1. $A=\{1,2,3,4\}$. R是A上的关系

$R=\{(1,1),(1,2)\}$

2. $A=\{1,2,3,4\}$ R是A上的关系.

$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3)\}$.

3. 成立的有:

(a) R,S自反. $R\cup S$. $R\cap S$自反.

(b) $R.S$对称: $R\cup S$. $R\cap S$对称.

(c) $R.S$传递: $R\cap S$传递

(e) $R.S$反自反. $R\cap S$. $R\cup S$反自反.

(f) R自反. R^c反自反.

5. $(R^{-1})^{-1}=R$:

$\forall(x,y)\in(R^{-1})^{-1} \Rightarrow (y,x)\in R^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R$

$\therefore (R^{-1})^{-1}\subseteq R$

$\forall(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R^{-1} \Rightarrow (x,y)\in(R^{-1})^{-1}$

$\therefore R\subseteq(R^{-1})^{-1}$

$\therefore (R^{-1})^{-1}=R$ 证毕.

$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$:

$\forall(x,y)\in(R\cup S)^{-1} \Rightarrow (y,x)\in(R\cup S)$

$\Rightarrow (y,x)\in R$ 或 $(y,x)\in S \Rightarrow (x,y)\in R^{-1}\cup S^{-1}$

$\therefore (R\cup S)^{-1}\subseteq R^{-1}\cup S^{-1}$

$\forall(x,y)\in R^{-1}\cup S^{-1} \Rightarrow (y,x)\in R$ 或 $(y,x)\in S$

$\Rightarrow (y,x)\in(R\cup S) \Rightarrow (y,x)\in(R\cup S)^{-1}$

$R^{-1}\cup S^{-1}\subseteq(R\cup S)^{-1}$

$\therefore (R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$ 证毕.

$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

$\forall(x,y)\in(R\cap S)^{-1} \Rightarrow (y,x)\in(S\cap R) \Rightarrow (y,x)\in S$且$\in R$

$\Rightarrow (x,y)\in R^{-1}$且$(x,y)\in S^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R^{-1}\cap S^{-1}$

$\therefore (R\cap S)^{-1}\subseteq R^{-1}\cap S^{-1}$

$\forall(x,y)\in R^{-1}\cap S^{-1} \Rightarrow (x,y)\in R^{-1}$且$(x,y)\in S^{-1}$

$\Rightarrow (y,x)\in R\cap S \Rightarrow (x,y)\in(R\cap S)^{-1}$ $\therefore R^{-1}\cap S^{-1}\subseteq(R\cap S)^{-1}$

~~证毕~~. $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$ 证毕.

$R\subseteq S$, $R^{-1}\subseteq S^{-1}$

$\forall(x,y)\in R^{-1} \Rightarrow (y,x)\in R\subseteq S \Rightarrow (x,y)\in S^{-1}$

$\therefore R^{-1}\subseteq S^{-1}$ 证毕

6. 证: $R\cup R^{-1}$是对称的二元关系.

取 $\forall(x,y)\in R \Rightarrow (x,y)\in R$, 或 $(y,x)\in R^{-1}$

则 $(y,x)\in R^{-1}\subseteq R\cup R^{-1}$

$(x,y)\in R\subseteq R\cup R^{-1}$

$\therefore R\cup R^{-1}$是对称的二元关系

7. 反证: 若R不是反对称.

则 $(x,y)\in R$ $x\neq y$

$\Rightarrow (y,x)\in R$

又$\because R$是传递的 $\Rightarrow (x,x)\in R$

与R是反自反矛盾.

$\therefore R$是反对称.

9. "父子" 平方: 祖孙关系

11. 真的有:

(a) R,S自反. $R\circ S$自反.

13. $\because R,S$是对称的 $\Rightarrow R^{-1}=R$ $S=S^{-1}$

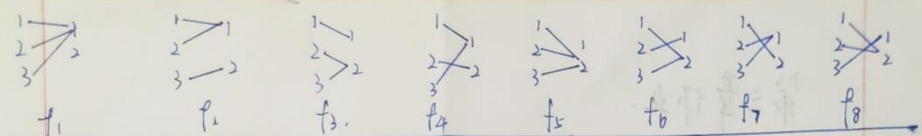
$\because R\circ S\subseteq S\circ R$

$\Rightarrow (R\circ S)^{-1}\subseteq(S\circ R)^{-1}$

$S^{-1}\circ R^{-1}\subseteq R^{-1}\circ S^{-1}$

$S\circ R\subseteq R\circ S$

$\therefore$ ~~SP~~ $R\circ S=S\circ R$ 得证



25. (1) 若 $f \cong g \Rightarrow Im(f) = Im(g) \Rightarrow g \cong f$

又 $Im(f) = Im(f) \Rightarrow f \cong f$

∴ $\cong$ 满足自反性和对称性.

又 $f \cong g$, $g \cong h \Rightarrow Im(f) = Im(g) = Im(h)$

$\Rightarrow f \cong h$ 　$\cong$ 满足传递性

∴ $\cong$ 为等价关系

(2) $[f_1] = \{f_1\}$

$[f_2] = \{f_2, f_3, f_4, f_6, f_7, f_8\}$.

$[f_5] = \{f_5\}$.

故等价类集合为 $\{[f_1], [f_2], [f_5]\}$.

