**例8** 设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8F7A.tmp.png是一个C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8F7B.tmp.png个顶点的连通图。C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8F7C.tmp.png和C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8F8C.tmp.png是C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8F8D.tmp.png的两个不邻接的顶点,并

且C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8F8E.tmp.png。

证明：C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8F8F.tmp.png是哈密顿图C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8F90.tmp.png是哈密顿图。

**证明**： C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FA1.tmp.png显然成立。

C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FA2.tmp.png假设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FA3.tmp.png不是哈密顿图，则由题意知，在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FA4.tmp.png中必有一条从C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FA5.tmp.png到C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FA6.tmp.png的哈密顿路。不妨设此路为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FB7.tmp.png，令C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FB8.tmp.png，则在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FB9.tmp.png中与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FBA.tmp.png邻接的顶点为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FBB.tmp.png，其中C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FCB.tmp.png。此时顶点C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FCC.tmp.png不能与顶点C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FCD.tmp.png邻接。否则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FCE.tmp.png有哈密顿回路C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FCF.tmp.png，因此C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FD0.tmp.png至少与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FE1.tmp.png中的C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FE2.tmp.png个顶点不邻接。于是C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FE3.tmp.png，从而C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FE4.tmp.png，即C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FE5.tmp.png，与题设矛盾。故假设不成立，因此C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps8FF5.tmp.png是哈密顿图。

**例9** 设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4A5.tmp.png是连通图且顶点数为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4A6.tmp.png，最小度数为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4B7.tmp.png。若C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4B8.tmp.png，则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4B9.tmp.png中有一长至少为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4BA.tmp.png的路。

**证：**假设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4DD.tmp.png中的最长路为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4DE.tmp.png：C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4DF.tmp.png，其长度为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4E0.tmp.png。因为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4E1.tmp.png， C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4F2.tmp.png，所以存在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4F3.tmp.png，使C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4F4.tmp.png与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4F5.tmp.png在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF4F6.tmp.png中相邻，得一长为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF506.tmp.png的回路：C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF507.tmp.png。

又因为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF508.tmp.png连通，且C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF509.tmp.png的顶点数C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF51A.tmp.png，故存在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF51B.tmp.png与回路上C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF51C.tmp.png相邻，则把回路在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF51D.tmp.png处断开，并把C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF51E.tmp.png连入回路中，得到一条长为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF52F.tmp.png的路，矛盾。

所以C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF530.tmp.png中有一长至少为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsF531.tmp.png的路。

**例10**设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps961.tmp.png为有C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps972.tmp.png个顶点的简单无向图，证明：

（1）若C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps973.tmp.png的边数C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps974.tmp.png，则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps975.tmp.png为哈密顿图；

（2）若C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps976.tmp.png的边数C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps986.tmp.png，则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps987.tmp.png是否一定为哈密顿图？

**证：**（1）首先证明C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9AF.tmp.png中任意两个不相邻的顶点的度数之和均大于等于C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B0.tmp.png，否则存在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B1.tmp.png不相邻，且C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B2.tmp.png。

令C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9C3.tmp.png，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9C4.tmp.png，则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9C5.tmp.png是有C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9C6.tmp.png个顶点图，它的边数C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9C7.tmp.png应满足： C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9D8.tmp.png，

这与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9D9.tmp.png是有C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9DA.tmp.png个顶点的简单图，矛盾。

所以C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9DB.tmp.png中任意两个互不相邻的顶点的度数之和均大于等于C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9DC.tmp.png。

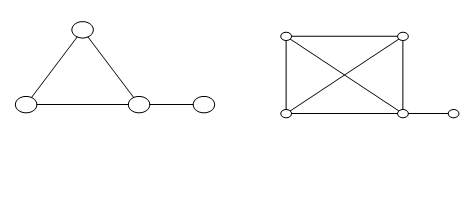
根据定理可知，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9EC.tmp.png是哈密顿图。

（2）若C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9ED.tmp.png的边数C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9EE.tmp.png，则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9EF.tmp.png不一定是哈密顿图。

例如：如图7所示的两个图都不是哈密顿图。

**例11**证明：完全图C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E48.tmp.png中至少存在彼此无公共边的两条哈密顿回路和一条哈密顿路？

**证：**在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E49.tmp.png中，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E5A.tmp.png，由定理可知，必有一条哈密顿回路C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E5B.tmp.png；令C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E5C.tmp.png为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E6C.tmp.png中删除C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E6D.tmp.png中全部边之后的图，则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E6E.tmp.png中每个顶点的度均为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E6F.tmp.png，故C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E70.tmp.png仍为哈密顿图，因而存在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E81.tmp.png中的哈密顿回路C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E82.tmp.png，显然C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E83.tmp.png与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E84.tmp.png无公共边。再设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E95.tmp.png为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E96.tmp.png中删除C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E97.tmp.png中的全部边后所得图，则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E98.tmp.png每个顶点的度均为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7E99.tmp.png。又由定理可知C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7EA9.tmp.png为半哈密顿图，因而C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7EAA.tmp.png中存在哈密顿路。设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7EAB.tmp.png为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7EAC.tmp.png中的一条哈密顿路，显然C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps7EAD.tmp.png无公共边。



