函数式程序设计

郭　炜
http://weibo.com/guoweiofpku
http://blog.sina.com.cn/u/3266490431
guo_wei@pku.edu.cn

课程安排

教材：《计算机程序的构造和解释 》

Harold Abelson　　Gerald Jay Sussman

Julie Sussman 著

裘宗燕　译　　机械工业出版社

课程网站：北大教学网

作业和考试网站：　lisp.test.openjudge.org

课本网站：　http://mitpress.mit.edu/sicp/full-text/book/book-Z-H-12.html#%_sec_1.3

课程安排

成绩组成：

- 期末机考50%
- 平时作业35–40%
- 课堂测验10–15%

课堂测验可以任选一次课的去掉不算。选择题必需一次过。

课程安排

- 平时作业35-40%

出题作业：有的章节是每人都要出，有的章节是大家轮流出。题目质量和得分相关。

第一讲

什么是函数式程序设计

函数式程序设计（Functional programming）将计算机的计算视为数学上的函数计算，函数的计算结果只和函数的自变量（参数）有关，与其他一切（比如何时被调用，调用了多少次）无关。函数式程序设计避免使用程序状态(值可变的变量)。函数编程语言最重要的基础是λ 演算（lambda calculus）。 λ演算是一种等价于图灵机的演算系统。λ演算的函数可以接受函数当作输入（参数）和输出（返回值）。

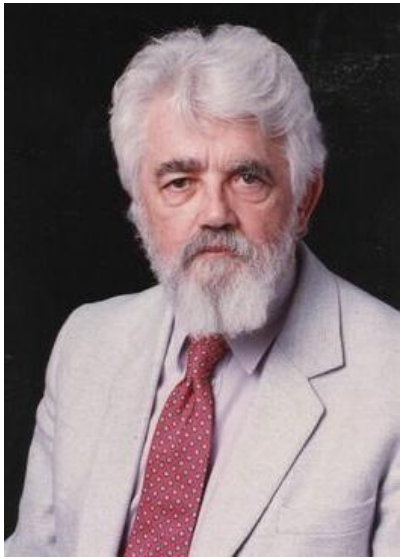
什么是函数式程序设计

“函数式编程”是一种“编程范式”（programming paradigm），也就是如何编写程序的方法论。它属于“结构化编程”的一种，主要思想是把运算过程尽量写成一系列嵌套和递归的函数调用。纯的函数式设计语言没有赋值操作，没有语句，只有表达式，几乎一切计算都是递归。有分支的概念，没有循环的概念。

函数式程序设计语言的发明

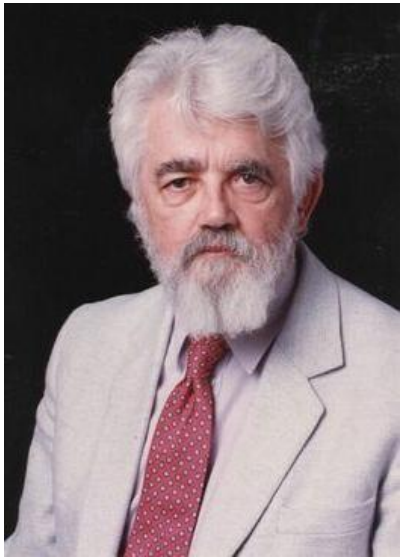
- 1958年，约翰·麦卡锡(John McCarthy）在麻省理工学院发明Lisp，通过Lisp，他证明了，图灵完备的系统可以仅仅由几个简单的算子与函数定义功能组成。

