Algebra Lineare.

Dato un sistema di equazioni lineari con n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_3 \dots = b_2 \\ \quad \dots = b_3 \\ \dots \end{cases}$$

questo può essere rappresentato mediante una matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} & \dots \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} & \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

il sistema può essere riscritto così

$$\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} & \dots \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} & \dots \\ \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO: Il sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{si scrive} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

METODO DI GAUSS

metodo per trovare soluzioni in un sistema di equazioni lineari.

- Sistemi equivalenti: Siano $A\bar{x} = b$ e $A'\bar{x} = b'$ due sistemi di equazioni lineari.

$$\Sigma = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{x} = \bar{b}\}$$ SOLUZIONI DEL 1° SISTEMA

$\Sigma' = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid A'\bar{x} = \bar{b}' \}$ SOLUZIONI DEL 2° SISTEMA

se $\Sigma = \Sigma' \Rightarrow A\bar{x} = \bar{b} = A'\bar{x} = \bar{b}'$

• LEMMA FONDAMENTALE

Sia $A\bar{x} = \bar{b}$ un sistema $m \times n$, e siano

$(*)$: $a_1 x_1 \cdots a_n x_n = \beta$, $(**)$: $a'_1 x_1 \cdots + a'_n x_n = \beta'$

due equazioni del sistema

$(***)$: $h(*) + k(**) = h\beta + k(\beta')$

dove $k, h \neq 0$.

$\tilde{A}\bar{x} = \tilde{b}$ un nuovo sistema identico al primo, con le sole differenze che, al posto di $(**)$ ho $(***)$

allora $\tilde{A}\bar{x} = \tilde{b}$, $A\bar{x} = \bar{b}$ sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE:

Abbiamo $*$ e $**$, due equazioni del sistema, che ha soluzioni Σ, sia $\bar{y} \in \Sigma$ ($\bar{y}$ soluzione del sistema)

$\bar{y}$ soddisfa $*$ e $**$ quindi

$a_1 y_1 + \dots + a_n y_n - \beta = 0$ e $a'_1 y_1 + \cdots + a'_n y_n - \beta' = 0$

ne segue che, considerando due coefficienti $h, k \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$h(a_1 y_1 + \dots + a_n y_n - \beta) + k(a'_1 y_1 + \dots + a'_n y_n - \beta') = 0$$

quindi $\bar{y}$ soddisfa anche:

$$(***) = h(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) + k(a'_1 x_1 + \dots + a'_n x_n) = h\beta + h\beta'$$

quindi prendendo un nuovo sistema

$\tilde{A}\bar{x} = \tilde{b}$ sarà identico al primo ma al posto di $**$ avrà $***$, $\tilde{\Sigma}$ sono le soluzioni del nuovo sistema.

dato che qualsiasi soluzione del primo sistema soddisfa anche il secondo, possiamo dire $\Sigma \subseteq \tilde{\Sigma}$.

si consideri adesso $\bar{z}$ una qualsiasi soluzione di $\tilde{A}\bar{x} = \tilde{b}$, $\bar{z} \in \tilde{\Sigma}$, vale che $\bar{z}$ soddisfa $*$, dato che $*$ è presente anche in $\tilde{A}\bar{x} = \tilde{b}$, questo significa che:

(!) $a_1 z_1 + \dots + a_n z_n - \beta = 0$

prendiamo ora $(***)$ in $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ e sostituiamo l'incognita con $\bar{z}$:

$$h(a_1 z_1 + \dots + a_n z_n - \beta) + k(a'_1 z_1 + \dots + a'_n z_n) = 0$$

per (!) il primo termine è uguale a 0 questo significa che $\bar{z}$ soddisfa $**$

quindi $\tilde{\Sigma} \subseteq \Sigma \Rightarrow \Sigma = \tilde{\Sigma}$. ■

MATRICE TRIANGOLARE

una matrice quadrata $n \times n$ si dice triangolare superiore se $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$Esempio : \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

quadrata inferiore se $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$

$$Esempio : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

TEOREMA DI GAUSS

consiste nell'applicare più volte in maniera iterativa il lemma fondamentale

METODO RISOLUTIVO:

* Su un sistema che ha matrice $n \times n$ dovremo eseguire $(n-1)$ passaggi. Dove ogni passaggio ha lo scopo di trasformare la i-esima colonna, facendo sì che tale colonna, abbia i elementi diversi da 0, ed i restanti $n-i$ elementi $= 0$.

