Probabilidad y Estadistica

Carlos Oswaldo Gonzalez Garza

February 17, 2025

1 Tipos de datos y Medidas de tendencia central

En una empresa se han recolectado los siguientes datos de 10 empleados:

Nombre	Edad	Area de trabajo
Ana	25	Ventas
Luis	30	Administracion
Marta	40	Produccion
Carlos	35	Ventas
Elena	28	Recursos Humanos
Juan	50	Produccion
Sofia	45	Administracion
Pedro	38	Ventas
Daniel	33	Produccion
Laura	27	Recursos Humanos

1. Clasifique las variables en cualitativas o cuantitativas.
Cualitativas:Nombre y Area de trabajo
Cuantitativas:Edad
2. Determine la media, mediana y moda de la variable "Edad".
Edad:25,30,40,35,28,50,45,38,33,27
Media:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{25+30+40+35+28+50+45+38+33+27}{10} = 35.1$$

Mediana:
ordenados:25,27,28,30,33,35,38,40,45,50

$$x = \frac{33+35}{2} = \frac{68}{10} = 6.8$$

Moda: No hay moda porque no se repite ninguno

3. Interprete los resultados obtenidos

La media es de 35 en la edad lo que nos indica que en promedio la gente de esa empresa llega a tener esa edad.

La mediana es de 34 en la edad, lo que nos indica que la mitad de los que estan en la empresa tienen una edad mayor o igual a este valor, y la otra mitad en la empresa tiene una edad menor o igual.

No hay moda lo que indica que las edades no se repiten con mayor frecuencia

2 Medidas de dispersion

Dado el siguiente conjunto de datos correspondiente a las calificaciones de 8 estudiantes en un examen:

$$X = \{70, 85, 90, 95, 88, 92, 75, 80\}$$

1. Calcule la varianza y la desviación estandar de los datos.

la media es:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{70 + 85 + 90 + 95 + 88 + 92 + 75 + 80}{8} = 85$$

Varianza:

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

$$Var(X) = \frac{1}{8}\big((70-85)^2 + (85-85)^2 + (90-85)^2 + (95-85)^2 + (88-85)^2 +$$

$$(92-85)^2 + (75-85)^2 + (80-85)^2\big) = 66.23$$

Desviación estándar:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{66.23} = 8.14$$

2. Interprete la dispersión de los datos.

La varianza que obtuvimos nos dice que las calificaciones tienen una dispersión moderada hacia la media. La desviación estándar de aproximadamente 8.13 nos dice que, llegan a variar las califcaciones unos 8 puntos respecto a la media.

La desviación estándar no es muy grande, por lo que los datos se agrupan cerca de la media, sin alcanzar valores extremos.

3 Probabilidades y Teorema de Bayes

Una empresa de tecnología ha identificado que el 60% de sus empleados son programadores, y el 40% son diseñadores. Se sabe que el 70% de los programadores tienen conocimientos de inteligencia artificial (IA), mientras que solo el 30% de los diseñadores tienen estos conocimientos. Si se elige un empleado al azar y se sabe que tiene conocimientos de IA, ¿cuál es la probabilidad de que sea programador?

$P(P) = 0.60$ la probabilidad de que un empleado sea programador

$P(D) = 0.40$ la probabilidad de que un empleado sea diseñador

$P(IA|P) = 0.70$ es la probabilidad de que un programador tenga conocimientos de inteligencia artificial

$P(IA|D) = 0.30$ es la probabilidad de que un diseñador tenga conocimientos de IA

calcular $P(P|IA)$

teorema de Bayes:

$$P(P|IA) = \frac{P(IA|P) \cdot P(P)}{P(IA)}$$

$$P(IA) = P(IA|P) \cdot P(P) + P(IA|D) \cdot P(D)$$

$$P(IA) = (0.70 \cdot 0.60) + (0.30 \cdot 0.40) = 0.42 + 0.12 = 0.54$$

$$P(P|IA) = \frac{0.70 \cdot 0.60}{0.54} = \frac{0.42}{0.54} \approx 0.7778$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el empleado sea programador es de 77.78%

4 Distribuciones de probabilidad

Suponga que el número de defectos en un lote de producción sigue una distribución de Poisson con media

$$\lambda = 3$$

defectos por lote.

