ESERCIZIO 1)

1.0.) $\mathrm{Im}\,\phi \leq G'$

$$\mathrm{Im}\,\phi \leq G' \iff \begin{cases} a)\ 1_{G'} \in \mathrm{Im}\,\phi \\ b)\ \forall g,h \in \mathrm{Im}\,\phi\ ,\ gh \in \mathrm{Im}\,\phi \\ c)\ \forall g \in \mathrm{Im}\,\phi\ ,\ g^{-1} \in \mathrm{Im}\,\phi \end{cases}$$

VERIFICO:

a) $\phi(1_G) = 1_{G'} \Rightarrow 1_{G'} \in \mathrm{Im}\,\phi$

b) $g, h \in \mathrm{Im}\,\phi$, $g = \phi(x)$, $h = \phi(y)$ CON $x, y \in G$.
$g \cdot_{G'} h = \phi(x) \cdot_{G'} \phi(y) = \phi(xy)$ CHE È UN ELEMENTO DI $\mathrm{Im}\,\phi$ $(xy \in G)$

c) $g \in \mathrm{Im}\,\phi$, $g = \phi(x)$ CON $x \in G$.
$g^{-1} = \phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1})$

PERCHÉ: $1_G = a \cdot a^{-1}$

$1_{G'} = \phi(a \cdot a^{-1})$

$1_{G'} = \phi(a) \cdot \phi(a^{-1})$

SO CHE: $1_{G'} = \phi(a) \cdot (\phi(a))^{-1}$

PER UNICITÀ INVERSO $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$

1.1.)

SE G È COMMUTATIVO $\Rightarrow \forall g, h \in G,\ g \cdot_G h = h \cdot_G g$.
$x, y \in \mathrm{Im}\,\phi$, $x = \phi(g)$, $y = \phi(h)$ CON $g, h \in G$

G COMMUTATIVO

$x \cdot_{G'} y = \phi(g) \cdot_{G'} \phi(h) = \phi(g \cdot_G h) = \phi(h \cdot_G g)$

$y \cdot_{G'} x = \phi(h) \cdot_{G'} \phi(g) = \phi(h \cdot_G g) = \phi(g \cdot_G h)$

$=$

$\Rightarrow (x \cdot_{G'} y) = (y \cdot_{G'} x)$

1.2) $H \leq G \Rightarrow H \subseteq G \Rightarrow \forall h \in H, h \in G.$

$\phi H \subseteq G'$ DATO CHE TUTTI GLI ELEMENTI DI H SONO ELEMENTI DI G E CHE ϕ MAPPA QUESTI ELEMENTI IN G'.

a) $H \leq G \Rightarrow 1_G \in G \wedge 1_G \in H$, $\phi(1_G) = 1_{G'}$ $\quad 1_G \in \phi H$

b) $h, K \in \phi H$, $h = \phi(x)$, $K = \phi(y)$ CON $x, y \in H$

$h \cdot_{G'} K = \phi(x) \cdot_{G'} \phi(y) = \phi(x \cdot_G y)$ DOVE $(x \cdot_G y)$ E' UN ELEMENTO DI H

$\Rightarrow \phi(x \cdot_G y) \in \phi H \Rightarrow h \cdot_{G'} K \in \phi H.$

c) $h \in \phi H$, $h = \phi(y)$ CON $y \in H \Rightarrow h = \phi(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow h^{-1} = \phi(y)^{-1} = \phi(y^{-1})$ DOVE $y^{-1} \in H \Rightarrow \phi(y^{-1}) \in \phi H \Rightarrow$

$\Rightarrow h^{-1} \in \phi H.$

1.3) $\text{Ker}\,\phi = \{ g \mid \phi g = 1_{G'} \}$

$\text{Ker}\,\phi \subseteq G$

a) $1_{G'} = \phi(1_G) \Rightarrow 1_G \in \text{Ker}\,\phi$

b) $x, y \in \text{Ker}\,\phi.$

DIMOSTRO CHE: $\phi(x \cdot_G y) = 1_{G'}$

$\phi(x \cdot_G y) = \phi(x) \cdot_{G'} \phi(y) = 1_{G'} \cdot_{G'} 1_{G'} = 1_{G'}.$

c) $x \in \text{Ker}\,\phi$

DIMOSTRO CHE: $\phi(x^{-1}) = 1_{G'}$

$1_{G'} = \phi(x) \Rightarrow (1_{G'})^{-1} = \phi(x)^{-1} \Rightarrow 1_{G'} = \phi(x^{-1})$

DOVE $1_{G'} = (1_{G'})^{-1}$ PER UNICITA' INVERSO.