## • Dipendenze Funzionali.

* La dipendenza funzionale $X \xrightarrow{*} Y$ è un vincolo di integrità che impone ad ogni coppia di tuple dell'istanza che:

se $t_1[X] = t_2[X] \rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]$

non è vero che $t_1[Y] = t_2[Y] \rightarrow t_1[X] = t_2[X]$.

(*) ($\rightarrow$) non è un "implica" ma un "determina"

### Istanza Legale

- Dato uno schema R e un insieme di dipendenze funzionali F, un'istanza r si dice legale su F se soddisfa tutte le dipendenze funzionali in F.

### Chiusura di F

- Dato uno schema R e un insieme di dipendenze funzionali F, chiamo $F^+$ l'insieme di dipendenze funzionali soddisfatte da ogni istanza r di R

$F^+ = \{F +$ DIPENDENZE FUNZIONALI SODDISFATTE DA OGNI ISTANZA r DI R$\}$

$F \subseteq F^+$

- Ogni schema ha delle dipendenze banali,

se $Y \subseteq X \subseteq R \rightarrow X \underset{\text{DETERMINA}}{\rightarrow} Y \in F^+$

ESEMPIO:

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ | $A_8$ | $A_9$ | $A_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $t_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $t_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $t_4$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Y

X

$t_1[X] = t_2[X] \rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]$

BANALMENTE VERO...

- Sia F un insieme di dipendenze funzionali su R
Dati $X, Y \in R$, si ha che:

$X \rightarrow Y \in F^+ \Longleftrightarrow \forall \text{ Attributo} \in Y \ (X \rightarrow \text{Attributo} \in F^+)$

ESEMPIO:

$R = \{A, B, C\}$

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ |
| $t_2$ | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | $d_3$ |
| $t_3$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_1$ | $d_{21}$ |

$X = \{C, A\}$

$Y = \{B\}$

Attr. $\in Y = B$, $(X \to B) \in F^+$

- lo stesso succede se prendo $X = \{A\}$, non succede se $X = \{C\}$

Dim.

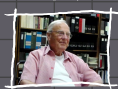
Siano $X, Y \subseteq R$ dove $Y = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k-1}, A_k\}$
data r una qualsiasi istanza di R si ha che:

$$\forall A_i \in Y, (X \to A_i \in F^+) \iff \begin{cases} \forall t_1, t_2 \in r, t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[A_1] = t_2[A_1] \\ \vdots \\ \forall t_1, t_2 \in r, t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[A_k] = t_2[A_k] \end{cases} \iff$$

$$\iff \forall t_1, t_2 \in r, t_1[X] = t_2[X] \text{ allora } t_1[\{A_1, \dots, A_k\}] = t_2[\{A_1, \dots, A_k\}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1[X], t_2[X] \to t_1[Y], t_2[Y]. \quad \square$$

## Assiomi di Armstrong

Sia R uno schema e F un insieme di dipendenze funzionali, $F^A$ è l'insieme di dipendenze funzionali ottenibili applicando ad F i seguenti assiomi (di Armstrong). 

- INCLUSIONE INIZIALE ($F \subseteq F^A$) (NON È UN ASSIOMA DI ARMSTRONG)

$X \to Y \in F \Rightarrow X \to Y \in F^A$

banalmente una dip. funz. se è in F è anche in $F^A$

- RIFLESSIVITÀ

$Y \subseteq X \subseteq R \Rightarrow (X \to Y \in F^A)$

| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 |

$F = \{ X \to Y \}$

$(X \to Y) \in F^A$

se in F ho una dipendenza funzionale del tipo $Y \subseteq X \subseteq R \Rightarrow X \to Y \in F$ e appartiene anche ad $F^A$.

## - AUMENTO

$$Z \subseteq R,\ X \to Y \in F^A \Rightarrow (X \cup Z \to Y \cup Z) \in F^A$$

| | Z | Y | X | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| $t_1$ | 5 | 4 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| $t_2$ | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| $t_3$ | 7 | 4 | 2 | 1 | 0 | 3 |

$Z \subseteq R$

$X \to Y \in F \Rightarrow X \to Y \in F^A$

$\Longrightarrow Z \cup X \to Z \cup Y$

PER A. AUMENTO.

