基于“地心隧道列车”的问题探究及拓展应用

艾 静
(广东湛江第一中学,广东 湛江 524038)

在科幻电影《全面回忆》中,地心隧道列车出现在银幕上,这或许还是电影史上的第一次.其实地心隧道列车并不是什么新奇的想法,早在17世纪,英国科学家胡克就提出过这个设想.

1 构建物理模型

S. Targ 在其所著《理论力学简明教程》中涉及到一个有趣的力学问题:“忽略空气阻力和摩擦,试求物体从沿着地球的弦开挖的隧道 AB 的一端运动到另一端所经过的时间.”[1] 设地球半径 $R=6370$ km.

地球内部物体在距地心 O 为 r 处($r<R$),只受到以 O 为圆心,半径为 r 的一部分球体的引力,半径大于 r 的球壳部分对物体无引力.即整个薄球壳质量对内部物体 m 的引力为0,因而可以推知,半径在 r 和 R 之间的地球部分对物体的引力为0.

基于以上结论,可推知物体在引力作用下一直加速,做加速度不断减小的加速运动,到达地心时速度达到最大,然后开始做减速运动,当物体达到地球另一面时,速度刚好减为0,可将物体的运动视为对称的两部分.

2 问题探究

2.1 趣味探究1:求解物体运动时间

提示:重力的理论指出:在地球内部,物体所受到的指向地心的引力 F 正比于物体到地心的距离 r,物体 m 所受万有引力 $F=\dfrac{GM'm}{r^2}$,其中,M' 为半径为 r 的地球的质量.

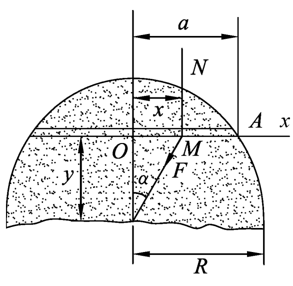

图1

设地球密度为 ρ,质量为 M,则 $M'=\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho=\dfrac{4}{3}\pi r^3\dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\dfrac{r^3}{R^3}M$,$F=\dfrac{GMm}{R^3}r$,考虑到当 $r=R$(即在地球的表面)时,力 F 就等于物体的重力($F=mg$),因此,处于地球内部的物体受力为 $F=mg\dfrac{r}{R}$,这里 r 是从地心到点 M 的距离.

取弦的中点 O 为坐标原点(在此点置于隧道里的物体受力平衡),沿 OA 方向取为 Ox 轴.设弦长为 $2a$,初始条件为:当 $t=0$ 时,$x=a$,$v_x=0$.

列出质点沿 x 轴的运动微分方程如下:

$$m\ddot{x}=-F\cos\alpha=-\frac{mg}{R}r\cdot\frac{x}{r}=-mg\frac{x}{R},$$

$$\ddot{x}+\frac{g}{R}x=0.$$

令 $\dfrac{g}{R}=K^2$,则有

$$\ddot{x}+K^2x=0.$$

这是质点做简谐运动的微分方程,说明物体在隧道内做简谐运动,其周期为 $T=\dfrac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.故物体通过隧道 AB 的时间为 $T_{AB}=\dfrac{T}{2}=\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}=2531\ \text{s}=42'11''$,这说明物体通过隧道的时间与隧道的长度无关,只要贯穿地球任两点的隧道,其运动时间恒等于42 min 11 s,这是一个有趣的结果.

2.2 趣味探究2:运动过程中的最大速度

分析可知,当物体运动到隧道中点时,物体的动能最大,此时物体对应的最大速度是多少?

方法1:用动能定理方法.

设物体向地心移动了 $\Delta r\left(\Delta r=\dfrac{R-d}{n},n\to\infty\right)$,则此过程引力的元功 $\Delta W=F\Delta r=\dfrac{GMm}{R^3}r\Delta r$.将物体从 $r=R$ 处移至 $r=d$ 处,引力功:$W=\sum\Delta W=\sum\dfrac{GMm}{R^3}r\Delta r=\dfrac{GMm}{R^3}\sum r\Delta r=\dfrac{GMm}{R^3}\Delta r\sum_{i=1}^{n}r_i=\dfrac{GMm}{R^3}\dfrac{R-d}{n}\bar{r}=\dfrac{GMm}{R^3}\dfrac{R-d}{n}\cdot\dfrac{(R+d)n}{2}=\dfrac{GMm}{2R^3}(R^2-d^2)$.

由动能定理,此过程物体动能的增量 $\Delta E_k = W = \frac{GMm}{2R^3}(R^2 - d^2)$,故最大动能也为 $\frac{GMm}{2R^3}(R^2 - d^2)$. 若隧道沿地球直径开挖,$d=0$,故此时最大动能 $E_{kmax} = \frac{GMm}{2R}$,物体通过地心处速度最大,最大速度为 $v_{max} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$,此速度与地球卫星的第一宇宙速度相同,即 $v_{max} = 7.9\ \text{km/s}$,此结果令人惊叹!

