第一章作业.

1. $x^2+2x+1=0$ 由

$(x+1)^2=0 \quad x_1=x_2=-1$

∴根所构成集合为 $\{-1\}$.

2. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_1$

∵ $A_1 \subseteq A_n$ 且 $A_n \subseteq A_1 \Rightarrow A_1 = A_n$

∴ $A_n \subseteq A_2 \subseteq A_3 \cdots \subseteq A_n \subseteq A_1$

即 $A_n \subseteq A_2$ 且 $A_2 \subseteq A_n \Rightarrow A_2 = A_n$

同理,可得 $\forall i, 1 \le i \le n-1$

皆满足 $A_i \subseteq A_n, A_n \subseteq A_i \Rightarrow A_i = A_n$

∴ $A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = A_n$

4. $2^{\{\phi,\{\phi\}\}}$

$= \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

5. 子集为空集：C_n^0 种

一元集：C_n^1

⋮

k元集：C_n^k

⋮

全集：C_n^n

∴共有子集 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

∴ 2^S 有 2^n 个元素.

6 ~~反证法~~

∵ $(A\setminus B)\cup B = A\cup B \quad (A\cup B)\setminus B = A\setminus B$

∴即证 $A\cup B = A\setminus B \Leftrightarrow B=\phi$

$\Rightarrow$: ~~若B~~ ∵ $A\cup B = A\setminus B$ 若 $B \neq \phi$

$|A\cup B| > |A\setminus B|$ 不符,和假设不成立

∴ $B=\phi$

$\Leftarrow$: ∵ $B=\phi \quad A\cup B = A \quad A\setminus B = A$

∴ $A\cup B = A\setminus B \Rightarrow (A\setminus B)\cup B = (A\cup B)\setminus B$

∴综上 $(A\setminus B)\cup B = (A\cup B)\setminus B \Leftrightarrow B=\phi$

7.

$\rightarrow$: ∵ $A=\phi \quad A\setminus B=\phi \quad B\setminus A = B$

∴ $A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = B\cup\phi = B$

$\leftarrow$: ~~∵ $A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = B$~~.

~~1° x∈~~ ∵ $A\triangle B = B$

$A\triangle(B\triangle B) = B\triangle B$

$A\triangle\phi = \phi$

$A = \phi$.

综上. $A=\phi \Leftrightarrow A\triangle B = B$

8.9. 证：$A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\setminus C$

① $x\in A\setminus(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A, x\notin B\cup C \Leftrightarrow x\in A, x\notin B, x\notin C$

$\Leftrightarrow x\in(A\setminus B), x\notin C \Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\setminus C$.

∴ $A\setminus(B\cup C) \subseteq (A\setminus B)\setminus C$

② $x\in(A\setminus B)\setminus C \Rightarrow x\in(A\setminus B), x\notin C \Rightarrow x\in A, x\notin B, x\notin C$

$\Rightarrow x\in A, x\notin B\cup C \Rightarrow x\in A\setminus(B\cup C)$

∴ $(A\setminus B)\setminus C \subseteq A\setminus(B\cup C)$

∴由①②得 $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\setminus C$.

法二：$A\setminus(B\cup C)$

$= A\cap(B\cup C)^c$

$= A\cap(B^c\cap C^c)$

$= (A\cap B^c)\cap C^c = (A\setminus B)\setminus C$

10. ① $x\in(A\cup B)\setminus C \Rightarrow x\in A\cup B, x\notin C$

$\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B, x\notin C \Rightarrow x\in A, x\notin C$ 或 $x\in B, x\notin C$

$\Rightarrow x\in A\setminus C$ 或 $x\in B\setminus C \Rightarrow x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$

~~② $x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)\Rightarrow$~~ ∴ $(A\cup B)\setminus C \subseteq (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$

② $x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1^\circ\ x\in A\setminus C \Rightarrow x\in(A\cup B)\setminus C, \\ 2^\circ\ x\in B\setminus C \Rightarrow x\in(A\cup B)\setminus C \end{array}\right\} \Rightarrow (A\setminus C)\cup(B\setminus C) \subseteq (A\cup B)\setminus C$

∴由①②得 $(A\setminus C)\cup(B\setminus C) = (A\cup B)\setminus C$

法二：$(A\setminus C)\cup(B\setminus C) = (A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)$

$= (A\cup B)\cap C^c$

$= (A\cup B)\setminus C$

或$(A\cap B)\setminus C$
$=(A\cap B)\cap C^c$
$=(A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)$
$=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.

