

第一章 集合及其运算

P_8 习题

1. 写出方程 $x^2 + 2x + 1 = 0$ 的根所构成的集合。
3. 设有 n 个集合 A_1, A_2, \dots, A_n 且 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_1$, 试证: $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ 。
4. 设 $S = \{\phi, \{\phi\}\}$, 试求 2^S ?
5. 设 S 恰有 n 个元素, 证明 2^S 有 2^n 个元素。

P_{16} 习题 6. 设 A, B 是集合, 证明: $(A \setminus B) \cup B = (A \cup B) \setminus B \Leftrightarrow B = \phi$ 。

7. 设 A, B 是集合, 试证 $A = \phi \Leftrightarrow B = A \Delta B$ 。

任选两题

9. 设 A, B, C 为集合, 证明: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ 。
10. 设 A, B, C 为集合, 证明: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。
11. 设 A, B, C 为集合, 证明: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ 。

12. 设 A, B, C 都是集合, 若 $A \cup B = A \cup C$ 且 $A \cap B = B \cap C$, 试证 $B=C$ 。

15. 下列命题是否成立? 说明理由 (举例)。

(1) $(A \setminus B) \cup C = A \setminus (B \setminus C)$; (2) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$;

(3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ 。 (答案: 都不正确)

16. 下列命题哪个为真? 答案: _____

a) 对任何集合 A, B, C , 若 $A \cap B = B \cap C$, 则 $A=C$ 。

b) 设 A, B, C 为任何集合, 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B=C$ 。

c) 对任何集合 A, B , $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$ 。 d) 对任何集合 A, B , $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ 。

e) 对任何集合 A, B , $2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B$ 。 f) 对任何集合 A, B , $2^{A \Delta B} = 2^A \Delta 2^B$ 。

17. 填空: 设 A, B 是两个集合。

a) $x \in A \cup B \Leftrightarrow$ _____; b) $x \in A \cap B \Leftrightarrow$ _____

c) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow$ _____; d) $x \in A \Delta B \Leftrightarrow$ _____。

18. 设 A, B, C 为三个集合, 下列集合表达式哪一个等于 $A \setminus (B \cap C)$? 答案: _____

(a) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; (b) $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

(c) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; (d) $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$; (e) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

P_{20} 习题

20. 设 A, B, C 为集合, 并且 $A \cup B = A \cup C$, 则下列断言哪个成立? 答案: _____

(1) $B=C$; (2) $A \cap B = A \cap C$; (3) $A \cap B^c = A \cap C^c$; (4) $A^c \cap B = A^c \cap C$ 。

21. 设 A, B, C 为任意集合, 化简

$$(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup \\ (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$$

22. 设 V 是任一集合, 证明:

$$\forall S, T, W \in 2^V \text{ 有 } S \subseteq T \subseteq W \text{ 当且仅当 } S \Delta T \subseteq S \Delta W \text{ 且 } S \subseteq W。$$

P_{25} 习题

24. 设 $A = \{a, b, c\}, B = \{e, f, g, h\}, C = \{x, y, z\}$ 。求 $A \times B, B \times A, A \times C, A^2 \times B$ 。

25. 设 A, B 为集合, 试证: $A \times B = B \times A$ 的充要条件是下列三个条件至少一个成立: (1) $A = \emptyset$; (2) $B = \emptyset$; (3) $A = B$ 。

26. 设 A, B, C, D 为任四个集合, 证明: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

27. 设 A, B, C 是三个任意集合, 证明: $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ 。

29. 设 A, B, C 是三个任意集合, 证明: $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ 。

31. 设 A 有 m 个元素, B 有 n 个元素, 则 $A \times B$ 是多少个序对组成的? $A \times B$ 有多少个不同的子集?
答案: _____

32. 设 A, B 是两个集合, $B \neq \emptyset$, 试证: 若 $A \times B = B \times B$, 则 $A = B$ 。

P_{33} 习题

33. 设 A, B 是两个有限集, 试求 $|2^{A \times B}| = ?$

34. 某班学生中有 45%正在学德文, 65%正在学法文。问此班中至少有百分之几的学生正同时学德文和法文?

35. 毕业舞会上, 小伙子与姑娘跳舞, 已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞, 但未能与所有姑娘跳过舞。同样地, 每个姑娘也至少与一个小伙子跳舞, 但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明: 在所有参加舞会的小伙子与姑娘中, 必可找到两个小伙子 and 两个姑娘, 这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞, 而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙中的一个跳过舞。