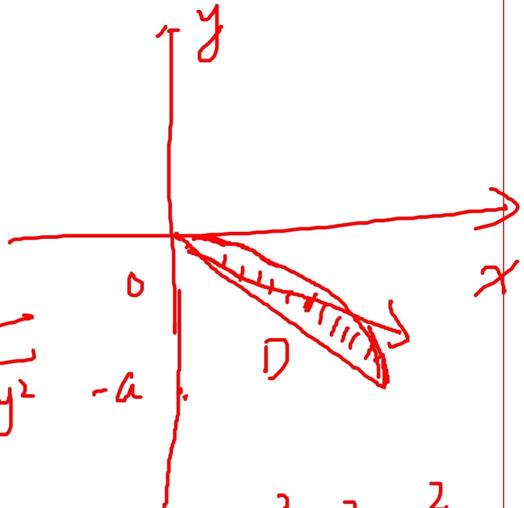
5　计算二次积分

$$I=\int_0^a \mathrm{d}x\int_{-x}^{-a+\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y\ (a>0).$$

解: $\begin{cases} 0\le x\le a \\ -x\le y\le -a+\sqrt{a^2-x^2} \end{cases}$




$$I=\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} d\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{1}{\sqrt{4a^2-r^2}}dr$$

$(y+a)^2+x^2=a^2$.

$r=-2a\sin\theta$.

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\arcsin\frac{r}{2a}\Big|_0^{-2a\sin\theta}d\theta=\frac{\pi^2}{32}.$$

6　设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=0,\ x=1$ 围成的区域，则 $f(x,y)=$（　　）.

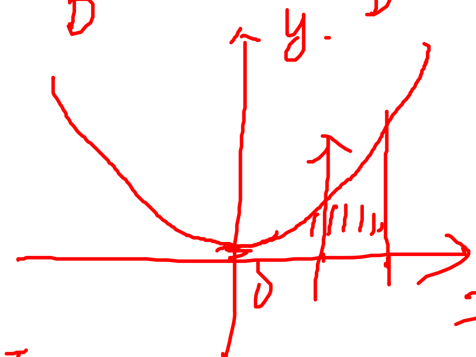
（A）$xy+1$　　（B）$xy+\frac{1}{3}$　　（C）$xy+\frac{1}{8}$　　（D）$xy-\frac{1}{12}$

解: 设 $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

对等式两端同时取二重积分.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=I=\iint_D xy\,dx\,dy+\iint_D I\,dx\,dy$$

$$右=\int_0^1 x\,dx\int_0^{x^2}y\,dy+I\int_0^1 dx\int_0^{x^2}dy.$$




$=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}I$　　左 $=I$.

$\frac{1}{12}+\frac{1}{3}I=I \Rightarrow I=\frac{1}{8}$

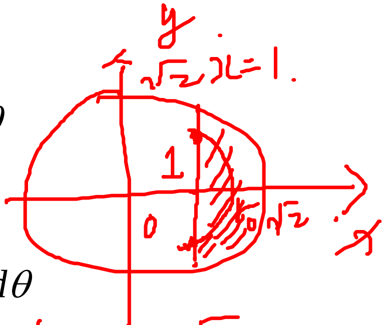
7．设 $\sigma: x^2+y^2\le 2 \quad x\ge 1.\qquad I=\iint\limits_{\sigma} f(x,y)d\sigma$ 把 $I$ 表示为极坐标系下先对 $\theta$ 后对 $r$ 的累次积分是（ ）

（A）$I=\int_1^{\sqrt{2}} rdr\int_{-\arccos\frac{1}{r}}^{\arccos\frac{1}{r}} f(r\cos\theta,\sin\theta)d\theta$

（B）$I=\int_1^{\sqrt{2}} rdr\int_0^{\arccos\frac{1}{r}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$

（C）$I=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} rdr\int_{-\arccos\frac{1}{r}}^{\arccos\frac{1}{r}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$

（D）$I=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} rdr\int_0^{\arccos\frac{1}{r}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$



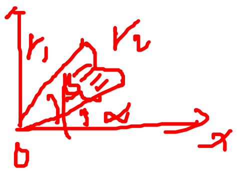

$1\le r\le\sqrt{2}$.

