Integración Numérica - Parte 1
Cuadratura de Newton-Cotes

Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CE-3102: Análisis Numéricos para Ingeniería

Juan Pablo Soto Quirós
jusoto@tec.ac.cr

Introducción

En la sección anterior, se hace uso de la interpretación geométrica de la derivada para definir técnicas que nos permitan aproximar el valor de dicho cálculo.

De esta misma forma, se puede hacer uso de la interpretación geométrica de la integral definida para definir una serie de formas que nos permitan aproximar dicha cantidad, esto es, aproximar el valor de:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Introducción

Resultado

Sea f una función continua e integrable en $[a, b]$ y sea F una antiderivada de f en $[a, b]$, es decir $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

El problema de la regla anterior es que parte del supuesto de que f posee una antiderivada expresable con funciones simples, lo cual no siempre es cierto. Algunos ejemplos son:

- $f(x) = e^{-x^2}$
- $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
- $h(x) = \log_x(\arcsin(x))$

Introducción

A continuación se explicarán dos métodos para aproximar el valor de una integral definida. Estos métodos son:

- **Cuadratura de Newton-Cotes**: Se deriva de la definición del polinomio de interpolación.
- **Integración de Romberg**: También basado en el polinomio de interpolación y en el método de extrapolación de Richardson. Este método mejora la precisión de la regla del trapecio compuesta.

Integración de Newton-Cotes

Sea f una función integrable en $[a, b]$ con un conjunto soporte $\mathcal{S}\{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Además, sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador de Lagrange que aproxima a f en $[a, b]$ y cuya gráfica pasa por todos los puntos $(x_k, f(x_k))$.

Entonces, se sabe que existe $\xi \in [a, b]$ que depende de x para el cual:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n).$$

Por lo tanto

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k).$$

Integración de Newton-Cotes

Ahora, integrando a ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$
\begin{aligned}
f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k) \quad &\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k) dx \\
&\Rightarrow \quad \int_a^b f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \int_a^b L_k(x)dx \cdot f(x_k) \\
&\Rightarrow \quad \int_a^b f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)
\end{aligned}
$$

donde $w_k = \int_a^b L_k(x)dx$. Por lo tanto

$$
\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k).
$$

Integración de Newton-Cotes

Como las cuadraturas de Newton-Cotes son obtenidas aproximando la función f por medio del polinomio interpolador de Lagrange, entonces es posible utilizar el estimado de error de este polinomio, para obtener una cota de error $|E_n(f)|$ para al asumir condiciones de regularidad sobre f.

Teorema

Sea $n \geqslant 1$ y f una función real, definida y continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, tal que las derivadas de f de orden $n+1$ existen y son continuas sobre $[a, b]$. Entonces la cota del error $|E_n(f)|$ de las cuadraturas de Newton-Cotes está dada por

$$|E_n(f)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\pi_{n+1}(x)| dx,$$

donde $M_{n+1} = \max_{\zeta \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\zeta)|$ y $\pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$.

Integración de Newton-Cotes

La regla de cuadratura numérica, expresada anteriormente es conocida como **la cuadratura de Newton-Cotes de orden** n.

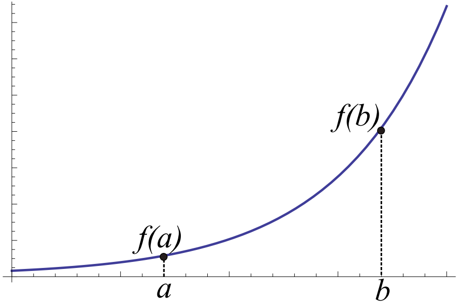
Dependiendo de la cantidad de puntos a utilizar, se definen las fórmulas de integración numérica.

- Si se utilizan un punto, se conoce como **Regla del Rectángulo**.
- Si se utilizan dos puntos, se conoce como **Regla del Trapecio**.
- Si se utilizan tres puntos, se conoce como **Regla de Simpson**.

En caso de la regla del rectángulo se dejará de tarea.

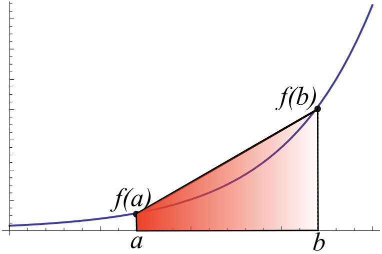
Regla del Trapecio

Considere una función $f \in \mathcal{C}[a, b]$, como se muestra en la siguiente figura.



