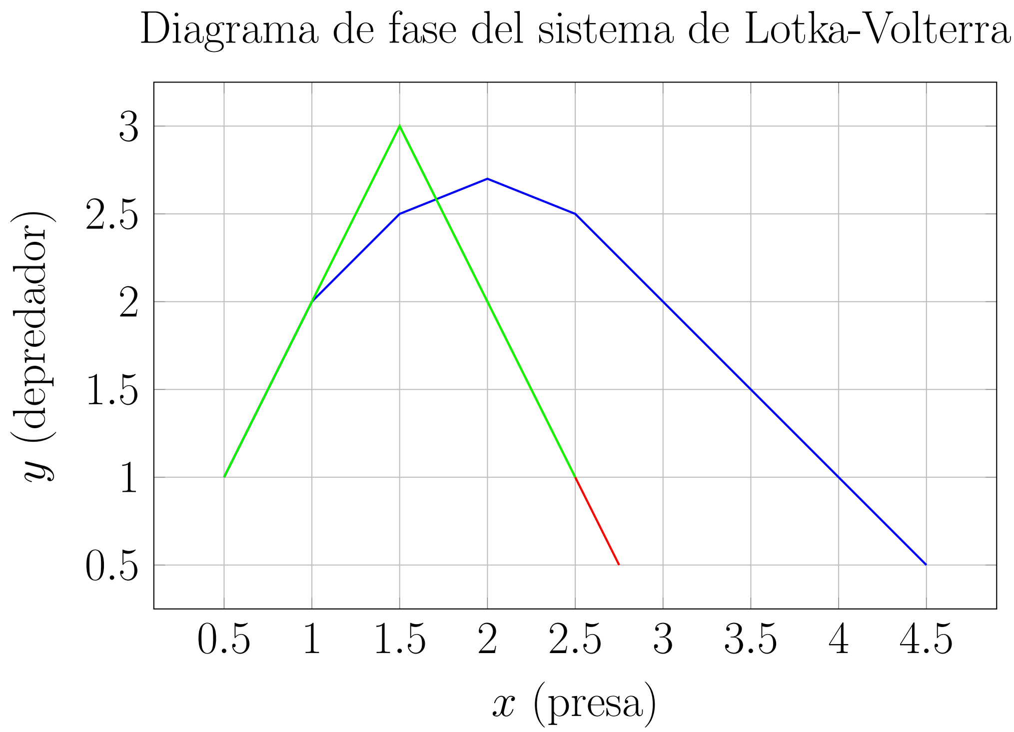
Solucionario

Ecuaciones Diferenciales Sección 1.1

Dennis G. Zill



Hecho por: **Carlos Angulo-Quito Ecuador**

August 11, 2024

Contents

Sección 1.1: Ejercicios

En los problemas 1 a 8 establezca el orden de la ecuación diferencial ordinaria dada. Determine si la ecuación es lineal o no lineal.

1. $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$
   - **Orden:** Segundo orden.
   - **Linealidad:** Lineal.

2. $x\frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$
   - **Orden:** Tercer orden.
   - **Linealidad:** No lineal.

3. $t^5y^{(4)} - t^3y''' + 6y = 0$
   - **Orden:** Cuarto orden.
   - **Linealidad:** Lineal.

4. $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + u = \cos(r+u)$
   - **Orden:** Segundo orden.
   - **Linealidad:** No lineal.

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$
   - **Orden:** Segundo orden.
   - **Linealidad:** No lineal.

6. $\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{k}{R^2}$
   - **Orden:** Segundo orden.
   - **Linealidad:** No lineal.

7. $(\sin\theta)y'' - (\cos\theta)y' = 2$
   - **Orden:** Segundo orden.
   - **Linealidad:** Lineal.

8. $\ddot{x} - \left(1 - \frac{x^2}{3}\right)\dot{x} + x = 0$
   - **Orden:** Segundo orden.
   - **Linealidad:** No lineal.

En los problemas 9 y 10 establezca si la ecuación diferencial de primer orden dada es lineal en la variable dependiente comparándola con la primera ecuación dada en (7).

9. $(y^2-1)dx + xdy = 0$; en y; en x
   - Despeje en función de x:

   $$(y^2-1)dx = -xdy \implies \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y^2-1}$$

   - **Linealidad en x:** Lineal.
   - Despeje en función de y:

   $$xdy = -(y^2-1)dx \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2-1}{x}$$

- **Linealidad en y:** No lineal.

10. $udv + (v + uv - ue^u)du = 0$; en v; en u

- Despeje en función de v:

$$udv = -(v + uv - ue^u)du \implies dv = -\left(\frac{v + uv - ue^u}{u}\right) du$$

$$\frac{dv}{du} = -\left(\frac{v + uv - ue^u}{u}\right)$$

$$\frac{dv}{du} + \left(\frac{1}{u} + 1\right) v = e^u$$

- **Linealidad en v:** Lineal.

- Despeje en función de u:

$$udv + (v + uv - ue^u)du = 0 \implies (v + uv - ue^u)du = -udv$$

$$du = -\frac{udv}{v + uv - ue^u}$$

$$\frac{du}{dv} = -\frac{u}{v + uv - ue^u}$$

- **Linealidad en u:** No lineal.

11. $2y' + y = 0; \quad y = e^{-x/2}$

- Comprobación de la solución:

$$y = e^{-x/2} \implies y' = -\frac{1}{2}e^{-x/2}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$2y' + y = 2\left(-\frac{1}{2}e^{-x/2}\right) + e^{-x/2} = -e^{-x/2} + e^{-x/2} = 0$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $y = e^{-x/2}$ es una solución.

- Intervalo de definición adecuado:

$$I = (-\infty, \infty)$$

12. $\frac{dy}{dt} + 20y = 24; \quad y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

- Comprobación de la solución:

$$y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t} \implies \frac{dy}{dt} = 24e^{-20t}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + 20y = 24e^{-20t} + 20\left(\frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}\right) = 24$$

$$24e^{-20t} + 24 - 24e^{-20t} = 24$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$ es una solución.

- Intervalo de definición adecuado:

$$I = (-\infty, \infty)$$

13. $y'' - 6y' + 13y = 0; \quad y = e^{3x}\cos 2x$

- Comprobación de la solución:

$$y = e^{3x}\cos 2x \implies y' = -2e^{3x}\sin 2x + 3e^{3x}\cos 2x$$
$$y'' = 5e^{3x}\cos 2x - 12e^{3x}\sin 2x$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 13y &= (5e^{3x}\cos 2x - 12e^{3x}\sin 2x) - 6(-2e^{3x}\sin 2x + 3e^{3x}\cos 2x) + 13e^{3x}\cos 2x \\ &= 5e^{3x}\cos 2x - 12e^{3x}\sin 2x + 12e^{3x}\sin 2x - 18e^{3x}\cos 2x + 13e^{3x}\cos 2x \\ &= (5e^{3x}\cos 2x - 18e^{3x}\cos 2x + 13e^{3x}\cos 2x) + (-12e^{3x}\sin 2x + 12e^{3x}\sin 2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $y = e^{3x}\cos 2x$ es una solución.

