o IL PROBLEMA DEGLI ACCOPPIAMENTI

Supponiamo di essere invitati ad una festa, a questa festa ci sono n invitati e fuori piove. Ogni invitato quindi viene con l'ombrello.
A fine festa che probabilità c'è che ognuno non riprende il suo ombrello?

TRADUCIAMO IL PROBLEMA IN TERMINI MATEMATICI.

$\Omega = \{$permutazioni possibili con n persone ed n ombrelli$\}$

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n \mid 1 \le \omega_i \le n, \forall i,j, \omega_i \ne \omega_j \}$$

$$|\Omega| = \{ n! \}$$

$A = \{$nessuno riprende il suo ombrello$\}$

$$A = \{ \omega \in \Omega \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ \omega_i \ne i \}$$

Queste permutazioni sono dette "SENZA PUNTI FISSI"

$A^c = \{$almeno uno riprende il suo ombrello$\}$

Permutazioni con un punto fisso.

$A_1 = \{$permutazioni con ω_1 fisso$\}$

$A_2 = \{$permutazioni con ω_2 fisso$\}$

$$|A_1| = |A_2| = (n-1)!$$

$$|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$$

quindi $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots A_k| = (n-k)!$

$$|A^c| = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 < i_1 < i_2 \le \dots < i_k < n} (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k)$$

$$// = // = // \sum_{1 < i_1 < i_2 \le \dots < i_k < n} (n-i)!$$

$$// = // = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)!$$

$$// = // = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{n!}{\cancel{(n-i)!}\, i!} \cancel{(n-i)!} = |A^c|$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{n!}{i!} \Big/ n!$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i!}$$

e se il numero degli invitati tendesse a diventare $+\infty$?

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \frac{1}{i!} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A) = \cancel{1 - 1} + \boxed{\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i}}{i!}} = \frac{1}{e}$$

Taylor.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$