PianoInclinato_v3.0

March 21, 2017

0.0.1 Squadra X / 21 marzo 2017

- ** Nome studente 1 (matr. XXX)**
- ** Nome studente 2 (matr. XXX)**
- ** Nome studente 3 (matr. XXX)**
- ** Nome studente 4 (matr. XXX)**

0.1 Determinazione dell'accelerazione di gravità mediante misure di moto uniformemente accelerato lungo un piano inclinato

0.1.1 Scopo dell'esperienza

1. Verifica della legge oraria del moto uniformemente accelerato:

$$s(t) = s_{\text{in}} + v_{\text{in}}(t - t_{\text{in}}) + \frac{1}{2}a\,(t - t_{\text{in}})^2$$

2. Verifica della dipendenza lineare tra l'accelerazione del carrello e l'inclinazione del piano.

3. Calcolo dell'accelerazione di gravità g e del coefficiente di attrito $_k$.

0.1.2 Materiali e strumenti utilizzati

- rotaia rettilinea (piano inclinato) di lunghezza L;
- treppiede con asta metallica verticale da infilare nell'aggancio della rotaia per inclinarla;
- carrello (macchinina) con respingente magnetico (e propulsore a molla);
- mascherina di plexiglas trasparente con tratti scuri variamente spaziati da fissare longitudinalmente sul carrello
- metro a nastro e scala graduata lungo il piano inclinato;
- livella
- Smart Timer;
- due traguardi a fotocellula da collegare allo Smart Timer;
- questo notebook jupyter Python, dove annotare e analizzare i risultati dell'esperimento.

Il **fototraguardo** è basato su una coppia emettitore-rivelatore di raggi infrarossi a 880 nm, con un tempo caratteristico di salita di 500 ns e uno di discesa di 50 ns: un oggetto che passa attraverso il fototraguardo ostacola il fascio infrarosso provocando l'apertura del circuito. Per un oggetto che passa a 1 cm dal rivelatore infrarosso, con una velocità minore di 10 m/s, la differenza tra la lunghezza reale e quella misurata è minore di un millimetro. Documentazione qui

0.1.3 Fondamenti Teorici

Il moto senza attrito di un oggetto lungo un piano inclinato è uniformemente accelerato, secondo la legge oraria:

$$s(t) = s_{\text{in}} + v_{\text{in}}(t - t_{\text{in}}) + \frac{1}{2}a\,(t - t_{\text{in}})^2$$

L'accelerazione a, in assenza di attrito, è legata all'accelerazione di gravità dalla semplice relazione

$$a = g \sin\alpha$$

dove α è l'angolo di cui è inclinato il piano. Nel nostro caso, e in riferimento alla figura, è $H = L\sin\alpha$, da cui

$$a = gH/L$$

In presenza di una forza di attrito

$$F_k = -\mu_k m g \cos\alpha$$

avremo invece

$$a = g(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha)$$

Nell'esperimento t_0 sarà relativo al primo sensore a fotocellula (indice 1) e t sarà relativo al secondo sensore a fotocellula (indice 2), da cui:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = v_1\,\Delta t + \frac{1}{2}a\,\Delta t^2 \qquad (1)$$

avendo indicato con s_2 e s_1 le distanze dei 2 sensori a fotocellula dalla sommità della rotaia ($s_0 = 0$).

0.1.4 Descrizione dell'Esperienza

a) Determinare la posizione orizzontale della rotaia posizionando la rotaia stessa sul tavolo e posizionando il carrello al suo centro: se il carrello si muove, aggiustare la vite posta alla fine della rotaia finché il carrello non si muove più. Misurare l'altezza h_{A0} tra il tavolo e il lato superiore dell'estremità della rotaia con arresto fisso con gommino, che sarà quella che successivamente sarà elevata. Misurare inoltre l'altezza h_{B0} dal lato opposto. Avvalersi della livella per controllare che la rotaia non sia inclinata sia rispetto all'asse longitudinale che a quello trasversale. Si noti che è possibilire regolare l'altezza dei supporti del treppiede mediante delle viti. Il tavolo potrebbe essere non perfettamente orizzontale. Misurare anche la lunghezza L della rotaia da un'estremità all'altra.

