# MATRICI E APPLICAZIONI LINEARI:

## COMPOSIZIONE E ISOMORFISMI:

**DEF (SPAZIO DI OMOMORFISMI):**
Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali, $S, T : V \to W$ due applicazioni lineari e $\lambda \in \mathbb{R}$.
Definiamo $S+T : V \to W$ e $\lambda T : V \to W$ come segue:

$$(S+T)(\underline{v}) = S(\underline{v}) + T(\underline{v}) \qquad (\lambda T)(\underline{v}) = \lambda(T(\underline{v})) \qquad \forall \underline{v} \in V$$

Le applicazioni sono ancora lineari.

L'insieme $\mathrm{Hom}(V, W) = \{ L : V \to W \}$ con queste op. diventa uno spazio vettoriale.

In particolare $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ si chiama spazio duale di $V$ e si indica con $V^*$

**DEF (COMPOSIZIONE):**
Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ due applicazioni lineari
$\Rightarrow$ la composizione di $S$ e $T$ è l'applicazione $T \circ S : U \to W$ data da:

$$(T \circ S)(\underline{u}) = T(S(\underline{u})) \qquad \forall \underline{u} \in U$$

**PROP:**
Siano $S : U \to V$ e $T : V \to W$ applicazioni lineari tra spazi vettoriali $U, V$ e $W$.
Allora $(T \circ S) : U \to W$ è lineare

**DIM:**

$$(T \circ S)(\underline{u} + \underline{v}) \overset{\text{DEF} \circ}{=} T(S(\underline{u} + \underline{v})) \overset{\text{LIN } S}{=} T(S(\underline{u}) + S(\underline{v})) \overset{\text{LIN } T}{=} T(S(\underline{u})) + T(S(\underline{v})) \overset{\text{DEF} \circ}{=} (T \circ S)(\underline{u}) + (T \circ S)(\underline{v})$$

OSS:

NEL CASO IN CUI $U = V = W$, OSSIA QUANDO SIA $T$ SIA $S$ SONO ENDOMORFISMI RISULTANO DEFINITE SIA $T \circ S$ SIA $S \circ T$. TUTTAVIA, LA COMPOSIZIONE NON È COMMUTATIVA

$$T \circ S \neq S \circ T$$

ESEMPIO:

DEFINIAMO $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ PONENDO:

$$S\left(\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \quad e \quad T\left(\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x \\ z \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$S \circ T\left(\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}\right) = S\left(\begin{vmatrix} x \\ z \\ 0 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x \\ z \\ 0 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = T\left(\begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix}\right) = T \circ S\left(\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}\right)$$

OVVIAMENTE ESISTONO ANCHE ENDOMORFISMI CHE COMMUTANO.
METTENDO INSIEME TUTTO QUELLO CHE SAPPIAMO, OSSERVIAMO CHE:

1) $(S \circ R) \circ T = S \circ (R \circ T)$ ASSOCIATIVITÀ

2) $(S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T$

3) $S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$

4) $(\lambda S) \circ T = \lambda (S \circ T) = S \circ (\lambda T)$

$\mapsto$ $\mathrm{Hom}(V, V)$ È UN ANELLO NON COMMUTATIVO

DIM:

1) $(S\circ R)\circ T(\underline{u}) = S\circ R(T(\underline{u})) = S(R(T(\underline{u}))) = S(R\circ T(\underline{u})) = S\circ(R\circ T)(\underline{u})$

2) $(S_1+S_2)\circ T(\underline{u}) \overset{\text{DEF}\circ}{=} S_1+S_2(T(\underline{u})) \overset{\text{DEF}+}{=} S_1(T(\underline{u})) + S_2(T(\underline{u})) \overset{\text{DEF}\circ}{=} S_1\circ T(\underline{u}) + S_2\circ T(\underline{u})$

3) $S\circ(T_1+T_2)(\underline{u}) \overset{\text{DEF}\circ}{=} S(T_1+T_2(\underline{u})) \overset{\text{DEF}+}{=} S(T_1(\underline{u})+T_2(\underline{u})) \overset{\text{Lin } S}{=} S(T_1(\underline{u}))+S(T_2(\underline{u})) \overset{\text{DEF}\circ}{=} S\circ T_1 + S\circ T_2$

4) $(\lambda S)\circ T \overset{\text{DEF}\circ}{=} (\lambda S)(T(\underline{u})) \overset{\text{DEF}\cdot}{=} \lambda(S(T(\underline{u}))) \overset{\text{Lin } S}{=} S(\lambda T(\underline{u})) \overset{\text{DEF}\circ}{=} S\circ(\lambda T)(\underline{u})$

DEF:
Diremo che un APP. LINEARE $T: V \to W$ è INVERTIBILE se esiste un APP. LINEARE $S: W \to V$, l'inverse di $T$ tale che $T\circ S = Id_W$ e $S\circ T = Id_V$.
Se esiste, l'inverse di $T$ si indica con $T^{-1}$

