Solución Examen Final Física 2

Carlos Arturo Acosta Herrera

ca.acosta977@uniandes.edu.co

1. Punto 1

La aceleración centrípeta (a_c) se relaciona con la velocidad tangencial (v_t) y el radio (R) en un movimiento circular uniforme mediante:

$$a_c = \frac{v_t^2}{R}$$
$$v_t^2 = a_c \cdot R$$
$$v_t = \sqrt{a_c \cdot R}$$

El resto del ejercicio se desarrolla como un tiro parabólico con velocidad inicial igual a la velocidad tangencial del movimiento circular uniforme. La altura (y) estaría dada por:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Teniendo en cuenta que y_0 es la altura inicial (H) y que t es el tiempo de vuelo dado por $t = 2H/v_t$:

$$\begin{aligned}
0 &= H - \frac{1}{2}g\left(\frac{2H}{v_t}\right)^2 \\
H &= \frac{1}{2}g\frac{4H^2}{a_c \cdot R} \\
a_c &= 2g\frac{H^2}{H \cdot R} = 2g\frac{H}{R}
\end{aligned}$$

2. Punto 2

La superficie lisa indica que no hay fricción, ergo, la fuerza de contacto entre los bloques es F.

3. Punto 3

Como las masas quedan unidas, el choque es inelástico y por lo tanto no se conserva la energía pero se conserva el momento lo que genera que la velocidad final de los dos bloques unidos ($\vec{v_f}$) es:

$$\begin{aligned}
\sum m \cdot \vec{v} &= 2kg \cdot \vec{v_f} \\
(2i)kg \cdot m/s + (4j)kg \cdot m/s &= 2kg \cdot \vec{v_f} \\
(1i + 2j)m/s &= \vec{v_f}
\end{aligned}$$

La energía cinética (E_c) es:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv_f^2 \\ &= \frac{1}{2}(2kg)((1i+2j)m/s)^2 \\ &= (1kg)((1^2+2^2)m^2/s^2) \\ &= (1+4)J = 5J \end{aligned}$$

4. Punto 4

La fuerza gravitacional que siente un objeto con masa m_P causada por el planeta con masa M y el planeta con masa m son respectivamente:

$$\begin{aligned} F_M &= G\frac{m_P \cdot M}{x^2} \\ F_m &= G\frac{m_P \cdot m}{(R-x)^2} \end{aligned}$$

Donde G es la constante de gravitación universal ($6.674\times10^{-11}Nm^2/kg^2$). Debido a que las fuerzas calculadas son iguales en el punto P:

$$\begin{aligned} G\frac{m_P \cdot M}{x^2} &= G\frac{m_P \cdot m}{(R-x)^2} \\ \frac{M}{x^2} &= \frac{m}{(R-x)^2} \\ 25 = \frac{M}{m} &= \frac{x^2}{(R-x)^2} \\ 5 &= \frac{x}{R-x} \\ x &= \frac{5}{6}R \end{aligned}$$

5. Punto 5

La energía potencial (E_p) del satélite o energía gravitacional esta dada por:

$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{R}$$

La aceleración centrípeta (a_c) del movimiento circular uniforme del satélite debe de ser de igual magnitud que la aceleración de la gravedad (g), por lo tanto la velocidad del satélite estará dada por:

$$\begin{aligned} a_c = \frac{v^2}{R} &= G\frac{M}{R^2} = g \\ v^2 &= G\frac{M}{R} \\ v &= \sqrt{G\frac{M}{R}} \end{aligned}$$

La energía cinética (E_c) del satélite estará dada por:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}mG\frac{M}{R} \end{aligned}$$

Por lo que la razón entre la energía potencial y la energía cinética del satélite es:

$$\frac{E_p}{E_c} = \frac{-G\frac{M \cdot m}{R}}{\frac{1}{2}mG\frac{M}{R}} = -2$$

6. Punto 6

La potencia de la persona es:

$$\begin{aligned} P &= \frac{W}{t} \\ &= \frac{mgh}{t} \\ &= \frac{80kg \cdot 10m/s^2 \cdot 5m}{40s} \\ &= 100W \end{aligned}$$

7. Punto 7

Debido a que no hay fricción, la mayor compresión se presenta cuando toda la energía potencial que tenia el bloque de masa en la altura h se convierte en energía potencial del resorte, es decir:

$$\begin{aligned} mg\left(h - \frac{h}{2}\right) &= \frac{1}{2}kx^2 \\ x^2 &= 2mg\frac{h}{2k} = \frac{mgh}{k} \\ x &= \sqrt{\frac{mgh}{k}} \end{aligned}$$

