Esercizio 2. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Scrivere l'espressione di L_A, $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \ldots.$ Determinare la dimensione del nucleo di L_A. Determinare una base per lo spazio immagine.

1) $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}$

2) $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{5x_3}{2} \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = -\frac{5x_3}{2} \\ x_1 = -\frac{7x_3}{2} \end{cases}$$

x_3 È UN PARAMETRO

$x_3 = b$

UN GENERICO VETTORE APPARTENENTE A $\mathrm{Ker}(T)$ È DEL TIPO $\left(-\frac{7}{2}b, -\frac{5}{2}b, +b\right)$

ESPLICITO RISPETTO A b : $b\left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, 1\right)$

QUESTO È UN SISTEMA DI GENERATORI IN QUANTO GENERA TUTTI I VETTORI DI $\mathrm{Ker}(T)$ ED INOLTRE È LINEARMENTE INDIPENDENTE QUINDI B_1, BASE DI $\mathrm{Ker}(T) = (+7, 5, -2) \Rightarrow \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(T)) = 1$.

- PER IL TEOREMA DELLA DIMENSIONE:

$\mathrm{Dim}(V) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(T)) + \mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(T)) \Rightarrow$

$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(T)) = 3 - 1 = 2$

- POI SO CHE:

$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}(A^1, A^2, A^3) = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{vmatrix}\right)$

I VETTORI $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ E $\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$ SONO TRA LORO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$ UNA BASE DI $Im(T)$, B_1 È

$$B_1 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix} \right\}.$$