7. ① $x\in(A\cap B)\setminus C \Rightarrow x\in A\cap B,\ x\notin C$

$\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\notin C \Rightarrow x\in A$ 且 $x\notin C$，且 $x\in B$ 且 $x\notin C$.

$\Rightarrow x\in(A\setminus C)$ 且 $x\in B\setminus C$

$\Rightarrow x\in(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$

$\therefore (A\cap B)\setminus C\subseteq(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.

② $x\in(A\setminus C)\cap(B\setminus C)\Rightarrow x\in A\setminus C$ 且 $x\in(B\setminus C)$

$\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $x\notin C\Rightarrow x\in A\cap B$ 且 $x\notin C$

$\Rightarrow x\in(A\cap B)\setminus C$

$(A\setminus C)\cap(B\setminus C)\subseteq(A\cap B)\setminus C$.

12. 反证：若 $B\neq C$

① 若 $B.C$ 中有一个空集 $|A\cup B|\neq|A\cup C|$ 不成立.

② $B.C$ 非空. $B\neq C$ ~~$\because A\cap B=A\cup B=A\cup C$~~

~~$\Rightarrow A\setminus B\neq A\setminus C$~~ 1° $A=\phi$ $B\cup A=B\neq A\cup C=C$ 不成立.

2° $A\neq\phi$ ~~$\because A\cup B=A\cup C$~~ $\because A\cap B=A\cap C\Rightarrow A\setminus B=A\setminus C$.

$\Rightarrow$ ~~若~~ $(A\setminus B)\cup B\neq$ ~~$A\cup B$~~ $(A\setminus C)\cup C$ 即 $A\cup B\neq A\cup C$ ~~若~~

~~$(A\setminus C)\cup C=A\cup C$~~ 与原题不符

$\therefore$ 假设不成立

$\therefore$ 综上. 原命题成立.

15. (1). 若 $B=C=\{1,2,3\}$ $A=$ ~~…~~ $\{1,4\}$

$(A\setminus B)\cup C=\{1,2,3,4\}$

$A\setminus(B\setminus C)=\{1,4\}$. $(A\setminus B)\cup C\neq A\setminus(B\setminus C)$

(2). $B=C=\{1,2\}$ $A=\{1,2,3\}$

$A\cup(B\setminus C)=A=\{1,2,3\}$

$(A\cup B)\setminus C=\{3\}$ $A\cup(B\setminus C)\neq(A\cup B)\setminus C$

(3). ~~若 $B=C=\{1,2\}$~~ $B=\phi$ $C=\{1\}$ $A=\{1,2\}$

~~$A\setminus(B\cup C)$~~ $A\setminus(B\cup C)=\{2\}$.

$(A\cup C)\setminus B=\{1,2\}$

$\therefore A\setminus(B\cup C)\neq(A\cup C)\setminus B$

16. d.

对任何 $A.B$. $2^{A\cap B}=2^A\cap 2^B$

17. (a) $x\notin A$ 且 $x\in B$

(b) $x\notin A$ 或 $x\notin B$.

(c). $x\notin A$ 或 $x\in B$.

(d) $(x\in A$ 且 $x\notin B)$ 或 $(x\in B$ 且 $x\notin A)$

~~18. …~~

~~18. $(A\setminus B)$~~

18. $((A\setminus B)\cup(A\setminus C))$

选 C

20. (4) $A^c\cap B=A^c\cap C$.

21. ~~① $(A\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)$~~

~~$=(B\cap C)\cap(A\cup A^c)=B\cap C$.~~

② $(B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)=C\cap[B\cup(A\cap B^c)]$

$=C\cap[(B\cup A)\cap(B\cup B^c)]=C\cap(B\cup A)$

③ $[C\cap(B\cup A)]\cup[(A\cap B)\cap C^c]=(A\cap B)\cap(C\cup C^c)=A\cap B$.