- 后来他获得图灵奖。



函数式程序设计语言的发明

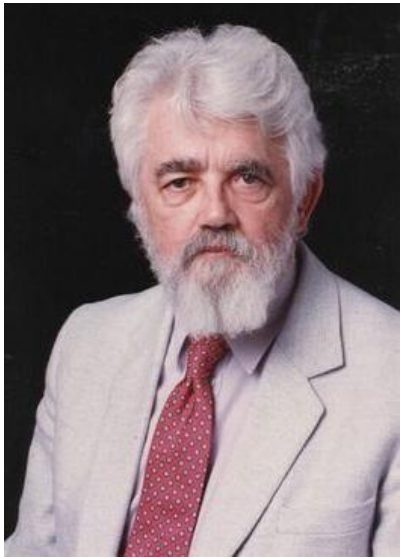
- 约翰·麦卡锡并未将Lisp当作程序设计语言，他只是想用更简单的方式定义图灵机
- 约翰·麦卡锡说：Lisp比图灵机表达起来更简洁。证明这一点的一种方法就是写一个Lisp通用函数，证明它比图灵机的一般描述更短，更易懂。这个Lisp函数就是eval …. 它用来计算Lisp表达式的值……。编写eval函数需要发明一种表示法，能够把Lisp函数表示成Lisp数据。设计这种书写法完全是为了满足论文写作的需要。根本没有想过用它来编写程序并在计算机上运行。
- 因此Lisp本质上是数学，数学是不会过时的



函数式程序设计语言的发明

- 约翰·麦卡锡的学生史蒂夫·拉塞尔把eval函数翻译成机器语言，并进一步做出了Lisp的解释器。

- 1962年，提姆·哈特（Tim Hart）与麦克·莱文（Mike Levin）在麻省理工学院，用Lisp语言，实做出第一个完整的lisp编译器。Lisp成为一种出乎意料强大的语言。



函数式程序设计语言的发展

- Scheme的发明

Scheme最早由麻省理工学院的盖伊·史提尔二世与杰拉德·杰伊·萨斯曼（Sussman）在1970年代发展出来。Scheme语言与λ演算关系十分密切。小写字母“λ”是Scheme语言的标志。本来名为Schemer，后因操作系统字数限制改为Scheme。

Scheme遵循极简主义哲学，以一个小型语言核心作为标准，加上各种强力语言工具（语法糖）来扩展语言本身。

Scheme不是纯函数式的，有赋值语句，甚至全局变量。

Scheme是极度简化的语言。他的规范文档不过47页。Common Lisp上千页。

函数式程序设计语言的发展

- 其他函数式程序设计语言

Common Lisp : 试图将Lisp的各种方言标准化

Miranda: 惰性求值的纯粹函数编程语言，由英国学者大卫 特纳（David Turner）所设计。1985年由英国的研究软件公司（Research Software Ltd.）发布

Haskell: 纯函数式，1990年在编程语言Miranda的基础上标准化而来。现在比较流行

Ocaml: 非纯函数式，1996年发布，效率可比C/C++

F#: 微软公司用于.net平台开发的函数是程序设计语言，同时对OO也有很好支持

函数式程序设计语言的发展

- 具有部分函数式语言特征的程序设计语言

Python : 面向对象的解释型语言，但也支持函数是程序设计

Rubby: 日本人源于Python和Perl的发明

C++ 11: 引入λ表达式

JavaScript

……

函数式程序设计方法近年来越来越受重视!

参考阅读： http://blog.csdn.net/g9yuayon/article/details/1676688

函数式程序设计为什么重要

命令式程序设计语言：有赋值，if，goto就够用了。难于建立数学模型来分析程序的正确性。

数学上的函数只要自变量相同，结果总是相同。但是过程式设计语言的函数不是这样。

应寻求与求值顺序(时间）无关的程序表达方式，才能不用运行，从数学上就判断程序的正确性

函数式语言：变量，表达式，条件表达式，递归机制

函数式程序设计为什么重要

《Why Functional Programming Matters》， 1990

http://www.cs.kent.ac.uk/people/staff/dat/miranda/whyfp90.pdf

译文

https://www.byvoid.com/blog/why-functional-programming/

本文提到的FP最重要特点：高阶函数和惰性求值。
本文提到的FP最重要优点：程序便于模块化且简洁。

函数式程序设计为什么重要

《黑客与画家》 Paul Graham著， 阮一峰译

Paul Graham，硅谷创业之父，1995年和Robert Morris创建Viaweb公司，1998年被Yahoo以4900万美元收购，现从事风险投资（Y combinater，YC)和创业辅导。

函数式程序设计为什么重要

Paul Graham 说：

- Lisp是最强大的语言，现在的主流高级语言只是接近1958年Lisp的水平。
  （如果一种特性在A语言中是内置，在B语言中需要修改解释器才能实现，那A就比B强大）

