Actividad 9: Solución numérica de las Ecuaciones Diferenciales Parciales

Carlos Oswaldo Ochoa Bojorquez
Departamento de Física
Universidad de Sonora
219200162

4 de mayo de 2021

1. Introducción

En este reporte se resumirán todos los metodos que se abordaron para poder resolver los problemas de las actividades 10, 11 y 12 en los cuales el tema principal fueron distintas ecuaciones diferenciales parciales y sus soluciones numéricas.

2. Las tres grandes familias principales de ecuaciones ordinarias parciales: Parabólicas, Hiperbólicas y Elípticas

2.1. Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas

Las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas son aquellas cuyo determinante es 0, este tipo de ecuaciones se presentan en el flujo de sistemas disipativos, tales como la temperatura o viscosidad, estos pueden ser conducción térmica o efectos viscosos.

Sus derivadas son siempre continuas, un ejemplo común sería el de la conducción de calor no estacionaria, que tiene la forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

2.2. Ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas

Este tipo de ecuaciones se caracteriza porque su determinante es mayor a 0, además de tener un problema de valor inicial bien definido para sus primeras $n-1$ derivadas.

Un ejemplo común de este tipo de ecuaciones son la ecuación de onda, que describe el movimiento de ondas mecánicas y tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Las ecuaciones que describen flujos no viscosos y no estacionarios son también de tipo hiperbólico no lineales. También es hiperbólica la ecuación lineal de convección pura siguiente:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

donde u es una velocidad conocida.

2.3. Ecuaciones diferenciales parciales elípticas

En mecánica de fluidos las ecuaciones elípticas corresponden siempre a problemas estacionarios. El ejemplo más simple es el de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0,$$

que describe el flujo potencial incompresible o la transmisión de calor por conducción en ausencia de fuentes de calor (Φ sería la temperatura en este caso).

3. Tipos de condiciones de frontera

3.1. Condiciones de frontera del tipo Dirichlet

La condición de frontera tipo Drichlet es un tipo de condición de frontera o contorno, denominado así en honor a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, cuando en una ecuación diferencial ordinaria o una en derivadas parciales, se le especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio.

Los siguientes ejemplos pueden considerarse como condiciones de frontera de Dirichlet:

En ingeniería mecánica y civil (curva elástica), donde un extremo de una viga está fija en el espacio.

En termodinámica, donde una superficie tiene una temperatura fija. En electrostática, donde un nodo de un circuito tiene un voltaje fijo o constante.

En fluidodinámica, la condición de no deslizamiento para fluidos viscosos establece que en una frontera sólida, el fluido tendrá velocidad relativa nula.

3.2. Condiciones de frontera tipo Newmann

La condición de frontera de Neumann (o de segundo tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, llamada así en alusión a Carl Neumann. Se presenta cuando a una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, se le especifican los valores de la derivada de una solución tomada sobre la frontera o contorno del dominio.

Se especifica la derivada de la función en todos los puntos del contorno. De nuevo, si esta es nula la condición es homogénea. Por ejemplo, en la superficie libre de un líquido la componente normal de la velocidad tiene una derivada tangencial que se suele considerar despreciable.

Las condiciones pueden ser, por supuesto, una mezcla de estas dos. Además, el asunto de dónde deben definirse estas condiciones, y dónde su valor es un resultado, es asimismo delicado.

3.3. Condiciones de frontera de tipo Robin

En matemáticas, la condición de frontera de Robin (o de tercer tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, denominado así en honor a Victor Gustave Robin cuando en una ecuación diferencial ordinaria o en una derivadas parciales, se le específica una combinación lineal de los valores de una función y y los valores de su derivada sobre la frontera del dominio.

Las condiciones de frontera de Robin son una combinación ponderada de las condiciones de Dirichlet y Neumann. Es el contraste de la condiciones de frontera mixtas, las cuales son condiciones de frontera de diferentes tipos especificadas en diferentes subconjuntos de la frontera. Las condiciones de frontera de Robin también se denominan condiciones de frontera de impedancia, por su aplicación en problemas electromagnéticos.

Las condiciones de frontera de Robin se utilizan frecuentemente para resolver problemas de Sturm-Liouville que aparece en muchos contextos en la ciencia y la ingeniería. Además, la condición de frontera de Robin es una forma general de condiciones de frontera aisladas para las ecuaciones de convección-difusión.

