(ESERCIZIO ASSEGNATO A VOCE A LEZIONE)

Dimostrare che l'operazione di somma su $\mathbb{Q}$ è ben definita.

DIM:

$[(a,b)]\ \rho\ [(a',b')]\ ,\ [(c,d)]\ \rho\ [(c',d')]$

$[(a,b)]\ \rho\ [(a',b')] \Leftrightarrow ab' = ba'$ •

$[(c,d)]\ \rho\ [(c',d')] \Leftrightarrow cd' = dc'$ •

$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ac+db\ ,\ bd)]$

$[(a',b')] + [(c',d')] = [(a'c'+d'b', b'd')]$

$(ac+db)\cdot(b'd') = (a'c'+d'b')(bd)$

$(ac)(b'd') + (db)(b'd') = (a'c')(bd) + (d'b')(bd)$

$acd'b' + (db)(b'd') = \quad " \quad$ X COMMUTATIVITÀ Z DISTRIBUTIVITÀ

$ad(c'b') + (d'b)(bd) = \quad "$

$dab'c' + \quad " \quad = \quad " \quad$ • SOSTITUZIONE

$d(ba')c' + \quad " \quad = \quad " \quad "$

$da'bc' + \quad " \quad = \quad " \quad "$

$a'dbc' + \quad " \quad = \quad " \quad "$

$a'dc'b + \quad " \quad = \quad " \quad "$

$a'c'bd + \quad " \quad = \quad " \quad "$

ho dimostrato che $(ac+db)\cdot(b'd') = (a'c'+d'b')(bd)$, dato che:

$[(ac+db), bd]\ \rho\ [(a'c'+d'b'), b'd'] \Leftrightarrow (ac+db)\cdot(b'd') = (a'c'+d'b')(bd)$

la somma è ben definita su $\mathbb{Z}$