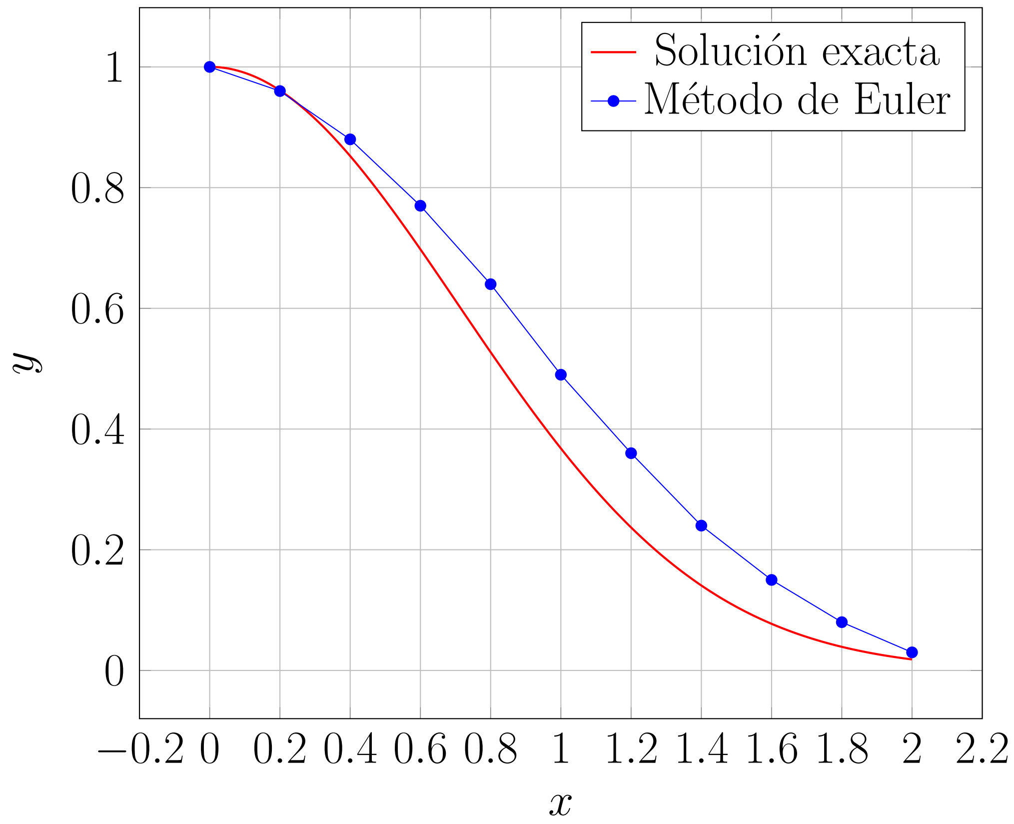
Solucionario

Ecuaciones Diferenciales Sección 1.2

Dennis G. Zill

Solución aproximada usando el método de Euler para $y' = -2xy$



Hecho por: **Carlos Angulo-Quito Ecuador**

August 28, 2024

Contents

1 Ejercicio 1

En los problemas 1 y 2, $y = \frac{1}{1+c_1e^{-x}}$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial de primer orden $y' = y - y^2$. Encuentre una solución del problema de valor inicial (PVI) de primer orden que consiste en esta ecuación diferencial y la condición inicial dada.

$$y(0) = -\frac{1}{3}$$

Dado que la solución general es $y = \frac{1}{1+c_1e^{-x}}$, utilizamos la condición inicial $y(0) = -\frac{1}{3}$:

$$-\frac{1}{3} = \frac{1}{1 + c_1}$$

Resolviendo para c_1:

$$1 + c_1 = -3 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -4$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y = \frac{1}{1 - 4e^{-x}}$$

2 Ejercicio 2

Nuevamente, utilizando la misma familia de soluciones para la ecuación diferencial $y' = y - y^2$, pero con la condición inicial diferente:

$$y(-1) = 2$$

Usando la solución general $y = \frac{1}{1+c_1e^{-x}}$ y la condición inicial $y(-1) = 2$:

$$2 = \frac{1}{1 + c_1e^1}$$

Resolviendo para c_1:

$$1 + c_1e^1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c_1e^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2e}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y = \frac{1}{1 - \frac{1}{2e}e^{-x}}$$

En los problemas 3 a 6, $y = \frac{1}{x^2+c}$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial de primer orden $y' + 2xy^2 = 0$. Determine una solución del problema de valor inicial (PVI) de primer orden que consiste en esta ecuación diferencial y la condición inicial dada. Dé el intervalo I más largo en el cual está definida la solución.

3 Ejercicio 3

$$y(2) = \frac{1}{3}$$

La solución general es $y = \frac{1}{x^2+c}$. Usamos la condición inicial $y(2) = \frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4 + c}$$

Resolviendo para c:

$$4 + c = 3 \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

El intervalo más largo I en el cual está definida la solución es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

4 Ejercicio 4

$$y(-2) = \frac{1}{2}$$

Usando la solución general $y = \frac{1}{x^2+c}$ y la condición inicial $y(-2) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4 + c}$$

Resolviendo para c:

$$4 + c = 2 \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y = \frac{1}{x^2 - 2}$$

El intervalo más largo I en el cual está definida la solución es $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

5 Ejercicio 5

$$y(0) = 1$$

Usando la solución general $y = \frac{1}{x^2+c}$ y la condición inicial $y(0) = 1$:

$$1 = \frac{1}{0^2 + c} \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

El intervalo más largo I en el cual está definida la solución es $(-\infty, \infty)$.

