Solución Examen Final Física 1

Carlos Arturo Acosta Herrera

ca.acosta977@uniandes.edu.co

1. Punto 1

La distancia recorrida entre el tiempo t_i y el tiempo t_f es la integral de la velocidad respecto al tiempo:

$$d = \int_{t_i}^{t_f} v(t)dt$$

En otras palabras la distancia es el área bajo la curva de velocidad en función del tiempo. En este caso, el área bajo la curva es la suma del área de dos triangulos y un regtangulo:

$$\begin{aligned} d =& \frac{50m/s \cdot 15s}{2} + 50m/s(40s - 15s) \\ &+ \frac{50m/s(50s - 40s)}{2} \\ =& 375m + 1250m + 250m = 1875m \end{aligned}$$

2. Punto 2

La aceleración constante es la diferencia entre las velocidades sobre el tiempo transcurrido:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \\
&= \frac{(9i+7j)m/s-(3i-2j)m/s}{3s} \\
&= \frac{(6i+9j)m/s}{3s} \\
&= (2i+3j)m/s^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto la posición final $\vec{r}$ es:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r_0}+\frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\
&= 0+\frac{1}{2}((2i+3j)m/s^2)(3s)^2 \\
&= (9i+13.5j)m
\end{aligned}$$

3. Punto 3

La aceleración centrípeta (a_c) se relaciona con la velocidad tangencial (v_t) y el radio (R) en un movimiento circular uniforme mediante:

$$\begin{aligned}
a_c &= \frac{v_t^2}{R} \\
v_t^2 &= a_c \cdot R \\
v_t &= \sqrt{a_c \cdot R}
\end{aligned}$$

El resto del ejercicio se desarrolla como un tiro parabólico con velocidad inicial igual a la velocidad tangencial del movimiento circular uniforme.

La altura (y) estaría dada por:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Teniendo en cuenta que y_0 es la altura inicial (H) y que t es el tiempo de vuelo dado por $t = 2H/v_t$:

$$0 = H - \frac{1}{2}g\left(\frac{2H}{v_t}\right)^2$$
$$H = \frac{1}{2}g\frac{4H^2}{a_c \cdot R}$$
$$a_c = 2g\frac{H^2}{H \cdot R} = 2g\frac{H}{R}$$

4. Punto 4

El tiempo de caída (t_c) estaría dado por:

$$0 = H - \frac{1}{2}gt_c^2$$
$$t_c^2 = 2\frac{H}{g}$$
$$t_c = \sqrt{2\frac{H}{g}}$$

Por lo que la altura de la bola a la mitad de la caída sería:

$$\begin{aligned} h &= H - \frac{1}{2}g\left(\frac{t_c}{2}\right)^2 \\ &= H - \frac{1}{2}g\frac{t_c^2}{4} \\ &= H - \frac{1}{2}g\frac{2H}{4g} \\ &= H - \frac{H}{4} = \frac{3H}{4} \end{aligned}$$

5. Punto 5

La superficie lisa indica que no hay fricción, ergo, la fuerza de contacto entre los bloques es F.

6. Punto 6

Como las masas quedan unidas, el choque es inelástico y por lo tanto no se conserva la energía pero se conserva el momento lo que genera que la velocidad final de los dos bloques unidos ($\vec{v_f}$) es:

$$\begin{aligned} \sum m \cdot \vec{v} &= 2kg \cdot \vec{v_f} \\ (2i)kg \cdot m/s + (4j)kg \cdot m/s &= 2kg \cdot \vec{v_f} \\ (1i + 2j)m/s &= \vec{v_f} \end{aligned}$$

La energía cinética (E_c) es:

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2}mv_f^2 \\
&= \frac{1}{2}(2kg)((1i+2j)m/s)^2 \\
&= (1kg)((1^2+2^2)m^2/s^2) \\
&= (1+4)J = 5J
\end{aligned}$$

7. Punto 7

La fuerza gravitacional que siente un objeto con masa m_P causada por el planeta con masa M y el planeta con masa m son respectivamente:

$$\begin{aligned}
F_M &= G\frac{m_P \cdot M}{x^2} \\
F_m &= G\frac{m_P \cdot m}{(R-x)^2}
\end{aligned}$$

Donde G es la constante de gravitación universal ($6.674 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$). Debido a que las fuerzas calculadas son iguales en el punto P:

$$\begin{aligned}
G\frac{m_P \cdot M}{x^2} &= G\frac{m_P \cdot m}{(R-x)^2} \\
\frac{M}{x^2} &= \frac{m}{(R-x)^2} \\
25 = \frac{M}{m} &= \frac{x^2}{(R-x)^2} \\
5 &= \frac{x}{R-x} \\
x &= \frac{5}{6}R
\end{aligned}$$

