Investigación de operaciones

Actividad 3: Modelado matemático

Instrucciones: Para cada problema, identifique los parámetros, las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones. además, resuelva lo solicitado en cada enunciado y entregue sus respuestas en un PDF organizado. Utilizar Python y Scipy. Optimice para programar los modelos y encontrar el óptimo

1. Un compromiso de negocios requiere 5 semanas de traslado continuo entre Fayetteville (FYV) y Denver (DEN). Los viajes se realizan saliendo de Fayetteville los lunes y regresando los miércoles. Un boleto redondo regular cuesta $400, pero hay un descuento del 20% si el viaje cubre un fin de semana. Un boleto sencillo cuesta el 75% del precio de un boleto regular. Existen tres alternativas conocidas para minimizar el costo del traslado:

- Comprar cinco boletos regulares FYV-DEN-FYV.
- Comprar un boleto FYV-DEN, cuatro boletos DEN-FYV-DEN que incluyan fines de semana, y uno DEN-FYV.
- Comprar un boleto FYV-DEN-FYV para la primera semana y última semana, y cuatro boletos DEN-FYV-DEN para los viajes restantes.
- Identifique una cuarta alternativa factible que cumpla con las restricciones del problema.

Parámetros

La información que tenemos del problema es:

El precio de un boleto regular

$$p_R = 400$$

El precio de un boleto sencillo

$$p_S = 0.75p_R = 300$$

El boleto de un fin de semana

$$p_F = 0.80p_R = 320$$

Variables de decisión

Podemos elegir entre los 3 tipos de boletos cada que viajemos:

Cada una de las siguientes variables nos indicaran la cantidad de boletos que se compraran.

$$R = Cantidad\ de\ boletos\ Regulares$$

$$S = \ Cantidad\ de\ boletos\ Sencillos$$

$$F = Cantidad\ de\ boletos\ que\ incluye\ los\ fines\ de\ semana$$

Pero nos conviene especificar no solo la clase de boleto a comprar, sino, también el origen y destino:

$$FDF = Boleto\ Regular\ F - D - F$$

$$DFD = Boleto\ Regular\ D - F - D$$

$$FD = Boleto\ Sencillo\ F - D$$

$$DF = Boleto\ Sencillo\ D - F$$

$$FDF_S = Boleto\ Fin\ de\ Semana\ F - D - F$$

$$DFD_S = Boleto\ Fin\ de\ Semana\ D - F - D$$

Función objetivo

Nuestro objetivo será minimizar el precio final

$$P = 400FDF + 400DFD + 300FD + 300DF + 320FDF_S + 320DFD_S$$

Restricciones

Aquí tendremos que establecer distintas restricciones para asegurarnos que estamos modelando de forma correcta el mundo real y los requerimientos del problema.

En primer lugar, debemos de cumplir con la cantidad de viajes:

$$2FDF + 2DFD + FD + DF + 2FDF_S + 2DFD_S = 10$$

Aquí estamos asegurando que se tengan 10 boletos en total, se les da un valor de 2 a los boletos redondos

Posteriormente se tiene que cumplir la dirección de los viajes, es decir. Si hay un viaje sencillo de F-D, es necesario tener otro viaje de regreso D-F

$$FD = DF$$

Tienen que existir 5 boletos que tengan a D, esto se puede representar por medio de la siguiente restricción, se puede leer como que todos los siguientes boletos te llevan a D

$$FDF + DFD + FD + FDF_S + DFD_S = 5$$

Misma situación con F

$$FDF + DFD + DF + FDF_S + DFD_S = 5$$

Como salimos de F, debemos de asegurarnos que por lo menos existe un boleto con origen en dicho destino:

$$FDF + FD + FDF_S \geq 1$$

Restricciones faltantes en el modelo:

Con las restricciones que se plantearon, el modelo matemático se encuentra incompleto, ya que no se está considerando la naturaleza de la problemática de salir los lunes y regresar los miércoles.

Ya que, al realizar este problema por medio de programación lineal, la solución óptima será comprar todos los boletos en fin de semana.

