Semana 8 teoría

Carlos Alberto Calvachi Salas

March 19, 2022

1 Sobre relajación ecuación de Laplace

La gráfica de pasos contra el parámetro ω se obtiene al ejecutar `python laplaceRelaxation.py`. Se observa una tendencia descendente hasta que alcanza un umbral de aproximadamente $\omega \approx 1.5$. De ahí en adelante, el valor de iteraciones fluctúa considerablemente hasta que tiende asintóticamente a infinito cuando $\omega \to 2$. En particular , en consola se despliega el valor de $\omega = 1.6959$ que minimiza las instancias de ejecución.

2 Ecuación de Navier-Stokes en 2D

2.1 Expresión diferencias finitas

En primer lugar, se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -w. \tag{1}$$

Para discretizarla, se utiliza una expansión hasta segundo orden de la función u para despejar las derivadas parciales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} u(x+h,y) &= u(x,y) + h\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \\ u(x-h,y) &= u(x,y) - h\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Al sumar las ecuaciones, se desprende que

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{u(x+h,y) + u(x-h,y) - 2u(x,y)}{h^2}. \tag{3}$$

De manera análoga, se deduce que

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{u(x,y+h) + u(x,y-h) - 2u(x,y)}{h^2}. \tag{4}$$

.

Entonces, la ecuación diferencial parcial (1) queda expresada como

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y)}{h^2} = -w(x,y). \tag{5}$$

Por lo tanto, si se discretizan los pasos con los índices I y J asociados a las coordenadas x y y respectivamente, se llega a la expresión para $u_{I,J}$

$$u_{I,J} = \frac{1}{4}\left(u_{I+1,J} + u_{I-1,J} + u_{I,J+1}, u_{I,J-1} + h^2 w_{I,J}\right). \tag{6}$$

En segundo lugar, se tiene la ecuación diferencial

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{7}$$

Para este caso se utiliza que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u(x+h,y) - u(x-h,y)}{2h} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{u(x,y+h) - u(x,y-h)}{2h} \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{w(x+h,y) - w(x-h,y)}{2h} \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{w(x,y+h) - w(x,y-h)}{2h}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial parcial (7) queda expresada de manera discreta como

$$\begin{aligned}
\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\
\nu\left(w_{I+1,J} + w_{I-1,J} + w_{I,J+1} + w_{I,J-1} - 4w_{I,J}\right) &= \frac{1}{4h^2}([u_{I,J+1} - u_{I,J-1}][w_{I+1,J} - w_{I-1,J}]) \\
&- \frac{1}{4h^2}([u_{I+1,J} - u_{I-1,J}][w_{I,J+1} - w_{I,J-1}]).
\end{aligned} \tag{9}$$

Finalmente, al despejar $w_{I,J}$ se expresa como

$$\begin{aligned}
w_{I,J} &= \frac{1}{4}\left(w_{I+1,J} + w_{I-1,J} + w_{I,J+1}, w_{I,J-1}\right) \\
&- \frac{1}{16\nu}[u_{I,J+1} - u_{I,J-1}][w_{I+1,J} - w_{I-1,J}] \\
&+ \frac{1}{16\nu}[u_{I+1,J} - u_{I-1,J}][w_{I,J+1} - w_{I,J-1}],
\end{aligned} \tag{10}$$

donde se identifica $R = 1/\nu$. De hecho, como se menciona en el libro de Landau, si se consideran unidades normales, $R = V_0 h/\nu$.

2.2 Condiciones de frontera

Para el caso de la izquierda del obstáculo, o (D) como se denota en el libro de Landau, se parte una expansión en Taylor de $u(x-h)$, que corresponde a la evolución de la función de corriente a la izquierda.

$$u(x-h,y) = u(x,y) - h\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Ahora, la vorticidad se expresa como

$$w = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{12}$$

Adicionalmente, como solo hay flujo vertical obstáculo en las secciones izquierda y derecha, se cumple que

$$v_x = 0, \tag{13}$$

Ahora, al expresar la velocidad del fluido en términos de la función de corriente. Es decir,

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ v_y &= \frac{-\partial u}{\partial x} \end{aligned} \tag{14}$$

dada la condición de la ecuación (13), se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{15}$$

Entonces, la eucación (12), al derivar la velocidad v_x de la ecuación (14), queda expresada como

$$w = \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{16}$$

y la expansión de la función de corriente, dada la ecuación (15), se expresa como

$$u(x-h, y) = u(x, y) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}. \tag{17}$$

Entonces, se deduce la segunda derivada de la función de corriente como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\frac{u(x-h, y) - u(x, y)}{h^2}. \tag{18}$$

Finalmente, la condición de frontera queda expresada de manera discretizada como

$$w_{I,J}|_{\text{Izq}} = -2\frac{u_{I-1,J} - u_{I,J}}{h^2}. \tag{19}$$

Por otra parte, para la condición de frontera por la derecha, que se simboliza como (B) en el texto de Landau, se mantienen las condiciones de las ecuaciones (13), (15), (16). Sin embargo, se debe calcular el elemento a la derecha del obstáculo. Entonces, la expansión en taylor de la función de corriente queda expresada como

$$u(x+h, y) = u(x, y) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}. \tag{20}$$

Luego, al hacer uso de la ecuación (12), se obtiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h^2}. \tag{21}$$

Finalmente, se llega a la condición de frontera para la parte derecha del obstáculo que se expresa como

$$w_{I,J}|_{\text{Der}} = -2\frac{u_{I+1,J} - u_{I,J}}{h^2}. \tag{22}$$

De manera análoga, se puede establecer condiciones de frontera para la parte superior

$$w_{I,J}|_{\text{Sup}} = -2\frac{u_{I,J+1} - u_{I,J}}{h^2} \tag{23}$$

y para la parte inferior

$$w_{I,J}|_{\text{Inf}} = -2\frac{u_{I,J-1} - u_{I,J}}{h^2}. \tag{24}$$

Ahora, se van a desarrollar las condiciones de frontera del libro de Landau. Entonces, para la línea central (AE), se cumple que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{25}$$

Esta condición se satisface con inicializar $u = 0$ para toda la fila con $y = 0$. Por otra parte, se plantea la condición *inlet*. En esta aparecen dos condiciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{26}$$

En este caso, como $x = 0$, se tiene que cumplir que $u(x = 0, y) = u(x = h, y)$. Computacionalmente, esto implica que `u[1] = u[0]`. Adicionalmente, $w = 0$ se impone como condición de frontera.

Al respecto a la superficie, se tiene que $w = 0$ que se impone por condiciones de frontera. Además, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = V_0. \tag{27}$$

Entonces, dado que la frontera se impone en la parte superior, `u[:, N] = u[:, N-1] + h*V0`, donde `u[N]` corresponde a la restricción $u(x = Nh, y)$. Finalmente, respecto a la parte de salida, se tiene la condición de *Outlet*, se obtiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{28}$$

Por lo tanto, `u[N] = u[N-1]` y `w[N] = w[N-1]`.

2.3 Simulación

Las gráficas de función de corriente, vorticidad y líneas de corriente se obtienen al ejecutar `python navierStokes2D.py`.

Anotación: Las diferencias que existen entre las simulaciones pueden depender de las condiciones como se inicia la función de corriente u así como de la escogencia de ω y las iteraciones N. Para este caso se usó $\omega = 0.5$ y $N = 1000$.