Esercizio 1. Un dado equo viene lanciato finché non esce 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

1) Calcolare $\mathbb{P}(T=3, X=5)$.

2) Calcolare la distribuzione di T.

3) Calcolare la distribuzione di X.

4) Dire, giustificando la risposta, se sono variabili aleatorie T e X sono indipendenti.

1) $\mathbb{P}(T=3) = (1-p)^2 \cdot p$ $\qquad (1-p) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}(X=5) = \frac{1}{6}$ $\qquad p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2) $\mathcal{J}(T=t) = (1-p)^{t-1} p$

3) $\mathcal{J}(X=x) = \frac{1}{2} \; \forall x \in \mathrm{Im} X$

4) $\mathbb{P}((T=t) \wedge (X=x)) = \mathbb{P}(T=t) \cdot \mathbb{P}(X=x)$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{t-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \qquad = \left(\frac{2}{3}\right)^{t-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

Esercizio 2. Siano X_1, X_2 variabili aleatorie indipendenti uniformi in $\{1, \ldots, n\}$.

1) Calcolare la distribuzione di $X_1 + X_2$.

2) Calcolare il valore di attesa di $X_1 + X_2$.

3) Calcolare la varianza di $X_1 + X_2$.

1) X_1, X_2 VARIABILI INDIPENDENTI.

$\mathcal{J}(X_1 + X_2) = ?$

? :^

Esercizio 3. Quante volte bisogna lanciare – in media – un dado equo per vedere apparire tutte le faccie?

T = VARIABILE A. GEOM. = numero di lanci per vedere la 1' faccia

$\mathcal{J}(T=t) = (1) \qquad E(T) = 1$

K = VARIABILE A. GEOM. = numero di lanci per vedere la 2' faccia

$\mathcal{J}(K=k) = \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \qquad E(K) = \frac{6}{5}$

F = VAR. A. GEOM. = numero di lanci per vedere la 3' faccia

$\mathcal{J}(F=f) = \left(\frac{2}{6}\right)^{f-1} \cdot \left(\frac{4}{6}\right), \quad E(F) = \frac{6}{4}$

G = VAR. A. GEOM. = numero di lanci per vedere la 4' faccia

$\mathcal{J}(G=g) = \left(\frac{3}{6}\right)^{g-1} \cdot \left(\frac{3}{6}\right), \quad E(G) = \frac{6}{3}$

H = VAR. A. GEOM. = numero di lanci per vedere la 5' faccia

$\mathcal{J}(H=h) = \left(\frac{4}{6}\right)^{h-1} \cdot \left(\frac{2}{6}\right), \quad E(H) = \frac{6}{2}$

J = VAR. A. GEOM. = numero di lanci per vedere la 6' faccia

$\mathcal{J}(J=j) = \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right), \quad E(J) = 6$

X = VAR. A = numero di lanci per vedere le 6 faccie

$$E(X) = E(T) + E(K) + E(F) + E(G) + E(J) + E(H)$$

$$E(X) = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + 2 + 3 + 6 = 12 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} = \frac{120+12+15}{10}$$

$$= \frac{147}{10} = \boxed{14,7}$$

Esercizio 4. Il tempo di rottura del componente C_i è descritto dalla variabile aleatoria T_i, $i = 1, \dots, k$. Si assuma che le variabili aleatorie $T_1, \dots, T_k$ siano indipendenti e che $T_i \sim \mathrm{Geom}(p)$ con $p \in (0,1)$, $i = 1, \dots, k$.

1) Trovare la distribuzione del tempo di rottura per il circuito C_{ser} ottenuto mettendo in serie i componenti C_1, ..., C_k.

2) Trovare la distribuzione del tempo di rottura per il circuito C_{par} ottenuto mettendo in parallelo i componenti C_1, ..., C_k.

SE IN UN CIRCUITO SI COLLEGANO DEI COMPONENTI IN SERIE, LA ROTTURA DI UNO INFLUISCE SUL MALFUNZIONAMENTO DEGLI ALTRI, QUESTO NON SUCCEDE SE I COMPONENTI SONO COLLEGATI IN PARALLELO

1) Y = VARIABILE A TEMPO ROTTURA CIRCUITO C_{ser}

IN QUESTO CASO BASTA CHE SI ROMPA UN SINGOLO COMPONENTE PER ROMPERE TUTTO IL CIRCUITO.

PROBABILITÀ CHE IL COMPONENTE C_1 NON SI ROMPA ENTRO y "SECONDI" $=$

$=(1-p)^y$ DATO CHE LE VARIABILI A. $T_1 \dots T_k$ SONO INDIPENDENTI.

PROBABILITÀ CHE I COMPONENTI $(C_1, \dots, C_k)$ NON SI ROMPANO ENTRO y "SECONDI" È: $\left[(1-p)^y\right]^k$

DOPO y "SECONDI" UNO TRA I COMPONENTI $(C_1, \dots, C_k)$ SI ROMPE CON PROBABILITÀ p.

$$\Rightarrow (Y=y) = \left[(1-p)^y\right]^k \cdot p$$

2) X = VARIABILE A. BIN. NEG TEMPO ROTTURA CIRCUITO C_{par}

STRINGA INFINITA DOVE GLI 1 INDICANO ROTTURA COMPONENTE.

ES:

0010000101. CON $k=3$

$$\mathcal{L}(X^{(k)} = x) = p^k (1-p)^{x-k} \cdot \underbrace{(x-1)}_{\text{modi per posizionare il primo 1 nella stringa}} \cdot \underbrace{(x-2)}_{\text{modi per posizionare secondo 1 nella stringa}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(x-k)}_{[\dots]}$$

$$\mathcal{L}(X^{(k)} = x) = p^k (1-p)^{x-k} \cdot \prod_{i=1}^{k} (x-i)$$

Esercizio 5)