Lógica Computacional 1

Cláudia Nalon

http://nalon.org

nalon@unb.br

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

2024/2

1 Lógica Proposicional

1.1 Sintaxe

Definição 1. O conjunto de *símbolos lógicos* da linguagem proposicional é dado pela união dos seguintes conjuntos:

1. $\mathcal{P} = \{p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots\}$, um conjunto enumerável de símbolos;
2. $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
3. $\{(,)\}$.

Definição 2. Os elementos do conjunto $\mathcal{P}$ são chamados de *símbolos proposicionais* ou *variáveis proposicionais*.

Definição 3. Os elementos do conjunto $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ são chamados de *conectivos lógicos* ou *operadores lógicos*.

Definição 4. O símbolo "$\neg$" é chamado de *conectivo unário*.

Definição 5. Os símbolos contidos no conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ são chamados de *conectivos binários*.

Definição 6. Os elementos do conjunto $\{(,)\}$ são chamados de *símbolos de pontuação*.

Definição 7. Os símbolos lógicos definem o *alfabeto da linguagem proposicional*.

Definição 8. Uma *fórmula* é qualquer sequência finita de símbolos lógicos.

Definição 9. A *Linguagem Lógica Proposicional*, denotada por $\mathcal{L}_P$, é equivalente ao seu *conjunto de fórmulas bem-formadas*, denotado por $\mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$, que é definido indutivamente, como se segue:

1. se $p \in \mathcal{P}$, então $p \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$;
2. se $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$, então $\neg\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$;
3. se $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ e $\psi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$, então $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$.

Definição 10. Fórmulas que não são bem-formadas, isto é, que não pertencem a $\mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$, são chamadas de *fórmulas mal-formadas.*

Definição 11. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Se $\varphi \in \mathcal{P}$, então φ é chamada de *fórmula atômica.*

Definição 12. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Se $\varphi \notin \mathcal{P}$, isto é, se φ não é uma fórmula atômica, então φ é chamada de *fórmula molecular.*

Definição 13. Sejam φ, ψ e $\chi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Seja $Sub : \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P} \longrightarrow 2^{\mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}}$ uma função. O *conjunto de subfórmulas de* φ, $Sub(\varphi)$, é dado por:

1. se $\varphi \in \mathcal{P}$, então $Sub(\varphi) = \{\varphi\}$;
2. se φ é da forma $\neg\psi$, então $Sub(\varphi) = \{\varphi\} \cup Sub(\psi)$;
3. se φ é da forma $(\psi * \chi)$, onde $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $Sub(\varphi) = \{\varphi\} \cup Sub(\psi) \cup Sub(\chi)$.

Definição 14. Operador Principal – Exercício

Definição 15. Subfórmulas Imediatas – Exercício

Definição 16. Comprimento – Exercício

Definição 17. Uma *árvore sintática para* φ, onde $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$, é constituída de uma *raiz* com zero ou mais filhos, dependendo da *estrutura* (ou seja, da forma) de φ:

1. se $\varphi \in \mathcal{P}$, então a raiz é rotulada por φ e tem zero filhos;
2. se φ é da forma $\neg\psi$, então a raiz é rotulada por $\neg$ e tem um único filho, que é a raiz da árvore sintática de ψ;
3. se φ é da forma $(\psi * \chi)$, onde $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então a raiz é rotulada por $*$ e tem dois filhos, onde o da esquerda é a raiz da árvore sintática de ψ e o da direita é a raiz da árvore sintática de χ.

1.2 Semântica

Definição 18. O conjunto $\mathcal{V} = \{V, F\}$ é chamado de *conjunto de valores de verdade* e cada um de seus elementos é chamado de *valor de verdade.*

Definição 19. Uma *função booleana* é aquela que tem apenas dois elementos em sua imagem.

Definição 20. Uma *valoração booleana* $\mathbb{v}_0$ *para os símbolos proposicionais de* $\mathcal{L}_P$*,* $\mathcal{P}$, é uma função booleana $\mathbb{v}_0 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$.

Definição 21. Uma *valoração booleana (ou interpretação)* $\mathbb{v}$ *para as fórmulas bem-formadas de* $\mathcal{L}_P$ é uma função booleana $\mathbb{v} : \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P} \longrightarrow \mathcal{V}$, que estende uma valoração booleana $\mathbb{v}_0 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$ para símbolos proposicionais de $\mathcal{L}_P$, da seguinte forma (onde $\varphi, \psi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$):

1. $\mathbb{v}(\varphi) = \mathbb{v}_0(\varphi)$, se $\varphi \in \mathcal{P}$;
2. $\mathbb{v}(\neg\varphi) = V$ se, e somente se, $\mathbb{v}(\varphi) = F$;
3. $\mathbb{v}(\varphi \wedge \psi) = V$ se, e somente se, $\mathbb{v}(\varphi) = \mathbb{v}(\psi) = V$;
4. $\mathbb{v}(\varphi \vee \psi) = V$ se, e somente se, $\mathbb{v}(\varphi) = V$ ou $\mathbb{v}(\psi) = V$ ou ambos;
5. $\mathbb{v}(\varphi \to \psi) = V$ se, e somente se, $\mathbb{v}(\varphi) = F$ ou $\mathbb{v}(\psi) = V$ ou ambos;
6. $\mathbb{v}(\varphi \leftrightarrow \psi) = V$ se, e somente se, $\mathbb{v}(\varphi) = \mathbb{v}(\psi)$.

Definição 22. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Nós dizemos que φ é *satisfatível* se existe uma valoração booleana $\mathbb{v} : \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P} \longrightarrow \mathcal{V}$ tal que $\mathbb{v}(\varphi) = V$. Neste caso, dizemos $\mathbb{v}$ é um *modelo para* φ ou que $\mathbb{v}$ *satisfaz* φ.

Observação 1. As Definições 23 a 32 aplicam-se a ambas as linguagens lógicas a serem estudadas nesta disciplina e, mais geralmente, a quaisquer linguagens clássicas. Usaremos o símbolo $\mathcal{L}$ para nos referirmos a uma linguagem lógica qualquer. Denotamos por $\mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ o conjunto de fórmulas bem-formadas da linguagem lógica $\mathcal{L}$.

