1}\underline{e}_m) + \dots + x_n(a_{1n}\underline{e}_1 + \dots + a_{mn}\underline{e}_m)$

$= \underline{e}_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + \underline{e}_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)$

$\Longmapsto y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ ; \dots ; \ y_n = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n$

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

PROP:

Se $\underline{x}$ sono le coordinate di $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$ e $\underline{y}$ quelle di $T(\underline{v})$ in base $\mathcal{E}$ allora:

MATRICE ASSOCIATA A T

COORD DI $\underline{v}$ IN BASE $\mathcal{E}$ — COORD DI $\underline{v}$ IN BASE $\mathcal{B}$

$$\underline{y} = M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}(T)\,\underline{x} \qquad (1)$$

Nel caso particolare in cui $V = W$, possiamo considerare l'applicazione lineare identità $id_V : V \to V : id_V = \underline{v}$.
Date due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V avremo una matrice $M_{\mathcal{B};\mathcal{B}'}(Id_V)$ che rappresenta l'identità di V rispetto a queste due basi, la sua j-ma colonna è data dalle coordinate di $id_V(b'_j) = b'_j$ in base $\mathcal{B}$.

DEF:

La matrice $M_{\mathcal{B};\mathcal{B}'}(id_V)$ è per definizione la matrice del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$

se $\underline{x}$ sono le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e $\underline{x}'$ quelle rispetto $\mathcal{B}'$ allora:

$$\underline{x} = M_{\mathcal{B};\mathcal{B}'}(id_V)\,\underline{x}' \qquad \text{e} \qquad \underline{x}' = B_{\mathcal{B}';\mathcal{B}}(id_V)\,x$$

$M_{\mathcal{B};\mathcal{B}'}(id_V)$ è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{b_j}$ in $\mathcal{B}'$

$M_{\mathcal{B}';\mathcal{B}}(id_V)$ è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{b'_j}$ in $\mathcal{B}$

COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI:

Gli ISOMORFISMI $M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}$ godono di un'importante proprietà rispetto alla composizione:

PROP:
Se V, W, U sono tre spazi vettoriali con rispettive basi $\mathcal{B}; \mathcal{E}; \mathcal{F}$ e $T: V \to W$ e $S: W \to U$ sono app. lineari allora:

$$M_{\mathcal{F};\mathcal{B}}(S \circ T) = M_{\mathcal{F};\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}(T)$$

DIM:
Siano $\underline{z}$ le coord associate alla base $\mathcal{F}$. Sappiamo che:

COORD in BASE $\mathcal{E}$ ← $\underline{y} = M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}(T)\,\underline{x}$ e $\underline{z} = M_{\mathcal{F};\mathcal{E}}(S)\,\underline{y}$

Quindi: $\underline{z} = M_{\mathcal{F};\mathcal{B}}(S \circ T)\,\underline{x}$ per DEF

$$\underline{z} = M_{\mathcal{F};\mathcal{E}}(S)\left[M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}(T)\,\underline{x}\right] \overset{!}{=} M_{\mathcal{F};\mathcal{B}}(S \circ T) \cdot \underline{x}$$

Deduciamo che $\forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$:

$$M_{\mathcal{F};\mathcal{E}}(S)\,M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}(T)\,\underline{x} = M_{\mathcal{F};\mathcal{B}}(S \circ T)\,\underline{x}$$

Quindi dato che $B\underline{x} = C\underline{x} \;\; \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n \iff B = C$

$$M_{\mathcal{F};\mathcal{E}}(S)\,M_{\mathcal{E};\mathcal{B}}(T) = M_{\mathcal{F};\mathcal{B}}(S \circ T)$$

Un' APPLICAZIONE PARTICOLARE DELLA FORMULA COMPOSIZIONE / PRODOTTO RIGUARDA LA MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE INVERSA DELL' APPLICAZIONE INVERTIBILE $f: V \to W$
Con $n = \dim(V) = \dim(W)$ ABBIAMO:

$$M_{\beta,\varepsilon}(f^{-1}) \cdot M_{\varepsilon;\beta}(f) = M_{\beta;\beta}(f^{-1} \circ f) = M_{\beta,\beta}(id_V) = id_n$$

ALLO STESSO MODO:

$$M_{\varepsilon;\beta}(f) \cdot M_{\beta,\varepsilon}(f^{-1}) = M_{\varepsilon,\varepsilon}(f \circ f^{-1}) = M_{\varepsilon,\varepsilon}(id_W) = id_n$$