- Viaweb在竞争中获胜的关键在于使用Lisp语言进行开发，因而能比对手更快地实现各种新功能。

- C代码的长度是Lisp的7-10倍

- ITA公司成功的秘诀在于他们系统中20万行的Common Lisp核心程序。ITA的总裁说1行Lisp代码相当于20行C代码。

函数式程序设计为什么重要

Paul Graham 说：

我说使用其他语言无法提供Lisp的“高阶函数”这个功能，这句话并不完全正确。所有这些语言都是图灵等价的，这意味着严格地说，你能使用它们之中的任何一种语言，写出任何一个程序。那么，怎样才能做到这一点呢？就这个小小的例子而言，你可以使用这些不那么强大的语言，写一个Lisp解释器就行了。

函数式程序设计为什么重要

Paul Graham 说：

这样做听上去好像开玩笑，但是在大型编程项目中，却不同程度地广泛存在。因此，有人把它总结出来，起名为"格林斯潘第十定律"（Greenspun's Tenth Rule）：

"任何C或Fortran程序复杂到一定程度之后，都会包含一个临时开发的、只有一半功能的、不完全符合规格的、到处都是bug的、运行速度很慢的Common Lisp实现。"

函数式程序设计语言的特点

1. “函数”是一等公民（first class），即有“高阶函数的概念”

函数与其他数据类型一样，处于平等地位，可以赋值给其他变量，也可以作为参数，传入另一个函数，或者作为别的函数的返回值。

函数式程序设计语言的特点

高阶函数：

```
(define (f n)
        (lambda (x) (+ x n)))
```

(f n) 返回一个函数，该函数接收一个参数x，返回 x+n

((f 7) 9)　　输出： 16

函数式程序设计语言的特点

高阶函数：(define (f n) (lambda (x) (+ x n)))

C++实现：

```
template <class T1,class T2>
struct Add  {
        T1 n;
        auto operator() ( T2 x ) -> decltype(x + n)
        {       return x + n;  }
        Add(T1 n_):n(n_) { }
};
template <class T1,class T2>
Add<T1,T2> f (T1 n) {
        return Add<T1,T2>(n);
}
```

```
int main()
{
   cout << f<int,int>(7)(9) << endl;   //16
   cout << f<string,string> (" hello!")("world")
          <<endl; // world hello!
   cout << f<char,string> ('!')("world") << endl;
   return 0;    //world!
}
```

函数式程序设计语言的特点

高阶函数:

```
(define (square x)  (* x x))
(define (inc x)  (+ x 1))

(define (combine f g)
     (lambda (x) (f (+ (f x) (g x)))))
```

(combine f g) 返回函数 k , k(x) = f(f(x)+g(x))

((combine square inc) 3)　　输出169

函数式程序设计语言的特点

combine的C++实现：

```
template <class T1,class T2,class T3>
struct Do
{
    T1 f;  T2 g;
    auto operator() ( T3 x ) ->
decltype(f(f(x)+g(x))) {
        return f(f(x)+g(x));
    }
    Do(T1 f_,T2 g_):f(f_),g(g_) { }
};
template <class T1,class T2,class T3>
Do<T1,T2,T3> combine(T1 f,T2 g,T3 nouse) {
        return Do<T1,T2,T3>(f,g);
}
```

```
int main()
{
    auto Square = [] (int a) { return a * a; };
    auto Inc = [] (int a) { return a + 1; };
    cout << combine(Square,Inc,1234 )(3) << endl;
    return 0;
} //输出： 169
```

函数式程序设计语言的特点

2. 只用“表达式”，不用“语句”

表达式是单纯的计算，有返回值。语句没有返回值。

3. 没有副作用，易于并行和判断正确性

函数的运行结果只和函数的参数有关，不管何时调用，都是同一结果。函数不应修改函数外面的变量的值。函数的功能就是返回一个值，没有其他作用。

4. 不修改状态，即不修改变量，无赋值语句

碰到需要修改的情况，就重新构造一个

函数式程序设计语言的特点

5. 有分支但没有循环，一切靠递归

6. 支持惰性求值
   需要的时候才进行求值

7. 代码的热升级
   函数式编程没有副作用，只要保证接口不变，内部实现是外部无关的。所以，可以在运行状态下直接升级代码，不需要重启，也不需要停机。
8. 代码和数据的形式相同
   (t 1 2 3) 代表调用t函数，以1 2 3为参数, '(t 1 2 3)表示列表

