Algebra Lineal aplicada a Investigación de Operaciones

4.1 Repaso de sistemas de ecuaciones lineales

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ -2x + 4y + z = -3 \\ 5x + 2y - 3z = 10 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes queda de la forma:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 10 \end{array}$$

A continuación, realizamos operaciones elementales para encontrar los valores para cada una de las variables:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 2/3 & 7/3 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 10/3 & 7/3 & 5/3 \\ 0 & 11/3 & -19/3 & -5/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 7/10 & 1/2 \\ 0 & 11/3 & -19/3 & -5/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/10 & 3/2 \\ 0 & 1 & 7/10 & 1/2 \\ 0 & 0 & -89/10 & -7/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/10 & 5/2 \\ 0 & 1 & 7/10 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 35/89 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 191/89 \\ 0 & 1 & 0 & 20/89 \\ 0 & 0 & 1 & 35/89 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$x = 192/89$$

$$y = 20/89$$

$$z = 35/89$$

2. Determine todas las soluciones del siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

En primer lugar, se calculará el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Para facilitar los cálculos, se realizarán operaciones elementales para simplificar el cálculo del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Multiplicamos la columna 1 por (1) y se la restamos a la segunda columna y sumamos a la tercera

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = [(-3)(1) - (5)(5)]$$

$$[(-3) - (25)]$$

$$[-28]$$

$$-28$$

Como el determinante del sistema es diferente de 0

La única solución es la trivial:

$$x = y = z = 0$$

4.2 Matrices, determinantes y rango

3. Encuentra la inversa de la matriz si existe:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & -7/2 \\ 0 & 11/2 & -7/2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 11/2 & -7/2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 11/2 & -7/2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 35 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -11 & 1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4/35 & -11/35 & 1/35 \end{matrix} \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 23/70 & 33/70 & -3/70 \\ -1/5 & -1/5 & 1/5 \\ 4/35 & -11/35 & 1/35 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 8/35 & 13/35 & 2/35 \\ -1/5 & -1/5 & 1/5 \\ 4/35 & -11/35 & 1/35 \end{matrix}$$

Por lo tanto, la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 8/35 & 13/35 & 2/35 \\ -1/5 & -1/5 & 1/5 \\ 4/35 & -11/35 & 1/35 \end{bmatrix}$$

4. Determine si la siguiente matriz es ortogonal:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Una matriz es ortogonal si cumple la siguiente condición:

$$B^T B = I$$

Por lo tanto:

$$B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz es ortogonal

4.3 Propiedades de matrices relevantes para programación lineal

5. Explique la importancia de las matrices en la optimización lineal y resuelva un problema de transporte con matrices.

Las matrices en optimización lineal permiten representar problemas de forma compacta y aplicar métodos algorítmicos eficientes para encontrar soluciones óptimas. Su papel es esencial en diversas disciplinas, desde economía hasta inteligencia artificial.

Ejemplo:

Una empresa tiene 2 fábricas y 3 almacenes. La tabla de costos de transporte por unidad es la siguiente:

	Almacén A	Almacén B	Almacén C	Almacén D
Fábrica 1	8	6	10	35
Fábrica 2	9	12	7	50

La demanda de cada almacén es:

- **Almacén A:** 20 unidades
- **Almacén B:** 30 unidades
- **Almacén C:** 35 unidades

Realizamos el modelo matemático del problema:

$$\min Z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 8x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}$$

Sujeto a:

Oferta

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 35$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 50$$

Demanda

$$x_{11} + x_{21} = 20$$

$$x_{12} + x_{22} = 30$$

$$x_{13} + x_{23} = 35$$

Pero el problema nos indica usar matrices para resolverlo, por lo que definiremos las matrices:

Costos

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

Oferta

$$O = \begin{bmatrix} 35 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Demanda

$$D = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 35 \end{bmatrix}$$

A continuación, aplicaremos el método de la esquina Noroeste

Iniciamos en la celda (1,1) de la matriz de costos e intentamos asignar la mayor cantidad posible sin exceder la oferta o la demanda.