Definição 23. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$. φ é *falsificável* se existe um modelo $\mathbb{M}$ para $\neg\varphi$. Neste caso, dizemos que $\mathbb{M}$ *não satisfaz* ou *falsifica* φ.

Definição 24. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$. Nós dizemos que φ é *insatisfatível* ou que é uma *contradição* se não existe um modelo para φ.

Definição 25. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$. Nós dizemos que φ é uma *tautologia* se toda interpretação é um modelo para φ.

Definição 26. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$. Nós dizemos que φ é uma *contingência* se φ é satisfatível e falsificável.

Definição 27. Seja φ e $\psi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$. Nós dizemos que φ e ψ são *semanticamente equivalentes*, denotado por $\varphi \ {}_{\mathcal{L}}{\dashv\models}_{\mathcal{L}}\ \psi$, se, para toda interpretação $\mathbb{M}$, temos que $\mathbb{M}$ é um modelo para φ se, e somente se, $\mathbb{M}$ é um modelo para ψ.

Definição 28. Seja $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$. Nós dizemos que Γ é *consistente* ou *satisfatível* se existe uma interpretação $\mathbb{M}$ que satisfaz todas as fórmulas de Γ. Neste caso, dizemos que $\mathbb{M}$ *satisfaz* Γ ou é um *modelo* para Γ.

Definição 29. Seja $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$. Nós dizemos que Γ é *inconsistente* ou *insatisfatível* se não existe um modelo para Γ.

Definição 30. Sejam $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$. Nós dizemos que φ é *consequência lógica* de Γ, denotado por $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$, se todo modelo para Γ também é um modelo para φ.

Definição 31. Sejam $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$. Nós dizemos que φ é *consequência lógica* de Γ, denotado por $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$, se não existe um modelo para Γ que não seja modelo para φ.

Definição 32. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$. Se $\emptyset \models_{\mathcal{L}} \varphi$, também denotado por $\models_{\mathcal{L}} \varphi$, nós dizemos que φ é consequência lógica do vazio ou que φ é *válida*.

Definição 33. A construção da *tabela-verdade* é definida pelo seguinte procedimento:

Gere o conjunto de todas as subfórmulas das fórmulas em Γ, obtendo SUBF;
Seja $\mathcal{P}_0$ o conjunto dos símbolos proposicionais aparecendo em SUBF;
Ordene lexicograficamente $\mathcal{P}_0$;
SUBF $\leftarrow$ SUBF $-\mathcal{P}_0$
Ordene por tamanho e lexicograficamente SUBF, obtendo a lista ordenada SUBF_ORDENADAS;
Seja $m = |$ SUBF_ORDENADAS $|$;
Seja $n = |\mathcal{P}_0|$;
Construa uma tabela com $m + n$ colunas e $2^n + 1$ linhas;
Rotule, na primeira linha, as n primeiras colunas com os símbolos de $\mathcal{P}_0$; rotule as demais colunas com as fórmulas em SUBF_ORDENADAS;
$i \leftarrow n$;
enquanto $i > 0$ **faça**
    Preencha a i-ésima coluna com $2^{(n-i)}$ V e $2^{(n-i)}$ F até a coluna acabar;
    $i \leftarrow i - 1$
fim enquanto
$i \leftarrow n + 1$
enquanto $i \leq m + n$ **faça**
    Preencha a i-ésima coluna de acordo com a Definição 21, levando-se em consideração os valores de verdade para os símbolos proposicionais ou subfórmulas imediatas da linha correspondente;
    $i \leftarrow i + 1$;
fim enquanto

1.3 Formas Normais

Definição 34. Estendemos o conjunto de símbolos lógicos da linguagem proposicional acrescentando o seguinte item à Definição 1:

4. $\{\top, \bot\}$.

Definição 35. Os elementos do conjunto $\{\top, \bot\}$ são chamados de *constantes lógicas* ou *conectivos nulários*.

Definição 36. Estendemos o conjunto de fórmulas bem-formadas da linguagem proposicional, acrescentando o seguinte item à Definição 9:

4. se $\varphi \in \{\top, \bot\}$, então $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$.

Definição 37. Estendemos a definição de valoração booleana para fórmulas bem-formadas da lógica proposicional, conforme Definição 21, com os seguintes itens:

7. $\mathbb{v}(\top) = V$;

8. $\mathbb{v}(\bot) = F$.

Definição 38. Um *literal* é um símbolo proposicional ou sua negação.

Definição 39. Uma *cláusula* é uma disjunção de literais.

Definição 40. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Nós dizemos que φ está na *Forma Normal Negada* (FNN) se contém apenas os conectivos $\neg$, $\vee$ e $\wedge$ e o conectivo de negação é aplicado apenas a símbolos proposicionais.

Definição 41. A transformação na FNN é dada pelo seguinte procedimento:

1: Substitua toda subfórmula na forma $(\psi \leftrightarrow \chi)$ por $((\psi \rightarrow \chi) \wedge (\chi \rightarrow \psi))$;
2: Substitua toda subfórmula na forma $(\psi \rightarrow \chi)$ por $(\neg\psi \vee \chi)$;
3: Aplique as leis de De Morgan, isto é, substitua toda subfórmula na forma $\neg(\psi \wedge \chi)$ por $(\neg\psi \vee \neg\chi)$ e substitua toda subfórmula na forma $\neg(\psi \vee \chi)$ por $(\neg\psi \wedge \neg\chi)$;
4: Elimine duplas negações, ou seja, substitua toda subfórmula na forma $\neg\neg\psi$ por ψ.

