第四章 无穷集合及其基数

1. 若A是由限个数组成的，则A是不可数的
若A是由无限个数组成的，则A是可数的

2. 有开区间 $A_1, A_2, A_3 \cdots A_n \cdots$
$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \Phi$
每个开区间必能找到一个有理数
$a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ 其中
$a_i \neq a_j \quad (i \neq j)$ a_i与A_i一一对应.
$\because \{a_1, a_2, a_3 \cdots a_n \cdots\} \subseteq Q$. $\{a_i\} \sim \{A_i\}$.
又$\because a_1, a_2, \cdots a_n \cdots$ 并不一定有无限个.
$\therefore$ (即 $A_1, A_2 \cdots A_n$) 并不一定有无限个.)
$\therefore \{A_i\}$ 至多可数、证毕.

3. $\because$ 单调函数是 $R \times R$ 上的一个特一一对应.
其不连续点 $(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2)) \cdots$
$\because R \times R$ 是一个无限集
$\therefore$ 必然存在 $\{(x_i, f(x_i))\} \subseteq R \times R$. 是一个可数集.
$\therefore$ 单调函数不连续点的集合至多可数 证毕.

4. 令 $S = \{f \mid f: A \to \{0,1\}\}$.
S为A的特征函数构成的集合.
$\therefore 2^{A'} \sim Ch(A) = S$. (记有限子集构成集族为 $2^{A'}$)
$\because 2^{A'}$ 中的元素都为有限子集.
$\therefore$ S中的01序列长度是有穷的
又$\because$ 而有限序列对应着一个二进制小数.
此小数是有理数.
$\because$ 无穷个有理数构成集合是可数的
$\therefore 2^{A'}$ 是可数的
即A的所有有限子集构成集族是可数.

1.

5. (1). 真
(2) 假
(3) 假.

7. $\because \Sigma$ 是有限集. 不妨设有n个元素
$A_1 = \{$长度为1的字$\}$ $|A_1| = n$
$A_2 = \{$长度为2的字$\}$ $|A_2| = C_n A_n = n(n-1)$
$\vdots$
$A_n = \{$长度为n的字$\}$.
$\vdots$
$\because A_i$ 是有限集.
$\therefore \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 中所有元素可列. 且 $\exists \Sigma^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是有无限个A_i 所以 Σ^* 是可数的

4. A是可数集，不妨设 2^A 是可数的.
记 $S = \{f \mid f: A \to \{0,1\}\}$.
$\therefore 2^A \sim Ch(A) = S$.
(S是看所有无限长度01序列的无穷集合，是可数的)
$f_1: a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots a_{1n} \cdots$
$f_2: a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots a_{2n} \cdots$
$\vdots$
$f_n: a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \cdots a_{nn} \cdots$
$\vdots$
构造 $g: b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \cdots$
$$b_i = \begin{cases} 0, & a_{ii} = 1 \\ 1, & a_{ii} = 0 \end{cases}$$
$\left.\begin{array}{l} \therefore g \neq f_i \\ 而\ g \in S \end{array}\right\} \Rightarrow$ 矛盾.
$\therefore 2^A$ 是不可数

5. 假设是可数的. 则该集合可以排列成 $f_1 f_2 f_3 \cdots$ 这个无穷序列. 而 f_i 由 $a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3} \cdots a_{in} \cdots$ 确定 $(a_{ij} = 0,1)$ 构造 g 序列 $b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ 确定
令 $b_i = \begin{cases} 0, & a_{ii} = 1 \\ 1, & a_{ii} = 0 \end{cases}$ $g \neq f_1, f_2 \cdots$ 但 $g \in$ 该集合. 矛盾. 所以该集不可数

关系概念整理

$dom(R)$ 定义域，$ran(R)$ 值域

(1) 关系的性质

1. 自反：$I_A \subseteq R$

2. 反自反：$I_A \cap R = \phi$

3. 对称 $\Leftrightarrow$ $R = R^{-1}$

4. 反对称 $\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

5. 传递 $\Leftrightarrow$ $R^2 \subseteq R$ $(R^n \subseteq R)$

	R^c	R^{-1}	$R\cap S$	$R\cup S$	$R\circ S$
自反	反自反	✓	✓	✓	✓
反自反	自反	✓	✓	✓	?
对称	对称	✓	✓	✓	?
反对称	?	✓	✓	?	?
传递	?	✓	✓	?	?

