# 第二型平面曲线积分题目

1 设函数$P(x,y),Q(x,y)\in C(G)$，且曲线积分$\int_l P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在区域$G$内与路径无关，则（　　）.

（A）$\forall A,B\in G$，都有$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\overline{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

（B）对$G$内任一闭曲线$c$，恒有$\oint_c P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$

（C）$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的原函数$u=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y+c$，定点$(x_0,y_0)\in G$

（D）在$G$内恒有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

2 设曲线$l:y=x^2$（$x$从$1$到$-1$），则$\int_l x\mathrm{d}s$和$\int_l y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$依次等于（　　）.

（A）$0,0$　　（B）$0,2$　　（C）$0,-2$　　（D）$-2,0$

3 在逆时针向的闭曲线 $C:|x|+|y|=2$ 上，$I=\oint_C \frac{ax\mathrm{d}y-by\mathrm{d}x}{|x|+|y|}=$（　　）.

（A）$4(a+b)$　　（B）$0$　　（C）$-4(a+b)$　　（D）$-4(a-b)$

4 计算 $\int_L \frac{ydx+(\pi a-x)dy}{(x-\pi a)^2+\pi^2 y^2}$，其中 $L$ 是从 $O(0,0)$ 沿摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 到 $A(2a\pi,0)$ 的一拱.

[1995—Ⅰ] 设函数 $Q(x,y)$在 $xOy$ 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关,并且对任意 $t$ 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$.

[1998] 确定常数$\lambda$,使在右半平面$x>0$上的向量$\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda \boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda \boldsymbol{j}$为某二元函数$u(x,y)$的梯度,并求$u(x,y)$.

[2002] 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，$L$ 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 $(a,b)$，终点为 $(c,d)$. 记 $I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\mathrm{d}y$.

（Ⅰ）证明曲线积分 $I$ 与路径 $L$ 无关；

（Ⅱ）当 $ab=cd$ 时，求 $I$ 的值.

[2003] 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \pi\}$，$L$ 为 $D$ 的正向边界. 试证：

（Ⅰ）$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；（Ⅱ）$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$.

[2004] 设 $L$ 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值为________.

**答** 应填$\frac{3}{2}\pi$.

[2005] 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 $L$ 上，曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

（Ⅰ）证明对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 $C$，有 $\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} = 0$；

（Ⅱ）求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

[2006] 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 $D$ 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 $L$，都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

[**2007**] 设曲线 $L: f(x,y)=1$（$f(x,y)$具有一阶连续偏导数）过第二象限内的点 $M$ 和第四象限内的点 $N$，$\Gamma$ 为 $L$ 上从点 $M$ 到点 $N$ 的一段弧，则下列积分小于零的是

(A) $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}s$.　　(D) $\int_{\Gamma} f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$.

[**2008**] 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\mathrm{d}y$，其中 $L$ 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

[**2010**] 已知曲线 $L$ 的方程为 $y=1-|x|(x\in[-1,1])$，起点是 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$________.

[**2012**]　已知 $L$ 是第一象限中从点(0,0)沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点(2,0)，再沿圆周$x^2+y^2=4$ 到点(0,2)的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2 y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

[**2013**] 设 $L_1: x^2+y^2=1$, $L_2: x^2+y^2=2$, $L_3: x^2+2y^2=2$, $L_4: 2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线. 记

$$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y(i=1,2,3,4),$$

则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$

(A) $I_1$.　　(B) $I_2$.　　(C) $I_3$.　　(D) $I_4$.

[2016] 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，$L_t$ 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线. 计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求 $I(t)$ 的最小值.

[2017] 若曲线积分 $\int_L \frac{x\mathrm{d}x - ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$ ________.

# 第二型空间曲线积分题目

［**1997**］ 计算曲线积分

$$\oint_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z,$$

其中 $C$ 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看 $C$ 的方向是顺时针的.

[**2001**] 计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 $L$ 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 $z$ 轴正向看去，$L$ 为逆时针方向.

[**2011**] 设 $L$ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$ ________.

[**2014**] 设 $L$ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$________.

[**2015**] 已知曲线 $L$ 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$ 起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$，终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分

$$I=\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z.$$

## 第二型曲面积分题目

[**2000**] 设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 $S$，都有

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$. 求 $f(x)$.

[2004] 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 的上侧.

[2005] 设 $\Omega$ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，$\Sigma$ 是 $\Omega$ 的整个边界的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

[**2006**] 设 $\Sigma$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

________.

[**2007**] 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧.

[**2008**] 设曲面 $\Sigma$ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

[2009] 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $\Sigma$ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

[**2014**] 设 $\Sigma$ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

[2016] 设有界区域 $\Omega$ 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，$\Sigma$ 为 $\Omega$ 整个表面的外侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

[2018] 设 $\Sigma$ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

## 散度与旋度

[2001] 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ r)\Big|_{(1,-2,2)}=$________.

［2018］ 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$，则 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(1,1,0)=$________.

[2003] 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}, G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

（Ⅰ）讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性；（Ⅱ）证明：当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.