

第三章 关系

P_{86} 习题

1. 给出一个既不是自反的又不是反自反的二元关系?
2. 是否存在一个同时不满足自反性, 对称性, 反对称性, 传递性和反自反性的二元关系?
3. 设 R, S 是 X 上的二元关系, 下列命题哪些成立:
 - a) 若 R 与 S 是自反的, 则 $R \cup S, R \cap S$ 分别也是自反的;
 - b) 若 R 与 S 是对称的, 则 $R \cup S, R \cap S$ 分别对称的;
 - c) 若 R 与 S 是传递的, 则 $R \cap S$ 也是传递的;
 - d) 若 R 与 S 不是自反的, 则 $R \cup S$ 也不是自反的;
 - e) 若 R 与 S 是反自反的, 则 $R \cup S, R \cap S$ 也是反自反的;
 - f) 若 R 是自反的, 则 R^c 也是反自反的;
 - g) 若 R 与 S 是传递的, 则 $R \setminus S$ 是传递的。

答案: _____

5. 设 R, S 是 X 上的二元关系。证明:

- (1) $(R^{-1})^{-1} = R$; (2) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;
- (3) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$; (4) 若 $R \subseteq S$, 则 $R^{-1} \subseteq S^{-1}$;

6. 设 R 是 X 上的二元关系, 证明: $R \cup R^{-1}$ 是对称的二元关系。

7. 设 R 为 X 上的是反自反的和传递的二元关系, 证明: R 是反对称的。

P_{92} 习题

9. “父子”关系的平方是什么关系? 答案: _____
11. 设 R 与 S 为 X 上的任两个二元关系, 下列命题哪些为真? 答案: _____
- a) 若 R, S 都是自反的, 则 $R \circ S$ 也是自反的;
 - b) 若 R, S 都是对称的, 则 $R \circ S$ 也是对称的;
 - c) 若 R, S 都是反自反的, 则 $R \circ S$ 也是反自反的;
 - d) 若 R, S 都是反对称的, 则 $R \circ S$ 也是反对称的;
 - e) 若 R, S 都是传递的, 则 $R \circ S$ 也是传递的。
13. 设 R, S 是 X 上的满足 $R \circ S \subseteq S \circ R$ 的对称关系, 证明 $R \circ S = S \circ R$ 。

P_{113} 习题

25. 设 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2\}, S = \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$ 。 \cong 是 S 上的二元关系:

$$\forall f, g \in S, f \cong g \Leftrightarrow I_m(f) = I_m(g)。$$

证明: (1) \cong 是 S 上的等价关系; (2) 求等价类的集合。

26. 设 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2\}, S = \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$ 。 \cong 是 S 上的二元关系:

$$\forall f, g \in S, f \cong g \Leftrightarrow f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)。$$

证明: (1) \cong 是 S 上的等价关系; (2) 求等价类数。

27. 设 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2\}, S = \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$ 。 \cong 是 S 上的二元关系:

$$\forall f, g \in S, f \cong g \Leftrightarrow \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} = \{g^{-1}(y) \mid y \in Y\}.$$

证明：(1) \cong 是 S 上的等价关系；(2) 求等价类。

28. 由置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 确定了 $X = \{1, 2, \dots, 8\}$ 上的一个关系

$\cong: i, j \in X, i \cong j$ 当且仅当 i 与 j 在 σ 的循环分解式中的同一循环置换中，证明： \cong 是 X 上的等价关系，求 X/\cong 。

29. 给出 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 上两个等价关系 R 与 S ，使得 $R \circ S$ 不是等价关系。

30. 设 R 是 X 上的一个自反关系，证明： R 是等价关系 \Leftrightarrow 若 $(a, b) \in R$ 且 $(a, c) \in R$ ，则 $(b, c) \in R$ 。

35. 设 X 是一个集合， $|X| = n$ ，试求：

- (1) X 上自反二元关系的个数；(2) X 上反自反二元关系的个数；
- (3) X 上对称二元关系的个数；(4) X 上自反或对称关系的个数。

38. 存在一个偏序关系 \leq ，使得 (X, \leq) 中有唯一的极大元素，但没有最大元素？若有请给出一个具体例子；若没有，请证明之。

39. 令 $S = \{1, 2, \dots, 12\}$ ，画出偏序集 $(S, |)$ 的 Hass 图，其中“ $|$ ”是整除关系，它有几个极大（小）元素？列出这些极大（小）元素。