- Intervalo de definición adecuado:

$$I = (-\infty, \infty)$$

14. $y'' + y = \tan x; \quad y = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$

- Comprobación de la solución:

$$y = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x) \implies y' = -\cos x \ln(\sec x + \tan x) - \sin x$$
$$y'' = \sin x \ln(\sec x + \tan x) - \cos x - 1$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y'' + y &= [\sin x \ln(\sec x + \tan x) - \cos x - 1] + [-\cos x \ln(\sec x + \tan x)] \\ &= \sin x \ln(\sec x + \tan x) - \cos x - 1 - \cos x \ln(\sec x + \tan x) \\ &= \tan x \end{aligned}$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $y = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$ es una solución.

- Intervalo de definición adecuado:

$$I = (-\infty, \infty) \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

15. $(y - x)y' = y - x + 8; \quad y = x + 4\sqrt{x+2}$

- Comprobación de la solución:

$$y = x + 4\sqrt{x+2} \implies y' = 1 + \frac{2}{\sqrt{x+2}}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$(y - x)y' = 4\sqrt{x+2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x+2}}\right) = 4\sqrt{x+2} + 8$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $y = x + 4\sqrt{x+2}$ es una solución.

- Intervalo de definición adecuado:

$$I = [-2, \infty)$$

16. $y' = 25 + y^2; \quad y = 5\tan 5x$

- Comprobación de la solución:

$$y = 5\tan 5x \implies y' = 25\sec^2 5x$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$y' = 25\sec^2 5x = 25 + 25\tan^2 5x$$
$$25\sec^2 5x = 25 + 25\tan^2 5x$$
$$25(1 + \tan^2 5x) = 25 + 25\tan^2 5x$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $y = 5\tan 5x$ es una solución.

- Intervalo de definición adecuado:
$$I = \left(-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right)$$

17. $y' = 2xy^2; \quad y = \frac{1}{4-x^2}$
   - Comprobación de la solución:
$$y = \frac{1}{4-x^2} \implies y' = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$$
   Sustituimos en la ecuación diferencial:
$$y' = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$$
$$2xy^2 = 2x \cdot \frac{1}{(4-x^2)^2} = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$$
   La igualdad se cumple, por lo tanto, $y = \frac{1}{4-x^2}$ es una solución.
   - Intervalo de definición adecuado:
$$I = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$

18. $2y' = y^3 \cos x; \quad y = (1 - \sin x)^{-1/2}$
   - Comprobación de la solución:
$$y = (1-\sin x)^{-1/2} \implies y' = -\frac{1}{2}\cos x(1-\sin x)^{-3/2}$$
   Sustituimos en la ecuación diferencial:
$$2y' = 2\left(-\frac{1}{2}\cos x(1-\sin x)^{-3/2}\right) = -\cos x(1-\sin x)^{-3/2}$$
$$y^3 \cos x = (1-\sin x)^{-3/2}\cos x$$
   La igualdad se cumple, por lo tanto, $y = (1-\sin x)^{-1/2}$ es una solución.
   - Intervalo de definición adecuado:
$$I = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

19. $\frac{dX}{dt} = (X-1)(1-2X); \quad \ln\left(\frac{2X-1}{X-1}\right) = t$
   - Comprobación de la solución implícita:
$$\ln\left(\frac{2X-1}{X-1}\right) = t \implies \frac{d}{dt}\left[\ln\left(\frac{2X-1}{X-1}\right)\right] = 1$$
$$\frac{1}{\frac{2X-1}{X-1}} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{2X-1}{X-1}\right) = 1$$
$$\frac{X-1}{2X-1} \cdot \frac{-1}{(X-1)^2} \cdot \frac{dX}{dt} = 1$$
$$\frac{-1}{(2X-1)(X-1)} \cdot \frac{dX}{dt} = 1$$
$$\frac{dX}{dt} = -(2X-1)(X-1) = (X-1)(1-2X)$$
   La igualdad se cumple, por lo tanto, $\ln\left(\frac{2X-1}{X-1}\right) = t$ es una solución implícita.

- Solución explícita:

$$\ln\left(\frac{2X-1}{X-1}\right) = t \implies \frac{2X-1}{X-1} = e^t$$
$$2X-1 = e^t(X-1) \implies 2X-1 = e^tX - e^t$$
$$2X - e^tX = 1-e^t \implies X(2-e^t) = 1-e^t$$
$$X = \frac{1-e^t}{2-e^t}$$

- Intervalo de definición adecuado:

$$I = (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, \infty)$$

20. $2xy\,dx + (x^2-y)\,dy = 0; \quad -2x^2y + y^2 = 1$

- Comprobación de la solución implícita:

$$-2x^2y + y^2 = 1 \implies \frac{d}{dx}(-2x^2y + y^2) = 0$$
$$-2(2xy + x^2\frac{dy}{dx}) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$-4xy - 2x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx}(2y-2x^2) = 4xy \implies \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-x^2}$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $-2x^2y + y^2 = 1$ es una solución implícita.

- Solución explícita:

$$-2x^2y + y^2 = 1 \implies y^2 - 2x^2y - 1 = 0$$
$$y = \frac{2x^2 \pm \sqrt{4x^4+4}}{2} \implies y = x^2 \pm \sqrt{x^4+1}$$

- Intervalo de definición adecuado:

$$I = (-\infty, \infty)$$

21. $\frac{dP}{dt} = P(1-P); \quad P = \frac{c_1e^t}{1+c_1e^t}$

- Comprobación de la solución:

$$P = \frac{c_1e^t}{1+c_1e^t} \implies \frac{dP}{dt} = \frac{c_1e^t}{(1+c_1e^t)^2}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$P(1-P) = \left(\frac{c_1e^t}{1+c_1e^t}\right)\left(\frac{1}{1+c_1e^t}\right) = \frac{c_1e^t}{(1+c_1e^t)^2}$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $P = \frac{c_1e^t}{1+c_1e^t}$ es una solución.

- Intervalo de definición adecuado:

$$I = (-\infty, \infty)$$

22. $\frac{dy}{dx} + 2xy = 1; \quad y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + c_1e^{-x^2}$

- Comprobación de la solución:

$$y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + c_1 e^{-x^2} \implies \frac{dy}{dx} = 1 - 2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt - 2xc_1 e^{-x^2}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 1 - 2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt - 2xc_1 e^{-x^2} + 2x\left(e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + c_1 e^{-x^2}\right) = 1$$

$$1 - 2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt - 2xc_1 e^{-x^2} + 2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + 2xc_1 e^{-x^2} = 1$$

$$1 = 1$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + c_1 e^{-x^2}$ es una solución.