Modelo Final:

Minimizar

$$P = 400FDF + 400DFD + 300FD + 300DF + 320FDF_S + 320DFD_S$$

Sujeto a:

$$2FDF + 2DFD + FD + DF + 2FDF_S + 2DFD_S = 10$$

$$FD = DF$$

$$FDF + DFD + FD + FDF_S + DFD_S = 5$$

$$FDF + DFD + DF + FDF_S + DFD_S = 5$$

$$FDF + FD + FDF_S \geq 1$$

$$FDF, DFD, FD, DF, FDF_S, DFD_S \geq 0$$

Al pasar este modelo a Python se tiene de resultado:

```
PROBLEMS    OUTPUT    DEBUG CONSOLE    TERMINAL    PORTS    SQL CONSOLE

iones/AMPL/Py/VirtualEnv/Scripts/python.exe" "e:/Documentos/UANL/6/Investigacion de Operaciones/AMPL/Py/Probl
ema1.py"
Solución encontrada:
Valores de las variables: [ 0.  0. -0.  0.  1.  4.]
Costo total mínimo: 1600.0
PS E:\Documentos\UANL\6\Investigacion de Operaciones\AMPL\Py>
```

Es decir:

$$FDF_S = 1$$

$$DFD_S = 4$$

Se trata de la alternativa numero 3 especificada en el enunciado

2. Un trozo de alambre de longitud L pulgadas debe utilizarse para formar un rectángulo con área máxima. El ancho y la altura del rectángulo están relacionados por la restricción:

$$2(w + h) = L$$

Donde w es el ancho y h la altura, ambas en pulgadas. Además, el ancho y la altura deben ser valores no negativos.

(a) Identifique dos soluciones factibles, es decir, dos combinaciones de w y h que satisfagan las restricciones.

(b) Indique cual de estas soluciones es mejor con base en el área del rectángulo.

Parámetros

El único parámetro será la Longitud del trozo de Alambre

$$L = Longitud\ del\ Trozo\ de\ Alambre$$

Variables de decisión

Las variables de decisión serán las medidas del rectángulo:

$$h = Altura\ del\ rectangulo$$

$$w = ancho\ del\ rectangulo$$

Función objetivo

La función objetivo es maximizar el área del rectángulo, recordando que el área de un rectángulo está representada por el producto de sus 2 dimensiones, por lo tanto, la función objetivo es:

Maximizar

$$A = hw$$

Restricciones

Aquí solamente tenemos la restricción que relaciona el perímetro del rectángulo con sus lados

$$2(w + h) = L$$

Por lo que el modelo matemático final es:

Maximizar

$$A = hw$$

Sujeto a

$$2(w + h) = L$$

$$w, h \geq 0$$

Al pasar este problema a un script de Python, se estableció un valor constante a L (100) para poder evaluar correctamente las restricciones, el resultado es:

```
PS E:\Documentos\UANL\6\Investigacion de Operaciones\AMPL\Py> & "e:/Documentos/UANL/6/Investigacion de Opera
iones/AMPL/Py/VirtualEnv/Scripts/python.exe" "e:/Documentos/UANL/6/Investigacion de Operaciones/AMPL/Py/Prob
ema2.py"
h (altura): 25.00
w (ancho): 25.00
Área máxima: 625.00
PS E:\Documentos\UANL\6\Investigacion de Operaciones\AMPL\Py>
```

3. Determine la solución óptima del problema del rectángulo (Sugerencia: Aplique la restricción para expresar la función objetivo respecto de una variable, luego utilice cálculo diferencial).

Como se puede apreciar en el ejemplo anterior, la solución optima es que ambos lados tengan las mismas dimensiones, pero para poder refutar esta afirmación es necesario:

Despejar w de la restricción

$$2(w + h) = L$$

$$w + h = \frac{L}{2}$$

$$w = \frac{L}{2} - h$$

Sustituimos en la función del área:

$$A = hw$$

$$h(\frac{L}{2} - h)$$

$$\frac{Lh}{2} - h^2$$

Derivamos la función

$$\frac{dA}{dh} = \frac{L}{2} - 2h$$

Igualamos a cero la derivada para encontrar su punto critico

$$\frac{L}{2} - 2h = 0$$

Despejamos h

$$2h = \frac{L}{2}$$

$$h = \frac{L}{4}$$

Como $w = \frac{L}{2} - h$, sustituimos:

$$w = \frac{L}{2} - \frac{L}{4} = \frac{L}{4}$$

Por lo tanto:

$$w = h$$

Es decir, para maximizar el área del rectángulo, la altura y el ancho deben ser iguales, es decir, debe ser un **cuadrado**