Se la matrice è $\begin{bmatrix} a_{1_1} & a_{1_2} & a_{1_3} \\ a_{2_1} & a_{2_2} & a_{2_3} \\ a_{3_1} & a_{3_2} & a_{3_3} \end{bmatrix}$

- il *Passo 1* ha come obbiettivo di avere come prima colonna : $\begin{bmatrix} a_{1_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- il *Passo 2* ha come obbiettivo di avere come seconda colonna : $\begin{bmatrix} a_{1_2} \\ a_{2_2} \\ 0 \end{bmatrix}$

Operare: Sia i l'i-esimo passo, dobbiamo operare sull'i-esima colonna e trasformare $n-i$ elementi in modo che siano uguali a 0.
si seleziona un elemento della colonna i $P_i \neq 0$ detto pivot (P_i) in questa colonna c'è

questo elemento che è il pivot e ci sono i elementi che dovranno preservare il loro valore, $n-i$ elementi che dovranno diventare 0 (P_i fa parte degli i elementi).

gli $(n-i)$ elementi sono del tipo a_{li} con $l = \{(i+1), (i+2), (i+3), \dots, n\}$

per ognuno di questi elementi, si considera un nuovo valore $h_l = -\frac{a_{li}}{P_i}$, tale elemento si moltiplica per tutti gli elementi della riga che contiene il pivot (P_i) ottenendo così una nuova riga, e si somma alla l-esima riga ...ITERATIVAMENTE.

Teorema sistemi triangolari

$T\bar{x} = \bar{c}$ è un sistema triangolare $n \times n$ ha un unica soluzione se la diagonale principale non ha valori nulli ($t_{ii} \neq 0$ con $i = (1, 2, 3, 4, \dots, n)$) altrimenti o non ammette soluzioni o ne ha infinite.

Come capire se un sistema ammette o non ammette soluzioni.

INTRODUCIAMO UNA NUOVA STRUTTURA ALGEBRICA PER CAPIRLO.

SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$

Lo spazio vettoriale è una struttura tipo $(V, +, \bar{0}, \cdot)$ definita su un campo

$\bar{0}$ = elemento neutro

tale struttura rispetta i seguenti assiomi:

1. $(V, +)$ è un gruppo commutativo dove $+$ è un'operazione binaria.

$+ : V \times V \to V$

2. Esiste un'operazione esterna $\cdot$:

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V \mid (\alpha, \bar{v}) \to \alpha \bar{v}$

$\forall \bar{v}, \bar{w} \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti regole:

(i) • $\lambda \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \lambda \bar{v} + \lambda \bar{w}$ (PRODOTTO SCALARE)

(ii) • $1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$

(iii) • $(\lambda + \mu) \cdot \bar{v} = \lambda \bar{v} + \mu \bar{v}$

(iiii) • $(\lambda \mu) \cdot \bar{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \bar{v})$ (ASSOCIATIVITÀ)

Vediamo due esempi di noti spazi vettoriali :

- $(\mathbb{R}^n, +, \bar{0}, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, con elemento neutro, somma, prodotto scalare ed inverso definiti in tal modo :

$$\bar{0} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{x} + \bar{y} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ . \\ . \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \qquad \lambda \cdot \bar{x} := \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ . \\ . \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \qquad (\bar{x})^{-1} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ . \\ . \\ -x_n \end{bmatrix}$$

- L'insieme V delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale, con elemento neutro, somma, prodotto scalare ed inverso definiti in tal modo :

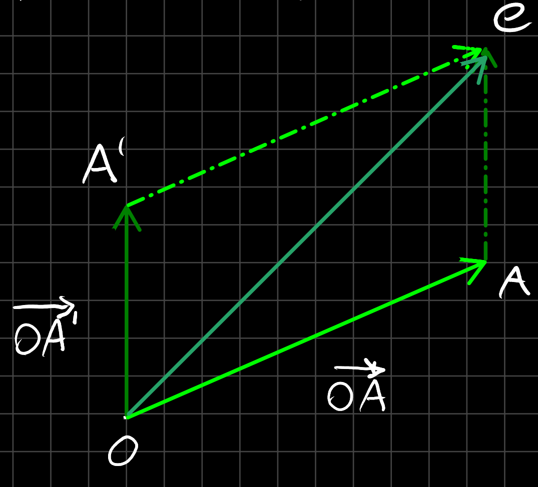
$$f_0 := f(x) = 0 \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad (f(x)^{-1}) := -f(x)$$

Piano Euclideo.

È un classico esempio di spazio vettoriale.

Fissiamo un punto O.

Consideriamo $V = \{$segmenti orientati con primo vertice in $O\}$ (INSIEME DEI VETTORI APPLICATI IN O)



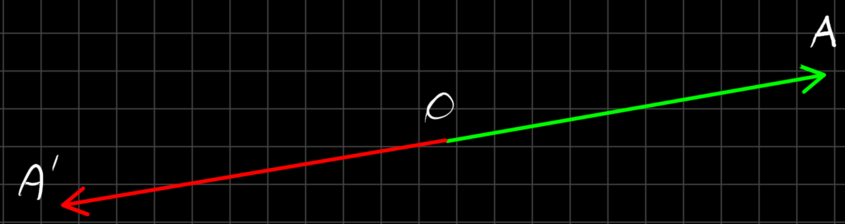
C'è un elemento particolare $\vec{OO}$ che è il vettore nullo.