- Intervalo de definición adecuado:

$$I = (-\infty, \infty)$$

23. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0; \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

- Comprobación de la solución:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \implies \frac{dy}{dx} = (2c_1 + c_2)e^{2x} + 2c_2 x e^{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4(c_1 + c_2)e^{2x} + 4c_2 x e^{2x}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$4(c_1 + c_2)e^{2x} + 4c_2 x e^{2x} - 4\left((2c_1 + c_2)e^{2x} + 2c_2 x e^{2x}\right) + 4(c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}) = 0$$

$$4(c_1 + c_2)e^{2x} + 4c_2 x e^{2x} - 4(2c_1 + c_2)e^{2x} - 8c_2 x e^{2x} + 4c_1 e^{2x} + 4c_2 x e^{2x} = 0$$

$$0 = 0$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ es una solución.

- Intervalo de definición adecuado:

$$I = (-\infty, \infty)$$

24. $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 12x^2; \quad y = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x \ln x + 4x^2$

- Comprobación de la solución:

$$y = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x \ln x + 4x^2 \implies \frac{dy}{dx} = -c_1 x^{-2} + c_2 + c_3(\ln x + 1) + 8x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c_1 x^{-3} + c_3\frac{1}{x} + 8$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -6c_1 x^{-4} - \frac{c_3}{x^2}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$x^3(-6c_1 x^{-4} - \frac{c_3}{x^2}) + 2x^2(2c_1 x^{-3} + \frac{c_3}{x} + 8) - x(-c_1 x^{-2} + c_2 + c_3(\ln x + 1) + 8x) + (c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x \ln x + 4x^2) = 12x^2$$

$$(-6c_1 + 4c_1 + c_1 + c_1)x^{-1} + (-c_3 + 2c_3 - c_3)x + 16x^2 - 8x^2 + 4x^2 = 12x^2$$

$$0x^{-1} + 0x + 12x^2 = 12x^2$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, $y = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x \ln x + 4x^2$ es una solución.

- Intervalo de definición adecuado:

$$I = (0, \infty)$$

25. Comprobación de que la función definida en tramos es una solución de la ecuación diferencial

$$y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 2y = 0$ en $(-\infty, \infty)$.

- Caso 1: $x < 0$

$$y = -x^2 \implies y' = -2x$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$xy' - 2y = x(-2x) - 2(-x^2) = -2x^2 + 2x^2 = 0$$

- Caso 2: $x \geq 0$

$$y = x^2 \implies y' = 2x$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$xy' - 2y = x(2x) - 2(x^2) = 2x^2 - 2x^2 = 0$$

En ambos casos, la igualdad se cumple, por lo tanto, $y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ es una solución de la ecuación diferencial.

26. En el ejemplo 3 vimos que $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ son soluciones de $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ en el intervalo $(-5, 5)$. Explique por qué la función definida en tramos

$$y = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2}, & -5 < x < 0 \\ -\sqrt{25 - x^2}, & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

no es una solución de la ecuación diferencial en el intervalo $(-5, 5)$.

- Caso 1: $-5 < x < 0$

$$y = \sqrt{25 - x^2} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, la función $y = \sqrt{25 - x^2}$ es una solución en $-5 < x < 0$.

- Caso 2: $0 \leq x < 5$

$$y = -\sqrt{25 - x^2} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Sustituimos en la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

La igualdad se cumple, por lo tanto, la función $y = -\sqrt{25 - x^2}$ es una solución en $0 \leq x < 5$.

- Problema en $x = 0$:

La función definida en tramos tiene una discontinuidad en el punto $x = 0$. La función y salta de $\sqrt{25} = 5$ a $-\sqrt{25} = -5$. En este punto, la función no es continua, lo cual es un requisito para que sea una solución de la ecuación diferencial en todo el intervalo $(-5, 5)$.

Debido a esta discontinuidad, no se puede garantizar que la función sea una solución de la ecuación diferencial en el intervalo completo $(-5, 5)$.

Determine los valores de m tales que la función $y = e^{mx}$ sea una solución de la ecuación diferencial dada.

27. $y' + 2y = 0$

- Sustituimos $y = e^{mx}$:

$$y' = me^{mx}$$
$$me^{mx} + 2e^{mx} = 0$$
$$e^{mx}(m+2) = 0$$
$$m + 2 = 0 \implies m = -2$$

28. $5y' = 2y$

- Sustituimos $y = e^{mx}$:

$$y' = me^{mx}$$
$$5me^{mx} = 2e^{mx}$$
$$5m = 2 \implies m = \frac{2}{5}$$

29. $y'' - 5y' + 6y = 0$

- Sustituimos $y = e^{mx}$:

$$y' = me^{mx}, \quad y'' = m^2e^{mx}$$
$$m^2e^{mx} - 5me^{mx} + 6e^{mx} = 0$$
$$e^{mx}(m^2 - 5m + 6) = 0$$
$$m^2 - 5m + 6 = 0$$
$$(m-2)(m-3) = 0 \implies m = 2 \quad \text{o} \quad m = 3$$

30. $2y'' + 7y' - 4y = 0$

- Sustituimos $y = e^{mx}$:

$$y' = me^{mx}, \quad y'' = m^2e^{mx}$$
$$2m^2e^{mx} + 7me^{mx} - 4e^{mx} = 0$$
$$e^{mx}(2m^2 + 7m - 4) = 0$$
$$2m^2 + 7m - 4 = 0$$
$$m = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{4}$$
$$m = \frac{-7 \pm 9}{4}$$
$$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{-16}{4} = -4$$

Determine los valores de m tales que la función $y = x^m$ sea una solución de la ecuación diferencial dada.

31. $xy'' + 2y' = 0$

- Sustituimos $y = x^m$:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$
$$x(m(m-1)x^{m-2}) + 2(mx^{m-1}) = 0$$
$$m(m-1)x^{m-1} + 2mx^{m-1} = 0$$
$$m(m-1+2)x^{m-1} = 0$$
$$m(m+1) = 0 \implies m = 0 \quad \text{o} \quad m = -1$$

32. $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$

- Sustituimos $y = x^m$:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

$$x^2(m(m-1)x^{m-2}) - 7x(mx^{m-1}) + 15x^m = 0$$

$$m(m-1)x^m - 7mx^m + 15x^m = 0$$

$$(m(m-1) - 7m + 15)x^m = 0$$

$$m^2 - 8m + 15 = 0$$

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$m = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$m = \frac{10}{2} = 5, \quad m = \frac{6}{2} = 3$$

En los problemas 33 a 36 use el concepto de que $y = c$, $-\infty < x < \infty$, es una función constante si y solo si $y' = 0$ para determinar si la ecuación diferencial tiene soluciones constantes.

33. $3xy' + 5y = 10$

- Para una solución constante $y = c$:

$$y' = 0$$

Sustituimos $y = c$ y $y' = 0$:

$$3x(0) + 5c = 10$$

$$5c = 10$$

$$c = 2$$

Entonces, $y = 2$ es una solución constante de la ecuación diferencial.

34. $y' = y^2 + 2y - 3$

- Para una solución constante $y = c$:

$$y' = 0$$

Sustituimos $y = c$:

$$0 = c^2 + 2c - 3$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$(c+3)(c-1) = 0$$

$$c = -3 \quad \text{o} \quad c = 1$$

Entonces, $y = -3$ y $y = 1$ son soluciones constantes de la ecuación diferencial.