6 Ejercicio 6

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = -4$$

Usando la solución general $y = \frac{1}{x^2+c}$ y la condición inicial $y\left(\frac{1}{2}\right) = -4$:

$$-4 = \frac{1}{\frac{1}{4} + c}$$

Resolviendo para c:

$$\frac{1}{4} + c = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y = \frac{1}{x^2 - \frac{1}{2}}$$

El intervalo más largo I en el cual está definida la solución es $(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty)$.

En los problemas 7 a 10, $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la ecuación diferencial de segundo orden $x'' + x = 0$. Determine una solución del problema de valor inicial (PVI) de segundo orden que consiste en esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

7 Ejercicio 7

$$x(0) = -1, \quad x'(0) = 8$$

La solución general es $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Las derivadas de esta solución son:

$$x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

Usamos las condiciones iniciales $x(0) = -1$ y $x'(0) = 8$:

$$x(0) = c_1 = -1$$

$$x'(0) = c_2 = 8$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$x(t) = -\cos t + 8 \sin t$$

8 Ejercicio 8

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Usamos la solución general $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ y derivamos:

$$x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

Aplicamos las condiciones iniciales $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

$$0 = c_2, \quad c_1 = -1$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$x(t) = -\cos t$$

9 Ejercicio 9

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad x'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

Usamos la solución general $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ y derivamos:

$$x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

Aplicamos las condiciones iniciales $x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ y $x'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$:

$$\frac{1}{2} = c_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + c_2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 = -c_1 \cdot \frac{1}{2} + c_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para c_1 y c_2, obtenemos:

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos t + \frac{1}{4} \sin t$$

10 Ejercicio 10

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

Usamos la solución general $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ y derivamos:

$$x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

Aplicamos las condiciones iniciales $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ y $x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = c_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\sqrt{2} = -c_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + c_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para c_1 y c_2, obtenemos:

$$c_1 = -1, \quad c_2 = 3$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$x(t) = -1 \cos t + 3 \sin t$$

En los problemas 11 a 14, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la ecuación diferencial de segundo orden $y'' - y = 0$. Determine una solución del problema de valor inicial (PVI) de segundo orden que consiste en esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

11 Ejercicio 11

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

La solución general es $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Las derivadas de esta solución son:

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

Usamos las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 2$:

$$1 = c_1 + c_2$$

$$2 = c_1 - c_2$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para c_1 y c_2, obtenemos:

$$c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = \frac{-1}{2}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y(x) = \frac{3}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x}$$

12 Ejercicio 12

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = e$$

Usamos la solución general $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ y derivamos:

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

Aplicamos las condiciones iniciales $y(1) = 0$ y $y'(1) = e$:

$$0 = c_1 e + c_2 e^{-1}$$

$$e = c_1 e - c_2 e^{-1}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para c_1 y c_2, obtenemos:

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}e^2$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^2 e^{-x}$$

13 Ejercicio 13

$$y(-1) = 5, \quad y'(-1) = -5$$

Usamos la solución general $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ y derivamos:

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

Aplicamos las condiciones iniciales $y(-1) = 5$ y $y'(-1) = -5$:

$$5 = c_1 e^{-1} + c_2 e$$

$$-5 = c_1 e^{-1} - c_2 e$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para c_1 y c_2, obtenemos:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 5e^{-1}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y(x) = -5e^{-1}e^{-x}$$

14 Ejercicio 14

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Usamos la solución general $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ y derivamos:

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

Aplicamos las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$:

$$0 = c_1 + c_2$$

$$0 = c_1 - c_2$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para c_1 y c_2, obtenemos:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Por lo tanto, la solución particular es trivial:

$$y(x) = 0$$

En los problemas 15 y 16, determine por inspección al menos dos soluciones del PVI de primer orden dado.

15 Ejercicio 15

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0$$

Para $y' = 3y^{2/3}$, observamos que una solución trivial es $y(x) = 0$, ya que $y'(0) = 0$.
Otra solución la obtenemos separando variables:

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = 3dx$$

Integrando ambos lados:

$$\int y^{-2/3} dy = \int 3dx$$

$$\frac{3}{1} y^{1/3} = 3x + C$$

$$y^{1/3} = x + C_1$$

Elevando al cubo:

$$y(x) = (x + C_1)^3$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 0$:

$$0 = C_1^3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

Por lo tanto, la segunda solución es:

$$y(x) = x^3$$

Por lo tanto, las dos soluciones son $y(x) = 0$ y $y(x) = x^3$.

16 Ejercicio 16

$$xy' = 2y, \quad y(0) = 0$$

Para $xy' = 2y$, observamos que una solución trivial es $y(x) = 0$, ya que $y'(0) = 0$.
Otra solución la obtenemos separando variables:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x} dx$$

Integrando ambos lados:

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + C$$

$$\ln |y| = \ln |x^2| + C$$

Exponenciando ambos lados:

$$|y| = e^C x^2$$

$$y(x) = C_1 x^2$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 0$:

$$y(0) = C_1 \cdot 0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

Por lo tanto, la segunda solución es:

$$y(x) = C_1 x^2$$

Dado que C_1 puede ser cualquier constante, una solución no trivial es $y(x) = x^2$.
Por lo tanto, las dos soluciones son $y(x) = 0$ y $y(x) = x^2$.

