Diagrama Fase, Estabilidad y el Modelo de Solow-Swan

Ecuaciones Diferenciales en la Teoría Macroeconómica

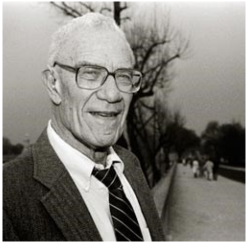
Rodrigo Arjona, Andro Asatashvili, Carlos Pérez

Matemáticas IV, Abril 2022

CIDE

Modelo Solow-Swan

- El modelo de crecimiento: desarrolla un marco simple para las causas y mecánicas aproximadas del crecimiento económico en una economía. Se asume que la propensión marginal a ahorrar está dada de forma exógena
- Explica el crecimiento económico a largo plazo analizando
  1. La acumulación del capital
  2. El crecimiento de la mano de obra/población
  3. Aumentos de la productividad (progreso tecnológico).
- El modelo fue desarrollado por Robert Solow (Harvard) y Trevor Swan (ANU) en 1956
- Solow $\longrightarrow$ Premio Nobel en Ciencias Económicas de 1987



El modelo Solow-Swan:

- Y = Producción
- K = Capital
- L = Fuerza Laboral
- S = Ahorro
- I = Inversión Bruta
- δ = tasa de depreciación del capital
- s = propensión marginal (constante) de ahorro
- n = tasa constante de crecimiento de L (suponemos crecimiento exponencial)
- $y = \frac{Y}{L}$ = producción p/cápita, suponiendo que todos trabajan
- $k = \frac{K}{L}$ = capital p/cápita

Supuestos

Asumimos que la producción viene dada por $Y = F(K, L)$ donde F es una función de producción linealmente homogénea y con las siguientes propiedades:

- $F_k, F_L > 0 \longrightarrow$ capital/trabajadores adicionales incrementa producción
- $F_{KK}, F_{LL} < 0 \longrightarrow$ producción marginal decreciente
- $lim_{K\to 0} F_K(K, L) = \infty \longrightarrow$ aumentar capital es útil
- $lim_{K\to \infty} F_K(K, L) = 0 \longrightarrow$ aumentar capital es inútil
- $F_K(0, L) > \delta$
- $F(0, L) = F(K, 0) = 0 \longrightarrow$ necesitamos ambos para ser productivos

Estas propiedades garantizan que la función de producción sea creciente en cada factor y estrictamente cóncava. La homogeneidad asegura los rendimientos constantes de escala.

Tomemos a x^* como punto fijo del sistema dinámico y a $\eta(t) = x(t) - x^*$ como una pequeña perturbación en x^*; tenemos que

$$\dot{\eta} = \dot{x} = f(x)$$

Así, con una expansión de Taylor:

$$\dot{\eta} \simeq f`(x^*)(x - x^*) = \eta f`(x^*)$$

Y siendo la solución de una ED $\eta = Ce^{f`(x^*)t}$, la perturbación tiende a cero si $f`(x^*) < 0$ y diverge si $f`(x^*) > 0$.

De esta forma, si $f`(x^*) < 0$,

$$\lim_{t \to \infty} \eta(t) = \lim_{t \to \infty} (x - x^*) = 0,$$

Por consiguiente:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x^*,$$

de forma que x^* es asintóticamente estable si $f`(x^*) < 0$.

Por tanto, cuando $f`(x^*) > 0$,

$$\lim_{t \to \infty} \eta(t) = \lim_{t \to \infty} (x - x^*) = \pm\infty,$$

x^* es inestable.

Construcción de la ecuación diferencial

La población es igual a la fuerza laboral y crece a la tasa constante n y el ahorro es una proporción fija, s, del ingreso, de manera que se cumplen

$$\dot{L} = nL$$

$$S = sY$$

Por definición, la inversión bruta está dada por

$$I = \dot{K} + \delta K$$

donde:

- $\dot{K}$ = inversión neta
- δK = inversión requerida para reponer el capital depreciado

Construcción de la ecuación diferencial

Dado que la función de producción es homogénea, expresamos la producción per cápita (y) así:

$$y = \frac{Y}{L} = F(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}) = F(k, 1) = f(k)$$

donde $f^{'} > 0, f^{''} < 0, f^{'}(0) > \delta, f(0) = 0$. Además, tenemos que en equilibrio $I = 0$, y por tanto:

$$sY = \dot{K} + \delta K$$

Así podemos reescibir $\dot{K}$:

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

Construcción de la ecuación diferencial

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

Dividimos por K:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sY - \delta K}{K} = \frac{sY}{L}(\frac{L}{K}) - \delta = \frac{sf(k)}{k} - \delta$$

Verificamos lo siguiente:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{k}}{k} + n$$

De tal modo que podemos reordenar:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k$$

Comprobación

$$\dot{k} : sf(k) - (n+\delta)k = 0$$

Independientemente de la forma funcional de $f(k)$, existen dos equilibrios:

1. $k = 0$ con $f'(0) > 0$
2. k^* con $f'(k^*) < 0$

$$\therefore$$

1. $k = 0$ es inestable (repulsor)
2. k^* es estable (atractor)

Ej. Función de producción Cobb-Douglas: Diagrama de fase

$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde $0 < \alpha < 1$ y A$\in \mathbb{R}^{+}$.