**例12**已知9个人C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCAF3.tmp.png，其中C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCAF4.tmp.png和两个人握过手，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCAF5.tmp.png各和3个人握过手，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCAF6.tmp.png和4个人握过手，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB07.tmp.png各和5个人握过手，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB08.tmp.png和6个人握过手。证明这9个人中一定可以找出3个人互相握过手。

**证：**设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB2D.tmp.png为图C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB2E.tmp.png的9个顶点，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB2F.tmp.png握过手就连一条边C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB30.tmp.png，于是得

到图C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB31.tmp.png。根据题意有：

C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB42.tmp.png，

C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB43.tmp.png。

与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB44.tmp.png相邻的点有6个，其中必有一点C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB45.tmp.png为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB46.tmp.png之一，因此有C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB56.tmp.png。与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB57.tmp.png相邻的其余5个点中必存在一点C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB58.tmp.png与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB59.tmp.png相邻如图4所示，否则有C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB5A.tmp.png，矛盾。由此C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wpsCB6B.tmp.png三个人互相握过手。

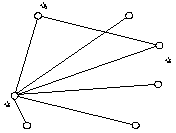
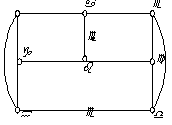
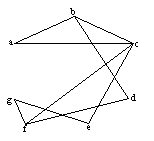
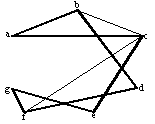
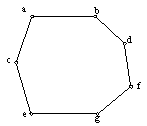


图5 图6 图7

**例13** 某次会议有20人参加，其中每个人都至少有10个朋友，这20人围一圆桌入席，要想使与每个人相邻的两位都是朋友是否可能？根据什么？**例14** 图G是哈密顿图。试证明：若图中的哈密顿圈中含边e1，则它一定同时也含e2。**例15** 已知C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps829A.tmp.png7个人中，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82AA.tmp.png会讲英语；C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82AB.tmp.png会讲英语和汉语；C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82AC.tmp.png会讲英语、意大利语和俄语；C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82AD.tmp.png会讲汉语和日语；C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82AE.tmp.png会讲意大利语和德语；C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82AF.tmp.png会讲俄语、日语和法语；C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82C0.tmp.png会讲德语和法语。能否将他们的座位安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交谈？

**证**：用C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82C1.tmp.png7个顶点代表7个人，若两人能交谈（会讲同一种语言），就在代表他们的顶点之间连一条无向边，所得无向图如图4C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82C2.tmp.png所示，此图中存在哈密顿回路：C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82C3.tmp.png（如图4C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82C4.tmp.png所示），于是按图4C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps82D4.tmp.png所示的顺序安排座位即可。

1. (b) (c)

**例16**设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B4F.tmp.png是C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B5F.tmp.png个顶点的简单无向图，设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B60.tmp.png中最长的路C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B61.tmp.png的长度为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B72.tmp.pngC:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B73.tmp.png，起点与终点分别为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B74.tmp.png,C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B85.tmp.png，而且C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B86.tmp.png。证明：C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B87.tmp.png中必有与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B97.tmp.png不完全相同但长度也为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B98.tmp.png的路。

**证**：设图C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9B99.tmp.png的最长的路C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BAA.tmp.png为：C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BAB.tmp.png，其长度为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BAC.tmp.png。因C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BAD.tmp.png为最长的路，所以与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BAE.tmp.png,C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BBE.tmp.png相邻的顶点必在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BBF.tmp.png上。

若C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BC0.tmp.png和C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BC1.tmp.png相邻，则构成一个回路C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BC2.tmp.png，回路长为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BD3.tmp.png；

若C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BD4.tmp.png和C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BD5.tmp.png不相邻，设与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BD6.tmp.png相邻的顶点为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BD7.tmp.png，其中C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BE8.tmp.png，则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BE9.tmp.png必与某个C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BEA.tmp.png邻接。否则，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BEB.tmp.png至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BFB.tmp.png

这是不可能的。于是C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BFC.tmp.png是C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BFD.tmp.png中的一个回路，此回路长度为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BFE.tmp.png。去掉这个回路的任意一条边，便得到一条相应的最长的路，所以对于这个回路有C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9BFF.tmp.png个不同的最长的路且C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9C00.tmp.png。

故C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9C01.tmp.png中必有与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9C12.tmp.png不完全相同，但长度也为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9C13.tmp.png的路。