SEGUE CHE

$$M_{\beta,\varepsilon}(f^{-1}) = [M_{\varepsilon,\beta}(f)]^{-1}$$

Per $id_V : V \to V$, che ha come inversa se stessa, OTTENIAMO:

$$M_{\beta;\beta'}(id_V) = [M_{\beta',\beta}(id_V)]^{-1}$$

PROP:
LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE, DA β A β' è L'INVERSA DELLA MATRICE DEL CAMBIO DI BASE DA β' A β

PROP:
SE $T: V \to V$ è un ENDOMORFISMO e β è una base DI V ALLORA:

$$M_{\beta,\beta}(T) = M_{\beta,\beta'}(id_V) \cdot M_{\beta',\beta'}(T) \cdot (M_{\beta,\beta'}(id_V))^{-1}$$

$$M_{\beta',\beta'}(T) = (M_{\beta,\beta'}(id_V))^{-1} \cdot M_{\beta,\beta}(T) \cdot M_{\beta,\beta'}(id_V)$$

DEF:

LA MATRICE $A' \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ è SIMILE ALLA MATRICE A se esiste B INVERTIBILE T.C

$$A' = B^{-1} A B$$

NOTIAMO che se A' è SIMILE AD A ALLORA A è SIMILE AD A', infatti MOLTIPLICANDO L'ULTIMA UGUAGLIANZA A SINISTRA per B e A DESTRA per B^{-1} si ha:

$$B \cdot A' \cdot B^{-1} = B \cdot \cancel{B^{-1}} \cdot A \cdot \cancel{B} \cdot \cancel{B^{-1}} = (B^{-1})^{-1} \cdot A \cdot B^{-1} = C^{-1} \cdot A \cdot C$$

PROP:

Se $T: V \to V$ è un ENDOMORFISMO ALLORA LE MATRICI ASSOCIATE A T in DUE BASI DIVERSE SONO SIMILI

AUTOVETTORI E AUTOVALORI:

SIA $T: V \to V$ LINEARE $\underline{v} \neq \underline{0}$ è UN AUTOVETTORE PER T SE $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c

$$T(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$$

(T TRASFORMA $\underline{v}$ IN UN SUO MULTIPLO)

OSS:

SE $\underline{v}$ è UN AUTOVETTORE DI AUTOVALORE λ (SI DICONO ASSOCIATI)
$\Rightarrow \alpha \underline{v}$; $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ è ANCHE AUTOVETTORE DI VALORE λ

$$T(\alpha \underline{v}) = \alpha T(\underline{v}) = \alpha (\lambda \underline{v}) = \lambda (\alpha \underline{v})$$

TUTTA LA RETTA $\{\alpha \underline{v} : \alpha \in \mathbb{K}\}$ VIENE TRASFORMATA IN SE STESSA DA T.

$$V_\lambda = \text{AUTOSPAZIO a } \lambda = \{\underline{0}\} \cup \{\underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \wedge \underline{v} \neq \underline{0}\}$$

$$\overset{!}{=} \{\underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) - \lambda \underline{v} = \underline{0}\} = \{\underline{v} \in V \mid (T - \lambda \, id_V)(\underline{v}) = \underline{0}\} = \ker(T - \lambda \, id_V) \leq V$$

SUPPONIAMO CHE ESISTA UNA BASE $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ COSTITUITA DA AUTOVETTORI

$T(\underline{v}_1) = \lambda_1 \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1 + 0 \underline{v}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n$ ALLORA: $M_{B,B}(T)$ è UGUALE A

$T(\underline{v}_2) = \lambda_2 \underline{v}_2 = 0 \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n$

$\vdots$

$T(\underline{v}_n) = \lambda_n \underline{v}_n = 0 \underline{v}_1 + 0 \underline{v}_2 + \dots + \lambda \underline{v}_n$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

QUINDI T È DIAGONALIZZABILE SE ESISTE UNA BASE DI V COSTITUITA DA AUTOVETTORI PER T

! NON TUTTI GLI OPERATORI SONO DIAGONALIZZABILI, DI FATTO POSSONO ESISTERE $T: V \to V$ CHE NON HANNO AUTOVETTORI E AUTOVALORI

Come troviamo gli autovalori?