Para realizar una aproximación el valor de $\int_a^b f(x)dx$, se traza una línea recta que pase por los puntos $f(a)$ y $f(b)$.

Regla del Trapecio



La figura que se forma es un trapecio. Sea $h = b - a$ Entonces, calculando el área de un trapecio con los datos de la figura, se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(b + B) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

Regla del Trapecio

Regla del Trapecio (Segunda Fórmula de Newton-Cotes)

Sea $f(x)$ una función 2 veces derivable en el intervalo $[a, b]$. Entonces la regla del trapecio se define como

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

donde $h = b - a$. Además, el error se define como

$$|E_2(f)| = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) \right| = \frac{h^3}{12}|f''(\xi)|$$

donde $\xi \in [a, b]$.

Demostración

Ejercicio.

Regla del Trapecio

Ejemplo

Sea $f(x) = \ln(x)$. Aproxime el valor de la integral de f en el intervalo $[2, 5]$, utilizando la regla del trapecio. Calcule el error respectivo.

Sabiendo que $h = 5 - 2 = 3$, entonces utilizando la regla del trapecio se obtiene

$$\int_2^5 \ln(x)dx \approx \frac{3}{2}(\ln(2) + \ln(5)) \approx 3.4539$$

Para calcular el error, entonces

$$|E_2(f)| = \frac{h^3}{12}|f''(\xi)|$$

Regla del Trapecio

Se sabe que $f''(\xi) = \dfrac{-1}{\xi^2}$, de donde se deduce que $|f''(\xi)| = \dfrac{1}{\xi^2}$. La función $|f''(\xi)|$ es decreciente en el intervalo $[2, 5]$, por lo tanto alcanza su máximo en $\xi = 2$, es decir

$$|f''(\xi)| \leqslant \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{4}$$

Entonces, en el intervalo $[2, 5]$

$$|E_2(f)| = \frac{h^3}{12}|f''(\xi)| \leqslant \frac{3^3}{12} \cdot \frac{1}{4} = 0.5625$$

Por lo tanto, el error es menor o igual a 0.5625

Regla del Trapecio

Ejercicio

Aproxime el valor de la integral definida

$$\int_1^2 \frac{13}{5x+4}dx$$

utilizando la regla del trapecio. Luego calcule una cota para el error de dicha aproximación.

Regla de Simpson

Regla de Simpson (Tercera fórmula de Newton-Cotes)

Sea $f(x)$ una función 4 veces derivable en el intervalo $[a, b]$. Sea $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y $x_2 = b$, entonces se define la regla se Simpson como

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)],$$

donde $h = \frac{b-a}{2}$. Además, el error se define como

$$|E_3(f)| = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \right| = \frac{h^5}{90}|f^{(4)}(\xi)|,$$

donde $\xi \in [a, b]$.

Demostración

Ejercicio.

Regla de Simpson

Ejemplo

Sea $f(x) = \ln(x)$. Aproxime el valor de la integral de f en el intervalo $[2, 5]$, utilizando la regla de Simpson. Calcule el error respectivo.

Sabiendo que $h = \frac{5-2}{2} = 1.5$, entonces

- $x_0 = 2$
- $x_1 = \frac{5+2}{2} = 3.5$
- $x_2 = 5$

entonces utilizando la regla del trapecio se obtiene

$$\int_2^5 \ln(x)dx \approx \frac{1.5}{3}[\ln(2) + 4\ln(3.5) + \ln(5)] \approx 3.6568$$

Regla de Simpson

Para calcular el error, entonces

$$|E_3(f)| = \frac{h^5}{90}|f^{(4)}(\xi)|$$

Se sabe que $f^{(4)}(\xi) = \dfrac{-6}{\xi^4}$, de donde se deduce que $|f^{(4)}(\xi)| = \dfrac{6}{\xi^4}$. La función $|f^{(4)}(\xi)|$ es decreciente en el intervalo $[2, 5]$, por lo tanto

$$|f^{(4)}(\xi)| \leqslant \frac{6}{(2)^4} = \frac{3}{8}$$

Entonces, en el intervalo $[2, 5]$:

$$|E_3(f)| = \frac{h^5}{90}|f^{(4)}(\xi)| \leqslant \frac{(1.5)^5}{90} \cdot \frac{3}{8} \approx 0.0316$$

Por lo tanto, el error es menor o igual a 0.0316

Regla de Simpson

Ejercicio

Aproxime el valor de la integral definida

$$\int_1^2 \frac{13}{5x+4}dx$$

utilizando la regla de Simpson. Luego calcule una cota para el error de dicha aproximación.

