Introducción a Algebra Lineal

4.1 Operaciones con Matrices y Determinantes

1. Encuentre la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -15 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \end{matrix} \quad \rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{matrix}$$

Por lo tanto, la matriz inversa es:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Se sabe que:

$$F \cdot F^{-1} = I_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes

Se tiene que cumplir:

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Definimos A y B:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante para cada matriz:

$$|A| = ad - cb$$

$$|B| = eh - gf$$

Multiplicamos ambos determinantes:

$$|A| \times |B| = (ad - cb)(eh - gf) = adeh - adgf - cbeh + cbgf$$

Ahora calculamos la multiplicación de matrices:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + gb & af + bh \\ ce + gd & cf + dh \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos el determinante del producto de matrices:

$$|A \times B| = \begin{vmatrix} ae + gb & af + bh \\ ce + gd & cf + dh \end{vmatrix} = (ae + gb)(cf + dh) - (ce + gd)(af + bh)$$

$$= aecf + aedh + gbcf + gbdh - (ceaf + cebh + gdaf + gdbh)$$

$$= aedh + gbcf - (+cebh + gdaf)$$

Reordenamos términos

$$= adeh - adgf - cbeh + cbgf$$

Por lo tanto, la propiedad es cierta.

4.2 Sistemas de ecuaciones lineales

3. Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

Para resolver el sistema usando el método de Gauss-Seidel, supongamos que:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$z_0 = 0$$

Despejamos cada variable:

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$

$$y = \frac{1 + 2x + 2z}{4}$$

$$z = \frac{5 - x + y}{3}$$

A continuación, se registran los valores obtenidos en 3 iteraciones

I	X	Y	Z
0	0	0	0
1	7/4	9/8	35/24
2	5/3	29/16	247/144
3	511/288	383/192	3007/1728

Por lo tanto:

$$x \sim 1.77$$

$$y \sim 1.99$$

$$z \sim 1.74$$

4. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

En primer lugar, se calculará el determinante del sistema:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante del sistema es 0, posee infinitas soluciones, una de ellas es la trivial:

$$x = y = z = 0$$

4.3 Espacios Vectoriales y auto-valores/auto-vectores

5. Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores:

$$\{(1,2,3),(2,4,6),(3,6,9)\}$$

El subespacio generado por los vectores es el conjunto de combinaciones lineales, es decir:

$$gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right\} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Planteamos un sistema de ecuaciones con los vectores:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 4 & 6 & y \\ 3 & 6 & 9 & z \end{array}\right)$$

Tratamos de despejar para cada una de las variables:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 0 & 0 & y - 2x \\ 0 & 0 & 0 & z - 3x \end{array}\right)$$

Es decir, el sistema tiene solución únicamente si:

$$y - 2x = 0$$

$$z - 3x = 0$$

Es decir, la forma del espacio generado por los 3 vectores será de la forma:

$$x = libre$$

$$y = 2x$$

$$z = 3x$$

Por lo tanto, la base es el vector de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La dimensión del espacio generado es **1**, ya que la base está conformada por un solo vector

6. Determine los autovalores y autovectores de la matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Para ello, se calculará el determinante de la siguiente expresión:

$$|G - \lambda I| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)^2 - (-2)(-2)$$

$$(5-\lambda)^2-4=0$$

$$\lambda^2-10\lambda+25-4=0$$

$$\lambda^2-10\lambda+21=0$$

Encontramos el valor para λ por medio de la formula general:

$$\lambda=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4(1)(21)}}{2}$$

$$\lambda_1=7$$

$$\lambda_2=3$$

Por lo tanto, los autovalores de G son 7 y 3

Para encontrar el primer autovector sustituimos el valor por λ_1:

$$G-7I=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{bmatrix}$$

Encontramos el espacio nulo

$$\left.\begin{matrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}-2 & -2\\ 0 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$$

Por lo tanto,

$$x=-y$$

Es decir, el primer autovector es:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Para encontrar el segundo autovector sustituimos el valor por λ_2:

$$G-3I=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

Encontramos el espacio nulo

$$\left.\begin{matrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$$

Por lo tanto,

$$x=y$$

Es decir, el segundo autovector es:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Por lo que, los autovectores son:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

4.4 Aplicaciones en IA: Reducción de dimensionalidad

7. Explique cómo el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones.

El Análisis de Componentes Principales (PCA) es una técnica de reducción de dimensionalidad que utiliza conceptos del álgebra lineal para transformar un conjunto de datos con posibles correlaciones en un nuevo conjunto de variables no correlacionadas, llamadas componentes principales.

El PCA utiliza el álgebra lineal para:

- Centrar los datos y calcular la matriz de covarianza.
- Encontrar los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza.
- Seleccionar los autovectores correspondientes a los mayores autovalores para formar un nuevo espacio de menor dimensión.
- Proyectar los datos originales sobre este nuevo espacio.

El resultado es un conjunto de datos con menos dimensiones, pero que conserva la mayor parte de la varianza original. Esto es útil para visualización, eliminación de ruido o reducción de la complejidad en modelos de aprendizaje automático.

8. Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 1:

Calcular:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Paso 2:

Calcular los Autovalores

Para la matriz resultante de $v = A^T A$

$$v = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|v - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 13 - \lambda & 7 \\ 7 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (13 - \lambda)(5 - \lambda) - (7)(7)$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda + 65 - 49$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda + 16$$

Encontramos el valor para λ por medio de la formula general:

$$\lambda = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(16)}}{2}$$

$$\lambda_1 = 9 + \sqrt{65}$$

$$\lambda_2 = 9 - \sqrt{65}$$

Encontramos los autovectores:

Para $\lambda_1 = 9 + \sqrt{65}$

$$\left.\begin{matrix} 4-\sqrt{65} & 7 \\ 7 & -4-\sqrt{65} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\left(4-\sqrt{65}\right)x + 7y = 0$$

$$7x + (-4-\sqrt{65})y = 0$$

Despejamos x de la segunda ecuación:

$$x = \frac{\left(4+\sqrt{65}\right)y}{7}$$

Con el despeje podemos construir el vector resultante:

$$\begin{pmatrix} \frac{\left(4+\sqrt{65}\right)}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora para $\lambda_1 = 9 - \sqrt{65}$

$$\left.\begin{matrix} 4+\sqrt{65} & 7 \\ 7 & -4+\sqrt{65} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\left(4+\sqrt{65}\right)x + 7y = 0$$

$$7x + (-4+\sqrt{65})y = 0$$

Despejamos x de la segunda ecuación:

$$x = \frac{\left(4-\sqrt{65}\right)y}{7}$$

Con el despeje podemos construir el vector resultante:

$$\begin{pmatrix} \frac{\left(4-\sqrt{65}\right)}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz v queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\left(4+\sqrt{65}\right)}{7} & \frac{\left(4-\sqrt{65}\right)}{7} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular los Autovalores

Para la matriz resultante de $u = AA^T$

$$u = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|u - \lambda I| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 8 \\ 8 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(8-\lambda) - (8)(8)$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda + 80 - 64$$

$$= \lambda^2 - 18\lambda + 16$$

Encontramos el valor para λ por medio de la formula general:

$$\lambda = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(16)}}{2}$$

$$\lambda_1 = 9 + \sqrt{65}$$

$$\lambda_2 = 9 - \sqrt{65}$$

Encontramos los autovectores:

Para $\lambda_1 = 9 + \sqrt{65}$

$$\left.\begin{matrix} 1 - \sqrt{65} & 8 \\ 8 & -1 - \sqrt{65} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\left(1 - \sqrt{65}\right)x + 8y = 0$$

$$8x + (-1 - \sqrt{65})y = 0$$

Despejamos x de la segunda ecuación:

$$x = \frac{\left(+1 + \sqrt{65}\right)y}{8}$$

Con el despeje podemos construir el vector resultante:

$$\begin{pmatrix} \frac{\left(1 + \sqrt{65}\right)}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora para $\lambda_1 = 9 - \sqrt{65}$

$$\left.\begin{matrix} 1 + \sqrt{65} & 8 \\ 8 & -1 + \sqrt{65} \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\left(1 + \sqrt{65}\right)x + 8y = 0$$

$$8x + (-1 + \sqrt{65})y = 0$$

Despejamos x de la segunda ecuación:

$$x = \frac{\left(1 - \sqrt{65}\right)y}{8}$$

Con el despeje podemos construir el vector resultante:

$$\begin{pmatrix} \frac{\left(1 - \sqrt{65}\right)}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz u queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\left(+1 + \sqrt{65}\right)}{8} & \frac{\left(1 - \sqrt{65}\right)}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 3

Cálculo de los valores singulares

Se tratan de las raíces cuadradas de los autovalores de v o u

$$\sum = \begin{pmatrix} \sqrt{9-\sqrt{65}} & 0 \\ 0 & \sqrt{9+\sqrt{65}} \end{pmatrix}$$

Paso 4

Escribir el SVD

$$A = u\Sigma v^T$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{65})}{8} & \frac{(1-\sqrt{65})}{8} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{9-\sqrt{65}} & 0 \\ 0 & \sqrt{9+\sqrt{65}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(4+\sqrt{65})}{7} & 1 \\ \frac{(4-\sqrt{65})}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

9. Analice el uso de álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales.

El álgebra lineal es esencial en el aprendizaje profundo porque:

- Permite representar y manipular datos de manera eficiente.
- Facilita la implementación de operaciones en capas de redes neuronales.
- Es clave para el cálculo de gradientes y la optimización de parámetros.

Sin álgebra lineal, el entrenamiento y la operación de redes neuronales no serían posibles.

10. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA.

Los espacios vectoriales son un concepto fundamental en matemáticas y tienen un impacto profundo en la representación de datos en Inteligencia Artificial (IA). Proporcionan un marco matemático para organizar, manipular y analizar datos de manera eficiente.

En IA, los datos (imágenes, texto, sonido, etc.) se representan como vectores en un espacio vectorial. Cada dimensión del vector corresponde a una característica o atributo del dato. Por ejemplo:

Una imagen puede representarse como un vector donde cada componente es el valor de un píxel.

Un documento de texto puede representarse como un vector en un espacio donde cada dimensión corresponde a la frecuencia de una palabra.

Esta representación permite aplicar operaciones matemáticas (como suma, multiplicación, proyección) para analizar y procesar los datos.