Anteproyecto Trabajo de Grado Maestría en Ciencias-Estadística

Jorge Iván Pérez García
Estudiante de Maestría en Ciencias-Estadística

Norman Diego Giraldo Gómez, M.Sc.
Profesor Asociado Escuela de Estadística
Director de Tesis

Escuela de Estadística
Universidad Nacional de Colombia
2017

Estimación del punto de retención óptimo en el caso del reaseguro para enfermedades de alto costo

Índice

1. Información general

Título: Estimación del punto de retención óptimo en el caso del reaseguro para enfermedades de alto costo

Estudiante:	Jorge Iván Pérez García
Correo-e:	jiperezga@unal.edu.co
Director:	Norman Diego Giraldo Gómez, M.Sc.
	Profesor Asociado
	Escuela de Estadística
Correo-e:	ndgirald@unal.edu.co

2. Resumen ejecutivo

Este trabajo de Tesis de Maestría, consiste en la elaboración de un problema aplicado al sector de servicios de la salud, en particular, con referencia a las empresas de medicina prepagada. En esta tesis se desarrollará el problema de la determinación del punto óptimo de retención en reaseguros de excedente de pérdida. Los reaseguros en medicina prepagada están contemplados en la Ley 100/93, sin embargo, es relativamente poco lo que se ha estudiado desde el punto de vista estadístico. Por este motivo, se implementarán algunos métodos para la estimación del punto óptimo de retención utilizando metodologías en uso, buscando incorporar desarrollos recientes. En particular, interesa comparar los resultados que se obtengan con los que se pueden obtener con la metodología Black-Scholes de valoración de opciones, de la cual existen algunos estudios en el país.

Palabras claves: *Aproximaciones Semi-Paramétricas para Densidades, Distribuciones de Cola Pesada, Distribuciones Poisson Compuestas, Distribuciones Pareto Generalizadas, Distribucion LogNormal, Enfermedades de Alto Costo, Medicina Prepagada, Reaseguro de Excedente de Pérdida, Riesgo Colectivo, Stop-Loss, Valores Extremos*

3. Planteamiento de problema

El reaseguro es una herramienta usada por los aseguradores para enfrentar casos de pólizas individuales de alta severidad y de baja ocurrencia, cuyo objetivo es brindar protección contra las posibles grandes acumulaciones de pérdidas individuales o la posible acumulación de pérdida de un solo evento, mediante la fragmentación de tales casos en diferentes porciones asumidas por distintas compañías reaseguradoras.

A cambio de esta protección, el o los reaseguradores cobran a la aseguradora, a modo de compensación, una prima correspondiente a una cantidad mayor que el valor esperado del riesgo transferido. Este intercambio entre la parte del riesgo retenido por el asegurador y la prima pagada al reasegurador hacen que la determinación de la retención óptima sea un tema de gran importancia y por tanto será ese el objetivo de este trabajo.

Para brindar un escenario menos general, se realizará una aplicación para el caso de las Empresas de Medicina Prepagada (EMP en adelante), en donde para éstas, los eventos de alta severidad y baja ocurrencia estarán dados por los costos generados por pacientes que poseen enfermedades de alto costo. El objetivo será, entonces, encontrar el punto óptimo de retención propia que debería tener una EMP para hacer frente a los riesgos generados por los usuarios que sufren este tipo de enfermedades, el umbral a partir del cual se debería ceder el riesgo a un tercero y la prima que deberá pagar.

En Colombia, existen pocos estudios sobre el reaseguro para enfermedades de alto costo, donde sólo se destacan los trabajos de Chicaíza y Cabedo (2009) y Girón y Herrera (2015), en los cuales, a pesar de presentar la estimación de las primas puras de reaseguro mediante un reaseguro de exceso de pérdida y mediante el modelo Black-Scholes de valoración de opciones propuesto por Black y Scholes (1973), éstos dejan un vacío en la literatura, pues no desarrollan el tema del punto de retención óptimo, ni emplean diferentes métodos de estimación para los distintos tipos de reaseguro.

Para abordar este tema, considere inicialmente una variable $K \geq 1$ que representa el número de carteras de enfermedades de alto costo de una EMP. Por ejemplo, tratamiento de quimioterapia y radioterapia para el cáncer, tratamiento de sida y sus complicaciones, tratamiento en unidad de cuidados intensivos por más de cinco días, entre otros. Suponga también una variables aleatoria discreta N_k con función de masa de probabilidad dada por $p_{n_k} = \mathbb{P}(N_k = n)$, donde N_k representa el número de pacientes pertenecientes a la k-ésima cartera durante el período de vigencia de una póliza, en general de un año.