**例5** 证明：在一个连通图中，两条最长的路有一个公共的顶点。

**证：**设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D72.tmp.png与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D73.tmp.png是图中的两条最长的路，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D74.tmp.png，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D75.tmp.png。

假设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D76.tmp.png与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D87.tmp.png没有公共顶点，因为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D88.tmp.png是连通的，所以C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D89.tmp.png与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D8A.tmp.png之间必有一条路C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D8B.tmp.png连接且C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D9B.tmp.png。令C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D9C.tmp.png与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D9D.tmp.png上的C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D9E.tmp.png连接，与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1D9F.tmp.png上的C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1DB0.tmp.png连接，则

若C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1DB1.tmp.png，则路C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1DB2.tmp.png比C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1DB3.tmp.png长，矛盾；

若C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1DB4.tmp.png，则路C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1DC4.tmp.png比C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps1DC5.tmp.png长，矛盾。

故假设不成立，即两条最长的路必有公共顶点。

**例6 设G是图，证明：若δ(G)≥2，则G中包含长至少是δ(G)+1的圈。**

**例7**设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps98E2.tmp.png为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps98F3.tmp.png阶简单无向图，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps98F4.tmp.png且C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps98F5.tmp.png为奇数，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9906.tmp.png和C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9907.tmp.png的补图C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9908.tmp.png中度数为奇数的顶点的个数是否一定相等？试证明你的结论。

**解：**一定相等。

因为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9909.tmp.png为奇数，则对于奇数个顶点的C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps990A.tmp.png阶无向完全图，每个顶点的度数必为偶数。若C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps990B.tmp.png的奇度数顶点为C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps991B.tmp.png个，则对应补图C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps991C.tmp.png在这C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps991D.tmp.png个顶点的度数必为（偶数－奇数）＝奇数。另外，对于C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps991E.tmp.png中度数为偶数的顶点，其在补图C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps991F.tmp.png中，这些顶点的度数仍为（偶数－偶数）＝偶数。所以，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9920.tmp.png中度数为奇数的顶点个数与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9931.tmp.png中度数为奇数的顶点个数相同。

**例8 在一个有n个人的宴会上，每个人至少有m个朋友(2≤m≤n)。试证：有不少于m+1个人，使得他们按某种方法坐在一张圆桌旁，使得他们按着某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左、右均是他的朋友。例9 一个图G是连通的，当且仅当将V划分成两个非空子集V1和V2时，G总有一条联结V1的一个顶点与V2的一个顶点的边。 例10 设G是一个(p,q)图，证明： (1)若q≥p，则G中有圈；(2)若q>p+4，则G包含两个边不重的圈；例11 图G的围长是G的最短圈的长；G中若没圈，则定义G的围长为无穷大。证明：围长为4的k-正则图至少有2k个顶点，而且(同构意义下)在2k个顶点上恰好有一个这样的图。(Kk,k)**

例5 证明：r(3,4)=9。即证明：任何9个人的团体里，或有3个人互相认识，或有4个互相不认识。但8个人的团体里，上述性质未必成立。**证：**这就是要证任何9个顶点的图C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps90EE.tmp.png中，或C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps90EF.tmp.png中包含C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps90F0.tmp.png，或C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps90F1.tmp.png中包含C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9102.tmp.png。并且有的8个顶点的图C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9103.tmp.png，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9104.tmp.png中既不包含C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9105.tmp.png也不包含C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9106.tmp.png，图2中给出了这样的一个图。

设C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9116.tmp.png，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9117.tmp.png。若C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9118.tmp.png，则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9119.tmp.png中有4个顶点C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps911A.tmp.png在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps912B.tmp.png中与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps912C.tmp.png邻接。这时若有C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps912D.tmp.png，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps912E.tmp.png，则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps912F.tmp.png是C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9140.tmp.png中的一个C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9141.tmp.png；否则C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9142.tmp.png是C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9143.tmp.png的互不相邻接的4个顶点，所以C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9144.tmp.png包含C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9154.tmp.png。

若C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9155.tmp.png，则在C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9156.tmp.png中每个顶点的度C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9157.tmp.png。但是9是奇数，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9158.tmp.png中奇度数顶点的个数必为偶数，所以有一个偶度顶点C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9169.tmp.png。C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps916A.tmp.png中与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps916B.tmp.png邻接的6个顶点导出C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps916C.tmp.png中的6个顶点的子图。由定理1知C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps916D.tmp.png有C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps917D.tmp.png，它与C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps917E.tmp.png形成了C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps917F.tmp.png中的C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9182.tmp.png，即C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9183.tmp.png中的C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9196.tmp.png或C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9197.tmp.png中含C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps9198.tmp.png即C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps91A5.tmp.png包含C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps91AB.tmp.png。

因此，C:\Users\ADMINI~1\AppData\Local\Temp\ksohtml\wps91AC.tmp.png。