~~③ $(A\cap B)\cup(A^c\cap B^c\cap C)$~~

~~④ $(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)=B^c\cap A$~~

④ $(A\cap B)\cup(A\cap B^c\cap C^c)=A\cap[B\cup(B^c\cap C^c)]$ ~~$=A\cap[B\cap C^c]$~~

$=A\cap(B\cup C^c)=(A\cap B)\cup(A\cap C^c)$

原式 $=(A\cap B)\cup(A\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C^c)$

$=(A\cap B)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup[C^c\cap(A\cup(A^c\cap B))]$

$=(A\cap B)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)$

$=$

$(A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap C \cap B^c)$

$= (A^c \cap C) \cup (B \cap B^c)$

$= A^c \cap C$

21. 原式 $= (A \cap B \cap C) \cup [(A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap C \cap B^c)]$

$\cup [(A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c)] \cup [(A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)]$

$= (A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap C) \cup (B^c \cap A) \cup (B \cap C^c)$

$= [C \cap (B \cup A^c)] \cup (B^c \cap A) \cup (B \cap C^c)$

$= (C \cap B) \cup (C^c \cap B) \cup (A^c \cap C) \cup (B^c \cap A)$

$= B \cup (B^c \cap A) \cup (A^c \cap C)$

$= (A \cup B) \cup (A^c \cap C)$

$= (A \cup B \cup C) \cap (A \cup A^c \cup B)$

$= A \cup B \cup C$

22. ① 充分性. $\because S \triangle T \subseteq S \triangle W$ 且 $S \subseteq W$

$\therefore (S \setminus T) \cup (T \setminus S) \subseteq (S \setminus W) \cup (W \setminus S) = (W \setminus S)$

$S \cap [(S \setminus T) \cup (T \setminus S)] \subseteq S \cap (W \setminus S)$

$(S \setminus T) \cup \phi \subseteq \phi$

$S \setminus T \subseteq \phi$

$S \subseteq T$ 代回上式

$\therefore T \setminus S \subseteq W \setminus S$

$\therefore T \subseteq W$

$\therefore S \subseteq T \subseteq W$.

② 必要性. $S \subseteq T \subseteq W$ 时

$S \triangle T = T \setminus S$

$S \triangle W = W \setminus S$

$\Rightarrow$ 由 $T \setminus S \subseteq W \setminus S$

即 $S \triangle T \subseteq S \triangle W$

且 $S \subseteq W$

由 ①② 得原命题成立.

24. $A \times B = \{(a,e), (a,f), (a,g), (a,h),$
$(b,e), (b,f), (b,g), (b,h),$
$(c,e), (c,f), (c,g), (c,h)\}$

$B \times A = \{(e,a), (e,b), (e,c),$
$(f,a), (f,b), (f,c),$
$(g,a), (g,b), (g,c),$
$(h,a), (h,b), (h,c)\}$.

$A \times C = \{(a,x), (a,y), (a,z),$
$(b,x), (b,y), (b,z),$
$(c,x), (c,y), (c,z)\}$

$A^2 \times B = \{((a,a),e), ((a,a),f), ((a,a),g), ((a,a),h),$
$((a,b),e), ((a,b),f), ((a,b),g), ((a,b),h),$
$((a,c),e), ((a,c),f), ((a,c),g), ((a,c),h),$
$((b,a),e), ((b,a),f), ((b,a),g), ((b,a),h),$
$((b,b),e), ((b,b),f), ((b,b),g), ((b,b),h),$
$((b,c),e), ((b,c),f), ((b,c),g), ((b,c),h),$
$((c,a),e), ((c,a),f), ((c,a),g), ((c,a),h),$
$((c,b),e), ((c,b),f), ((c,b),g), ((c,b),h),$
$((c,c),e), ((c,c),f), ((c,c),g), ((c,c),h)\}$.

充分性

25. 若 $A = \phi \Rightarrow A \times B = B \times A = \phi$ 成立.

