

Algebra Lineare.

Dato un sistema di equazioni lineari con n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots = b_2 \\ \dots = b_3 \end{cases}$$

questo può essere rappresentato mediante una matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

il sistema può essere scritto come

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO: Il sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$$

si scrive

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

METODO DI GAUSS

metodo per trovare soluzioni in un sistema di equazioni lineari.

• Sistemi equivalenti: Siano $A\bar{x} = b$ e $A'\bar{x} = b'$ due sistemi di equazioni lineari.

$$\Sigma = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{x} = \bar{b} \}$$

SOLUZIONI DEL 1° SISTEMA

$\Sigma' = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid A' \bar{x} = \bar{b}' \}$ SOLUZIONI DEL 2° SISTEMA
 se $\Sigma = \Sigma' \rightarrow A \bar{x} = \bar{b} = A' \bar{x} = \bar{b}'$

• LEMMA FONDAMENTALE

Sia $A \bar{x} = \bar{b}$ un sistema $m \times n$, e siano

$$(*) : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \beta, \quad (**): a'_1 x_1 + \dots + a'_n x_n = \beta'$$

due equazioni del sistema

$$(***) : h(*) + k(**) = h\beta + k\beta'$$

dove $k, h \neq 0$.

$\tilde{A} \bar{x} = \tilde{b}$ un nuovo sistema identico al primo, con le sole differenze che, al posto di $(**)$ ho $(***)$
 allora $\tilde{A} \bar{x} = \tilde{b}$, $A \bar{x} = \bar{b}$ sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE:

Abbiamo $*$ e $**$, due equazioni del sistema, che ha soluzioni Σ , ma $\bar{y} \in \Sigma$ (\bar{y} soluzione del sistema)

\bar{y} soddisfa $*$ e $**$ quindi

$$a_1 y_1 + \dots + a_n y_n - \beta = 0 \quad \text{e} \quad a'_1 y_1 + \dots + a'_n y_n - \beta' = 0$$

ne segue che, considerando due coefficienti $h, k =$

$$h(a_1 y_1 + \dots + a_n y_n - \beta) + k(a'_1 y_1 + \dots + a'_n y_n - \beta') = 0$$

quindi \bar{y} soddisfa anche:

$$(***) = h(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) + k(a'_1 x_1 + \dots + a'_n x_n) = h\beta + k\beta'$$

quindi prendendo un nuovo sistema

$\tilde{A} \bar{x} = \tilde{b}$ dove identico al primo ma al posto di $**$ avere $***$, $\tilde{\Sigma}$ sono le soluzioni del

nuovo sistema.

dato che qualsiasi soluzione del primo sistema soddisfa anche il secondo, possiamo dire $\tilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$.

ci consideriamo allora \tilde{x} una qualsiasi soluzione di $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, $\tilde{x} \in \tilde{\Sigma}$, vale che \tilde{x} soddisfa $*$, dato che $*$ è presente anche in $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, questo significa che:

$$(!) a_1 z_1 + \dots + a_n z_n - \beta = 0$$

prendiamo ora $(***)$ in $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ e sostituiamo l'incognita con \tilde{x} :

$$h(a_1 z_1 + \dots + a_n z_n - \beta) + k(a'_1 z_1 + \dots + a'_n z_n) = 0$$

per $(!)$ il primo termine è uguale a 0
questo significa che \tilde{x} soddisfa $**$

$$\text{quindi } \tilde{\Sigma} \subseteq \Sigma \rightarrow \Sigma = \tilde{\Sigma}. \quad \blacksquare$$

MATRICE TRIANGOLARE

una matrice quadrata $n \times n$ si dice triangolare superiore se $i > j \rightarrow a_{ij} = 0$

Esempio :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

quadrata inferiore se $i < j \rightarrow a_{ij} = 0$

Esempio :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

TEOREMA DI GAUSS

consiste nell'applicare più volte in maniera iterativa il lemma fondamentale

METODO RISOLUTIVO:

* Su un sistema che ha matrice $n \times n$ dovremo eseguire $(n-1)$ passaggi. Dove ogni passaggio ha lo scopo di trasformare le i -esime colonne, facendo sì che tale colonna, abbia i elementi diversi da 0, ed i restanti $n-i$ elementi = 0.

Se la matrice è

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- il Passo 1 ha come obiettivo di avere come prima colonna : $\begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- il Passo 2 ha come obiettivo di avere come seconda colonna : $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{bmatrix}$

Operare: Sia i l' i -esimo passo, dobbiamo operare sull' i -esima colonna e trasformare $n-i$ elementi in modo che siano uguali a 0. Si seleziona un elemento della colonna i $p_i \neq 0$ detto pivot (P_i) in questa colonna c'è

questo elemento che è il pivot e ci sono i elementi che dovranno preservare il loro valore, $n-i$ elementi che dovranno diventare 0 (Pi fa parte degli i elementi).

gli $(n-i)$ elementi sono del tipo a_{li} con $l = \{(i+1), (i+2), (i+3), \dots, n\}$

per ognuno di questi elementi, si considera un nuovo valore $b_{li} = \frac{a_{li}}{P_i}$, tale elemento si moltiplica per tutti gli elementi P_i della riga che contiene il pivot (P_i) ottenendo così una nuova riga, e si somma alla l -esima riga ... ITERATIVAMENTE.