函数式程序设计语言的劣势

1. 不接近自然。自然界中副作用是真是存在的

2. 往往运行效率较低

3. 纯函数式程序设计在解决有些命令式能轻易解决的问题时，也要大费周折。

4. 计算机的内存本来就是可以改写的，硬要不去改写它，也许就是自寻烦恼。

5. 不一定符合现代软件开发的需要

最简单的Scheme程序

```
(display “hello,world!”)
```

输出：hello,world!

```
(define X 1000)
X
```

输出：1000

Scheme的注释

单行注释，以 ‘;’ 开头，直到行末

```
(define (f n)   ;(f n)返回函数k ,k(x) = n + x
        (lambda (x) (+ n x)))
```

Scheme的变量定义和修改

- 变量定义:

  (define 变量名 值)

  如: (define x 100)，定义变量x，其值为100。

- 修改变量的值:

  (set! 变量名 值)

  如: (set! x "hello")，将变量x的值改为"hello" 。

- 变量类型可变

```
(define x 123)
(set! x "abc")
 x    ;输出 abc
```

Scheme的数据类型

- 简单数据类型

➢逻辑型(boolean)

- 只有两个值，#t 和 #f

- 只有一个运算 not

```
(not #t) => #f
(not #f) => #t
(not 其他) => #f

(not 1),(not "ok"), (not '(1 2 3)) … => #f
```

Scheme的数据类型

- 简单数据类型

➢数字型(number)

- 整型

```
(define x 123)
(define y #b1101) ;二进制
(define z #xab12) ;十六进制
```

- 有理数型

```
(define a 2/13)     ;输出 a 则得 2/13
```

- 实数型

```
(define Pi 3.14)
```

- 复数型

```
(define f 3+2i)
```

```
(define kxx 2+3i)
(+ kxx 1+2i) ;输出3+5i
```

Scheme的数据类型

- 简单数据类型

  - 字符型 (char)

    以 “#\” 开头

    #\A　#\[　#\0　#\!　#\space　#\newline

Scheme的数据类型

- 简单数据类型

➢符号型 (symbol)

```
(define x1 (quote pku))
x1 ;输出 'pku

(define x2 'pku)
x2 ;输出 'pku
```

符号型变量和字符串不同，不能取长度，不能改其中字符。

Scheme的数据类型

- 复合数据类型

➢字符串 (string)

```
(define str "Hello")
str
(string-length str) ; 取字符串的长度
(string-ref str 1)  ;取第1个字符（从0开始算）
```

输出：
"Hello"
5
#\e

字符串中的引号用反斜线加引号代替，如“123\“abc" 。

Scheme的数据类型

- 复合数据类型

➢对子 (pair)

（cons a b）即形成一个“对子”，一个对子由两部分构成

car 取前部，cdr取后部

set-car!修改前部，set-cdr!修改后部

Racket中，要生成可修改的对子，以及修改对子，则使用

mcons ,mset-car!, mset-cdr!

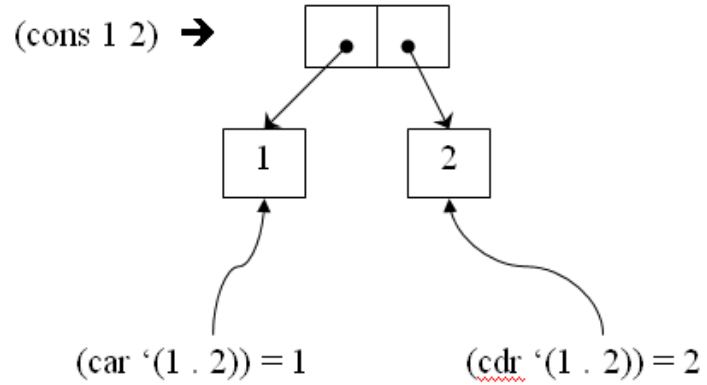
Scheme的数据类型

- 复合数据类型
  - ➢对子 (pair)

    （cons a b）即形成一个“对子”，一个对子由两部分(两个指针）构成

    car 取前部，cdr取后部

    set-car!修改前部，set-cdr!修改后部



Scheme的数据类型

- 复合数据类型

➢对子 (pair)

