Esercizio 1. Sia $\phi : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi.
1.1. Abbiamo visto che $\text{Im}\phi \equiv \phi(G)$ è un sottogruppo.
Verificare che se G è commutativo allora anche $\text{Im}\phi$ è commutativo.
1.2. Verificare che se $H \le G$ allora $\phi(H) \le G'$. Vi ricordo che $H \le G$ è il simbolo che utilizziamo per enunciare che H è un sottogruppo di G.
1.3. Verificare che

$$\phi^{-1}(1_{G'}) = \{g \in G \,|\, \phi(g) = 1_{G'}\}$$

è un sottogruppo. Esso è chiamato il **nucleo** di ϕ ed è denotato con il simbolo $\text{Ker}\phi$ (da *kernel*, che vuol dire *nocciolo* in Inglese).

1.0) Img ϕ SOTTOGRUPPO?

Img $\phi \subseteq G'$, dobbiamo dimostrare che se Img $\phi \le G' \rightarrow$

$\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1 \cdot g_2^{-1} \in G$

$y_1, y_2 \in \text{Img}\,\phi \longrightarrow \exists\, g_1 | \phi(g_1) = y_1$, $\exists\, g_2 | \phi(g_2) = y_2$

se $y_1, y_2 \in \text{Img}\,\phi \rightarrow y_1, y_2^{-1} \in \text{Img}\,\phi \rightarrow \phi(g_2)^{-1} \in \text{Img}\,\phi$

$(y_1 * y_2^{-1}) \in \text{Img}\,\phi$ dato che è un gruppo, l'operazione di moltiplicazione è chiusa rispetto agli elementi del gruppo.

$(y_1 * y_2^{-1}) = \phi(g_1) * \phi(g_2^{-1}) = \phi(g_1 * g_2^{-1}) \in \text{Img}\,\phi$

1.1) se G è commutativo $\rightarrow g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \;\; \forall g_1, g_2 \in G$

dobbiamo dimostrare che anche Img ϕ è commutativo.

$y_1, y_2 \in \text{Img}\,\phi \rightarrow \exists\, g_1 | \phi(g_1) = y_1$, $\exists\, g_2 | \phi(g_2) = y_2$

$g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \rightarrow \phi(g_1 * g_2) = \phi(g_2 * g_1)$

dato che sono lo stesso elemento $[(g_1 * g_2) = g_3 = (g_2 * g_1)] \longrightarrow$ Dato che ϕ è un omomorfismo

$\phi(g_1 * g_2) = \phi(g_1) * \phi(g_2)$, $\phi(g_2 * g_1) = \phi(g_2) * \phi(g_1)$

$\rightarrow \phi(g_1) * \phi(g_2) = \phi(g_2) * \phi(g_1)$ ∎

1.2) se $H \le G \rightarrow \phi H \le G'$ (VERIFICARE)

$g_1, g_2 \in H \rightarrow g_1, g_2 \in G.$

$\phi : G \to G'$

$\phi : H \to G'$

diamo $\phi H \leq G'$ e verifichiamo che $\forall\ y_1, y_2^{-1} \in \phi H,\ y_1 * y_2^{-1} \in \phi H$

$y_1, y_2 \in \phi H \to \exists\, g_1, g_2 \in H \mid \rho(g_1) = y_1,\ \rho(g_2) = y_2$

$y_1 * y_2^{-1} \in \phi H$ dato che e' un gruppo

$\rho g_1 * \rho g_2^{-1} \in \phi H \to \rho(g_1 * g_2^{-1})$ e questo appartiene a ϕH.

CHIEDI !

1.3) $\phi^{-1}(1_{G'}) = \{ g \in G \mid \phi(g) = 1_{G'} \}$

e' un sottogruppo

se e' un sottogruppo allora $\forall\ a, b \in \phi^{-1}(1_{G'})$

$(a \cdot b^{-1}) \in \phi(1_{G'})$

$a, b \in \phi^{-1}(1_{G'}) \to \exists\, g_1, g_2 \in G \mid \phi(g_1) = a,\ \phi(g_2) = b$

$a = 1_G,\ b = 1_G$

$a * b \in \phi^{-1}(1_{G'})$ PER DEFINIZIONE DI GRUPPO

$a * b^{-1} \in \phi^{-1}(1_{G'})$ SEMPRE PER DEFINIZIONE DI GRUPPO

$\phi(g_1) * \phi(g_2^{-1}) = \phi(g_1) * (\phi(g_2))^{-1} = 1(G') * 1(G') = 1G' \in \phi^{-1}(1G')$