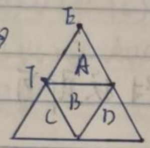
第二章 映射

1. $|A|=m$ $|B|=n$

(1) $|A^B| = m^n$

(2) $|双射| = m!$

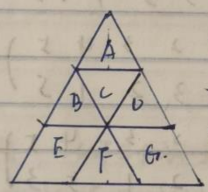
3. ①证：



由鸽巢原理
五个点必有两个
点在同一区域

不妨设两位都在A区.
在A区最远距离为 $EF=\frac{1}{2}$
∴五个点必有2个点,距离至多为$\frac{1}{2}$
证毕.

②证：



由鸽巢原理.
十个点必有两点
在同一区域

与上题同理,距离至多为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
A区域

∴十个点必有两个点,距离至多为$\frac{1}{4}$
证毕.

5. ~~任意一个整数~~

任意一个整数可写成 $100n+a$
$n\in N$. $0\le a\le 99$ 且 $a\in Z$
又∵ $100n$ 必可被100整除. 下面主要看a
a的取值可能有51个盒子.
即 $(0,0),(1,99),(2,98),\cdots(49,51),(50,50)$.
∵有52个整数. 所有必有$\geq$2个a在同一盒子中. 记为a_i, a_j.
又∵同一盒子中 要么 $a_i=a_j$ 要么 $a_i+a_j=100$
∴若 $a_i=a_j$. 则这两个整数相减为 $100(n_i-n_j)$ 能被100整除.
若 $a_i+a_j=100$. 则这两个整数相加为 $100(n_i+n_j)+100$ 能被100整除
证毕

6. $1,2,\cdots n$中 n为奇数
则必有$\frac{n+1}{2}$个奇数 $\frac{n-1}{2}$个偶数.
∵偶数$\frac{n-1}{2}$个 不妨设为$\frac{n-1}{2}$个盒子.
则必有一个奇数不在这些盒子中.
∴必有一个奇数与奇数作差.
即 奇数−奇数=偶数.
而又∵偶×奇=偶 偶×偶=偶
∴ $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 必为偶数.

7. ① 设 $\forall x\in f^{-1}(C\setminus D) \Rightarrow f(x)\in C\setminus D$
即 $f(x)\in C$ 且 $f(x)\bar{\in} D$.
即 $x\in f^{-1}(C)$ 且 $x\bar{\in} f^{-1}(D)$
即 $x\in f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$
即 $f^{-1}(C\setminus D)\subseteq f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$

② 设 $\forall x\in f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D) \Rightarrow$ 則 $x\in f^{-1}(C)$ 且 $x\bar{\in} f^{-1}$
即 $f(x)\in C$ 且 $f(x)\bar{\in} D$
即 $f(x)\in C\setminus D$
即 $x\in f^{-1}(C\setminus D)$
即 $f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)\subseteq f^{-1}(C\setminus D)$.

∴由①②证得 $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$

8. ① 设 $\forall y\in f(A)\setminus f(B) \Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\bar{\in} f(B)$
即 $\exists x\in A$ 使 $f(x)=y$.
且 $x\bar{\in} B$.
即 $\exists x\in A\setminus B$, 使得 $y=f(x)$.
即 $y\in f(A\setminus B)$.
即 $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$.

13. (1) (a)

(2) (b)

(3) (c)

(4) (d).

15. $f\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$g\circ f(a) = g(0) = 2$
$g\circ f(b) = g(0) = 2$
$g\circ f(c) = g(1) = 3$

$\therefore g\circ f: X \to Z$ $g\circ f(a) = g\circ f(b) = 2$ $g\circ f(c) = 3$.

17. (1) 构造 $f(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ n-1, & n\geq 2 \end{cases}$ $g(n) = n+1$

$\therefore fg(n) = f(n+1) = n$ 满足

特别的 $gf(1) = g(1) = 2 \neq 1$

$\therefore gf \neq I_N$

(2) 构造 $f: N \to N$ $f(n) = n+1$

$g: N \to N$ $g(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ n-1, & n\geq 2 \end{cases}$.

证明同上.

18. (1) f 不一定可逆. $|X| = 1$ f 不一定可逆

$|X| \geq 2$ f 可逆.

(2) f 一定可逆

19. (1) f 左可逆 => f 是单射

有 m^{n-m} 个.

(2) f 右可逆 => f 是满射

有 $|f^{-1}(y_1)|\cdot|f^{-1}(y_2)|\cdot|f^{-1}(y_3)|\cdots|f^{-1}(y_n)|$ 个

20: 存在 f 为对换即可.

21. $\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

22. 原式 $= (1\,7\,3)(2\,9\,8\,4\,6)(5)$

$= (1\,7)(1\,3)(2\,9)(2\,8)(2\,4)(2\,6)$