## - TRANSITIVITA'

$$X \to Y \in F^A \text{ And } Y \to Z \in F^A \Rightarrow X \to Z \in F^A$$

## REGOLE SECONDARIE ARMSTRONG

## - UNIONE

$$X \to Y \in F^A \wedge X \to Z \in F^A \Longrightarrow X \to Y \cup Z \in F^A$$

| Y | | | Z | | X | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ | $A_8$ |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 0 | 0 | 3 |

$$X \to Y \wedge X \to Z \Rightarrow X \to (Y \cup Z)$$

Dim:

$(X \to Y), (X \to Z) \in F^A$

SAPPIAMO CHE: $X \subseteq R$ QUINDI:

$X \cup X \to X \cup Z \in F^A$ PER ASSIOMA AUMENTO

$X \cup X \to X \cup Y \in F^A$ //

SAPPIAMO CHE $Y \subseteq R$ QUINDI:

$Y \cup X \to Y \cup X \in F^A$ PER ASSIOMA AUMENTO

$Y \cup X \to Y \cup Z \in F^A$ //

PER ASSIOMA TRANSITIVITÀ, DATO CHE $X \cup X \to X \cup Y \in F^A$ E
$X \cup Y \to Y \cup Z \in F^A \implies$

$\implies X \cup X \to Y \cup Z \Rightarrow X \to Y \cup Z$. $\square$

## -DECOMPOSIZIONE

$Z \subseteq Y, X \to Y \in F^A \Rightarrow X \to Z \in F^A$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Z | Y | X | |
| $A_0$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 0 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 2 |

Dim.

PER L'ASSIOMA DI RIFLESSIVITÀ, DATO CHE: $Z \subseteq Y \subseteq R$

$Y \to Z \in F^A \implies$ PER ASSIOMA TRANSITIVITÀ

DATO CHE: $X \to Y \in F^A \wedge Y \to Z \in F^A \implies X \to Z \in F^A$.

$\square$

## -PSEUDO-TRANSITIVITÀ

$X \to Y \in F^A \wedge W \cup Y \to Z \in F^A \implies W \cup X \to Z \in F^A$

Dim:

$W \subseteq R$

PER ASSIOMA DELL'AUMENTO $(X \cup W) \to (Y \cup W) \in F^A$

DATO CHE: $W \subseteq R \wedge X \to Y \in F^A$

PER ASSIOMA TRANSITIVITA'

DATO CHE: $(X \cup W) \to (Y \cup W) \in F^A$ e $(W \cup F) \to Z \in F^A$

$\Longrightarrow (X \cup W \to Z) \in F^A$ $\square$

## Proprietà.

Dato uno schema R e' un insieme di dipendenze funzionali F su R si ha che:

$$X \to Y \in F^A \Longleftrightarrow \forall A \in Y,\ X \to A \in F^A$$

Dim:

Siano $X, Y \subseteq R$, $Y = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_k\}$.

Per le regole dell' unione:

$\forall A_i \in Y, X \to A_i \in F^A \Rightarrow X \to \{A_1, \dots, A_k\} = Y \in F^A$ $(\Leftarrow)$

Per le regole di decomposizione:

$X \to Y \in F^A \Rightarrow \forall A_i \in Y, X \to A_i \in F^A$ $(\Rightarrow)$ $\square$

## Chiusura di X.

Sia R uno schema relazionale e F un insieme di dipendenze funzionali su R.

Dato $X \subseteq R$, definiamo CHIUSURA DI X RISPETTO A F, indicata con $X_F^+$ (o $X^+$ se c'è un solo insieme di dipendenze funzionali su R).

$$X_F^+ = \{A \in R \mid X \to A \in F^A\}$$

Dove A e' un singolo attributo di R

IN ALTRE PAROLE:

$X_F^+$ e' l'insieme che contiene tutti gli attributi di R che dato $X \subseteq R$, $X \to$ attributo $\in F^A$

ESEMPIO:

| | | | Y | | | X | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ | $A_8$ | $A_9$ | $A_{10}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| ... | ... | ... | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ... | ... | ... | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| ... | ... | ... | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

PER R. DECOMPOSIZIONE:

$X \to Y \Longrightarrow$

$\Rightarrow X \to A_6 \in F^A$

$X \to A_5 \in F^A$

$X \to A_4 \in F^A$

QUINDI:

$$\boxed{X^+ = \{A_6, A_5, A_4\}}$$

## Proprietà

Sia $R$ uno schema relazionale e $F$ un insieme di dipendenze funzionali su $R$.

$X \to Y \in F^A \iff Y \subseteq X^+$

Dim:

$$X \to Y \in F^A \iff \forall A \in Y, X \to A \in F^A \underset{\text{come dire}}{\iff} \forall A \in Y, A \in X^+ \iff Y \subseteq X^+$$

## COROLLARIO

Sia $R$ uno schema relazionale e $F$ un insieme di dipendenze funzionali su $R$.

Dato $X \subseteq R$, si ha che $(X \to X) F^A$ quindi $X \subseteq X^+$.

## 1° TEOREMA

$$F^+ = F^A$$

cioè, la chiusura di $F$ ($F^+$ che è l'insieme di tutte le dipendenze funzionali rispettate da uno schema $R$) e $F^A$ (l'insieme di tutte le dipendenze funzionali ottenibili applicando a $F$ gli assiomi di $A$) SONO LO STESSO INSIEME

Dim:

Dobbiamo dimostrare che $F^+ \subseteq F^A$ (1) e che $F^A \subseteq F^+$ (2)

(1) $F^+ \subseteq F^A$

Dim.