1. Construimos $f(k)$:

$$f(k) = \frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = A\frac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L^{\alpha}L^{1-\alpha}} = A(\frac{K}{L})^{\alpha} = Ak^{\alpha}$$

2. Metemos $f(k)$ en $\dot{k}$

$$\dot{k} = s(Ak^{\alpha}) - \delta k$$

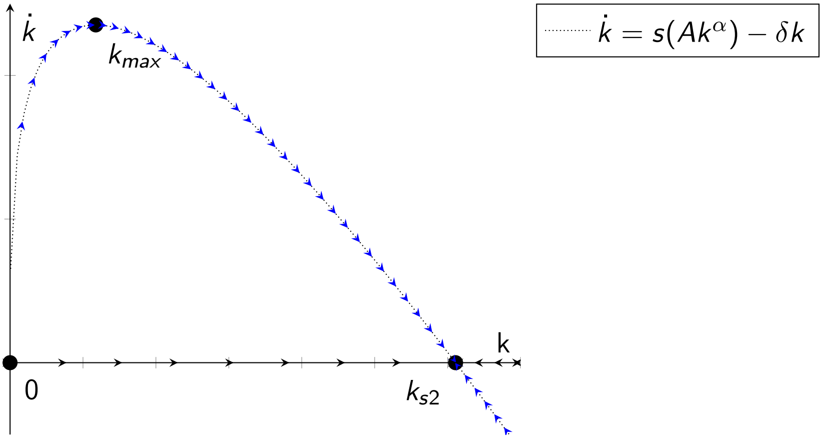
3. $\dot{k} = 0$ y resolvemos para la solución k_s:

$$s(Ak^{\alpha}) - \delta k = 0$$

$$k^{\alpha}(sA - \delta k^{1-\alpha}) = 0$$

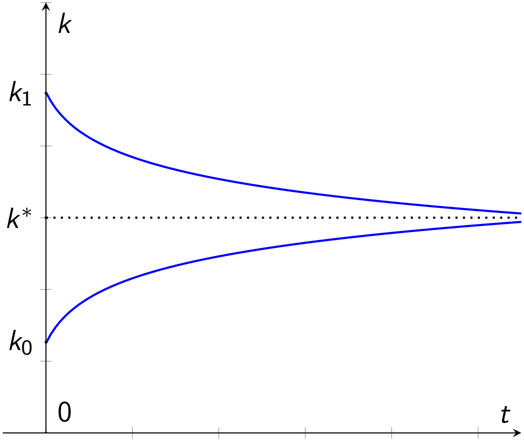
$$\therefore k_{s1} = 0, \quad k_{s2} = (\frac{sA}{\delta})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Diagrama de fase para el modelo de Solow-Swan:



La gráfica en el plano $k\dot{k}$ atraviesa el origen, es cóncava y tiene un máximo en k_{max}, de tal modo que podemos observar una **convergencia asintótica al punto de estabilidad** k_{s2}.

Trayectoria del capital tipo Cobb-Douglas:



De tal modo que para una función de producción Cobb-Douglas: $k^* = \left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

- k_0 incrementa hacia el nivel de equilibrio k^* si $k_0 < k^*$ en $t = 0$.
- k_0 decrese hacia el nivel de equilibrio k^* si $k^* < k_0$ en $t = 0$.

Implicaciones

- El modelo de Solow-Swan es un ejemplo clásico de una ecuación diferencial en la Macroeconomía
- A diferencia de modelos de crecimiento como el de Harrod-Domar que operan con funciones Leontieff, el factor diferenciable del modelo Solow-Swan **permite el estudio del crecimiento de economías de manera continua**
- El modelo puede ser modificado para que incluya crecimiento en la fuerza laboral (L) o mejoras en la tecnología

Bibliografía

- Lomelí, Héctor, y Rumbos, Beatriz. “Ecuaciones No Lineales de Primer Orden.” En *Métodos Dinámicos En Economía*, 50–56. Ciudad de México: ITAM, 2001.
- Tanioka, Chad. “Modeling Economic Growth Using Differential Equations.” Occidental College, 2016. https://sites.oxy.edu/ron/math/400/15/comps/Tanioka.pdf. ▸ Link
- Kurlat, Pablo. “A Course in Modern Macroeconomics.” Pablo Kurlat, 2020.