4. Método de diferencias finitas

El método de las diferencias finitas es utilizado para calcular de manera numérica las soluciones a las ecuaciones diferenciales usando ecuaciones diferenciales finitas para aproximar derivadas. La ecuación en diferencias finitas proporciona una descripción fundamental del sistema DSP al que representa. Si embargo , a veces, se necesita cierta información adicional denominadas condiciones iniciales, auxiliares o de contorno, las cuales ya fueron mencionadas.

5. Actividad 10, 11 y 12, soluciones a la ecuacion de calor, onda y de Poisson

5.1. Solución a la ecuación de calor (Actividad 10)

La ecuación del calor es de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

donde la constante κ es el coefficiente de difusividad.

La Ecuación del Calor describe el flujo de calor en una región mediante los cambios de la Temperatura $u(x,t)$.

En un medio unidimensional x, la ecuación se simplifica

$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$

Si se conoce el valor de una función $f(x)$ en un punto x_0, se puede conocer el valor en una vecindad $x_0 + h$, con h pequeño, utilzando una Serie de Taylor

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

de la ecuación anterior, obtenemos el valor aproximado de la primer derivada

$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$

El término $\mathcal{O}(h^2)$ denota términos de orden h^2 y superior.

Esta aproximación de la primera derivada, se le conoce como diferencias finitas de $f'(x_0)$ hacia enfrente, porque involucra un punto hacia enfrente en la derivada.
De la misma forma se obtiene el término de diferencias finitas hacia atrás $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$

Podemos promediar las dos ecuaciones anteriores y se obtiene una diferencia finita centrada de orden superior $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^3)$

Aproximación de la segunda derivada

Podemos utilizar esta última ecuación para calcular la aproximación de la segunda derivada

$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$

y substituimos $f(x_0 + h)$ por una diferencia finita hacia atrás $f'(x_0 + h) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$

y la derivada $f'(x_0)$ por una diferencia finita hacia atrás $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$

Finalmente obtenemos la diferencia finita centrada de segundo orden para $f''(x_0)$ que involucra los valores en 3 puntos.
$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$

5.2. Solución a la ecuación de onda (Actividad 11)

La Ecuación de Onda es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo hiperbólico que involucra dos derivadas en el tiempo y dos derivadas en el espacio

$$U_{tt} = c^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz})$$

donde c^2 es la velocidad de propagación de la información en el dominio de solución.

La Ecuación de Onda describe el movimiento de ondas mecánicas (ondas de agua, ondas de sonido y ondas sísmicas) o también ondas electromagnéticas. Ocurren frecuentemente en los campos de Acústica, Electrodinámica y Dinámica de Fluidos.

En una dimensión, por ejemplo el caso de una cuerda vibrante, la Ecuación de Onda se simplifica a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + f(x,t) \qquad x \in (0,L], t \in (0,T]$$

Requerimos definir 4 condiciones: 2 iniciales (derivada de segundo orden en t) y 2 a la frontera (segundo orden en el espacio), para encontrar la solución.

$$\text{u(x,0)} = \text{I(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u(L,t) = 0$$

Se requiere también especificar el valor de la constante c y la función $I(x)$.

Resolviendo la ecuación de onda con el método de diferencias finitas llegamos a

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{C^2}{2}(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)$$

5.3. Solución a a la ecuación de Poisson (Actividad 12

La Ecuación de Poisson es una Ecuación Diferencial Parcial de tipo Elíptico. La Ecuación de Poisson es una generalización de la Ecuación de Laplace.

Un caso general de la Ecuación de Laplace es la Ecuación de Helmholtz, que surge de resolver un problema de eigenvalores del operador de Laplace.

La Ecuación de Poisson es utilizada en algunos campos de la Física como lo es la teoría de gravitación de Newton, la electrostática, dinámica de fluidos y otros.

Uno de los métodos para resolver la Ecuación de Poisson es el método de diferencias finitas. También existen otros métodos para resolver ls Ecuación de Poisson como lo son con el método de elemento finito, el método pseudoespectral, entre otros.