Definição 42. A simplificação de fórmulas aplica as seguintes regras de reescrita:

1: Substitua toda subfórmula na forma $(\psi \vee \psi)$ por ψ;
2: Substitua toda subfórmula na forma $(\psi \wedge \psi)$ por ψ;
3: Substitua toda subfórmula na forma $(\psi \vee \neg\psi)$ por $\top$;
4: Substitua toda subfórmula na forma $(\psi \wedge \neg\psi)$ por $\bot$;
5: Substitua toda subfórmula na forma $(\psi \vee \top)$ por $\top$;
6: Substitua toda subfórmula na forma $(\psi \wedge \bot)$ por $\bot$;
7: Substitua toda subfórmula na forma $(\psi \vee \bot)$ por ψ;
8: Substitua toda subfórmula na forma $(\psi \wedge \top)$ por ψ;

Definição 43. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Nós dizemos que φ está na *Forma Normal Conjuntiva* (FNC) se é uma conjunção de cláusulas.

Definição 44. A transformação de uma fórmula φ em uma fórmula semanticamente equivalente, φ', na Forma Normal Conjuntiva, é dada pelo seguinte procedimento:

1: Transforme φ na FNN;
2: Aplique as leis de distribuição até que a fórmula esteja na FNC.
$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \longleftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \longleftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

Definição 45. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Nós dizemos que φ está na *Forma Normal Disjuntiva* (FND) se é uma disjunção de conjunções de literais.

Definição 46. A transformação de uma fórmula φ em uma fórmula semanticamente equivalente, φ', na Forma Normal Disjuntiva, é dada pelo seguinte procedimento:

1: Transforme φ na FNN;
2: Aplique as leis de distribuição até que a fórmula esteja na FND.
$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \longleftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$
$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \longleftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

2 Teoria de Provas

Observação 2. As definições constantes desta seção referem-se a qualquer lógica clássica $\mathcal{L}$.

Definição 47. Um *axioma* é uma fórmula bem-formada que representa uma proposição que é, geralmente, aceita como verdadeira.

Definição 48. Uma *regra de inferência* é um mecanismo para obtenção de fórmulas bem-formadas a partir de um conjunto de fórmulas bem-formadas.

Definição 49. Sejam $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$. Regras de inferência são, normalmente, escritas da seguinte forma:

$$\frac{\begin{array}{c}\gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n\end{array}}{\varphi}$$

onde cada $\gamma_i \in \Gamma$, $1 \leq i \leq n$, é chamada de *premissa* e φ é chamada de *conclusão.* A *aplicação da regra de inferência* a $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *produz* φ; nós também dizemos que φ é *derivada* de $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

Definição 50. Um *cálculo dedutivo* ou *método de prova* é um par $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$, onde $\mathcal{A}$ é um conjunto de axiomas e $\mathcal{R}$ é um conjunto de regras de inferência.

Exemplo 1. Um sistema axiomático correto, completo e consistente[1] para a Lógica Proposicional foi proposto por Jan Łukasiewicz, matemático polonês (21/12/1878 – 13/02/1956). O conjunto de *esquemas axiomáticos* é dado por:

A1 $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$

A2 $((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

A3 $((\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi))$

e as regras de inferência são:

SUB: Substituição uniforme, que nos permite trocar as variáveis metalinguísticas que compõem os esquemas axiomáticos por fórmulas bem-formadas da linguagem proposicional;

MP: De φ e $\varphi \to \psi$ infere-se ψ (*Modus Ponens*).

Definição 51. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um cálculo dedutivo. Uma *prova para* φ é uma sequência de fórmulas $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\varphi_i \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $0 \leq i \leq n$, onde $\varphi = \varphi_n$ e cada $\varphi_i \in \mathcal{A}$ ou foi obtida a partir da aplicação de uma das regras de inferência em $\mathcal{R}$ a fórmulas anteriores na sequência.

Definição 52. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um cálculo dedutivo. Uma *prova para* φ *a partir de* Γ é uma sequência de fórmulas $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\varphi_i \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $0 \leq i \leq n$, onde $\varphi = \varphi_n$ e cada $\varphi_i \in \mathcal{A} \cup \Gamma$ ou foi obtida a partir da aplicação de uma das regras de inferência em $\mathcal{R}$ a fórmulas anteriores na sequência.

Definição 53. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um cálculo dedutivo. Se existe uma sequência de fórmulas $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\varphi_i \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $0 \leq i \leq n$, que seja uma prova para φ a partir de Γ, nós chamamos esta sequência de *dedução.* No caso em que $\Gamma = \emptyset$, esta sequência é chamada de *demonstração.*

Definição 54. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $C = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um cálculo dedutivo. Se existe uma prova para φ a partir de Γ, nós dizemos que φ é *dedutível* a partir de Γ, denotado por $\Gamma \vdash^C_{\mathcal{L}} \varphi$. No caso em que $\Gamma = \emptyset$, nós dizemos que φ é *demonstrável* ou que é um *teorema*, denotado por $\vdash^C_{\mathcal{L}} \varphi$.

[1]Os conceitos de correção, completude e consistência são formalizados pelas Definições 55 a 59.

Exemplo 2. Utilizando o sistema axiomático proposto por Łukasiewicz, apresentamos abaixo a prova clássica de que $p \to p$:

1. $((p \to ((q \to p) \to p)) \to ((p \to (q \to p)) \to (p \to p))$
   [A2, SUB φ por p, ψ por $q \to p$, χ por p]
2. $p \to ((q \to p) \to p)$
   [A1, SUB φ por p, ψ por $q \to p$]
3. $((p \to (q \to p)) \to (p \to p))$
   [MP, 1,2]
4. $p \to (q \to p)$
   [A1, SUB φ por p, ψ por q]
5. $p \to p$
   [MP, 3,4]

2.1 Propriedades Metateóricas

Observação 3. As definições constantes desta seção referem-se a uma linguagem lógica clássica $\mathcal{L}$.

Definição 55. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $C = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um cálculo dedutivo. Nós dizemos que C é *fortemente correto* se $\Gamma \vdash^{C}_{\mathcal{L}} \varphi$, então $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$.

Definição 56. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $C = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um cálculo dedutivo. Nós dizemos que C é *fracamente correto* se $\vdash^{C}_{\mathcal{L}} \varphi$, então $\models_{\mathcal{L}} \varphi$.

Definição 57. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $C = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um cálculo dedutivo. Nós dizemos que C é *consistente* se não existe φ tal que Γ é satisfatível e $\Gamma \vdash^{C}_{\mathcal{L}} \varphi$ e $\Gamma \vdash^{C}_{\mathcal{L}} \neg\varphi$.

