Investigación de operaciones

Actividad 2: Modelado matemático

Instrucciones: Para cada problema, identifique los parámetros, las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones. además, resuelva lo solicitado en cada enunciado y entregue sus respuestas en un PDF organizado. Utilizar Python y Scipy. Optimice para programar los modelos y encontrar el óptimo

4. Cuatro personas (Amy, Carlos, John y Kelly) desean cruzar un río utilizando una canoa que sólo puede llevar a dos personas a la vez. Amy puede remar en 1 minuto, Carlos en 2 minutos, John en 5 minutos y Kelly en 10 minutos. Si dos personas cruzan juntas, el tiempo está determinado por la persona más lenta.

- Identifique al menos dos planes factibles para cruzar el rio.
- Defina el criterio para evaluar las alternativas.
- Determine el menor tiempo necesario para que las cuatro personas crucen el rio.

Lenguaje Coloquial

Para hacer más claro el análisis del problema se planteará primero por medio del lenguaje coloquial

Información del Problema

Tiempo que tarda en cruzar el rio cada persona.

Alternativas

Combinaciones de todas las personas para poder cruzar el rio con la canoa:

- Orden en que se subirán en la canoa.??
- Quien se baja y quien regresa

Medida de desempeño

Hacer el menor tiempo posible para que todas las personas crucen el rio.

Limitantes

Capacidad máxima de la Canoa

Lenguaje Matemático

Parámetros

Será el tiempo en cruzar el rio en minutos para cada integrante:

$$T_A = 1$$

$$T_J = 2$$

$$T_N = 5$$

$$T_K = 10$$

Variables de decisión

Podemos hacer uso de variables binarias para representar las combinaciones de todas las 4 personas en 2 lugares, donde:

$1 = Cruzaron\ juntos$

$0 = No\ cruzaron\ juntos$

$$x_{AJ}: \text{Amy y Carlos cruzaron juntos}$$

x_{AN}: Amy y John cruzaron juntos

x_{AK}: Amy y Kelly cruzaron juntos

x_{JN}: Carlos y John cruzaron juntos

x_{JK}: Carlos y Kelly cruzaron juntos

x_{Nk}: John y Kelly cruzaron juntos

Así como también, hacer uso de otras 4 variables que representan la persona que va a regresar (estas no son binarias, ya que la misma persona puede regresar más de una vez)

r_A: Regresó Amy

r_J: Regresó Carlos

r_N: Regresó John

r_K: Regresó Kelly

Por lo tanto, cuando se resuelva el problema, nos deberán de dar 3 variables 1 y otras 3 variables 0, especificándonos las combinaciones optimas

Función objetivo

Nuestro objetivo es minimizar el tiempo que tardaran las personas en cruzar el rio, es aquí, donde es necesario calcular el tiempo que nos tomaría cruzar con cada combinación de personas, eligiendo el tiempo mayor entre ambas personas que cruzan juntas:

$$T_{AJ} = 2$$

$$T_{AN} = 5$$

$$T_{AK} = 10$$

$$T_{JN} = 5$$

$$T_{JK} = 10$$

$$T_{Nk} = 10$$

También, será necesario tomar en cuenta el tiempo de regreso para cada viaje, por lo tanto, la función objetivo estará compuesta de 2 sumatorias:

$$Minimizar\ T_T = \sum_{i,j \in \{A,J,N,K\}} T_{ij} x_{ij} + \sum_{i,j \in \{A,J,N,K\}} T_i r_i$$

Donde la primera sumatoria representa el tiempo que tardan las personas en cruzar juntas, y la segunda el tiempo que tardan en regresar.

Restricciones

Las restricciones del problema son algo complejas, ya que hay que considerar varios factores que no se encuentran de forma explícita en el enunciado.