Ejercicio: Regla del Rectángulo

Nota

Se sabe que las cuadraturas de Newton-Cotes se calcula a partir de la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

donde $w_k = \int_a^b L_k(x)dx$.

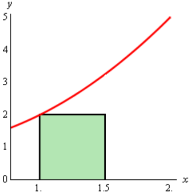
Ejercicio: Regla del Rectángulo

Nota

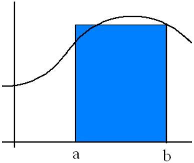
En el caso de que se tome $n = 0$ entonces se define la regla del rectángulo. En este caso pueden existir dos opciones:

- Seleccionar $x_0 = a$: **Regla del Rectángulo a la izquierda**
- Seleccionar $x_0 = b$: **Regla del Rectángulo a la derecha**

En ambos casos, $L_0(x) = x_0$.



A la izquierda



A la derecha

Ejercicio: Regla del Rectángulo

Ejercicio 1

Determine una fórmula para la regla del rectángulo por la izquierda y una fórmula para la regla del rectángulo por la derecha. (Sugerencia: Integre $w_0 = \int_a^b L_0(x)dx$ en cada uno de los casos)

Ejercicio 2

Aproxime el valor de la integral definida

$$\int_1^2 \frac{13}{5x+4}dx$$

utilizando la regla del rectángulo (por la izquierda y por la derecha). Luego investigue la cota del error y calcule una cota para el error de dichas aproximaciones.

Fórmulas Compuestas

Considere la integral

$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2} dx \;\approx\; 1.76416278,$$

la cual si se aproxima por la regla del trapecio se obtiene que:

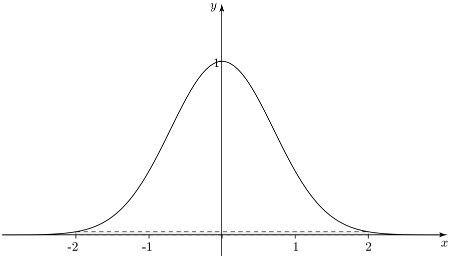
$$\int_{-2}^{2} e^{-x^2} dx \;\approx\; \frac{2-(-2)}{2}\left[e^{-(-2)^2} + e^{-(2)^2}\right] \;=\; 4e^{-4} \;\approx\; 0.0732625556,$$

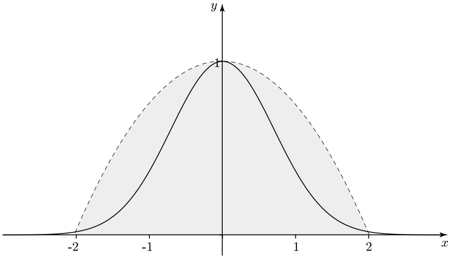
mientras que si se aproxima por la regla de Simpson se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} e^{-x^2} dx \;&\approx\; \frac{2-(-2)}{6}\left[e^{-(-2)^2} + 4e^{-(0)^2} + e^{-(2)^2}\right],\\ &=\; \frac{4}{3}[2+e^{-4}] \;\approx\; 2.69108751.\end{aligned}$$

Fórmulas Compuestas

Nótese como ambas aproximaciones son incorrectas, ya que la del trapecio es muy pequeña, mientras que la regla de Simpson excede bastante el valor real. Esto se puede apreciar en la figura:





Fórmulas Compuestas

Una técnica que mejora significativamente la precisión en la aproximación de una integral, consiste en dividir el intervalo de integración $[a, b]$, en un creciente número de subintervalos de tamaño decreciente, y entonces, utilizar una cuadratura numérica de orden n fijo en cada uno de los subintervalos.

Continúa siendo la idea de aproximar la función a integrar por un interpolador, pero en este caso el interpolador no es un polinomio, sino un trazador.

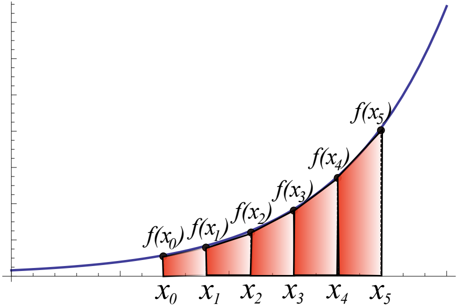
Las cuadraturas basadas en esta técnica se denominan **cuadraturas compuestas**.