Definição 58. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $C = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um cálculo dedutivo. Nós dizemos que C é *fortemente completo* se $\Gamma \models_{\mathcal{L}} \varphi$, então $\Gamma \vdash^{C}_{\mathcal{L}} \varphi$.

Definição 59. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $C = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ um cálculo dedutivo. Nós dizemos que C é *fracamente completo* se $\models_{\mathcal{L}} \varphi$, então $\vdash^{C}_{\mathcal{L}} \varphi$.

3 Tableaux Proposicional

Definição 60. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ uma fórmula molecular. Nós dizemos que φ é uma *fórmula conjuntiva* se for semanticamente equivalente a uma fórmula cujo operador principal é $\wedge$.

Definição 61. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ uma fórmula molecular. Nós dizemos que φ é uma *fórmula disjuntiva* se for semanticamente equivalente a uma fórmula cujo operador principal é $\vee$.

Definição 62. O *cálculo dedutivo baseado em tableaux* é o par $T = \langle \emptyset, \mathcal{R} \rangle$, onde $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\alpha \cup \mathcal{R}_\beta$ e $\mathcal{R}_\alpha$ é o conjunto de regras aplicadas a fórmulas conjuntivas e a fórmulas da forma $\neg\neg\varphi$ (onde $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$) e $\mathcal{R}_\beta$ é o conjunto de regras aplicadas a fórmulas disjuntivas, conforme Tabela 1.

$\mathcal{R}_\alpha$	$\mathcal{R}_\beta$
$\dfrac{(\varphi \wedge \psi)}{\begin{array}{c}\varphi\\ \psi\end{array}}$	$\dfrac{(\varphi \vee \psi)}{\varphi \mid \psi}$
$\dfrac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \neg\psi\end{array}}$	$\dfrac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \mid \neg\psi}$
$\dfrac{\neg(\varphi \rightarrow \psi)}{\begin{array}{c}\varphi\\ \neg\psi\end{array}}$	$\dfrac{(\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\varphi \mid \psi}$
$\dfrac{(\varphi \leftrightarrow \psi)}{\begin{array}{c}\varphi \rightarrow \psi\\ \psi \rightarrow \varphi\end{array}}$	$\dfrac{\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)}{\neg(\varphi \rightarrow \psi) \mid \neg(\psi \rightarrow \varphi)}$
$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$	

Tabela 1: Regras de Inferência para T

Definição 63. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$, $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ e $T = \langle \emptyset, \mathcal{R} \rangle$ o cálculo dedutivo baseado em tableaux. Uma *árvore de prova para φ a partir de* Γ é uma árvore onde os nós são rotulados por fórmulas em Γ, por $\neg\varphi$ e por fórmulas derivadas destas fórmulas pela aplicação das regras em $\mathcal{R}$.

Definição 64. A construção da árvore de prova para $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ a partir de $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ é dada pelo seguinte procedimento:

Seja $n = |\Gamma|$;
para $i = 1$; $i \leq n$ **faça**
    Crie um nó na árvore e rotule com i, γ_i, [premissa];
fim para
Crie um nó na árvore e rotule com i, $\neg\varphi$, [negação da conclusão];
para todo ramo h na árvore **faça**
    enquanto regras de inferência puderem ser aplicadas a h **faça**
        Escolha um nó rotulado por j e ψ a que não foi aplicada nenhuma regra;
        se ψ é uma fórmula conjuntiva **então**
            Crie dois nós em h e rotule cada um com um dos dois números na sequência da numeração para h com as possíveis derivações a partir de ψ e [α, j];
        senão
            se ψ é a dupla negação **então**
                Crie um nó em h e rotule-o com o primeiro número na sequência da numeração para h, acrescentando a possível derivação a partir de ψ e [α, j];

senão
Crie dois nós e rotule cada um com o mesmo número na sequência da numeração para h com as possíveis derivações a partir de ψ e $[\beta,\ j]$; bifurque h e coloque um nó em h e outro na bifurcação gerada;
fim se
fim se
fim enquanto
fim para

Observação 4. As Definições 65 a 67 referem-se a ambas as linguagens lógicas estudadas nesta disciplina.

Definição 65. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $T = \langle \emptyset, \mathcal{R} \rangle$ o cálculo dedutivo baseado em tableaux e A uma árvore de prova para φ a partir de Γ. Uma *haste de A está fechada* se ela contiver uma fórmula e sua negação. Caso contrário, a *haste está aberta*.

Definição 66. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $T = \langle \emptyset, \mathcal{R} \rangle$ o cálculo dedutivo baseado em tableaux e A uma árvore de prova para φ a partir de Γ. Se todas as hastes de A estiverem fechadas, então a *árvore está fechada*. Caso contrário, a *árvore está aberta*.

Definição 67. Sejam $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}}$ e $T = \langle \emptyset, \mathcal{R} \rangle$ o cálculo dedutivo baseado em tableaux. Nós dizemos que $\Gamma \vdash^{T}_{\mathcal{L}} \varphi$ se existe uma árvore de prova fechada para φ a partir de Γ.

3.1 Resultados Metateóricos – Tableaux Proposicional

Lema 1 (da Correção do Cálculo Dedutivo Baseado em Tableaux)**.** Sejam α e β em $\mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ tais que α seja uma fórmula conjuntiva ou a dupla-negação e β uma fórmula disjuntiva. Seja $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Se Γ é consistente, então:

1. se $\alpha \in \Gamma$, então $\Gamma \cup \{\alpha_1\}$ e $\Gamma \cup \{\alpha_2\}$ são consistentes;
2. se $\beta \in \Gamma$, então $\Gamma \cup \{\beta_1\}$ e/ou $\Gamma \cup \{\beta_2\}$ são consistentes.

onde α_i e β_i, $i = 1, 2$, são as conclusões obtidas de α e β a partir da aplicação das regras em $\mathcal{R}_\alpha$ e $\mathcal{R}_\beta$, respectivamente.