(2) 关系的运算（类比矩阵的运算）

1. $T\circ(R\circ S) = (T\circ R)\circ S$
2. $(R\circ S)^{-1} = \cancel{R}\, S^{-1}\circ R^{-1}$
3. $R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$（转置）

   $R \subseteq S \Rightarrow R^c \supseteq S^c$
4. $R_1 \subseteq R_2$，$S_1 \subseteq S_2$　$R_1\circ S_1 \subseteq R_2\circ S_2$
5. $R\circ(S_1\cup S_2) = R\circ S_1 \cup R\circ S_2$

   $R\circ(S_1\cap S_2) \subseteq R\circ S_1 \cap R\circ S_2$
6. $(R\cap S)^c = R^c \cup S^c$，$(R\cup S)^c = R^c \cap S^c$
7. $(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$，$(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$
8. $(R^{-1})^c = (R^c)^{-1}$

③ 关系的闭包. 自反闭包 $r(R)$ 对称闭包 $s(R)$ 传递闭包 R^+. 传递自反闭包 R^*

① $r(R) = R \cup I_A$

$s(R) = R \cup R^{-1}$

$R^+ = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \cdots$

$R^* = R^+ \cup I_A = R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cdots \cup R^\infty$

② 当 $R \subseteq S$ 时.

$r(R) \subseteq r(S)$. $R^+ \subseteq S^+$, $s(R) \subseteq s(S)$.

③ R 自反. $s(R)$ 和 R^+ 自反.

R 对称. $r(R)$ 和 R^+ 对称

R 传递 $r(R)$ 也传递. 没有 $s(R)$.

④ $r(s(R)) = s(r(R))$

$r(R^+) = (r(R))^+$

$s(R^+) \neq (s(R))^+$ $s(R^+) \subseteq s(R)^+$

④ 沃舍尔算法 (横 / 第k行有1位置画竖线) > 交叉部分为改为1.
(第k列有1位置画横线)

⑤

$(A,\leq)$ 中 B 集合	存在性.	唯一性	
极大元.	√	×	$\in B$
最大元.	?	√	$\in B$.
上界. sup	?	×	可能 $\in B$. 也可能 $\notin B$.
上确界: inf	?	√	e

⑥ 格.

哈斯图.

定理: 假设 $(A,\leq)$ 是偏序集. 则在拟序集中 $(A,<)$ 中不存在长度大于1的回路

反证: $(A,<)$ 中存在大于1　有: $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a$.

$\Rightarrow a < x_1 < x_2 \cdots x_{n-1} < a$

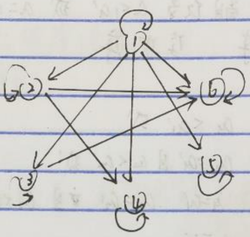
拟序具有传递性　$a < a$.

与非自反性矛盾

例　$A=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$D \subseteq A$.

aDb (偏序)　$a|b$.

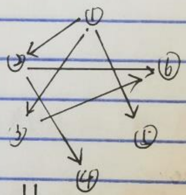


一. 删除自环

(一定具有自反性).

二. 简化 (把其传递删除).

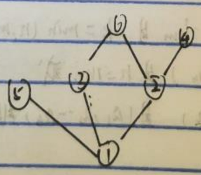
1-2.　2-6　1-6.　删去1-6.

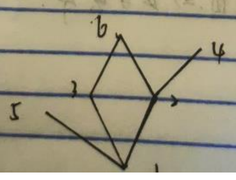


三. 调整顶点, 使箭头朝上

由定理. 不存在长度>1

的回路





哈斯图

只能表示有限偏序集.