# Dimostriamolo per induzione.

- CASO BASE $n=0$ senza applicare nessun assioma se $X \to Y \in F^A$ significa che: $X \to Y \in F$ e, se $X \to Y \in F \Rightarrow X \to Y \in F^+$
- IP. INDUTTIVA applicando $n$ assiomi di Armstrong a $F$ se $X \to Y \in F^A \Rightarrow X \to Y \in F^+$
- PASSO INDUTTIVO

1) Se l'$n+1$ esimo assioma applicato è l'assioma di riflessività
se ho $X \to Y \in F^A$ è perché $Y \subseteq X \subseteq R$
se $Y \subseteq X \subseteq R \Rightarrow \forall t_1, t_2 \in r$ (legale) $t_1[X], t_2[X] \to t_1[Y], t_2[Y]$
e questa è una dipendenza funzionale su $R$
quindi $X \to Y \in F^+$

2) Se l'$n+1$ esimo assioma applicato è l'assioma di aumento
se ho $X \to Y \in F^A$ è perché $\exists\, W, V, Z \subseteq R \mid W \to V \in F^A$
$X := WZ$, $Y := VZ$
so che $W \to V \in F^A \Rightarrow W \to V \in F^+$
perché ottenuta applicando $n$ assiomi di Armstrong (IP IND.)
Siccome $Z \subseteq Z$ so che $Z \to Z \in F^+$

$$\begin{cases} Z \to Z \in F^+ \\ W \to V \in F^+ \end{cases} \text{quindi} \begin{cases} \forall t_1, t_2 \in r, t_1[Z] = t_2[Z] \Rightarrow t_1[Z] = t_2[Z] \\ \forall t_1, t_2 \in r, t_1[W] = t_2[W] \Rightarrow t_1[V] = t_2[V] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall t_1, t_2 \in r,\ t_1[WZ] = t_2[WZ] \Rightarrow t_1[VZ] = t_2[VZ] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall t_1, t_2 \in r,\ t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \to Y \in F^+$$

3) se l'$n+1$ esimo assioma applicato è l'assioma di transitività. Se ho che $X \to Y \in F^A$ è perché
$\exists\, H \subseteq R \mid X \to H \in F^A, H \to Y \in F^A$ e per queste 2 dipendenze funzionali
$X \to H \in F^A$ e $H \to Y \in F^A$ vale che $X \to H \in F^+ \wedge H \to Y \in F^+$
se $X \to H \in F^+$ e $H \to Y \in F^+ \Rightarrow \begin{cases} X \to H \in F^+ \\ H \to Y \in F^+ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall t_1, t_2 \in r, t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[H] = t_2[H] \\ \forall t_1, t_2 \in r, t_1[H] = t_2[H] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y] \end{cases}$

$\Rightarrow \forall t_1, t_2 \in r \quad t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y] \Rightarrow$
$\Rightarrow X \to Y \in F^+ \Rightarrow F^+ \subseteq F^A$

Dimostriamo ora che:

② $F^A \subseteq F^+$

Dim.

- Sia $X \subseteq R$ e sia $r$ istanza di $R(X^+, R - X^+)$ tale che:

| | $X^+$ | | | | $R - X^+$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | ... | ... | $A_i$ | $A_j$ | ... | ... | $A_n$ |
| $t_1$ | 1 | ... | ... | 1 | 1 | ... | ... | 1 |
| $t_2$ | 1 | ... | ... | 1 | 0 | ... | ... | 0 |

$\Big\} r$

- Dimostriamo che $r$ è una istanza legale.

per non esserlo vuol dire che esiste almeno una dipendenza $(V \to W) \in F$, $(V \to W) \in F^A$ che non soddisfa $r$, vuol dire che vi sono due tuple $t_1, t_2$ uguali su $V$ e diverse su $W$. Questo implicherebbe che $V \subseteq X^+$ e $W \cap (R - X^+) \neq \emptyset$, dal momento che $V \subseteq X^+$ per il lemma è vero che $(X \to V) \in F^A$ e per assioma di transitività $(X \to W) \in F^A$ quindi $W \subseteq X^+$, questo va in contraddizione con le ipotesi quindi $r$ è legale.

- se $X \to Y \in F^+$, è impossibile che $X \to Y \notin F^A$.

Dim:

Supponiamo che ciò sia vero, sappiamo che $r$ è legale quindi se le dipendenze in $F^+$ sono soddisfatte da ogni istanza legale allora $r$ soddisfa $X \to Y$.
Sappiamo che $X \subseteq X^+$, dato che su $R$ ci sono due tuple identiche su $X$, vi devono essere anche due tuple identiche su $Y$, quindi $Y \subseteq X^+$ per il lemma ne consegue che $(X \to Y) \in F^A$ cadendo in contraddizione.

$F^A \subseteq F^+$.

$F^A = F^+$.