8. Punto 8

La energía potencial (E_p) del satélite o energía gravitacional esta dada por:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

La aceleración centrípeta (a_c) del movimiento circular uniforme del satélite debe de ser de igual magnitud que la aceleración de la gravedad (g), por lo tanto la velocidad del satélite estará dada por:

$$\begin{aligned} a_c = \frac{v^2}{R} &= G\frac{M}{R^2} = g \\ v^2 &= G\frac{M}{R} \\ v &= \sqrt{G\frac{M}{R}} \end{aligned}$$

La energía cinética (E_c) del satélite estará dada por:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}mG\frac{M}{R} \end{aligned}$$

Por lo que la razón entre la energía potencial y la energía cinética del satélite es:

$$\frac{E_p}{E_c} = \frac{-G\frac{M \cdot m}{R}}{\frac{1}{2}mG\frac{M}{R}} = -2$$

9. Punto 9

La potencia de la persona es:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{W}{t} \\
&= \frac{mgh}{t} \\
&= \frac{80kg \cdot 10m/s^2 \cdot 5m}{40s} \\
&= 100W
\end{aligned}$$

10. Punto 10

Debido a que no hay fricción, la mayor compresión se presenta cuando toda la energía potencial que tenia el bloque de masa en la altura h se convierte en energía potencial del resorte, es decir:

$$\begin{aligned}
mg\left(h - \frac{h}{2}\right) &= \frac{1}{2}kx^2 \\
x^2 &= 2mg\frac{h}{2k} = \frac{mgh}{k} \\
x &= \sqrt{\frac{mgh}{k}}
\end{aligned}$$

11. Punto 11

Debido a que no hay fricción, la suma de la energía potencial y cinética se conserva, es decir, la energía en A (E_A) y en C (E_C) es igual:

$$\begin{aligned} E_A &= E_C \\ mgR &= mg\left(\frac{2R}{3}\right) + \frac{1}{2}mv_C^2 \\ g\left(R - \frac{2R}{3}\right) &= \frac{1}{2}v_C^2 \\ \frac{2}{3}gR &= v_C^2 \\ \sqrt{\frac{2}{3}gR} &= v_C \end{aligned}$$

Por lo tanto la velocidad angular en C (ω_C) es:

$$\begin{aligned} \omega_C &= \frac{v_C}{R} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}gR}}{R} \\ &= \sqrt{\frac{2g}{3R}} \end{aligned}$$

12. Punto 12

Suponiendo que la barra es uniforme, el centro de masa de la barra esta en el centro de la misma, es decir, a $L/2$ de los extremos. Usando el Teorema de Steiner donde el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masa es I_{CM} y el momento de inercia respecto al eje que pasa por el extremo es I_E:

$$\begin{aligned} I_E &= I_{CM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{ML^2}{12} + M\frac{L^2}{4} \\ &= \frac{ML^2}{3} \end{aligned}$$

13. Punto 13

La fuerza que ejerce un resorte con constante k comprimido una distancia x por una masa m es:

$$F = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Por lo tanto:

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

Esto quiere decir que el periodo (T) esta dado por:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{k}{m}}T &= 2\pi \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

Si se dobla la masa, el periodo es:

$$T(2m) = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

Por lo tanto, el periodo crece en un factor de $\sqrt{2}$ cuando la masa se duplica.

14. Punto 14

Suponiendo que la barra es uniforme, el centro de masa de la barra esta en el centro de la misma, es decir, a $L/2$ de los extremos. El torque (τ) creado por la masa de la barra sobre el punto B es:

$$\tau = Mg\frac{L}{2}$$

Por lo tanto la aceleración angular (α) es:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg\frac{L}{2}}{\frac{ML^2}{3}} = \frac{3g}{2L}$$

15. Punto 15

La energía cinética rotacional (E_{rot}) esta dada por:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Si las partículas se encuentran en un plano xy perpendicular al eje de rotación z y el eje de rotación atravieza el plano xy en el centro del rectángulo formado por las partículas, el momento de inercia es:

$$\begin{aligned}
I &= \sum m_i r_i^2 \\
&= 4m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{4}\right)^2 \\
&= 4m\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{16}\right) \\
&= m\left(L^2 + \frac{L^2}{4}\right) \\
&= \frac{5}{4}mL^2
\end{aligned}$$