(cons a b) 即形成一个“对子”，一个对子由两部分构成

car 取前部，cdr取后部

set-car!修改前部，set-cdr!修改后部

```
(define p (cons "good" 100))
p
(car p)
(cdr p)
```

输出：

```
'("good" . 100)
"good"
100
```

Scheme的数据类型

- 复合数据类型

➢对子 (pair)

Racket中，要生成可修改的对子，以及修改对子，则使用mcons ,mcar,mcdr,set-mcar!, set-mcdr! ，并且在程序开头写：

```
(require scheme/mpair)

(define p2 (mcons "ok" "20"))
p2
(set-mcar! p2 30)
(set-mcdr! p2 "bad")
p2
```

输出：
(mcons "ok" "20")
(mcons 30 "bad")

Scheme的数据类型

- 复合数据类型

➢列表 (list)

列表是由多个类型相同或不同的数据连续组成的数据类型。

```
(define lst (list 1 2 3 4 ))
lst
(length lst)  ; 取得列表的长度
(list-ref lst 3)  ; 取得列表第3项的值（从0开始）
(define y (make-list 5 "a"))  ;创建列表
y
```

输出:

```
'(1 2 3 4)
4
4
'("a" "a" "a" "a" "a")
```

Scheme的数据类型

- 复合数据类型
  - ➢列表 (list)

    列表是由多个类型相同或不同的数据连续组成的数据类型。
    car用于取列表第一项，cdr取列表的剩余部分

```
(define lst (list 1 2 3 4 5))
(car lst)
(cdr lst)
(cadr lst)
(caddr lst)
(cadddr lst)
(cddr lst)
(cdddr lst)
(cddddr lst)
```

输出：

```
1
'(2 3 4 5)
2
3
4
'(3 4 5)
'(4 5)
'(5)
```

Scheme的数据类型

- 复合数据类型
  - ➢列表 (list)

    多重列表：列表的元素可以是列表

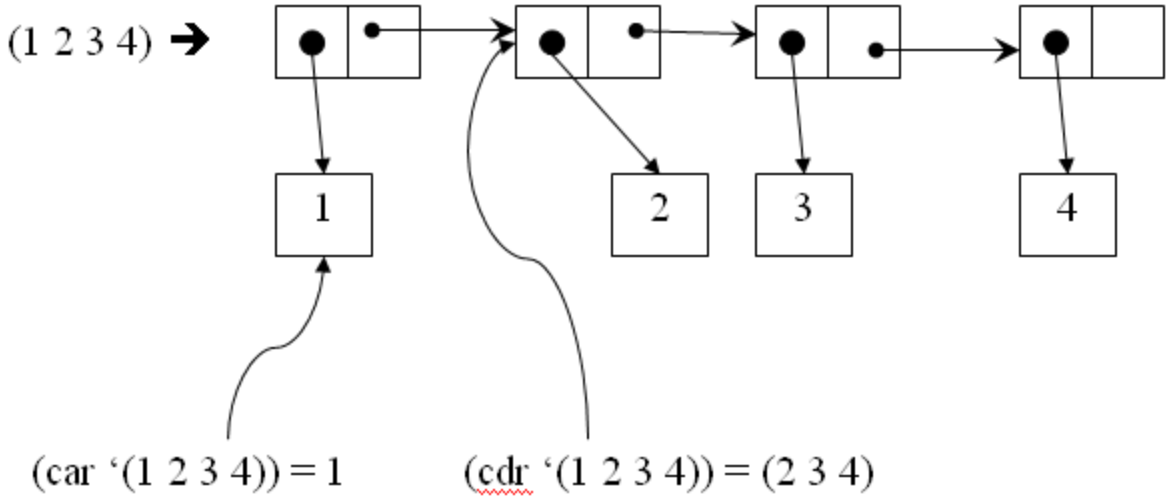
```
(list (list 1 2 3) 4 (list "a" 200))

=>  '((1 2 3) 4 ("a" 200))
```

Scheme的数据类型

- 复合数据类型
  - ➢列表 (list)