b) Fissare il primo sensore a fotocellula a una trentina di cm dalla sommità ($s_0 = 0$) del piano inclinato (collegare il relativo cavo al canale 1 dello Smart Timer). Indicando con l'indice 1 tale sensore, la distanza del primo sensore dalla sommità sarà s_1. Valutare l'incertezza (s_1) relativa alla misura di s_1.

c) Accendere il sistema di acquisizione Smart Timer con l'interruttore posto sulla sinistra [I/O], premere il tasto 1 "Select Measurement" fino a scegliere la misura "TIME", premere il tasto 2 "Select Mode" fino a scegliere la modalità "Two Gates" (si misurerà l'intervallo di tempo che intercorre tra il passaggio dal 1ř al 2ř fototraguardo).

d) Regolare l'inclinazione del piano, verificando con la bolla che non vi sia una pendenza laterale. Misurare l'altezza h_A della rotaia all'estremità alta (distanza tavolo – lato superiore della rotaia) e quella all'estremità bassa h_B: l'altezza H da considerare sarà $H = (h_A - h_{A0}) - (h_B - h_{B0})$ (scegliere un angolo di inclinazione non troppo grande). Valutare l'incertezza (H) relativa ad H. Calcolare l'angolo $\sin \alpha = H/L$ e la relativa incertezza.

e) Fissare il secondo sensore a una distanza Δs di qualche centimetro (ad es. 10 cm) dal primo. Indicando con l'indice 2 tale sensore, la distanza del secondo sensore dalla sommità sarà s_2 e quindi $\Delta s = s_2 - s_1$. Valutare l'incertezza $\delta(s_2)$ relativa alla misura di s_2; valutare l'incertezza $\delta(\Delta s)$ relativa a Δs.

f) Ripetere le seguenti operazioni 5 volte, senza variare la distanza tra i sensori:

1. Premere il tasto 3 "Start" dello smart timer (si sente un suono e compare un asterisco sulla seconda riga dello strumento): a questo punto lo smart timer è attivo e pronto a ricevere gli impulsi dai fototraguardi e a mostrare il tempo t impiegato a percorrere lo spazio s tra i due sensori.
2. Disporre il carrello alla sommità della rotaia e lasciarlo libero di scendere, avendo cura di non imprimere alcuna forza alla partenza (controllare che al passaggio sui due fototraguardi si illumini una spia rossa).
3. Segnare il tempo t visualizzato (rimane visualizzato finché non si preme di nuovo "Start") e l'incertezza associata.

g) Ripetere le operazioni (e)-(f) 5 volte, TENENDO FISSA LA POSIZIONE DEL 1ř SENSORE e cambiando quella del 2ř in modo tale che la distanza Δs aumenti ogni volta (ad es. di 10 cm).

h) Ripetere le misure del moto del carrello in discesa, secondo la procedura seguita in precedenza [operazioni (d)-(g)], per almeno 5 angoli di inclinazione α_i diversi (ossia per almeno 4 diversi valori di H_i). Nel frattempo è possibile fittare e visualizzare i plot delle varie tranche nelle apposite celle del notebook.

0.1.5 Grandezze Utilizzate

- s_1, s_2: distanza del primo e secondo sensore dalla sommità del piano; s_1, s_2: incertezze nella misura di s_1 e s_2
- $\Delta s = s_2 - s_1$: distanza tra i due sensori; (Δs): incertezza nella valutazione di s
- Δt_i: i-esima misura del tempo di percorrenza tra s_1 e s_2
- α_i : angolo di inclinazione del piano rispetto all'orizzontale
- H: differenza di quota tra l'estremità bassa e l'estremità alta della rotaia; (H): incertezza nella valutazione di H
- L: lunghezza rotaia; (L): incertezza nella misura di L
- $(\overline{\Delta t})$: stima dell'incertezza su $\overline{\Delta t}$ come deviazione standard della media.

