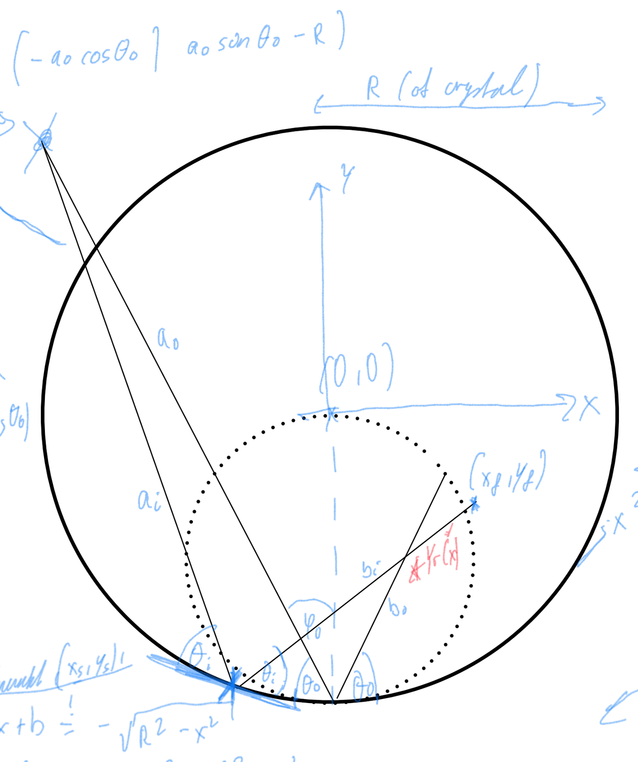
Assume: a_0, b_0, R, θ_0 given and fixed

$(x_0, y_0) = (-a_0 \cos\theta_0 \mid a_0 \sin\theta_0 - R)$



Geradengleichung

$y = mx + b$

$a_0 \sin\theta_0 - R$

$= m(-a_0 \cos\theta_0) + b$

$b(m) \stackrel{\wedge}{=} b = a_0(\sin\theta_0 + m\cos\theta_0) - R$

$\Rightarrow y = mx + a_0(\sin\theta_0 + m\cos\theta_0) - R$

Kreisgleichung

$x^2 + y^2 = R^2$

Kristallbreite (senkrecht zu Zeichenebene)

Schnittpunkt (x_s, y_s):

$mx + b \stackrel{!}{=} -\sqrt{R^2 - x^2}$

$m^2x^2 + 2mbx + b^2 = R^2 - x^2$

$(m^2+1)x^2 + 2mbx + b^2 - R^2 = 0$

$x^2 + \frac{2mb}{m^2+1}x + \frac{b^2-R^2}{m^2+1} = 0$

$x_{1,2} = -\frac{mb}{m^2+1} \pm \sqrt{\left(\frac{mb}{m^2+1}\right)^2 + \frac{R^2-b^2}{m^2+1}}$ → Lösung mit $+\sqrt{\dots}$ schneidet Kreis potenziell, wo Kristall ist

$\rightarrow x_s = \frac{-mb}{m^2+1} + \sqrt{\left(\frac{mb}{m^2+1}\right)^2 + \frac{R^2-b^2}{m^2+1}} = x_s(m, b(m)) = x_s(m)$

$y_s = m \cdot x_s + b = y_s(m, b(m)) = y_s(m)$

Schnittwinkel berechnen → Bragg-Winkel

$\tan\theta_i = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ $\qquad m_1 \equiv m$

m_2 über Ableitung v. Kreisgleichung

$y = -\sqrt{R^2 - x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_s} = \frac{x_s}{\sqrt{R^2 - x_s^2}}$

$$\boxed{\tan\theta_i = \left|\frac{m - \frac{x_s}{\sqrt{R^2 - x_s^2}}}{1 + \frac{m x_s}{\sqrt{R^2 - x_s^2}}}\right|}$$

Relation between m and θ_i.

$\rightarrow \theta_i(m, x_s(m, b(m))) = \theta_i(m)$

Geradengleichung nach Reflexion

$y_r^* = m_r x + b_r$

m_r über $\tan(m_r) = \underbrace{\arctan(m)}_{<0} + 2\theta_i$

$m_r = \tan(\arctan(m) + 2\theta_i) = m_r(m, \theta_i(m, x_s(m, b(m)))) = m_r(m)$

$b_r = y_s - m_r x_s = \dots = b_r(m)$

$\Rightarrow y_r = m_r(x - x_s) + y_s$

→ Propagation entlang dieser Geraden um Strecke $b_{s,i}$ bis Fokusbedingung erfüllt

sagittale Abbildung: $\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_{s,i}} = \frac{2\cos\varphi_i}{R}$ $\quad$ mit $\varphi_i = \frac{\pi}{2} - \theta_i = \dots = \varphi_i(m)$

$a_i = \sqrt{(x_s - x_0)^2 + (y_s - y_0)^2} = \dots = a_i(m)$

$\Rightarrow b_{s,i} = b_{s,i}(m)$

$b_{s,i} \stackrel{!}{=} \sqrt{(x_f - x_s)^2 + (y_f - y_s)^2}$ $\quad$ mit $y_f = m_r \cdot (x_f - x_s) + y_s$

$\Rightarrow b_{s,i} = \sqrt{(x_f - x_s)^2 + m_r^2(x_f - x_s)^2}$

$= (x_f - x_s)\sqrt{1 + m_r^2}$ $\qquad (x_f > x_s)$

$\Rightarrow x_f = \frac{b_{s,i}}{\sqrt{1 + m_r^2}} + x_s = \dots = x_f(m)$ $\qquad \Rightarrow y_f = y_f(m)$

Nun lässt sich für verschiedene m, d.h. für verschiedene θ_i ausrechnen, wie die Fokalpunkte $(x_f | y_f)$ verlaufen.

Für eine gegebene Detektorgerade $y_d(x)$ lässt sich der Schnittpunkt von $y_r(x)$ and $y_d(x)$ berechnen → (x_D, y_D)

Das Broadening am Ort des Detektors ergibt sich zu $\quad$ Kristallbreite $\cdot \frac{|b_{s,i} - \sqrt{(y_D - y_s)^2 + (x_D - x_s)^2}|}{b_{s,i}}$

(gesamte Breite des Kristalls wird ausgeleuchtet und im Abstand $b_{s,i}$ auf einen Punkt fokussiert)

~~$E_0 \to \theta_i \to \varphi_i \xrightarrow{x(\theta_0)} a_i \to b_{s,i}$~~

~~Geradengleichung v. reflektierten X-rays mit E_i: Ursprung im Zentrum v. „Kristallkugel"~~

~~• Punkt: $\quad y = -R + \delta_i$~~

~~$x = -a\cos\theta_0 + s_{1i}$~~

~~Kreisgleichung: $x^2 + y^2 = R^2$~~

~~$0 < s_{1i} = \cos(\theta_0)\, a + x$~~

~~$0 < s_{2i} = a\sin(\theta_0) - \delta_i$~~

~~$\delta_i = R - |y| = R - \sqrt{R^2 - x^2}$~~