En los problemas 17 a 24, determine una región del plano xy para el que la ecuación diferencial dada tendría una solución única cuyas gráficas pasen por un punto (x_0, y_0) en la región.

17 Ejercicio 17

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

Para que la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$ tenga una solución única en un punto (x_0, y_0), la función $y^{2/3}$ y su derivada con respecto a y deben ser continuas en un entorno de y_0.

La función $y^{2/3}$ es continua para todos los valores de y, pero su derivada:

$$\frac{d}{dy}\left(y^{2/3}\right) = \frac{2}{3}y^{-1/3}$$

no es continua en $y = 0$. Por lo tanto, una región donde la solución sea única es para $y_0 \neq 0$.

Región: $y_0 \neq 0$

18 Ejercicio 18

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$$

Para que la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$ tenga una solución única en un punto (x_0, y_0), la función $\sqrt{xy}$ y su derivada con respecto a y deben ser continuas en un entorno de (x_0, y_0).

La función $\sqrt{xy}$ es continua cuando $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Sin embargo, su derivada con respecto a y:

$$\frac{d}{dy}\left(\sqrt{xy}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

no es continua en $y = 0$. Por lo tanto, una región donde la solución sea única es para $x_0 > 0$ y $y_0 > 0$.

Región: $x_0 > 0$ y $y_0 > 0$

Determine una región del plano xy para la cual la ecuación diferencial dada tendría una solución única cuyas gráficas pasen por un punto (x_0, y_0) en la región.

19 Ejercicio 19

$$x\frac{dy}{dx} = y$$

Para que la ecuación diferencial $x\frac{dy}{dx} = y$ tenga una solución única en un punto (x_0, y_0), la función $\frac{y}{x}$ y su derivada con respecto a y deben ser continuas en un entorno de (x_0, y_0).

La función $\frac{y}{x}$ es continua cuando $x \neq 0$. Por lo tanto, una región donde la solución sea única es para $x_0 \neq 0$.

Región: $x_0 \neq 0$

20 Ejercicio 20

$$\frac{dy}{dx} - y = x$$

Para que la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - y = x$ tenga una solución única en un punto (x_0, y_0), la función $x + y$ y su derivada con respecto a y deben ser continuas en un entorno de (x_0, y_0).

La función $x + y$ es continua para todos los valores de x y y. Por lo tanto, la solución es única en cualquier región del plano xy.

Región: todo el plano (x, y)

21 Ejercicio 21

$$(4-y^2)y' = x^2$$

Para que la ecuación diferencial $(4-y^2)y' = x^2$ tenga una solución única en un punto (x_0, y_0), la función $\frac{x^2}{4-y^2}$ y su derivada con respecto a y deben ser continuas en un entorno de (x_0, y_0).

La función $\frac{x^2}{4-y^2}$ no es continua cuando $y = \pm 2$. Por lo tanto, una región donde la solución sea única es para $y_0 \neq \pm 2$.

Región: $y_0 \neq \pm 2$

22 Ejercicio 22

$$(1+y^3)y' = x^2$$

Para que la ecuación diferencial $(1+y^3)y' = x^2$ tenga una solución única en un punto (x_0, y_0), la función $\frac{x^2}{1+y^3}$ y su derivada con respecto a y deben ser continuas en un entorno de (x_0, y_0).

La función $\frac{x^2}{1+y^3}$ es continua para todos los valores de y, excepto cuando $y = -1$. Por lo tanto, una región donde la solución sea única es para $y_0 \neq -1$.

Región: $y_0 \neq -1$

23 Ejercicio 23

$$(x^2+y^2)y' = y^2$$

Para que la ecuación diferencial $(x^2+y^2)y' = y^2$ tenga una solución única en un punto (x_0, y_0), la función $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ y su derivada con respecto a y deben ser continuas en un entorno de (x_0, y_0).

La función $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ es continua para todos los valores de y y x, excepto cuando $x = 0$ y $y = 0$. Por lo tanto, una región donde la solución sea única es para $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Región: $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$

24 Ejercicio 24

$$(y-x)y' = y+x$$

Para que la ecuación diferencial $(y-x)y' = y+x$ tenga una solución única en un punto (x_0, y_0), la función $\frac{y+x}{y-x}$ y su derivada con respecto a y deben ser continuas en un entorno de (x_0, y_0).

La función $\frac{y+x}{y-x}$ no es continua cuando $y = x$. Por lo tanto, una región donde la solución sea única es para $y_0 \neq x_0$.

Región: $y_0 \neq x_0$

Existencia de una solución única

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo $I_0 : (x_0 - h, x_0 + h), h > 0$, contenido en $[a, b]$, y una función única $y(x)$, definida en I_0, que es una solución del problema con valores iniciales (2).

Determine si el Teorema 1.2.1 garantiza que la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y^2-9}$ tiene una solución única que pasa por el punto dado.