1. Probabilidad de que un lote tenga exactamente 2 defectos

La fórmula de la distribución de Poisson:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Sustituyendo $k = 2$ y $\lambda = 3$:

$$P(X = 2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = \frac{9e^{-3}}{2} \approx \frac{9 \cdot 0.0498}{2} \approx 0.2241$$

La probabilidad es aproximadamente 0.2241.

2. Probabilidad de que un lote tenga al menos 1 defecto

La probabilidad de que un lote tenga al menos 1 defecto es:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

La probabilidad de que un lote tenga 0 defectos es:

$$P(X = 0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = e^{-3} \approx 0.0498$$

Por lo tanto:

$$P(X \geq 1) = 1 - 0.0498 = 0.9502$$

La probabilidad es aproximadamente 0.9502.

5 Funciones de densidad y distribución acumulativa

Sea X una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación estándar $\sigma = 10$.

1. Probabilidad de que X tome un valor menor que 45:

$$P(X < 45) = \Phi\left(\frac{45 - 50}{10}\right) = \Phi(-0.5) \approx 0.3085$$

2. Probabilidad de que X esté entre 40 y 60:

$$P(40 < X < 60) = P(X < 60) - P(X < 40) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

3.Use la función de distribución acumulativa para verificar sus respuestas.

Para $P(X < 45)$:

$$P(X < 45) = \Phi\left(\frac{45 - 50}{10}\right) = \Phi(-0.5) \approx 0.3085$$

Para $P(40 < X < 60)$:

$$P(X < 60) = \Phi\left(\frac{60 - 50}{10}\right) = \Phi(1) \approx 0.8413$$

$$P(X < 40) = \Phi\left(\frac{40 - 50}{10}\right) = \Phi(-1) \approx 0.1587$$

$$P(40 < X < 60) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

6 Probabilidad Condicional

Un dado justo de seis caras se lanza dos veces.

1. Probabilidad de obtener un número par en el segundo lanzamiento, dado que en el primero salió un número impar:

$$P(\text{par en el segundo lanzamiento}|\text{impar en el primero}) = P(\text{par}) = 0.5$$

2. Interprete los resultados obtenidos.

La probabilidad de obtener un número par en el segundo lanzamiento sigue siendo 0.5, ya que es la probabilidad de obtener un número par en cualquier lanzamiento de un dado justo.

7 Distribución Binomial

Un examen de opción múltiple tiene 5 preguntas, cada una con 4 posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. Un estudiante responde al azar.

1. Probabilidad de acertar exactamente 3 respuestas:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0.0879$$

2. Probabilidad de acertar al menos una respuesta:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.7627$$

8 Regla de Laplace

Una urna contiene 5 bolas rojas y 7 bolas azules. Se extrae una bola al azar.

1. Probabilidad de que la bola extraída sea roja:

$$P(\text{roja}) = \frac{5}{12}$$

2. Probabilidad de que ambas bolas sean azules:

$$P(\text{2 azules}) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$$

9 Esperanza Matemática

Suponga que una persona juega una lotería donde el pre- mio es de 1000 dólares con una probabilidad de 0.01, y el costo del boleto es de 10 dólares.

1. Esperanza matemática de la ganancia del jugador: La esperanza matemática de la ganancia $E(X)$ se calcula como:

$$E(X) = (990 \cdot 0.01) + (-10 \cdot 0.99)$$

$$E(X) = 9.9 - 9.9 = 0$$

2. Interpretación:

La esperanza matemática de la ganancia del jugador es 0, lo que indica que, en promedio, no ganará ni perderá dinero a largo plazo si juega muchas veces.

10 Ley de los Grandes Números

Un experimento consiste en lanzar una moneda justa 1000 veces y calcular la frecuencia relativa de obtener cara

1. Valor esperado de la frecuencia relativa de obtener cara

El valor esperado es 0.5, ya que es la probabilidad de obtener cara.

2. Relación con la Ley de los Grandes Números

A medida que el número de lanzamientos aumenta, la frecuencia relativa de obtener cara se acercará a 0.5.