LE SEGUENTI SONO EQUIVALENTI:

($\Leftrightarrow$): 1) $\lambda \in \mathbb{K}$ È UN AUTOVALORE

2) $\exists$ UN AUTOVETTORE ASSOCIATO

3) $V_\lambda \neq \{\underline{0}\}$

4) $\mathrm{KER}(T - \lambda \, id_V) \neq \{\underline{0}\}$

5) PER $A = M_{\beta,\beta}(T)$ E $I_n = M_{\beta,\beta}(id_V)$ VALE $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\underline{0}\}$

6) $\mathrm{DET}(A - \lambda I_n) = 0$

QUINDI:

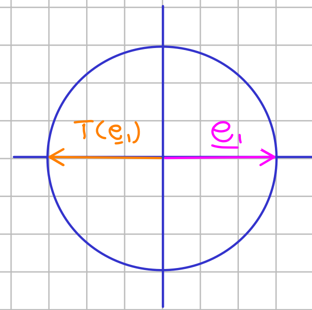
$\lambda \in \mathbb{K}$ È AUTOVALORE DI $T \Leftrightarrow \mathrm{DET}(A - \lambda I_n) = 0$

DOVE: $A = M_{\beta\beta}(T)$ $I_n = M_{\beta\beta}(id_V)$ CON β UNA QUALSIASI BASE

ESEMPIO:

SIA $V = \mathbb{R}^3$ $\quad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ LA ROTAZIONE DI ANGOLO π ATTORNO ALL'ASSE z.

$$T(\underline{v}) = \begin{bmatrix} v_1 \cos(\pi) - v_2 \operatorname{sen}(\pi) \\ v_1 \sin(\pi) + v_2 \cos(\pi) \\ v_3 \end{bmatrix}$$



$$T(\underline{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\underline{e}_1 \qquad T(\underline{e}_2) = -\underline{e}_2 \qquad T(\underline{e}_3) = \underline{e}_3$$

QUINDI T È RAPPRESENTATA DALLA MATRICE:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ $\mapsto$ ESISTE UNA BASE COSTITUITA DA AUTOVETTORI DI T QUINDI $\{-1, 1\}$ SONO DUE AUTOVALORI

$$V_1 = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\underline{v}) = \underline{v} \} = \operatorname{SPAN}(\underline{e}_3) \qquad V_{-1} = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\underline{v}) = -\underline{v} \} = \operatorname{SPAN}(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$$

ESEMPIO:

$V = \mathbb{R}^3 \qquad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ LA ROTAZIONE DI $\pi/2$ RISPETTO ALL'ASSE z.

$$T(\underline{v}) = \begin{bmatrix} v_1 \cos(\pi/2) - v_2 \operatorname{sen}(\pi/2) \\ v_1 \operatorname{sen}(\pi/2) + v_2 \cos(\pi/2) \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$T(\underline{e}_1) = \underline{e}_2 \qquad T(\underline{e}_2) = -\underline{e}_1 \qquad T(\underline{e}_3) = \underline{e}_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A + 1 I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = 2 \cdot (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) \neq 0$$

$\lambda = -1$ NON È UN AUTOVALORE

RIGA NULLA

$$\det(A - 1 I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$\lambda = 1$ È UN AUTOVALORE

POLINOMIO CARATTERISTICO

TEO:

SIA $T: V \to V$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE V SUL CAMPO $\mathbb{K}$.
FISSIAMO UNA BASE $\mathcal{B} = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$ DI V e SIA $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ LA MATRICE T RISPETTO A $\mathcal{B}$.
QUINDI SI ha:

(1) LA FUNZIONE $P_T : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

$$P_T(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

NON DIPENDE DALLA BASE SCELTA

(2) $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è UN AUTOVALORE DI T $\Leftrightarrow$ $P_T(\lambda_0) = 0$

DIM:

(1) CONSIDERIAMO $\mathcal{B} = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$ e $\mathcal{B}' = \{ \underline{w}_1; \dots; \underline{w}_n \}$ BASI DI V

$A = M_{nn}(\mathbb{K})$ MATRICE DI T RISPETTO A $\mathcal{B}$

$A' = M_{nn}(\mathbb{K})$ MATRICE DI T RISPETTO A $\mathcal{B}'$

$P_T(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \Rightarrow$ T ENDOMORFISMO QUINDI A' SIMILE AD $A \Rightarrow A$ SIMILE A A'

$\Rightarrow \det(B^{-1}A'B - \lambda I_n) = \det(B^{-1}A'B - \lambda B^{-1}B) = \det(B^{-1}(A' - \lambda I_n)B)$

$\overset{!}{=} \det(B^{-1}) \cdot \det(A' - \lambda I_n) \cdot \det(B) = \cancel{\det(B)^{-1}} \cdot \cancel{\det(B)} \cdot \det(A' - \lambda I_n)$