25 Ejercicio 25

$$(1, 4)$$

La ecuación diferencial es $y' = \sqrt{y^2-9}$.

Para que el teorema garantice una solución única, la función $\sqrt{y^2-9}$ y su derivada con respecto a y, $\frac{y}{\sqrt{y^2-9}}$, deben ser continuas en un entorno del punto $(1, 4)$.

Ambas funciones son continuas cuando $y^2 > 9$, es decir, cuando $|y| > 3$. Dado que en el punto $(1, 4)$, $y = 4$, que satisface esta condición, el teorema garantiza una solución única.

Conclusión: El teorema garantiza una solución única en el punto $(1, 4)$.

26 Ejercicio 26

$$(5, 3)$$

Para el punto $(5, 3)$, tenemos que verificar si $y = 3$ cumple la condición $|y| > 3$.

Dado que $|3| = 3$, no se cumple $|y| > 3$. En este caso, la derivada de la función $\sqrt{y^2 - 9}$ no es continua en $y = 3$.

Conclusión: El teorema no garantiza una solución única en el punto $(5, 3)$.

27 Ejercicio 27

$$(2, -3)$$

Para el punto $(2, -3)$, tenemos que verificar si $y = -3$ cumple la condición $|y| > 3$.

Dado que $|-3| = 3$, no se cumple $|y| > 3$. En este caso, la derivada de la función $\sqrt{y^2 - 9}$ no es continua en $y = -3$.

Conclusión: El teorema no garantiza una solución única en el punto $(2, -3)$.

28 Ejercicio 28

$$(-1, 1)$$

Para el punto $(-1, 1)$, tenemos que verificar si $y = 1$ cumple la condición $|y| > 3$.

Dado que $|1| < 3$, no se cumple $|y| > 3$. En este caso, la derivada de la función $\sqrt{y^2 - 9}$ no es continua en $y = 1$.

Conclusión: El teorema no garantiza una solución única en el punto $(-1, 1)$.

29 Ejercicio 29

29.1 Inciso a)

Por inspección, determine una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $xy' = y$. Comprobe que cada miembro de la familia es una solución del problema con valores iniciales $xy' = y$, $y(0) = 0$.

La ecuación diferencial es:

$$xy' = y$$

Podemos dividir ambos lados por x (asumiendo $x \neq 0$):

$$y' = \frac{y}{x}$$

Esto es una ecuación diferencial separable. Separando variables:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Integrando ambos lados:

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Exponenciando ambos lados, obtenemos:

$$|y| = e^C |x|$$

Dado que e^C es una constante, podemos reescribir la solución como:

$$y = Cx$$

Por lo tanto, la familia uniparamétrica de soluciones es $y = Cx$.

Para comprobar que cada miembro de la familia es una solución del problema con valores iniciales, sustituyamos $y = Cx$ en la ecuación original:

$$x(C) = Cx$$

Esto se cumple para cualquier C, por lo tanto, cada miembro de la familia $y = Cx$ es una solución.

29.2 Inciso b)

Explique el inciso a) determinando una región R en el plano xy para el que la ecuación diferencial $xy' = y$ tendría una solución única que pase por el punto (x_0, y_0) en R.

La función $f(x, y) = \frac{y}{x}$ es continua en cualquier punto donde $x \neq 0$. Sin embargo, su derivada parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

es continua para $x \neq 0$.

Por lo tanto, una región R donde la solución es única es cualquier región en el plano xy donde $x_0 \neq 0$. En esta región, tanto $f(x, y)$ como su derivada parcial son continuas, garantizando una solución única según el teorema de existencia y unicidad.

29.3 Inciso c)

Compruebe que la función definida por tramos

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

satisface la condición $y(0) = 0$. Determine si esta función es también una solución del problema con valores iniciales del inciso a).

La función por tramos es:

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Primero, verifiquemos que satisface la condición $y(0) = 0$. Según la definición de la función por tramos, $y(0) = 0$.

Ahora, evaluemos si esta función es una solución del problema con valores iniciales del inciso a). Para $x < 0$, tenemos $y = 0$, lo que implica $y' = 0$. La ecuación diferencial $xy' = y$ se convierte en:

$$x(0) = 0$$

Lo cual es cierto.

Para $x \geq 0$, tenemos $y = x$, lo que implica $y' = 1$. La ecuación diferencial $xy' = y$ se convierte en:

$$x(1) = x$$

Lo cual también es cierto.

Por lo tanto, la función definida por tramos es también una solución del problema con valores iniciales del inciso a), pero esta solución no es única debido a la naturaleza de la función por tramos y la discontinuidad en su derivada en $x = 0$.

30 Ejercicio 30

30.1 Inciso a)

Compruebe que $y = \tan(x + c)$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$.

Dada la familia de soluciones $y = \tan(x + c)$, derivamos con respecto a x para encontrar y':

$$y = \tan(x + c)$$

$$y' = \frac{d}{dx}\tan(x+c) = \sec^2(x+c)$$

Sabemos que $\sec^2(x+c) = 1 + \tan^2(x+c)$, entonces:

$$y' = 1 + \tan^2(x+c)$$

Pero $\tan(x+c) = y$, por lo tanto:

$$y' = 1 + y^2$$

Esto demuestra que $y = \tan(x+c)$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$.