8. Punto 8

Debido a que no hay fricción, la suma de la energía potencial y cinética se conserva, es decir, la energía en A (E_A) y en C (E_C) es igual:

$$\begin{aligned} E_A &= E_C \\ mgR &= mg\left(\frac{2R}{3}\right) + \frac{1}{2}mv_C^2 \\ g\left(R - \frac{2R}{3}\right) &= \frac{1}{2}v_C^2 \\ \frac{2}{3}gR &= v_C^2 \\ \sqrt{\frac{2}{3}gR} &= v_C \end{aligned}$$

Por lo tanto la velocidad angular en C (ω_C) es:

$$\begin{aligned} \omega_C &= \frac{v_C}{R} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{2}{3}gR}}{R} \\ &= \sqrt{\frac{2g}{3R}} \end{aligned}$$

9. Punto 9

Suponiendo que la barra es uniforme, el centro de masa de la barra esta en el centro de la misma, es decir, a $L/2$ de los extremos. Usando el Teorema de Steiner donde el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masa es I_{CM} y el momento de inercia respecto al eje que pasa por el extremo es I_E:

$$\begin{aligned} I_E &= I_{CM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{ML^2}{12} + M\frac{L^2}{4} \\ &= \frac{ML^2}{3} \end{aligned}$$

10. Punto 10

La fuerza que ejerce un resorte con constante k comprimido una distancia x por una masa m es:

$$F = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Por lo tanto:

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

Esto quiere decir que el periodo (T) esta dado por:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{k}{m}}T &= 2\pi \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

Si se dobla la masa, el periodo es:

$$T(2m) = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

Por lo tanto, el periodo crece en un factor de $\sqrt{2}$ cuando la masa se duplica.

11. Punto 11

Suponiendo que la barra es uniforme, el centro de masa de la barra esta en el centro de la misma, es decir, a $L/2$ de los extremos. El torque (τ) creado por la masa de la barra sobre el punto B es:

$$\tau = Mg\frac{L}{2}$$

Por lo tanto la aceleración angular (α) es:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg\frac{L}{2}}{\frac{ML^2}{3}} = \frac{3g}{2L}$$

12. Punto 12

El momento de inercia (I) del cascaron cilíndrico que gira sobre su eje esta dado por:

$$I = MR^2$$

Las fuerzas que intervienen en la traslación del cascaron en la dirección paralela al plano inclinado son:

$$Mg\sin\theta - F_r = Ma$$

Por el movimiento de rotación del cascaron se tiene:

$$F_rR = I\alpha = MR^2\frac{a}{R} = MRa$$
$$F_r = Ma$$

Reemplazando F_r se tiene:

$$\begin{aligned} Mg\sin\theta - Ma &= Ma \\ Mg\sin\theta &= 2Ma \\ \frac{g\sin\theta}{2} &= a \end{aligned}$$

13. Punto 13

En un proceso reversible ideal $\Delta S = 0$ debido a que el calor absorbido o desprendido por el sistema se convierte en trabajo.

14. Punto 14

Suponiendo que el sistema es térmicamente aislado, el calor ($|Q|$) que desprende un cuerpo es absorbido por el otro, es decir:

$$\begin{aligned} |Q| = C_A|T_A - T_f| &= C_B|T_B - T_f| \\ \frac{C_A}{C_B} &= \frac{|T_B - T_f|}{|T_A - T_f|} \end{aligned}$$

Debido a que $C_A > C_B$, $|T_B - T_f| > |T_A - T_f|$, por lo que la temperatura final es más cercana a T_A.

15. Punto 15

Se debe analizar las tres etapas del ciclo para determinar la cantidad de calor absorbido o desprendido.

De A a B se produce una expansión adiabática, es decir, sin intercambio de calor.

De B a C es una compresión isotérmica por lo que el calor ($Q_{B\rightarrow C}$) esta dado por:

$$Q_{B\rightarrow C} = \int_{V_B}^{V_C} PdV = -\int_{V_C}^{V_B} PdV < 0$$

El calor es desprendido del sistema de B a C y la magnitud es el área bajo la curva presión volumen del punto C al B. Si se trata de un gas ideal ($PV = nRT$):

$$\begin{aligned} Q_{B\rightarrow C} &= \int_{V_B}^{V_C} PdV \\ &= \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT}{V} dV \\ &= nRT \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} \\ &= nRT \left[\ln(V)\right]_{V_B}^{V_C} \\ &= nRT \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) \end{aligned}$$

De C a A es un calentamiento a volumen constante (isométrico, isocórico o isovolumétrico) por lo que el calor ($Q_{C\rightarrow A}$) esta dado por:

$$Q_{C\rightarrow A} = mc_v(T_A - T_C) > 0$$

El calor es absorbido por el sistema de C a A y su magnitud es proporcional al aumento de la temperatura.