A continuación se explicará la implementación de las cuadraturas compuestas utilizando la regla del Trapecio y la regla de Simpson.

Regla Compuesta del Trapecio

Sea $f(x)$ una función en el intervalo $[a, b]$ y considere el conjunto soporte $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ de tal manera que están igualmente espaciados, es decir $x_{i+1} - x_i = h$, para todo $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ahora, aplicando la regla del trapecio a cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, se obtiene la siguiente representación gráfica.



Regla Compuesta del Trapecio

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \approx\ & \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))+\frac{h}{2}(f(x_1)+f(x_2)) \\ & +\frac{h}{2}(f(x_2)+f(x_3))+\frac{h}{2}(f(x_3)+f(x_4)) \\ & +\frac{h}{2}(f(x_4)+f(x_5))\end{aligned}$$

Es decir

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{4}\frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_{i+1})) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{4}(f(x_i)+f(x_{i+1}))$$

Regla Compuesta del Trapecio

En general; la regla del trapecio se define de la siguiente forma:

Regla Compuesta del Trapecio

Sea $f(x)$ una función 2 veces derivable en el intervalo $[a, b]$ y considere el conjunto soporte $\mathcal{S} = \{x_0, ..., x_n\}$ de tal manera que están igualmente espaciados, es decir $x_{i+1} - x_i = h$.
Entonces la regla compuesta del trapecio se define como

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Regla Compuesta del Trapecio

Regla Compuesta del Trapecio

Además, el error se define como

$$|E_{2c}(f)| = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \right| = \frac{(b-a)h^2}{12} |f''(\xi)|$$

donde $\xi \in [a, b]$.

Si se utilizan m puntos, entonces del intervalo $[a, b]$

$$h = \frac{b-a}{m-1}$$

Además, $x_0 = a$ y $x_n = b$ y $x_k = x_0 + kh$.

Regla Compuesta del Trapecio

Ejemplo

Sea $f(x) = \ln(x)$. Aproxime el valor de la integral de f en el intervalo $[2, 5]$, utilizando la regla compuesta del trapecio, con 4 puntos. Calcule el error respectivo.

Se tiene que utilizar $m = 4$ puntos, y que estén igualmente espaciados. Entonces

$$h = \frac{b-a}{m-1} = \frac{5-2}{4-1} = 1$$

Entonces $x_0 = 2$, $x_1 = 2 + 1 \cdot 1 = 3$, $x_2 = 2 + 2 \cdot 1 = 4$, $x_3 = 5$

$$\int_2^5 \ln(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}(\ln(x_i) + \ln(x_{i+1})) \approx 3.6361$$

Regla Compuesta del Trapecio

Se sabe que $f''(\xi) = \dfrac{-1}{\xi^2}$, de donde se deduce que $|f''(\xi)| = \dfrac{1}{\xi^2}$. La función $|f''(\xi)|$ es decreciente en el intervalo $[2,5]$, por lo tanto

$$|f''(\xi)| \leqslant \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{2}$$

Entonces, en el intervalo $[2,5]$:

$$Error = \frac{(b-a)h^2}{12}|f''(\xi)| \leqslant \frac{(5-2)1^2}{12} \cdot \frac{1}{4} = 0.0625$$

Por lo tanto, el error es menor o igual a 0.0625.

Ejercicios

Ejemplo

Considere la función f *definida por* $f(x) = e^{-x^2}$ *y considere el intervalo* $[0, 4]$. *Sabiendo que* f *es integrable en* $[0, 4]$, *aproxime*

$$\int_0^4 f(x)dx$$

usando la regla compuesta del trapecio, con

- 5 *puntos.*
- 6 *puntos*
- 7 *puntos*
- 8 *puntos*

Regla Compuesta de Simpson

De forma similar a la regla compuesta del trapecio, se define la regla compuesta de Simpson.