Teorema sistemi triangolari

$T \bar{x} = \bar{c}$ è un sistema triangolare $n \times n$ che ha un'unica soluzione se la diagonale principale non ha valori nulli ($t_{ii} \neq 0$ con $i = (1, 2, 3, 4, \dots, n)$) altrimenti o non ammette soluzioni o ne ha infinite.

Come capire se un sistema ammette o non ammette soluzioni.

INTRODUCIAMO UNA NUOVA STRUTTURA ALGEBRICA PER CAPIRLO.

SPAZIO VETTORIALE SU \mathbb{R}

Lo spazio vettoriale è una struttura tipo $(V, +, \bar{0}, \cdot)$ definita su un campo

$\bar{0}$ = elemento neutro

tale struttura rispetta i seguenti assiomi:

1. $(V, +)$ è un gruppo commutativo dove $+$ è un'operazione binaria.

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

2. Esiste un'operazione esterna :

$$\cdot : R \times V \rightarrow V \mid (\alpha, \bar{v}) \rightarrow \alpha \bar{v}$$

$\forall \bar{v}, \bar{w} \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in R$, valgono le seguenti regole.

$$(i) \cdot \lambda \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \lambda \bar{v} + \lambda \bar{w} \quad (\text{PRODUTTO SCALARE})$$

$$(ii) \cdot 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$$

$$(iii) \cdot (\lambda + \mu) \cdot \bar{v} = \lambda \bar{v} + \mu \bar{v}$$

$$(iiii) \cdot (\lambda \mu) \cdot \bar{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \bar{v}) \quad (\text{ASSOCIATIVITA'})$$

Le matrici $M_{i,j}(R)$ sono uno spazio vettoriale con le operazioni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{vmatrix},$$

$$\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{vmatrix}.$$

elemento neutro:

$$_m \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{vmatrix}$$

ELEMENTO NEUTRO:

l'elemento neutro di uno spazio vettoriale è il vettore nullo cioè il vettore con tutti 0 e questo è scritto come 0.

PROPRIETA'

$$0 \cdot v = 0 \quad \forall v \in V \quad \text{con } V \text{ (spazio vettoriale)}$$

questo perché ogni componente del vettore viene moltiplicato per 0 diventando quindi il vettore nullo.

SPAZIO VETTORIALE SU K .

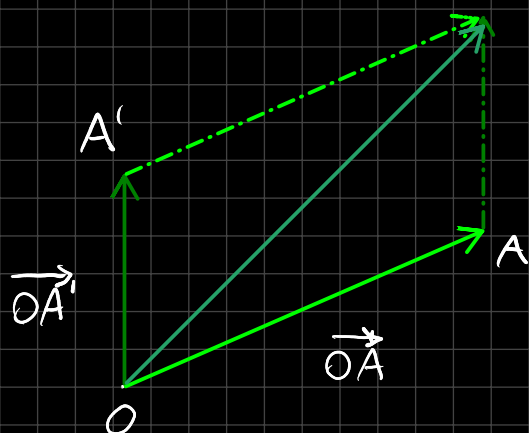
Sostituisci K a R nella sezione qui sopra.

... SPAZIO ...

Piano Euclideo.

È un classico esempio di spazio vettoriale,
Fissiamo un punto O .

consideriamo $V = \{ \text{segmenti orientati con primo vertice in } O \}$ (INSIEME DEI VETTORI APPLICATI IN O)

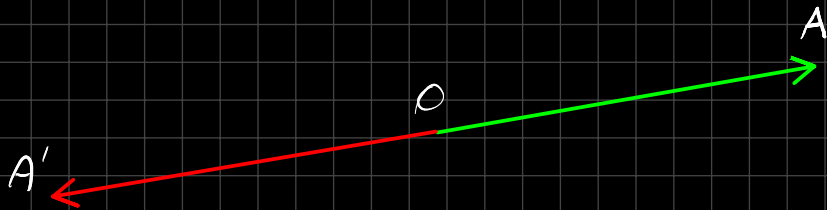


C'è un elemento particolare $\vec{00}$ che è il vettore nullo.

Il modo migliore per definire la somma tra due vettori è: Preso \vec{OA} , prendo poi un segmento con stesso modulo direzione e verso di \vec{OA} ma con origine A, la retta \vec{OC} è la somma dei segmenti $\vec{OA} + \vec{OA} = \vec{OC}$

questo metodo funziona anche se i due vettori hanno la stessa direzione.

