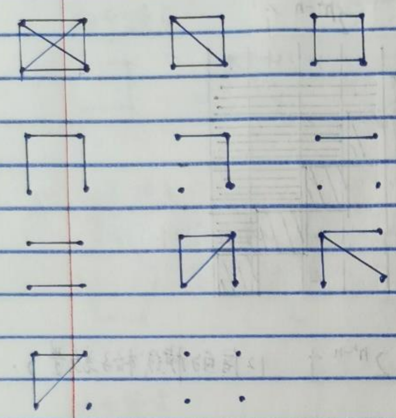
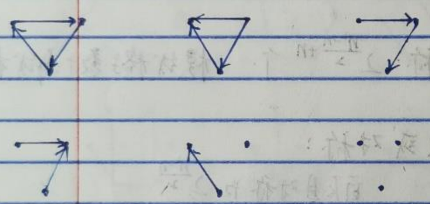
第六章作业.

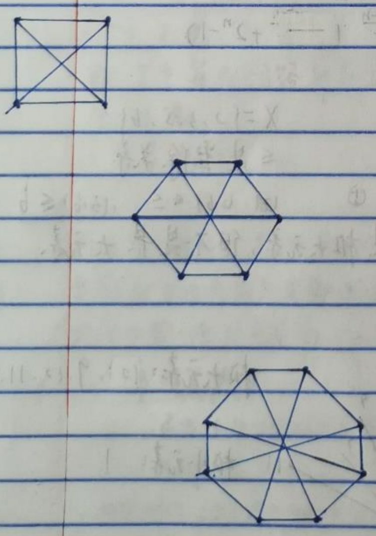
1.



2.



3.



4. 设握过偶数次的人数为m，构成集合M
　　— — 奇数次的人数为n. 构成集合N
建立图模型. 有 $m+n$ 个顶点
握过手的人为相邻顶点（有边相连）.
$G=(V,E)$.
$\therefore \sum_{v\in V} deg(v) = 2|E|$
∴ 所有v的度数之和为偶数.
∵ m个人握手偶数次. 其 $\sum_{v\in M} deg(v)$ 为偶数.
∴ n个人握手奇数次 其 $\sum_{v\in N} deg(v)$ 为偶数
∵ ~~deg(v)~~ $v\in N$，$deg(v)$ 为奇数.
∴ $|N| = n$ 必为偶数
　　证毕.

1. u　u₁ ——— v_1　v
u,v 间存在两条路 P_1. P_2　$P_1 \neq P_2$.
∃一条边 $u_1v_1 \in P_1$
∵ $P_1 \cup P_2$ 为 G 的子图.
　$P_1 \cup P_2 - u_1v_1$ 为 G 的连通子图，
又∵ $P_1 \cup P_2 - u_1v_1$ 包含了从 u_1 到 v_1 的路 P
则 $P_1 \cup P_2 = P + u_1v_1$ 为 G 的一个圈.

2. ：若G连通 ~~$q \le p-2$. $G=(V,E)$~~.
∵ G是连通的 $\forall u,v \in V$. $uv \in E$
∴ $deg(u) + deg(v) \ge p-1$
∴ $deg(v) \ge \frac{1}{2}(p-1)$
∴ $\sum_{v\in V} deg(v) \ge \frac{1}{2}p\cdot(p-1) = \frac{1}{2}(p^2-p)$
∴ $q \ge \frac{1}{4}(p^2-p)$.
又∵ $\frac{1}{4}(p^2-p) - (p-1) = \frac{(p-\frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}}{4}$
① 当 $p \ge 4$　上式 ≥ 0　$q \ge p-1$ 成立.
② 当 $p=1$，$q=0 \to q \ge p-1$
　　$p=2$　$q \ge 1 \to q \ge p-1$
　　$p=3$　$q \ge 2 \to q \ge p-1$
⇒ 综上 得证.

控第六章作业

假设 G 不连通. $G=(V,E)$ $|V|=p$ $|E|=q$

则 $\forall u,v\in V$. $uv\notin E$

有 $\deg(u)+\deg(v)\le p-2$.

即. $\deg(v)\le \frac{p-2}{2}$

则 $q=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}\deg(v)\le\frac{p(p-2)}{4}$

由题意 $\frac{(p-1)(p-2)}{2}<\frac{p(p-2)}{4}$

即. $(p-2)(p-2p+2)>0$

$-(p-2)^2>0$ 不符 矛盾

∴ G 是连通的

建模: $G=(V,E)$ $|V|=n$.

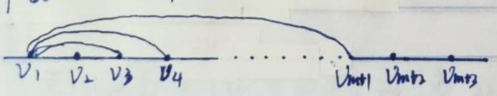
$\forall v\in V$ $\deg(v)\ge m$.

有一个 $G_1\subseteq G$ $G_1=(V_1,E_1)$ $|V_1|\ge m+1$

即证: G_1 是一个长至少为 $m+1$ 的圈.

证: ∵ $\forall v\in V$. $\deg(v)\ge m$

不妨画出如下图



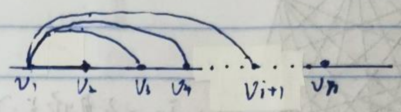
设与 v_1 相邻接的 v 最大下标为 i, $i\ge m+1$

∴ $v_1v_2\cdots v_iv_1$ 为一个圈. $i\ge m+1$

∴ 以上述圈是一个长至少为 $m+1$ 的圈.

即 不少于 $m+1$ 个人围成一桌, 左右相邻都是朋友.

