

Eliminación Gaussiana

Matrices y Eliminación Gaussiana

Matrix:

A matriz rectangular (filas x columnas) de valores reales

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

(Matriz 3 x 3)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(Matriz 3 x 2)

$$\begin{bmatrix} \pi & \sqrt{3} \\ 1.0524 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

(Matriz 2 x 2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Matriz Cero o
Matriz Nula)

Matriz Aumentada:

Cada fila una matriz aumentada corresponde a una ecuación del sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{array} \right]$$

Ej) Fila 2 es equivalente a: $x - 2y + z = -6$

Cada número en las primeras 3 columnas representa el coeficiente de una misma variable.

Signo de Igualdad

Eliminación Gaussiana

Eliminación Gaussiana es un método para **resolver sistemas de ecuaciones** en el cual se usan **MATRICES** para organizar la solución.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# \end{array} \right] \xrightarrow[\text{(Reducción por filas)}]{\text{Eliminación Gaussiana}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{array} \right]$$

Matriz Aumentada

Forma Escalonada

Reducción por filas:

El proceso de reducción por filas usa las siguientes OPERACIONES LICITAS sobre una fila de la matriz para resolver sistemas de ecuaciones.

- 1.) **Intercambiar** 2 filas dentro de la matriz.
- 2.) **Multiplicar /Dividir** una fila entera por una constante.
- 3.) **Sumar/Restar** dos filas para reemplazar una fila.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- La última fila representa la ecuación $4x_3 = 8$.
- Resolvemos la ecuación representada por la tercera fila
 - $4x_3 = 8$
 - $x_3 = 2$
- De la segunda fila de la matriz se obtiene $x_2 + x_3 = 4$
 - $x_2 + 2 = 4$
 - $x_2 = 2$
- De la primera fila se obtiene $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$
 - $2x_1 + 4(2) - 2(2) = 2$
 - $2x_1 + 8 - 4 = 2$
 - $2x_1 = 2 - 4$
 - $2x_1 = -2$
 - $x_1 = -1$

La solución del sistema es (-1, 2, 2).

Eliminación Gaussiana para resolver un sistema de ecuaciones

1. Escribir la **matriz aumentada** del sistema.
2. Usar **operaciones elementales sobre filas** para construir una matriz equivalente en forma form escalonada.
3. Escribir el sistema de ecuaciones que corresponde a la **matriz escalonada** resultante.
4. Usar **sustitución invertida** para determinar la solución del sistema.

Ejemplo 1: Eliminación de Gauss

Considere el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 36 \\ -3x + 5y + 7z = 7 \\ 5x + 3y - 8z = -31 \end{cases}$$

La **matriz aumentada** para este sistema es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 36 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{array} \right]$$

Ejemplo 1: Eliminación de Gauss

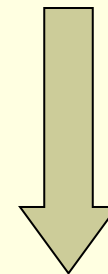
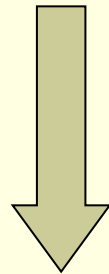
Paso 1: Obtener 1 en la posición A_{11}

$$\begin{array}{ccc} 0.5\mathbf{R}'_1 \rightarrow \mathbf{R}'_1 & \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 36 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{bmatrix} & \rightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 5z = 36 \\ -3x + 5y + 7z = 7 \\ 5x + 3y - 8z = -31 \end{cases} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & 31 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{cases} x - 2y + 2.5z = 18 \\ -3x + 5y + 7z = 7 \\ 5x + 3y - 8z = -31 \end{cases} \end{array}$$

Ejemplo 1: Eliminación de Gauss

Paso 2: Eliminar el coeficiente de la variable x de la 2da y 3ra ecuación.

$$\begin{array}{l} 3R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -5R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2.5z = 18 \\ -3x + 5y + 7z = 7 \\ 5x + 3y - 8z = -31 \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & -1 & 14.5 & 61 \\ 0 & 13 & -20.5 & -121 \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 5z = 36 \\ -y + 14.5z = 61 \\ 13y - 20.5z = -121 \end{cases}$$

Ejemplo 1: Eliminación de Gauss

Paso 3: Eliminar el coeficiente de la variable y de la 3ra ecuación.

$$13R'_2 + R'_3 \rightarrow R''_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & -1 & 14.5 & 61 \\ 0 & 13 & -20.5 & -121 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 5z = 36 \\ -y + 14.5z = 61 \\ 13y - 20.5z = -121 \end{cases}$$

Paso 4: El elemento A_{22} debe ser 1

$$\begin{array}{l} -R'_2 \rightarrow R''_2 \\ (1/168)R''_3 \rightarrow R'''_3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & -1 & 14.5 & 61 \\ 0 & 0 & 168 & 672 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Paso 5: El elemento A_{33} debe ser 1

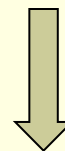
Matriz en forma escalonada

Ejemplo 1: Eliminación de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} x - 2y + 2.5z = 18 \\ y - 14.5z = -61 \\ z = 4 \end{cases}$$



De la fila 3, **$z = 4$**

De la fila 2,

$$y - 14.5z = -61$$

$$y - 14.5(4) = -61$$

$$\mathbf{y = -3}$$

La solución del sistema es (2, -3, 4).