Regla Compuesta de Simpson

Sea $f(x)$ una función 4 veces derivable en el intervalo $[a, b]$ y considere el conjunto soporte $\mathcal{S} = \{x_0, ..., x_n\}$ donde n es **par** (**una cantidad impar de puntos**) de tal manera que están igualmente espaciados, es decir $x_{i+1} - x_i = h$.
Entonces la regla compuesta de Simpson se define como

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + f(x_n)\right]$$

Regla Compuesta de Simpson

Regla Compuesta de Simpson

Además, el error se define como

$$|E_{3c}(f)| = \frac{(b-a)h^4}{180}|f^{(4)}(\xi)|$$

donde $\xi \in [a, b]$.

Recordar que si se utilizan m puntos, entonces del intervalo $[a, b]$

$$h = \frac{b-a}{m-1}$$

Además, $x_0 = a$ y $x_{n-1} = b$ y $x_k = x_0 + kh$.

Regla Compuesta de Simpson

Ejemplo

Sea $f(x) = \ln(x)$. Aproxime el valor de la integral de f en el intervalo $[2, 5]$, utilizando la regla compuesta del trapecio, con puntos 7. Calcule el error respectivo.

Se tiene que utilizar $m = 7$ puntos, y que estén igualmente espaciados.
Entonces $h = \dfrac{b-a}{m-1} = \dfrac{5-2}{7-1} = 0.5$

Ahora:

- $x_0 = 2$
- $x_1 = 2 + 1 \cdot 0.5 = 2.5$
- $x_2 = 2 + 2 \cdot 0.5 = 3$
- $x_3 = 2 + 3 \cdot 0.5 = 3.5$
- $x_4 = 2 + 4 \cdot 0.5 = 4$
- $x_5 = 2 + 5 \cdot 0.5 = 4.5$
- $x_6 = 5$

Regla Compuesta de Simpson

Ahora:

- Suma de términos con índice par

$$\begin{aligned}\sum \ln(x_{2i}) &= \ln(x_2) + \ln(x_4)\\ &\approx \ln(3) + \ln(4)\\ &\approx 2.4849\end{aligned}$$

- Suma de términos con índice impar

$$\begin{aligned}\sum \ln(x_{2i-1}) &= \ln(x_1) + \ln(x_3) + \ln(x_5)\\ &\approx \ln(2.5) + \ln(3.5) + \ln(4.5)\\ &\approx 3.6731\end{aligned}$$

Regla Compuesta de Simpson

Entonces

$$\begin{aligned}\int_2^5 \ln(x)dx &\approx \tfrac{0.6}{3}\left[\ln(2) + 2\sum \ln(x_{2i}) + 4\sum f(x_{2i-1}) + \ln(5)\right] \\ &\approx \tfrac{0.5}{3}\left[0.6931 + 2\cdot 2.4849 + 4\cdot 3.6731 + 1.6094\right] \\ &\approx 3.6607\end{aligned}$$

Regla de Simpson

Para calcular el error, entonces

$$|E_{3c}(f)| = \frac{(b-a)h^4}{180}|f^{(4)}(\xi)|$$

Se sabe que $f^{(4)}(\xi) = \frac{-6}{\xi^4}$, de donde se deduce que $|f^{(4)}(\xi)| = \frac{6}{\xi^4}$. La función $|f^{(4)}(\xi)|$ es decreciente en el intervalo $[2,5]$, por lo tanto

$$|f^{(4)}(\xi)| \leqslant \frac{6}{(2)^4} = \frac{3}{8}$$

Entonces, en el intervalo $[2,5]$:

$$|E_{3c}(f)| = \frac{(b-a)h^4}{180}|f^{(4)}(\xi)| \leqslant \frac{(5-2)(0.5)^4}{180} \cdot \frac{3}{8} \approx 0.00039$$

Por lo tanto, el error es menor o igual a 0.00039

Ejercicios

Ejemplo

Considere la función f *definida por* $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ *y considere el intervalo* $[1, 2]$*. Sabiendo que* f *es integrable en* $[1, 2]$*, aproxime*

$$\int_1^2 f(x)dx$$

usando la regla compuesta del Trapecio y Simpson, utilizando

- 5 *puntos.*
- 11 *puntos*

Lista de Ejercicios

1. Del libro Métodos numéricos para ingenieros, Quinta Edición, realizar los siguientes ejercicios:
   - Página 645, los ejercicios 21.1. 21.2, 21.6, 21.9, 21.22
   - Página 666, los ejercicios 22.4, 22.5, 22.13
2. Del libro Métodos Numéricos con MATLAB, Tercera Edición, realizar los siguientes ejercicios:
   - Página 394, los ejercicios 1, 2, 3, 5, 8, 9