

Sistema di FitzHugh-Nagumo

Carlo Rossanigo

Agosto 2024

1 Introduzione

1.1 Problema

Risolvere numericamente il sistema di FitzHugh-Nagumo:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = bv(v - \beta)(\delta - v) - cw + I_{app}, & t \in [0, 200], \\ \frac{dw}{dt} = e(v - \gamma w), \end{cases}$$

con $I_{app} = 1.5$, $b = 5$, $c = 1$, $e = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\delta = 1$, $\gamma = 0.25$ e condizioni iniziali: $v(0) = 0.6$, $w(0) = 0$.

Approssimare il problema con un metodo numerico che si ritiene adeguato, documentando l'accuratezza ottenuta. Per i valori presi in esame, la soluzione ammette un ciclo limite: determinare il tempo di inizio del ciclo limite e la sua periodicità.

1.2 Considerazioni teoriche

Questo modello descrive un processo di attivazione e recupero in un sistema dinamico ed è una semplificazione di modelli più complessi. Le due equazioni differenziali del modello di FitzHugh-Nagumo rappresentano l'evoluzione temporale di due variabili principali: V , che descrive un'oscillazione rapida, e W , che regola il ritorno del sistema a uno stato di equilibrio.

L'aumento non lineare di V viene controllato dalla variabile W , la quale agisce come un freno lento riducendo gradualmente l'attività del sistema in risposta a stimoli esterni. Un parametro di riscaldamento modula la velocità con cui W riporta il sistema allo stato iniziale.

In particolare dal testo ci viene suggerita l'esistenza di un ciclo limite, ricordiamone la definizione:

Def 1.1 (Ciclo limite): Un ciclo limite è un'orbita periodica isolata, ovvero un'orbita per la quale non esistono altre orbite periodiche nelle sue vicinanze e tutte le traiettorie del sistema che partono sufficientemente vicino ad essa convergono al ciclo limite per $t \rightarrow \pm\infty$.

Inoltre possiamo notare che per questo problema non è possibile ottenere una

soluzione esatta. Pertanto, per calcolare l'errore utilizzerò la seguente formula di stima dell'errore:

$$\text{Errore} = \frac{|U_n - U_{2n}| \cdot 2^p}{2^p - 1}$$

dove p è l'ordine di convergenza del metodo, U_n è la soluzione approssimata con n passi e U_{2n} è la soluzione approssimata con $2n$ passi. Dato che la soluzione è di dimensione 2 (ossia $U = (v, w)$), calcoleremo l'errore separatamente per entrambe le componenti del sistema. In particolare, utilizzeremo tre metodi per approssimare la soluzione numerica: **Eulero Esplicito**, **Eulero Implicito** e **Runge-Kutta 4**. Inoltre, analizzeremo il ciclo limite della soluzione, determinando sia il tempo di inizio del ciclo che il suo periodo.

Per individuare il ciclo limite, analizziamo le variabili V e W cercando il punto in cui V si avvicina al suo valore minimo, entro una tolleranza predefinita: Questo segna l'inizio del ciclo limite. Successivamente, calcoliamo la periodicità del ciclo cercando il primo valore di V simile a quello iniziale, misurando la differenza temporale tra i due valori consecutivi. Si può effettuare un ragionamento analogo con la variabile W : si ottengono approssimativamente gli stessi risultati, sia per il tempo di inizio del ciclo limite che per il periodo di tale ciclo.

2 Risultati per i metodi numerici utilizzati

In questa sezione presenterò sia i risultati dell'errore che del calcolo del tempo iniziale del ciclo limite e del periodo di tale ciclo. Confronteremo due casi, quello con 1000 passi e quello con 5000 passi. Ricordo che l'ordine di convergenza di Eulero esplicito ed implicito è $p=1$, mentre quello di Runge-Kutta 4 è appunto $p=4$; ci aspettiamo che un metodo di ordine superiore, quale Runge-Kutta 4, ci fornisca un errore di approssimazione minore.

