Foglio 1

11/10/2023

**Esercizio 1.** Sia $(G, \bullet)$ un gruppo.
**1.1.** Verificate l'unicità dell'elemento neutro $e$ (esercizio già fatto in classe, rifatelo senza guardare gli appunti !).
**1.2** Verificate l'unicità dell'inverso di un elemento $g \in G$. Questo unico elemento si denota $g^{-1}$.
**1.3** Verificate che $(g \bullet h)^{-1} = h^{-1} \bullet g^{-1}$.

1.1) Supponiamo che esiste un altro elemento neutro $\tilde{e}$, allora sarà vero che: $s \cdot \tilde{e} = s = \tilde{e} \cdot s$ perché $\tilde{e}$ è l'elemento neutro del gruppo $(G, \cdot)$.
Sappiamo che: $s \cdot e = s = e \cdot s$.
Possiamo dire che: $e \cdot \tilde{e} = e = \tilde{e} \cdot e$
e possiamo anche affermare che: $\tilde{e} \cdot e = \tilde{e} = e \cdot \tilde{e}$
quindi, dato che: $\tilde{e} \cdot e = e = \tilde{e} \cdot e = \tilde{e}$
$\tilde{e}$ ed $e$ sono lo stesso elemento pertanto, l'elemento neutro in un gruppo è uno e uno solo.

1.2) Possiamo dire che per assurdo esiste un ulteriore elemento inverso di $g$, chiamato $\tilde{g}' \mid g \cdot \tilde{g}' = e = \tilde{g}' \cdot g$
Sappiamo che $g \cdot g' = e = g' \cdot g$
Posso scrivere:

$$g' \cdot \underbrace{(g \cdot g')}_{e} = g' \cdot \underbrace{(g \cdot \tilde{g}')}_{e} \Rightarrow \text{per la proprietà associativa}$$

$$g' = (g' \cdot g) \cdot \tilde{g}' \Rightarrow g' = \tilde{g}'$$

1.3) $(g \cdot h)'$ è l'inverso di $(g \cdot h)$
Posso affermare che: $(g \cdot h) \cdot (g \cdot h)' = e$
$(g \cdot h) \cdot (h' \cdot g') = g \cdot (h \cdot h') \cdot g'$ per la proprietà associativa

quindi $(g \circ h)'$ è l'inverso di $(g \circ h)$.
$h' \circ g'$ è l'inverso di $(g \circ h)$ dato che l'inverso di un elemento $g \in G$ è unico $\Rightarrow (g \circ h)' = h' \circ g'$

**Esercizio 2.** Sia $f : A \to B$ una bigezione, o applicazione biunivoca, e sia $f^{-1} : B \to A$ l'inversa di $f$.^1 Verificare che

$$1)\ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B\,, \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$$

2.1) $f \circ f^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) =$ PER ^1 $f(a) = b$

2.2) $f^{-1} \circ f(a) = f^{-1}(f(a)) =$ PER ^1 $f^{-1}(b) = a$

^1 Vi ricordo che $f^{-1} : B \to A$ è definita come segue: preso $b \in B$ sappiamo che esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$ (perché $f$ è suriettiva); inoltre $a$ è unico dato che $f$ è iniettiva; riassumendo esiste unico $a$ tale che $f(a) = b$ e si pone $f^{-1}(b) = a$.

**Esercizio 3.** Sia $A$ un insieme e $G = \{f : A \to A \mid f \text{ bigezione}\}$. Sia $\circ$ la composizione fra applicazioni. Verificare in dettaglio che $(G, \circ)$ è un gruppo (visto rapidamente a lezione).

Se è un gruppo vale la proprietà associativa rispetto a $\circ$, c'è un elemento neutro e ogni elemento $f$ avrà un inverso $f'$

1) $\circ$ gode della proprietà associativa
2) elemento neutro $= ID_X$
3) ogni $f$ ha il suo inverso $f^{-1}$ dato che $f$ è biettiva

DIMOSTRO:

1) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

$f(g(h(a))) = f \circ g(h(a))$

$f(g(h(a))) = f(g(h(a)))$

2) $ID_X$ è la funzione che mappa ogni elemento in sé stesso quindi $f \circ ID_X = f$

3) Dato che si parla di funzioni biunivoche
$\exists!\ a \mid f(a) = b$, chiamiamo inversa $f^{-1}(b) = a$
$f \circ f^{-1} = ID_X = f^{-1} \circ f$

DIMOSTRO:

$f \circ f^{-1}(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$ • $ID_X(b) = f \circ f^{-1}(b)$

$f^{-1} \circ f\ (a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$ • $ID_X(a) = f^{-1} \circ f(a)$

**Esercizio 4.** Sia ora $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Il gruppo $G$ definito nell'esercizio precedente possiede allora una notazione specifica, che è $\mathcal{S}_n$, ed un nome specifico che è il *gruppo simmetrico di $n$ oggetti.*
Scrivere tutti gli elementi del gruppo $\mathcal{S}_3$ (sono 6). Verificare che $S_3$ non è un gruppo commutativo.
*Suggerimento:* per scrivere, ad esempio, l'elemento di $\mathcal{S}_3$ che manda 1 in 3, 2 in 2 e 3 in 1 potete scrivere

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 5 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 6 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

VERIFICO CHE: $g \circ f \neq f \circ g$

$g = 4$, $f = 5$

$f \circ g = \{(2,2), (3,3), (1,1) \neq g \circ f = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$

**Esercizio 5.** Abbiamo visto la definizione rigorosa di $\mathbb{Q}$. Verificare che le operazioni definite in classe sono ben poste e che rendono $\mathbb{Q}$ un campo.