NOTAZIONE

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$P(X=z) = \sum_{\omega \mid X(\omega)=z} P(\{\omega\})$$

- $p(z) = P(X=z)$

$p : \mathbb{R} \to [0,1] \quad (p = \mathfrak{J})$

LINEARITÀ DEL VALORE ATTESO

- $E[aX] = aE[X]$

Dim: $E[aX] = \sum_{\omega \in \Omega} (aX)(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) = a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\})$

$= aE[X]$

$\blacksquare$

- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

Dim: $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) + Y(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$

$= E[X] + E[Y]$

PROPRIETÀ VARIANZA

$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Dim:

$$VAR[X] = \sum_{z \in IMG(X)} (z - E[X])^2 \cdot \mathbb{P}(\{z\}) = E[(X - E[X])^2]$$

$$VAR[X] = E\Big[\underbrace{X^2 - 2X \cdot E[X] + (E[X])^2}_{\text{SFRUTTANDO LA LINEARITÀ DEL VALORE ATESO.}}\Big] = E[X^2] + E[-2X \cdot E[X]] + E[E[X]^2] =$$

$$E[X^2] - 2E[X](E[X]) + \underbrace{E[(E[X])^2]}_{\text{EXP DI UNA COSTANTE È LA COSTANTE STESSA. È COME FARE } E(2)=2.} =$$

$$E[x^2] - 2E[X \cdot E[X]] + (E[X])^2 = E[X^2] - 2(E[X] \cdot E[E[X]]) + (E[X])^2$$

$$E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

$\blacksquare$

Bernoulli

VALORE ATTESO (EXP)

$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

VARIANZA

$$VAR[X] = p(1-p)$$

Dim:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - p^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 =$$
$$p - p^2 = p(1-p).$$

Binomiale

VALORE ATTESO (EXP)

$$E[X] = np$$

Dim.

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k\,p(k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \underset{\text{CAMBIO INDICE SOMMATORIA}}{=} 0 + \sum_{k=1}^{n} k \cdot p(k)$$

DATO CHE:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} \cdot p \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} p \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \rightarrow \left(\text{perché } n-1-k+1 = (n-k)\right)$$

(Sostituisco $k-1$ con j e $n-1$ con m.) → Dim. sotto ↓ (VARIANZA)

$$= np \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1-j)}$$

$$= np \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{(m-j)}} = np\left(p+1-p\right)^m = \boxed{np}$$

Dim. Alternative.

$$E(x) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p(k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ se l'iesimo lancio è testa} \\ 0 \text{ se l'iesimo lancio è croce} \end{cases}$$

sfruttando la linearità del valore atteso $\left(E(x+y) = E(x) + E(y)\right)$

$$E(x_i) = p = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p)$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np. \quad \blacksquare$$

VARIANZA

$$VAR[x] = np(1-p)$$

$$VAR[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

TROVIAMO $E[x^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k \binom{n}{p} \ldots$

DATO CHE $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} p (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

DATO CHE $\longrightarrow (n-k) = (n-1)-(k-1)$

$$= np \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

SOSTITUIAMO $m = n-1$ e $J = k-1$

$$np \sum_{J=0}^{1+m} (J+1) \binom{m}{J} p^J (1-p)^{m-J}$$

$m+1 = n$ perché $m = (n-1)$

andando a sostituire $m+1$ nella sommatoria avremo

$$= np \sum_{J=0}^{m} J \binom{m}{J} p^J (1-p)^{m-J} + 0 \xrightarrow{\text{SEMPRE PER}}$$

$$+ np \sum_{J=0}^{m} \binom{m}{J} p^J (1-p)^{m-J} + 0$$

$$(m+2)\binom{m}{m+1} p^{m+1} (1-p)^{-1}$$

dove $\binom{m}{m+1} = 0$

perché è impossibile creare una combinazione di con più elementi di quelli disponibili

$$E[X^2] = np\left(\sum_{J=0}^{m}\binom{m}{J} p^J (1-p)^{m-J} + \sum_{J=0}^{m} J\binom{m}{J} p^J (1-p)^{m-J}\right)$$

$$= np\left(1 + E[Y]\right)$$

perché $\sum_{J=0}^{m}\binom{m}{J} p^J \cdot (1-p)^{m-J} = 1$ dato che è la somma delle probabilità di tutti i casi di un evento.

$$= np(1 + mp)$$

$$np(1 + (m-1)p)$$

$$np(1 + mp - p)$$

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = np(1 + np - p) - (np)^2 =$$

$$np + (np)^2 - np(p) - np^2 = np - np(p) =$$

$$\boxed{np(1-p)}$$

Geometrica