Eliminación Gaussiana

Matrices y Eliminación Gaussiana

Matrix:

A matriz rectangular (filas x columnas) de valores reales

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

(Matriz 3 x 3)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(Matriz 3 x 2)

$$\begin{bmatrix} \pi & \sqrt{3} \\ 1.0524 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

(Matriz 2 x 2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Matriz Cero o
Matriz Nula)

Matriz Aumentada:

Cada fila una matriz aumentada corresponde a una ecuación del sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right]$$

Signo de Igualdad

Ej) Fila 2 es equivalente a: x - 2y + z = -6

Cada número en las primeras 3 columnas representa el coeficiente de una misma variable.

Eliminación Gaussiana

Eliminación Gaussiana es un método para ***resolver sistemas de ecuaciones*** en el cual se usan ***MATRICES*** para organizar la solución.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# \\ \# & \# & \# & \# \end{array}\right] \xrightarrow[\text{(Reducción por filas)}]{\text{Eliminación Gaussiana}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{array}\right]$$

Matriz Aumentada **Forma Escalonada**

Reducción por filas:

El proceso de reducción por filas usa las siguientes OPERACIONES LICITAS sobre una fila de la matriz para resolver sistemas de ecuaciones.

1.) ***Intercambiar*** 2 filas dentro de la matriz.

2.) ***Multiplicar /Dividir*** una fila entera por una constante.

3.) ***Sumar/Restar*** dos filas para reemplazar una fila.

Ejemplo $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

- La última fila representa la ecuación $4x_3 = 8$.
- Resolvemos la ecuación representada por la tercera fila
  - $4x_3 = 8$
  - $x_3 = 2$
- De la segunda fila de la matriz se obtiene $x_2 + x_3 = 4$
  - $x_2 + 2 = 4$
  - $x_2 = 2$
- De la primera fila se obtiene $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$
  - $2x_1 + 4(2) - 2(2) = 2$
  - $2x_1 + 8 - 4 = 2$
  - $2x_1 = 2 - 4$
  - $2x_1 = -2$
  - $x_1 = -1$

La solución del sistema es (-1, 2, 2).

Eliminación Gaussiana para resolver un sistema de ecuaciones

1. Escribir la ***matriz aumentada*** del sistema.
2. Usar ***operaciones elementales sobre filas*** para construir una matriz equivalente en forma form escalonada.
3. Escribir el sistema de ecuaciones que corresponde a la ***matriz escalonada*** resultante.
4. Usar **sustitución invertida** para determinar la solución del sistema.

Ejemplo 1: Eliminación de Gauss

Considere el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 36 \\ -3x + 5y + 7z = 7 \\ 5x + 3y - 8z = -31 \end{cases}$$

La ***matriz aumentada*** para este sistema es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 36 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{array}\right]$$

Ejemplo 1: Eliminación de Gauss

Paso 1: Obtener 1 en la posición A_{11}

$0.5R'_1 \rightarrow R'_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 36 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 5z = 36 \\ -3x + 5y + 7z = 7 \\ 5x + 3y - 8z = -31 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & 31 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2.5z = 18 \\ -3x + 5y + 7z = 7 \\ 5x + 3y - 8z = -31 \end{cases}$$

Ejemplo 1: Eliminación de Gauss

Paso 2: Eliminar el coeficiente de la variable x de la 2da y 3ra ecuación.

$$\begin{array}{r} \\ 3R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -5R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2.5z = 18 \\ -3x + 5y + 7z = 7 \\ 5x + 3y - 8z = -31 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & -1 & 14.5 & 61 \\ 0 & 13 & -20.5 & -121 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 5z = 36 \\ -y + 14.5z = 61 \\ 13y - 20.5z = -121 \end{cases}$$

Ejemplo 1: Eliminación de Gauss

Paso 3: Eliminar el coeficiente de la variable *y* de la 3ra ecuación.

13**R'$_2$+R'$_3$** → **R''$_3$**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & -1 & 14.5 & 61 \\ 0 & 13 & -20.5 & -121 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 5z = 36 \\ -y + 14.5z = 61 \\ 13y - 20.5z = -121 \end{cases}$$

Paso 4: El elemento A_{22} debe ser 1

-R'$_2$ → **R''$_2$**

(1/168)**R''$_3$** → **R'''$_3$**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & -1 & 14.5 & 61 \\ 0 & 0 & 168 & 672 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Paso 5: El elemento A_{33} debe ser 1

Matriz en forma escalonada

Ejemplo 1: Eliminación de Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2.5z = 18 \\ y - 14.5z = -61 \\ z = 4 \end{cases}$$

De la fila 3, **z = 4**

De la fila 2,

y -14.5z = -61

y - 14.5 (4) = 61

y = - 3

La solución del sistema es (2, -3, 4).

