ANPI Fecha: 10-3-2022

Sistemas de Ecuaciones (Continuación).

La lección anterior estudiamos un método que permite resolver un sistema $Ax=b$, donde A no tiene ninguna característica especial.

A partir de ahora, estudiaremos un conjunto de métodos para calcular la solución del $Ax=b$, donde $\underline{\underline{A}}$ tendrá algunas características particulares.

① **Método de Eliminación Gaussiana**: Este método calcula la solución del sistema $Ax=b$, donde A es cuadrada e invertible

Casos Particulares: Un sistema $Ax=b$ es un sistema triangular si la matriz A es una matriz triangular superior o inferior.

Ejm:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{\Delta \text{ Superior}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}}_{\Delta \text{ Inferior}}$$

Δ Superior: Entradas abajo de la diagonal principal son iguales a cero.

Δ Inferior: Entradas arriba de la diagonal principal son iguales a cero.

Nota: Si $Ax=b$ es un sistema triangular, entonces la solución de dicho sistema se realiza a través de sustitución hacia adelante o hacia atrás.

Ejm: Considere el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 & (4) \\ \quad -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 & (3) \\ \qquad 3x_3 + 13x_4 = 13 & (2) \\ \qquad\quad -13x_4 = -13 & (1) \end{cases}$$

Repr. Matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Δ Superior

Nota: La solución de este sistema se obtiene a través de sustitución hacia atrás

(1) $-13x_4 = -13 \Rightarrow x_4 = \dfrac{-13}{-13} = \boxed{1.}$

(2) $x_3 = \dfrac{13 - 13x_4}{3} = \dfrac{13 - 13 \cdot 1}{3} = \boxed{0}$

(3) $x_2 = -\dfrac{7 + 5x_4 + x_3}{-1} = -\dfrac{7 + 5(1) + (0)}{-1} = \boxed{2}$

(4) $x_1 = \dfrac{4 - 3x_4 + x_3 - x_2}{1} = 4 - 3(1) + 0 - 2 = \boxed{-1}$

Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pasos de la sustitución hacia atrás

Entrada: $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es Δ superior e Invertible, $b \in \mathbb{R}^m$

Salida: $x \in \mathbb{R}^m$, da solución $Ax=b$.

P1: Para $i = m, m-1, m-2, \ldots, 1$

P2: $$X(i) = \frac{1}{A(i,i)}\left(b(i) - \sum_{j=i+1}^{m} A(i,j)\cdot x(j)\right)$$

Fin Para

Nota: Investigar el método de sust. hacia adelante, cuando A es Δ inferior. Implementar computacionalmente este método.

$x = \text{sust\_adelante}(A, b)$ → Δ inferior.

¿Qué pasa si A no es Δ superior ni inferior? R/ Eliminación Gaussiana

El método de eliminación gaussiana trata de re-escribir un sistema $Ax=b$ en un nuevo sistema $\bar{A}x=\bar{b}$, donde $\bar{A}$ es Δ superior, tal que $Ax=b$ y $\bar{A}x=\bar{b}$ son equivalentes, es decir, tienen la misma solución.

Este proceso se logra a través de operaciones elementales a las filas de A.

Pasos para obtener un sistema Δ superior de un sistema $Ax=b$. (triang-sup)

Entradas $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertible, $b \in \mathbb{R}^m$ $(Ax=b)$

Salida: $\bar{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es Δ superior y $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ $(\bar{A}x=\bar{b})$

1. $\hat{A} = [A \ b] \in \mathbb{R}^{m\times n+1}$ (Matriz Aumentada)
2. for $K = 1 : m-1$ (Recorrer Columnas).
3. for $i = K+1 : n$ (Recorrer Filas)
4. $m_{iK} = \hat{A}(i,K) / \hat{A}(K,K)$
5. for $j = K : n+1$. (Hacer "0" los valores de la fila i).
6. $\hat{A}(i,j) = \hat{A}(i,j) - m_{iK} \cdot \hat{A}(K,j)$
7. end.
8. end.
9. end.
10. $\bar{A} = \hat{A}(:, 1:n)$
11. $\bar{b} = \hat{A}(:, n+1)$

Eliminación Gaussiana

$x = \text{elim\_gauss\_sust\_atras}(A, b)$

↳ Solución del sistema $Ax=b$.

↳ $\in \mathbb{R}^{m}$

↳ $\in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertible

<u>P1</u>: $[\bar{A}, \bar{b}] = \text{triang\_sup}(A, b)$

<u>P2</u>: $x = \text{sust\_atras}(\bar{A}, \bar{b})$