Il modo migliore per definire la somma tra due vettori è: Preso $\vec{OA}$, prendo poi un segmento con stesso modulo direzione e verso di $\vec{OA'}$ ma con origine A, la retta $\vec{OC}$ è la somma dei segmenti $\vec{OA} + \vec{OA'} = \vec{OC}$

questo metodo funziona anche se i due vettori hanno la stessa direzione.

*L'insieme V dotato di operazione $+ : V \times V = V$ e l'elemento neutro $\vec{OO}$ è un gruppo commutativo.

ogni elemento di V ha un inverso, ogni vettore ha il suo inverso che è un vettore con pari modulo, stessa direzione e verso inverso.



*introduciamo ora una nuova operazione.

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ detta prodotto scalare $| \ (\lambda, \vec{OA}) \to \lambda \vec{OA}$

vediamo a cosa

se $\lambda \geq 0$ direzione e verso rimangono immutati mentre il modulo diventa $\lambda \cdot (\text{modulo } \vec{OA})$

se $\lambda < 0$ direzione rimane la stessa, modulo diventa $\lambda \cdot (\text{modulo } \vec{OA})$, verso diventa opposto

PROP:

Con operazione di somma e prodotto scalare

V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ denotato V_0^2

Sottospazi Vettoriali:

Sia V uno spazio vettoriale e W un sottoinsieme di V. W sarà sottospazio di V, $W \leq V$ se:

1) $\forall \bar{w}, \bar{w}' \in W$, $\bar{w} + \bar{w}' \in W$
2) $\forall \bar{w} \in W, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \bar{w} \in W$

OSS: $\forall \bar{w} \in W$, $-\bar{w} \in W$, $(W,+)$ sottogruppo $(V,+)$

Cioè se W SOTTO SPAZIO DI V $\rightarrow$ W SOTTOGRUPPO DI V.

Prop: dato un sistema lineare omogeneo della forma $A\bar{x} = \bar{0}$, sia $\Sigma_0 = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{y} = \bar{0}\}$, ossia l'insieme di tutte le soluzioni del sistema.

$\rightarrow$ Σ_0 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

Dim:

mostriamo 1 e 2 in ordine.

(1): Siano $\bar{y}$ e $\bar{y}'$ due soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = 0 \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + \dots + \dots + a_{mn}y_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}y'_1 + \dots + a_{1n}y'_n = 0 \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

RISULTA OVVIO CHE:

$$\begin{cases} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n) + (a_{11}y'_1 + \dots + a_{1n}y'_n) = 0 \\ \dots \\ (a_{m1}y_1 + \dots + \dots + a_{mn}y_n) + (a_{m1}y'_1 + \dots + a_{mn}y'_n) = 0 \end{cases}$$

APPLICHIAMO LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA:

$$\begin{cases} a_{11}(y_1 + y'_1) + a_{12}(y_2 + y'_2) + \dots + a_{1n}(y_n + y'_n) = 0 \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

ne concludiamo che $\bar{y}+\bar{y}' \in \Sigma_0$ (1) ▨

(2) sia $\lambda \in \mathbb{R}$

Supponiamo che:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = 0 \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1}y_1 + \dots + \dots + a_{nn}y_n = 0 \end{cases}$$

moltiplichiamo a destra e sinistra per λ

$$\begin{cases} \lambda(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n) = 0 \cdot \lambda \\ \dots \\ \dots \\ \lambda(a_{n1}y_1 + \dots + \dots + a_{nn}y_n) = 0 \cdot \lambda \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \lambda(a_{11}y_1) + \lambda(a_{12}y_2) + \dots + \lambda(a_{1n}y_n) = 0 \\ \dots \\ \dots \\ \lambda(a_{n1}y_1) + \dots + \dots + \lambda(a_{nn}y_n) = 0 \end{cases}$$

APPLICANDO LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA:

$$\begin{cases} a_{11}(\lambda y_1) + \dots + a_{1n}(\lambda y_n) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

se $\bar{y}$ è soluzione, anche $\lambda\bar{y}$ è soluzione.

(2) ▨

Se il sistema non è omogeneo questo non è vero. ▨

$(A\bar{x} = \bar{b})$, $\bar{b} \neq \bar{0}$

Combinazioni lineari

Sia V uno spazio vettoriale, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_k$ un insieme di vettori. Una combinazione lineare è il vettore $\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \dots + \alpha_k\bar{v}_k$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$

Span dato un insieme V di vettori.
Lo span è l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari

- Uno Span è un sottospazio.

$\boxed{\text{OSS:}}$
Lo span di un certo insieme W è uguale allo span di $W \cup \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{v} \dots\}$ se $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{v}\} \subseteq \text{Span}(W)$.

PROP:
Un sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ ammette soluzione $\Longleftrightarrow$ $\bar{b} \in \text{Span}(A^1, A^2, \dots, A^n)$, dove A^J è la J-esima colonna di A