

Teoremi di Fondamenti Matematici per l'Informatica

Carlo Ramponi

May 8, 2019

1 L'ordinamento dei numeri naturali è un buon ordinamento

Enunciato

L'ordinamento dei numeri naturali è un buon ordinamento

Dimostrazione

Supponiamo che l'insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ non abbia minimo e proviamo che allora $A = \emptyset$. Chiamiamo B il suo complementare ($B = \mathbb{N} \setminus A$) e dimostriamo per induzione che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{0, 1, \dots, n\} \subseteq B$$

- $0 \notin A$, altrimenti ne sarebbe il minimo, quindi $0 \in B$ e pertanto $\{0\} \subseteq B$.
- Supponiamo che $\{0, 1, \dots, n\} \subseteq B$, allora $0, 1, \dots, n \notin A$ e quindi $n+1 \notin A$, altrimenti ne sarebbe il minimo, ma allora $n+1 \in B$ e pertanto $\{0, 1, \dots, n, n+1\} \subseteq B$.

Per il principio di induzione di prima forma un insieme con queste proprietà coincide con quello dei numeri naturali ($B = \mathbb{N}$) e quindi $A = \emptyset$

2 Il principio di induzione (seconda forma)

Enunciato

Sia $P(n)$ una famiglia di proposizioni indicate su \mathbb{N} e si supponga che

1. $P(0)$ sia vera
2. $\forall n > 0 (P(k) \text{ vera} \forall k < n) \Rightarrow P(n) \text{ vera}$

allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ non è vera} \}$, e supponiamo per assurdo che $A \neq \emptyset$.

Allora per la proprietà di buon ordinamento A ha minimo n .

Chiaramente $n \neq 0$ in quanto $P(0)$ è vera per ipotesi.

Inoltre se $k < n$ allora $k \notin A$ in quanto $n = \min A$, ma allora dalla (2) segue che $P(n)$ è vera e quindi $n \notin A$, contraddicendo il fatto che $n \in A$.

3 La divisione euclidea (esistenza e unicità)

Enunciato

Siano $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$, allora esistono unici $q, r \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\begin{cases} n = mq + r \\ 0 \leq r < |m| \end{cases}$$

Dimostrazione

- **Esistenza** Supponiamo dapprima che $n, m \in \mathbb{N}$, ed usiamo il principio di induzione della seconda forma su n .

- Se $n = 0$ basta prendere $q = 0$ e $r = 0$.
- Supponiamo $n > 0$ e che la tesi sia vera $\forall k < n$. Se $n < m$ basta prendere $q = 0$ e $r = n$, altrimenti sia $k = n - m$, dato che $m \neq 0$, $0 < k < n$, quindi per ipotesi di induzione esistono $q, r \in \mathbb{N}$ tali che

$$\begin{cases} k = mq + r \\ 0 \leq r < |m| \end{cases}$$

ma allora $n = k + m = mq + r + m = (q + 1)m + r$.

Supponiamo ora $n < 0$ e $m > 0$. Allora $-n > 0$ e quindi per il caso precedente si ha che esistono $q, r \in \mathbb{Z}$ tali che $-n = mq + r$ e $0 \leq r < m = |m|$. E quindi $n = m(-q) - r$. Se $r = 0$ abbiamo finito, se invece $0 < r < m$ allora $0 < m - r < m = |m|$ e $n = m(-q) - r = m(-q) - m + m - r = m(-1 - q) + (m - r)$.

Sia infine $m < 0$ allora $-m > 0$, quindi per i due casi precedenti $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ tali che $n = (-m)q + r = m(-q) + r$ con $0 \leq r < -m = |m|$

- **Unicità** Supponiamo che $n = mq + r$ e $n = mq' + r'$ con $0 \leq r, r' < m$. Supponiamo che $r' \geq r$, allora $m(q - q') = r' - r$ e quindi passando ai moduli si ha $|m||q - q'| = |r' - r| = r' - r < |m|$, da cui $0 \leq |q - q'| < 1$ e quindi $|q - q'| = 0$ ovvero $q = q'$.

Ma allora da $mq + r = mq' + r'$ segue che anche $r = r'$.