30.2 Inciso b)

Puesto que $f(x,y) = 1 + y^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ son continuas en donde quiera, la región R en el teorema 1.2.1 se puede considerar como todo el plano xy. Utilice la familia de soluciones del inciso a) para determinar una solución explícita del problema con valores iniciales de primer orden $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Aun cuando $x_0 = 0$ esté en el intervalo $(-2, 2)$, explique por qué la solución no está definida en este intervalo.

Usamos la condición inicial $y(0) = 0$ en la familia de soluciones $y = \tan(x+c)$ para determinar c:

$$y(0) = \tan(0+c) = 0$$
$$\tan(c) = 0$$

Esto implica que $c = 0$. Por lo tanto, la solución explícita es:

$$y = \tan(x)$$

La función tangente tiene asíntotas verticales en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$. En particular, la primera asíntota vertical ocurre en $x = \frac{\pi}{2}$. Dado que $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$, la solución no está definida en todo el intervalo $(-2, 2)$, ya que $x = \frac{\pi}{2}$ está dentro de este intervalo.

Por lo tanto, aunque la solución inicial parece ser válida en $x_0 = 0$, no puede extenderse a todo el intervalo $(-2, 2)$ debido a la singularidad en $x = \frac{\pi}{2}$.

30.3 Inciso c)

Determine el intervalo I de definición más largo para la solución del problema con valores iniciales del inciso b).

La función $y = \tan(x)$ tiene asíntotas verticales en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$. Dado que estamos interesados en la solución con la condición inicial $y(0) = 0$, el intervalo I de definición más largo se encuentra entre las dos primeras asíntotas:

$$I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Este es el intervalo más largo en el que la solución $y = \tan(x)$ es válida y definida para el problema con valores iniciales.

31 Ejercicio 31

31.1 Inciso a)

Verifique que $y = -\frac{1}{x+c}$ es una familia de soluciones uniparamétrica de la ecuación diferencial $y' = y^2$.

Dada la familia de soluciones $y = -\frac{1}{x+c}$, derivamos con respecto a x para encontrar y':

$$y = -\frac{1}{x+c}$$
$$y' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+c}\right) = \frac{1}{(x+c)^2}$$

Ahora, observamos que $y^2 = \left(-\frac{1}{x+c}\right)^2 = \frac{1}{(x+c)^2}$.

Entonces, tenemos:

$$y' = \frac{1}{(x+c)^2} = y^2$$

Esto demuestra que $y = -\frac{1}{x+c}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = y^2$.

31.2 Inciso b)

Puesto que $f(x,y) = y^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ son continuas donde sea, la región R del teorema 1.2.1 se puede tomar como todo el plano xy. Determine una solución de la familia del inciso a) que satisfaga que $y(0) = 1$. Después, determine una solución de la familia del inciso a) que satisfaga que $y(0) = -1$. Determine el intervalo I de definición más largo para la solución de cada problema con valores iniciales.

Usamos la condición inicial $y(0) = 1$ en la familia de soluciones $y = -\frac{1}{x+c}$:

$$1 = -\frac{1}{0+c} \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

Por lo tanto, la solución explícita es:

$$y = -\frac{1}{x-1}$$

El intervalo de definición más largo es $I = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, ya que la función tiene una singularidad en $x = 1$.

Usamos la condición inicial $y(0) = -1$ en la familia de soluciones $y = -\frac{1}{x+c}$:

$$-1 = -\frac{1}{0+c} \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

Por lo tanto, la solución explícita es:

$$y = -\frac{1}{x+1}$$

El intervalo de definición más largo es $I = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, ya que la función tiene una singularidad en $x = -1$.

31.3 Inciso c)

Determine el intervalo de definición I más largo para la solución del problema con valores iniciales $y' = y^2$, $y(0) = 0$. [**Sugerencia: La solución no es un miembro de la familia de soluciones del inciso a)**].

La ecuación diferencial es $y' = y^2$ con la condición inicial $y(0) = 0$.

Dado que $y(0) = 0$, una solución trivial es $y(x) = 0$ para todo x. Esta solución es válida en todo el plano xy, es decir, el intervalo de definición más largo es:

$$I = (-\infty, \infty)$$

Como se sugiere, esta solución no pertenece a la familia de soluciones $y = -\frac{1}{x+c}$ del inciso a), ya que en esa familia no se puede obtener $y = 0$ con ningún valor de c.

32 Ejercicio 32

32.1 Inciso a)

Demuestre que una solución de la familia del inciso a) del problema 31 que satisface $y' = y^2$, $y(1) = 1$, es $y = \frac{1}{2-x}$.

La familia de soluciones dada en el problema 31 es $y = -\frac{1}{x+c}$. Para encontrar la solución específica que satisface la condición $y(1) = 1$, sustituimos $y = 1$ y $x = 1$ en la familia de soluciones:

$$1 = -\frac{1}{1+c}$$

Resolviendo para c:

$$1 + c = -1 \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

Sustituyendo $c = -2$ en la familia de soluciones, obtenemos:

$$y = -\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-x}$$

Esto demuestra que la solución que satisface $y(1) = 1$ es $y = \frac{1}{2-x}$.

32.2 Inciso b)

Después demuestre que una solución de la familia del inciso a) del problema 31 que satisface $y' = y^2$, $y(3) = -1$, es $y = \frac{1}{2-x}$.

