MATRICI A SCALA:

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & & & & & & * \\
\vdots & & & 0 & \cdots & 0 & p_2 & * & \cdots & & & * \\
\vdots & & & \vdots & & & 0 & \cdots & 0 & p_3 & * \cdots & * \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & 0 & \cdots & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & 0 & p_r \; * \cdots & * \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

LEMMA:
Sia $S \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice a scala con r pivot, e poniamo

$$V_r = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; b_1, \dots, b_r \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{SPAN}(e_1, \dots, e_r) \subset \mathbb{R}^m$$

Per $k = 1, \dots, r$ indichiamo con S^{J_k} la colonna della matrice S in cui compare il k-esimo pivot p_k.
$\Rightarrow \mathrm{Im}(S) = V_r$, $\mathrm{rg}(S) = r$ e $\{S^{J_1}, \dots, S^{J_r}\}$ è una base di $\mathrm{Im}(S)$

DIM:

Siccome tutte le colonne di $S \in V_r$ e generano $\mathrm{Im}(S)$ è chiaro che $\mathrm{Im}(S) \subseteq V_r$
È anche evidente che $\mathrm{DIM}(V_r) = r$ quindi occorre dimostrare che $S^{J_1}, \dots, S^{J_k}$ sono indipendenti.

$$\alpha_1 S^{J_1} + \alpha_2 S^{J_2} + \dots + \alpha_r S^{J_r} = 0 \qquad \text{con } \alpha_j \in \mathbb{R}$$

$$\left|\begin{matrix} p_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ \vdots & & & p_r \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{matrix}\right|$$

Che è un sistema triangolare superiore con elementi non nulli sulla diagonale quindi ha un'unica sol $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$

COR:

Sia $S \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice a scala di rango r. Allora il sistema $S\underline{x} = \underline{c}$ ha soluzione $\Leftrightarrow$ le ultime $m-r$ coord sono zero e lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $S\underline{x} = \underline{0}$ ha dimensione $n-r$.

OSS:

La risoluzione all'indietro fornisce sempre le soluzioni del sistema nella forma

$$\underline{v} = \underline{v}^0 + \alpha_{j_1} \underline{w}_1 + \dots + \alpha_{j_{n-r}} \underline{w}_{n-r}$$

dove α_{j_k} sono le var libere

$$\Sigma = \underline{v}^0 + \Sigma_0$$

$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{n-r}$ sono una base di $\mathrm{Ker}(S)$

TEOREMA:

SIA $A\underline{x} = \underline{b}$ UN SISTEMA LINEARE E $S\underline{x} = \underline{c}$ UNA SUA RIDUZIONE IN SCALA, ALLORA:

1) LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI $A\underline{x} = \underline{b}$ COINCIDE CON QUELLO DI $S\underline{x} = \underline{c}$

2) $Ker(A) = Ker(S)$

3) $rg(A) = rg(S)$ [in generale $Im(A) \neq Im(S)$]

4) SIANO $S^{J_1}, \dots, S^{J_r}$ LE COLONNE DEI PIVOT CON $r = rg(S) \Rightarrow \{A^{J_1}, \dots, A^{J_r}\}$ È BASE DI $Im(A)$

DIM (4):

Poiché $rg(A) = rg(S)$ è SUFFICIENTE DIMOSTRARE che $A^{J_1}, \dots, A^{J_r}$ SONO INDIPENDENTI

$$x_1 A^{J_1} + \dots + x_r A^{J_r} = \underline{0} \iff x_1 = x_2 = \dots = 0$$

RIDUCENDO IN SCALA SI OTTIENE proprio $x_1 S^{J_1} + \dots + x_r S^{J_r}$ che ABBIAMO VISTO AVERE SOLO LA SOL NULLA

OSS: I PIVOT NON SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATI DATO che POSSIAMO SCAMBIARE LE RIGHE

OSS: Anche se $rg(A) = rg(S)$, $Im(A)$ PUÒ ESSERE DIVERSO DA $Im(S)$

EQUAZIONI PARAMETRICHE E CARTESIANE:

EQUAZIONI PARAMETRICHE:

DEF:

Una PARAMETRIZZAZIONE LINEARE DI UN SOTTOSPAZIO V DI $\mathbb{R}^n$ è un'APPLICAZIONE LINEARE $L_A: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ TALE che $V = \operatorname{Im}(A)$ con $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$.
In ALTRI TERMINI, V è DESCRITTO COME SPAN DI COLONNE DI A; I VETTORI $\underline{v} \in V$ SARANNO DESCRITTI DA $\underline{v} = t_1 A^1 + \ldots + t_k A^k$. Per cui le EQ. PARAMETRICHE DI $V \leq \mathbb{R}^n$ SONO:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} t_1 + \ldots + a_{1k} t_k \\ \vdots \\ x_n = a_{n1} t_1 + \ldots + a_{nk} t_k \end{cases} \implies \underline{v} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

OSS:

È chiaro che le EQ. PARAMETRICHE NON SONO PER NIENTE UNICHE. Inoltre, $\dim(V) = rg(A) \leq k$ QUINDI IL NUMERO DI PARAMETRI IN UNA SOLA PARAMETRIZZAZIONE POTREBBE ESSERE SUPERIORE ALLA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO SE LE COLONNE DI A NON SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.
DI SOLITO, IN QUESTO CASO, SI SOSTITUISCE AD A UNA MATRICE $\tilde{A}$ DI UGUAL IMMAGINE e $rg(\tilde{A}) = \dim(V)$ OTTENUTA PRENDENDO SOLO LE COLONNE DI A che FORMANO UNA BASE DI V.

EQUAZIONI CARTESIANE:

DATO UN SOTTOSPAZIO $V \subseteq \mathbb{R}^n$ VOGLIAMO DESCRIVERLO COME NUCLEO DI UNA MATRICE $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, CIOÈ DIRE CHE $\underline{x} \in V \iff B\underline{x} = \underline{0}$

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{p1}x_1 + \dots + b_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

DEF:

IL SISTEMA QUI SOPRA RACCOGLIE EQ. CARTESIANE (LINEARI) PER IL SOTTOSPAZIO V, CHE RISULTA ESSERE LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA OMOGENEO DI MATRICE B.

OSS:

COME LE EQ. PARAMETRICHE, NEANCHE LE EQ. CARTESIANE SONO UNICHE.
LA $\dim(V) = \ker(B) = n - rg(B)$ CON $rg(B) \leq p$.
In generale, $n < \dim(V) \leq p$ POICHÉ POTREBBERO ESSERCI DELLE EQUAZIONI "INUTILI".
SOLITAMENTE A B SI SOSTITUISCE UNA MATRICE $\bar{B}$ CON STESSO NUCLEO MA ESATTAMENTE $rg(B)$ RIGHE.

ESEMPIO (PARAMETRICHE $\mapsto$ CARTESIANE):

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 3 & 0 & x_3 \\ 2 & 1 & x_4 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_1+x_2 \\ 0 & 6 & x_3-3x_1 \\ 0 & 5 & x_4-2x_1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 3x_1+6x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 3x_1+5x_2+x_4 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} 1t_1 - 2t_2 = x_1 \\ -1t_2 = x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

QUINDI DUE POSSIBILI EQ. CARTESIANE SONO:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO (CARTESIANE $\mapsto$ PARAMETRICHE):

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = \frac{2}{3}x_4 \end{cases}$$

QUINDI LE EQ PARAMETRICHE SONO:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{11}{6}t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = \frac{2}{3}t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \Rightarrow V = \operatorname{Im}(A) \quad \text{con} \quad A = \begin{vmatrix} 1/2 & -11/6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$