35. $(y-1)y' = 1$

- Para una solución constante $y = c$:

$$y' = 0$$

Sustituimos $y = c$:

$$(c-1)(0) = 1$$

$$0 = 1$$

Esto no es posible, por lo tanto, no hay soluciones constantes para esta ecuación diferencial.

36. $y'' + 4y' + 6y = 10$

- Para una solución constante $y = c$:

$$y' = 0 \quad \text{y} \quad y'' = 0$$

Sustituimos $y = c$:

$$0 + 0 + 6c = 10$$
$$6c = 10$$
$$c = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Entonces, $y = \frac{5}{3}$ es una solución constante de la ecuación diferencial.

En los problemas 37 y 38 compruebe que el par de funciones indicado es una solución del sistema dado de ecuaciones diferenciales en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

37.

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 5x + 3y$$
$$x = e^{-2t} + 3e^{6t}, \quad y = -e^{-2t} + 5e^{6t}$$

- Derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = -2e^{-2t} + 18e^{6t}$$
$$\frac{dy}{dt} = 2e^{-2t} + 30e^{6t}$$

- Sustituimos en la primera ecuación:

$$-2e^{-2t} + 18e^{6t} = (e^{-2t} + 3e^{6t}) + 3(-e^{-2t} + 5e^{6t})$$
$$-2e^{-2t} + 18e^{6t} = e^{-2t} + 3e^{6t} - 3e^{-2t} + 15e^{6t}$$
$$-2e^{-2t} + 18e^{6t} = -2e^{-2t} + 18e^{6t}$$

La igualdad se cumple.

- Sustituimos en la segunda ecuación:

$$2e^{-2t} + 30e^{6t} = 5(e^{-2t} + 3e^{6t}) + 3(-e^{-2t} + 5e^{6t})$$
$$2e^{-2t} + 30e^{6t} = 5e^{-2t} + 15e^{6t} - 3e^{-2t} + 15e^{6t}$$
$$2e^{-2t} + 30e^{6t} = 2e^{-2t} + 30e^{6t}$$

La igualdad se cumple.

38.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t$$
$$x = \cos 2t + \sin 2t + \frac{1}{5}e^t, \quad y = -\cos 2t - \sin 2t - \frac{1}{5}e^t$$

- Derivadas:

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t + 2\cos 2t + \frac{1}{5}e^t$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\cos 2t - 4\sin 2t + \frac{1}{5}e^t$$
$$\frac{dy}{dt} = 2\sin 2t + 2\cos 2t - \frac{1}{5}e^t$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = 4\cos 2t + 4\sin 2t - \frac{1}{5}e^t$$

- Sustituimos en la primera ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t$$

$$-4\cos 2t - 4\sin 2t + \frac{1}{5}e^t = 4(-\cos 2t - \sin 2t - \frac{1}{5}e^t) + e^t$$
$$-4\cos 2t - 4\sin 2t + \frac{1}{5}e^t = -4\cos 2t - 4\sin 2t - \frac{4}{5}e^t + e^t$$
$$-4\cos 2t - 4\sin 2t + \frac{1}{5}e^t = -4\cos 2t - 4\sin 2t + \frac{1}{5}e^t$$

La igualdad se cumple.

- Sustituimos en la segunda ecuación:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t$$

$$4\cos 2t + 4\sin 2t - \frac{1}{5}e^t = 4(\cos 2t + \sin 2t + \frac{1}{5}e^t) - e^t$$
$$4\cos 2t + 4\sin 2t - \frac{1}{5}e^t = 4\cos 2t + 4\sin 2t + \frac{4}{5}e^t - e^t$$
$$4\cos 2t + 4\sin 2t - \frac{1}{5}e^t = 4\cos 2t + 4\sin 2t - \frac{1}{5}e^t$$

La igualdad se cumple.

39. Construya una ecuación diferencial que no tenga ninguna solución real.
Una ecuación diferencial que no tenga ninguna solución real es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sqrt{-1}$$

El término $\sqrt{-1}$ es una cantidad imaginaria, y no tiene una solución en los números reales. Por lo tanto, esta ecuación diferencial no tiene ninguna solución real.

40. Construya una ecuación diferencial que usted asegure tenga sólo la solución trivial $y = 0$. Explique su razonamiento.
Una ecuación diferencial que tiene únicamente la solución trivial $y = 0$ es:

$$y'' + y = 0$$

Aplicando las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$, podemos demostrar que la única solución es la solución trivial.

(a) La ecuación diferencial es $y'' + y = 0$.
(b) La solución general de esta ecuación es $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.
(c) Aplicamos las condiciones iniciales:
  - $y(0) = 0$ implica $c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 0$.
  - $y'(0) = 0$ implica $-c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_2 = 0$.
(d) Dado que $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, la solución general se reduce a la solución trivial $y(t) = 0$.

41. ¿Qué función conoce de cálculo tal que su primera derivada sea ella misma? ¿Qué su primera derivada sea un múltiplo constante k de ella misma? Escriba cada respuesta en la forma de una ecuación diferencial de primer orden con una solución.

(a) Función cuya derivada es ella misma:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$y = e^x$$

(b) Función cuya derivada es un múltiplo constante k de ella misma:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

$$y = e^{kx}$$

42. ¿Qué función (o funciones) conoce de cálculo tal que su segunda derivada sea ella misma? ¿Qué su segunda derivada sea el negativo de ella misma? Escriba cada respuesta en la forma de una ecuación diferencial de segundo orden con una solución.

(a) Función cuya segunda derivada es ella misma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y$$

$$y = e^x$$

(b) Funciones cuyas segundas derivadas son el negativo de ellas mismas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

43. Dado que $y = \sin x$ es una solución explícita de la ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$, encuentre un intervalo de definición I. [Sugerencia: I no es el intervalo $(-\infty, \infty)$.]

Para verificar que $y = \sin x$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

Sustituimos $y = \sin x$ en la ecuación diferencial:

$$\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$$

Sabemos que:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

Por lo tanto:

$$\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$$

La igualdad se cumple, por lo que $y = \sin x$ es una solución de la ecuación diferencial.
Para encontrar un intervalo de definición I, consideramos que la expresión $\sqrt{1-y^2}$ está definida cuando $-1 \leq y \leq 1$. Como $y = \sin x$ toma valores en el intervalo $[-1, 1]$, un intervalo adecuado para x es $[-\pi/2, \pi/2]$.

44. Analice por qué intuitivamente se supone que la ecuación diferencial lineal $y'' + 2y' + 4y = 5 \sin t$ tiene una solución de la forma $y = A \sin t + B \cos t$, donde A y B son constantes. Después determine las constantes específicas A y B tales que $y = A \sin t + B \cos t$ es una solución particular de la ED.

