多元函数积分学

1. 二重积分

二重积分的计算

1. 设闭区域 $\sigma:(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$，则 $\iint_\sigma [\cos^2(x+y^2)+\sin^2(x^2+y)]\mathrm{d}\sigma=$ ______.

2 求 $I=\iint_\sigma \sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 σ 由 $|x|\le 1, 0\le y\le 2$ 确定.

3 计算 $I=\iint_\sigma x[1+\sin y f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 σ 由不等式 $x^2+y^2\le\pi^2,\quad y\ge\sin x$ 确定，$f(t)\in C$.

4 计算积分 $I=\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x.$

5 计算二次积分

$$I=\int_0^a \mathrm{d}x\int_{-x}^{-a+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y\ (a>0).$$

6 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=0, x=1$ 围成的区域，则 $f(x,y)=$ （ ）.

（A） $xy+1$ （B） $xy+\frac{1}{3}$ （C） $xy+\frac{1}{8}$ （D） $xy-\frac{1}{12}$

7. 设 $\sigma:x^2+y^2\le 2\quad x\ge 1.\quad I=\iint\limits_\sigma f(x,y)d\sigma$ 把 I 表示为极坐标系下先对 θ 后对 r 的累次积分是（ ）

（A） $I=\int_1^{\sqrt{2}} rdr\int_{-\arccos\frac{1}{r}}^{\arccos\frac{1}{r}} f(r\cos\theta,\sin\theta)d\theta$

（B） $I=\int_1^{\sqrt{2}} rdr\int_0^{\arccos\frac{1}{r}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$

（C） $I=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} rdr\int_{-\arccos\frac{1}{r}}^{\arccos\frac{1}{r}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$

（D） $I=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} rdr\int_0^{\arccos\frac{1}{r}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$

8 计算二重积分 $I=\iint\limits_{\sigma} y^2 dxdy$.

9 设区域 D: $x^2+y^2\le R^2$，则 $\iint\limits_{D}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy=$ ____________

10 设 $f(x)=\begin{cases} a, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，且 D 为 $-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty,$ 则 $\iint\limits_{D} f(y)f(x-y)dxdy=$ ____________

11 设 $f(u)$ 为连续函数，且 $\int_0^1 f(r)dr=1$，则 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x^2+y^2)dxdy=$ ____________.

12. $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\int_0^t dx\int_0^{t-x} e^{x^2+y^2}dy=$ ____________

13. 设 D 是 xoy 平面上以 $(1,1),\ (-1,1),\ (-1,-1)$ 为顶点之三角形区域，D_1 是 D 在第一象限部分，则 $\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)dxdy=$（ ）.

（A） $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$； （B） $2\iint\limits_{D_1}xydxdy$；

（C） $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$； （D） 0 .

14 设 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\right\}$，$\left[1+x^2+y^2\right]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\iint\limits_{D} xy\left[1+x^2+y^2\right]dxdy$.

15. 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内连续，$I=\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$，$D_1$ 为 D 在第一象限部分且 $D_1=\frac{1}{4}D$，则使 $I=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$ 成立的条件是（ ）.

（A） $f(x,y)$ 及 D 均关于原点对称；

（B） D 关于 x,y 轴对称， $f(x,y)$ 关于原点对称；

（C） D 关于原点对称， $f(x,y)$ 关于 x,y 轴对称；

（D） D 和 $f(x,y)$ 均关于 x,y 轴对称.

16. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于（ ）.

（A） $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$；　　（B） $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$；

（C） $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$；　　（D） $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

17 计算 $\int_0^a dx \int_0^b e^{\max\{b^2x^2, a^2y^2\}} dy \left(a>0, b>0\right)$.

题型 与二重积分相关的不等式

1 估计 $\iint_\sigma (\sin x^2 + \cos y^2) \mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 σ 为正方形 $0 \le x,\ y \le 1$.

2. 记 $I_1 = \iint\limits_{1 \le x^2+y^2 \le 2} \ln(x^2+y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$， $I_2 = \iint\limits_{\frac{1}{2} \le |x|+|y| \le 1} \ln(x^2+y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$I_3 = \iint\limits_{x^2+2y^2 \le 1} xy(x+y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则它们的大小顺序为（　　）.

（A） $I_1 < I_2 < I_3$　　（B） $I_2 < I_3 < I_1$

（C） $I_3 < I_1 < I_2$　　（D） $I_1 < I_3 < I_2$

3、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(x) \ge 0$，且 $f(x)$ 单调减少，试证

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx} \le \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}.$$

4．平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，并设 $M=\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$，

$N=\iint\limits_D \cos^2 x\cos^2 ydxdy$，$P=\iint\limits_D [e^{-(x^2+y^2)}-1]dxdy$，则有（ ）.

（A） $M>N>P$；（B） $N>M>P$；

（C） $M>P>N$；（D） $N>P>M$.

5、若 $f(x),g(x)$ 皆连续，且具有相同的单调性，

求证： $\int_0^1 f(x)g(x)dx\ge\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx$，

6 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\ge(b-a)^2.$$

题型 综合问题

1 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导数，且满足

$$f(t)=2\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy+t^4\qquad(t\ge 0),$$

求 $f(t)$。.

2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)=x+\int_x^1 f(y)f(y-x)dy$，求 $\int_0^1 f(x)dx$.

3. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 D 由 $y=x^2,x=1$ 及 $y=0$ 围成，

则 $f(x,y)=$____________

4． 设 $f(x,y)$ 在单位圆域 $x^2+y^2\le 1$ 内有连续偏导且在边界上取值为零，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}d\sigma=\underline{\qquad\qquad}$$