多元函数微分学—典型例题

1．设 $D=\{(x,y)|x>y^2\}, f(x,y)=\dfrac{e^{x-y^3}-1}{x},(x,y)\in D$，则

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=$ __________

2 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$.

3. 已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且偏导数都存在，$f(0,0)=0$，则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 可以等于下列四式中的（ ）.

（A）$\dfrac{x^2+y^4}{x^2+y^2}$ （B）$\sqrt{x^2+y^2}$ （C）$\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$ （D）$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

4．下面命题正确的是（ ）

（A）当 $f'_x(x_0,y_0)$ 存在时，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿 x 轴的正向和负向的方向导数都存在；

（B）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿 x 轴的正向和负向的方向导数都存在，则 $f'_x(x_0,y_0)$ 存在；

（C）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿任何方向的方向导数都存在，则 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 都存在；

（D）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿任何方向的方向的导数都存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

5. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则下列结论不成立的是（ ）.

（A）$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x_0,y_0) 处都连续

（B）在 (x_0,y_0) 处，两个偏微分存在

（C）存在 $\delta>0$，在 $U_\delta(x_0,y_0)$ 上函数有界

（D）曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处有切平面

6. 下列条件中，使函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，且全微分为零的是（ ）.

（A） $f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0$

（B） $\Delta f\big|_{(x_0,y_0)}=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

（C） $\Delta f\big|_{(x_0,y_0)}=\dfrac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

（D） $\Delta f\big|_{(x_0,y_0)}=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

7. 讨论函数 $z=\sqrt{x^2+y^4}$ 在点 $(0,0)$ 处，偏导数的存在性.

8 设 $f(x,y)$ 可微，且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f,\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=e^{\cot y},f(0,\dfrac{\pi}{2})=1$，求 $f(x,y)$。

9. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，则下列结论错误的是（ ）.

（A） $\forall x_0$，$f(x_0,y)$ 是 y 的连续函数；$\forall y_0$, $f(x,y_0)$ 是 x 的连续函数.

（B） $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$ 均存在；

（C） (x,y) 沿任何直线方向趋于 $(0,0)$，$f(x,y)$ 极限存在且相等；

（D） $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 存在.

10. $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内两个偏导数 f'_x，f'_y 存在且有界，是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续的（ ）.

（A）充分但不必要条件；　　（B）必要但不充分条件；

（C）充分必要条件；　　（D）既不充分，也不必要条件.

11. 设 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$，其中 $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $g(0,0)=0$，则（ ）.

（A） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在，但不连续；

（B） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，但偏导数不存在；

（C） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在，但不可微；

（D） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

12. 已知 $(axy^3 - y^2\cos x)dx + (1 + by\sin x + 3x^2y^2)dy$ 为某二元函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 a,b 的值分别是（ ）.

（A） $-2,2$；　（B） $2,-2$；　（C） $-3,3$；　（D） $3,-3$.

13. 设 $f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数， $z = f(x,y) - f(y,x)$

则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ________

14. 设 $z = f(x,y)$ 满足： $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$， 且 $f(x,0) = x^2$， $f(0,y) = y$， 则

$f(x,y) =$ ________

15　函数 $z = x^3 f(xy, \dfrac{y}{x})$， 其中 $f \in C^2$， 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

16. 设 $z = f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处全微分存在， $f(1,1) = 1, \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)} = 2, \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)} = 3$， 又设 $\varphi(x) = f(x, f(x,x))$， 求 $\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1} =$ ________

17 设 $f(u)$ 在 $u > 0$ 上二阶连续可微 $f(1) = 0$， $f'(1) = 1$， $z = f(x^2 - y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 求 $f(u)$

18 $\begin{cases} u = f(x-ut, y-ut, z-ut) \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$

19 已知 $z=f(u)$, 且 $u=\psi(u)+\int_y^x p(t)dt$, 其中 $z(u)$ 可微 $\psi'(u)$ 连续且 $\psi'(u)\neq 1$， $p(t)$ 连续，计算 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

21 设 $u(r,t)=t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}$ 且满足 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$，则 $n=$ ________

22 设 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 其中 $f(u)$ 具有连续的二阶导数， $f(0)=f'(0)=0$ 且

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}=z+\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f(u)$。.

23 设 $u=f(\dfrac{y}{x})+xg(\dfrac{y}{x})$，其中 f,g 均二阶连续可导，证明

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

24．设 $f(x,y)$ 存在连续的二阶偏导数且满足：

$f(x,y)=x^2-xy+y^2+0(x^2+y^2)$ 则（ ）

（A） $f(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 的极大值；

（B） $f(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值；

（C） $f(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值；

（D） $f(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值不能确定.

25. 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 G 上有二阶连续的偏导数，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，则函数 $f(x,y)$ 的（　　）.

（A）最大值点和最小值点均在 G 的内部

（B）最大值点和最小值点均在 G 的边界上

（C）最大值点在 G 的内部，最小值点在 G 的边界上

（D）最大值点在 G 的边界上，最小值点在 G 的内部

26. 设 $u(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 取极小值，并∃ $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2}$ 则（ ）.

（A）$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} \geq 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} \geq 0$；　　（B）$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} > 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} > 0$；

（C）$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} \geq 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} \leq 0$；　　（D）$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} \leq 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} \geq 0$.

27. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 邻域内连续，则 $f(0,0)$ 为 $f(x,y)$ 极值的充分条件是（ ）.

（A）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$；　　（B）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$；

（C）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-x\sin y}{(x^2+y^2)^2}=1$；　　（D）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=1$.

28、已知曲面 $S:\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$, 平面 $\pi:2x+2y+z+5=0$，求:（1）曲面 S 上平行于平面 π 的切平面方程;（2）曲面 S 与平面 π 之间的最短距离。

29、求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4,\ \ y\geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

30 设 $xdx+2ydy$ 为某二元函数 $f(x,y)$ 的全微分，且 $f(0,0)=1$，求 $f(x,y)$ 在区域 $4x^2+y^2\le 25$ 上的最值与最小值。

31．设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\vec{l}=\{1,1\}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=$____________

32．函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在 $M_0(1,0,1)$ 沿 M_0 指向 $M_1(3,-2,2)$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=$ ______

33．设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f'_x(0,0)=3,\ \ f'_y(0,0)=1$，则（ ）.

（A）$dz|_{(0,0)}=3dx+dy$；

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{3,1,1\}$；

（C）曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$；

（D）曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{3,0,1\}$.