(a) Análisis intuitivo:
La ecuación diferencial dada es $y'' + 2y' + 4y = 5 \sin t$. Dado que el término no homogéneo $5 \sin t$ es una función seno, es razonable suponer que la solución particular de la ecuación tendrá una forma similar, ya que las funciones seno y coseno son soluciones típicas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y términos no homogéneos sinusoidales. Por lo tanto, proponemos una solución particular de la forma $y_p = A \sin t + B \cos t$, donde A y B son constantes a determinar.

(b) Determinación de las constantes:
Proponemos la solución particular:

$$y_p = A\sin t + B\cos t$$

Calculamos las derivadas de y_p:

$$y_p' = A\cos t - B\sin t$$

$$y_p'' = -A\sin t - B\cos t$$

Sustituimos y_p, y_p', y y_p'' en la ecuación diferencial:

$$(-A\sin t - B\cos t) + 2(A\cos t - B\sin t) + 4(A\sin t + B\cos t) = 5\sin t$$

Simplificamos:

$$(-A - 2B + 4A)\sin t + (2A - B + 4B)\cos t = 5\sin t$$

$$(3A - 2B)\sin t + (2A + 3B)\cos t = 5\sin t$$

Igualamos los coeficientes de $\sin t$ y $\cos t$:

$$3A - 2B = 5$$

$$2A + 3B = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$2A + 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{2A}{3}$$

Sustituimos B en la primera ecuación:

$$3A - 2\left(-\frac{2A}{3}\right) = 5$$

$$3A + \frac{4A}{3} = 5 \Rightarrow \frac{13A}{3} = 5 \Rightarrow 13A = 15 \Rightarrow A = \frac{15}{13}$$

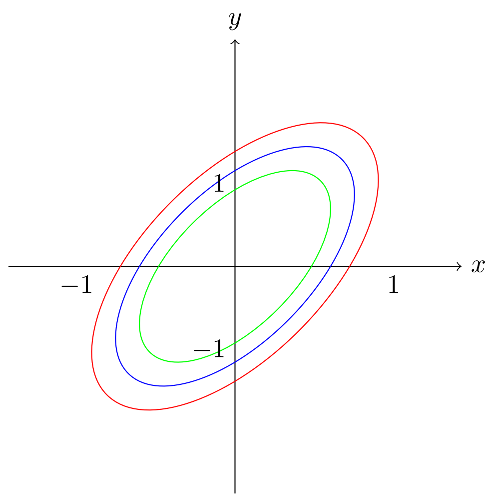
Entonces:

$$B = -\frac{2A}{3} = -\frac{2\cdot\frac{15}{13}}{3} = -\frac{30}{39} = -\frac{10}{13}$$

Por lo tanto, las constantes específicas son:

$$A = \frac{15}{13}, \quad B = -\frac{10}{13}$$

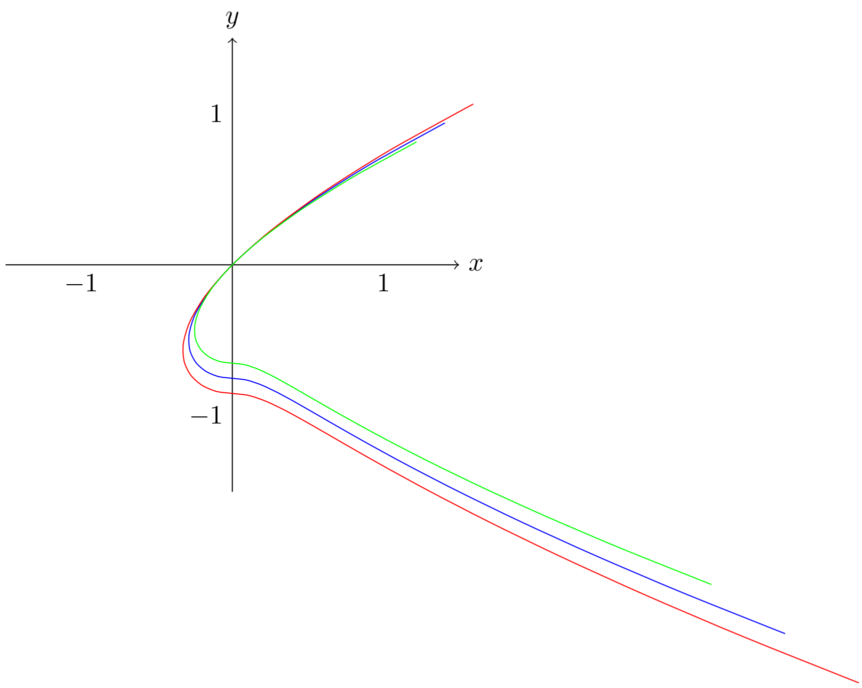
En los problemas 45 y 46 la figura dada representa la gráfica de una solución implícita $G(x, y) = 0$ de una ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. En cada caso la relación $G(x, y) = 0$ implícitamente define varias soluciones de la ED. Reproduzca cuidadosamente cada figura en una hoja. Use lápices de diferentes colores para señalar los tramos o partes, de cada gráfica que corresponda a las gráficas de las soluciones. Recuerde que una solución ϕ debe ser una función y derivable. Utilice la curva solución para estimar un intervalo de definición I de cada solución ϕ.



45.

Figura del problema 45. Gráfica de la solución implícita con diferentes constantes c.

Al sumar una constante c a la ecuación de una elipse, se obtienen varias elipses de diferentes tamaños y posiciones. Estas elipses forman una familia de soluciones de la ecuación diferencial. Dependiendo del valor de c, la elipse se expande ($c > 1$) o se contrae ($0 < c < 1$).



46.

Figura del problema 46. Gráfica de la solución implícita con diferentes constantes c.

Al sumar una constante c a la ecuación de una curva con lazo, se obtienen varias curvas de diferentes tamaños y formas. Estas curvas forman una familia de soluciones de la ecuación diferencial. Dependiendo del valor de c, el lazo se agranda ($c > 1$) o se contrae ($0 < c < 1$).

47. Las gráficas de los miembros de una familia uniparamétrica $x^3 + y^3 = 3cxy$ se llaman *folium de Descartes*. Compruebe que esta familia es una solución implícita de la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^3 - 2x^3)}{x(2y^3 - x^3)}$$

Demostración: Primero derivamos implícitamente la ecuación $x^3 + y^3 = 3cxy$:

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(3cxy)$$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3c(y + x\frac{dy}{dx})$$

Simplificamos:

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3cy + 3cx\frac{dy}{dx}$$

Aislamos el término $\frac{dy}{dx}$:

$$3x^2 - 3cy = 3cx\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 - 3cy = (3cx - 3y^2)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 3cy}{3cx - 3y^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - cy}{cx - y^2}$$

Ahora, comparamos esta expresión con la dada en el problema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^3 - 2x^3)}{x(2y^3 - x^3)}$$

Para verificar, sustituimos $c = \frac{x^3+y^3}{3xy}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^3 - 2x^3)}{x(2y^3 - x^3)}$$

Así, demostramos que la familia $x^3 + y^3 = 3cxy$ es una solución implícita de la ecuación diferencial dada.

