NOTAZIONE

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$P(X=z) = \sum_{\omega \mid X(\omega)=z} P(\{\omega\})$$

- $p(z) = P(X=z)$

$p : \mathbb{R} \to [0,1] \quad (p = ℑ)$

Distribuzione:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k \leq x} p(k)$$

LINEARITÀ DEL VALORE ATTESO

- $E[aX] = aE[X]$

Dim: $E[aX] = \sum_{\omega \in \Omega} (aX)(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) = a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\})$

$= aE[X]$

$\blacksquare$

- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

Dim: $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) + Y(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$

$= E[X] + E[Y]$

PROPRIETÀ VARIANZA

$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Dim:

$VAR[X] = \sum_{z \in IMG(X)} (z - E[X])^2 \cdot \mathbb{P}(\{z\}) = E[(X - E[X])^2]$

SFRUTTANDO LA LINEARITÀ DEL VALORE ATTESO.

$VAR[X] = E[X^2 - 2X \cdot E[X] + (E[X])^2] = E[X^2] + E[-2X \cdot E[X]] + E[E[X]^2] =$

$E[X^2] - 2E[X](E[X]) + \underbrace{E[(E[X])^2]}$ $=$

EXP DI UNA COSTANTE È LA COSTANTE STESSA.
È COME FARE $E(2) = 2$.

$E[X^2] - 2E[X \cdot E[X]] + (E[X])^2 = E[X^2] - 2(E[X] \cdot E[E[X]]) + (E[X])^2$

$E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2$

$\blacksquare$

Bernulli

VALORE ATTESO (EXP)

$$E[X] = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p$$

VARIANZA

$$VAR[X] = p(1-p)$$

Dim:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - p^2 = 1^2\cdot p + 0^2\cdot(1-p) - p^2 =$$
$$p - p^2 = p(1-p).\ \blacksquare$$

Binomiale

VALORE ATTESO (EXP)

$$E[X] = np$$

Dim.

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k\,p(k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \underset{\substack{\text{CAMBIO}\\\text{INDICE SOMMATORIA}}}{=} 0 + \sum_{k=1}^{n} k\cdot p(k)$$

DATO CHE:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k\cdot(1-p)^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}\cdot p\cdot(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}p\cdot(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}\cdot(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \rightarrow \left(\text{perché } n-1-k+1=(n-k)\right)$$

(Sostituisco $k-1$ con j e $n-1$ con m.) $\longrightarrow$ Dim. sotto $\downarrow$ (VARIANZA)

$$= np\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{(n-1-j)}$$

$$= np\cdot\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}p^j(1-p)^{(m-j)} = np(p+1-p)^m = \boxed{np}\ \blacksquare$$

Dim. Alternative.

$$E(x) = \sum_{k=0}^{m} k \cdot p(k) = \sum_{k=0}^{m} k \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esimo lancio è testa} \\ 0 & \text{se l'i-esimo lancio è croce} \end{cases}$$

sfruttando la linearità del valore atteso $\left(E(x+y) = E(x) + E(y)\right)$

$$E(x_i) = p = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p)$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{m} E(x_i) = \sum_{i=1}^{m} p = mp. \quad \blacksquare$$

VARIANZA

$$VAR[x] = mp(1-p)$$

$$VAR[x] = E[x^2] - (E[X])^2$$

TROVIAMO $E[x^2] = \sum_{k=0}^{m} k^2 \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} k \cdot k \binom{m}{p} \dots$

DATO CHE $k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1}$

$$= \sum_{k=1}^{m} k \cdot m \binom{m-1}{k-1} p^{k-1} p (1-p)^{(m-1)-(k-1)}$$

DATO CHE $\longrightarrow (m-k) = (m-1)-(k-1)$

$$= mp \sum_{k=1}^{m} k \binom{m-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(m-1)-(k-1)}$$

SOSTITUIAMO $m = m-1$ e $J = k-1$

$$mp \cdot \sum_{J=0}^{1+m} \underbrace{(J+1)}_{k} \binom{m}{J} p^J (1-p)^{m-J}$$

$m+1 = m$ perché $m = (m-1)$

andando a sostituire $m+1$ nella sommatoria avremo

$(m+2)\binom{m}{m+1} p^{m+1} (1-p)^{-1}$

dove $\binom{m}{m+1} = 0$

perché è impossibile creare una combinazione di con più elementi di quelli disponibili

$$= mp \sum_{J=0}^{m} J \binom{m}{J} p^J (1-p)^{m-J} + 0$$

SEMPRE PER

$$+ mp \sum_{J=0}^{m} \binom{m}{J} p^J (1-p)^{m-J} + 0$$

$$E[X^2] = np\left(\sum_{J=0}^{m}\binom{m}{J}p^J(1-p)^{m-J} + \sum_{J=0}^{m}J\binom{m}{J}p^J(1-p)^{m-J}\right)$$

$$= np\,(1 + E[Y])$$

perché $\sum_{J=0}^{m}\binom{m}{J}p^J\cdot(1-p)^{m-J} = 1$ dato che è la somma delle probabilità di tutti i casi di un evento.

$$= np\,(1 + mp)$$

$$np\,(1 + (n-1)\,p)$$

$$np\,(1 + np - p)$$

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = np(1+np-p) - (np)^2 =$$

$$np + (np)^2 - np(p) - np^2 = np - np(p) =$$

$$\boxed{np(1-p)}$$

Geometrica

La variabile aleatoria geometrica si comporta in maniera simile alla binomiale, sia $\Omega = \{0,1\}^N$ ossia una string binaria di caratteri infiniti lo spazio degli eventi, X la nostra variabile aleatoria Geometrica $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ e questa variabile aleatoria restituisce l'i-esima cifra della stringa dove per la prima volta compare 1.