若 $B = \phi \Rightarrow A \times B = B \times A = \phi$ 成立

若 $A = B \Rightarrow A \times B = B \times A = A \times A$

必要性. 若 $A \times B = B \times A$

A, B 非空 ① 即 $\forall (x,y) \in (A \times B)$, $(x,y) \in (B \times A)$

$\left.\begin{array}{l} \forall x \in A, x \in B \Rightarrow A \subseteq B \\ \forall y \in B, y \in A \Rightarrow B \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow B = A$

~~② 若 B, A 中有一空集. 显~~

② A, B 有一为空. $A \times B = B \times A \Rightarrow$ 显然 A, B 有一为空成立.

综上. 原命题成立.

26. ① $\forall (x,y) \in (A\cap B)\times(C\cap D)$

$\Rightarrow \begin{cases} x\in(A\cap B), & x\in A,\ x\in B \\ y\in(C\cap D) & y\in C,\ y\in D \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x,y)\in(A\times C) \\ (x,y)\in(B\times D) \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$

$\therefore (A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq(A\times C)\cap(B\times D)$

② $\forall (x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$

$\Rightarrow \begin{cases} (x,y)\in(A\times C) \\ (x,y)\in(B\times D) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in A,\ x\in B \\ y\in C,\ y\in D \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\in A\cap B \\ y\in C\cap D \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$

$\therefore (A\times C)\cap(B\times D)\subseteq(A\cap B)\times(C\cap D)$

由①②证得 $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

27. $A\times(B\triangle C) = A\times[(B\setminus C)\cup(C\setminus B)]$

$=[A\times(B\setminus C)]\cup[A\times(C\setminus B)]$

$\cancel{=(A\times B)\cup(A\times C)}$

$=[(A\times B)\setminus(A\times C)]\cup[(A\times C)\setminus(A\times B)]$

$=(A\times B)\triangle(A\times C)$

29. 同 27

31. $m\cdot n$ 个序对组

有 $2^{m\cdot n}$ 个子集

32. ① $\forall (x,y)\in(A\times B) \Rightarrow \begin{cases} x\in A \\ y\in B \end{cases}$

$\cancel{\forall (a,b)\in(B\times B)\Rightarrow}$

$\because A\times B=B\times B \Rightarrow A\times B\subseteq B\times B$

$\therefore x\in A\subseteq B \Rightarrow \cancel{x\in B}\ A\subseteq B$ ①

$\forall (a,b)\in(B\times B)\Rightarrow \begin{cases} a\in B \\ b\in B \end{cases}$

$A\times B=B\times B \Rightarrow B\times B\subseteq A\times B$

$\forall x\in B,\ x\in A \Rightarrow B\subseteq A$ ②

由①②得 $A=B$

33. $|2^{2^{A\times B}}| = 2^{|2^{A\times B}|} = 2^{2^{|A\times B|}}$

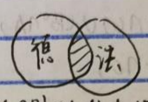
$= 2^{2^{|A|\times|B|}}$

~~33. 假设 A m个元素，B n个元素~~

$\cancel{|2^{A\times B}| = 2^{m\cdot n} = 2^m 2^n = |2^A|\,|2^B|}$

$\cancel{\therefore 2^{|A\times B|} = |2^A|\cdot|2^B|}$

34.



$|A\cap B| = |A| + |B| - |A\cup B|$

$45\% + 65\% - 1 = 10\%$

答：有 10% 同时学德文和法文。

35. 假设~~小孙~~这两小伙都与两个姑娘跳过舞。

所有小伙构成集合 F，$f_1, f_2 \cdots f_n \in F$

— — 姑娘 — — — G，$g_1, g_2 \cdots g_m \in G$

G_{f_i} 表示和 i 小伙跳过舞的姑娘

不妨设和 f_1 跳过舞的姑娘最少，i 个，$|G_{f_i}|$ 个

~~又∵ f_i 都与 $\forall g_i$ 跳~~

又∵ $\forall f_i$，f_i 都与 $\forall g_i$，g_i 跳过舞

$\therefore \phi \ne G_{f_1} \subseteq G_{f_2} \subseteq \cdots G_{f_n} \subsetneq G$

又∵ $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_{f_i} = G_{f_n}$ $\Big\}\Rightarrow$ 矛盾

假设不成立

∴ 原命题不成立。