2020 春微积分期末试题

考试要求：本试卷满分 80 分，请于答题纸上作答。

一、简答题（1—6 小题，每题 10 分，合计 60 分）

1. 求方程 $3y''-y'-14y=0$ 的通解.

2. 已知 $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(3,4)}$.

3. 已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle|2\cos\theta\le r\le 1,\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4. 求函数 $z=\left(x^2+y\right)\mathrm{e}^{2x+y}$ 的极值.

5. 求幂级数 $\sum\limits_{n=2021}^{\infty}\dfrac{x^n}{n-2020}$ 的收敛域及和函数.

6. 计算 $J=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是旋转抛物面

   $z=1-x^2-y^2\ (z\ge -1)$ 的下侧.

二、解答题:（7—9 小题，共计 20 分）

7. （本题满分 8 分）设抛物面 Σ_1: $z=1+x^2+y^2$ 及圆柱面 Σ_2: $(x-1)^2+y^2=1$，求 Σ_1 的一个切平面 Π，使得由它及 Σ_1 与 Σ_2 围成的立体体积 Ω 达到最小.

8. （本题满分 7 分）计算曲线积分 $I=\int\limits_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 L 是从点 $(2,0,0)$ 沿着下曲线到点 $(0,0,2)$ 的路径: $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1, x+z=2$ （$x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$）

9. （本题满分 5 分）设数列 $\{a_n\}$ 单调减少收敛于零，且对任意正整数 n，$(a_1-a_n)+(a_2-a_n)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)$ 有界，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.