Serán necesarios 3 viajes en pareja para que todas las personas se encuentren en el otro lado:

$$x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK} + x_{JN} + x_{JK} + x_{Nk} = 3$$

Serán necesarios 2 viajes de regreso para que todas las personas se encuentren en el otro lado:

$$r_A + r_J + r_N + r_K = 2$$

Si una persona regresa, significa que está persona cruzo previamente, por ejemplo, si Amy regresó, significa que cruzo con Carlos, John o Kelly previamente, por lo tanto, las siguientes restricciones deben de cumplirse:

$$r_A \leq x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK}$$

$$r_J \leq x_{AJ} + x_{JN} + x_{JK}$$

$$r_N \leq x_{AN} + x_{JN} + x_{NK}$$

$$r_K \leq x_{AK} + x_{JK} + x_{NK}$$

Si una pareja cruza junta, por lo menos uno de ellos debería de regresar, por ejemplo, si Amy y Carlos Cruzan, uno de ellos debe de regresar, estas restricciones se expresan:

$$x_{AJ} \leq r_A + r_J$$

$$x_{AN} \leq r_A + r_N$$

$$x_{AK} \leq r_A + r_K$$

$$x_{JN} \leq r_J + r_N$$

$$x_{JK} \leq r_J + r_K$$

$$x_{NK} \leq r_N + r_K$$

Modelo matemático V1:

$$Minimizar\ T_T = \sum_{i,j \in \{A,J,N,K\}} T_{ij} x_{ij} + \sum_{i,j \in \{A,J,N,K\}} T_i r_i$$

S.A.

$$x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK} + x_{JN} + x_{JK} + x_{Nk} = 3$$

$$r_A + r_J + r_N + r_K = 2$$

$$r_A \leq x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK}$$

$$r_J \leq x_{AJ} + x_{JN} + x_{JK}$$

$$r_N \leq x_{AN} + x_{JN} + x_{NK}$$

$$r_K \leq x_{AK} + x_{JK} + x_{NK}$$

$$x_{AJ} \leq r_A + r_J$$

$$x_{AN} \leq r_A + r_N$$

$$x_{AK} \leq r_A + r_K$$

$$x_{JN} \leq r_J + r_N$$

$$x_{JK} \leq r_J + r_K$$

$$x_{NK} \leq r_N + r_K$$

$$x_{AJ}, x_{AN}, x_{AK}, x_{JN}, x_{JK}, x_{Nk} \in \{0,1\}$$

$$r_A, r_J, r_N, r_K \geq 0$$

NOTAS:

Después de pasar este modelo a un script de Python, el resultado fue ignorar a Kelly, el resultado obtenido es:

Valores de las variables: [1. 1. 0. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0.]

Tiempo total mínimo: 14.0

$$x_{AJ} = 1$$

$$x_{AN} = 1$$

$$x_{JN} = 1$$

$$r_A = 1$$

$$r_J = 1$$

Aunque, también es curioso que r_A no sea 2, ya que al usar a Carlos estamos desperdiciando 1 minuto

Por lo que hace a falta hacer uso de varias restricciones adicionales, las cuales nos aseguran que todas las personas se encuentren del otro lado, ya que la restricción de hacer 3 viajes no aseguran esta condición:

$$x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK} \geq 1$$

$$x_{AJ} + x_{JN} + x_{JK} \geq 1$$

$$x_{AN} + x_{JN} + x_{NK} \geq 1$$

$$x_{AK} + x_{JK} + x_{NK} \geq 1$$

Agregando estas restricciones al modelo el resultado obtenido es:

```
ts/python.exe" "e:/Documentos/UANL/6/Investigacion de Operaciones/AMPL/Py/Problema4.py"
Solución encontrada:
Valores de las variables: [ 1.  1.  1. -0. -0. -0.  2.  0.  0.  0.]
Tiempo total mínimo: 19.0
PS E:\Documentos\UANL\6\Investigacion de Operaciones\AMPL\Py> ^C
```

Es decir:

$$x_{AJ} = 1$$

$$x_{AN} = 1$$

$$x_{AK} = 1$$

$$r_A = 2$$

Es decir, usaremos a Amy todo el tiempo, para transportar a sus compañeros.

Los resultados obtenidos son los esperados, por lo que podemos concluir que el modelo matemático final es:

Modelo matemático V2:

$$Minimizar\ T_T = \sum_{i,j \in \{A,J,N,K\}} T_{ij} x_{ij} + \sum_{i,j \in \{A,J,N,K\}} T_i r_i$$

S.A.

