有关全导数

设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处全微分存在， $f(1,1)=1,\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2,\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=3$，

又设 $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}=$ ______

解、$\frac{d\varphi^3(x)}{dx}=3\varphi^2(x)\left\{f_x'(x,x)+f_y'(x,x)\left[f_x'(x,x)+f_y'(x,x)\right]\right\}$

$=3\left[2+3(2+3)\right]=51\quad(当x=1时)$

由偏导求函数，注意不定积分、微分方程的思想的运用

设 $f(u)$ 在 $u>0$ 上二阶连续可微 $f(1)=0$， $f'(1)=1$， $z=f(x^2-y^2)$

满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 求 $f(u)$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf'$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+4x^2f''$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2f'+4y^2f''$$

$$\Rightarrow uf''(u)+f'(u)=0 \qquad (u=x^2-y^2)$$

令 $\quad f'(u)=t \quad \Rightarrow \quad t=C_1\dfrac{1}{u}$

$$\Rightarrow f(u)=C_1\ln u+C_2$$

由 $f(1)=0$, $f'(1)=1 \Rightarrow C_1=1$, $\quad C_2=-\dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(u)=\ln u$$

设 $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$ 其中 $f(u)$ 具有连续的二阶导数，

$f(0) = f'(0) = 0$ 且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = z + \sqrt{x^2+y^2}$ ，

求 $f(u)$ 。.

解：$\frac{dz}{dx} = f' \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'' \frac{x^2}{x^2+y^2} + f' \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' \frac{y^2}{x^2+y^2} + f' \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow f'' + \frac{f'}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{f'}{\sqrt{x^2+y^2}} = f + \sqrt{x^2+y^2}$$

即 $f''(u) = f(u) + u, \quad u = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda = \pm 1$$

特解 $f_*(u) = -u$

$$\Rightarrow f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u} - u$$

$$f'(u) = C_1 e^u - C_2 e^{-u} - 1$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(u) = \frac{1}{2}e^u - \frac{1}{2}e^{-u} - u$$

计算或证明相关等式

已知 $z=f(u)$, 且 $u=\psi(u)+\int_y^x p(t)dt$, 其中 $z(u)$ 可微 $\psi'(u)$

连续且 $\psi'(u)\neq 1$， $p(t)$ 连续，计算 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

设 $u(r,t)=t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}$ 且满足 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$，则

$n=$ ________

解、$\dfrac{\partial u}{\partial t}=nt^{n-1}e^{-\frac{r^2}{4t}}+t^n\dfrac{r^2}{4t^2}e^{-\frac{r^2}{4t}}=\left(\dfrac{n}{t}+\dfrac{r^2}{4t^2}\right)u$

$\dfrac{\partial u}{\partial r}=-\dfrac{r}{2t}u \quad r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}=-\dfrac{r^3}{2t}u$

$\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)=\left(-\dfrac{3r^2}{2t}+\dfrac{r^4}{4t^2}\right)u$

$\dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\right]=\left(-\dfrac{3}{2t}+\dfrac{r^2}{4t^2}\right)u$

由 $\left(\dfrac{n}{t}+\dfrac{r^2}{4t^2}\right)u=\left(-\dfrac{3}{2t}+\dfrac{r^2}{4t^2}\right)u\Rightarrow n=-\dfrac{3}{2}$

设$u=f(\frac{y}{x})+xg(\frac{y}{x})$，其中$f,g$均二阶连续可导，证明

$$x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$$

解： $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'+g-\frac{y}{x}g'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}f'+g'$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'+\frac{y^2}{x^4}f''-\frac{y}{x^2}g'+\frac{y}{x^2}g'-\frac{y^2}{x^2}g''$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'-\frac{y}{x^3}f''+\frac{1}{x}g'-\frac{1}{x}g'-\frac{y}{x^2}g''$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''+\frac{1}{x}g''$$

代入即有$x^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$

已知曲面$S:\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$，平面$\pi:2x+2y+z+5=0$，求：

（1）曲面 S 上平行于平面π的切平面方程；

（2）曲面 S 与平面π之间的最短距离。

解：1）$F(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2$

$F_x'=x$，$F_y'=2y$，$F_z'=\frac{1}{2}z$

π 的法向量$\vec{n}=(2,2,1)$

$$k=\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{\frac{1}{2}z_0}{1}\Rightarrow x_0=2k，\ y_0=k，\ z_0=2k$$

代入$k=\pm\frac{1}{2}$，点$(1,\frac{1}{2},1)$或$(-1,-\frac{1}{2},-1)$

切平面 $2(x-1)+2(y-\frac{1}{2})+(z-1)=0$

或 $2(x+1)+2(y+\frac{1}{2})+(z+1)=0$

2）$d=\dfrac{|2x+2y+z+5|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}$转化为$D(x,y,z)=2x+2y+z+5$在$\frac{1}{2}x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2=1$下最值

