Esercizio 3. Abbiamo visto che $\mathbb{R}[x]$, l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, è uno spazio vettoriale.
Verificare che $\mathbb{R}_3[x] \subset \mathbb{R}[x]$, l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a tre, è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ ed è quindi lui stesso uno spazio vettoriale (Osservazione 4.3 nel libro).
Si consideri il sottoinsieme

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0\} \subset \mathbb{R}_3[x]$$

Stabilire se W è un sottospazio. Stesso esercizio per

$$U = \{q(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid q(2) = 4\}.$$

$\mathbb{R}_3[x] \subset \mathbb{R}[x]$

per essere sottospazio, (1) $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}_3[x], \forall \bar{v}_1 \in \mathbb{R}_3[x], (\bar{v} + \bar{v}_1) \in \mathbb{R}_3[x]$

(2) $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}_3[x], \forall \alpha \in \mathbb{R}, \bar{v}\alpha \in \mathbb{R}_3[x]$

(1) prendendo due polinomi qualsiasi

$\bar{v} = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\bar{v}_1 = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$

la loro somma è:

$\bar{v} + \bar{v}_1 = (ax^3 + bx^2 + cx + d) + (a'x^3 + b'x^2 + c'x + d')$

$\bar{v} + \bar{v}_1 = (a + a')x^3 + (b + b')x^2 + (c + c')x + d + d'$

che è un polinomio di 3° grado quindi $\bar{v} + \bar{v}_1 \in \mathbb{R}_3[x]$

(2) $\bar{v} \cdot \alpha = \alpha(ax^3 + bx^2 + cx + d)$

$= \alpha ax^3 + \alpha bx^2 + \alpha cx + \alpha d \in \mathbb{R}_3[x]$

2) $W = \{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = 0\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

(1) • sappiamo che $W \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

• prendiamo due elementi di questo insieme

$\bar{v} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad x = 1 \to \bar{v} = 0$

$\bar{v}_1 = ax^3 + bx^2 \; cx + d$ $\quad x = 1 \to \bar{v}_1 = 0$

la somma dei due generici elementi è

$\bar{v} + \bar{v}_1 = (ax^3 + bx^2 + cx + d) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)$

se $x = 1$, $\bar{v} + \bar{v}_1 = 0$ perché se $x = 1 \to \bar{v} = 0$, $\bar{v}_1 = 0$

(2)

$\alpha \bar{v} = \alpha(ax^3 + bx^2 + ex + d)$

se $x=1$, $\alpha v = 0$ perché $x=1 \to \bar{v} = 0$.

quindi $\forall \bar{v} \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha\bar{v} \in W$

DATO CHE $(1) \wedge (2) \to W \leq \mathbb{R}_3[x]$

3)

$U = \{ q(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid q(2) = 4 \} \in \mathbb{R}_3[x]$

$\bar{v} = ax^3 + bx^2 + ex + d$ $\qquad x=2 \to \bar{v}, \bar{v}_1 = 4$

$\bar{v}_1 = a'x^3 + b'x^2 + ex + d$

$\bar{v} + \bar{v}_1 = (ax^3 + bx^2 + ex + d) + (a'x^3 + b'x^2 + e'x + d')$

$x = 2 \to \bar{v} + \bar{v}_1 = 8$

U non è sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$ perché (1) non è soddisfatta.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e sia $p(x) = 1 + x + x^2 + 5x^4$. Consideriamo $q(x) = x^2 + 5x^4$. Stabilire se $q(x) \in \mathrm{Span}(p)$.

Span (p) = insieme delle combinazioni lineari del solo vettore $p(x) = 1 + x + x^2 + 5x^4$.

gli elementi dello span (p) saranno del tipo $\lambda(p(x))$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

e questi elementi sono tutti diversi da $q(x)$ dato che non esiste nessun $\lambda \in \mathbb{R}$ che annulli i primi due termini di $p(x)$ e lasci invariati gli ultimi due.

Esercizio 5. Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j. Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i, j.

5.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.

5.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.

5.1) • $S_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$

• [Verifichiamo (1)] cioè che, la somma di due qualsiasi vettori appartenenti a $S_{nn}(\mathbb{R})$, appartiene a $S_{nn}(\mathbb{R})$

$\forall \bar{v}, \bar{v}_1 \in S_{nn}(\mathbb{R})$, $\bar{v}+\bar{v}_1 \in S_{nn}(\mathbb{R})$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_{1_1}=a, \; v_{1_2}=b, \; v_{1_3}=e, \dots, v_{1_n}=z \\ v_{2_1}=b \\ v_{3_1}=e \\ \dots \\ v_{n_1}=z \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1\,1_1}=a_1, \; v_{1\,1_2}=b_1, \; v_{1\,1_3}=e_1, \dots, v_{1\,1_n}=z_1 \\ v_{1\,2_1}=b_1 \\ v_{1\,3_1}=e_1 \\ \dots \\ v_{1\,n_1}=z_1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}+\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11\,1_1}=a_1+a, \; v_{11\,1_2}=b_1+b, \; v_{11\,1_3}=e_1+e, \dots, v_{11\,1_n}=z_1+z \\ v_{11\,2_1}=b_1+b \\ v_{11\,3_1}=e_1+e \\ \dots \\ v_{11\,n_1}=z_1+z \end{pmatrix}$$

un casuale elemento $v_{11\,ij}$ della matrice $\bar{v}+\bar{v}_1$ è: $v_{1\,ij}+v_{ij}$.

