

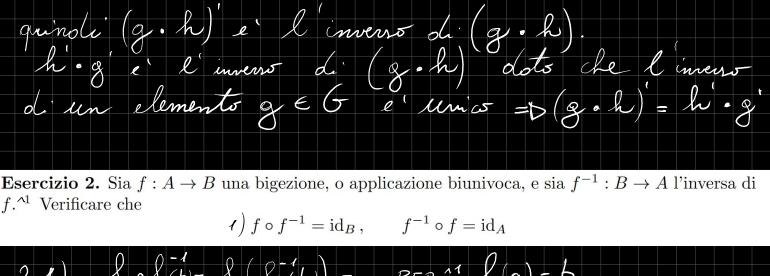
Esercizio 1. Sia (G, \bullet) un gruppo.

ossociotina

- 1.1. Verificate l'unicità dell'elemento neutro e (esercizio già fatto in classe, rifatelo senza guardare gli appunti!).
- 1.2 Verificate l'unicità dell'inverso di un elemento $g \in G$. Questo unico elemento si denota g^{-1} .
- **1.3** Verificate che $(g \bullet h)^{-1} = h^{-1} \bullet g^{-1}$.

1.1) Supponiams che ente un olter elemento neutro

\(\tilde{z}\), ollore rossi vero che:
$$5 \cdot \tilde{z} = \tilde{z} = \tilde{s} = \tilde{$$



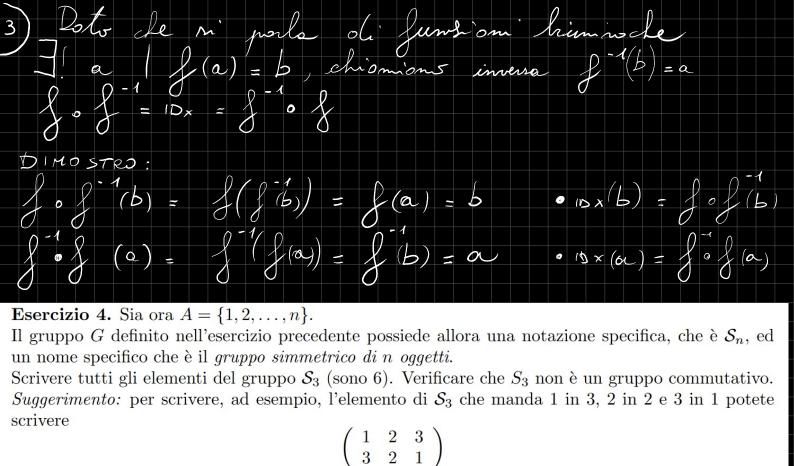
2.1)
$$\begin{cases} 3 \cdot 3(b) = 3(3(b)) = PER^{1} \\ 3(a) = b \end{cases}$$

2.2) $\begin{cases} 3 \cdot 3(a) = 3(3(a)) = PER^{1} \\ 3(b) = a \end{cases}$

Vi ricordo che $f^{-1}: B \to A$ è definita come segue: preso $b \in B$ sappiamo che esiste $a \in A$ tale che f(a) = b (perché f è suriettiva); inoltre a è unico dato che f è iniettiva; riassumendo esiste unico a tale che f(a) = b e si pone $f^{-1}(b) = a$.

Esercizio 3. Sia A un insieme e $G = \{f : A \to A \mid f \text{ bigezione}\}$. Sia \circ la composizione fra applicazioni. Verificare in dettaglio che (G, \circ) è un gruppo (visto rapidamente a lezione).

Se e'un gruppo vole la proprieta ossociotive rigretto a o, e'e'un elemento neutro e ogni elemento y avra un inverso f 1) o gode delle propriété ossociotive 2) elements neutro = 10x 3) sogni f he il mo imeno f 1 doto che f è liettira DIMOSTRO: 1) fogoh) = (fog)oh { (g (h(a))) = fog (ha)) {(g(h(a))) = }(g(h(a))) 2) 10x é le four one le moppe ogni elemento in re-terro quindi foiox = f



Esercizio 5. Abbiamo visto la definizione rigorosa di \mathbb{Q} . Verificare che le operazioni definite in classe sono ben poste e che rendono \mathbb{Q} un campo.

Mn operatione ben poste large bene onche a mens delle scelte dei ropperentanti clelle clossi

DIHOSTRO: (SOMMA)

prendis un volore (x,y) roppresentante di une closse.

(x',y') P(x,y), prendis poi un obtris robore (a,b)

ropperentante di un obtra closse. (a',b') P(a,b)

porro dire: (x',y') = (x,y) per le (x',y') P(x,y) e

cle (a,b) = (a',b') per lo sterro motiro

la romma tre (x,y) e (a,b) dece uniltoto (xb+ay, by)

[SERCIZIO 5) (oltre solurione) (SOMMA) Sappionus de: (a,b)P(a',b') e (e,d)P(e',d') done (a,b) e (e,d) rous i representant delle eloni [a,b)] e [(e,d)] le romme tre (ab) e (ed) = (ad + be), bd) le romme tre (ab) e (e,d) = (ad + be), bd) bd + be / bol = (a'd'+b'e') bd ad b'ol' + be b'd' = a'ol'bd + b'e'bol d(ab)d'+b(ed'b' = a'.d'b.d+b'.e'.b.d+ doto le 2 e'un guys comitali no objeta o((a'b)o(+be'o()b' = 111 da'bol'+be'olb'= 11 do'd'b + b(e'b')d = 11 a'ol bol + b'e'bol = 11 DATO CHE: i due prodotti sono riogenste, posso otterere gli stem simeltoti sommenuto i representanti delle clossi e i non reppresentante delle clossi. Dundi la somme unite BEN POSTA. PRODOTTO)
Soppione de: (a,b)P(i,b) e (e,d)P(e',d') dove (a,b) e (e,d) rous i representant delle elsni (a,b) e (e,d)il prodotto tea (a,b) e (e,d) = (ac,ob) (a,b) e (e,d) = (a'e',d'b')

oloblioms olimosture de (ae, ob) = (a'e', d'b') re questos e' vers dere rimitare (except'b') = (db)a'c' per le propriéte commutative in Z passo dire cle: dbac = acolb sostituendo: d'oible = aedb a'ol'eb -acdb a'ole'b -ae olb (a'eldb) = aed'b (db)(a'c') = a e ol'b' quindi: acd'b = olba'e per che acolb = olb(a'e') il prodotto dei repremtot della clomi e il prodotto dei mon representanti e sugno le qui il prodotto e len posto.

Dieste esperazioni rendono O un compo doto che ammettano entrambe un proprio elemento neutro e agmi elemento, escluso lo rese delle prina aperatione ammette un inverso. (a, b) e d d (b, a) ed (ob) (b, a) = 1 (44174) (o,b). (b,a) = 1 (unit a') Josile de dimostrore: Doto (a,b) e (b,a) il a (ab, ba) dots che in Z role le proprete-commutative posso servere b.a = a.b quindi (a,b). (b,a) = (ab,ab) e quetto volore e'in relatione P con (1,1) dots che: ab.1 = ab.1 => (ab, ab)P(1,1). => (ab, ab) = (1,1)