La eficiencia (η) de la maquina esta dada por:

$$\begin{aligned}\eta &= 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}} \\ &= 1 - \frac{Q_{B\to C}}{Q_{C\to A}} \\ &= 1 - \frac{-\int_{V_B}^{V_C} PdV}{Mc_v(T_A - T_C)}\end{aligned}$$

Si se trata de un gas ideal, la eficiencia es:

$$\eta = 1 - \frac{nRT\ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right)}{Mc_v(T_A - T_C)}$$

16. Punto 16

El calor neto (Q_{neto}) recibido por el sistema sería el área delimitada por el rectángulo ABCD:

$$Q_{neto} = V_0 \cdot (2P_0) = 2P_0V_0$$

Teniendo en cuenta que es una mol ($n = 1mol$) de gas ideal ($P_0V_0 = nRT_0$):

$$Q_{neto} = 2P_0V_0 = 2RT_0$$

17. Punto 17

Las ecuaciones descritas son las ecuaciones de Maxwell (por James Clerk Maxwell) y cada una tiene una explicación física.

La primera es la ley de Gauss para el campo eléctrico que indica que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga encerrada por la superficie dividida por la permitividad eléctrica. Esta ley no involucra campos magnéticos por lo que se conservaría.

La segunda ecuación es la ley de Gauss para el campo magnético que indica que el flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero, es decir, que las lineas de campo magnético deben ser cerradas y no puede existir un punto que genere o reciba lineas de campo magnético (no existen mono-polos magnéticos). Si la existencia de mono-polos magnéticos se confirma, esta ley se debería cambiar.

La tercera es la ley de Faraday-Lenz y relaciona un voltaje o diferencia de potencial de dos puntos extremos de una trayectoria (integral del campo eléctrico en la trayectoria) con una variación del flujo magnético con el paso del tiempo (derivada del flujo respecto al tiempo). No cambia por la existencia o no de mono-polos magnéticos.

La cuarta es la ley de Ampère generalizada y relaciona un campo magnético con una corriente eléctrica y cambios de carga con respecto al tiempo. La existencia de mono-polos magnéticos no afecta esta ley.

18. Punto 18

En una onda electromagnética, el campo eléctrico y el campo magnético son perpendiculares ($\vec{E} \perp \vec{B}$) y la dirección de la onda esta dada por el vector de Pointing ($\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B}$), por lo tanto:

$$\frac{\vec{c}}{c} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{E} \times \vec{B}|}$$

19. Punto 19

El campo eléctrico que atraviesa una esfera imaginaria de radio r debe cumplir la ley de Gauss para campos eléctricos:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon}$$

Por simetría de la esfera, el campo eléctrico esta en la misma dirección del vector normal a la superficie y el campo va a ser igual en toda la superficie:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon}$$
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{kQ}{r^2}$$

20. Punto 20

El campo eléctrico generado por una de las cargas sobre el punto P será de igual magnitud y de dirección opuesta al campo eléctrico generado por por la carga del vértice opuesto debido a que se encuentran a la misma distancia y con la misma carga, por lo tanto, los campos eléctricos se anulan ($\vec{E} = \vec{0}$). El potencial debido a una carga Q a una distancia r esta dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$$

Por lo tanto el potencial debido a las dos cargas positivas es contrarestado por el potencial de las cargas negativas, es decir $V = 0$.

21. Punto 21

El campo eléctrico en una esfera de radio r estará dada por:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S EdS = E\oint_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon}$$
$$E = \frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{kQ_{enc}}{r^2}$$

Debido a que es un cascaron esférico, cuando $r < R$ la carga encerrada (Q_{enc}) por la esfera es cero por lo que el campo es cero. Si $r > R$, la carga encerrada (Q_{enc}) es Q, por lo tanto, el campo eléctrico es inversamente proporcional al cuadrado del radio r.

El campo eléctrico es:

$$E = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \frac{kQ}{r^2} & \text{si } r > R \end{cases}$$

22. Punto 22

La fuerza que experimenta una partícula con carga q con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular a la trayectoria de la partícula es:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Por la segunda ley de Newton se tiene que $\vec{F} = m\vec{a}$ y usando la ecuación del movimiento circular uniforme $a = v^2/R$ se tiene que:

$$F = \frac{mv^2}{R} = qvB$$
$$R = \frac{mv}{qB}$$

23. Punto 23

La ley formulada por Ampère relacionaba un campo magnético inmovil B con una densidad de corriente J o una corriente I que no varia con el tiempo:

$$\oint_S \vec{B}\vec{dl} = \mu \int_S \vec{J}\vec{dS} = \mu I$$

Luego fue corregida por Maxwell para incluir la conservación de la carga eléctrica E:

$$\oint_S \vec{B}\vec{dl} = \mu \int_S \vec{J}\vec{dS} + \mu\varepsilon\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\vec{dS} = \mu I + \mu\varepsilon\frac{d\Phi_E}{dt}$$

En ambos casos, la corriente debe permanecer constante para que la ley de Ampère sea valida.