Preguntas de Fourier

Carlos Alberto Calvachi Salas

February 7, 2022

Anotación: Los comentarios de la parte del código se deberían desplegar en consola al ejecutar python ... . Son varios arichivos por cada punto

1 Preguntas de Fourier

1.1 Series de Fourier

Se pide demostrar que la función $f(t)$ es integrable y diferenciable término a término. Para ello, basta con demostrar que la serie de Fourier para $f(t)$ converge uniformemente. Véase por ejemplo *Principles of mathematical analysis* de Walter Rudin.

La demostración a continuación está adaptada de la discusión del Prof. R. Schultz. En primer lugar, la serie de Fourier toma la forma de

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)). \tag{1}$$

Ahora, los coeficientes de Fourier son

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nx)dt \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nx)dt \tag{3}$$

Dado que $f(t)$ es diferenciable, se puede relacionar los coeficientes de Fourier para $f'(t)$ de la siguiente forma

$$a'_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos(nx)dt = \frac{1}{2\pi}\left(f(t)\cos(nx)|_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} f(t) - \sin(nx)dt\right) = nb_n \tag{4}$$

$$b'_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(nx)dt = \frac{1}{2\pi}\left(f(t)\sin(nx)|_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nx)dt\right) = -na_n \tag{5}$$

Ahora, dado que la sumatoria de los cuadrados de los coeficientes c_n de la expansión de Fourier son convergentes. Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$ converge, esto es consistente con el teorema de Parseval presentado en las notas. Entonces, si se utiliza la expansión para la función $f'(t)$ se llega a que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^2 + |b'_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \tag{6}$$

converge. Esta serie convergente se puede relacionar con la serie original si se demuestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+|b_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)\left(\frac{1}{n^2}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) \tag{7}$$

Entonces, al ser la serie acotada por el producto de dos series convergentes, esta primera es convergente.

Finalmente, si se utiliza la desigualdad $|a_n|+|b_n|\leq 2\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2}$, se obtiene una serie absolutamente convergente más grande que la serie de Fourier porque

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t))\leq\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|\leq\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|^2+|b_n|^2} \tag{8}$$

Entonces, la serie de Fourier converge uniformemente. Seguidamente, se desprende que la derivada de la función es la derivdada de los términos de Fourier

$$f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}-n\omega_0 a_n\sin n\omega_0 t+n\omega_0 b_n\cos n\omega_0 t \tag{9}$$

Además, para la integral se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_2}f(t)dt=\frac{1}{2}a_0\left(t_2-t_1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}\left[-b_n\left(\cos\left(n\omega_0 t_2\right)-\cos\left(n\omega_0 t_1\right)\right)+a_n\left(\sin\left(n\omega_0 t_2\right)-\sin\left(n\omega_0 t_1\right)\right)\right] \tag{10}$$

se desprende de la integración término a término.

1.2 Presentación de funciones

En primer lugar, se parte de que $f(t)$ es una función par por lo que únicamente se considerarán los términos con función seno de la expansión de Fourier. Entonces, la función será de la forma

$$f(t)=t=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nt). \tag{11}$$

Ahora, se utilizan las relaciones de ortogonalidad de la función seno para encontrar los coeficientes, así como al hecho de que la integral de una serie de Fourier corresponde a la serie de Fourier de los términos integrados. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}t'\sin(mt')dt' &= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nt')\sin(mt')dt'\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin(nt')\sin(mt')dt'\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}b_n\pi\delta_{nm}\\ &= \pi b_m.\end{aligned} \tag{12}$$

Por otra parte, se desarrolla la integral de la izquierda de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} t' \sin(mt')dt' &= \frac{1}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi} (mt')\sin(mt')(mdt') \\
&= 2\frac{1}{m^2}\int_{0}^{m\pi} \phi \sin\phi d\phi \\
&= \frac{2}{m^2}(-\phi\cos\phi + \sin\phi)|_0^{m\pi} \\
&= \frac{2}{m^2}(-m\pi\cos(m\pi)) \\
&= \frac{2\pi}{m}(-1)^{m-1}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

En consecencia, se resuelve para b_m de la siguiente manera

$$
b_m = 2\frac{(-1)^{m-1}}{m}. \tag{14}
$$

Entonces, se demuestra que la función $f(t)$ se puede descomponer como

$$
f(t) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sin{(mt)}. \tag{15}
$$

1.3 Función $\zeta(s)$ de Riemann

1.3.1 Integración de serie de Fourier

Se procede de manera análoga a como sucedió con la función $f(t) = t^2$. En este caso, la expansion se da por series de coseno, dado esta función es par. Entonces, se tiene que

$$
f(t) = t^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos{(nt)}. \tag{16}
$$

Entonces, se procede utilizando las relaciones ortogonalidad y la descomposición de Fourier

$$
\int_{-\pi}^{\pi} t'^2 \cos{(mt')}dt' = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos(mt')dt' + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos{(nt')}\cos(mt')dt. \tag{17}
$$

Se tiene el caso especial de $m = 0$, como $n > 0$, se tiene únicamente que

$$
\int_{-\pi}^{\pi} t'^2 dt' = \frac{2\pi^3}{3} = \frac{a_0}{2}2\pi = \pi a_0. \tag{18}
$$

Entonces,

$$
a_0 = \frac{2\pi^2}{3}. \tag{19}
$$

Para el caso de que $m > 0$, se tiene la siguiente integral

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} t'^2 \cos(mt')dt' &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt')\cos(mt')dt \\
\frac{1}{m^3}\int_{-\pi}^{\pi} (mt')^2 \cos(mt')mdt' &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nt')\cos(mt')dt \\
\frac{2}{m^3}\int_{0}^{m\pi} \phi^2 \cos\phi \ d\phi &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{nm} \\
\frac{2}{m^3}(\phi^2\sin\phi + 2\phi\cos\phi - 2\sin\phi)|_0^{m\pi} &= \pi a_m.
\end{aligned} \tag{20}$$

Seguidamente, se llega a

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{4m\pi}{\pi m^3}\cos(m\pi) \\
&= (-1)^m \frac{4}{m^2}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Entonces, se llega a la siguiente expansión

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2}\cos(nt). \tag{22}$$

En seguida, se integra la función en el periodo

$$\begin{aligned}
\int f(t)dt' &= \int \frac{\pi^2}{3}dt' + \int \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\cos(nt')dt' \\
\frac{t^3}{3} &= \frac{\pi^2 t}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^3}\int \cos(nt')ndt' \\
\frac{1}{12}\left(t^3 - \pi^2 t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nt)
\end{aligned} \tag{23}$$

La función resultante es una serie de senos con $b_n = (-1)^n/n^3$. Entonces, se usa la identidad de Parseval.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{12}\left(t^3 - \pi^2 t\right)\right]^2 dt &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 + 0\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}
\end{aligned} \tag{24}$$

Finalmente, se llega a la expresión de la serie

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \frac{1}{72\pi}\int_0^{\pi}(t^6 - 2\pi^2 t^4 + \pi^4 t^2)dt \\
&= \frac{1}{72\pi}\left(\frac{\pi^7}{7} - \frac{2\pi^7}{5} + \frac{\pi^7}{3}\right) \\
&= \frac{\pi^6}{945}
\end{aligned} \tag{25}$$