Per quanto concerne gli errori ottenuti utilizzando i vari metodi di integrazione, abbiamo i seguenti risultati:

Metodo	Numero di passi (n)	Errore
Eulero Esplicito		
Caso 1	1000	9.854971×10^{-1}
Caso 2	5000	2.429181×10^{-1}
Eulero Implicito		
Caso 1	1000	1.181892×10^0
Caso 2	5000	2.996980×10^{-1}
Runge-Kutta 4		
Caso 1	1000	1.920918×10^{-1}
Caso 2	5000	4.538691×10^{-2}

Table 1: Errori ottenuti con i metodi di approssimazione per vari numeri di passi.

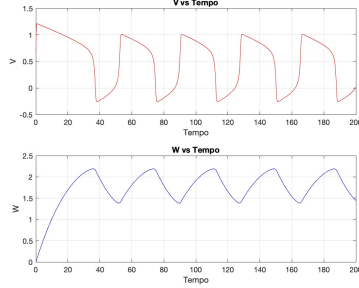
Per quanto riguarda il metodo di Eulero Esplicito, osserviamo che aumentando il numero di passi da 1000 a 5000 l'errore diminuisce, ma non in maniera particolarmente significativa. L'errore è coerente con l'ordine di convergenza del metodo, pari a $O(h)$, dove la riduzione dell'errore è proporzionale al passo h . Nonostante ciò, i risultati mostrano che per ottenere un'accuratezza accettabile è necessario utilizzare un numero molto elevato di passi.

Il metodo di Eulero Implicito, pur essendo generalmente più stabile rispetto a quello esplicito, presenta errori leggermente superiori in questo contesto, specialmente per un numero di passi ridotto. Ciò suggerisce che, sebbene il metodo sia vantaggioso in termini di stabilità per problemi rigidi, non sempre offre un miglioramento in termini di accuratezza rispetto al metodo esplicito.

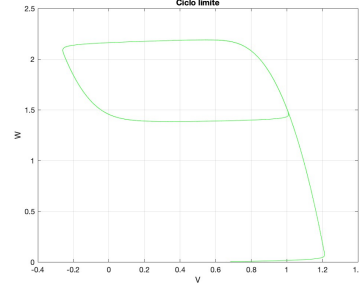
Infine, il metodo Runge-Kutta di ordine 4 si dimostra superiore in termini di precisione: RK4 fornisce errori più bassi di un ordine anche con un numero di passi relativamente piccolo. La riduzione dell'errore è più rapida rispetto ai metodi di Eulero, rendendo RK4 il metodo più accurato tra quelli testati, nonostante sia computazionalmente molto più costoso.

Analizzando i grafici delle soluzioni e del ciclo limite ottenuti per ciascuno dei metodi utilizzati con un passo pari a $n = 5000$, si osserva che le differenze tra i metodi sono minime. Tutti i metodi, infatti, riproducono correttamente il comportamento oscillatorio e periodico del sistema. In particolare, il metodo di Runge-Kutta 4 mostra una maggiore precisione, come previsto teoricamente, ma anche i metodi di Eulero Esplicito e Implicito risultano adeguati per la simulazione di questo tipo di fenomeno. Questi risultati confermano l'affidabilità dei diversi metodi nel descrivere correttamente la dinamica del sistema, almeno per un numero di passi sufficientemente elevato.