Por lo que la energía rotacional es:

$$\begin{aligned} E_{rot} &= \frac{1}{2} I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{5}{4} mL^2\omega^2 \\ &= \frac{5}{8} mL^2\omega^2 \end{aligned}$$

Si el eje de rotación z se encuentra en el plano en donde están las partículas, el momento de inercia es:

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 \\ &= 4m(\left(\frac{L}{4}\right)^2) \\ &= 4m\left(\frac{L^2}{16}\right) \\ &= \left(\frac{mL^2}{4}\right) \end{aligned}$$

Por lo que la energía rotacional es:

$$\begin{aligned} E_{rot} &= \frac{1}{2} I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4} mL^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{8} mL^2\omega^2 \end{aligned}$$

16. Punto 16

Las fuerzas que intervienen en la traslación son:

$$2T - Mg = Ma$$

Por el movimiento de rotación del cilindro se tiene:

$$\begin{aligned} 2TR = I\alpha = \frac{MR^2}{2}\frac{a}{R} = \frac{MRa}{2} \\ 4T = Ma \end{aligned}$$

Por lo tanto, al despejar Ma en las ecuaciones e igualar se tiene:

$$\begin{aligned} 2T - Mg &= 4T \\ -Mg &= 2T \\ -\frac{1}{2}Mg &= T \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la dirección de la tensión de cada cuerda es opuesta la gravedad y tiene una magnitud de $Mg/2$

17. Punto 17

El momento de inercia (I) del cascaron cilíndrico que gira sobre su eje esta dado por:

$$I = MR^2$$

Las fuerzas que intervienen en la traslación del cascaron en la dirección paralela al plano inclinado son:

$$Mg\sin\theta - F_r = Ma$$

Por el movimiento de rotación del cascaron se tiene:

$$F_r R = I\alpha = MR^2 \frac{a}{R} = MRa$$
$$F_r = Ma$$

Reemplazando F_r se tiene:

$$Mg\sin\theta - Ma = Ma$$
$$Mg\sin\theta = 2Ma$$
$$\frac{g\sin\theta}{2} = a$$

18. Punto 18

El periodo (T) de un péndulo esta dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$\frac{gT^2}{4\pi^2} = l$$

Por lo que si el periodo se duplica, la longitud se debe cuadruplicar o incrementarse en un factor de 4.

19. Punto 19

El tiempo de vuelo de la bola (t_v) esta dado por:

$$\begin{aligned} 0 &= h - \frac{1}{2}gt_v^2 \\ h &= \frac{1}{2}gt_v^2 \\ \frac{2h}{g} &= t_v^2 \\ \sqrt{\frac{2h}{g}} &= t_v \end{aligned}$$

Como la distancia horizontal recorrida es d, la velocidad v a la que se lanzo la bola es:

$$v = \frac{d}{t_v} = d\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

20. Punto 20

Por conservación de energía desde A hasta un instante antes de la colisión en B (v_a : velocidad de M antes de la colisión):

$$\begin{aligned} Mgl &= \frac{1}{2}Mv_a^2 \\ v_a^2 &= 2gl \\ v_a &= \sqrt{2gl} \end{aligned}$$

Por conservación de la energía del péndulo desde un instante después de la colisión en B hasta C (v_d : velocidad de M después de la colisión):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Mv_d^2 &= Mgl\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}Mgl \\ v_d^2 &= gl \\ v_d &= \sqrt{gl}\end{aligned}$$

Por conservación de energía y momento en la colisión (v_m : velocidad de m después de la colisión):

$$\begin{cases}\frac{1}{2}Mv_a^2 = \frac{1}{2}Mv_d^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 \\ Mv_a = Mv_d + mv_m\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_m^2 = \frac{M}{m}(v_a^2 - v_d^2) \\ v_m = \frac{M}{m}(v_a - v_d)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{M}{m}(v_a^2 - v_d^2) &= \frac{M^2}{m^2}(v_a - v_d)^2 \\ v_a^2 - v_d^2 &= \frac{M}{m}(v_a - v_d)^2\end{aligned}$$

Reemplazando los valores encontrados de v_a y v_d:

$$\begin{aligned}2gl - gl &= \frac{M}{m}(\sqrt{2gl} - \sqrt{gl})^2 \\ gl &= \frac{M}{m}gl(\sqrt{2} - 1)^2 \\ m &= M(\sqrt{2} - 1)^2\end{aligned}$$