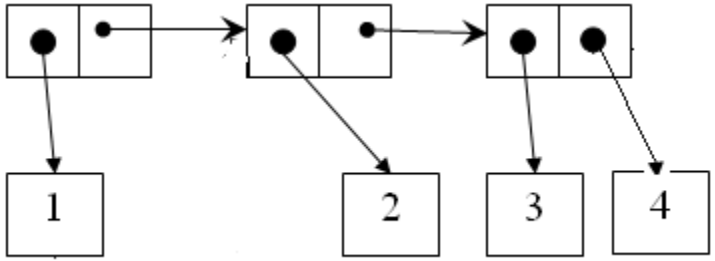
    列表和对子的关系：列表就是一个对子。对子的前部是列表的car，后部是列表的cdr。



Scheme的数据类型

- 复合数据类型
  - 对子 (pair)

(cons 1 (cons 2 (cons 3 4))) ➔



Scheme的数据类型

- 复合数据类型
  - ➢向量 (vector)

    类似于数组。

```
(define v (vector 1 2 3 4 5))
v
(vector-ref v 0)  ；求第0个元素的值
(vector-length v) ；求vector的长度
(vector-set! v 2 “abc”) ；设置vector第2个元素的值
v
(define x (make-vector 5 "a")) ；创建向量表
x
#(12 xyz 34)
```

输出：

```
'#(1 2 3 4 5)
1
5
'#(1 2 "abc" 4 5)
'#("a" "a" "a" "a" "a")
'#(12 xyz 34)
```

Scheme的运算符

- 类型判断运算符

```
(boolean? #t)  => #t
(boolean? #f)  => #t
(boolean? 2)   => #f

(char? #f)  => #f
(char? #\?) => #t

(integer? 3) =>#t
(integer? 2/3) => #f
```

以下全为 #t

```
(rational? 3)
(rational? 2/3)
(rational? 1.5)

(real? 3)
(real? 2/3)

(number? 2/3)
(number? 1.5)
(number? 4)
```

```
(null? '())   ;#t
(null? 5)     ;#f
(define x 124)
(symbol? x)  ;#f
(symbol? 'x)  ;#t
```

Scheme的运算符

- 比较运算符

>，< ，>= ，<= ，= 用于判断数字类型的变量或表达式之间的关系

```
(< 4 5)   => #t
(define x 13)
(= x 12)   =>#f
```

Scheme的运算符

- 比较运算符

eq?　判断两个参数是否指向同一个对象

equal? 则是判断两个对象是否具有相同的结构并且结构中的内容是否相同。多用来判断对子，列表，向量表，字符串等复合结构数据类型。

```
(define v (list 1 2 3))
(define w (list 1 2 3))
(eq? v w)   ;#f
(equal? v w)  ;#t
```

Scheme的运算符

- 算术运算符

  +, - , *, / ,

  abs, remainder, quotient …..

  各种运算符参考：
  http://zh.wikipedia.org/wiki/Scheme

Scheme的类型转换

“->”表示类型间的转换

```
(number->string 123)  ; 数字转换为字符串, ;"123"
(string->number “456”)  ; 字符串转换为数字 ;456
(char->integer #\a)  ;字符转换为整型数，a的ASCII码为96  ;97
(char->integer #\A)  ;A的ASCII码为65  ;65
(integer->char 97)  ;整型数转换为字符  ;#\a
(string->list “hello”)  ;字符串转换为列表 ;(#\h #\e #\l #\l #\o)
(list->string (make-list 4 #\a)) ; 列表转换为字符串 ;"aaaa"
(string->symbol “good”)  ;字符串转换为符号类型 ;good
(symbol->string ‘better)  ;符号类型转换为字符串 ;"better"
```

Scheme的表达式

- 简单表达式

数是基本表达式 (=>表示输出的结果，不是表达式的一部分)

235 => 235

简单算术表达式（简单组合式）

(+ 137 248) => 385

(+ 2.9 10) => 12.9

表达式都是带括号的前缀形式。 括号里第一个元素表示操作（运算符），后面是参数（操作数）操作数和参数之间、不同参数之间用空格分隔

Scheme的表达式

- 有些运算符允许任意多个参数

```
(+ 2 3 4 29)
(* 3 7 19 6 3)
```

- 表达式可以任意嵌套

```
(+ 2.9 (* 15 10))
```

- 可以写任意复杂的组合表达式，如

```
(+ (* 3 (+ (* 2 4) (+ 3 5))) (+ (- 10 7) 6))
```

- IDE会自动对表达式缩进以便于阅读：

```
(+ (* 3
      (+ (* 2 4)
         (+ 3 5)))
   (+ (- 10 7)
      6))
```