Prova. Suponha que Γ seja consistente. Pela Definição 28, isto significa que existe pelo menos uma valoração booleana $\mathbb{v}$ tal que $\mathbb{v}$ atribui V a todos os elementos de Γ.

1. Suponha que $\alpha \in \Gamma$. Se $\mathbb{v}$ atribui V a todos os elementos de Γ, então $\mathbb{v}$ atribui V a α.
   (a) Se α é da forma $(\varphi \wedge \psi)$ e $\mathbb{v}$ atribui V a α, então $\mathbb{v}(\varphi \wedge \psi) = V$. Pela Definição 21, Item 3, $\mathbb{v}(\varphi) = V$ e $\mathbb{v}(\psi) = V$.
   Se $\mathbb{v}$ atribui V a todos os elementos de Γ e a φ, $\mathbb{v}$ atribui V a todos os elementos de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Pela Definição 28, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é consistente.
   Se $\mathbb{v}$ atribui V a todos os elementos de Γ e a ψ, $\mathbb{v}$ atribui V a todos os elementos de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Pela Definição 28, $\Gamma \cup \{\psi\}$ é consistente.
   (b) Demais casos, exercício.
2. Suponha que $\beta \in \Gamma$. Se $\mathbb{v}$ atribui V a todos os elementos de Γ, então $\mathbb{v}$ atribui V a β.

(a) Se β é da forma $(\varphi \vee \psi)$ e $\mathbb{v}$ atribui V a β, então $\mathbb{v}(\varphi \vee \psi) = V$. Pela Definição 21, Item 4, $\mathbb{v}(\varphi) = V$ e/ou $\mathbb{v}(\psi) = V$.
Se $\mathbb{v}$ atribui V a todos os elementos de Γ e a φ e/ou ψ, $\mathbb{v}$ atribui V a todos os elementos de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e/ou $\Gamma \cup \{\psi\}$. Pela Definição 28, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é consistente e/ou $\Gamma \cup \{\psi\}$ é consistente.

(b) Demais casos, exercício.

Metateorema 1 (da Correção do Cálculo Dedutivo Baseado em Tableaux)**.** Sejam $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Se $\Gamma \vdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$, então $\Gamma \models_{\mathcal{L}_P} \varphi$.

Prova. Supor que $\Gamma \vdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$, mas que $\Gamma \not\models_{\mathcal{L}_P} \varphi$.

Se $\Gamma \vdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$, pela Definição 67, existe uma árvore de prova fechada para φ a partir de Γ. Isto quer dizer que a árvore cuja construção foi iniciada a partir de todas as fórmulas de Γ e $\neg\varphi$ apresenta contradições em todas as hastes. Ou seja, todas as hastes são inconsistentes.

Se $\Gamma \not\models_{\mathcal{L}_P} \varphi$, então, pela Definição 30, existe pelo menos uma valoração booleana $\mathbb{v}$ tal que $\mathbb{v}$ satisfaz Γ e $\mathbb{v}$ não satisfaz φ. Pela Definição 28, $\mathbb{v}$ atribui V a todos os elementos de Γ; pela Definição 23, $\mathbb{v}$ atribui F a φ. Logo, pela Definição 21, Item 2, $\mathbb{v}(\neg\varphi) = V$. Pela Definição 28, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente.

Portanto, se aplicarmos uma das regras em $\mathcal{R}_\alpha$ a $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, obteremos dois nós α_1 e α_2. Pelo Lema 1, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ é consistente. Logo, a haste que contém as fórmulas em $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ é consistente.

Analogamente, se aplicarmos uma das regras em $\mathcal{R}_\beta$ a $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, obteremos dois nós β_1 e β_2. Pelo Lema 1, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \cup \{\beta_1\}$ é consistente e/ou $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \cup \{\beta_2\}$ é consistente. Logo, pelo menos uma das hastes, a que contém as fórmulas em $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \cup \{\beta_1\}$ é consistente ou a que contém as fórmulas em $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \cup \{\beta_1\}$ é consistente (ou ambas).

Se continuarmos aplicando as regras em $\mathcal{R}_\alpha$ e $\mathcal{R}_\beta$ à árvore assim obtida, a árvore final conterá pelo menos uma haste consistente. Mas isto quer dizer que existe pelo menos uma haste que não contém contradições, o que é um absurdo, pois $\Gamma \vdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$.

Logo, a afirmação de que $\Gamma \not\models_{\mathcal{L}_P} \varphi$ é falsa, ou seja, $\Gamma \models_{\mathcal{L}_P} \varphi$.

Metateorema 2 (da Consistência do Cálculo Baseado em Tableaux)**.** Não existe $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ tal que $\vdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$ e $\vdash^T_{\mathcal{L}_P} \neg\varphi$.

Prova. Supor que existe $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ tal que $\vdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$ e $\vdash^T_{\mathcal{L}_P} \neg\varphi$. Pelo Metateorema 1, tomando $\Gamma = \emptyset$, temos que $\models_{\mathcal{L}_P} \varphi$ e $\models_{\mathcal{L}_P} \neg\varphi$. Ou seja, pela Definição 32, para toda valoração booleana $\mathbb{v}$ temos que $\mathbb{v}(\varphi) = V$ e $\mathbb{v}(\neg\varphi) = V$. Pela Definição 21, Item 2, isto é um absurdo. Logo, não existe $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ tal que $\vdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$ e $\vdash^T_{\mathcal{L}_P} \neg\varphi$.

Lema 2 (da Completude do Cálculo Baseado em Tableaux)**.** Selecione H uma haste aberta do tableau na qual todas as aplicações das regras em $\mathcal{R}_\alpha$ e $\mathcal{R}_\beta$ foram feitas. Seja $\mathbb{v}$ uma valoração booleana tal que $\mathbb{v}(p) = V$ se, e somente se, $p \in H$, onde $p \in \mathcal{P}$. Então:

1. Se $\varphi \in H$, então $\mathbb{v}(\varphi) = V$;

2. Se $\neg\varphi \in H$, então $\mathbb{v}(\varphi) = F$.

Prova. A prova é por indução na estrutura da fórmula.
Caso Base: Se $\varphi \in \mathcal{P}$, então, por definição, $\mathbb{v}(\varphi) = V$.
Hipótese de Indução Suponha que $\mathbb{v}(\varphi) = V$ se $COMP(\varphi) \leq n$.
Passo da Indução As fórmulas que ocorrem em H estão em uma das seguintes formas $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ou $\neg\varphi$. A prova é feita para cada um dos casos.