OSS:
L'inverse se esiste è unica, se $S$ e $S'$ sono inverse di $T$:

$$S' = S'\circ Id_W = S'\circ(T\circ S) = (S'\circ T)\circ S = Id_V\circ S = S$$

PROP:
Sia $T: V \to W$ un'APPLICAZIONE LINEARE. Allora $T$ è INVERTIBILE $\Leftrightarrow$ $T$ è BIETTIVA

DIM:
$(\Rightarrow)$:
Se $T$ è invertibile $\Rightarrow$ $\forall \underline{w}\in W\ \exists!\ \underline{v}\in V \mid T^{-1}(\underline{w}) = \underline{v}$ $\Rightarrow$ $T$ è suriettiva ed iniettiva

$(\Leftarrow)$:

Se $T$ è BIETTIVA:

1) $\forall \underline{v}, \underline{\bar{v}} \in V \mid T(\underline{v}) = T(\underline{\bar{v}}) \Rightarrow \underline{v} = \underline{\bar{v}}$ 2) $\forall \underline{w} \in W\ \exists \underline{v} \in V \mid T(\underline{v}) = \underline{w}$

segue che $\exists S : W \to V \mid \forall \underline{v} \in V \quad S(T(\underline{v})) = \underline{v} \Rightarrow S = T^{-1}$

SICURAMENTE DATO T SURIETTIVA

$S$ è LINEARE?

Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W \mid \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V \quad T(\underline{v}_1) = \underline{w}_1$ e $T(\underline{v}_2) = \underline{w}_2$

$$S(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) \overset{IP}{=} S(T(\underline{v}_1) + T(\underline{v}_2)) \overset{LIN\ T}{=} S(T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)) \overset{DEF\ S}{=} \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \overset{DEF\ S}{=} S(T(\underline{v}_1)) + S(T(\underline{v}_2))$$

$$\overset{IP}{=} S(\underline{w}_1) + S(\underline{w}_2)$$

$$S(\lambda \underline{w}_1) \overset{IP}{=} S(\lambda T(\underline{v}_1)) \overset{T\ LIN}{=} S(T(\lambda \underline{v}_1)) \overset{DEF\ S}{=} \lambda \underline{v}_1 \overset{DEF\ S}{=} \lambda S(T(\underline{v}_1)) \overset{IP}{=} \lambda S(\underline{w}_1)$$

COR:

SIA $T: V \to W$ UN'APPLICAZIONE LINEARE. SE $\dim(V) = \dim(W)$, ALLORA LE SEGUENTI SONO EQUIVALENTI:

1) $T$ È INVERTIBILE

2) $T$ È INIETTIVA

3) $T$ È SURIETTIVA

DIM:

$(1 \Rightarrow 2)$: $T$ INVERTIBILE $\Leftrightarrow$ BIETTIVA $\Rightarrow$ $T$ INIETTIVA

$(2 \Rightarrow 3)$: $T$ INIETTIVA $\Rightarrow \dim(\ker(T)) = 0 \Rightarrow \dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T))$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(V) = \dim(W) \Rightarrow \mathrm{Im}(T) = W$

$(3 \Rightarrow 1)$: $T$ SURIETTIVA, QUINDI $\mathrm{Im}(T) = W$ $\dim(W) = n$

$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + rg(T) \Rightarrow \dim(\ker(T)) = \dim(V) - rg(T) = n - n = 0$

$\Rightarrow$ $T$ È BIETTIVA $\Rightarrow$ $T$ È INVERTIBILE

DEF:

Due spazi vettoriali $V$ e $W$ sono isomorfi ($V \cong W$) se esiste un isomorfismo fra $V$ e $W$, ossia un applicazione lineare invertibile $T: V \to W$

PROP:

1) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ lo spazio $Hom(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ è isomorfo allo spazio delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$
In particolare lo spazio duale $\mathbb{R}^n$ primo è isomorfo allo spazio dei vettori $M_{1,n}(\mathbb{R})$

2) Sia $V$ uno spazio vettoriale. Allora lo spazio $Hom(\mathbb{R}; V)$ è isomorfo a $V$

OSS:

Indichiamo gli elementi della matrice identica con $\delta_{ij}$ dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Il simbolo $\delta_{ij}$ è chiamato delta di Kronecker

# PRODOTTO TRA MATRICI:

**DEF:**
DATE DUE MATRICI $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ DIREMO che $C \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ TALE che $L_A \circ L_B = L_C$ è IL PRODOTTO (RIGHE PER COLONNE) DI $A$ e $B$, SCRIVEREMO $C = AB$
In PARTICOLARE:

$$L_A \circ L_B = L_{AB}$$

## Come si CALCOLA?

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} b_{1j} + \dots + a_{1n} b_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1} b_{1j} + \dots + a_{mn} b_{nj} \end{vmatrix} = C \qquad \forall j \in \{1, \dots, p\}$$