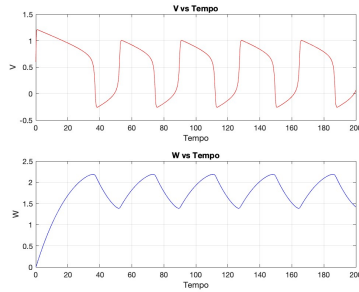
Figure 1: Approssimazioni per 5000 passi



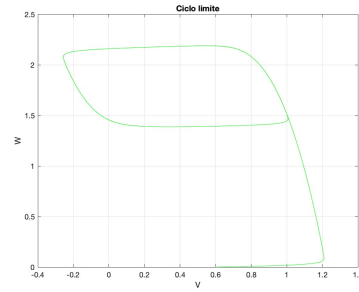
(a) Approssimazione di V e W



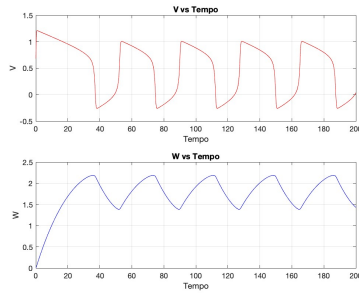
(b) Ciclo Limite EE



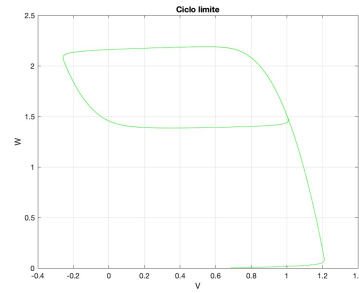
(c) Approssimazione di V e W



(d) Ciclo Limite EI



(e) Approssimazione di V e W



(f) Ciclo Limite RK4

Passiamo ora a calcolare il tempo di inizio del ciclo limite e il periodo del ciclo. Per determinare l'inizio del ciclo limite, fissiamo una soglia di errore pari a 10^{-3} e cerchiamo il primo punto in cui la variabile V si avvicina sufficientemente al suo minimo. Questo punto, data la periodicità di V , segna l'inizio del ciclo limite. Una volta trovato il punto di inizio, per calcolare la periodicità del ciclo, cerchiamo il primo punto successivo in cui la variabile V ritorna a un valore simile a quello iniziale. Il periodo del ciclo limite è dato dalla differenza temporale tra l'inizio del ciclo e questo ritorno al valore iniziale di V . Si può

fare un discorso analogo con la variabile W , vista la sua periodicità, cercando il primo punto in cui tale variabile si avvicina al suo massimo.

I risultati ottenuti per i diversi metodi di approssimazione per $n = 1000$ e $n = 5000$ sono riportati nella seguente tabella:

Metodo	Numero di passi (n)	Tempo inizio Ciclo limite	Periodo
Eulero Esplicito	1000	38.000000	38.000000
	5000	38.120000	37.640000
Eulero Implicito	1000	38.400000	37.000000
	5000	38.160000	37.480000
Runge-Kutta 4	1000	38.200000	37.600000
	5000	38.160000	37.560000

Table 2: Tempi di inizio del ciclo limite e periodi ottenuti con i diversi metodi di integrazione per $n = 1000$ e $n = 5000$.

Dalla tabella possiamo osservare come i tre metodi di integrazione, ovvero Eulero Esplicito, Eulero Implicito e Runge-Kutta 4, forniscano risultati simili nel determinare il tempo di inizio del ciclo limite e il periodo del ciclo al variare del numero di passi n .

Eulero Esplicito: Con $n = 1000$, il periodo è di 38.000000, ma con $n = 5000$ il periodo diminuisce a 37.640000, suggerendo che un numero maggiore di passi porta a una maggiore accuratezza nella determinazione del periodo del ciclo limite.

Eulero Implicito: Il periodo diminuisce significativamente con $n = 1000$ a (37.000000), stabilizzandosi per $n = 5000$ a 37.480000, indicando una certa sensibilità al numero di passi.

Runge-Kutta 4: Questo metodo mostra coerenza nei valori del periodo e di tempo di inizio ciclo limite, con una leggera differenza tra $n = 1000$ e $n = 5000$. Ne deduciamo che a differenza dell'errore non vi sono vantaggi evidenti nel calcolo di tali misure aumentando il numero di passi.

In generale, l'accuratezza nell'identificazione del ciclo limite migliora con un numero maggiore di passi, indipendentemente dal metodo di integrazione utilizzato.