方法 2:简谐运动等效法.

在求解质点运动时间时得到质点做简谐运动的微分方程:$\ddot{x} + K^2 x = 0$,其通解为 $x = A\sin(kt + \alpha)$,由初始条件:当 $t=0$ 时,$x_0 = a$,求得 $A = a$ 和 $\alpha = \frac{\pi}{2}$. 故通解为 $x = a\sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right)$,即 $x = a\cos\sqrt{\frac{g}{k}}t$.

对 $x = a\cos\sqrt{\frac{g}{k}}t$ 求导:$v_x = \ddot{x} = -a\sqrt{\frac{g}{R}}\sin\sqrt{\frac{g}{R}}t$,显然,$|v_{xmax}| = a\sqrt{\frac{g}{R}}$,可见最大速度的值正比于隧道的长度. 若取 $2a = 2R$(即隧道沿地球的直径),可求得物体通过地心的速度为 $v_c = \sqrt{Rg} = 7.9\ \text{km/s}$,用此方法求得的最大速度仍为第一宇宙速度.

3 物理模型的拓展应用分析——简谐运动

在高中物理教学中,也常碰到相似问题的分析.

3.1 电场中的简谐运动模型

例. 如图 2 所示,两个等量同种点电荷 q 分别固定于 A、B 两点,A、B 相距为 $2l$. 一个质量为 m,电荷量为 q 的带电粒子从 C 点由静止释放,仅受电场力作用,沿着 AB 中垂线运动到 D 点(C、D 是关于 AB 对称的两点,图中未标出其具体位置). 求从 C 点运动到 D 点的时间及运动过程中最大速度?已知 $CD = 2x$.

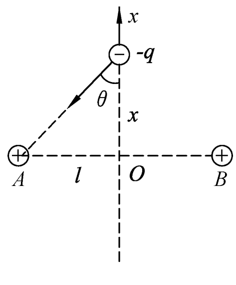

图 2

如图 2 所示,$F = -k\frac{q^2}{l^2 + x^2}$,若 $x \ll l$,则回复力

$$f = 2F\cos\theta = 2kq^2\frac{x}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2kq^2}{l^3}x\left[1 + \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \approx \frac{2kq^2}{l^3}x - \frac{3kq^2}{l^5}x^3 \approx \frac{2kq^2}{l^3}x.$$

动力学方程:$m\ddot{x} + \frac{2kq^2}{l^3}x = 0$,$\omega^2 = \frac{2kq^2}{ml^3}$,故 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{2kq^2}}$,$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{ml^3}{2kq^2}}$.

初始条件:$t=0$,$l=0$,$x = x_0$. $x = x_0\cos\omega t$,$v = \ddot{x} = -x_0\omega\sin\omega t$,$v_m = -x_0\omega = -x_0\sqrt{\frac{2kq^2}{ml^3}}$,解得 $|v_m| = x_0\sqrt{\frac{2kq^2}{ml^3}}$.

3.2 两个模型的对比分析及启示

(1) 运动时间:两个模型均可视为简谐运动,且运动的时间均与物体的位置无关;最大速度:模型 1 中最大速度 $|v_{xmax}| = a\sqrt{\frac{g}{R}}$,其值与开挖隧道的实际长度 a 有关(即隧道的位置),模型 2 中最大速度 $|v_m| = x_0\sqrt{\frac{2kq^2}{ml^3}}$,该值与研究对象运动的起始位置也有关,这一结果有一定的相似性和趣味性.

(2) 两模型除具有运动的相似性外,也体现了宏观物理现象与微观物理现象的对称性,体现了物理学的对称美和物理规律的普适性.

(3) 两模型的相似性也对我们研究相似情境具有一定的启发性,引导我们去解开现象背后的实质.

4 小结

4.1 实际问题分析

事实上,地球并不是一个均质球体,地球物理学指出,地球是由若干不同特性(密度、重力、压力等)的均质圈层——地壳、地幔、地核(内核和外核)所组成. 不同的圈层其密度有变化,尤其是地核的密度要比地幔大得多(地壳很薄,只有 15 km,其密度和地幔相差不大). 加上地球自转的影响,因而重力加速度沿地球半径的分布较为复杂. 因此,物体在隧道内做周期性运动,但非简谐运动;通过隧道的时间与长度有关.

4.2 结论

在物理中,忽略一些因素微小的影响,对于研究问题具有很重要的意义. 结合学生现阶段研究问题的实际需要,将相似情境的的同一物理模型抽象出来,运用模型特性解决实际问题,对学生发现问题、解决问题具有重要意义.

(收稿日期:2015-12-02)