1. Se $(\varphi \wedge \psi)$ ocorre em H, H está aberta e as regras em em $\mathcal{R}_\alpha$ e $\mathcal{R}_\beta$ foram aplicadas à exaustão, então φ ocorre em H e ψ ocorre em H. Pela Hipótese de Indução, porque $COMP(\varphi) < COMP(\varphi \wedge \psi)$, temos que $\mathbb{v}(\varphi) = V$. Analogamente, pela Hipótese de Indução, porque $COMP(\psi) < COMP(\varphi \wedge \psi)$, temos que $\mathbb{v}(\psi) = V$. Pela Definição 21, Item 3, $\mathbb{v}(\varphi \wedge \psi) = V$.

2. Demais casos, exercício.

Metateorema 3 (da Completude do Cálculo Baseado em Tableaux)**.** Sejam $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Se $\Gamma \models_{\mathcal{L}_P} \varphi$, então $\Gamma \vdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$.

Prova. Supor que $\Gamma \models_{\mathcal{L}_P} \varphi$, mas $\Gamma \nvdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$.

Se $\Gamma \nvdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$, pela Definição 67, então existe pelo menos uma haste aberta na árvore de prova para φ a partir de Γ. Seja H tal haste. Faça $\mathbb{v}(p) = V$ se, e somente se, $p \in H$, $p \in \mathcal{P}$. Conforme o Lema 2, $\mathbb{v}$ atribuirá V a todas as fórmulas bem-formadas que ocorrerem em H. Logo, $\mathbb{v}$ atribui V a todos os elementos de Γ e a $\neg\varphi$. Pela Definição 28, $\mathbb{v}$ satisfaz Γ. Pela Definição 21, Item 2, $\mathbb{v}(\varphi) = F$. Pela Definição 23, $\mathbb{v}$ não satisfaz φ. Pela Definição 30, φ não é consequência lógica de Γ, o que contradiz com a nossa suposição inicial de que $\Gamma \models_{\mathcal{L}_P} \varphi$.

Portanto, $\Gamma \nvdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$ é falsa, ou seja, $\Gamma \vdash^T_{\mathcal{L}_P} \varphi$.

4 Resolução

Definição 68. O *cálculo dedutivo baseado no princípio da resolução* é um par $Res = \langle \emptyset, \mathcal{R} \rangle$, onde R é um conjunto unitário contendo a regra:

$$\begin{array}{ccc} D & \vee & l \\ D' & \vee & \neg l \\ \hline D & \vee & D' \end{array}$$

e onde D e D' são cláusulas (possivelmente vazias) e l é um literal. As premissas, ou seja, as cláusulas acima da linha de derivação são chamadas *cláusulas-pai* e a fórmula derivada é chamada de *resolvente*. Os literais l e $\neg l$ são chamados *literais complementares*. Duas cláusulas podem ser *resolvidas* se contêm literais complementares.

Definição 69. O método baseado em resolução é aplicado de acordo com o seguinte procedimento: Seja Γ_0 um conjunto de cláusulas.

```
Seja Γ_i = Γ_0
repita
    Selecione c_1 e c_2 ∈ Γ_i tais que l ∈ c_1, ¬l ∈ c_2, onde l é um literal e c_1 e c_2 não tenham sido previamente
    resolvidas
    calcule o resolvente r
    Faça Γ_{i+1} = Γ_i ∪ {r}
até □ ∈ Γ ou Γ_{i+1} = Γ_i
```

Definição 70. Sejam $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \subset \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ e $Res = \langle \emptyset, \mathcal{R} \rangle$ o cálculo dedutivo baseado em resolução binária. Nós dizemos que $\Gamma \vdash^{Res}_{\mathcal{L}_P} \varphi$ se o método de resolução, aplicado à transformação na FNC de $\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n \wedge \neg\varphi$, derivar a cláusula vazia.

Definição 71. O seguinte procedimento aprimora a aplicação do método baseado em resolução: Seja Γ_0 um conjunto de cláusulas.

Seja $\Gamma_i = \Gamma_0$
repita
  Selecione c_1 e $c_2 \in \Gamma_i$ tais que $l \in c_1, \neg l \in c_2$, onde l é um literal e c_1 e c_2 não tenham sido previamente resolvidas
  calcule o resolvente r
  se não((r é tautologia) ou ($r \in \Gamma_i$)) **então**
    Faça $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{r\}$
  fim se
até $\Box \in \Gamma_0$ ou $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$

5 Lógica de Primeira-Ordem

5.1 Sintaxe

Definição 72. O *conjunto de símbolos lógicos* da Linguagem de Primeira-Ordem é dado pela união dos seguintes conjuntos:

1. $\mathcal{P} = \{P^{n_P}, Q^{n_Q}, R^{n_R}, \ldots, P_1^{n_{P_1}}, Q_1^{n_{Q_1}}, R_1^{n_{R_1}}, \ldots\}$;
2. $\mathcal{F} = \{f^{n_f}, g^{n_g}, h^{n_h}, \ldots, f_1^{n_{f_1}}, g_1^{n_{g_1}}, h_1^{n_{h_1}}, \ldots\}$;
3. $\mathcal{C} = \{a, b, c, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots\}$;
4. $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots\}$;
5. $\{\forall, \exists\}$
6. $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
7. (e).

Definição 73. Os elementos do conjunto $\mathcal{P}$ são chamados *símbolos predicativos.*

Definição 74. Os elementos do conjunto $\mathcal{F}$ são chamados *símbolos funcionais.*

Definição 75. Os elementos do conjunto $\mathcal{C}$ são chamados *constantes.*

Definição 76. Os elementos do conjunto $\mathcal{V}$ são chamados *variáveis.*

Definição 77. Os elementos do conjunto $\{\forall, \exists\}$ são *operadores* ou *conectivos* unários chamados de *quantificadores.* O *quantificador universal* é denotado por $\forall$ e o *quantificador existencial* é denotado por $\exists$.