De la fila 1,

$$x - 2y + 2.5z = 18$$

$$x - 2(-3) + 2.5(4) = 18$$

$$\mathbf{x = 2}$$

Ejemplo 2: Eliminación de Gauss

Use eliminación de gauss para resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = -2 \\ 7x + 8y + 10z = 5 \end{cases}$$

Ejemplo 3: Eliminación de Gauss

¿Cuándo se deberían intercambiar dos ecuaciones o dos filas?

Consideremos el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$\begin{aligned}3y + 2z &= 16 \\4x + 2y - 3z &= -10 \\3x + 4y + z &= 9\end{aligned}$$

La matriz aumentada correspondiente es:

$$\left(\begin{array}{cccc}0 & 3 & 2 & 16 \\4 & 2 & -3 & -10 \\3 & 4 & 1 & 9\end{array}\right)$$

Example 3: Gauss Elimination

La Ecn. (1) (Fila 1) no se puede usar para eliminar la x de las Ecns. (2) y (3) (Filas 2 y 3).

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 16 \\ 4 & 2 & -3 & -10 \\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Intercambiar Fila 1 con Fila 2 y la matrix aumentada se convierte en:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & 16 \\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos dividir la fila 1 entre 4 para tener 1 en A_{11} y continuar realizando los pasos que se describieron en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 4: Eliminación de Gauss

Un Centro de Jardinería compra semillas de flores al por mayor. Luego, mezcla y envasa las semillas para uso en jardines caseros. El centro produce con 3 mezclas diferentes de semillas de flores: “Algo Salvaje”, “Querida Mamá” y “Cajón de Medicina”.

1) Un kilogramo de la mezcla de semillas Algo Salvaje contiene 500 gramos de semillas de flores silvestres, 250 gramos de semilla de equinácea y 250 gramos de semilla de crisántemo.

2) La mezcla Querida Mamá se compone de 75% de semilla de crisántemo y 25% de semillas de flores silvestres.

3) La mezcla Cajón de Medicina contiene 90% de las semillas de equinácea, y 10% de una semilla que el Centro siempre tiene disponible..

Ejemplo 4: Eliminación de Gauss

Cont

En una orden reciente, el Centro recibió 17 gramos de semilla de flores silvestres, 15 gramos of Echinacea seed and 21 gramos of Chrysanthemum seed.

Use *matrices* y *Eliminación de Gauss* para determinar la cantidad de cada mezcla que la tienda puede preparar.

Ejemplo 4: Eliminación de Gauss

- Solución:

- Asignar variables

- a la cantidad de cada mezcla que se va a producir.

- X = Cantidad de Algo Salvaje

- Y = Cantidad de *Querida Mamá*

- Z = Cantidad de *Cajón de Medicina*

- Formar las ecuaciones que describen las mezclas.

- $$0.5X + 0.25Y + 0Z = 17g$$

- $$0.25X + 0Y + 0.9Z = 15g$$

- $$0.25X + 0.75Y + 0Z = 21g$$

Ejemplo 4: Eliminación de Gauss

Aplicar Eliminación Gaussiana a la matriz:

Eliminación Gauss-Jordan

- En eliminación Gauss-Jordan, se sigue la reducción de la matriz aumentada hasta llegar a la forma **escalonada reducida**. (donde hay unos en la diagonal de la matriz aumentada y ceros en las demás posiciones.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

Eliminación Gauss-Jordan

Consideremos el sistema.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 36 \\ -3x + 5y + 7z = 7 \\ 5x + 3y - 8z = -31 \end{cases}$$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 36 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{array} \right]$$

Eliminación Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 36 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \div 2 \rightarrow R1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 3 R1 + R2 \rightarrow R2 \\ -5 R1 + R3 \rightarrow R3 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & -1 & 14.5 & 61 \\ 0 & 13 & -20.5 & -121 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & -1 & 14.5 & 61 \\ 0 & 13 & -20.5 & -121 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -R2 \rightarrow R2 \\ 13 R2 + R3 \rightarrow R3 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 168 & 672 \end{bmatrix}$$

Eliminación Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 168 & 672 \end{bmatrix} \xrightarrow{R3 \div 168 \rightarrow R3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -2.5R3+R1 \rightarrow R1 \\ 14.5R3+R2 \rightarrow R2 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R2+R1 \rightarrow R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es $X = 2$, $Y = -3$ y $Z = 4$

Ex.) Use Eliminación Gaussiana para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a)
$$\begin{aligned}x + 2y + z &= -4 \\x + 4y + 5z &= -18 \\4x \quad \quad - z &= -4\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}3y - 2z &= 19 \\x - y + 4z &= -13 \\x \quad \quad + 3z &= -6\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}2x + 3y - z &= 13 \\x - 2y + 3z + 2 &= 0 \\4x + y + 3z &= 9\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}x + 2y + 7z - 3 &= 0 \\x - y + z - 4 &= 0 \\3x + 3y + 15z - 10 &= 0\end{aligned}$$