Nuevamente, partimos de la familia de soluciones $y = -\frac{1}{x+c}$. Para encontrar la solución específica que satisface la condición $y(3) = -1$, sustituimos $y = -1$ y $x = 3$ en la familia de soluciones:

$$-1 = -\frac{1}{3+c}$$

Resolviendo para c:

$$3 + c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

Sustituyendo $c = -2$ en la familia de soluciones, obtenemos:

$$y = -\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-x}$$

Esto demuestra que la solución que satisface $y(3) = -1$ es también $y = \frac{1}{2-x}$.

32.3 Inciso c)

¿Son iguales las soluciones de los incisos a) y b)?

Las soluciones obtenidas en los incisos a) y b) son ambas $y = \frac{1}{2-x}$. Por lo tanto, las soluciones son iguales en ambos casos.

33 Ejercicio 33

33.1 Inciso a)

Verifique que $3x^2 - y^2 = c$ es una familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación diferencial $y\frac{dy}{dx} = 3x$.

Dada la ecuación $3x^2 - y^2 = c$, derivamos implícitamente con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(3x^2) - \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(c)$$

Esto da:

$$6x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Podemos reordenar para encontrar $\frac{dy}{dx}$:

$$2y\frac{dy}{dx} = 6x$$

$$y\frac{dy}{dx} = 3x$$

Esto demuestra que $3x^2 - y^2 = c$ es una familia de soluciones de la ecuación diferencial $y\frac{dy}{dx} = 3x$.

33.2 Inciso b)

Bosqueje, a mano, la gráfica de la solución implícita $3x^2 - y^2 = 3$. Determine todas las soluciones explícitas $y = \phi(x)$ de la ED del inciso a) definidas por esta relación. Dé un intervalo I de definición de cada una de las soluciones explícitas.

La ecuación implícita es $3x^2 - y^2 = 3$. Podemos resolver para y para encontrar las soluciones explícitas:

$$y^2 = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

$$y = \pm\sqrt{3(x^2 - 1)}$$

Las soluciones explícitas son:

$$y_1(x) = \sqrt{3(x^2 - 1)}$$
$$y_2(x) = -\sqrt{3(x^2 - 1)}$$

Los intervalos de definición están determinados por la condición de que la expresión dentro de la raíz cuadrada sea no negativa:

$$x^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

Entonces, los intervalos de definición son:

$$I_1 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

33.3 Inciso c)

El punto $(-2, 3)$ está en la gráfica de $3x^2 - y^2 = 3$, pero ¿cuál de las soluciones explícitas del inciso b) satisface que $y(-2) = 3$?

Sustituimos $x = -2$ en las soluciones obtenidas en el inciso b):

$$y_1(-2) = \sqrt{3((-2)^2 - 1)} = \sqrt{3(4 - 1)} = \sqrt{9} = 3$$

$$y_2(-2) = -\sqrt{3((-2)^2 - 1)} = -\sqrt{9} = -3$$

Dado que $y(-2) = 3$, la solución que satisface esta condición es:

$$y_1(x) = \sqrt{3(x^2 - 1)}$$

34 Ejercicio 34

34.1 Inciso a)

Utilice la familia de soluciones del inciso a) del problema 33 para determinar una solución implícita del problema con valores iniciales $y\frac{dy}{dx} = 3x$, $y(2) = -4$. Después bosqueje, a mano, la gráfica de la solución explícita de este problema y dé su intervalo I de definición.

La familia de soluciones implícitas del problema 33 es $3x^2 - y^2 = c$. Usamos la condición inicial $y(2) = -4$ para determinar el valor de c:

$$3(2)^2 - (-4)^2 = c$$
$$3(4) - 16 = c$$
$$12 - 16 = c$$
$$c = -4$$

Por lo tanto, la solución implícita es:

$$3x^2 - y^2 = -4$$

Para encontrar la solución explícita, resolvemos para y:

$$y^2 = 3x^2 + 4$$
$$y = \pm\sqrt{3x^2 + 4}$$

El intervalo de definición I es todo el dominio real, es decir:

$$I = (-\infty, \infty)$$

34.2 Inciso b)

¿Existen algunas soluciones explícitas de $y\frac{dy}{dx} = 3x$ que pasen por el origen?

Para que una solución pase por el origen, debe satisfacer $y(0) = 0$. Usamos la familia de soluciones implícitas $3x^2 - y^2 = c$ y sustituimos $x = 0$, $y = 0$:

$$3(0)^2 - (0)^2 = c$$
$$0 = c$$

Esto implica que $c = 0$, por lo tanto, la solución que pasa por el origen es:

$$3x^2 = y^2$$
$$y = \pm\sqrt{3}x$$

Por lo tanto, sí existen soluciones explícitas de $y\frac{dy}{dx} = 3x$ que pasan por el origen.

En los problemas 35 a 38 se presenta la gráfica de un miembro de la familia de soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$. Relacione la curva solución con al menos un par de las siguientes condiciones iniciales:

(a) $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$

(b) $y(-1) = 0$, $y'(-1) = -4$

(c) $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$

(d) $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

(e) $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$

(f) $y(0) = -4$, $y'(0) = -2$

35 Ejercicio 35

35.1 Solución para el Problema 35

La gráfica en el problema 35 muestra una parábola con un mínimo en $y(0)$ cerca de -5 y pendiente positiva en $x = 0$.