26. (1) $f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)$

$\Rightarrow g(1) + g(2) + g(3) = f(1) + f(2) + f(3)$

$\Rightarrow f(1) + f(2) + f(3) = f(1) + f(2) + f(3)$

∴ $\cong$ 满足对称性和自反性

假设 $(f,g) \in \cong$, $(g,h) \in \cong \Rightarrow (f,h) \in \cong$

∴ $\cong$ 满足传递性

∴ $\cong$ 是 S_F 的等价关系.

(2) $[f_1] = \{f_1\} = \{g \mid g(1) + g(2) + g(3) = 3\}$

$[f_2] = \{f_2, f_4, f_7\} = \{g \mid g(1) + g(2) + g(3) = 4\}$

$[f_3] = \{f_3, f_6, f_8\} = \{g \mid g(1) + g(2) + g(3) = 5\}$

$[f_5] = \{f_5\} = \{g \mid g(1) + g(2) + g(3) = 6\}$.

等价类数为4

27. (1) $\{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$.

∴ $\cong$ 具有自反性.

$\{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} = \{g^{-1}(y) \mid y \in Y\} \Rightarrow \{g^{-1}(y) \mid y \in Y\} = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$

∴ $\cong$ 具有对称性

$\{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} = \{g^{-1}(y) \mid y \in Y\}$ 且 $\{g^{-1}(y) \mid y \in Y\} = \{h^{-1}(y) \mid y \in Y\}$

$\Rightarrow \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} = \{h^{-1}(y) \mid y \in Y\}$.

即 $f \cong g$, $g \cong h \Rightarrow f \cong h$.

∴ $\cong$ 具有传递性

∴ $\cong$ 是等价关系

(2) $[f_1] = \{f_1, f_5\} = \{\{1,2,3\}, \varnothing\}$

$[f_2] = \{f_2, f_8\} = \{\{1,2\}, \{3\}\}$.

$[f_3] = \{f_3, f_7\} = \{\{1\}, \{2,3\}\}$

$[f_4] = \{f_4, f_6\} = \{\{1,3\}, \{2\}\}$.

∴ 等价类为上述 $[f_1]$ $[f_2]$, $[f_3]$, $[f_4]$

28. $\sigma = (1,3,5)(2,6)(4,8)(7)$

当 i, i 在同一循环中 $i \cong i$, 自反性

i, j 在同一循环中. $j \cong i$ 　对称性.

$i \cong j$, $j \cong k$. i, j, k 在同一循环中. $i \cong k$. 传递性.

∴ $\cong$ 是等价关系

~~$X/\cong = \{\{(7,7)\}, \{(1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (1,1), (5,5), (3,5), (5,3), (3,3)\}$.~~

$X/\cong = \{\{(7,7)\}, \{(4,4), (8,8), (4,8), (8,4)\},$
$\{(2,2), (6,2), (6,6), (2,6)\},$
$\{(1,1), (3,3), (5,5), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (3,5), (5,3)\}\}$

29. $X=\{1,2,3,4\}$. $R\circ S$ 非等价关系.

$S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$

B 关系矩阵

$$B_S=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,4),(4,1)\}$

$$B_R=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

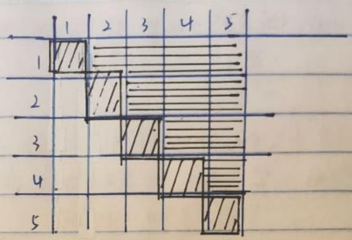
$$\therefore B_{R\circ S}=B_S\circ B_R=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$R\circ S$ 不满足对称性.
不是等价关系

30. $\Rightarrow$: R是等价关系 则R具有传递性,对称性
即 $(a,b)\in R$, $(a,c)\in R$
则 $(b,a)\in R$, $(a,c)\in R$
则 $(b,c)\in R$ 得证.
$\Leftarrow$: 若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$ 则 $(b,c)\in R$.
同理 $(c,b)\in R$
则R具有对称性.
$\therefore$ $(a,b)\in R$, $(a,c)\in R \Rightarrow (a,b)\in R$, $(c,a)\in R$
又 $\because (c,b)\in R$
$\therefore$ R具有传递性.
即R是等价关系

$\therefore$ 综上. R为等价关系 $\Leftrightarrow$ 若 $(a,b)\in R$ 且 $(a,c)\in R$
则 $(b,c)\in R$.

35. $|X|=n$. 共 2^{n^2} 个关系
若 n 为 5



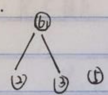
(1) 自反: 2^{n^2-n} 个 (2倍的横线格子数量).

(2) 反自反: 2^{n^2-n} 个 (同上)

(3) 对称: $2^{\frac{n^2-n}{2}+n}$ 个. (横线格子数+斜线格子数)

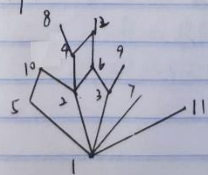
(4) 自反或对称:
自反且对称为 $2^{\frac{n^2-n}{2}}$
$\therefore$ 自反或对称个数为
$$2^{n^2-n}+2^{\frac{n^2-n}{2}+n}-2^{\frac{n^2-n}{2}}$$
$$=2^{\frac{n^2-n}{2}}\left(2^{\frac{n^2-n}{2}}+2^n-1\right)$$

38.



$X=\{2,3,5,6\}$
$\leq$ 是整除关系
因 $(2,6)\in\leq$, $(3,6)\in\leq$
6是极大元素,但不是最大元素.

39.



极大元素: 7. 8. 9. 10. 11. 12 .

极小元素: 1