介于 1 与 $\sqrt{2}$ 之间 $r=r_0$.

$r\cos\theta=1 \qquad \theta=\arccos\frac{1}{r}$

解：先找 $\theta$ 后找 $r$. $\alpha\le\theta\le\beta$

$\theta$-型. $\{r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)$




$r$-型 $r_1\le r\le r_2$.

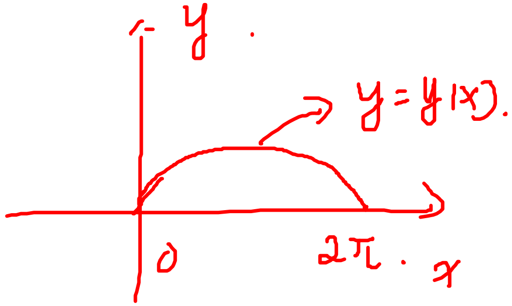
$\theta_1(r)\le\theta\le\theta_2(r)$

介于 $r_1$ 与 $r_2$ 之间画 $\boxed{r=r_0}$

8　$\sigma$ 是由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ 及 $y=0$ 围成.

计算二重积分 $I=\iint\limits_{\sigma} y^2dxdy$.

解. $0\le x\le 2\pi$.




$I=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{y(x)}y^2dy$

$=\int_0^{2\pi}\frac{y^3}{3}\Big|_0^{y(x)}dx$

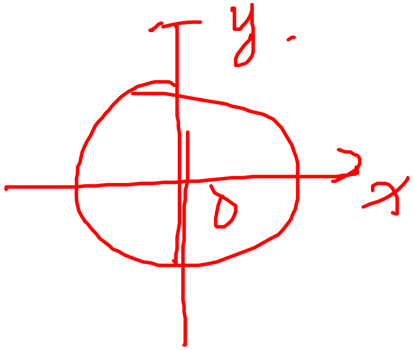
$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4dt$.

$=\frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin u)^8du$. $\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx$

$=\frac{35}{12}\pi$.

9 设区域 D：$x^2+y^2\le R^2$，则

$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\underline{\qquad\qquad}$$




$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy.$$

$$=\iint_D\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)dxdy.$$

$$I=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)dxdy.$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D(x^2+y^2)d\sigma.$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

10 设 $f(x)=\begin{cases}a, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，且 $D$ 为 $-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，则 $\iint_D f(y)f(x-y)dxdy=\underline{\qquad\qquad}$

$$\begin{cases}0\le y\le 1\\ 0\le x-y\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le y\le 1\\ y\le x\le y+1.\end{cases}\quad D.$$

$$\iint_D f(y)f(x-y)\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_y^{y+1}f(y)f(x-y)\,d\boxed{x}$$

$$=\int_0^1 f(y)\,dy\int_y^{y+1}f(x-y)\,dx\qquad x-y=u.$$

$$=\int_0^1 a\,dy\cdot\int_0^1 f(u)\,du=a^2.$$

11　设 $f(u)$ 为连续函数，且 $\int_0^1 f(r)dr = 1$，则 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x^2+y^2)dxdy =$ ________.

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(r^2)\, r dr$$

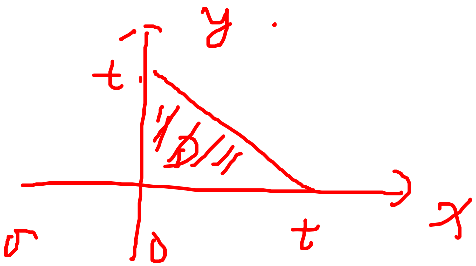
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^1 f(r^2)\, dr^2$$

$$= \pi \int_0^1 f(u)\, du.$$

$$= \pi.$$

12. $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2} \int_0^t dx \int_0^{t-x} e^{x^2+y^2} dy =$ ________

$$\begin{cases} 0 \le x \le t \\ 0 \le y \le t-x \end{cases}$$




$$原式 = \lim_{t\to 0} \frac{\iint\limits_D e^{x^2+y^2} d\sigma}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{\xi^2+\eta^2} \cdot \frac{1}{2}t^2}{t^2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

13．设 $D$ 是 $xoy$ 平面上以 $(1,1)$，$(-1,1)$，$(-1,-1)$ 为顶点之三角形区域，$D_1$ 是 $D$ 在第一象限部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy=$（　）.