Establecen la cantidad de viajes y regresos a realizar

$$x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK} + x_{JN} + x_{JK} + x_{Nk} = 3$$

$$r_A + r_J + r_N + r_K = 2$$

Establecen que una persona no puede regresar, a menos que haya cruzado antes

$$r_A \leq x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK}$$

$$r_J \leq x_{AJ} + x_{JN} + x_{JK}$$

$$r_N \leq x_{AN} + x_{JN} + x_{NK}$$

$$r_K \leq x_{AK} + x_{JK} + x_{NK}$$

Establecen que al menos una persona debe de regresar

$$x_{AJ} \leq r_A + r_J$$

$$x_{AN} \leq r_A + r_N$$

$$x_{AK} \leq r_A + r_K$$

$$x_{JN} \leq r_J + r_N$$

$$x_{JK} \leq r_J + r_K$$

$$x_{NK} \leq r_N + r_K$$

Establecen que todas las personas se encuentren del otro lado del rio

$$x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK} \geq 1$$

$$x_{AJ} + x_{JN} + x_{JK} \geq 1$$

$$x_{AN} + x_{JN} + x_{NK} \geq 1$$

$$x_{AK} + x_{JK} + x_{NK} \geq 1$$

$$x_{AJ}, x_{AN}, x_{AK}, x_{JN}, x_{JK}, x_{Nk} \geq 0$$

$$r_A, r_J, r_N, r_K \geq 0$$

Corrección

Se encontró una solución con un tiempo menor:

Amy y Jim cruzan el río: Tiempo = 2 minutos (por Jim).

Amy regresa sola: Tiempo = 1 minuto.

John y Kelly cruzan el río: Tiempo = 10 minutos (por Kelly).

Jim regresa solo: Tiempo = 2 minutos.

Amy y Jim cruzan el río: Tiempo = 2 minutos.

Tiempo total: 2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17 minutos.

Valor de las variables de decisión:

$$x_{AJ} = 2$$

$$x_{NK} = 1$$

$$r_A = 1$$

$$r_J = 1$$

Problemas del modelo propuesto:

Las variables x_{ij} son binarias, por lo que no se contempla el caso de cruzar 2 veces en pareja, por lo que estas variables se convertirán en variables discretas las cuales tendrán un valor mayor o igual a 0

Siguiendo esta misma lógica, nuestras restricciones que establecen que al menos una persona debe de regresar, no nos permitirían llegar a esta solución óptima, ya que, por ejemplo, la siguiente restricción no se cumple

$$x_{NK} \leq r_N + r_K$$

John y Kelly cruzan juntos, pero eso no quiere decir que uno de ellos se regresa, ya que se regresará Jim, por lo que estas restricciones se tienen que eliminar del modelo final.

Corrección del Modelo

Imagina una variable llamada "Stay", la cual almacenará la cantidad de veces que la persona se quedó del otro lado del rio:

$$S_A = x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK}$$

$$S_J = x_{AJ} + x_{JN} + x_{JK}$$

$$S_N = x_{AN} + x_{JN} + x_{NK}$$

$$S_K = x_{AK} + x_{JK} + x_{NK}$$

Por lo pronto, esta variable, contendrá la cantidad de viajes de ida que una persona realizará

Pero, si la persona hace un viaje de regreso, significa que ya no se encuentra del otro lado, por lo que "Stay", debería de ser cero si la persona viene y regresa, para poder representar esto, restaremos los regresos a cada una de las variables.

$$S_A = x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK} - r_A$$

$$S_J = x_{AJ} + x_{JN} + x_{JK} - r_J$$

$$S_N = x_{AN} + x_{JN} + x_{NK} - r_N$$

$$S_K = x_{AK} + x_{JK} + x_{NK} - r_K$$

Nuestro objetivo final, es que todas las personas se encuentren del otro lado, por lo que el valor de Stay para todos debe de ser 1, así que podemos representar S_i por la constante 1

$$x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK} - r_A = 1$$

$$x_{AJ} + x_{JN} + x_{JK} - r_J = 1$$

$$x_{AN} + x_{JN} + x_{NK} - r_N = 1$$

$$x_{AK} + x_{JK} + x_{NK} - r_K = 1$$

Estas restricciones nos aseguraran que después de realizar todos sus viajes de ida y sus regresos, la persona i, se encontrará del otro lado.