0.1.6 Fit Lineare

Descriviamo qui come effettuare un fit dei coefficienti A e B nella funzione $y = A + Bx$, seconda la procedura dei minimi quadrati. Siano x_i, y_i,con $i = 1, \ldots, n$, i punti sperimentali, e definiamo la funzione di costo

$$f(A, B) = \sum_{i=1}^{n} (A + Bx_i - y_i)^2$$

I valori ottimali di A e B sono ottenuti risolvendo il sistema di equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial A} = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial B} = 0$$

Introducendo i simboli

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \langle xy \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \text{etc.}$$

la soluzione del sistema è data da

$$A = \frac{\langle x^2 \rangle \langle y \rangle - \langle xy \rangle \langle x \rangle}{\sigma_x^2}; \qquad B = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\sigma_x^2},$$

con

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

L'errore sui paramtetri fittati è stimato da

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{n\sigma_x^2}}\, \sigma_y, \qquad \sigma_B = \sqrt{\frac{1}{n\sigma_x^2}}\, \sigma_y$$

con

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-2} \sum_i (A + Bx_i - y_i)^2$$

0.1.7 Fit Quadratico

Per verificare la bontà di Eq. (1) nel descrivere i dati sperimentali, bisogna effettuare un fit dei coefficienti A e B nella funzione $y = Ax^2 + Bx$, seconda la procedura dei minimi quadrati. Siano x_i, y_i,con $i = 1, \ldots, n$, i punti sperimentali, e definiamo la funzione

$$f(A, B) = \sum_{i=1}^{n} (Ax_i^2 + Bx_i - y_i)^2$$

I valori ottimali di A e B sono ottenuti risolvendo il sistema di equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial A} = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial B} = 0.$$

Usando la notazione $\langle \cdots \rangle$ introdotta nel paragrafo precedente, la soluzione del sistema è data da

$$A = \frac{\langle x^2 y \rangle \langle x^2 \rangle - \langle xy \rangle \langle x^3 \rangle}{\Sigma_x}; \quad B = \frac{\langle xy \rangle \langle x^4 \rangle - \langle x^3 \rangle \langle x^2 y \rangle}{\Sigma_x},$$

con

$$\Sigma_x = \langle x^2\rangle\langle x^4\rangle - \langle x^3\rangle^2$$

L'errore sui paramtetri fittati è stimato da

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\langle x^2\rangle}{n\Sigma_x}}\sigma_y, \qquad \sigma_B = \sqrt{\frac{\langle x^4\rangle}{n\Sigma_x}}\sigma_y$$

con

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Ax_i^2 + Bx_i - y_i)^2$$

0.1.8 Propagazione degli errori

Ricordiamo la formula di propagazione degli errori per una quantità $f = f(x, y, \dots)$:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2 + \cdots$$

0.1.9 Utilizzo del notebook Python

- le celle possono trovarsi in due stati:
    1) command mode (blu, premendo esc)
    2) edit mode (verde, per modificare il contenuto, premendo enter)
- tipi di cella: standard (per scrivere il codice python) o testo (markdown)
- copia e incolla con C e V in command mode
- i risultati delle misure vanno scritti nelle celle apposite di questo notebook
- aggiungere note, commenti, celle
- esegui cella: shift-invio, ctrl-invio
- cancella intera cella: dd in command mode
- inserisci nuova cella below: B in command mode
- caratteri greci: "Slash" + Delta + "Tab"
- inserisci commenti con #. Può essere utile commentare delle linee di codice per trovare l'errore quando una cella non compila.

0.1.10 Note

- riportare una sola cifra significativa per le incertezze;
- quando si scrivono misure di grandezze non riportare più cifre significative di quelle coperte dall'incertezza e ricordarsi delle unità di misura;
- riportare le formule usate per calcolare i risultati e per determinare le incertezze;
- sforzarsi di fare osservazioni e commenti propri e, se si ritiene opportuno, sperimentare, motivando, anche cose diverse da quelle suggerite.