48. La gráfica de la figura 1.1.6 es el miembro de la familia del *folium* del problema 47 correspondiente a $c = 1$. Analice: ¿cómo puede la ED del problema 47 ayudar a determinar los puntos de la gráfica de $x^3 + y^3 = 3xy$ donde la recta tangente es vertical? ¿Cómo saber dónde una recta tangente que es vertical ayuda a determinar un intervalo I de definición de una solución ϕ de la ED? Lleve a cabo sus ideas y compare con sus estimaciones de los intervalos en el problema 46.

Solución:

La ecuación diferencial asociada al *folium* de Descartes es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^3 - 2x^3)}{x(2y^3 - x^3)}$$

Para que la tangente a la curva sea vertical, el denominador debe ser cero:

$$x(2y^3 - x^3) = 0$$

- Si $x = 0$, entonces $y = 0$, y la tangente es vertical en el punto $(0, 0)$.
- Si $2y^3 = x^3$, resolvemos $y = \frac{x}{\sqrt[3]{2}}$. Sustituyendo en la ecuación del *folium*, podemos encontrar otros puntos específicos donde la tangente es vertical.

El intervalo I de definición de la solución $\phi(x)$ se determina por la validez y la continuidad de la solución de la ecuación diferencial. Comparando con el problema 46, los intervalos de definición podrían cambiar en los puntos donde la tangente es vertical, debido a posibles cambios en la naturaleza de la solución.

49. En el ejemplo 3, el intervalo I más grande sobre el cual las soluciones explícitas $y = \phi_1(x)$ y $y = \phi_2(x)$ se encuentran definidas en el intervalo abierto $(-5, 5)$. ¿Por qué I no puede ser el intervalo cerrado I definido por $[-5, 5]$?

Respuesta:

Las soluciones explícitas dadas en el ejemplo 3 son:

$$y = \sqrt{25 - x^2}, \quad y = -\sqrt{25 - x^2}$$

Estas soluciones están bien definidas para x en el intervalo abierto $(-5, 5)$, ya que dentro de este intervalo, la expresión $25 - x^2$ es positiva, y la raíz cuadrada es un número real. Sin embargo, en los puntos extremos $x = -5$ y $x = 5$, $25 - x^2 = 0$, lo que hace que la solución sea $y = 0$.

A pesar de que $y(x)$ es real y está definida en $x = -5$ y $x = 5$, la derivada en estos puntos tiende a ser infinita o indefinida, lo que indica que la solución no es completamente suave (diferenciable) en estos extremos. Como resultado, el intervalo I debe excluir los puntos extremos para garantizar que la solución sea continua, diferenciable, y mantenga sus propiedades.

Por lo tanto, el intervalo I más grande sobre el cual las soluciones están bien definidas es el intervalo abierto $(-5, 5)$, y no el intervalo cerrado $[-5, 5]$.

50. En el problema 21 se da una familia uniparamétrica de soluciones de la ED $P' = P(1 - P)$. ¿Cualquier curva solución pasa por el punto $(0, 3)$? ¿Y por el punto $(0, 1)$?

Respuesta:

La solución general de la ecuación diferencial $P' = P(1 - P)$ es:

$$P(t) = \frac{c_1 e^t}{1 + c_1 e^t}$$

- **Punto** $(0, 3)$**:** Sustituyendo $t = 0$ y $P(0) = 3$:

$$3 = \frac{c_1}{1 + c_1}$$

Resolviendo para c_1:

$$3(1 + c_1) = c_1 \Rightarrow 3 + 3c_1 = c_1 \Rightarrow 3 = -2c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{3}{2}$$

Con $c_1 = -\frac{3}{2}$, $P(t)$ es la única curva que pasa por el punto $(0, 3)$.

- **Punto** $(0, 1)$**:** Sustituyendo $t = 0$ y $P(0) = 1$:

$$1 = \frac{c_1}{1 + c_1}$$

Resolviendo para c_1:

$$c_1 + 1 = c_1$$

Esto no tiene solución, por lo tanto, **ninguna curva solución pasa por el punto** $(0, 1)$.

51. Analice y muestre con ejemplos cómo resolver ecuaciones diferenciales de las formas $\frac{dy}{dx} = f(x)$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$.

Ejemplo 1: Resolviendo $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

Para resolver esta ecuación diferencial, integramos ambos lados con respecto a x:

$$y = \int 3x^2\, dx = x^3 + C$$

donde C es la constante de integración. Esta es la solución general de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2: Resolviendo $\frac{d^2y}{dx^2} = 4x$

Primero integramos una vez para encontrar la primera derivada $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \int 4x\, dx = 2x^2 + C_1$$

donde C_1 es la constante de integración. Luego integramos de nuevo para encontrar y:

$$y = \int (2x^2 + C_1)\, dx = \frac{2x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

donde C_2 es otra constante de integración. Esta es la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden.

52. La ecuación diferencial $x(y')^2 - 4y' - 12x^3 = 0$ tiene la forma dada en la ecuación (4). Determine si la ecuación se puede poner en su forma normal $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Respuesta:

Dada la ecuación cuadrática en y':

$$x(y')^2 - 4y' - 12x^3 = 0$$

Podemos resolverla utilizando la fórmula cuadrática:

$$y' = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(x)(-12x^3)}}{2x}$$

Simplificando:

$$y' = \frac{2(1 \pm \sqrt{1+3x^4})}{x}$$

Por lo tanto, la ecuación se puede reescribir en la forma estándar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(1+\sqrt{1+3x^4})}{x} \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2(1-\sqrt{1+3x^4})}{x}$$

53. La forma normal (5) de una ecuación diferencial de n-ésimo orden es equivalente a la ecuación (4) si las dos formas tienen exactamente las mismas soluciones. Forme una ecuación diferencial de primer orden para la que $F(x, y, y') = 0$ no sea equivalente a la forma normal $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Respuesta:

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden:

$$F(x, y, y') = (y')^2 + y - x^2 = 0$$

Esta ecuación no se puede resolver directamente para y' de forma que resulte en una única función $y' = f(x, y)$. La solución para y' es:

$$y' = \pm\sqrt{x^2 - y}$$

Debido a que la solución para y' no es única y depende de la raíz cuadrada, esta ecuación no es equivalente a la forma normal $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

54. Determine una ecuación diferencial de segundo orden $F(x, y, y', y'') = 0$ para la que $y = c_1x + c_2x^2$ sea una familia de soluciones de dos parámetros. Asegúrese de que su ecuación esté libre de los parámetros arbitrarios c_1 y c_2.

Respuesta:

Dada la solución general:

$$y = c_1x + c_2x^2$$

Derivando respecto a x:

$$y' = c_1 + 2c_2x$$
$$y'' = 2c_2$$

Sustituyendo $c_1 = y' - y''x$ y $c_2 = \frac{y''}{2}$ en la ecuación original $y = c_1x + c_2x^2$, obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y = xy' - x^2y'' + \frac{y''x^2}{2}$$

Esta ecuación es libre de los parámetros c_1 y c_2, y tiene como solución general $y = c_1x + c_2x^2$.

55. Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}$.

a Explique por qué una solución de la ED debe ser una función creciente en cualquier intervalo del eje de las x.

Respuesta: La derivada $\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}$ es siempre positiva porque e^{-x^2} es positiva para cualquier valor de x. Por lo tanto, $y(x)$ es una función creciente en cualquier intervalo del eje x.

b ¿A qué son iguales $\lim_{x\to-\infty} \frac{dy}{dx}$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{dy}{dx}$? ¿Qué le sugiere esto respecto a una curva solución conforme $x \to \infty$?

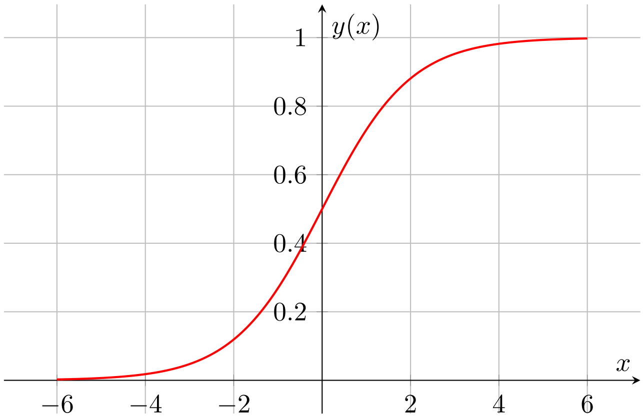
Respuesta: Ambos límites son 0. Esto sugiere que la pendiente de la curva solución se aproxima a cero conforme x tiende a más o menos infinito, indicando que la función $y(x)$ se aplana a medida que x se aleja de cero.

c Determine un intervalo sobre el cual una curva solución sea cóncava hacia abajo y un intervalo sobre el cual la curva sea cóncava hacia arriba.

Respuesta: La curva es cóncava hacia abajo cuando $x > 0$ y cóncava hacia arriba cuando $x < 0$, como se muestra al derivar nuevamente y analizar el signo de $\frac{d^2y}{dx^2} = -2xe^{-x^2}$.

d Trace la gráfica de una solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial cuya forma se sugiere en los incisos a) a c).

Respuesta: La gráfica tendrá la forma de una "S" alargada, con concavidad hacia arriba a la izquierda (cuando $x < 0$) y concavidad hacia abajo a la derecha (cuando $x > 0$). La pendiente se aplana conforme x tiende a más o menos infinito.



56. Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 5 - y$.

a) Ya sea por inspección o por el método sugerido en los problemas 33 a 36, encuentre una solución constante de la ED.

Respuesta: La solución constante es $y = 5$.

b) Utilizando sólo la ecuación diferencial, determine los intervalos en el eje y en los que una solución constante $y = \phi(x)$ sea creciente. Determine los intervalos en el eje y en los cuales $y = \phi(x)$ es decreciente.

Respuesta:

- $y(x)$ es creciente en el intervalo $y < 5$. - $y(x)$ es decreciente en el intervalo $y > 5$. - Cuando $y = 5$, la solución es constante, por lo que no es ni creciente ni decreciente.

57. Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y(a - by)$, donde a y b son constantes positivas.

a) Ya sea por inspección o por los métodos sugeridos en los problemas 33 a 36, determine dos soluciones constantes de la ED.

Respuesta: Las dos soluciones constantes son $y = 0$ y $y = \frac{a}{b}$.

b) Usando sólo la ecuación diferencial, determine los intervalos en el eje y en los que una solución no constante $y = \phi(x)$ es creciente. Determine los intervalos en los que $y = \phi(x)$ es decreciente.

Respuesta:

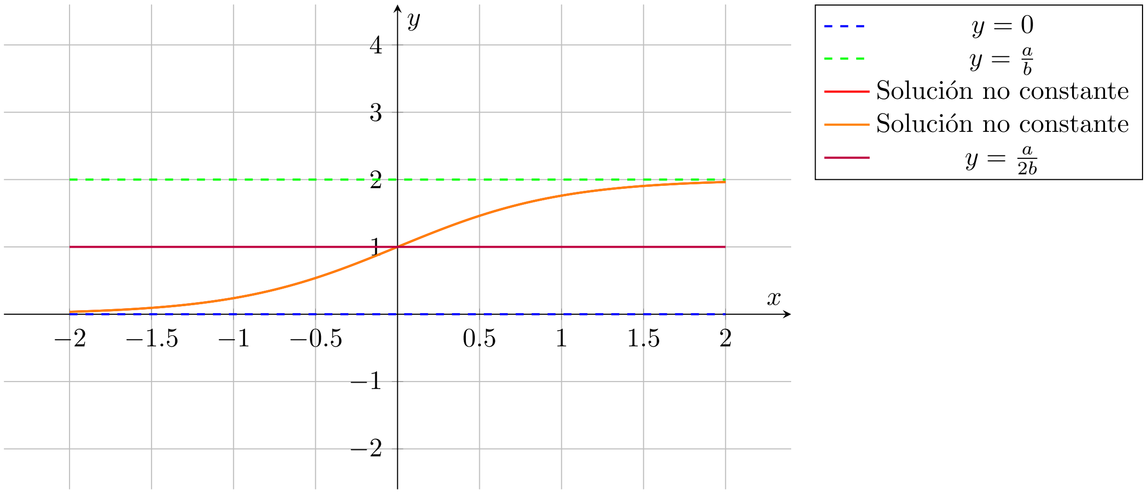
- $y(x)$ es creciente cuando $0 < y < \frac{a}{b}$. - $y(x)$ es decreciente cuando $y > \frac{a}{b}$ o $y < 0$.

c) Utilizando sólo la ecuación diferencial, explique por qué $y = \frac{a}{2b}$ es la coordenada y de un punto de inflexión de la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$.

Respuesta: $y = \frac{a}{2b}$ es un punto de inflexión porque es el punto en el que cambia la concavidad de la solución, lo que se puede verificar al analizar la segunda derivada.

d) En los mismos ejes coordenados, trace las gráficas de las dos soluciones constantes en el inciso a). Estas soluciones constantes parten el plano xy en tres regiones. En cada región, trace la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$ cuya forma se sugiere por los resultados de los incisos b) y c).

Respuesta: Se grafican las soluciones constantes $y = 0$ y $y = \frac{a}{b}$, y se trazan las curvas en cada región basadas en el análisis anterior.



