第二章 映射

P_{39} 习题

1. 设 A，B 是有穷集，$|A| = m, |B| = n$。则

（1）计算 $|A^B|$；　　　　（2）从 A 到 A 有多少个双射？

P_{43} 习题

3. 证明：从一个边长为 1 的等边三角形中任意选 5 个点，那么这 5 个点中必有 2 个点，它们之间的距离至多为 1/2，而任意 10 个点中必有 2 个点其距离至多是 1/3。

5. 证明在 52 个整数中，必有两个整数，使这两个整数之和或差能被 100 整除。

6. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的任一排列，若 n 是奇数且 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_n - n) \neq 0$，则乘积为偶数。

P_{46} 习题

7. 设 $f: X \to Y$，$C, D \subseteq Y$，证明 $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

8. 设 $f: X \to Y$， $A, B \subseteq X$，，证明 $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$。

10.设 $f: X \to Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$。以下四个小题中，每个小题均有四个命题，这四个命题有且仅有一个正确，请找出正确的那个。

（1）（a）若 $f(x) \in f(A)$，则 x 未必在 A 中；（b）若 $f(x) \in f(A)$，则 $x \in A$；

（c）若 $f(x) \in f(A)$，则 $x \overline{\in} A$； （d）若 $f(x) \in f(A)$，则 $x \in A^c$。

（2）（a） $f(f^{-1}(B)) = B$； （b） $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$；

（c） $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$； （d） $f(f^{-1}(B)) = B^c$。

（3）（a） $f^{-1}(f(A)) = A$； （b） $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$；

（c） $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$； （d）上面三个均不对。

（4）（a） $f(A) \neq \varnothing$； （b）$f^{-1}(B) \neq \phi$；

（c）若$y \in Y$,则$f^{-1}(\{y\}) \in X$； （d）若$y \in Y$,则$f^{-1}(\{y\}) \subseteq X$。

P_{50} 习题

15. 设 $X = \{a, b, c\}, Y = \{0, 1\}, Z = \{2, 3\}, f: X \to Y, f(a) = f(b) = 0$，

$f(c) = 1; g: Y \to Z$， $g(0) = 2, g(1) = 3$，试求 $g \circ f$。

P_{55} 习题

17． 设 $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$，试构造两个映射 f 和 g： $N \to N$，使得

（1） $fg = I_N$，但 $gf \neq I_N$；（2） $gf = I_N$，但 $fg \neq I_N$。

18. 设 $f:X\to Y$ 则

（1）若存在唯一的一个映射 $g:Y\to X$ ，使得 $gf=I_X$，则 f 是可逆的吗？

（2）若存在唯一的一个映射 $g:Y\to X$ ，使得 $fg=I_Y$，则 f 是可逆的吗？

19. 设 $f:X\to Y,|X|=m,|Y|=n$，则

（1）若 f 是左可逆的，则 f 有多少个左逆映射？

（2）若 f 是右可逆的，则 f 有多少个右逆映射？

20. 是否有一个从 X 到 X 的一一对应 f，使得 $f=f^{-1}$，但 $f\neq I_X$？

P_{63} **习题**

21.设 $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&1&5\end{pmatrix}$，$\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&1&4\end{pmatrix}$，求 $\sigma_1\sigma_2,\sigma_2\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2^{-1}$。

22.将置换 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&9&1&6&5&2&3&4&8\end{pmatrix}$ 分解成对换的乘积。