Foglio 4

Esercizio 1. Utilizzando la dimostrazione del teorema cinese del resto determinare l'unica soluzione mod $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ del sistema cinese

$$(1) \qquad \begin{cases} X \equiv 3(5) \\ X \equiv 4(7) \\ X \equiv 4(11) \end{cases} .$$

3, 5, 7 sono coprimi fra loro quindi ho le ragioni sufficiente e dire che esiste un risultato per questo sistema.

$R = 3 \cdot 7 \cdot 11 = 385$

$R_1 = 7 \cdot 11 = 77$

$R_2 = 5 \cdot 11 = 55$

$R_3 = 5 \cdot 7 = 35$

Ora troviamo $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$

$R_1 \tilde{X}_1 \equiv_5 3 \Rightarrow 77\tilde{X}_1 \equiv_5 3$

$R_2 \tilde{X}_2 \equiv_7 4 \Rightarrow 55\tilde{X}_2 \equiv_7 4$

$R_3 \tilde{X}_3 \equiv_{11} 4 \Rightarrow 35\tilde{X}_3 \equiv_{11} 4$

$77X \equiv_5 3$

$77, 5$

$* \ 2 = 77 - 5 \cdot 15$

$1 = 5 - 2(77 - 5 \cdot 15)$

$5 - 2 \cdot 77 + 5 \cdot 30$

$\tilde{X}_1 = [-6]_5 = [4]_5$

$* \ 6 = 55 - 7 \cdot 7$

$1 = 7 - 6 \cdot 1$

$\tilde{X}_2 = [-4]_7$

$-4 + 7 = [3]_7$

$* \ 2 = 35 - 11 \cdot 3$

$1 = 11 - 2 \cdot 5$

$1 = 11 - (35 - 11 \cdot 3)\, 5$

$x_0 = [-20]_{11} = [2]_{11}$

SOL:

$\tilde{X} = 77 \cdot 4 + 55 \cdot 3 + 35 \cdot 2$ ✓

Esercizio 5. Risolvere il sistema congruenziale

$$\begin{cases} 18X \equiv 12(30) \\ 7X \equiv 4(9) \\ 28X \equiv 14(98) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{18}^{\,3} X \equiv \cancel{12}^{\,2}(\cancel{30}^{\,5}) \\ 7X \equiv 4(9) \\ \cancel{28}X \equiv \cancel{14}(\cancel{98}) \\ \cancel{14}_2 \quad \cancel{7}_1 \quad \cancel{49}_7 \end{cases}$$

Dato che $M.C.D(15, 9, 49) = 1 \wedge 1|2,\ 1|4,\ 1|1$

POSSO RIDURLO AD 1 SISTEMA CINESE

$$\begin{cases} 3X \equiv 2(5) \\ 7X \equiv 4(9) \\ 2X \equiv 1(7) \end{cases}$$ moltiplico ambo i membri per l'inverso

$$\begin{cases} 3 \cdot 2X \equiv 2 \cdot 2(5) \\ 7 \cdot 4X \equiv 4 \cdot 4(9) \\ 2 \cdot 4X \equiv 1 \cdot 4(7) \end{cases} \qquad \begin{cases} X \equiv_5 4 \\ X \equiv_9 16 \\ X \equiv_7 4 \end{cases}$$

$R = 315$

$R_1 = 63$

$R_2 = 35$

$R_3 = 45$

Troviamo ora $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$

$R_1\tilde{X}_1 = 63X \equiv_5 4$

$R_1\tilde{X}_1 = 3X \equiv_5 4$

$X \equiv_5 8$

$\tilde{X}_1 \equiv_5 3$

$R_2\tilde{X}_2 = 35X \equiv_9 16$

$8X \equiv_9 7$

$X \equiv_9 7 \cdot 8$

$\tilde{X}_2 \equiv_9 2$

$R_3\tilde{X}_3 = 45x \equiv_7 4$

$3x \equiv_7 4$

$\tilde{X}_3 \equiv_7 6$

$\tilde{x} = 63 \cdot 3 + 35 \cdot 2 + 45 \cdot 6$

Rifaccio il primo con le regole che ho imparato.

(SPIEGANDO)

Esercizio 1. Utilizzando la dimostrazione del teorema cinese del resto determinare l'unica soluzione mod $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ del sistema cinese

$$(1) \qquad \begin{cases} X \equiv 3(5) \\ X \equiv 4(7) \\ X \equiv 4(11) \end{cases} .$$

$$\begin{cases} X \equiv_5 3 \\ X \equiv_7 4 \\ X \equiv_{11} 4 \end{cases}$$

(CONDIZIONE SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA)
IL SISTEMA CINESE È RISOLVIBILE DATO CHE I COEFFICIENTI DEI MODULI SONO TUTTI PRIMI TRA LORO

TROVO

$R = 385$

$R_1 = 77$

$R_2 = 55$

$R_3 = 35$

$77/5 = 15,\dots\ ;\ 15 \cdot 5 = 75;\ 77-75 = 2$

$77\tilde{X}_1 \equiv_5 3 \rightarrow 2\tilde{X}_1 \equiv_5 3 \rightarrow \tilde{X}_1 \equiv_5 4 \rightarrow \tilde{X}_1 \equiv_5 4$

