Assiomi di Armstrong

R = schema di dipendenze funzionali definite su R.
Definiamo F^A come l'insieme di tutte le dipendenze funzionali ottenibili partendo da F

come è definito F^A?
con gli assiomi di Armstrong.

1) INCLUSIONE $F \subseteq F^A$

   se $(X \to Y) \in F$ allora $(X \to Y) \in F^A$

2) RIFLESSIVITÀ.

   se $Y \subseteq X \subseteq R$ allora $(X \to Y) \in F^A$

3) AUMENTO.

   se $Z \in R$, $X \to Y$ allora $(XZ \to YZ) \in F^A$

4) TRANSITIVITÀ.

   se $X \to Y \wedge Y \to Z$ allora $(X \to Z) \in F^A$

REGOLE SECONDARIE DI ARMSTRONG

5) UNIONE.

   $X \to Y \in F^A \wedge X \to Z \in F^A$ allora $X \to YZ \in F^A$

   Dim.

   Siano $X \to Y$, $X \to Z \in F^A$

   Per l'assioma dell'aumento, si ha che:

se $X \subseteq R$, $X \to Y \in F^A$ allora $XX \to XY = X \to XY \in F^A$

   analogamente:

se $Y \subseteq R$, $X \to Z \in F^A$ allora $XY \to ZY \in F^A$

   per l'assioma della transitività:

   $X \to ZY \in F^A$

6) DECOMPOSIZIONE.

   $Z \subseteq Y$, $X \to Y \in F^A$ allora $X \to Z \in F^A$

   Dim:

   Sia $Z \subseteq Y \subseteq R$ e sia $(X \to Y) \in F^A$

per l'assioma della riflessività si ha che:

$Z \subseteq Y \subseteq R$ allora $Y \rightarrow Z \in F^A$

infine, per l'assioma di transitività:

$X \rightarrow Y \in F^A \wedge Y \rightarrow Z \in F^A$ allora $X \rightarrow Z \in F^A$

7) PSEUDO TRANSITIVITÀ

$X \rightarrow Y \in F^A \wedge WY \rightarrow Z \in F^A$ allora $WX \rightarrow Z \in F^A$

per aumento:

$W \subseteq R, X \rightarrow Y \in F^A$ allora $XW \rightarrow YW \in F^A$

infine per transitività

$XW \rightarrow YW \in F^A \wedge YW \rightarrow Z \in F^A$ allora $XW \rightarrow Z \in F^A$

TEOREMA $F^+ = F^A$

$\boxed{\text{DIMOSTRABILE PER INDUZIONE}}$

Dimostriamo che $F^A \subseteq F^+$

CASO BASE

Poniamo $(X \rightarrow Y) \in F^A$ senza aver applicato gli assiomi di Armstrong.

$X \rightarrow Y \in F^A \Leftrightarrow X \rightarrow Y \in F$

sempre vero

$X \rightarrow Y \in F$ allora $X \rightarrow Y \in F^+$ dato che $F \subseteq F^+$

IP INDUTTIVA

OGNI DIPENDENZA FUNZIONALE in F^A OTTENUTA da F APPLICANDO $K \leq n$ assiomi di Armstrong è anche in F^+

verifichiamo per $n+1$

PASSO INDUTTIVO.

TRE CASI

(CASO 1)

ho $X \rightarrow Y \in F^A$ ottenuto applicando al passo $(n+1)$ l'assioma riflessivo.

$X \to Y \in F^A$ ottenuto applicando ASS. RIFL. allora
$Y \subseteq X \subseteq R$

Se $Y \subseteq X \to$ per ogni istanza legale r allora avrò:
$\forall t_1, t_2 \in r,\ t_1[X] = t_2[X] \to t_1[Y] = t_2[Y]$ quindi
$X \to Y \in F^+$

(CASO 2)

Se ho $X \to Y \in F^A$ ottenuto applicando all'(n+1)esimo passo l'assioma di aumento
allora $\exists\ V \to W \mid X = ZV,\ Y = ZW$ per qualche $Z \subseteq R$
$V \to W \in F^A$ ottenuta applicando $i < (n+1)$ volte gli assiomi di Armstrong quindi $V \to W \in F^+$ per ipotesi induttiva.

Dato che $Z \subseteq Z$
$Z \to Z \in F^+$

per ogni istanza legale r avremo

$$\begin{cases} V \to W \in F^+ \\ Z \to Z \in F^+ \end{cases} \to \begin{cases} \forall t_1, t_2 \in r,\ t_1[V] = t_2[V] \Rightarrow t_1[W] = t_2[W] \\ \forall t_1, t_2 \in r,\ t_1[Z] = t_2[Z] \Rightarrow t_1[Z] = t_2[Z] \end{cases} \to$$

$$\forall t_1, t_2 \in r,\ t_1[VZ] = t_2[VZ] \to t_1[WZ] = t_2[WZ]$$

quindi:
$X \to Y \in F^+$

(CASO 3)