Se busca la solución de la ecuación

$$-\nabla^2 u = f$$

dadas las condiciones en la frontera Γ

$$u(x,y)_\Gamma = g(x,y)$$

No requerimos una condición inicial, pues no hay dependencia en el tiempo. Sólo requerimos conocer los valores a la frontera.

Supongamos que tenemos un dominio rectangular cartesiano $\Gamma = (a,b) \times (c,d)$, sobre el cual generamos una malla

$$x_i = a + ih_x \quad i = 0,1,2,\ldots,M$$
$$y_k = c + kh_y \quad k = 0,1,2,\ldots,N$$

donde los incrementos h_x y h_y estan definidos como

$$h_x = \frac{(b-a)}{M}$$
$$h_y = \frac{(d-c)}{N}$$

Si aproximamos las derivadas parciales de segundo orden de la ecuación de Poisson por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_k)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, y_k) - 2u(x_i, y_k) + u(x_{i-1}, y_k)}{h_x^2} + \mathcal{O}(\langle^{\ni}_{\S})$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_k)}{\partial y^2} = \frac{u(x_i, y_{k+1}) - 2u(x_i, y_k) + u(x_i, y_{k-1}}{h_y^2} + \mathcal{O}(\langle^{\ni}_{\dagger})$$

Si denotamos por $U_{i,k}$ el valor aproximado de $u(x_i, y_k)$, la ecuación de Poisson se puede aproximar por

$$-\frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h_x^2} - \frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{h_y^2} = f_{i,k} + \mathcal{O}(\langle^{\ni}_{\S}, \langle^{\ni}_{\dagger})$$

Simplificando la expresión anterior y eliminando errores de orden superior, tendremos

$$-\left(\frac{U_{i+1,k} + U_{i-1,k}}{h_x^2} + \frac{U_{i,k+1} + U_{i,k-1}}{h_y^2}\right)$$
$$+2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) U_{i,k} = f_{i,k}$$

donde los valores de $i = 1, 2, \ldots, M-1$ y $k = 1, 2, \ldots, N-1$ representan los puntos del interior del dominio. Los valores en la frontera ya han sido determinados en la definición del problema.

La ecuación anterior requiere un esténcil de 5 puntos como el que ya hemos utilizado con anterioridad

Supongamos por conveniencia que $h_x = h_y = h$, entonces el algoritmo para resolver la ecuación de Poisson se simplifica

$$4U_{i,k} - U_{i-1,k} - U_{i,k-1} - U_{i+1,k} - U_{i,k+1} = h^2 f_{i,k}$$

6. Resumen y conclusiones

Para finalizar, durante las ultimas 3 actividades vimos todos estos tipos de ecuaciones las cuales son de gran importancia en la física, ya que su uso se extiende desde lo cotidiano hasta en problemas actuales, vimos grandes aplicaciones que le podemos dar, y el hecho de saber crear algún programa para resolver estos problemas nos da una gran ventaja que de seguro perdurará en nosotros en el resto de la carrera y lo que siga después. También está el hecho de que aprendimos a interpretar los resultados de estas ecuaciones, ya que sin saber esto no nos sirve de nada, al principio me costó trabajo ya que lo encontraba bastante confuso, pero con ayuda del profesor y mis compañeros aprendí bien a como hacerlo.

7. Bibliografía

- https://en.wikipedia.org/wiki/Partial$_{d}ifferential_{e}quation$
- https://en.wikipedia.org/wiki/Parabolic$_{p}artial_{d}ifferential_{e}quation$
- https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic$_{p}artial_{d}ifferential_{e}quation$
- https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic$_{p}artial_{d}ifferential_{e}quation$
- https://en.wikipedia.org/wiki/Heat$_{e}quation$
- https://en.wikipedia.org/wiki/Wave$_{e}quation$
- https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson's$_{e}quation$
- https://en.wikipedia.org/wiki/Boundary$_{v}alue_{p}roblem$
- https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet$_{b}oundary_{c}ondition$
- https://en.wikipedia.org/wiki/Neumann$_{b}oundary_{c}ondition$
- https://en.wikipedia.org/wiki/Robin$_{b}oundary_{c}ondition$
- https://en.wikipedia.org/wiki/Finite$_{d}ifference_{m}ethod$

- http://computacional1.pbworks.com/w/page/72847919/FrontPage