Semana 4 teoría

Carlos Alberto Calvachi Salas

February 16, 2022

1 Lunar Rocket

1.1 Distancia nave-Luna

En la figura del enunciado se evidencia que se conforma un triángulo con vértices tierra, nave y luna. En particular, el ángulo opuesto al lado con la distancia entre nave y luna es $\phi(t) - \omega t$. Como $r(t)$ es la distancia entre la tierra y la nave y d la disntancia entre la tierra y la luna, se concluye que, al usar el teorema del coseno

$$r_L(r, \phi, t) = \sqrt{r(t)^2 + d^2 - 2r(t)d\cos(\phi - \omega t)}. \tag{1}$$

1.2 Hamiltoniano

El Hamiltoniano se puede deducir a partir del cálculo de la energía total del sistema. En particular, dado que las energías cintética y potencial de la luna son constantes, al moverse la luna en un círculo según el enunciado, se considera únicamente las energías asociadas a la nave en movimiento. Es decir,

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r, \phi, t)}. \tag{2}$$

1.3 Ecuaciones de Hamilton

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{\partial}{\partial p_r}\left(\frac{p_r^2}{2m}\right) = \frac{p_r}{m}. \tag{3}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{\partial}{\partial p_\phi}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2}\right) = \frac{p_\phi}{mr^2}. \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} \\
&= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r, \phi, t)}\right) \\
&= \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_T}{r^2} - G\frac{mm_L}{[r_L(r, \phi, t)]^2}\frac{\partial r_L(r, \phi, t)}{\partial r} \\
&= \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_T}{r^2} - \frac{1}{2}G\frac{mm_L}{[r_L(r, \phi, t)]^3}\frac{\partial}{\partial r}(r(t)^2 + d^2 - 2r(t)d\cos(\phi - \omega t)) \\
&= \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_T}{r^2} - G\frac{mm_L}{[r_L(r, \phi, t)]^3}(r(t) - d\cos(\phi - \omega t))
\end{aligned} \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} \\
&= -\frac{\partial}{\partial \phi}\left(-G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)}\right) \\
&= -G\frac{mm_L}{[r_L(r,\phi,t)]^2}\frac{\partial r_L(r,\phi,t)}{\partial \phi} \\
&= -\frac{1}{2}G\frac{mm_L}{[r_L(r,\phi,t)]^3}\frac{\partial}{\partial \phi}(r(t)^2 + d^2 - 2r(t)d\cos(\phi-\omega t)) \\
&= -G\frac{mm_L}{[r_L(r,\phi,t)]^3} rd\sin(\phi-\omega t)
\end{aligned} \tag{6}
$$

1.4 Normalización de variables

Si se reescribe la ecuación (3) se tiene que

$$
\frac{\dot{r}}{d} = \tilde{r} = \frac{p_r}{md} = \tilde{p}_r. \tag{7}
$$

Posteriormente, la ecuación (4) se planetea como

$$
\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} = \frac{p_\phi}{md^2}\frac{d^2}{r^2} = \frac{\tilde{p}_\phi}{\tilde{r}^2}. \tag{8}
$$

Por otra parte, se tiene la reescritura de la ecuación (5)

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{p}_r}{md} = \dot{\tilde{p}}_r &= \frac{1}{md}\frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{1}{md}\frac{Gmm_T}{d^3}\left(\frac{d^3}{r^2} + \frac{d^3}{[r_L(r,\phi,t)]^3}\frac{m_L}{m_T}(r - d\cos(\phi-\omega t))\right) \\
&= \left(\frac{p_\phi}{md^2}\right)^2\frac{d^3}{r^3} - \left(\frac{Gm_T}{d^3}\right)\left(\frac{d^2}{r^2} + \frac{d^3}{[r_L(r,\phi,t)]^3}\frac{m_L}{m_T}\left(\frac{r}{d} - \cos(\phi-\omega t)\right)\right) \\
&= \frac{\dot{\tilde{p}}_\phi}{\tilde{r}^3} - \Delta\left(\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\mu}{\tilde{r}'^3}(\tilde{r} - \cos(\phi-\omega t))\right).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Finalmente, se reescribe la ecuación (6) como

$$
\begin{aligned}
\frac{p_\phi}{md^2} = \dot{\tilde{p}}_\phi &= -G\frac{1}{md^2}\frac{mm_L}{[r_L(r,\phi,t)]^3} rd\sin(\phi-\omega t) \\
&= -\frac{Gm_T}{d^3}\frac{m_L}{m_T}\frac{d^3}{[r_L(r,\phi,t)]^3}\frac{r}{d}\sin(\phi-\omega t) \\
&= -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{\tilde{r}'^3}\sin(\phi-\omega t).
\end{aligned} \tag{10}
$$

1.5 Momentos iniciales

Se pueden deducir si se entiende que $\tilde{p}_r$ y $\tilde{p}_\phi$ están relacionados con el momento radial y el momento angular respectivamente. Entonces, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}_r^0 &= \frac{p_r^0}{md} \\
&= \frac{\vec{p}_0 \cdot \hat{r}}{md} \\
&= \vec{\tilde{v}}_0 \cdot \hat{r} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{v}_0 \cos\theta \\ \tilde{v}_0 \sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \\
&= \tilde{v}_0(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \\
&= \tilde{v}_0 \cos(\theta - \phi).
\end{aligned} \tag{11}
$$

Por otra parte, el momento angular inicial normalizado se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}_\phi^0 &= \frac{p_\phi^0}{md^2} \\
&= \frac{[\vec{r}_0 \times m\vec{v}_0]_z}{md^2} \\
&= [\vec{\tilde{r}}_0 \times \vec{\tilde{v}}_0]_z \\
&= \left[\begin{pmatrix} \tilde{r}_0 \cos\phi \\ \tilde{r}_0 \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{v}_0 \cos\theta \\ \tilde{v}_0 \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right]_z \\
&= \tilde{r}_0\tilde{v}_0(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi) \\
&= \tilde{r}_0\tilde{v}_0 \sin(\theta - \phi).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Los detalles de la trayectoria se muestran al ejectuar `python lunarRocket.py`