Instituto Tecnológico de Costa Rica

Área Académica de Ingeniería en Computadores

Análisis Numérico para Ingeniería

Tarea 3 y 4

Método de Romberg

Estudiantes:

- José Antonio Espinoza Chaves
- Carlos Andrés Mata Calderón
- Sebastián Moya Monge
- Ignacio Grané Rojas

I Semestre 2023

Método de Romberg

El método de Romberg, es un método numérico para aproximar el valor de la integral de una función definida con la forma:

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Este método mejora la convergencia de otros métodos de integración, en este caso se aplica sobre el método de trapecio compuesto; y sobre estos resultados se aplica la extrapolación de Richardson para obtener aproximaciones más cercanas al valor real y mejorando la eficiencia de uso computacional. Para este método se utilizan los resultados de trapecio compuesto con $n = 1,2,4,8,16, \dots$, denotando respectivamente las aproximaciones resultantes como $R_{1,1}, R_{2,1}, R_{3,1}$, etc., donde se colocarían en la primera columna de extrapolación. Ahora, como se le está aplicando una extrapolación, este genera una tabla de extrapolación, por lo que entre más columnas mayor el orden de convergencia, de esta manera, la primera columna tendrá un orden de convergencia $O(h^2)$ y la última columna, que depende de un parámetro "n" tendrá un orden de convergencia de $O(h^{2k})$, siendo esta última la mejor aproximación para la integral.

Para el método de Romberg, como se está utilizando el método de trapecio compuesto se utiliza el siguiente valor para el tamaño de paso dependiente de la iteración:

$$h_k = \frac{(b-a)}{m_k} = \frac{(b-a)}{2^{k-1}} \qquad (2)$$

Una vez conocida la fórmula para calcular h_k se procede a calcular mediante el método del trapecio compuesto los valores de la primera columna de la tabla de extrapolación. Para calcular el valor inicial ($R_{1,1}$) se utiliza la siguiente fórmula:

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)] \qquad (3)$$

Para calcular el resto de valores de la primera columna se utiliza la siguiente fórmula:

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i-1)h_k)\right] \; para\; k = 2, 3, \dots, n \qquad (4)$$

De esta manera, se calcula con el orden de convergencia $O(h_k^2)$. Sin embargo, se quiere obtener la mejor aproximación posible, por lo que para calcular $O(h_k^{2j})$ (El cual daría la aproximación más cercana al valor real), se calcula de la siguiente manera:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1} - 1}\left(R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}\right) para\; k = j, j+1, \dots \qquad (5)$$

Como se puede observar, este necesita tanto el valor de la fila anterior como el de la columna anterior, por lo que se debe resolver iterativamente hasta obtener $R_{n,n}$, el cual sería la mejor aproximación, como se puede ver en la siguiente tabla de extrapolación.

k	$O(h_k^2)$	$O(h_k^4)$	$O(h_k^6)$	$O(h_k^8)$		$O(h_k^{2n})$
1	$R_{1,1}$					
2	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$				
3	$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
4	$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n	$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	$\cdots$	$R_{n,n}$

Por lo tanto, el método calcula las entradas fila por fila en el orden $R_{1,1}$, $R_{2,1}$, $R_{2,2}$, $R_{3,1}$, $R_{3,2}$, $R_{3,3}$, $etc.$ Esto permite calcular una fila nueva completa simplemente usando una nueva aplicación del método del trapecio, y luego usa un promediado simple en los valores previamente calculados para obtener el resto de las entradas de la fila.

Una vez completado el algoritmo, se devuelve el valor en $R_{n,n}$, el cual provee el valor con la mejor aproximación en el orden de convergencia $O(h_k^{2n})$.

<u>Ejemplo numérico</u>

Usando el método de Romberg, mediante la regla del Trapecio compuesta para aproximar $\int_0^{\pi} sen(x)\, dx$ con n = 1, 2, 4, 8 y 16. Este ejemplo numérico fue obtenido del libro de Análisis Numérico [1].

