Instituto Superior Técnico

Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Eletrotecnia Teórica

Dimensionamento

Lab IV

Autores:
João **Gamelas** - 65390
Carlos **Marques** - 81323
Diogo **Meneses** - 86975 *dimeneses2015@gmail.com*
Tiago **Capítulo** - 90198

15 de maio de 2019

3.2 R//L//C

a)

Equações do circuito em tempos instantaneos:

$$u_C = u_L = L\frac{di_L(t)}{dt} \tag{1}$$

$$i = i_C + i_L \tag{2}$$

$$u_C = -Ri \tag{3}$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt \tag{4}$$

Com estas equações podemos tirar u_C:

$$\begin{aligned}
u_C = -Ri = -R(i_C + i_L) &= -R(C\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int u_L(t)dt) \\
&= -R(C\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int u_C(t)dt) \\
&= -RC\frac{du_C(t)}{dt} - \frac{R}{L}\int u_C(t)dt \\
&= \frac{du_C(t)}{dt} = -RC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} - \frac{R}{L}u_C(t) \\
&= RC\frac{d^2u_C(t)}{dt} + \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{R}{R}u_C(t) = 0 \\
&= \frac{d^2u_C(t)}{dt} + \frac{2}{2RC}\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0 \\
&= \frac{d^2u_C(t)}{dt} + 2\beta\frac{du_C(t)}{dt} + w_0^2u_C(t) = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\beta = \frac{1}{2RC} = 12500 rad/s \tag{6}$$

$$w_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 70710.67812 rad/s \tag{7}$$

b)

Para $t \geq 0$ o regime que se obtém é um regime forçado estacionário, o que implica que a tensão na bobina é nula e a corrente no condensador é nula. Devido à continuidade das funções de energia eléctrica e magnéctica, a corrente na bobina e a tensão no condensador não podem sofrer descontinuidades.

$$\begin{aligned}
&u_C(0^-) = u_C(0^+)\\
&u_C(0) = u_L(0) = 0 \Rightarrow u_C(0^+) = 0\\
&i_C(0) = 0\\
&U_G = Ri \Leftrightarrow i = \frac{U_G}{R} \Leftrightarrow i = \frac{4}{800} = 5mA
\end{aligned} \tag{8}$$

Para $t \geq 0$ como não existem fontes no circuito, então $u_{Cf}(t) = 0$.

c)

$$u_C(t) = u_{Cf}(t) + u_{Cl}(t) = u_{Cl}(t) \tag{9}$$

$$u_{Cl}(t) = U_0 e^{st} \tag{10}$$

Equação característica:

$$s^2 + 2\beta s + w_o^2 = 0 \tag{11}$$

Para o regime livre podemos obter três soluções distintas, considerando a resistência R variável. As soluções para $u_C(t)$ dependem das soluções da equanção característica.

$$s = -\beta \pm \sqrt{B^2 - w_0^2} \tag{12}$$

1) Regime aperiódico

Este regime ocorre quando as soluções da equanção característica são reais:

$$\begin{aligned} \beta^2 > w_0^2 &\Leftrightarrow (\frac{1}{2RC})^2 > \frac{1}{LC} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4R^2C^2} > \frac{1}{LC} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4C^2} > \frac{R^2}{LC} \\ &\Leftrightarrow R^2 < \frac{L}{4C} \\ &\Leftrightarrow R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned} \tag{13}$$

Neste caso as soluções são $s_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{B^2 - w_0^2}$ que $s_1 \neq s_2$.
A solução da equanção diferencial é dada por:

$$u_C(t) = U_1 e^{s_1 t} + U_2 e^{s_2 t} \tag{14}$$

2) Regime aperiódico limite

Este regime ocorre quando a equanção característica tem apenas uma raíz de ordem 2.

$$\beta^2 = w_0^2 \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{15}$$

A solução é portanto $s = -\beta$; $s = s_1 = s_2$
A solução da equanção diferencial é:

$$u_C(t) = U_1 e^{-\beta t} + U_2 t e^{-\beta t} = (U_1 + U_2 t)e^{-\beta t} \tag{16}$$

3) Regime oscilatório amortecido

O regime periódico amortecido ocorre quando as soluções da equanção característica são complexas.

$$\beta^2 < w_0^2 \Leftrightarrow R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{17}$$

Raízes complexas conjugadas:

$$\overline{s} = \overline{s_1} = \overline{s_2}^* = -\beta + jw \tag{18}$$

$$w = \sqrt{w_0^2 - \beta^2} \tag{19}$$

A solução da equanção diferencial é dada por:

$$u_C(t) = \overline{U_1} e^{\overline{s}t} + \overline{U_2} e^{\overline{s}^* t} \tag{20}$$

Como $u_C(t)$ é real então $\overline{U_2} = \overline{U_1}^*$.
Logo:

$$u_C(t) = \overline{U_1} e^{\overline{s}t} + \overline{U_1}^* e^{\overline{s}^* t} = 2Re[\overline{U_1} e^{\overline{s}t}] \tag{21}$$

$$\overline{U} = 2\overline{U_1} \Leftarrow u_C(t) = Re[\overline{U_1} e^{\overline{s}t}] = U e^{-\beta t} cos(wt + \alpha) \tag{22}$$

d)

$R = 800\Omega$

$$\beta = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 800 \times 50 \times 10^{-9}} = 12500 rad/s \tag{23}$$

$$w_o^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 70710.67812 rad/s \tag{24}$$