$55\tilde{X}_2 \equiv_7 4 \rightarrow 6\tilde{X}_2 \equiv_7 4 \rightarrow \tilde{X}_2 \equiv_7 24 \rightarrow \tilde{X}_2 \equiv_7 3$

$35\tilde{X}_3 \equiv_{11} 4 \rightarrow 2\tilde{X}_3 \equiv_{11} 4 \rightarrow \tilde{X}_3 \equiv_{11} 24 \rightarrow \tilde{X}_3 \equiv_{11} 2$

$\tilde{X} = 77 \cdot 4 + 55 \cdot 3 + 35 \cdot 2$

Esercizio 4. Risolvere il sistema congruenziale

$$\begin{cases} 4X \equiv 2\,(22) \\ 3X \equiv 2\,(7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{2}{\cancel{4}}X \equiv_{\cancel{22}\,11} \cancel{2}\ 1 \\ 3X \equiv_7 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l|l} MCD(2,11) = 1 & 1 \\ MCD(3,7) = 1 & 2 \end{array}$$

1) entrambe le equazioni ammettono soluzione.
2) gli ottenuti dei moduli sono coprimi tra loro.

POSSO RIDURLO AD UN SISTEMA CINESE

$$\begin{cases} 2x \equiv_{11} 1 \\ 3x \equiv_7 2 \end{cases}$$

$R = 77$

$R_1 = 7$

$R_2 = 11$

$7 \cdot 2\tilde{x}_1 \equiv_{11} 1 \rightarrow 14\tilde{x}_1 \equiv_{11} 1 \rightarrow 3\tilde{x}_1 \equiv_{11} 1 \rightarrow \tilde{x}_1 \equiv_{11} 4$

$11 \cdot 3\tilde{x}_2 \equiv_7 2 \rightarrow 33\tilde{x}_2 \equiv_7 2 \rightarrow 33\tilde{x}_2 \equiv_7 2 \rightarrow 5\tilde{x}_2 \equiv_7 2 \rightarrow \tilde{x}_2 \equiv_7 6$

$\tilde{x} = 7 \cdot 4 + 11 \cdot 6$

Esercizio 3. Ho comprato un grosso barattolo di caramelle; il negoziante mi ha assicurato che sono circa mille ma mi ha anche detto che se le metto in fila per 13 ne rimangono 11, se le metto in fila per 11 ne rimangono 7 e ne manca una per riuscire a metterle in fila per 7. Quante caramelle ci sono nel barattolo ?

$$\begin{cases} x \equiv_{13} 11 \\ x \equiv_{11} 7 \\ x \equiv_7 6 \end{cases}$$

Dato che i coefficienti dei moduli sono tutti primi tra loro e che $1|1 \wedge 1|7 \wedge 1|6$ quindi ogni equazione ha una soluzione posso considerarlo come un sistema cinese.

$$\begin{cases} x \equiv_{13} 11 \\ x \equiv_{11} 7 \\ x \equiv_7 6 \end{cases}$$

$R = 13 \cdot 11 \cdot 7$

$R_1 = 11 \cdot 7$

$R_2 = 13 \cdot 7$

$R_3 = 13 \cdot 11$

$77 \cdot \tilde{x}_1 \equiv_{13} 11 \rightarrow 12\tilde{x}_1 \equiv_{13} 11 \rightarrow \tilde{x}_1 \equiv_{13} 132 \rightarrow \tilde{x}_1 \equiv_{13} 2$

$91 \cdot \tilde{x}_2 \equiv_{11} 7 \rightarrow 3\tilde{x}_2 \equiv_{11} 7 \rightarrow \tilde{x}_2 \equiv_{11} 28 \rightarrow \tilde{x}_2 \equiv_{11} 6$

$143 \cdot \tilde{x}_3 \equiv_7 6 \rightarrow 3\tilde{x}_3 \equiv_7 6 \rightarrow \tilde{x}_3 \equiv_7 6 \rightarrow \tilde{x}_3 \equiv_7 6 \cdot 5 \rightarrow \tilde{x}_3 \equiv_7 2$

$\tilde{X} = 77 \cdot 2 + 91 \cdot 6 + 143 \cdot 2$

infatti:

$986 \equiv_{13} 11$

$986 \equiv_{11} 7$

$986 \equiv_{7} 6$

$\boxed{\begin{array}{l} 7/3 = 1 \\ 7 - 2 \cdot 3 = 1 \end{array}}$

Esercizio 6. È dato il sistema congruenziale dipendente dal parametro $a \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} 3X \equiv 4(10) \\ 2X \equiv 7(9) \\ 5X \equiv a(12) \end{cases}$$

Determinare per quali $a \in \mathbb{Z}$, $1 \leq a \leq 11$, tale sistema è compatibile. Per tali a risolvere il sistema.

Suggerimento: il metodo di sostituzione può essere utile ....