Estas restricciones, eliminan también las restricciones que:

Establecen que una persona no puede regresar, a menos que haya cruzado antes

Establecen que todas las personas se encuentren del otro lado del rio

Por lo que nuestro **modelo matemático final** se simplifico a:

$$Minimizar\ T_T = \sum_{i,j \in \{A,J,N,K\}} T_{ij} x_{ij} + \sum_{i,j \in \{A,J,N,K\}} T_i r_i$$

Sujeto a:

$$x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK} + x_{JN} + x_{JK} + x_{Nk} = 3$$

$$r_A + r_J + r_N + r_K = 2$$

$$x_{AJ} + x_{AN} + x_{AK} - r_A = 1$$

$$x_{AJ} + x_{JN} + x_{JK} - r_J = 1$$

$$x_{AN} + x_{JN} + x_{NK} - r_N = 1$$

$$x_{AK} + x_{JK} + x_{NK} - r_K = 1$$

$$x_{AJ}, x_{AN}, x_{AK}, x_{JN}, x_{JK}, x_{Nk} \geq 0$$

$$r_A, r_J, r_N, r_K \geq 0$$

Al pasar este modelo a un script de Python se tiene el resultado optimo esperado:

```
PS E:\Documentos\UANL\6\Investigacion de Operaciones\AMPL\Py> & "e:/Documentos/UANL/6/Investigacion de Operac
iones/AMPL/Py/VirtualEnv/Scripts/python.exe" "e:/Documentos/UANL/6/Investigacion de Operaciones/AMPL/Py/Probl
ema4.py"
Solución encontrada:
Valores de las variables: [ 2. -0.  0.  0.  0.  1.  1.  1.  0.  0.]
Tiempo total mínimo: 17.0
PS E:\Documentos\UANL\6\Investigacion de Operaciones\AMPL\Py> & "e:/Documentos/UANL/6/Investigacion de Operac
```

Recordando que el orden de los resultados de la lista final es: $x_{AJ},\ x_{AN},\ x_{AK},\ x_{JN},\ x_{JK},\ x_{Nk},\ r_A,\ r_J,\ r_N,\ r_K$

El resultado final es:

$$x_{AJ} = 2$$

$$x_{NK} = 1$$

$$r_A = 1$$

$$r_J = 1$$

5. En un juego de béisbol, Carlos es el lanzador y Joe es el bateador. Suponga que Carlos puede lanzar una bola rápida o una curva al azar. Si Joe predice correctamente una curva, puede mantener un promedio de bateo de .500; de otra manera, si Carlos lanza una curva y Joe está preparado para una bola rápida, su promedio de bateo se mantiene por debajo de .200. Por otra parte, si Joe predice correctamente una bola rápida, mantiene un promedio de bateo de .300, de lo contrario su promedio es de sólo .100.

- Defina las alternativas para este caso.
- Determine la función objetivo para el problema, y describa en qué difiere de la optimización común (maximización o minimización) de un criterio.

Lenguaje Coloquial

Información del Problema

Carlos

- Es el lanzador

Joe

- Es el bateador

Alternativas

Carlos

- Lanzar una bola rápida.
- Lanzar una bola curva.

Joe

- Predecir una bola rápida.
- Predecir una bola curva.

Medida de desempeño

Carlos

Que Joe no logré batear la bola

Joe

Predecir la bola de Carlos

Limitantes

No cuenta con limitantes específicas del problema.

Lenguaje matemático

Parámetros

La información que nos proporciona el problema es:

$$Promedio\ de\ bolas\ \boldsymbol{curvas}\ predecidas\ por\ Joe\ y\ que\ logra\ batear: p_{CP} = 0.500$$

$$Promedio\ de\ bolas\ \boldsymbol{curvas}\ NO\ predecidas\ por\ Joe\ y\ que\ logra\ batear: p_{CN} = 0.200$$

$$Promedio\ de\ bolas\ \boldsymbol{rapidas}\ predecidas\ por\ Joe\ y\ que\ logra\ batear: p_{RP} = 0.300$$

$$Promedio\ de\ bolas\ \boldsymbol{rapidas}\ NO\ predecidas\ por\ Joe\ y\ que\ logra\ batear: p_{RN} = 0.100$$

Variables de decisión

Aquí las variables de decisión serán las probabilidades de ambos jugadores de tomar sus decisiones:

Carlos

- $C_R = Probabilidad\ de\ que\ Carlos\ lance\ una\ bola\ rapida$
- $C_C = Probabilidad\ de\ que\ Carlos\ lance\ una\ bola\ curva$

