Lógica Computacional 1

Cláudia Nalon

http://nalon.org

nalon@unb.br

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

2024/2

1 Lógica Proposicional

1.1 Sintaxe

Definição 1. O conjunto de *símbolos lógicos* da linguagem proposicional é dado pela união dos seguintes conjuntos:

1. $\mathcal{P} = \{p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots\}$, um conjunto enumerável de símbolos;
2. $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
3. $\{(,)\}$.

Definição 2. Os elementos do conjunto $\mathcal{P}$ são chamados de *símbolos proposicionais* ou *variáveis proposicionais.*

Definição 3. Os elementos do conjunto $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ são chamados de *conectivos lógicos* ou *operadores lógicos.*

Definição 4. O símbolo "$\neg$" é chamado de *conectivo unário.*

Definição 5. Os símbolos contidos no conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ são chamados de *conectivos binários.*

Definição 6. Os elementos do conjunto $\{(,)\}$ são chamados de *símbolos de pontuação.*

Definição 7. Os símbolos lógicos definem o *alfabeto da linguagem proposicional.*

Definição 8. Uma *fórmula* é qualquer sequência finita de símbolos lógicos.

Definição 9. A *Linguagem Lógica Proposicional*, denotada por $\mathcal{L}_P$, é equivalente ao seu *conjunto de fórmulas bem-formadas*, denotado por $\mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$, que é definido indutivamente, como se segue:

1. se $p \in \mathcal{P}$, então $p \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$;
2. se $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$, então $\neg\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$;
3. se $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$ e $\psi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$, então $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$.

Definição 10. Fórmulas que não são bem-formadas, isto é, que não pertencem a $\mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$, são chamadas de *fórmulas mal-formadas.*

Definição 11. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Se $\varphi \in \mathcal{P}$, então φ é chamada de *fórmula atômica.*

Definição 12. Seja $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Se $\varphi \notin \mathcal{P}$, isto é, se φ não é uma fórmula atômica, então φ é chamada de *fórmula molecular.*

Definição 13. Sejam φ, ψ e $\chi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$. Seja $Sub : \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P} \longrightarrow 2^{\mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}}$ uma função. O *conjunto de subfórmulas de* φ, $Sub(\varphi)$, é dado por:

1. se $\varphi \in \mathcal{P}$, então $Sub(\varphi) = \{\varphi\}$;
2. se φ é da forma $\neg\psi$, então $Sub(\varphi) = \{\varphi\} \cup Sub(\psi)$;
3. se φ é da forma $(\psi * \chi)$, onde $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então $Sub(\varphi) = \{\varphi\} \cup Sub(\psi) \cup Sub(\chi)$.

Definição 14. Operador Principal – Exercício

Definição 15. Subfórmulas Imediatas – Exercício

Definição 16. Comprimento – Exercício

Definição 17. Uma *árvore sintática para* φ, onde $\varphi \in \mathsf{FBF}_{\mathcal{L}_P}$, é constituída de uma *raiz* com zero ou mais filhos, dependendo da *estrutura* (ou seja, da forma) de φ:

1. se $\varphi \in \mathcal{P}$, então a raiz é rotulada por φ e tem zero filhos;
2. se φ é da forma $\neg\psi$, então a raiz é rotulada por $\neg$ e tem um único filho, que é a raiz da árvore sintática de ψ;
3. se φ é da forma $(\psi * \chi)$, onde $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, então a raiz é rotulada por $*$ e tem dois filhos, onde o da esquerda é a raiz da árvore sintática de ψ e o da direita é a raiz da árvore sintática de χ.

1.2 Semântica

Definição 18. O conjunto $\mathcal{V} = \{V, F\}$ é chamado de *conjunto de valores de verdade* e cada um de seus elementos é chamado de *valor de verdade.*

Definição 19. Uma *função booleana* é aquela que tem apenas dois elementos em sua imagem.

Definição 20. Uma *valoração booleana* $\mathbb{v}_0$ *para os símbolos proposicionais de* $\mathcal{L}_P$, $\mathcal{P}$, é uma função booleana $\mathbb{v}_0 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$.