$\beta < w_0$ logo a solução é do tipo oscilatória amortecida.

$$w = \sqrt{w_0^2 - \beta^2} = 69597.05454 rad/s \tag{25}$$

$$u_C(t) = U_0 e^{-\beta t} cos(wt + \alpha) \tag{26}$$

Com base nas condições iniciais temos:

$$\begin{aligned} &u_C(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = U_0 e^{-\beta \times 0} cos(w \times 0 + \alpha) \\ &\Leftrightarrow 0 = cos(\alpha) \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &i = 5mA \\ &i = i_c + i_L \\ &i_C(0) = 0 \Rightarrow i(0) = i_C(0) + i_L(0) = i_L(0) = 5 \times 10^{-3} A \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L dt = \frac{1}{L} \int u_C(t) dt \\ &\Leftrightarrow = \frac{1}{L} \int Re[\overline{U} e^{\overline{s}t}] dt = \frac{1}{L} Re[\frac{\overline{U} e^{\overline{s}t}}{\overline{s}}] \\ &\Leftrightarrow = \frac{1}{L} Re[\frac{\overline{U} e^{\overline{s}t}}{w_0} e^{-j\delta}] = \frac{U_0}{w_0 L} e^{-\beta t} cos(wt + \alpha - \delta) \end{aligned} \tag{29}$$

$$i_L(0) = \frac{U_0}{w_0 L} cos(\alpha - \delta) = 5mA \tag{30}$$

Logo $cos(\alpha - \delta) > 0$ então $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \delta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi - \delta < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} &-\beta + jw = w_0 e^{j\delta} \\ &\delta = \pi - arctan(\frac{w}{\beta}) \simeq 1.7485 rad \end{aligned} \tag{31}$$

Pode então concluir-se que $k = 0$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
Temos portanto:

$$U_0 = \frac{i_L(0) L w_0}{cos(\alpha - \delta)} \simeq 1.4368V \tag{32}$$

$$u_C(t) = 1.4368 e^{-12500t} cos(69597.05454t + \frac{\pi}{2})[V] \tag{33}$$

O quociente entre dois extremos consecutivos de u_C é dado por:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{U_0 e^{-\beta(\frac{n\pi - \alpha}{w})}}{U_0 e^{-\beta(\frac{(n+1)\pi - \alpha}{w})}} = e^{-\beta(\frac{n\pi - (n+1)\pi}{w})} = e^{\beta(\frac{\pi}{w})} = e^{\beta(\frac{T}{2})} \Rightarrow \lambda = \frac{\beta T}{2} \tag{34}$$

Verifica-se então que:

$$\begin{aligned} &(\frac{A_1}{A_n})^{\frac{1}{n-1}} = (\frac{U_0 e^{-\beta(\frac{\pi - \alpha}{w})}}{U_0 e^{-\beta(\frac{n\pi - \alpha}{w})}})^{\frac{1}{n-1}} = (e^{-\beta(\frac{-(n+1)\pi}{w})})^{\frac{1}{n-1}} \\ &\Leftrightarrow e^{\beta(\frac{\pi}{w})} = e^{\beta(\frac{T}{2})} \Rightarrow \lambda = \frac{\beta T}{2} \end{aligned} \tag{35}$$

$$\lambda = \frac{\beta \pi}{w} \simeq 0.5642 \tag{36}$$

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{U_0}{w_0 L} e^{-\beta t} cos(wt + \alpha - \delta) \\ &= \frac{1.4368}{282.843} e^{-12500t} cos(69597.05454t + \frac{\pi}{2} - 1.7485)[A] \end{aligned} \tag{37}$$

e)

Nas condições do regime livre do tipo periódico limite (equação característica com uma raíz dupla):

$$\beta^2 = w_0^2 \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{38}$$

Logo:

$$R_0 = R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-9}}} \simeq 141.421\Omega \tag{39}$$

$$\beta = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 141.421 \times 50 \times 10^{-9}} = 70710.85624 rad/s \tag{40}$$

A solução para a tensão no condensador é dada por:

$$u_C(t) = (U_1 + U_2 t)e^{-\beta t} \tag{41}$$

Tendo as condições iniciais:

$$\begin{aligned} &u_C(0^-) = u_C(0^+) \\ &u_L(0^-) = u_L(0^+) = 0 \\ &i_C(0) = 0 \end{aligned} \tag{42}$$

Calculando agora as constantes U_1 e U_2:

$$u_C(0) = 0 \Leftrightarrow U_1 = 0 \tag{43}$$

$$i_L = \frac{1}{L}\int u_L dt = \frac{1}{L}\int U_2 t e^{st} dt = \frac{U_2}{L}\frac{e^{st}(st-1)}{s^2} \tag{44}$$

Tendo em conta $i_L(0) = I_{0L} = \frac{4}{141.421} \simeq 28.28mA$

$$i_L(0) = -\frac{U_2}{Ls^2} = 28.28mA \tag{45}$$

Sendo $s = -\beta$ temos que $U_2 \simeq -565.603kV$
Assim:

$$u_C(t) = U_2 t e^{-\beta t} \tag{46}$$

A tensão no condensador será mínima quando a derivada for nula:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = U_2 e^{st} + U_2 t e^{st} = 0 \Leftrightarrow 1 + st = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{s} = \frac{1}{\beta} \simeq 14.14\mu s \tag{47}$$

$$u_C(t_{min}) = u_C(14.14\mu s) \simeq -2.9426V \tag{48}$$