Respuesta: f) $y(0) = -4$, $y'(0) = -2$.

36 Ejercicio 36

36.1 Solución para el Problema 36

La gráfica en el problema 36 muestra un punto de inflexión cerca de $y = 0$ con pendiente casi cero.

Respuesta: e) $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

37 Ejercicio 37

37.1 Solución para el Problema 37

La gráfica en el problema 37 muestra un máximo en $x = 1$ con pendiente positiva antes del máximo y negativa después.

Respuesta: c) $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

38 Ejercicio 38

38.1 Solución para el Problema 38

La gráfica en el problema 38 muestra un punto de inflexión en $x = 1$ con pendiente negativa.
Respuesta: a) $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$.

39 Ejercicio 39

Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica en cada punto (x, y) tiene una pendiente dada por $8e^{2x}+6x$ y la intersección con el eje y en $(0, 9)$.

Para encontrar la función $f(x)$, sabemos que la pendiente de la función está dada por la derivada $f'(x)$. Entonces, tenemos la ecuación diferencial:

$$f'(x) = 8e^{2x} + 6x$$

Integrando ambos lados con respecto a x, obtenemos:

$$f(x) = \int (8e^{2x} + 6x)\, dx$$

Calculamos la integral:

$$f(x) = 8\int e^{2x}\, dx + 6\int x\, dx$$

$$f(x) = 8 \cdot \frac{e^{2x}}{2} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

Simplificando, obtenemos:

$$f(x) = 4e^{2x} + 3x^2 + C$$

Dado que la función pasa por el punto $(0, 9)$, podemos encontrar C usando esta condición:

$$f(0) = 4e^0 + 3(0)^2 + C = 9$$

$$4 + C = 9$$

$$C = 5$$

Por lo tanto, la función que cumple con las condiciones del problema es:

$$f(x) = 4e^{2x} + 3x^2 + 5$$

40 Ejercicio 40

Determine una función $y = f(x)$ cuya segunda derivada es $y'' = 12x - 2$ en cada punto (x, y) de su gráfica y $y = -x + 5$ es tangente a la gráfica en el punto correspondiente a $x = 1$.

Sabemos que la segunda derivada es $y'' = 12x - 2$. Para encontrar $y = f(x)$, primero integramos para obtener la primera derivada y':

$$y' = \int (12x - 2)\, dx$$

$$y' = 6x^2 - 2x + C_1$$

Ahora integramos nuevamente para encontrar $y = f(x)$:

$$y = \int (6x^2 - 2x + C_1)\, dx$$

$$y = 2x^3 - x^2 + C_1x + C_2$$

Sabemos que la recta $y = -x + 5$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$. Esto significa que en $x = 1$, las derivadas primeras de ambas funciones deben ser iguales, y las funciones mismas deben tener el mismo valor en ese punto.

Primero, evaluamos y' en $x = 1$:

$$y'(1) = 6(1)^2 - 2(1) + C_1 = 6 - 2 + C_1 = 4 + C_1$$

La derivada de la recta $y = -x + 5$ es $y' = -1$. Entonces, igualamos:

$$4 + C_1 = -1$$

$$C_1 = -5$$

Ahora evaluamos y en $x = 1$:

$$y(1) = 2(1)^3 - (1)^2 + (-5)(1) + C_2 = 2 - 1 - 5 + C_2 = -4 + C_2$$

La recta $y = -x + 5$ en $x = 1$ da $y = -1 + 5 = 4$. Igualamos:

$$-4 + C_2 = 4$$

$$C_2 = 8$$

Por lo tanto, la función que cumple con las condiciones dadas es:

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 8$$

41 Ejercicio 41

Considere el problema con valores iniciales $y' = x - 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$. Determine cuál de las dos curvas que se muestran en la figura 1.2.11 es la única curva solución posible. Explique su razonamiento.

Respuesta: La única curva solución posible es la curva de color rosado porque en el punto dado, la pendiente es negativa y la curva debe ir hacia abajo.

42 Ejercicio 42

Determine un valor posible para x_0 para el que la gráfica de la solución del problema con valores iniciales $y' + 2y = 3x - 6$, $y(x_0) = 0$ es tangente al eje x en $(x_0, 0)$. Explique su razonamiento.

Para que la gráfica sea tangente al eje x en $(x_0, 0)$, la pendiente de la tangente en ese punto debe ser igual a 0. Es decir, $y'(x_0) = 0$.

Primero, resolvemos la ecuación diferencial dada $y' + 2y = 3x - 6$. Para ello, despejamos y':

$$y' = 3x - 6 - 2y$$

Sabemos que en $(x_0, 0)$, $y = 0$. Por lo tanto:

$$y'(x_0) = 3x_0 - 6$$

Para que la pendiente sea 0:

$$3x_0 - 6 = 0$$

Despejamos x_0:

$$x_0 = \frac{6}{3} = 2$$

Por lo tanto, el valor de x_0 donde la gráfica es tangente al eje x es $x_0 = 2$.

