DETERMINANTE:

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

$$\det : M_{n,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$A \longrightarrow \det(A)$$

n! ADDENDI

PARITÀ PERMUTAZIONE

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} (-1)^{\sigma(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$$

ESEMPIO 1:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad S_2 = \{ id ; (1,2) \}$$

$$\det(A) = \sum_{p \in S_2} (-1)^{\sigma(p)} a_{1p(1)} \cdots a_{np(n)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ESEMPIO 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad S_3 = \{ id ; (1,2) ; (1,3) ; (2,3) , (1,2,3) , (1,3,2) \}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

PROPRIETÀ:

PENSIAMO A DET( ) COME UNA FUNZIONE DELLE RIGHE DI $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$

(a) $d(A_1; \dots; A_n) = 0 \iff A_i = A_j$ per qualche $i \neq j$

(b) $d(A_1; \dots; \lambda A_i; \dots; A_n) = \lambda d(A_1; \dots; A_i; \dots; A_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

(c) $d(A_1; \dots; V' + V''; \dots; A_n) = d(A_1; \dots; V'; \dots; A_n) + d(A_1; \dots; V''; \dots; A_n)$

(d) $d(I_n) = 1$

PROP:

SE $d(\dots)$ È UNA QUALSIASI FUNZIONE DELLE RIGHE CHE GODE DI (a,b,c,d) $\Rightarrow$ VALGONO:

i) $d(A_1; \dots; A_n) = 0$ se c'è una riga nulla

ii) $d(A_1; \dots; A_i; \dots; A_j; \dots; A_n) = d(A_1; \dots; A_i + \lambda A_j; \dots; A_j; \dots; A_n)$

iii) $d(A_1; \dots; A_i; \dots; A_j; \dots; A_n) = (-1)\, d(A_1; \dots; A_j; \dots; A_i; \dots; A_n)$

iv) SE S È UNA RIDOTTA DI GAUSS DI $A \Rightarrow$ PER (i) E (iii) VALE

$$d(A) = (-1)^K d(S) = (-1)^K p_1 p_2 \cdots p_n$$

K = NUMERO DI SCAMBI DI RIGHE

OSS:

Se $\tilde{d} : M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è una funzione delle righe che gode di (a, b, c, d)

$\Rightarrow \tilde{d} = d \equiv \det$

OSS:

Le operazioni della riduzione di Gauss possono al più cambiare il segno di d. A meno che, operiamo una sostituzione della riga A_i con $\lambda A_i + \mu A_j$ dove $i \neq j$.
In questo caso d viene moltiplicato per λ

DEF (COMPLEMENTO ALGEBRICO):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Il complemento algebrico di a_{ij} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna

Notazione: A_{ij} ← cancello riga i e colonna j

TEO (LAPLACE):

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$:

complemento algebrico

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

sviluppo secondo le righe

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

sviluppo secondo le colonne

ESEMPIO:

SVILUPPO SECONDO I° RIGA

$$d\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot d\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}\right) + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot d\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}\right) + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot d\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+ (-1)^{1+4} \cdot 0 \cdot d\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = 0 + (-1)^{3} d\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}\right) + 0 + 0$$

$$d\left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{vmatrix}\right) = (-1)^{1+1} \alpha_1 \, d\left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & * & \cdots \\ 0 & \ddots & * \\ \vdots & 0 & \alpha_n \end{vmatrix}\right) = \cdots = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$$

SVILUPPO PRIMA COLONNA

CORR:

A è non singolare, ossia $rg(A) = n \iff d(A) \neq 0$

CORR:

$KER(A)$ è non banale $\iff DET(A) = 0$

Infatti: $Ker(A) = n - rg(A)$

$(\Longrightarrow)$: $Ker(A) \neq \emptyset \Longrightarrow rg(A) < n \Longrightarrow d(A) = 0$

$(\Longleftarrow)$: $DET(A) = 0 \Longrightarrow rg(A) = n \Longrightarrow Ker(A) = n - n = 0$

CORR:

A è invertibile $\iff d(A) \neq 0$

In tal caso $d(A^{-1}) = \dfrac{1}{d(A)}$

Teo Binet:

$A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$

$d(A \cdot B) = d(A) \cdot_{\mathbb{R}} d(B)$

se $d(B) \neq 0 \implies \tilde{d}(A) = \dfrac{d(A \cdot B)}{d(B)}$