8.



∵ $\delta(G)\ge 2$. 设 $\delta(G)=i$

则 不妨如上图所示

v_1 必与 v_{i+1} 相连邻接.

则 $v_1v_2\cdots v_{i+1}v_1$ 为一个长为 $i+1$ 的圈

即长为 $\delta(G)+1$ 的圈

1. 证: 若 G 不是连通图. G^c 是连通的

设 G 为 (p,q) 图. 则 G^c 为 (p,q') $q'=\frac{p(p-1)}{2}-q$

∵ G 不是连通图. $\Rightarrow$ $\forall v$. $\deg(v)\le\frac{1}{2}(p-2)$

∴ $q=\frac{1}{2}\sum_v\deg(v)\le\frac{1}{2}p\times\frac{1}{2}(p-2)=\frac{1}{4}p(p-2)$ ①

∴ 在 G^c 中. $q'=\frac{1}{2}\sum\deg(v)\le\frac{1}{2}p\deg(v)$.

∴ $\deg(v)\ge\frac{2q'}{p}=\frac{p(p-1)-2q}{p}$ ①式代入.

$\ge\frac{p(p-1)-\frac{1}{2}p(p-2)}{p}=p-1-\frac{1}{2}p+1=\frac{1}{2}p$.

∴ G^c 中任意两不邻接点有 $\deg(u)+\deg(v)\ge p>p-1$

∴ G^c 是连通的

2. 证: 每个自补图有 $4n$ 或 $4n+1$ 个顶点.

若 G 为 (p,q) 图. G^c 为 $(p,\frac{(p-1)p}{2}-q)$ 图.

∵ 同构 $\Rightarrow$ $q=\frac{(p-1)p}{2}-q$ $\Rightarrow$ $q=\frac{1}{4}(p-1)p$.

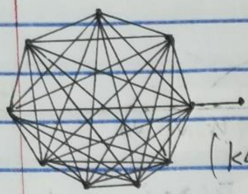
∵ q 为整数.

∴ $(p-1)$ 或 p 为 4 的整数倍.

∴ $p=4k$ 或 $4k+1$ $k=0,1,2,\cdots$

即 自补图有 $4n$ 或 $4n+1$ 顶点.

1.



(K_8 和一个顶点)

2. $\frac{(p-1)!}{2}$

当 $p=3$，哈密顿图 $v_1v_2v_3v_1$

即 $\frac{(3-1)!}{2}$ 个.

当 $p=4$，有 $v_1v_2v_3v_4v_1$

$v_1v_2v_4v_3v_1$　$v_1v_3v_2v_4v_1$

即 $\frac{(4-1)!}{2}$ 种.

假设当 $p=k$ $(k\geq 4)$ 时有 $\frac{(k-1)!}{2}$ 哈密顿图

则当 $p=k+1$ 时，即将 $k+1$ 这个数插入原来的序列中.

每个序列有 k 个空格即 k 种插法.

共有 $\frac{(k-1)!}{2}$ 个序列

∴ 产生了 $k\times\frac{(k-1)!}{2}=\frac{k!}{2}$ 种.

即当 $p=k+1$ 时有 $\frac{k!}{2}$ 个哈氏图成立.

∴ K_p 有 $\frac{(p-1)!}{2}$ 个不同哈密顿图

10. 证明奇数顶点偶图不是哈密顿图.

$G=(V,E)$ 为偶图.

$|V|=2k+1$　$k\in N$

V 存在一个划分 $\{V_1,V_2\}$.

不妨设 $|V_1|>|V_2|$

将 G 中属于 V_2 的顶点取走

则 $G-V_2$ 的支数 $\omega(G-V_2)$

$\omega(G-V_2)=|V_1|>|V_2|$

∴ G 不是哈密顿图

4. $m=n\geq 2$　($m=n=1$ 时不存在哈密顿图)

① 充分性：当 $m=n\geq 2$ 时

$K_{m,n}$ 顶点集有两个划分 V_1 V_2

$|V_1|=m=n=|V_2|$ 且 $K_{m,n}$ 是完全偶图

则 $\forall v\in V_1$，$\forall u\in V_2$　$uv\in E$.

故 V_1 中元素有 $v_1\ v_2\ v_3\cdots v_m$

V_2 中元素有 $u_1\ u_2\ u_3\cdots u_n$

构造 $v_1u_1v_2u_2\cdots v_mu_nv_1$ 为一个哈密顿图

∴ $K_{m,n}$ 是哈密顿图

② 必要性：∵ $K_{m,n}$ 是完全偶图且为哈密顿图

∵ $K_{m,n}$ 为偶图 ⇒ 其中哈密顿圈为偶数.

且顶点集存在一个划分 $\{V_1,V_2\}$　$|V_1|=m$　$|V_2|=n$

$v\in V_1$，$u\in V_2$　$\forall v_iu_j\in E$.　$(i,j\in N)$

~~∴ 设 $v_1u_1v_2u_2v_3\cdots u_nv_1$ 长度为偶数.~~

~~若 $m<n$，构造 $v_1u_1v_2u_2\cdots v_mu_mv_1$~~

∴ $\forall v$ $\deg(v)=n$　$\forall u$ $\deg(u)=m$

∵ $K_{m,n}$ 是哈密顿图 ~~⇒ $\deg(u)+\deg(v)\geq m+n$~~

∴ ⇒ $\deg(v_1)+\deg(v_2)\geq m+n$

∴ $2n\geq m+n$　①

同理 $2m\geq m+n$

∴ $m=n$.