- 换行和空格符号不影响表达式的意义

Scheme的变量

用define 定义变量，且将其初始化

(define size 10)

变量没有类型，不能进行静态类型检查。因此其值的“类型”可变

(define x 10)
set! x "hello"

Scheme的变量和环境

scheme解释器在“环境”中存储变量名和其值的对应关系。

define、set! 建立或修改环境中的名字-值关联

“环境”有多层，表达式在当前环境求值，变量的值由环境中查到

Scheme 全局环境预先定义了一批名字-对象关联

全局环境中有一些预先定义的变量，主要是各种过程，如+,-,*,/, abs,list等

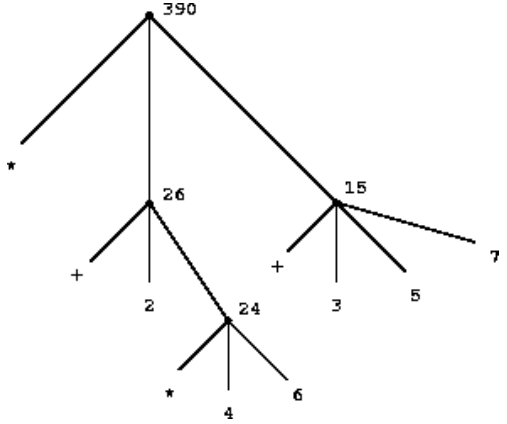
组合式的求值

- 组合式的求值规则：

  - 求值该组合式的各个子表达式(一般是从左到右)
  - 最左子表达式通常会是运算符或者函数名，其求值的结果就是一个过程。此种情况下以其他子表达式的值作为参数调用该过程。

- 例：

  (* (+ 2 (* 4 6)) (+ 3 5 7))



  - 表达式求值的过程是递归的

  - 求值过程可以用树表示，先取得叶结点（基本表达式）的值后向上累积

组合式的求值

- 常数的值是其自身（它们所表示的数值）
- 内部运算符(+, -, remainder)等的值是系统实现相关运算的指令序列
- 其他名字的值由当前环境取得，找到相应名字-**值关联时取出对应**的值，找不到就是错误

特殊形式

●有些表达式里的子表达式不应该求值，这样的表达式称为“特殊形式”(special form)。例：

(define x 1)

x 不应该求值，是要求为名字x关联一个新值。

scheme有多种“特殊形式”的表达式，如define, if , cond等。每个特殊形式有自己的求值规则。

过程定义

重复使用的表达式，可以定义成一个“过程”，以便日后方便使用，简化程序的编写。可以用自定义的过程再定义新过程

```
(define (square x) (* x x))
(square 3) ;=>9
(square (+ 2 4)) ;=>36
(define (sum-of-squares x y)
        (+ (square x) (square y)))

(sum-of-squares 1 4) ;=>17
(define (f a)
        (sum-of-squares (+ a 1) (* a 2)))
(f 5) ;=> 136
```

应用序和正则序求值

- 应用序求值：解释器先求值子表达式（运算符和各操作数），而后把得到的运算符应用于操作数（实际参数），即先求值参数后应用运算符。

求值（f 5）：

```
(sum-of-squares (+ a 1) (* a 2))
(sum-of-squares (+ 5 1) (* 5 2))
(+ (square 6) (square 10))
(+ (* 6 6) (* 10 10))
(+ 36 100)
136
```

应用序和正则序求值

- 正则序求值：先不求值操作数，推迟到必需时再求值：

- 求值(f,5)：

```
(sum-of-squares (+ 5 1) (* 5 2))
(+ (square (+ 5 1)) (square (* 5 2)) )
(+ (* (+ 5 1) (+ 5 1)) (* (* 5 2) (* 5 2)))
;先展开，后归约
(+ (* 6 6) (* 10 10))
(+ 36 100)
136
```