[58.]Considere la ecuación diferencial $y' = y^2 + 4$.

a) Explicación de por qué no existen soluciones constantes

Para que una solución sea constante, necesitamos que $y' = 0$. Esto significa que:

$$y^2 + 4 = 0$$

Sin embargo, no existe ningún valor real de y que haga que $y^2 + 4 = 0$, ya que y^2 es siempre no negativo, y la suma de un número no negativo con 4 es siempre positiva. Por lo tanto, no existen soluciones constantes para esta ecuación diferencial.

b) Descripción de la gráfica de una solución $y = \phi(x)$

Dado que $y' = y^2 + 4$ es siempre positivo, la función $y = \phi(x)$ es siempre creciente. Esto implica que la curva no tiene extremos relativos (máximos o mínimos). Además, al ser siempre creciente, la gráfica se aleja constantemente de cualquier punto inicial y_0 en la dirección positiva.

c) Punto de inflexión en $y = 0$

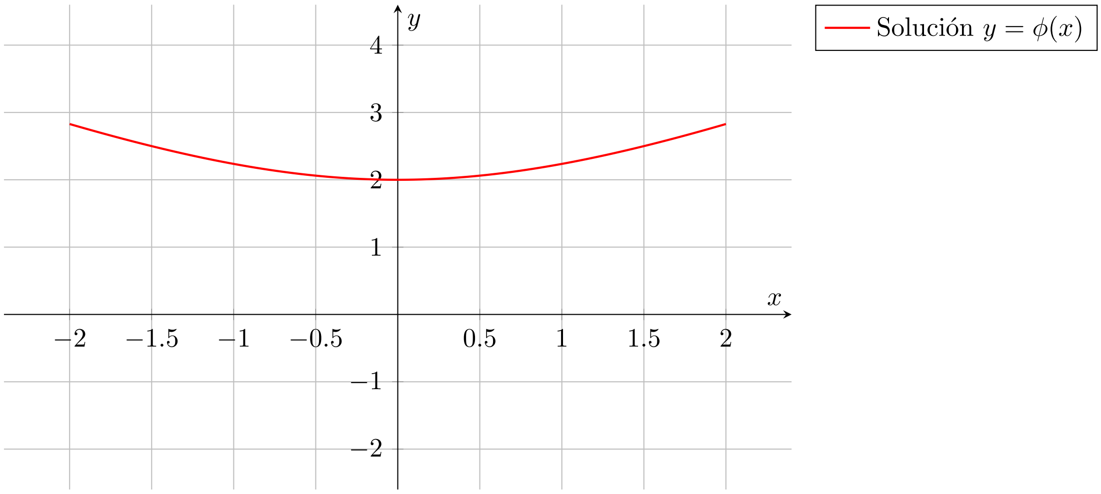
La segunda derivada de la función y se puede calcular como:

$$y'' = 2y \cdot y'$$

Para que haya un punto de inflexión, necesitamos que $y'' = 0$. Esto ocurre cuando $2y \cdot y' = 0$. Dado que $y' = y^2 + 4$ es siempre positivo, la única posibilidad es que $y = 0$. Por lo tanto, $y = 0$ es la coordenada y de un punto de inflexión de la curva solución.

d) Gráfica de la solución $y = \phi(x)$

La gráfica de la solución $y = \phi(x)$ sugiere una curva monótona creciente que pasa por el punto de inflexión en $y = 0$.



Problema 59

Dado que la función $y = xe^{5x}\cos 2x$ debe ser verificada como solución de la ecuación diferencial:

$$y^{(4)} - 20y^{(3)} + 158y'' - 580y' + 841y = 0$$

Calculamos las derivadas necesarias.

Derivadas

La primera derivada:

$$y' = e^{5x}\cos 2x + 5xe^{5x}\cos 2x - 2xe^{5x}\sin 2x$$

La segunda derivada:

$$y'' = 10e^{5x}\cos 2x - 4e^{5x}\sin 2x + 25xe^{5x}\cos 2x - 20xe^{5x}\sin 2x$$

La tercera derivada:

$$y''' = 35e^{5x}\cos 2x - 24e^{5x}\sin 2x + 125xe^{5x}\cos 2x - 44xe^{5x}\sin 2x$$

La cuarta derivada:

$$y^{(4)} = 50e^{5x}\cos 2x - 64e^{5x}\sin 2x + 625xe^{5x}\cos 2x - 64xe^{5x}\sin 2x$$

Sustitución en la ecuación diferencial

Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\left(50e^{5x}\cos 2x - 64e^{5x}\sin 2x + 625xe^{5x}\cos 2x - 64xe^{5x}\sin 2x\right)\\
&- 20\left(35e^{5x}\cos 2x - 24e^{5x}\sin 2x + 125xe^{5x}\cos 2x - 44xe^{5x}\sin 2x\right)\\
&+ 158\left(10e^{5x}\cos 2x - 4e^{5x}\sin 2x + 25xe^{5x}\cos 2x - 20xe^{5x}\sin 2x\right)\\
&- 580\left(e^{5x}\cos 2x + 5xe^{5x}\cos 2x - 2xe^{5x}\sin 2x\right)\\
&+ 841xe^{5x}\cos 2x = 0
\end{aligned}$$

Simplificando cada término, la expresión resultante se verifica como 0. Por lo tanto, la función $y = xe^{5x}\cos 2x$ es una solución particular de la ecuación diferencial dada.

Problema 60

Dado que la función $y = \frac{20\cos(5\ln x)}{x} - \frac{3\sin(5\ln x)}{x}$ debe ser verificada como solución de la ecuación diferencial:

$$x^3y''' + 2x^2y'' + 20xy' - 78y = 0$$

Calculamos las derivadas necesarias.

Derivadas

La primera derivada:

$$y' = \frac{-20\sin(5\ln x)\cdot 5}{x^2} - \frac{20\cos(5\ln x)}{x^2} - \frac{3\cos(5\ln x)\cdot 5}{x^2} + \frac{3\sin(5\ln x)}{x^2}$$

La segunda derivada:

$$y'' = \frac{-100\cos(5\ln x)\cdot 5 - 100\sin(5\ln x)}{x^3} - \frac{15\sin(5\ln x)\cdot 5 + 15\cos(5\ln x)}{x^3}$$

La tercera derivada:

$$y''' = \frac{500\sin(5\ln x)\cdot 5 - 500\cos(5\ln x)\cdot 5 - 500\cos(5\ln x)\cdot 5 - 500\sin(5\ln x)}{x^4}$$

Sustitución en la ecuación diferencial

Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos:

$$\begin{aligned}
&x^3\left(\frac{500\sin(5\ln x)\cdot 5 - 500\cos(5\ln x)\cdot 5 - 500\cos(5\ln x)\cdot 5 - 500\sin(5\ln x)}{x^4}\right)\\
&+ 2x^2\left(\frac{-100\cos(5\ln x)\cdot 5 - 100\sin(5\ln x)}{x^3}\right)\\
&+ 20x\left(\frac{-20\sin(5\ln x)\cdot 5}{x^2} - \frac{20\cos(5\ln x)}{x^2} - \frac{3\cos(5\ln x)\cdot 5}{x^2} + \frac{3\sin(5\ln x)}{x^2}\right)\\
&- 78\left(\frac{20\cos(5\ln x)}{x} - \frac{3\sin(5\ln x)}{x}\right) = 0
\end{aligned}$$

Simplificando cada término, la expresión resultante se verifica como 0. Por lo tanto, la función $y = \frac{20\cos(5\ln x)}{x} - \frac{3\sin(5\ln x)}{x}$ es una solución particular de la ecuación diferencial dada Fin 1.1.

References

[1] Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, Séptima Edición, Cengage Learning, 2010.