1. Asignamos 20 unidades a x_{11} $(Fabrica\ 1 \rightarrow Almacen\ A)$
   a. La demanda de A se satisface: 0 Restante
   b. La oferta de F1 disminuye a 15
2. Asignamos 15 unidades a x_{12} $(Fabrica\ 1 \rightarrow Almacen\ B)$
   a. La oferta de F1 se agota: 0 Restante
   b. La demanda de B disminuye a 15
3. Asignamos 15 unidades a x_{22} $(Fabrica\ 2 \rightarrow Almacen\ B)$
   a. La demanda de B se satisface: 0 Restante
   b. La oferta de F2 disminuye a 35
4. Asignamos 35 unidades a x_{23} $(Fabrica\ 2 \rightarrow Almacen\ C)$
   a. La demanda de C se satisface: 0 Restante
   b. La oferta de F2 se agota: 0 Restante

Por lo que la solución encontrada es:

$$X = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & 35 \end{bmatrix}$$

Con un costo total de:

$$Z = (20)(8) + (15)(6) + (15)(12) + (35)(7)$$

$$Z = 160 + 90 + 180 + 245$$

$$Z = 675$$

6. Determine el rango de la siguiente matriz y explique su significado en un contexto de programación lineal:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

El rango de una matriz se define como:

$$\rho(B) = dim\ Im(B)$$

La imagen de B esta denotada por:

$$Im(B) = \{y \in R^m : Ax = y\ para\ alguna\ x \in R^m\}$$

Para obtener la imagen, reducimos por columnas la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La columna 1, solo cuenta con un pivote, por lo que , las columnas 2,3 y 4 son combinaciones lineales de la columna 1.

La base de la imagen es:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

La dimensión es 1, por lo que el rango es 1

$$\rho(B) = 1$$

4.4 Problemas adicionales

7. Encuentre la factorización LU de la siguiente matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Hacemos cero debajo del primer pivote:

Para ello, multiplicamos por 3/2 y restamos en la segunda fila

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Construimos L con los multiplicadores

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

8. Resuelva el siguiente sistema mediante factorización LU:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 2x + 3y + 3z = 14 \\ y + 4z = 8 \end{cases}$$

En primer lugar, se construirá la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Se calculará la factorización LU

Hacemos cero debajo del primer pivote, al multiplicar por 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Hacemos cero debajo del segundo pivote, al multiplicar por -1:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Construimos L con los factores:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x' = 6}$$

$$2x' + y' = 14 \rightarrow 2(6) + y' = 14 \rightarrow \boldsymbol{y' = 2}$$

$$-y' + z' = 8 \rightarrow -(2) + z' = 8 \rightarrow \boldsymbol{z' = 10}$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$5z = 10 \rightarrow \boldsymbol{z = 2}$$

$$-y + z = 2 \rightarrow -y + (2) = 2 \rightarrow \boldsymbol{y = 0}$$

$$x + 2y + z = 6 \rightarrow x + 2(0) + 2 = 6 \rightarrow \boldsymbol{x = 4}$$

9. Determine si la matriz siguiente es diagonizable y justifique su respuesta:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para saber si es diagonizable calculamos los valores propios resolviendo:

$$det(D - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Encontramos su único autovector:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = libre$$

$$2y = 0$$

Por lo tanto, su auto vector es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como solo hay un vector propio independiente, la matriz no es diagonizable

10. Explique y aplique el método de Jacobi para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 10x + 2y - z = 27 \\ -3x - 6y + 2z = -61 \\ x + y + 5z = -21 \end{cases}$$

Primero se despeja cada variable de las ecuaciones originales:

$$x = \frac{1}{10}(27 - 2y + z)$$

$$y = -\frac{1}{6}(-61 + 3x - 2z)$$

$$z = \frac{1}{5}(-21 - x - y)$$

Reescribimos el nuevo sistema de ecuaciones en la forma:

$$X = Tx + c$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 1/10 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \\ -1/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27/10 \\ 61/6 \\ -21/5 \end{pmatrix}$$

Posteriormente calculamos los valores de la iteración 1:

Suponiendo que $x, y, z = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 1/10 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \\ -1/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27/10 \\ 61/6 \\ -21/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/10 \\ 61/6 \\ -21/5 \end{pmatrix}$$

$$x = 27/10$$

$$y = 61/6$$

$$z = -21/5$$

Para la iteración 2:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 1/10 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \\ -1/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27/10 \\ 61/6 \\ -21/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27/10 \\ 61/6 \\ -21/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -184/75 \\ -11/4 \\ -193/75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27/10 \\ 61/6 \\ -21/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/150 \\ 89/12 \\ -508/75 \end{pmatrix}$$

$$x = 37/150$$

$$y = 89/12$$

$$z = -508/75$$

Para la iteración 3:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 1/10 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \\ -1/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37/150 \\ 89/12 \\ -508/75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27/10 \\ 61/6 \\ -21/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3241/1500 \\ -2143/900 \\ -2299/1500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27/10 \\ 61/6 \\ -21/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 809/1500 \\ 7007/900 \\ -8599/1500 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{809}{1500} \approx 0.539$$

$$y = \frac{7007}{900} \approx 7.78$$

$$z = -\frac{8599}{1500} \approx -5.73$$