0.2 @@@@@@@@ INIZIO ESPERIENZA @@@@@@@@

0.2.1 Imports e Definizioni

```
In [3]: %pylab inline
        from pandas import DataFrame
```

```
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

```
In [4]: def fit_lineare(x,y):
            """
            Questa funzione restituisce termine noto e coefficiente angolare della retta
            interpolante y = A + Bx ed il relativo errore
            """

            ### completare il codice traducendo le formule
            ### fornite nell'introduzione

            return A, dA, B, dB
```

```
In [5]: def fit_quadratico(x,y):
            """
            Questa funzione restituisce i coefficienti della parabola interpolante
            y = Ax**2 + Bx ed il relativo errore
            """

            mx = mean(x)
            mx2 = mean(x*x)
            mx3 = mean(x**3)
            mx4 = mean(x**4)
            mxy = mean(x*y)
            mx2y = mean(x*x*y)

            D = mx2*mx4 - mx3**2
            A = (mx2y*mx2 - mxy*mx3) / D
            B = (mxy*mx4 - mx3*mx2y) / D

            n = len(x)
            r = sqrt(sum((A*x**2+B*x - y)**2) / (n-2))
            dA = r * sqrt(mx2 / (n*D))
            dB = r * sqrt(mx4 / (n*D))

            return A, dA, B, dB
```

0.2.2 Raccolta Dati

Round 1

```
In [6]: ### Definisco alcuni dizionari che verranno utili in seguito per raccogliere
        ### i risultati delle misure eseguite con diversi valori di H:

        acc={}
        dacc={}
        sinalpha={}
        dsinalpha={}
```

```
In [7]: ###
        ### USO QUESTA CELLA COME UN FOGLIO PER ANNOTARE I RISULTATI DELLA PRIMA MISURA
        ### (PRIMO VALORE DI H)
        ###
        ### (la sintassi non è importante per ora, questa cella alla fine potrà
        ###  essere cancellata)
        ###
        ### AD ESEMPIO (sostituire con i propri dati):
        ###

        L=121.9                # cm; lunghezza del binario da bordo a bordo

        dL=0.1                 # cm; incertezza sulla misura della lunghezza del binario

        # quando il binario è orizzontale:

        hA0=2.8                # cm; altezza bordo sinistro (quello col gommino, che sarà poi al
        hB0=2.9                # cm; altezza bordo destro

        dh0=0.002              # cm; incertezza (la misura è fatta col calibro)

        # solleviamo il lato del binario col gommino di fine corsa:

        hA=21.4                # cm; altezza bordo sinistro (che ora è stato alzato)
        hB=2.7                 # cm; altezza bordo destro

        dh=0.05                # cm; incertezza (ora la misura è fatta col metro a nastro)

        # qui inizio a riportare le misure dei tempi variando la distanza Ds tra
        # i due fototraguardi - ATTENZIONE: la posizione del primo fototraguardo
        # non dovrà mai essere modificata nel corso dell'esperimento

        Ds=20.                 # cm; distanza tra i due fototraguardi

        dDs=0.2                # cm; incertezza sulla distanza; è la stessa in tutte le misure

        0.2370                 # s; di seguito scrivo i 5 valori di Dt misurati con Ds=20.
        0.2369
        0.2374
        0.2377
        0.2375

        Ds=30.                 # rieseguo ora le misure con Ds=30.

        0.3289
        0.3289
        0.3288
        0.3288
```

```
0.3288

Ds=40.                  # rieseguo ora le misure con Ds=40.

0.4083
0.4096
0.4094
0.4094
0.4094

Ds=50.                  # rieseguo ora le misure con Ds=50.

