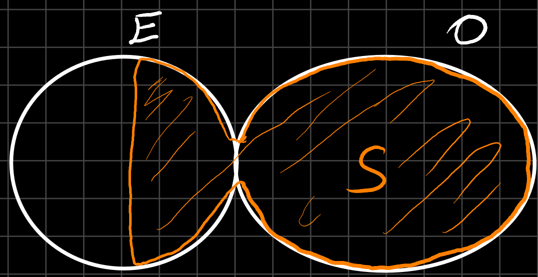
FOGLIO 5

Esercizio 1. È noto che i gemelli possono essere omozigoti, in questo caso sono necessariamente dello stesso sesso, oppure eterozigoti, e in questo caso sono dello stesso sesso nel 50% dei casi. Sia p la probabilità che due gemelli siano omozigoti.

1) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano omozigoti sapendo che sono dello stesso sesso.

2) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano di sesso diverso.

1)



$O = \{ \text{EVENTO NASCITA GEMELLI OMOZIGOTI} \}$

$E = \{ \text{EVENTO NASCITA GEMELLI ETEROZIGOTI} \}$

$S = \{ \text{EVENTO NASCITA GEMELLI DELLO STESSO SESSO} \}$

$p = \mathbb{P}(O)$

$1 - p = \mathbb{P}(E)$

$$\mathbb{P}(O|S) = \frac{\mathbb{P}(O)\,\mathbb{P}(S|O)}{\mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(S|E) + \mathbb{P}(O)\,\mathbb{P}(S|O)} = \frac{p}{(1-p)\frac{1}{2} + p}$$

2)

$$1 - \mathbb{P}(O) \cdot \mathbb{P}(S|O) - \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(S|E)$$

$$1 - p - \frac{1}{2}(1-p)$$

Esercizio 2. In un'urna ci sono tre monete: la prima è equa ed ha testa (T) su di una faccia e croce (C) sull'altra, la seconda ha C su entrambe le facce, la terza ha T su entrambe le facce. Si estrae a caso una moneta dall'urna e la si lancia senza guardare di quale moneta si tratti.

1) Calcolare la probabilità che esca T.

2) Sapendo che la moneta ha reso T, calcolare la probabilità che sull'altra faccia ci sia C.

Supponendo che la moneta abbia reso testa, la si raccoglie e la si lancia nuovamente (senza guardare l'altra faccia della moneta).

3) Calcolare la probabilità di ottenere ancora T.

1)

$E = \{ \text{EVENTO ESCE MONETA CON T\&C} \}$

$D = \{ \text{EVENTO ESCE MONETA CON T\&T} \}$

$L = \{ \text{EVENTO ESCE MONETA CON C\&C} \}$

$T = \{$ EVENTO LA MONETA DA ESITO TESTA $\}$

$C = \{$ // CROCE $\}$

$A = \{$ EVENTO PRESA UNA MONETA DALL'URNA, LA TIRO ED ESCE TESTA $\}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(T|E) + \mathbb{P}(D)\mathbb{P}(T|D) + \mathbb{P}(L)\mathbb{P}(T|L)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

2) $B = \{$ EVENTO SULLA FACCIA OPPOSTA DI UNA MONETA CON ESITO TESTA C'È UNA CROCE $\}$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(E)\cdot\mathbb{P}(T|E) = \frac{1}{6}$$

3) $H = \{$ EVENTO RIOTTENERE TESTA DOPO CHE UNA MONETA HA RESO TESTA $\}$

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(E)\cdot\mathbb{P}(T|E)\mathbb{P}(T|T\cap E) + \mathbb{P}(D)\cdot\mathbb{P}(T|D)\cdot\mathbb{P}(T|T\cap D)$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

Esercizio 3. È stato indetto un referendum in una popolazione di n individui (tutti aventi diritto al voto). Ciascun individuo andrà a votare con probabilità $1/2$, indipendentemente dagli altri. Inoltre, se un individuo andrà a votare, voterà SI con probabilità $1/2$, indipendentemente dagli altri.

1) Calcolare la probabilità che un individuo fissato vada a votare e voti SI.
2) Calcolare la probabilità che il numero di voti SI sia k, $k = 0\ldots, n$.
3) Sapendo che il numero di voti SI è pari a k, calcolare la probabilità che il numero di votanti sia stato m, $m = k, \ldots, n$.

$V = \{$ EVENTO INDIVIDUO VA A VOTARE $\}$

$$\mathbb{P}(V) = p = \frac{1}{2}$$

$S = \{$ EVENTO INDIVIDUO VOTERÀ SI $\}$

$$\mathbb{P}(S) = p = \frac{1}{2}$$

1) $A = \{$EVENTO INDIVIDUO VA A VOTARE E VOTA SÌ$\}$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(V) \cdot \mathbb{P}(S|V) = D \cdot P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2) $Y = \{$EVENTO k INDIVIDUI VOTANO SÌ$\}$

UTILIZZANDO LO SCHEMA DI BERNOULLI:

$$P(Y) = \binom{n}{k} (PD)^k \cdot (1 - PD)^{n-k}$$

VOTA SÌ $\frac{1}{4}$

NON VOTA V VOTA NO $\frac{3}{4}$

3) $N = \{$EVENTO m INDIVIDUI VOTANTI$\}$

$$\mathbb{P}(N) = \binom{m}{k} (PD)^k \cdot P (1 - PD)^{m-k}$$

Esercizio 4. Per $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0, 1)$ si consideri la distribuzione binomiale (numero di teste in n lanci di moneta truccata)

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Dimostrare che $P(k)$ è crescente per $k \leq \bar{k}$ per un oppurtuno $\bar{k} = \bar{k}(n, p)$ (da trovare) e decrescente per $k > \bar{k}$.

$p \neq 1-p$ dato che la moneta è truccata.

CONSIDERIAMO DUE CASI

$P > 1 - P$ e $1 - P > P$

- SE $P > 1 - P$