Respuesta: $x_0 = 2$

43 Ejercicio 43

Suponga que la ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ tiene una familia uniparamétrica de soluciones y que $f(x, y)$ satisface la hipótesis del teorema 1.2.1 en alguna región rectangular R del plano xy. Explique por qué dos curvas solución diferentes no se pueden interceptar o ser tangentes entre sí en un punto (x_0, y_0) en R.

Según el teorema 1.2.1 (teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias), si $f(x, y)$ y su derivada parcial con respecto a y, $\frac{\partial f}{\partial y}$, son continuas en una región rectangular R que contiene al punto (x_0, y_0), entonces existe una única solución $y = \phi(x)$ para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que pasa por el punto (x_0, y_0).

Esto implica que dos curvas solución diferentes no pueden interceptarse o ser tangentes en el mismo punto (x_0, y_0) dentro de la región R. Si dos curvas solución se interceptaran o fueran tangentes en ese punto, entonces habría dos soluciones distintas que pasan por (x_0, y_0), lo que contradice el teorema de unicidad.

En resumen, la unicidad de la solución garantiza que dos soluciones diferentes de la ecuación diferencial no pueden coincidir en un punto (x_0, y_0) de la región R, ya sea intersectándose o siendo tangentes, ya que esto violaría la condición de unicidad establecida por el teorema 1.2.1.

44 Ejercicio 44

Las funciones $y(x) = \frac{x^4}{16}$, $-\infty < x < \infty$ y

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^4}{16} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

tienen el mismo dominio pero son obviamente diferentes. Véanse las figuras 1.2.12a y 1.2.12b, respectivamente. Demuestre que ambas funciones son soluciones del problema con valores iniciales $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Resuelva la aparente contradicción entre este hecho y el último enunciado de unicidad.

Solución:

Primero, verifiquemos que ambas funciones son soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ con la condición inicial $y(2) = 1$.

1. **Para la función $y(x) = \frac{x^4}{16}$ en $-\infty < x < \infty$:**

Derivamos $y(x)$ con respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{16}\right) = \frac{4x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$$

Sustituyendo $y(x) = \frac{x^4}{16}$ en la ecuación diferencial:

$$xy^{1/2} = x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = x \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{4}$$

Como $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{4}$, la función $y(x) = \frac{x^4}{16}$ satisface la ecuación diferencial.

Además, al evaluar $y(2)$:

$$y(2) = \frac{2^4}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

Por lo tanto, $y(x) = \frac{x^4}{16}$ satisface la condición inicial $y(2) = 1$.

2. **Para la función a tramos:**

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^4}{16} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Para $x < 0$: $y(x) = 0$, entonces $\frac{dy}{dx} = 0$ y $xy^{1/2} = x \cdot 0 = 0$. Por lo tanto, satisface la ecuación diferencial.

- Para $x \geq 0$: La función coincide con $y(x) = \frac{x^4}{16}$, y como ya se demostró, satisface la ecuación diferencial y la condición inicial.

Resolviendo la aparente contradicción:

A pesar de que ambas funciones son soluciones del problema dado, el teorema de unicidad no se contradice porque las condiciones del teorema no se aplican en todo el dominio de las soluciones.

El teorema de unicidad garantiza una única solución en un intervalo donde la función $f(x, y) = xy^{1/2}$ y su derivada parcial con respecto a y son continuas. En este caso, la función $f(x, y) = xy^{1/2}$ no es continua ni tiene derivada continua en $y = 0$.

La primera función es continua en todo el dominio, pero la segunda tiene una discontinuidad en la derivada en $x = 0$, donde cambia de $y = 0$ a $y = \frac{x^4}{16}$. Esto crea una situación en la que pueden existir múltiples soluciones que cumplen la condición inicial debido a la falta de continuidad de $f(x, y)$ en ese punto.

Por lo tanto, la aparente contradicción se resuelve reconociendo que la unicidad de la solución no está garantizada en todo el dominio debido a la falta de continuidad de $f(x, y)$ en $y = 0$.

45 Ejercicio 45

Crecimiento de la población:

Al inicio de la siguiente sección veremos que las ecuaciones diferenciales se pueden usar para describir o modelar diversos sistemas físicos. En este problema, suponemos que un modelo de crecimiento de la población de una pequeña comunidad está dado por el problema con valores iniciales

$$\frac{dP}{dt} = 0.15P(t) + 20, \quad P(0) = 100,$$

donde $P(t)$ es el número de personas en la comunidad y el tiempo t se mide en años.

1. ¿Qué tan rápido está aumentando la población en $t = 0$?

Para encontrar la razón de cambio de la población en $t = 0$, evaluamos la derivada $\frac{dP}{dt}$ en $t = 0$:

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = 0.15P(0) + 20$$

Dado que $P(0) = 100$:

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = 0.15(100) + 20 = 15 + 20 = 35$$

Por lo tanto, la población está aumentando a una tasa de 35 personas por año en $t = 0$.

2. ¿Qué tan rápido está creciendo la población cuando la población es de 500?

Para encontrar la tasa de crecimiento de la población cuando $P = 500$, sustituimos $P(t) = 500$ en la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = 0.15(500) + 20 = 75 + 20 = 95$$

Por lo tanto, cuando la población es de 500 personas, está creciendo a una tasa de 95 personas por año.

References

[1] Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, Séptima Edición, Cengage Learning, 2010.