* L'insieme V dotato di operazione $+$: $V \times V = V$ e l'elemento neutro $\vec{00}$ è un gruppo commutativo. ogni elemento di V ha un inverso, ogni vettore ha il suo inverso che è un vettore con pari modulo, stessa direzione e verso opposto.



* introduciamo ora una nuova operazione.

$\therefore \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ detto prodotto scalare $| (\lambda, \vec{OA}) \mapsto \lambda \vec{OA}$

vediamo 2 casi

se $\lambda \geq 0$ direzione e verso rimangono invariati mentre il modulo diventa $\lambda \cdot (\text{modulo } \vec{OA})$

se $\lambda < 0$ direzione rimane la stessa, modulo diventa $\lambda \cdot (\text{modulo } \vec{OA})$, verso diventa opposto

PROP:

con operazione di somma e prodotto scalare

V è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} denotato V_0^2

Sottospazi Vettoriali:

Sia V uno spazio vettoriale e W un sottoinsieme di V . W è sottospazio di V , $W \leq V$ se:

1) $\forall \vec{w}, \vec{w}' \in W, \vec{w} + \vec{w}' \in W$

2) $\forall \vec{w} \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \vec{w} \in W$ (" \mathbb{R} ma anche \mathbb{K} ")

oss: $\forall \vec{w} \in W, -\vec{w} \in W, (W, +)$ sottogruppo $(V, +)$

Cioè: se W sotto spazio di $V \rightarrow W$ sottogruppo di V .

PROP: dato un sistema lineare omogeneo $\textcircled{*}$ delle forme $A\vec{x} = \vec{0}$, ne $\Sigma_0 = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{y} = \vec{0} \}$, ossia l'insieme di tutte le soluzioni del sistema.

$\rightarrow \Sigma_0$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n

Dim:

mostriamo ① e ② in ordine.

(1): Siano \vec{y} e \vec{y}' due soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + \dots + a_{mn}y_n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}y'_1 + \dots + a_{1n}y'_n = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

RISULTA OVVIO CHE:

$$\begin{cases} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n) + (a_{11}y'_1 + \dots + a_{1n}y'_n) = 0 \\ \vdots \\ (a_{m1}y_1 + \dots + \dots + a_{mn}y_n) + (a_{m1}y'_1 + \dots + a_{mn}y'_n) = 0 \end{cases}$$

APPLICHIAMO LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA:

$$\begin{cases} a_{11}(y_1 + y'_1) + a_{12}(y_2 + y'_2) + \dots + a_{1n}(y_n + y'_n) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

$\textcircled{*}$ Con matrice associata a coefficienti reali rappresentabile con un sistema delle forme:

ne concludiamo che $\bar{y} + \bar{y}' \in \Sigma_0$ (1) \square

(2) sia $\lambda \in \mathbb{R}$

Sappiamo che:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + \dots + \dots + a_{mn}y_n = 0 \end{cases}$$

moltiplichiamo a destra e sinistra per λ

$$\begin{cases} \lambda(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n) = 0 \cdot \lambda \\ \dots \\ \lambda(a_{m1}y_1 + \dots + \dots + a_{mn}y_n) = 0 \cdot \lambda \end{cases}$$

\downarrow

$$\begin{cases} \lambda(a_{11}y_1) + \lambda(a_{12}y_2) + \dots + \lambda(a_{1n}y_n) = 0 \\ \dots \\ \lambda(a_{m1}y_1) + \dots + \dots + \lambda(a_{mn}y_n) = 0 \end{cases}$$

APPLICANDO LA PROPRIETA' ASSOCIATIVA:

$$\begin{cases} a_{11}(\lambda y_1) + \dots + a_{1n}(\lambda y_n) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

se \bar{y} è soluzione, anche $\lambda \bar{y}$ è soluzione.

(2) \square

Se il sistema non è omogeneo questo non è res. \square
($A\bar{x} = \bar{b}$), $\bar{b} \neq \bar{0}$

Combinazioni lineari

Sia V uno spazio vettoriale, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_k$ un insieme di vettori. Una combinazione lineare è il vettore $\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k$ con $\alpha_1, \alpha_k \in \mathbb{R}$

Span dato un insieme V di vettori.

Lo span è l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari.

• Allora Span è un sottospazio.

OSS:

Lo span di un certo insieme W è uguale
allo span di $W \cup \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{v}, \dots\}$ se $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{v}\} \subseteq \text{Span}(W)$.

PROP:

Un sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ ammette soluzione \iff
 $\bar{b} \in \text{Span}(A^1, A^2, \dots, A^n)$, dove A^j è la j -esima
colonna di A .