设 $F=2x+2y+z+5+\lambda(\frac{1}{2}x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2-1)$

$$\left.\begin{aligned}&F_x'=2+\lambda x=0\\&F_y'=2+2\lambda y=0\\&F_z'=1+\frac{1}{2}\lambda z=0\\&F_\lambda'=\frac{1}{2}x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-\frac{1}{2}\\z=-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=1\\y=\frac{1}{2}\\z=1\end{cases}$$

$D(-1,-\frac{1}{2},-1)=1$

$D(1,\frac{1}{2},1)=9$

最短距离$\frac{1}{3}$

几何应用、方向导数与梯度

下面命题正确的是（ ）

（A）当 $f'_x(x_0,y_0)$ 存在时，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿 x 轴的正向和负向的方向导数都存在；

（B）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿 x 轴的正向和负向的方向导数都存在，则 $f'_x(x_0,y_0)$ 存在；

（C）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿任何方向的方向导数都存在，则 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 都存在；

（D）若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿任何方向的方向的导数都存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\vec{l}=\{1,1\}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=$ ________

解、由方向导数定义

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-0}{\rho}\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho-0}{\rho}=1$$

函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在$M_0(1,0,1)$沿M_0指向$M_1(3,-2,2)$的方向导数

$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=$ ________

解、$\overrightarrow{M_0M_1}=(2,-2,1)\quad(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=f_x'\cos\alpha+f_y'\cos\beta+f_z'\cos\gamma$$

$$=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

设$f(x,y)$在点$(0,0)$附近有定义，且$f_x'(0,0)=3,\ \ f_y'(0,0)=1$，

则（ ）.

（A） $dz|_{(0,0)}=3dx+dy$；

（B）曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$\{3,1,1\}$；

（C）曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{1,0,3\}$；

（D）曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{3,0,1\}$.

解、设$\begin{cases}F(x,y,z)=f(x,y)-z=0\\ G(x,y,z)=y=0\end{cases}$

$F_x'=f_x'\qquad F_y'=f_y'\qquad F_z'=-1$

$G_x'=0_x\qquad G_y'=1\qquad G_z'=0$

曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在$(0,0,\ f(0,0))$的切向量

$$\vec{s}=\left\{\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&3\\0&0\end{vmatrix}.\begin{bmatrix}3&1\\0&1\end{bmatrix}\right\}=\{1,0,3\}$$

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值.

解：1） D 内部

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x-2y^2x=0 \\ f'_y &= 4y-2yx^2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\sqrt{2} \\ y_1=1 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_2=-\sqrt{2} \\ y_2=1 \end{cases}$$

2） x 轴上，$-2\le x\le 2$

$$f(x,y)=x^2, \quad 0\le f(x,y)\le 4$$

3）在 $y=\sqrt{4-x^2}, \quad x\in(-2,2)$

$$f(x,\sqrt{4-x^2})=x^4-5x^2+8, \quad f'=4x^3-10x=0$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\sqrt{10} \\ y=\frac{1}{2}\sqrt{6} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{2}\sqrt{10} \\ y=\frac{1}{2}\sqrt{6} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

综上

$$f(\pm\sqrt{2},1)=2 \qquad f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{10},\frac{1}{2}\sqrt{6})=\frac{7}{4}$$

$$f(0,2)=8 \quad 最大 \qquad f(0,0)=0 \quad 最小$$

设 $xdx+2ydy$ 为某二元函数 $f(x,y)$ 的全微分，且 $f(0,0)=1$，求 $f(x,y)$ 在区域 $4x^2+y^2\le 25$ 上的最值与最小值。

解：$dz=xdx+2ydy,\quad f_x'=x,\quad f_y'=2y$

$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+C(y)$$

$$f_y'(x,y)=C'(y)=2y\Rightarrow C(y)=y^2+C$$

$$\Rightarrow\ f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+y^2+C$$

由 $f(0,0)=1,\quad C=1$

$$\Rightarrow\ f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+y^2+1$$

1）在 $D:4x^2+y^2\le 25$ 内部

$$f_x'=x=0\qquad f_y'=2y=0$$

$$\Rightarrow\ f(0,0)=1$$

2）在 $D:4x^2+y^2=25$ 边界上

$$\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\cos\theta\\ y=5\sin\theta\end{cases}\qquad f(x,y)=25(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\sin^2\theta)+1$$

$$z(\pm\frac{5}{2},0)=\frac{33}{8}$$

$z(0,\pm 5)=26$ 最大

$z(0,0)=1$ 最小