Misura di moto uniformemente accelerato mediante piano inclinato

(1)

Obiettivi: misure di moto rettilineo uniformemente accelerato (con basso coeff. d'attrito) e stima di $\boxed{g}$

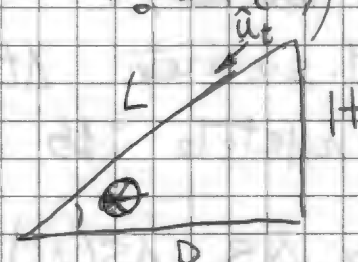
(Illustrare materiali e strumenti utilizzati) → ricordare che la macchinina costa 100 €

Fondamenti teorici:

In assenza di attrito, il moto di un oggetto lungo un piano inclinato è uniformemente accelerato:

$$S = S_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \qquad (t_0 = 0 \rightarrow v_0 = v(t_0))$$

$$a = g \sin\alpha = g \frac{H}{L}$$



in presenza di attrito radente

$$\vec{F}_k = -\mu_k m g \cos\theta \, \hat{u}_t$$

$$\Rightarrow a = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$$

Descrizione dell'esperimento

a) Regolate l'inclinazione, scegliendo un angolo non troppo grande, e verificate che non ci sia pendenza laterale. Quindi valutate l'angolo α misurando H, L e D

b) Sul p.i. sono poste 2 fotocellule che dovete collegare allo "Smart Timer" (ST):
Fissate quella più in alto a ~10 cm dalla sommità (S_0) e collegate il relativo cavo al canale 1 dello ST.
Fissate il 2° sensore a una certa distanza S_1 dal primo (x es. 8 cm) e misurate ΔS con errore $\Delta S_1 = S_1 - S_0$. Collegate il cavo al canale 2 dello ST.
E distanza tra i 2 sensori

c) Dopo aver acceso ST, lasciate scendere il carrello lungo la rotaia (avendo cura di fermarlo prima del fondo, dopo il passaggio dei 2 sensori).
Misurerete $\Delta t = t_1 - t_0$
→ ripetete 15 volte ⇒ $\overline{\Delta t_1}$, con $\delta \overline{\Delta t_1} = \frac{\Delta t_{max} - \Delta t_{min}}{2}$

$$\Rightarrow \Delta S_1 = \Delta S_1(\Delta t) = \frac{1}{2} a \Delta t_1^2 + v_0 \Delta t_1$$

d) Spostate più giù il 2° sensore, di ~10 cm, tenendo fisso il primo (S_0), alla posiz. S_2, e misurate $\Delta S_2 = S_2 - S_0$

e) Lasciate scendere il carrello → $\Delta t_2 = t_2 - t_0$
× 10 volte

f) Ripetete le operazioni d) e e) almeno 7-8 volte, ogni volta spostando solo il 2° sensore (in modo da mantenere fisso v_0) di una decina di cm.

g) raccogliete in una tabella ($\overline{\Delta t_i}$, ΔS_i) le coppie di misure

(2)

$\Rightarrow$ Vi aspettate di trovare la relazione

$$\Delta S_i = \frac{1}{2} a \Delta t_i^2 + v_0 \Delta t_i$$

Questo sarebbe vero se tutte le coppie di valori misurati seguissero esattamente l'andamento parabolico. Negli esperimenti reali i valori misurati in genere non seguono esattamente

FIT PARABOLICO

Noi vogliamo trovare i valori di a e v_0 per cui la parabola $\Delta S = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + v_0 \Delta t$ meglio interpola i punti sperimentali $(\Delta t_i, \Delta S_i)$ (ovvero ci si avvicina il + possibile)

$$\Rightarrow y(x_i) = \alpha x_i^2 + \beta x_i \stackrel{?}{=} y_i \quad \text{con } \alpha = \frac{1}{2} a, \ \beta = v_0$$

$y_i = \Delta S_i$, $x_i = \Delta t_i$

Introduco funzione $D(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha \Delta t_i^2 + \beta \Delta t_i - \Delta S_i\right)^2$ e cerco i valori α, β per cui D sia minima, cioè chiedo di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow 2 \sum_i \left[x_i^2 \left(\alpha x_i^2 + \beta x_i - y_i \right) \right] = 0 \\ \dfrac{\partial D}{\partial \beta} = 0 \rightarrow 2 \sum_i \left[x_i \left(\alpha x_i^2 + \beta x_i - y_i \right) \right] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \sum_i x_i^4 + \beta \sum_i x_i^3 = \sum_i (x_i^2 y_i) \\ \alpha \sum_i x_i^3 + \beta \sum_i x_i^2 = \sum_i (x_i y_i) \end{cases}$$