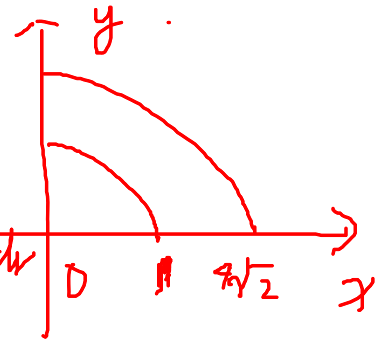
（A）$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$；　　（B）$2\iint\limits_{D_1} xy dxdy$；

（C）$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$；　　（D）$0$.

**14** 设 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\sqrt{2}, x\ge 0, y\ge 0\right\}$，$\left[1+x^2+y^2\right]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\iint\limits_D xy\left[1+x^2+y^2\right]dxdy$.

解：原式

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}} r\cos\theta\, r\sin\theta\, r\left[1+r^2\right]dr$$




$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}} r^3\left[1+r^2\right]dr$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 r^3dr+\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r^3dr\right]$$

$$=\frac{3}{8}.$$

15．设 $f(x,y)$ 在区域 $D$ 内连续，$I=\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$，$D_1$ 为 $D$ 在第一象限部分且 $D_1=\frac{1}{4}D$，则使 $I=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$ 成立的条件是（　）.

（A）$f(x,y)$ 及 $D$ 均关于原点对称；

（B）$D$ 关于 $x,y$ 轴对称，$f(x,y)$ 关于原点对称；

（C）$D$ 关于原点对称，$f(x,y)$ 关于 $x,y$ 轴对称；

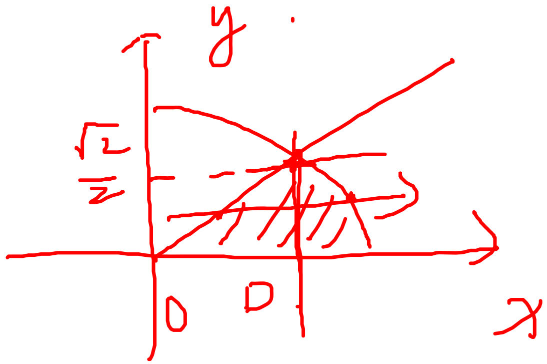
（D）$D$ 和 $f(x,y)$ 均关于 $x,y$ 轴对称.

16．设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于（　）.

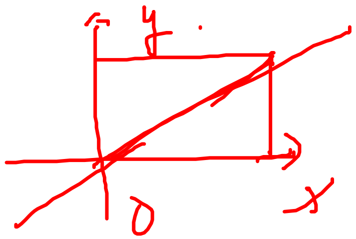
（A）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$；　　（B）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$；

（C）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$；　　（D）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$



**17** 计算 $\int_0^a dx\int_0^b e^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}dy\left(a>0,b>0\right)$.




$b^2x^2 \geq a^2y^2$

解：$\int_0^a dx\int_0^b e^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}dy\left(a>0,b>0\right)$

解：$I=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}x} e^{b^2x^2}dy.$

$$=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}x} e^{b^2x^2}dy+\int_0^a dx\int_{\frac{b}{a}x}^{b} e^{a^2y^2}dy$$

$$+\int_0^a dx\int_{\frac{b}{a}x}^{b} e^{a^2y^2}dy.$$

$$=\int_0^a \frac{b}{a}xe^{b^2x^2}dx+\int_0^b dy\int_0^{\frac{b}{a}y} e^{a^2y^2}dx$$