Unendo questi risultati con quelli relativi agli errori, possiamo affermare che il metodo di Runge-Kutta di ordine 4 (RK4) risulta essere il più accurato tra i metodi testati. Tuttavia, il guadagno in termini di accuratezza ottenuto con RK4 non giustifica il costo computazionale significativamente maggiore rispetto agli altri metodi.

Infatti, Eulero Esplicito, pur essendo meno accurato di RK4, offre un compromesso più favorevole tra accuratezza e costo computazionale. Questo lo rende il metodo più affidabile tra quelli considerati per la risoluzione del sistema e l'individuazione del ciclo limite.

3 Appendice

3.1 Runge-Kutta Esplicito

Ricordiamo che i metodi di Runge-Kutta sono della forma:

$$U_{i+1} = U_i + h \cdot \phi(x_i, U_i, f; h), \quad (1)$$

dove:

$$\phi(x_i, U_i, f; h) = \sum_{r=1}^s b_r K_r$$

e

$$K_r = f \left(x_i + c_r h, U_i + h \sum_{j=1}^{r-1} a_{rj} K_j \right), \quad r = 2, \dots, s,$$

con s numero di stadi. I coefficienti a_{rj} , c_r , e b_r sono i valori riportati nella tabella di Butcher, che dipendono dal metodo scelto.

3.1.1 Metodo di Eulero Esplicito

Il metodo di Eulero Esplicito è un caso particolare dei metodi di Runge-Kutta con un solo stadio ($s = 1$). La relativa tabella di Butcher è:

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

La formula è semplicemente:

$$U_{i+1} = U_i + h \cdot f(x_i, U_i).$$

Questo metodo è di ordine 1 e ha una bassa accuratezza, ma è molto semplice da implementare.

3.1.2 Metodo di Runge-Kutta di Quarto Ordine (RK4)

Il metodo di Runge-Kutta di quarto ordine ($s = 4$) è uno dei più usati grazie al suo buon compromesso tra semplicità e accuratezza. La tabella di Butcher per il metodo RK4 è la seguente:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

La formula esplicita per RK4 è data da:

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(x_i, U_i), \\
K_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_1\right), \\
K_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, U_i + \frac{h}{2}K_2\right), \\
K_4 &= f(x_i + h, U_i + hK_3), \\
U_{i+1} &= U_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).
\end{aligned}$$

Questo metodo ha un ordine di accuratezza 4, rendendolo più preciso rispetto al metodo di Eulero Esplicito, specialmente per passi temporali più grandi.

3.2 Runge-Kutta Implicito

I metodi di Runge-Kutta impliciti seguono una struttura simile a quella dei metodi espliciti, ma la differenza principale risiede nel fatto che le equazioni per K_r dipendono da valori futuri dell'incognita U_{i+1} , rendendo necessario risolvere un sistema di equazioni non lineari a ogni passo temporale.

La formula generale per i metodi impliciti è:

$$U_{i+1} = U_i + h \cdot \phi(x_{i+1}, U_{i+1}, f; h), \quad (2)$$

dove:

$$\phi(x_{i+1}, U_{i+1}, f; h) = \sum_{r=1}^s b_r K_r$$

e

$$K_r = f\left(x_i + c_r h, U_i + h \sum_{j=1}^s a_{rj} K_j\right), \quad r = 1, \dots, s.$$

I coefficienti a_{rj} , b_r , e c_r sono riportati nella tabella di Butcher e dipendono dal metodo scelto.

3.2.1 Metodo di Eulero Implicito

Il metodo di Eulero Implicito è il più semplice tra i metodi di Runge-Kutta impliciti, con un solo stadio ($s = 1$). La relativa tabella di Butcher è la seguente:

$$\begin{array}{c|c}
1 & 1 \\
\hline
& 1
\end{array}$$

La formula implicita per Eulero Implicito è:

$$U_{i+1} = U_i + h \cdot f(x_{i+1}, U_{i+1}). \quad (3)$$