Joe

- $J_R = Probabilidad\ de\ Joe\ de\ predecir\ la\ bola\ rapida$
- $J_C = Probabilidad\ de\ Joe\ de\ predecir\ la\ bola\ curva$

Función objetivo

Por medio de la siguiente tabla se ejemplificarán todos los casos que se pueden presentar

	Lanzar Bola Rápida	Lanzar Bola Curva
Predecir Bola Rápida	$J_R C_R p_{RP}$	$J_R C_C p_{CN}$
Predecir Bola Curva	$J_C C_R p_{RN}$	$J_C C_C p_{CP}$

Como se puede apreciar, cada caso cuenta con 3 términos:

La predicción de Joe

El lanzamiento de Carlos

El promedio éxito de bateo de Joe para el caso presentado

Al sumar los 4 términos obtenemos lo que sería la función objetivo

$$P = J_R C_R p_{RP} + J_R C_C p_{RN} + J_R C_C p_{CN} + J_C C_C p_{CP}$$

Al sustituir en la función con los promedios otorgados se tiene:

$$P = J_R C_R (0.3) + J_R C_C (0.1) + J_C C_R (0.2) + J_C C_C (0.5)$$

Pero al tratarse de probabilidades, se tiene que cumplir lo siguiente para cada una de las variables de decisión:

- $C_R = 1 - C_C$
- $J_R = 1 - J_C$

Al sustituir este valor en la función objetivo:

$$P = (1 - J_C)(1 - C_C)(0.3) + (1 - J_C) C_C (0.1) + J_C (1 - C_C)(0.2) + J_C C_C (0.5)$$

Al desarrollar y agrupar se tiene:

$$P = (1 - C_C - J_C + J_C C_C)(0.3) + (C_C - J_C C_C)(0.1) + (J_C - J_C C_C)(0.2) + J_C C_C (0.5)$$

$$P = 0.3 - 0.3C_C - 0.3J_C + 0.3J_C C_C + 0.1C_C - 0.1J_C C_C + 0.2J_C - 0.2J_C C_C + J_C C_C (0.5)$$

$$P = 0.3 - 0.2C_C - 0.1J_C + J_C C_C (0.5)$$

En este caso se tienen 2 principales objetivos:

Para Carlos: Su objetivo es hacer que Joe falle la mayor cantidad de lanzamientos

$Minimizar$

$$P = 0.3 - 0.2C_C - 0.1J_C + J_C C_C (0.5)$$

Para Joe: Su objetivo es predecir la mayor cantidad de lanzamientos

$Maximizar$

$$P = 0.3 - 0.2C_C - 0.1J_C + J_C C_C(0.5)$$

Restricciones

La probabilidad de Carlos y Joe de lanzar y predecir respectivamente tienen que encontrarse entre 0 y 1:

$$0 \geq C_C \geq 1$$

$$0 \geq J_C \geq 1$$

Es decir, el modelo matemático final quedará te la forma:

$$\max_{J_C} \min_{C_C}(0.3 - 0.2C_C - 0.1J_C + J_C C_C(0.5))$$

$$0 \geq C_C \geq 1$$

$$0 \geq J_C \geq 1$$

Valor optimo:

Es posible encontrar el valor optimo por medio del uso de derivadas parciales

El equilibrio ocurre cuando ambos jugadores están indiferentes a cambiar sus estrategias, es decir donde sus derivadas parciales respecto a $J_C \; y \; C_C$ se anulan:

$$\frac{\partial P}{\partial\, C_C} = -0.2 + 0.5J_C = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial\, J_C} = -0.1 + 0.5C_C = 0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se tiene:

$$J_C = 0.4$$

$$C_C = 0.2$$

Al ejecutar un script te Python usando estos valores como valores iniciales se tiene:

```
El valor maximo de la utilidad es: 0.26
PS E:\& "e:/Documentos/UANL/6/Investigacion de Operaciones/AMPL/Py/VirtualEnv/Scr
tos/UANL/6/Investigacion de Operaciones/AMPL/Py/Problema5.py"
El valor óptimo de J_C es: 0.4
El valor óptimo de C_C es: 0.2
Con un porcentaje de exito de: 0.26
PS E:\Documentos\UANL\6\Investigacion de Operaciones\AMPL\Py>
```