Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0$ $\forall j$, allora i vettori

$$c_1\underline{v}_1, \dots, c_k\underline{v}_k$$

- SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \dots \bar{v}_k$ sono linearmente $\boxed{\text{indipendenti}}$ quindi:

$\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \dots + \alpha_k\bar{v}_k = \bar{0}$ dove $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sono tutti $\boxed{\text{nulli}}$

posso dire che: $0 \cdot \alpha \in \mathbb{R}$ qualsiasi $= 0$

$\alpha_1 c_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 c_2 v_2 + \dots + \alpha_k c_k v_k = \bar{0}$

$$c_1 \cdot \dots \cdot c_k \left(\frac{\alpha_1 \bar{v}_1}{c_2 \cdot \dots \cdot c_k} + \frac{\alpha_2 \bar{v}_2}{c_1 \cdot c_3 \cdot \dots \cdot c_k} + \dots + \frac{\alpha_k \bar{v}_k}{c_1 \cdot \dots \cdot c_{k-1}} \right) = \bar{0}$$

$$c_1 \cdot \dots \cdot c_k (\beta_1 \bar{v}_1 + \beta_2 \bar{v}_2 + \dots + \beta_k \bar{v}_k) = \bar{0}$$

Dato che i vettori $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ sono linearmente indipendenti,

$c_1 \cdot \dots \cdot c_k (\beta_1 \bar{v}_1 + \beta_2 \bar{v}_2 + \dots + \beta_k \bar{v}_k) = \bar{0}$ con $\beta_1, \dots, \beta_k = 0$

RIFACCIO ↓

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0$ $\forall j$, allora i vettori

$$c_1\underline{v}_1, \dots, c_k\underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_k = 0$

$c_1 \alpha_1 \underline{v}_1 + c_2 \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + c_k \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$, CHE POSSO RISCRIVERE COME:

$\beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \dots + \beta_k \underline{v}_k = \underline{0}$, DATO CHE: $v_1, \dots, v_k$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$ $\beta_1, \dots, \beta_k = 0$

SE $\beta_J = 0$ $\forall$ $1 \leq J \leq K$ $\Rightarrow c_J \alpha_J = 0$ $\forall$ $1 \leq J \leq K$

DATO CHE PER IPOTESI $c_J \neq 0$ $\forall$ $1 \leq J \leq K$ SE $c_J \alpha_J = 0$

$\alpha_J = 0$

QUINDI

$\alpha_J = 0$ $\forall$ $1 \leq J \leq K$. QUINDI:

$c_1 \alpha_1 \underline{v}_1 + c_2 \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + c_k \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_k = 0$

Esercizio 2. In $M_{33}(\mathbb{R})$ consideriamo il sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche ed il sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche.
Determinare una base di $M_{33}(\mathbb{R})$.
Determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

$M_{33}(\mathbb{R})$

• una base è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti

1) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

2) $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

3) $B'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 7 \\ -4 & -7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$ NO ?

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\alpha_1 = x, \ \alpha_2 = y, \ \alpha_3 = z$

$$\begin{cases} x + 3y - 1z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6x - 4x = 0 \\ 4x = z \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

I 3 VETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI E SONO 3 COME LA CARDINALITA' DI $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,1,0)\,,\ \underline{v}_2 = (0,1,0,0)\,,\ \underline{v}_3 = (0,0,1,0).$$

Verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:

$W_1 = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2 = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
$W_3 = \text{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2)$

1

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0 \\ 0+0+0 = 0 \end{cases}$$

SCRIVIAMOLO SOTTO FORMA DI MARICE

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi si, sono linearmente indipendenti

2

$$W_1 = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\,\underline{v}_3) =$$

$$W_1 = \text{SPAN}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$$

$$B = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, (\underline{v}_3 + \underline{v}_2))$$

(*) $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 + \beta 74\, \underline{v}_2 - \beta\sqrt{2}\, \underline{v}_3$

TIPO

$1\,\underline{v}_1 + 1\,\underline{v}_2 + 1\,\underline{v}_3 + 74\,\underline{v}_2 - 2\,\underline{v}_3$ OK

MA QUESTO NUMERO E' OTTENIBILE ANCHE CON I SOLI VETTORI v_1, v_2, v_3.

$$W_2 = \text{SPAN}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = W_3$$ PER QUESTO

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ v_1, v_2, (v_1 + v_2), (v_1 - v_2) \right\}$$