De la fila 1,

x – 2y + 2.5z = 18

x – 2 (- 3) + 2.55 (4) = 18

x = 2

Ejemplo 2: Eliminación de Gauss

Use eliminación de gauss para resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = -2 \\ 7x + 8y + 10z = 5 \end{cases}$$

Ejemplo 3: Eliminación de Gauss

¿Cuando se deberían intercambiar dos ecuaciones o dos filas?

Consideremos el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3y + 2z &= 16 \\ 4x + 2y - 3z &= -10 \\ 3x + 4y + z &= 9 \end{aligned}$$

La matriz aumentada correspondiente es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 16 \\ 4 & 2 & -3 & -10 \\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Example 3: Gauss Elimination

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 16 \\ 4 & 2 & -3 & -10 \\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

La Ecn. (1) (Fila 1) no se puede usar para eliminar la x de las Ecns. (2) y (3) (Filas 2 y 3).

Intercambiar Fila 1 con Fila 2 y la matrix aumentada se convierte en:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & 16 \\ 3 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos dividir la fila 1 entre 4 para tener 1 en A_{11} y continar realizando los pasos que se describieron en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 4: Eliminación de Gauss

Un Centro de Jardinería compra semillas de flores al por mayor. Luego, mezcla y envasa las semillas para uso en jardines caseros. El centro produce con 3 mezclas diferentes de semillas de flores: “Algo Salvaje", “Querida Mamá" y “Cajón de Medicina".

1) Un kilogramo de la mezcla de semillas Algo Salvaje contiene 500 gramos de semillas de flores silvestres, 250 gramos de semilla de equinácea y 250 gramos de semilla de crisántemo.

2) La mezcla Querida Mamá se compone de 75% de semilla de crisántemo y 25% de semillas de flores silvestres.

3) La mezcla Cajón de Medicina contiene 90% de las semillas de equinácea, y 10% de una semilla que el Centro siempre tiene disponible..

Ejemplo 4: Eliminación de Gauss

Cont

En una orden reciente, el Centro recibió 17 gramos de semilla de flores silvestres, 15 gramos of Echinacea seed and 21 gramos of Chrysanthemum seed.

Use *matrices* y *Eliminación de Gauss* para determinar la cantidad de cada mezcla que la tienda puede preparar.

Ejemplo 4: Eliminación de Gauss

- Solución:
  - Asignar variables

    a la cantidad de cada mezcla que se va a producir.

    X = Cantidad de Algo Salvaje

    Y = Cantidad de *Querida Mamá*

    Z = Cantidad de *Cajón de Medicina*

  - Formar las ecuaciones que describen las mezclas.

    $0.5X + 0.25Y + 0Z = 17g$

    $0.25X + 0Y + 0.9Z = 15g$

    $0.25X + 0.75Y + 0Z = 21g$

Ejemplo 4: Eliminación de Gauss

Aplicar Eliminación Gaussiana a la matriz:

Eliminación Gauss-Jordan

- En eliminación Gauss-Jordan, se sigue la reducción de la matriz aumentada hasta llegar a la forma **escalonada reducida.** (donde hay unos en la diagonal de la matriz aumentada y ceros en las demás posiciones.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

Eliminación Gauss-Jordan

Consideremos el sistema.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 36 \\ -3x + 5y + 7z = 7 \\ 5x + 3y - 8z = -31 \end{cases}$$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -4 & 5 & 36 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{array}\right]$$

Eliminación Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 36 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \div 2 \rightarrow R1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ -3 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & -8 & -31 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 3\,R1+R2 \rightarrow R2 \\ -5\,R1+R3 \rightarrow R3 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & -1 & 14.5 & 61 \\ 0 & 13 & -20.5 & -121 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & -1 & 14.5 & 61 \\ 0 & 13 & -20.5 & -121 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -\,R2 \rightarrow R2 \\ 13\,R2+R3 \rightarrow R3 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 168 & 672 \end{bmatrix}$$

Eliminación Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 168 & 672 \end{bmatrix} \quad \text{R3÷ 168→ R3} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2.5 & 18 \\ 0 & 1 & -14.5 & -61 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{-2.5R3+}R\text{1→R1} \\ \text{14.5R3+}R\text{2→R2} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{2R2+}R\text{1→R1} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es X = 2, Y = -3 y Z = 4

Ex.) Use Eliminación Gaussiana para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= -4 \\ x + 4y + 5z &= -18 \\ 4x \qquad - z &= -4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3y - 2z &= 19 \\ x - y + 4z &= -13 \\ x \qquad + 3z &= -6 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 13 \\ x - 2y + 3z + 2 &= 0 \\ 4x + y + 3z &= 9 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + 2y + 7z - 3 &= 0 \\ x - y + z - 4 &= 0 \\ 3x + 3y + 15z - 10 &= 0 \end{aligned}$$