

0 IL PROBLEMA DEGLI ACCOPPIAMENTI

Supponiamo di essere invitati ad una festa, a questa festa ci sono n invitati e fuori piove.

Ogni invitato quindi viene con l'ombrello.

A fine festa che probabilità c'è che ognuno non riprenda il suo ombrello?

TRADUCIAMO IL PROBLEMA IN TERMINI MATEMATICI.

$\Omega = \{ \text{permutazioni possibili con } n \text{ persone ed } n \text{ ombrelli} \}$

$$\Omega = \{ w_1, w_2, w_3, \dots, w_n \mid 1 \leq w_i \leq n, \forall i, j, w_i \neq w_j \}$$
$$|\Omega| = \{ n! \}$$

$A = \{ \text{nessuno riprende il suo ombrello} \}$

$$A = \{ w \in \Omega \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} w_i \neq i \}$$

Queste permutazioni sono dette "SENZA PUNTI FISSI"

$A^c = \{ \text{almeno uno riprende il suo ombrello} \}$

Permutazioni con un punto fisso.

$A_1 = \{ \text{permutazioni con } w_1 \text{ fisso} \}$

$A_2 = \{ \text{permutazioni con } w_2 \text{ fisso} \}$

$$|A_1| = |A_2| = (n-1)!$$

$$|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$$

$$\text{quindi } |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k| = (n-k)!$$

$$|A^c| = \bigcup_{k=1}^n A_k = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

$$// = // = // \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (n-i)!$$

$$// = // = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)!$$

$$// = // = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{n!}{(n-i)! i!} (n-i)! = |A^c|$$

$$P(A) = 1 - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{n!}{i!} / n!$$

$$P(A) = 1 - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i!}$$

e se il numero degli invitati tende a
all'infinito $+\infty$?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = 1 - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = 1 - 1 + \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{e}$$

Taylor.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$