Teoremi di Fondamenti Matematici per l'Informatica

Carlo Ramponi

May 8, 2019

1 L'ordinamento dei numeri naturali è un buon ordinamento

Enunciato

L'ordinamento dei numeri naturali è un buon ordinamento

Dimostrazione

Supponiamo che l'insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ non abbia minimo e proviamo che allora $A = \emptyset$. Chiamiamo B il suo complementare ($B = \mathbb{N} \setminus A$) e dimostriamo per induzione che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{0, 1, ..., n\} \subseteq B$$

- $0 \notin A$, altrimenti ne sarebbe il minimo, quindi $0 \in B$ e pertanto $\{0\} \subseteq B$.
- Supponiamo che $\{0, 1, ..., n\} \subseteq B$, allora $0, 1, ..., n \notin A$ e quindi $n + 1 \notin A$, altrimenti ne sarebbe il minimo, ma allora $n + 1 \in B$ e pertanto $\{0, 1, ..., n, n + 1\} \subseteq B$.

Per il principio di induzione di prima forma un insieme con queste proprietà coincide con quello dei numeri naturali ($B = \mathbb{N}$) e quindi $A = \emptyset$

2 Il principio di induzione (seconda forma)

Enunciato

Sia $P(n)$ una famiglia di proposizioni indicate su $\mathbb{N}$ e si supponga che

1. $P(0)$ sia vera
2. $\forall n > 0 (P(k) vera \forall k < n) \Rightarrow P(n) vera$

allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} | P(n)$ non è vera $\}$, e supponiamo per assurdo che $A \neq \emptyset$.
Allora per la proprietà di buon ordinamento A ha minimo n.
Chiaramente $n \neq 0$ in quanto $P(0)$ è vera per ipotesi.
Inoltre se $k < n$ allora $k \notin A$ in quanto $n = \min A$, ma allora dalla (2) segue che $P(n)$ è vera e quindi $n \notin A$, contraddicendo il fatto che $n \in A$.