多元函数积分学

基本内容 2.　三重积分

1. 设闭区域$V: x^2+y^2+z^2\le 4$，则$I=\iiint_V \dfrac{\sin^9(\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}V$（　　）.

（A）为正　　（B）为负　　（C）为零　　（D）不存在

2. 由曲面$z=x^2+y^2$及$z=1$所围立体V的体积数不等于（　　）.

（A）$\int_0^1 \pi z\mathrm{d}z$　　（B）$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}[1-(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma$

（C）$\iiint_V \mathrm{d}V$　　（D）$\iint\limits_{\substack{r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}}(1-r^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

3. 计算$\iiint_V \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}V$，其中$V$由曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$围成.

4　求$\iiint_V |z-\sqrt{x^2+y^2}|\mathrm{d}V$，其中$V$由不等式组

$x^2+y^2+z^2\le 2,\ x^2+y^2\le 1, z\ge 0$确定.

5　计算$\iiint_V [(1-x+2y)^2+z^2)]\mathrm{d}V$，其中$V$为正八面体$|x|+|y|+|z|\le 1$.

6　设$f(x,y,z)$连续，$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}V$，求$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^3}$和$F'(t)$.

7　求心脏线$r=a(1+\cos\theta)$绕极轴旋转一周所围成的立体体积V.

8、设Ω是曲面$x^2+y^2-z^2=0$与平面$z=2$围成的空间区域计算

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$$

9、设 $f(u)$ 在 $u=0$ 可导，$f(0)=0,\quad \Omega: x^2+y^2+z^2\le t^2\left(t>0\right)$，且 $f'(0)=1$ 求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^5}\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dV.$$

10. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=$________，其中$\Omega$为曲线$\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕z轴旋转一周而曲面与平面$z=2,z=8$所围立体。

基本内容 3. 曲线积分

题型：第一型曲线积分

1. 设c是由$y=0,\ y=x$和$x^2+y^2=a^2$三条线在第一象限内构成的闭曲线，求

$$\oint_c e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s.$$

2 求$J=\oint_c(2x^2+3y^2)\mathrm{d}s$，其中闭曲线$c:x^2+y^2=2(x+y)$.

3.设l为下半圆周$y=-\sqrt{R^2-x^2}$，则$\int_l(x-2y)^2\mathrm{d}s=$________.

4. 若L为$x^2+y^2=R^2$，则$\oint_L(x+2y)^2ds=$____________

基本内容 4. 一型曲面积分

1. 求函数$f(x,y,z)=\sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{4-z^2}}$在曲面$x^2+y^2+\dfrac{z^2}{2}=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\le 1$上对面积的曲面积分.

2 估计曲面积分$\iint_S xy^2z^3\mathrm{d}S$的值，其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$位于第一卦限的部分.

3 设S为上半球面$x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$, S_1为S在第一卦限中的部分，则有（ ）.

（A）$\iint_S x\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}x\mathrm{d}S$ （B）$\iint_S y\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}x\mathrm{d}S$

（C）$\iint_S z\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}x\mathrm{d}S$ （D）$\iint_S xyz\mathrm{d}S=4\iint_{S_1}xyz\mathrm{d}S$

4 设S是半径为R的球面在第一卦限的部分，则$\iint_S(2x^2+3y^2+2z^2)\mathrm{d}S=$ ________.

基本内容 5.

1 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上，以三个点 $A(1,0,0), B(0,1,0), C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为顶点的球面三角形 S（边 $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ 均为大圆弧）上，已知电荷面密度 $\mu=x^2+z^2$，求 S 上带电总量 Q.

2 已知物质曲线 c：

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=Rx \end{cases} \qquad (z \geq 0)$$

的线密度为 $\sqrt{x}$，求其对三个坐标轴的转动惯量之和 $I_x+I_y+I_z$.

3 求曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M_0(1,-1,3)$ 处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积 V.

4 在有界闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,y^2 \leq x \leq 1\}$ 上的薄板，质量面密度 μ 为常数，求薄板对直线 $y=x$ 的转动惯量 I.

5 设半径为 R 的球面 $\sum$ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上，问 R 取何值时，球面 $\sum$ 含在定球面内部的面积最大？