0.4855
0.4860
0.4871
0.4861
0.4865
```

Out[7]: 0.4865

In [8]:
```
###
### PER ESEGUIRE L'ANALISI DATI, COPIO IN QUESTA CELLA I RISULTATI DELLE
### MISURE SCRITTE NELLE CELLA PRECEDENTE (RELATIVE AL PRIMO VALORE DI H
### CONSIDERATO) E LI RIORGANIZZO NEL MODO SEGUENTE:
###
### (i valori di Dt sono riorganizzati in una matrice le cui righe
###  corrispondono a tutte le misure eseguite con un dato valore
###  della distanza Ds tra i due fototraguardi)
###
### (sostituire con i propri dati presi dalla cella precedente;
###  aggiungere ',' dopo ogni numero)
###

Dt = array([[
0.2370,               # Misure di Dt con Ds=20.0:
0.2369,
0.2374,
0.2377,
0.2375,
],[
0.3289,               # Misure di Dt con Ds=30.0:
0.3289,
0.3288,
0.3288,
0.3288,
],[
0.4083,               # Misure di Dt con Ds=40.0:
0.4096,
```

```
0.4094,
0.4094,
0.4094
],[
0.4855,              # Misure di Dt con Ds=50.0:
0.4860,
0.4871,
0.4861,
0.4865,
]])

# La seguenza di valori di Ds considerati è:
Ds = array([
20.0,
30.0,
40.0,
50.0,
])

# Le incertezze sui valori di Ds sono:
dDs = array([
0.2,
0.2,
0.2,
0.2,
])

# Qui copio i restanti valori che mi ero annotato nella cella precedente:
# (sostituire con i propri dati)

L=121.9                  # cm; lunghezza del binario da bordo a bordo
dL=0.1                   # cm; incertezza sulla misura della lunghezza del binario

hA0=2.8                  # cm; altezza bordo sinistro (quello col gommino, che sarà poi
hB0=2.9                  # cm; altezza bordo destro
dh0=0.002                # cm; incertezza (la misura è fatta col calibro)

hA=21.4                  # cm; altezza bordo sinistro (che ora è stato alzato)
hB=2.7                   # cm; altezza bordo destro
dh=0.1                   # cm; relativa incertezza (ora la misura è fatta col metro a na

# Seguono alcune formule che servono a calcolare la media delle misure dei tempi
# e le relative incertezze :

H = (hA-hA0) - (hB-hB0)  # calcolo l'effettiva differenza di quota tra lato sinistro e l
dH = sqrt(dh0**2+dh**2)  # usando la propagazione degli errori calcolo l'incertezza su H

sina = H / L             # seno dell'angolo di inclinazione
```

```
                             # usando la propagazione degli errori calcolo l'incertezza su s
        dsina = sqrt( (1/L * dH)**2 + (H/L**2 * dL)**2)

        print('H    = %6.3f +/- %.1f cm\nsin = %6.3f +/- %.3f\n' % (H,dH,sina,dsina))

        n=len(Dt[0])                    # numero di misure
        Dtm=mean(Dt,axis=1)             # media per righe (axis=1) delle misure
        dDt=std(Dt,axis=1)/sqrt(n-1)    # errore standard della media

        # Mediante i comandi che seguono i risultati delle misure sono
        # organizzati all'interno di una tabella (df) che viene stampata:

        df = DataFrame({'s':Ds, '(s)':dDs, 't':Dtm, '(t)':dDt})
        df = df[['s', '(s)', 't','(t)']]  # assicura che le colonne siano stampate nell'ordine g
        df.index=df.index+1                     # numero le serie di misure a partire da 1 invec
        df.columns.name='serie'                 # assegno un nome alla prima colonna
        df                                      # stampo la tabella
```