正则序求值导致重复计算。
Scheme采用应用序求值。

条件表达式

cond 条件表达式的一般形式：

```
(cond    (<p1> <e1>)
         (<p2> <e2>)
      ......
         (<pn> <en>)  )
```

依次求 p_1, p_2 …p_n。碰到第一个为真的 p_i，就求出执行对应的 e_i作为返回值。都不满足，则无返回值。

条件表达式

cond 条件表达式的一般形式：

```
(cond   (<p1> <e1>)
        (<p2> <e2>)
      ......
        (<pn> <en>)
        (else  <es>)
```

依次求 $p_1, p_2 \ldots p_n$。碰到第一个为真的 p_i，就求出执行对应的 e_i作为返回值。都不满足，则求出else对应的e_s作为返回值。

<e_i>中可以有多个表达式，<p_i >为真时，依次求值，最后一个表达式的值就是e_i的值)

条件表达式

定义abs函数的两种方法：

```
(define (abs x)
        (cond ((> x 0) x)
              ((= x 0) 0)
              ((< x 0) (- x))))


(define (abs x)
        (cond ((< x 0) (- x))
              (else x)))
```

条件表达式

if … 条件表达式:

(if *<predicate> <consequent> <alternative>*)

<predicate> 成立，则返回值为 <consequent>，否则返回值为<alternative>

```
(if (> 5 3)
    "ok"
    "not ok")   ;=> "ok"

(define a 6)
(if (> a 5)
    (if (< a 7)
        "good"
        "not good enough")
    "bad")    ;=>"good"
```

谓词

(and p1 p2 p3 p4 …)
(or p1 p2 p3 p4 …)
(not p)

and 和 or都是短路计算

cond, if , and ,or 都是特殊形式，有特殊求值规则

void函数

void库函数什么都不做，什么都不返回

```
(if (> x 3)
    (display x)
    (void))
```

x>3时才输出x,否则就什么都不做

begin表达式

(begin <exp1> <exp2> ...<expn>)

依次求值<exp1> ... <expn>。
begin表达式的返回值是expn的值

```
(if (> x 3)
    (begin (display "x=")(display x)(newline) x)
    (void))
```

begin表达式

(begin <exp1> <exp2> ...<expn>)

依次求值<exp1> ... <expn>。
begin表达式的返回值是expn的值

例:牛顿迭代法求平方根

为求x的平方根，猜测一个值 y_1 作为根,然后每次执行 $y_{i+1}=(y_i+x/y_i)/2$
直到某 y_i的平方和x差距足够小(也可以是两y_i和y_{i+1}差距足够小)

例:牛顿迭代法求平方根

```
(define (square x)   (* x x))
(define (average a b)    (/ (+ a b) 2))

(define (improve guess x)
  (average guess (/ x guess)))

(define (good-enough? guess x)
  (< (abs (- (square guess) x)) 0.001))

(define (sqrt-iter guess x) ;guess是猜测值
  (if (good-enough? guess x)
      guess
      (sqrt-iter (improve guess x)
                 x)))
(define (sqrt x)  (sqrt-iter 1.0 x))
```

为求x的平方根，猜测一个值 y_1 作为根，然后每次执行

$$y_{i+1}=(y_i+x/y_i)/2$$

直到某 y_i 的平方和x差距足够小(也可以是两y_i和y_{i+1}差距足够小)

```
(sqrt 2)  ;=> 1.4142156862745097
(sqrt 9)  ;=> 3.00009155413138
```

例:牛顿迭代法求平方根

```
(define (square x)   (* x x))
(define (average a b)    (/ (+ a b) 2))

(define (improve guess x)
  (average guess (/ x guess)))

(define (good-enough? guess x)
  (< (abs (- (square guess) x)) 0.001))

(define (sqrt-iter guess x) ;guess是猜测值
  (if (good-enough? guess x)
      guess
      (sqrt-iter (improve guess x)
                 x)))
(define (sqrt x)  (sqrt-iter 1.0 x))
```

为求x的平方根，猜测一个值 y_1 作为根，然后每次执行

$$y_{i+1}=(y_i+x/y_i)/2$$

直到某 y_i 的平方和x差距足够小(也可以是两y_i和y_{i+1}差距足够小)

```
(sqrt 2)  ;=> 1.4142156862745097
(sqrt 9)  ;=> 3.00009155413138
```