$$=\frac{1}{2ab}(e^{b^2a^2}-1)+\frac{1}{2ab}(e^{a^2b^2}-1)$$

$$=\frac{1}{ab}(e^{a^2b^2}-1)$$

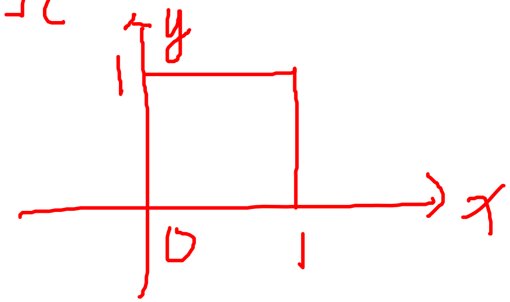
$$=\frac{1}{ab}(e^{a^2b^2}-1)$$

## 题型 与二重积分相关的不等式

1 估计 $\iint_{\sigma}(\sin x^2+\cos y^2)\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 $\sigma$ 为正方形 $0\le x,\ y\le 1$.

$m\Omega \le \int_{\Omega} f(P)\,\mathrm{d}\Omega \le M\Omega$

$m \le f(P) \le M$




$\iint_{\sigma}\cos y^2\,d\sigma = \iint_{\sigma}\cos x^2\,d\sigma$.

$\iint_{\sigma}(\sin x^2+\cos y^2)\,d\sigma = \iint_{\sigma}(\sin x^2+\cos x^2)\,d\sigma$.

$\sin x^2+\cos x^2=\sqrt{2}\sin(x^2+\frac{\pi}{4})$.

$0\le x\le 1$, $\quad \frac{\pi}{4}\le x^2+\frac{\pi}{4}\le 1+\frac{\pi}{4}$

$1\le \sqrt{2}\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$.

$1\cdot 1\le I\le 1\cdot\sqrt{2}$.

2. 记 $I_1=\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 2}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_{\frac{1}{2}\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_{x^2+2y^2\le 1}xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则它们的大小顺序为（ ）.

（A）$I_1<I_2<I_3$ （B）$I_2<I_3<I_1$

（C）$I_3<I_1<I_2$ （D）$I_1<I_3<I_2$

$1\le x^2+y^2\le 2$. $\quad \ln(x^2+y^2)>0$.

$I_1>0$.

$I_2$. $\quad \frac{1}{2}\le |x|+|y|\le 1$

$x^2+y^2\le(|x|+|y|)^2\le 1$

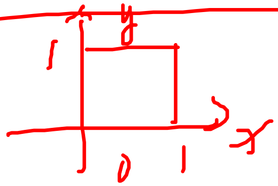
$I_2<0$.

$I_3=\iint\limits_{x^2+2y^2\le 1}(x^2y+xy^2)\,dxdy=0$

3、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)\ge 0$，且 $f(x)$ 单调减少，试证

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\le\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

$\Leftrightarrow$. $\int_0^1 xf^2(x)\,dx\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 f^2(x)dx\int_0^1 xf(x)dx$




左 $=\int_0^1 xf^2(x)dx\int_0^1 f(y)dy$.

$=\int_0^1 dx\int_0^1 f(y)xf^2(x)dy$.

$=\int_0^1 yf^2(y)dy\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x)\,yf^2(y)\,dy$.

$[yf(x)+xf(y)]-[xf(x)+yf(y)]$

$=(x-y)[f(y)-f(x)]$

$\ge 0$

左 $=\frac{1}{2}[\iint_D f(x)f(y)[xf(x)+yf(y)]d\sigma$.

右 $=\frac{1}{2}[\iint_D [yf(x)+xf(y)]f(x)f(y)d\sigma$.

4（作业）. 平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，并设 $M=\iint_D (x+y)^3dxdy$，

$N=\iint_D \cos^2 x\cos^2 y\,dxdy$，$P=\iint_D [e^{-(x^2+y^2)}-1]dxdy$，则有（ ）.

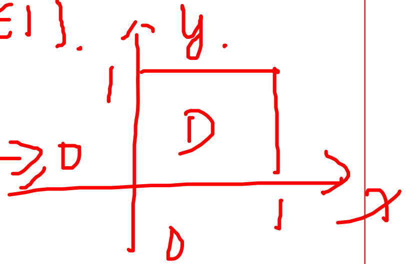
（A）$M>N>P$；（B）$N>M>P$；

（C）$M>P>N$；（D）$N>P>M$.