Primero, se calcula la primera columna, iniciando por $R_{1,1}$, utilizando (3):

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}[\sin 0 + \sin \pi] = 0;$$

Después se calcula el resto de valores de la primera columna, utilizando (4):

$$R_{2,1} = \frac{\pi}{4}\left[\sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi\right] = 1.57079633;$$

$$R_{3,1} = \frac{\pi}{8}\left[\sin 0 + 2\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\pi\right] = 1.89611890;$$

$$R_{4,1} = \frac{\pi}{16}\left[\sin 0 + 2\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{4} + \cdots + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{8}\right) + \sin\pi\right] = 1.97423160;$$

$$R_{5,1} = \frac{\pi}{32}\left[\sin 0 + 2\left(\sin\frac{\pi}{16} + \sin\frac{\pi}{8} + \cdots + \sin\frac{7\pi}{8} + \sin\frac{15\pi}{16}\right) + \sin\pi\right] = 1.99357034.$$

Finalmente, se calcula el resto de columnas con los valores iniciales calculados (primera columna). Es importante que se debe ir en orden, calculando las columnas en orden ascendente ya que cada columna nueva dependerá de los valores de columna anterior.

De esta manera, se calculan las siguientes columnas, usando la fórmula (5), de la siguiente manera:

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3}(R_{2,1} - R_{1,1}) = 2.09439511; \quad R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{3}(R_{3,1} - R_{2,1}) = 2.00455976;$$

$$R_{4,2} = R_{4,1} + \frac{1}{3}(R_{4,1} - R_{3,1}) = 2.00026917; \quad R_{5,2} = R_{5,1} + \frac{1}{3}(R_{5,1} - R_{4,1}) = 2.00001659;$$

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{1}{15}(R_{3,2} - R_{2,2}) = 1.99857073; \quad R_{4,3} = R_{4,2} + \frac{1}{15}(R_{4,2} - R_{3,2}) = 1.99998313;$$

$$R_{5,3} = R_{5,2} + \frac{1}{15}(R_{5,2} - R_{4,2}) = 1.99999975.$$

$$R_{4,4} = R_{4,3} + \frac{1}{63}(R_{4,3} - R_{3,3}) = 2.00000555; \quad R_{5,4} = R_{5,3} + \frac{1}{63}(R_{5,3} - R_{4,3}) = 2.00000001,$$

$$R_{5,5} = R_{5,4} + \frac{1}{255}(R_{5,4} - R_{4,4}) = 1.99999999.$$

De esta manera se obtiene el último valor, ya que n tiene 5 elementos, por lo que el método termina en $R_{5,5}$. Siendo esta la aproximación obtenida mediante este método. El valor real de la integral es de 2, por lo que la aproximación se acerca mucho al valor real, si se añadiera una columna más el valor sería más exacto. Por lo tanto, la tabla de extrapolación mediante el método de Romberg es:

0				
1.57079633	2.09439511			
1.89611890	2.00455976	1.99857073		
1.97423160	2.00026917	1.99998313	2.00000555	
1.99357034	2.00001659	1.99999975	2.00000001	1.99999999

Pseudocódigo del método de Romberg

ENTRADAS: límites de la integral a, b; y n (largo de la matriz) > 0.

SALIDA: matriz de extrapolación, valor $R_{n,n}$.

PASO 1: Establecer

$$h = b - a$$

$$R_{1,1} = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

PASO 2: Para i = 2, …, n

PASO 3: Establecer

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[R_{1,1} + h\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a + (k - 0.5)h)\right]$$

PASO 4: Para j = 2, …, i

Establecer

$$R_{2,j} = R_{2,j-1} + \frac{R_{2,j-1} - R_{1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

PASO 5: Establecer

$$h = \frac{h}{2}$$

PASO 6: Para j = 1, 2, …, i

Establecer $R_{1,j} = R_{2,j}$

PASO 7: BREAK

Bibliografía:

[1] R. L. Burden and J. D. Faires, Numerical Analysis, Boston, MA, Cengage Learning, 2011, pp213-218.