```
H    = 18.800 +/- 0.1 cm
sin =  0.154 +/- 0.001
```

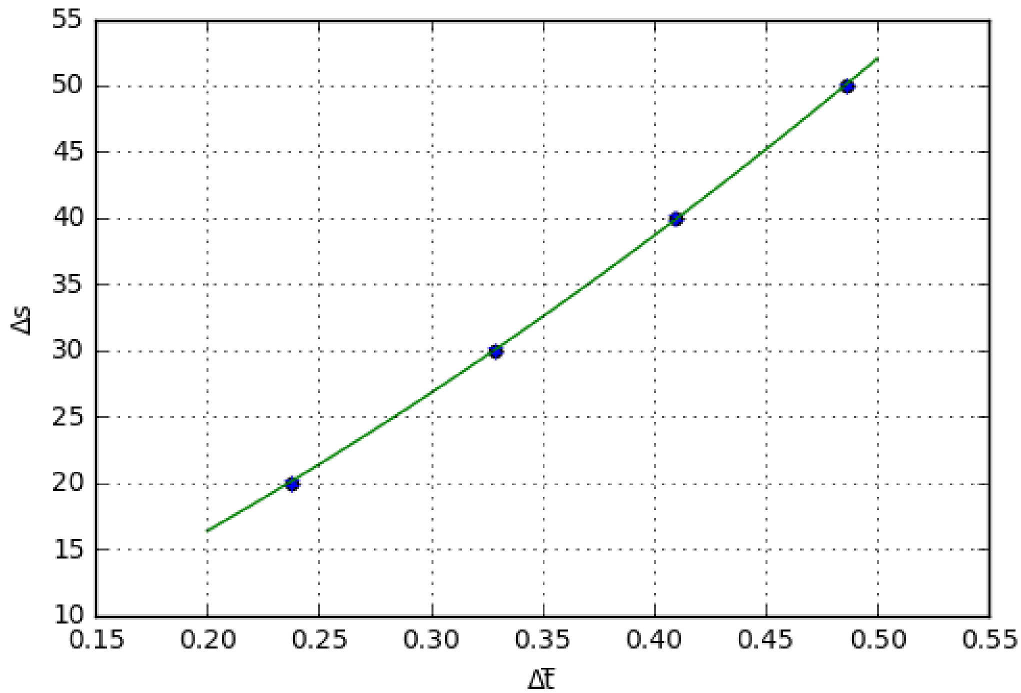
Out[8]:

serie	s	(s)	t	(t)
1	20.0	0.2	0.23730	0.000152
2	30.0	0.2	0.32884	0.000024
3	40.0	0.2	0.40922	0.000233
4	50.0	0.2	0.48624	0.000268

```
In [9]: # Verifica legge quadratica. Eseguire prima la cella di sopra.

        A, dA, B, dB = fit_quadratico(df['t'], df['s'])

        def fit_fun(x):                # questa è la funzione quadratica usata per il fit
            return A*x**2 + B*x

        # Grafico dei punti sperimentali:

        df.plot(x='t',y='s',xerr='(t)',yerr='(s)',kind='scatter',grid=True)

        dt=linspace(0.2,0.5)           # creo una successione di valori di dt che mi servono per i
        plot(dt,fit_fun(dt))           # grafico del fit

        v1  = B
        dv1 = dB
        a   = 2*A
        da  = 2*dA
```

```
print("\nv1 = %5.1f +/- %4.1f cm/s\na  = %5.1f +/- %4.1f cm/s**2\ng  = %5.1f +/- %4.1f c

acc[H]=a                        # salvo i risultati trovati nei dizionari definiti all'iniz
dacc[H]=da
sinalpha[H]=sina
dsinalpha[H]=dsina
```

```
v1 =  66.9 +/-  1.0 cm/s
a  = 148.4 +/-  5.0 cm/s**2
g  = 962.5 +/- 32.3 cm/s**2
```



Round 2 (copia le due celle qui sopra, modifica H, ripeti gli esperimenti)

```
In [ ]:
```

Round 3 (copia le due celle qui sopra, modifica H, ripeti gli esperimenti,)

```
In [ ]:
```

Round 4 (copia le due celle qui sopra, modifica H, ripeti gli esperimenti,)