Definição 78. A *aridade* de um símbolo predicativo ou de um símbolo funcional é o número fixo de seus argumentos. A aridade de um símbolo predicativo ou funcional é indicada pelo índice superior.

Observação 5. Símbolos predicativos e funcionais têm número fixo de argumentos (aridade). Note também que:

- Símbolos predicativos de aridade zero referem-se a proposições;
- Símbolos funcionais de aridade zero referem-se a indivíduos.

Definição 79. O conjunto de *termos* $\mathcal{T}$ da Linguagem de Primeira-Ordem é definido indutivamente:

1. Se $t \in \mathcal{V} \cup \mathcal{C}$, então $t \in \mathcal{T}$;
2. Se $f^n \in \mathcal{F}$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, então $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$.

Definição 80. A Linguagem de Primeira-Ordem, denotada por $\mathcal{L}_{PO}$, é dada pelo conjunto de suas fórmulas bem-formadas, denotado por $\mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$, o qual é obtido indutivamente por:

- $P^n(t_1, \ldots, t_n) \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$, onde $P^n \in \mathcal{P}$, para $t_i \in \mathcal{T}$, $0 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$;
- se $\varphi, \psi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$ e $x \in \mathcal{V}$, então $\neg\varphi$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ e $\exists x\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$.

Observação 6. Parênteses podem ser omitidos, se a leitura não for ambígua. A precedência dos operadores é dada por: $\neg, \forall, \exists, \land, \lor, \to$ e $\leftrightarrow$.

Definição 81. Uma *árvore sintática para* φ, onde $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$, é constituída de uma *raiz* com zero ou mais filhos, dependendo da *estrutura* (ou seja, da forma) de φ:

1. se t é um termo da forma u^0, então a árvore sintática tem raiz rotulada por u^0 e tem zero filhos;
2. se t é um termo da forma $u^n(t_1, \ldots, t_n)$, $n > 0$, então a raiz é rotulada por u^n e tem n filhos, que são as raízes das árvores sintáticas para cada um dos termos $t_1, \ldots, t_n$;
3. se φ é da forma $P^n(t_1, \ldots, t_n)$, então a raiz é rotulada por P^n e tem n filhos, que são raízes das árvores sintáticas para cada um dos termos $t_1, \ldots, t_n$;
4. se φ é da forma $*\psi$, onde $* \in \{\neg, \forall x, \exists x\}$, para algum $x \in \mathcal{V}$, então a raiz é rotulada por $*$ e tem um único filho, que é a raiz da árvore sintática de ψ;
5. se φ é da forma $(\psi * \chi)$, onde $* \in \{\land, \lor, \to, \leftrightarrow\}$, então a raiz é rotulada por $*$ e tem dois filhos, onde o da esquerda é a raiz da árvore sintática de ψ e o da direita é a raiz da árvore sintática de χ.

Definição 82. Sejam $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$. O *escopo* de $\forall x$ (ou $\exists x$) na fórmula $\forall x\varphi$ (ou $\exists x\varphi$) é φ, exceto por subfórmulas de φ na forma $\forall x\psi$ ou $\exists x\psi$.

Definição 83. Sejam $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$. A ocorrência de uma variável x em uma fórmula bem-formada $\forall x\varphi$ ou $\exists x\varphi$ é *ligada* se x ocorrer em φ.

Definição 84. Sejam $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$. A ocorrência de uma variável x em uma fórmula φ é *livre* se esta ocorrência de x não for ligada em qualquer subfórmula de φ.

Definição 85. Uma *sentença* é uma fórmula sem variáveis livres.

Definição 86. Sejam $t \in \mathcal{T}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$. Nós denotamos por $\varphi[t\backslash x]$ o resultado da substituição de todas as ocorrências livres de x em φ por t.

Definição 87. Sejam $t \in \mathcal{T}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$. Nós dizemos que t é livre para a variável x na fórmula φ se as variáveis em t não se tornarem ligadas em $\varphi[t\backslash x]$.

5.2 Semântica

Definição 88. Uma *interpretação* $\mathbb{M}$ para o par $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ consiste de:

- um conjunto não-vazio $\mathcal{A}$ (*universo*);
- uma função $f^{\mathbb{M}} : A^n \longrightarrow A$, para cada símbolo funcional $f^n \in \mathcal{F}$;
- um subconjunto $P^{\mathbb{M}} \subseteq A^n$, para cada símbolo predicativo $P^n \in \mathcal{P}$.

Definição 89. A *função de avaliação* v para uma interpretação $\mathbb{M} = (\mathcal{A}, \{f^{\mathbb{M}}\}_{f \in \mathcal{F}}, \{P^{\mathbb{M}}\}_{P \in \mathcal{P}})$ para $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ é o mapeamento de variáveis a valores do universo $v : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{A}$.

Definição 90. O valor de um termo t em uma interpretação $\mathbb{M}$ é relativo à função de avaliação v e é definido indutivamente:

$$t^{\mathbb{M},v} \quad = \quad \begin{cases} v(t) & \text{se } t \in \mathcal{V} \\ f^{\mathbb{M},v}(t_1^{\mathbb{M},v}, \ldots, t_n^{\mathbb{M},v}) & \text{se } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Definição 91. Sejam $\mathbb{M} = (\mathcal{A}, \{f^{\mathbb{M}}\}_{f \in \mathcal{F}}, \{P^{\mathbb{M}}\}_{P \in \mathcal{P}})$ uma interpretação para $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$, v uma função de avaliação, $x \in \mathcal{V}$ e φ, ψ em $\mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$:

1. $\mathbb{M} \models_v P(t_1, \ldots, t_n)$ se, e somente se, $(t_1^{\mathbb{M},v}, \ldots, t_n^{\mathbb{M},v}) \in P^{\mathbb{M}}$;
2. $\mathbb{M} \models_v \neg\varphi$ se, e somente se, $\mathbb{M} \not\models_v \varphi$;
3. $\mathbb{M} \models_v \varphi \wedge \psi$ se, e somente se, $\mathbb{M} \models_v \varphi$ e $\mathbb{M} \models_v \psi$;
4. $\mathbb{M} \models_v \varphi \vee \psi$ se, e somente se, $\mathbb{M} \models_v \varphi$ ou $\mathbb{M} \models_v \psi$ ou ambos; ;
5. $\mathbb{M} \models_v \varphi \rightarrow \psi$ se, e somente se, $\mathbb{M} \models_v \neg\varphi \vee \psi$;
6. $\mathbb{M} \models_v \forall x\varphi$ se, e somente se, $\mathbb{M} \models_v \varphi[a \backslash x]$ para todo $a \in \mathcal{A}$;
7. $\mathbb{M} \models_v \exists x\varphi$ se, e somente se, $\mathbb{M} \models_v \varphi[a \backslash x]$ para algum $a \in \mathcal{A}$.

Lema 3. Seja $\mathbb{M}$ uma interpretação. Se φ é uma sentença, então

$$\mathbb{M} \models_v \varphi \iff \mathbb{M} \models_{v'} \varphi$$

para todas as funções de avaliação v e v'.

Definição 92. Uma fórmula φ é *satisfatível* se existir uma interpretação $\mathbb{M}$ e função de avaliação v tal que $\mathbb{M}_v \models \varphi$. Neste caso, dizemos que $\mathbb{M}_v$ *satisfaz* φ ouque $\mathbb{M}_v$ é um *modelo* para φ.

Definição 93. Uma sentença φ é *satisfatível* se existir uma interpretação $\mathbb{M}$ tal que $\mathbb{M} \models \varphi$. Neste caso, dizemos que $\mathbb{M}$ *satisfaz* φ ou é um *modelo* para φ.

Observação 7. Satisfatibilidade, tautologia, contradição, contingência, equivalência semântica, consistência de conjuntos, consequência lógica e validade já foram definidos.

$\mathcal{R}_\gamma$		$\mathcal{R}_\delta$	
$\dfrac{\forall x\varphi}{\varphi[t\backslash x]}$	$\dfrac{\neg\exists x\varphi}{\neg\varphi[t\backslash x]}$	$\dfrac{\exists x\varphi}{\varphi[t\backslash x]}$	$\dfrac{\neg\forall x\varphi}{\neg\varphi[t\backslash x]}$
onde $t \in \mathcal{T}$	onde $t \in \mathcal{T}$	onde $t \in \mathcal{C}$	onde $t \in \mathcal{C}$
contém constantes	contém constantes	t é constante nova	t é constante nova

Tabela 2: Regras de Inferência em $\mathcal{R}_\gamma$ e $\mathcal{R}_\delta$ para T.

6 Tableaux para Lógica de Primeira-Ordem

Definição 94. Uma fórmula é universalmente quantificada se for semanticamente equivalente a uma fórmula da forma $\forall x\varphi$, com $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$.

Definição 95. Uma fórmula é existencialmente quantificada se for semanticamente equivalente a uma fórmula da forma $\exists x\varphi$, com $x \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$.

Definição 96. O *cálculo dedutivo baseado em tableaux* é o par $T = \langle \emptyset, \mathcal{R} \rangle$, onde $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\alpha \cup \mathcal{R}_\beta \cup \mathcal{R}_\gamma \cup \mathcal{R}_\delta$. $\mathcal{R}_\alpha$ é o conjunto de regras aplicadas a fórmulas conjuntivas e a fórmulas da forma $\neg\neg\varphi$ (onde $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$). $\mathcal{R}_\beta$ é o conjunto de regras aplicadas a fórmulas disjuntivas. $\mathcal{R}_\alpha$ e $\mathcal{R}_\beta$ são dados na Tabela 1. $\mathcal{R}_\gamma$ é o conjunto de regras aplicadas a fórmulas universalmente quantificadas e $\mathcal{R}_\delta$ é o conjunto de regras aplicadas a fórmulas existencialmente quantificadas, conforme Tabela 2.

Definição 97. A construção da árvore de prova para um conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$ e uma fórmula $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_{PO}}$ é dada pelo seguinte procedimento:

Seja $n = |\Gamma|$;
para $i = 1$; $i \leq n$ **faça**
  Crie um nó na árvore e rotule com i, γ_i, [premissa];
fim para
Crie um nó na árvore e rotule com i, $\neg\varphi$, [negação da conclusão];
para todo ramo h na árvore **faça**
  enquanto regras de inferência puderem ser aplicadas a h **faça**
    se Existe um nó rotulado por j e ψ, onde ψ existencialmente quantificada **então**
      Crie um nó em h e rotule-o com o primeiro número na sequência da numeração para h, acrescentando a possível derivação a partir de ψ e [δ, j, $[t\backslash x]$];
    senão
      se Existe um nó rotulado por j e ψ, onde ψ universalmente quantificada **então**
        Crie um nó em h e rotule-o com o primeiro número na sequência da numeração para h, acrescentando a possível derivação a partir de ψ e [γ, j, $[t\backslash x]$];
      senão
        Escolha um nó rotulado por j e ψ:
        se ψ é uma fórmula conjuntiva **então**
          Crie dois nós em h e rotule-os com um dos dois números na sequência da numeração para h, as possíveis derivações a partir de ψ e [α, j];
        senão
          se ψ é a dupla negação **então**

Crie um nó em h e rotule-o com o primeiro número na sequência da numeração para h, acrescentando a possível derivação a partir de ψ e $[\alpha, j]$;
senão
Crie dois nós e rotule-os com o mesmo número na sequência da numeração para h, com as possíveis derivações a partir de ψ e $[\beta, j]$; bifurque h e coloque um nó em h e outro na bifurcação gerada;
fim se
fim se
fim se
fim se
fim enquanto
fim para

Observação 8. As definições de haste aberta, haste fechada, árvore aberta, árvore fechada e dedução são as mesmas do Tableaux para a Lógica Proposicional.