APPUNTI TEORIA DEI GRUPPI

Definizione di gruppo.

una struttura algebrica $(A;+)$ e' un gruppo se e solo se ha un elemento neutro e
ogni elemento ha un inverso
vale la proprietà associativa.
se vale la proprietà commutativa, il gruppo e' abeliano o commutativo.

- Omomorfismo.

Siano $(G, *_g)$ e $(H, *_h)$ due gruppi.
$\phi : G \to H$ e' un omomorfismo se $\phi(g *_g g') = \phi g *_h \phi g'$

PROPRIETA': se ϕ e' un omomorfismo $\to \phi(1_G) = 1_H$

<u>VERIFICHIAMO</u>

$$\phi(1_G) = \phi(1_G *_g 1_G)$$

$$1H = \phi(1G) *_h (\phi(1G))^{-1}$$

$$1H = \phi(1G *_g 1G) *_h (\phi(1G))^{-1}$$

$$1H = \phi(1G) *_h \cancel{\phi(1G)} *_h \cancel{(\phi(1G))^{-1}}$$

DIFFERENZA TRA OMOMORFISMO E ISOMORFISMO

Negli isomorfismi abbiamo una applicazione del tipo one to one mapping, cioè che associa ad ogni elemento in G uno e un solo elemento in H.
Negli omomorfismi abbiamo una applicazione "suriettiva" ogni elemento in G e' mappato dall'omomorfismo ma due elementi distinti in G possono essere mappati nello stesso elemento in H.

[...] ovvero la mappatura f associa a tre elementi del gruppo C_{3v} lo stesso elemento del gruppo C_2. Gli elementi $\{E, C_3, C_3^{-1}\}$ sono mappati nello stesso elemento $E \in C_2$, mentre gli elementi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono mappati in $C \in C_2$. f è una corrispondenza 3:1 e scriviamo $C_{3v} \sim C_2$. È facile vedere che la f è un'omomorfismo tra C_{3v} e C_2 dal momento che, per esempio, $f(EC_3) = E = f(E)f(C_3)$, $f(E\sigma_1) = C = f(E)f(\sigma_1)$ ecc. Emerge quindi la sostanziale differenza tra omomorfismo e isomorfismo. Un'omomorfismo tra due set $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è una corrispondenza n:1, con $n \geq 1$, mentre un'isomorfismo è una corrispondenza $1:1$ (applicazione iniettiva e suriettiva). In particolare, se la mappatura f è un'omomorfismo e la corrispondenza è 1:1, allora la mappatura tra i due set $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è un'isomorfismo, e $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ [...]

- Sottogruppi

Definizione: sia $S \subseteq G$ un gruppo S è sottogruppo di un altro gruppo G se
(1) - $\forall s, s' \in S$, $s \cdot s' \in S$ ($\cdot$ CHIUSA RISPETTO A S)
(2) - $\forall s \in S$, $s^{-1} \in S$
(3) - l'elemento neutro di G, $1_G \in S$

Proprietà: $S \subseteq G$ è sottogruppo $\Leftrightarrow \forall s_1, s_2, (s_1 \cdot s_2^{-1}) \in S$

Dim:
($\Rightarrow$) se $s_2 \in S \rightarrow s_2^{-1} \in S$ (perché S è gruppo) $\rightarrow (s_1 \cdot s_2^{-1}) \in S$
($\Leftarrow$) considero $s \in S$, $1_G \in S$ perché $s \cdot s^{-1} \in S$ per ipotesi
scelgo $s_1 = 1_G$ e $s_2 = s$, per ipotesi $s_1 \cdot s_2^{-1} \in S$
allora $1_G \cdot s^{-1} \in S \rightarrow s^{-1} \in S$ DIMOSTRATA (2)
considero $s_1, s_2 \in S$, $s_2^{-1} \in S$ e lo so
Ma allora $s_1 \cdot (s_2^{-1})^{-1} \in S$ DIMOSTRATA (1)

Proprietà: $Img(\phi) = \{\phi(g) ; g \in G\}$ è sottogruppo di H

Dim: se $y_1 ; y_2 \in Img(\phi) \rightarrow y_1 *_H y_2^{-1} \in Img(\phi)$ per ipotesi.
$\exists g_1, g_2 \mid y_1 = \phi(g_1)$ e $y_2 = \phi(g_2)$ quindi:
$y_1 *_H y_2^{-1} = \phi(g_1) *_H (\phi(g_2))^{-1} = \phi(g_1 *_G g_2^{-1})$.

quindi $\forall y_1, y_2 \in Img\,\phi$, $(y_1 *_H y_2^{-1}) \in Img\,\phi$ infatti $y_1 *_H y_2^{-1} = \phi(g_1 *_G g_2^{-1})$ che è un elemento dell'immagine dell'omomorfismo.

infatti è un elemento di G mappato da ϕ in $(\mathrm{Img}\,\phi)$

- Ogni gruppo ha due sottogruppi banali: $(1_G, *)$ e se stesso

[DIM $(1_G, *)$ $\{1_G\}$ SOTTOINSIEME DI G, $\forall g_1, g_2 \in \{1_G\}$ $g_1 * g_2 = $
$\in \{1_G\}$ DATO CHE l'unico elemento in $\{1_G\}$ è 1_G
$1_G * 1_G = 1_G \in \{1_G\}$

$(*)$ sappiamo che $(\mathrm{Img}\,\phi \subseteq H)$

- Sottogruppi di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_n$

PROSSIMAMENTE ...

◎ Gruppo Ciclico e Classi laterali

* GRUPPO GENERATO

Sia $(G, *)$ un gruppo, preso $g \in G$ e $t \in \mathbb{Z}$, si ha la seguente notazione:

$$g^t = \begin{cases} 1_G & \text{se } t = 0 \\ g * g * g * g \text{ per } t\text{-volte} & \text{se } t > 0 \\ g^{-1} * g^{-1} * g^{-1} * g^{-1} \text{ per } t\text{-volte} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Ne segue:

- $g^s * g^t = g^{s+t}$
- $g^{-t} = (g^{-1})^t = (g^t)^{-1}$

L'insieme $\{g^t, t \in \mathbb{Z}\}$ è un sotto-gruppo di G, dato che presi g^{t_1} e g^{t_2} si ha che

$$g^{t_1} * (g^{t_2})^{-1} = g^{t_1} * g^{-t_2} = g^{t_1 - t_2} \in \{g^t, t \in \mathbb{Z}\}$$

* questo sottogruppo ha simbolo $\langle g \rangle$ ed è denominato gruppo generato da g