In ALTRI TERMINI, L'ELEMENTO $(i,j)$ in $C$ EQUIVALE

$$(AB)_{ij} = c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj} = A_i B^j$$

**OSS:**
Perché $AB$ SIA DEFINITA OCCORRE che #COLONNE DI $A$ = #RIGHE DI $B$.

**OSS:**
PRESO UN VETTORE $x \in \mathbb{R}^n$ SI VEDE SUBITO che PRESA $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ IL PRODOTTO TRA I DUE è QUELLO che ABBIAMO SEMPRE CHIAMATO $Ax$

ESEMPIO: $1\cdot 3 + 3\cdot -1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$2\cdot 3 + 4\cdot -1$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

PROP:
SIANO $A, B, C$ MATRICI DI DIMENSIONI giuste e $\lambda \in \mathbb{R}$:

1) $A(B+C) = AB + AC$ e $(A+B)C = AC + BC$

2) $(\lambda A)B = \lambda(AB)$

3) $(AB)C = A(BC)$

4) $A\underline{1} = \underline{1}A = A$ e $A\underline{O} = \underline{O}A = \underline{O}$

5) $(AB)^T = B^T A^T$

DIM:

1) $A(B+C) = L_A \circ L_{B+C} = L_A(L_{B+C}(\underline{u})) = L_A(L_B(\underline{u}) + L_C(\underline{u})) = L_A(L_B(\underline{u})) + L_A(L_C(\underline{u}))$
$= AB + AC$

2) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = \lambda L_A \circ L_B = (\lambda L_A(L_B(\underline{u})) = \lambda(L_A(L_B(\underline{u}))) = \lambda(AB)$

3) $(AB)C = (L_A \circ L_B) \circ L_C = L_A \circ (L_B \circ L_C) = A(BC)$

4) DERIVA BANALMENTE DAL FATTO che $\underline{1} = \mathrm{Id}$ e $0 = \underline{0}$

5) $(AB)^T = B^T A^T$

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A^T_{kj} B^T_{ik} = \sum_{k=1}^{n} B^T_{ik} A^T_{kj} = (B^T A^T)_{ij}$$

## MATRICI INVERTIBILI:

DEF:
DIREMO che UNA MATRICE $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ È INVERTIBILE SE ESISTE UNA MATRICE $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ TALE che:

$$AB = BA = I_n$$

Se l'inverso esiste è unica e si denota con $A^{-1}$.
L'insieme delle MATRICI INVERTIBILI DI ORDINE $n$ SI DENOTA CON $GL_n(\mathbb{R})$

GRUPPO LINEARE

PROP:
SIANO $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ due MATRICI INVERTIBILI. ALLORA $A^{-1}$, $A^T$ e $AB$ SONO INVERTIBILI E SI HA:

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

DIM:

1) $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} \cdot I_n = (A^{-1})^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) = ((A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot A = I_n \cdot A = A$

2) $(A^T)^{-1} = (A^T)^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A)^T = (A^T)^{-1} \cdot A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1})^T$

3) $(AB)^{-1} = (AB)^{-1} \cdot AB \cdot B^{-1}A^{-1} = ((AB)^{-1} \cdot AB) \cdot B^{-1}A^{-1} = I \cdot B^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$A(BB^{-1})A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = I$

TEO:

SIA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. ALLORA LE SEGUENTI SONO EQUIVALENTI:

1) A è INVERTIBILE
2) $L_A$ è INVERTIBILE
3) $L_A$ è INIETTIVA
4) $L_A$ è SURGETTIVA
5) $rg(A) = n$
6) LE COLONNE DI A SONO LIN. INDIP
7) LE RIGHE DI A SONO LIN. INDIP
8) $A\underline{x} = \underline{0}$ HA ! SOL $x = \underline{0}$
9) $\forall b \in \mathbb{R}^n$ $A\underline{x} = b$ HA ! SOL $x = A^{-1}b$
10) I PIVOT DI A NON SONO NULLI

OSS:

SIA $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ALLORA LE SEGUENTI SONO EQUIVALENTI:

1) A è invertibile 2) $\exists B_1 \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid B_1 A = I_n$ 3) $\exists B_2 \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid AB_2 = I_n$

# METODO DI INVERSIONE MATRICI:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \quad - 3 R_2 = \quad \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \quad -$

1) CALCOLO LA MATRICE AUMENTATA

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \text{Voglio PORTARE RHS A LHS} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 = R_2 - \frac{1}{2} R_3$

$R_1 = R_1 + \frac{1}{4} R_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 & -1/8 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 5/4 & -3/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$R_1 = R_1 + R_2$