DISTRIBUZIONE

$$\mathbb{P}(X = K) = \underbrace{(1-p)^{K-1}}_{K-1 \text{ FALLIMENTI}} \cdot \underbrace{p}_{\text{PRIMO SUCCESSO.}}$$

questa variabile è chiamata geometrica perché la probabilità K tendendo ad infinito fa tendere la probabilità che testa esce al K-esimo lancio, ad infinito.

INFATTI:

$\mathbb{P}\{$TESTA ESCE PRIMA O DOPO!$\}$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{K=1}^{\infty} X=K\right) = \left(\sum_{K=1}^{\infty}(1-p)^{K-1}\cdot p\right) = \left(p\cdot\sum_{K=1}^{\infty}(1-p)^{K-1}\right)$$

$$p\cdot\boxed{\sum_{H=0}^{\infty}(1-p)^{H}} = p\cdot\frac{1}{1-1-p} = 1$$

ho posto $h = K+1$

SERIE NOTEVOLE.

VALORE ATTESO.

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Dim:

$$E(X) = \sum_{K=1}^{+\infty} K\cdot p(1-p)^{K-1} \Rightarrow p\sum_{K=1}^{+\infty} K\cdot(1-p)^{K-1}$$

PONGO $1-p=q$

$$p\cdot\sum_{K=1}^{+\infty}\underbrace{K\cdot q^{K-1}}_{\text{DERIVATA DI } q^K} \Rightarrow p\cdot\sum_{K=0}^{+\infty}\underbrace{\frac{d}{dq}}_{\text{DERIVATA DI.}}q^K \Rightarrow p\cdot\frac{d}{dq}\sum_{K=0}^{+\infty}q^K$$

$$\Rightarrow p\cdot\frac{d}{dq}\frac{1}{(1-q)} \Rightarrow p\cdot\frac{1}{(1-q)^2} = p\cdot\frac{1}{1-1-p} = \frac{1}{p}$$

PERDITA DI MEMORIA VARIABILE GEOMETRICA.

DIMOSTRIAMO ORA CHE NON AVERE OTTENUTO NESSUNA CROCE PER N LANCI NON INFLUENZA IL FATTO DI OTTENERLE NEI SUCCESSIVI M LANCI.
PARTIAMO CON LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE DI SOPRAVVIVENZA.

$G(n) = \mathbb{P}\{$NON OTTENERE CROCE IN N LANCI$\} =$

$$P(X>n) = (1-p)^n$$

Dim.

$$\mathbb{P}(X>n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) = \left(\text{PONGO } h = k-n-1\right)$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} p\cdot(1-p)^{k-1} = \sum_{h=0}^{\infty} p\cdot(1-p)^{h+n} = p\cdot(1-p)^n\cdot\sum_{h=0}^{\infty}(1-p)^h =$$

$$p\cdot(1-p)^n\frac{1}{\cancel{1-1}-p} = (1-p)^n \qquad \blacksquare$$

tiro poi la moneta oltre l volte finché non esce testa

$$\mathbb{P}(X=n+l \mid X>n) = \frac{\mathbb{P}(X=n+l, X>n)}{P(X>n)}$$

$=$ dato che $l>0$ $\quad \mathbb{P}(X=n+l, X>n) = \mathbb{P}(X=n+l)$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{P}(X=n+l)}{P(X>n)} = \frac{\mathbb{P}(X=n+l)}{(1-p)^n} = \frac{(1-p)^{n+l}p}{(1-p)^n} =$$

$$\frac{\cancel{(1-p)^n}(1-p)^{l-1}p}{\cancel{(1-p)^n}} = \mathbb{P}(X=l).$$

$\blacksquare$

abbiamo dimostrato che la probabilità di ottenere testa non dipende dagli esiti precedenti

Variabile aleatoria binomiale negativa (Pascal.)

Adesso consideriamo una nuova variabile aleatoria $X^{(2)} = \{$ lancio in cui è uscito croce una seconda volta $\}$.
Cioè una volta che ho ottenuto una croce, ritiro le monete finché non riesce croce.
La distribuzione di tale variabile sarà

$P(X^2 = k)$ (con $k \geq 2$ dato che non può ottenere al primo lancio) $= p^2 \cdot (1-p)^{k-2} \underbrace{(k-1)}_{\text{POSIZIONI OCCUPABILI DALLA PRIMA CROCE.}}$

$\tilde{X}$ = nuova variabile aleatoria geometrica il cui valore è il numero di lanci fra la prima e la seconda croce.
Possiamo dire che il valore atteso $E(X^2)$ sfruttando la linearità del valore atteso sia

$$E(X^2) = E(X) + E(\tilde{X}) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}.$$

* VERIFICHIAMO ORA CHE SONO INDIPENDENTI FRA LORO.
Due variabili aleatorie sono indipendenti se la loro intersezione è uguale al loro prodotto.

$$P(X=k, \tilde{X}=h) = p \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p\,(1-p)^{h-1} = (P(X=k)) \cdot (P(\tilde{X}=h))$$

- il caso generale $X^{(n)}$ è detta variabile binomiale negativa.
La sua distribuzione vale

$$P(X^{(h)}=k) = \binom{k-1}{h-1} \cdot p^{h-1} \cdot (1-p)^{k-h} \cdot p$$

$P(X^{(h)}=k) = \{$ ci sono state $h-1$ teste in $k-1$ lanci e il k-esimo lancio è testa $\}$.

$E(x^{(h)}) = \frac{h}{p}$ parché $\sum_{i=0}^{h} E(x^{(i)}) = h \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$