Soluz.:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum_i x_i^2 y_i & \sum_i x_i^3 \\ \sum_i x_i y_i & \sum_i x_i^2 \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \sum_i x_i^4 & \sum_i x_i^3 \\ \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_i x_i^4\right) - \left(\sum_i x_i^3\right)^2$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left[\left(\sum_i x_i^2 y_i\right)\left(\sum_i x_i^2\right) - \left(\sum_i x_i y_i\right)\left(\sum_i x_i^3\right) \right]$$

$$\beta = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \Sigma_i x_i^4 & \Sigma_i x_i^2 y_i \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma_i x_i y_i \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[\left(\Sigma_i x_i^4\right)\left(\Sigma_i x_i y_i\right) - \left(\Sigma_i x_i^3\right)\left(\Sigma_i x_i^2 y_i\right)\right]$$

$\boxed{\text{Come valutare le incertezze:}}$

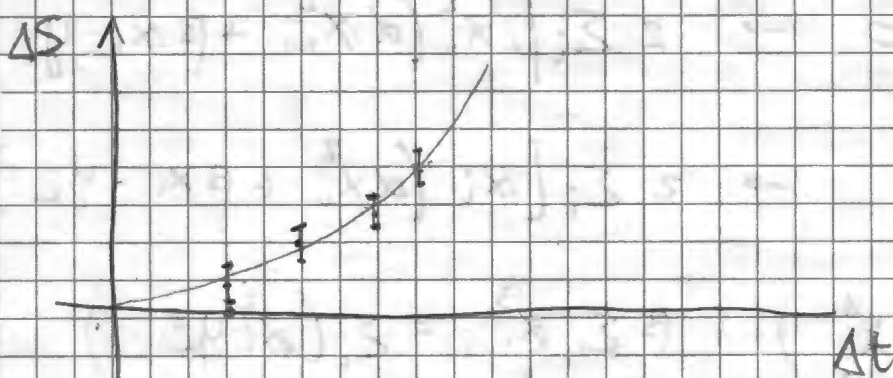
$$\delta y_i^2 \;\; \sigma_y^2 = \frac{1}{N-2} D(\alpha,\beta) = \frac{1}{N-2}\Sigma_i\left(\alpha x_i^2 + \beta x_i - y_i\right)^2$$

x calcolare σ_α^2, σ_β^2, usiamo la propag. errori ignorando (x semplicità) l'errore in x_i (cioè in Δt_i)

$$\delta\alpha^2 = \sum_k \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y_k}\right)^2 \cdot \sigma_y^2 = \sigma_y^2 \times \frac{1}{\Delta}\Sigma_k x_k^2$$

$$\delta\beta^2 = \sum_k \left(\frac{\partial\beta}{\partial y_k}\right)^2 \sigma_y^2 = \sigma_y^2 \times \frac{1}{\Delta}\Sigma_k x_k^4$$

(vuol dire che assumiamo $\delta(\Delta t) \ll \sigma_y$ (semplifica)



$\Rightarrow$ Confrontate il risultato ottenuto:

$$\alpha = \frac{1}{2} a$$

Con il valore atteso per a in assenza di attrito:

$$2\alpha = a = g \sin\theta = g \frac{H}{L} \quad \text{e ricavatevi } g = \left(\frac{2\alpha L}{H}\right) \pm \sigma_g$$

c'è corrispondenza con il valore atteso $g = 9,8\ m/s^2$?

Se invece assumiamo la presenza di attrito

$$\Rightarrow a = g \sin\theta - \mu_k g \cos\theta$$

$$= g\frac{H}{L} - \mu_k g \frac{D}{L} = \frac{g}{L}\left(H - \mu_k D\right)$$

quale valore otteniamo x μ_k?

x σ_g usare propag. errori:

$$\delta H = \delta L = \delta D = \epsilon$$

$$\sigma_g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial L}\right)^2 \delta^2 L + \left(\frac{\partial g}{\partial H}\right)^2 \delta^2 H$$

$$= g^2 \left[\frac{\sigma_\alpha^2}{\alpha^2} + \frac{\delta^2 L}{L^2} + \frac{\delta^2 H}{H^2}\right]$$

$$\mu_k = \frac{1}{D}\left[H - \frac{2\alpha L}{g}\right] = \tg\theta - \frac{2\alpha}{g}\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\delta^2 \mu_k = \left[\left(\frac{\partial \mu_k}{\partial D}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial H}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial L}\right)^2\right] \epsilon^2 + \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial g}\right)^2 \sigma_g^2$$

$$= \frac{\epsilon^2}{D^2}\left[\mu_k^2 + 1 + \frac{4\alpha^2}{g^2}\right] + \frac{4L^2\alpha^2}{D^2 g^2}\left(\frac{\sigma_\alpha^2}{\alpha^2} + \frac{\sigma_g^2}{g^2}\right)$$