$v_{11\,ji}$ sarà: $v_{1\,ji}+v_{ji}$

Dato che $\bar{v}$ è una matrice simmetrica quindi: $v_{ij}=v_{ji} \;\; \forall\, 1\le i,j\le n$

lo stesso vale per $\bar{v}_1$ quindi: $v_{1\,ij}=v_{1\,ji} \;\; \forall\, 1\le i,j\le n$

quindi: $v_{1\,ij}+v_{ij}=v_{1\,ji}+v_{ji}$.

• [Verifichiamo (2)] $\forall \bar{v}\in S_{nn}(\mathbb{R})$, $\bar{v}\cdot\lambda \in (\mathbb{R})$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} v_{1_1}=a, \; v_{1_2}=b, \; v_{1_3}=e, \dots, v_{1_n}=z \\ v_{2_1}=b \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \bar{V} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} V_{3_1} = e \\ \dots \\ V_{n_1} = Z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda V_{1_1} = \lambda a, \lambda V_{1_2} = \lambda b, \lambda V_{1_3} = \lambda e, \dots, \lambda V_{1_n} = \lambda Z \\ \lambda V_{2_1} = \lambda b \\ \lambda V_{3_1} = \lambda e \\ \dots \\ \lambda V_{n_1} = \lambda Z \end{pmatrix}$$

prendiamo un qualsiasi $v_{ij} = \lambda(v_{ij})$
verifichiamo sia uguale a $v_{ji} = \lambda(v_{ji})$.
Dato che $v_{ij} = v_{ji}$ perché $\bar{v}$ e' una matrice simmetrica
$\lambda v_{ij} = \lambda v_{ji}$

DATO CHE (1) e (2) VERIFICATE $\to S_{nn}(\mathbb{R})$ SOTTOSPAZIO $M_{nn}(\mathbb{R})$

5.2) • $A_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$

• [Verifichiamo (1)] $\quad \forall \bar{v}_1, \bar{v} \in A_{nn}(\mathbb{R}),\ \bar{v}_1 + \bar{v} \in A_{nn}\mathbb{R}$

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} V_{1_1} = a, V_{1_2} = b, V_{1_3} = e, \dots, V_{1_n} = Z \\ V_{2_1} = -b \\ V_{3_1} = -e \\ \dots \\ V_{n_1} = -Z \end{pmatrix}$$

$$\bar{V}_1 = \begin{pmatrix} V_{1 1_1} = a_1, V_{1 1_2} = b_1, V_{1 1_3} = e_1, \dots, V_{1 1_n} = Z_1 \\ V_{1 2_1} = -b_1 \\ V_{1 3_1} = -e_1 \\ \dots \\ V_{1 n_1} = -Z_1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{V}+\bar{V}_1 = \begin{pmatrix} V''_{11}=a_1+a, \; V''_{12}=b_1+b, \; V''_{13}=e_1+e, \dots, V''_{1m}=Z_1+Z \\ V''_{21}=-b_1-b=-(b_1+b) \\ V''_{31}=-e_1-e=-(e_1+e) \\ \dots \\ V''_{m1}=-Z_1-Z=-(Z_1+Z \end{pmatrix}$$

Un generico V''_{ij} sarà $V'_{ij}+V_{ij}$

V''_{ji} sarà $V'_{ji}+V_{ji}$

sappiamo che: $V'_{ij}=-V'_{ji}$ e che: $V_{ij}=-V_{ji}$

quindi: $V'_{ij}+V_{ij}=-(V'_{ji}+V_{ji})$

• [Verifichiamo (2)]

$$\lambda\cdot\bar{V} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} V_{11}=a, \; V_{12}=b, \; V_{13}=e, \dots, V_{1m}=Z \\ V_{21}=-b \\ V_{31}=-e \\ \dots \\ V_{m1}=-Z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda V_{11}=\lambda a, \; \lambda V_{12}= \quad, \; \lambda V_{13}=\lambda e, \dots, \lambda V_{1m}=\lambda Z \\ \lambda V_{21}=-\lambda b \\ \lambda V_{31}=-\lambda e \\ \dots \\ \lambda V_{m1}=-\lambda Z \end{pmatrix}$$

Dato che $\bar{V}$ è una matrice antisimmetrica

$v_{ij}=-v_{ji} \rightarrow \lambda v_{ij}=-\lambda v_{ji}$

Dato che (1) e (2) sono verificate $S_{nn}(\mathbb{R}) \leq M_{nn}(\mathbb{R})$

Esercizio 4.1: Sia V uno spazio vettoriale. Dimostra che $0_V = O$ per ogni $v \in V$ utilizzando solamente le altre proprietà della definizione di uno spazio vettoriale.

> Suggerimento: parti da $0 + 0 = 0$

Esercizio 4.2: Sia V uno spazio vettoriale. Dimostra che $(-1)v + v = O$ e che $(-1)v = -v$ per ogni $v \in V$. Come conseguenza, dimostra che se $v, v_1, v_2 \in V$ sono tali che $v_1 + v = O = v_2 + v$, allora $v_1 = v_2$; in altre parole l'opposto di un vettore è univocamente determinato.

Esercizio 4.3: Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, e prendiamo $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Dimostra che $\lambda v = O$ se e solo se $\lambda = 0$ oppure $v = O$

4.2) $(-1)v = -v$ prodotto scalare di $\lambda = -1 \in \mathbb{R} \cdot v \in V$