```
In [ ]:
```

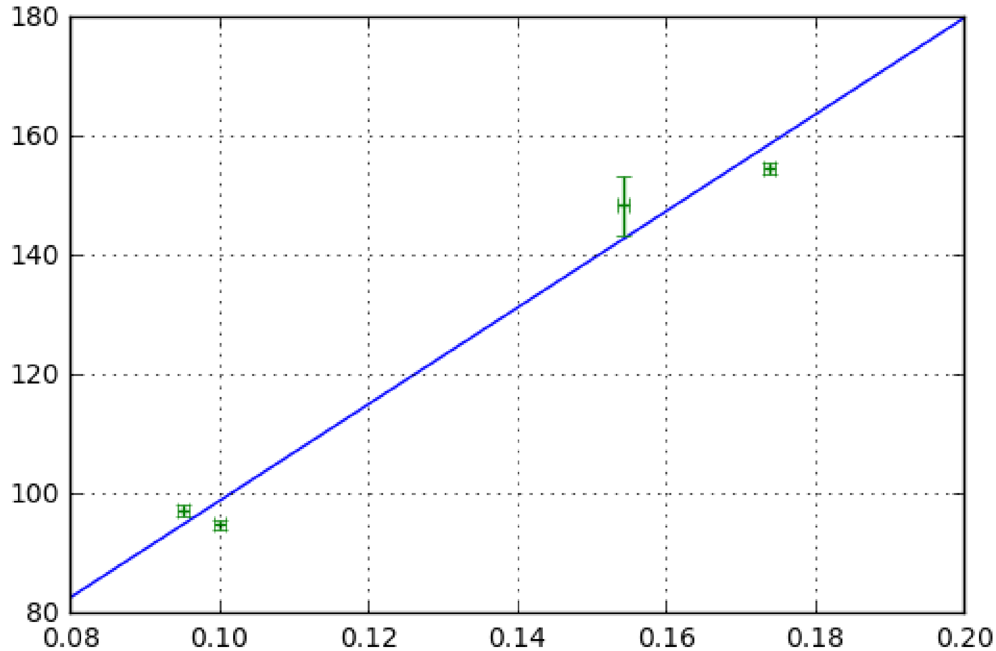
Round 5 (copia le due celle qui sopra, modifica H, ripeti gli esperimenti,)

In [ ]:

0.2.3 Calcolo di g trascurando l'attrito

In [16]:
```
### Verifica relazione lineare tra sin e accelerazione
###
### (La retta interpolante cade all'interno delle barre d'errore?)
###

# Raccolgo qui i valori ottenuti mediante tutte le misure precedenti:

a=array([acc[k] for k in sorted(acc)])
da=array([dacc[k] for k in sorted(acc)])
sina=array([sinalpha[k] for k in sorted(acc)])
dsina=array([dsinalpha[k] for k in sorted(acc)])

# Verifica legge lineare

A, dA, B, dB = fit_lineare(sina, a)

def fit_fun(x):
    return A + B*x

g=B; dg=dB;
print("\ng=%.2f, g=%.2f, A=%.1f, A=%.1f\n" % (g, dg, A, dA))    #show results

dt=linspace(0.08,0.20)
plot(dt,fit_fun(dt))
errorbar(sina, a, xerr=dsina, yerr=da, ls='none')
grid()
```

```
g=810.16, g=87.08, A=17.8, A=11.8
```



0.2.4 Calcolo di g e μ_k

Utilizzando i valori di α e di a ottenuti per due inclinazioni diverse, risolvete il sistema di due equazioni nelle due incognite g e μ_k. L'attrito gioca un ruolo importante?

```
In [17]: cosa =sqrt(1-sina**2)

         ### inserire espressione per g =
         ### inserire espressione per mu =

         print("\n =%.2f, g=%.2f cm/s^2\n" % (mu, g))
```

```
 =-0.04, g=733.44
```

È possibile stimare g e μ_k mediante un fit lineare che utilizzi tutte le misure effettuate? [suggerimento: considerare la relazione lineare $y = Bx + A$ dove $y = \frac{a}{\cos\alpha}$, $x = \tan\alpha$]

```
In [18]: cosa =sqrt(1-sina**2)

         ### inserire comando che calcola il fit lineare

         print("\n =%.2f, g=%.2f cm/s^2\n" % (mu, g))
```

```
=-0.02, g=812.10
```

Eseguire un'accurata analisi dell'errore. Quali momenti dell'esperimento sono maggiormente critici? su cosa si dovrebbe lavorare per ottenere misure più accurate?

```
In [ ]:
```