(2) ($\Rightarrow$): λ_0 AUTOVALORE DI $T \Rightarrow \exists\, \underline{v} \in V : T(\underline{v}) = \lambda_0 \underline{v}$

$T(\underline{v}) = \lambda_0 \underline{v} \iff T(\underline{v}) - \lambda_0 \underline{v} = 0 \iff A\underline{v} - \lambda_0 \underline{v} = \underline{v}(A - \lambda_0 I_n) = \underline{0}$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$

$\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I_n) \neq \{\underline{0}\} \iff \mathrm{DET}(A - \lambda_0 I_n) = 0 \Rightarrow P(\lambda_0) = 0$

($\Leftarrow$): $P(\lambda_0) = \underline{0} \Rightarrow \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I_n) \neq 0 \Rightarrow \exists\, \underline{v} \neq 0 \mid \underline{v}(A - \lambda_0 I_n) = \underline{0}$
$\Rightarrow A\underline{v} - \lambda_0 \underline{v} = \underline{0}$ MA $A\underline{v} = T(\underline{v}) \Rightarrow \lambda_0$ è AUTOVALORE

DEF:
SIA $T: V \to V$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE V SUL CAMPO $\mathbb{K}$.
IL POLINOMIO $P_T \in \mathbb{K}[\lambda_0]$ è CHIAMATO POLINOMIO CARATTERISTICO DELL'ENDOMORFISMO T

DEF:
SIA $T: V \to V$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE V. LA TRACCIA $\mathrm{tr}(T)$ DI T è LA TRACCIA DELLA MATRICE ASSOCIATA A T RISPETTO AD UNA QUALUNQUE BASE DI V.
LA TRACCIA DI UN ENDOMORFISMO È BEN DEFINITA ED A MENO DEL SEGNO VALE λ^{n-1} DEL POLINOMIO CARATTERISTICO DI T.

DEF:
SIA $T: V \to V$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE (n) SU $\mathbb{K}$.
DIREMO CHE T HA TUTTI GLI AUTOVALORI IN $\mathbb{K}$ SE IL POLINOMIO CARATTERISTICO P_T HA ESATTAMENTE n RADICI IN $\mathbb{K}$, CONTATE CON LA RELATIVA MOLTEPLICITÀ.
OSSIA ESISTONO $\lambda_1; \dots; \lambda_n \in \mathbb{K}$ NON NECESSARIAMENTE DISTINTI TALI CHE:

$$P_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

MOLTEPLICITÀ:

PROP:
SIA $T: V \to V$ UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE V SUL CAMPO $\mathbb{K}$ E SIANO $v_1, \dots, v_k \neq 0$ AUTOVETTORI DI T CORRISPONDENTI AGLI AUTOVALORI DISTINTI $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_k$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

DEF (MOLTEPLICITÀ):
SIA $\lambda_0 \in sp(T)$ UN AUTOVALORE DI UN ENDOMORFISMO $T: V \to V$. DIREMO MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI λ_0 LA SUA MOLTEPLICITÀ COME RADICE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO. MENTRE LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA SARÀ LA DIMENSIONE DEL RELATIVO AUTOSPAZIO V_{λ_0}

OSS:
PER CALCOLARE LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DELL'AUTOVALORE λ_0 DI UN ENDOMORFISMO T BISOGNA SCOPRIRE QUANTE VOLTE λ_0 È RADICE DI P_T.

MENTRE PER TROVARE LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA, BASTA TROVARE $rg(T - \lambda_0 Id_V)$
INFATTI, $V_{\lambda_0} = KER(T - \lambda_0 Id_V)$

$$DIM(V_{\lambda_0}) = DIM(V) - rg(T - \lambda_0 Id_V)$$

PROP: LA MOLT. ALGEBRICA È SEMPRE MAGGIORE DELLA GEOMETRICA

TEO:

Sia $T: V \to V$ un ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIM FINITA SU $\mathbb{K}$.
Supponiamo $Sp(T) = \{\lambda_1; \dots; \lambda_h\}$ e INDICHIAMO μ_j MOLT. ALG ν_j MOLT. GEO DI λ_j per $j = 1, \dots, h$.
Le seguenti SONO EQUIVALENTI:

(1) T è DIAGONALIZZABILE

(2) T ha TUTTI AUTOVALORI IN $\mathbb{K}$ e LA MOLT. GEOMETRICA DI CIASCUN AUTOVALORE COINCIDE CON QUELLA ALGEBRICA

(3) $\nu_1 + \dots + \nu_h = \dim(V)$