5、若 $f(x), g(x)$ 皆连续，且具有相同的单调性，

求证： $\int_0^1 f(x)g(x)dx \ge \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx$，

Pf $D=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$.



$$\iint_D [f(x)-f(y)]\cdot[g(x)-g(y)]\,d\sigma \ge 0$$

$$\Rightarrow \iint_D [f(x)g(x)+f(y)g(y)]\,d\sigma \ge \iint_D [f(x)g(y)+f(y)g(x)]\,d\sigma.$$

左 $= 2\iint_D f(x)g(x)\,d\sigma = 2\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)g(x)\,dy$

$= 2\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

右 $= 2\iint_D f(x)g(y)\,d\sigma = 2\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)g(y)\,dy$,

$= 2\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)\,dx$

不等式成立.

6（作业） 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，证明

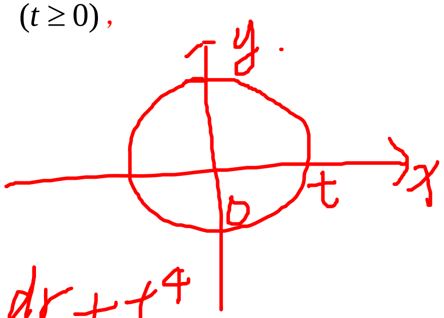
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \ge (b-a)^2.$$

题型 综合问题

1 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导数，且满足

$$f(t)=2\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy+t^4 \qquad (t\ge 0),$$

求 $f(t)$。.

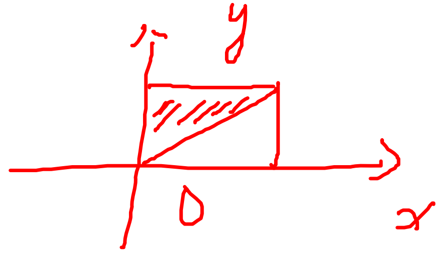


解. $f(t)=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t r^3 f(r)\,dr+t^4$

$f(t)=4\pi\int_0^t r^3 f(r)\,dr+t^4$

$f'(t)=4\pi t^3 f(t)+4t^3$

2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)=x+\int_x^1 f(y)f(y-x)dy$，求 $\int_0^1 f(x)dx$.



解: $\int_0^1 f(x)\,dx$

$=\int_0^1 x\,dx+\int_0^1 dx\int_x^1 f(y)f(y-x)\,dy$.

$=\frac{1}{2}+\int_0^1 dy\int_0^y f(y)f(y-x)\,dx$

$y-x=t$.

$=\frac{1}{2}+\int_0^1 f(y)\,dy\int_0^y f(y-x)\,dx$

$=\frac{1}{2}+\int_0^1 f(y)\,dy\boxed{\int_0^y f(t)\,dt}$

$=\frac{1}{2}+\int_0^1\int_0^y f(t)\,dt\,d\int_0^y f(t)\,dt$.

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\int_0^y f(t)\,dt\right]^2\Big|_0^1$

$\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(t)\,dt\right]^2 \Rightarrow 1$.

3．设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，

其中 $D$ 由 $y=x^2, x=1$ 及 $y=0$ 围成，

则 $f(x,y)=$__________

4．设 $f(x,y)$ 在单位圆域 $x^2+y^2\le 1$ 内有连续偏导且在边界上取值为零，

则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}d\sigma=$__________

解. $x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta$ .

$f(x,y)=\boxed{f(r\cos\theta, r\sin\theta)}$ 对 $r$ 求偏导.

$f_r'=\cos\theta f_x'+\sin\theta f_y'$ ,

$rf_r'=r\cos\theta f_x'+r\sin\theta f_y'$

$rf_r'=xf_x'+yf_y'$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\varepsilon\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}d\sigma=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_\varepsilon^1 f_r'dr}{2\pi}$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{2\pi f_r\Big|_\varepsilon^1}{2\pi}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\{\underbrace{f(\cos\theta,\sin\theta)}_{=0}-f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\}$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}[-f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)]=-f(0,0)$.