Considere ahora a $X_{k,1}, X_{k,2}, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) no negativas $X_{k,i} > 0$, con función de distribución acumulada $F_k(x) = \mathbb{P}(X_k \leq x)$ concentrada entre $[0, \infty)$, tal que $F_k(x) < 1$, $\forall x_k > 0$, $F_k(0_+) = 0$, con $\mathbb{E}(X_{k,i}) = \mu_k < \infty$ y asumidas de forma independiente de N_k (Bowers et al., 1997, pag. 367), donde $X_{k.i}, i = 1, 2, \ldots$ representa el valor los costos individuales de los pacientes de la k-ésima cartera. Además defina una variable aleatoria compuesta S_k, tal que (Feller, 1978, cap. 12)

$$S_k = \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} = X_{k,1} + X_{k,2} + \ldots + X_{k,N_k} \tag{1}$$

representa el costo total generado por la k-ésima cartera durante la duración de la vigencia de la póliza. Los supuestos para el modelo (1) son los siguientes.

$$S_k = 0 \Leftrightarrow N_k = 0, \tag{2}$$

$$\forall k,\ X_{k,i} \sim\ iid\ F_k(\mu_k, \sigma_k^2), \tag{3}$$

$$\forall k,\ N_k \perp\!\!\!\perp \{X_{k,i}, i = 1, 2, \ldots\}, \tag{4}$$

$$\forall k,\ N_k \sim Poisson(\lambda_k). \tag{5}$$

Donde la abreviatura $iid\ F_k(\mu_k, \sigma_k^2)$ significa "independientes e idénticamente distribuídas F_k con media μ_k y varianza σ_k^2" y el símbolo $N_k \perp\!\!\!\perp \{X_{k,i}, i = 1, 2, \ldots\}$ significa "N_k y $\{X_{k,i}, i = 1, 2, \ldots\}$ son variables aleatorias mutuamente independientes".

Las tasas λ_k son los promedios de casos anuales de la enfermedad k. El supuesto Poisson puede cambiarse por Binomial Negativa ó mezclas Poisson, según lo indiquen los datos. También defina una variable aleatoria S, tal que

$$S = \sum_{k=1}^{K} S_k = S_1 + S_2 + \ldots + S_K \tag{6}$$

la cual será la suma total de los costos individuales en las k carteras, o simplemente el costo total de todas las enfermedades de alto costo. Donde la $\mathbb{P}(S = 0)$ puede ser diferente de 0 y $F_S(s) = \mathbb{P}(S \leq s)$ es la función de distribución acumulada de S.

El problema a resolver en esta tesis, con base en (1) y (6), consiste en estimar una cantidad denominada "valor de la retención", en un reaseguro de excedente de pérdida (en adelante SL=Stop-Loss) (ver Rytgaard (2004), Straub (1978) para información sobre SL), denotada ξ_k, y definida como el límite máximo que asume la EMP como parte del costo total anual generado en una cartera de pólizas de la enfermedad de alto costo k. El excedente sobre ese valor lo asume una reaseguradora. Es decir, la EMP asume

$$\text{mín}(S_k, \xi_k) = S_k \wedge \xi_k \tag{7}$$

y la reaseguradora asume

$$S_k - \text{mín}(S_k, \xi_k) = (S_k - \xi_k)_+ \tag{8}$$

donde $(S_k - \xi_k)_+ = \text{máx}(0, S_k - \xi_k)$, denota la parte positiva de $(S_k - \xi_k)$. El problema de la determinación óptima de ξ_k depende de ciertos criterios. Se aplicarán los criterios expuestos en Gerber y Jones (1976), Gerber (1982) y en Straub (1978). Para su definición se requieren los conceptos siguientes. Asumiendo que está dado el valor de la retención ξ_k:

- Prima bruta para enfermedad k,

$$P_k = (1 + \delta_k)\lambda_k\mu_k, \tag{9}$$

  donde $\delta_k \in (0, 1)$ es un recargo que se hace sobre el costo promedio anual de esta enfermedad, dado por $\mathbb{E}(S_k) = \mathbb{E}(N_k)\mathbb{E}(X_k) = \lambda_k\mu_k$. Esta prima bruta se cobra a los asegurados de manera proporcional, por ejemplo, de acuerdo con la edad. Pero también cabe que el cobro sea el resultado de dividir la prima bruta sobre el total de asegurados.

- Prima reaseguro (cedida)

$$P_{k,c}(\xi_k) = (1 + \alpha_k)E((S_k - \xi_k)_+). \tag{10}$$

  Es la parte de la prima bruta que se cede al reasegurador, por lo que se denomina "cedida".

- Prima retenida ó neta

$$P_{k,r}(\xi_k) = P_k - P_{k,c}(\xi_k). \tag{11}$$

  Es la parte de la prima bruta que retiene la EMP, como cedente, para su funcionamiento operativo.

- Superávit ó Balance de la Cedente (la EMP):

$$R_k = s_k + P_{k,r}(\xi_k) - S_k \wedge \xi_k, \tag{12}$$

  donde s_k es una reserva anual. Un evento de insolvencia ocurre cuando se observa $R_k < 0$ al final del año en el estado de pérdidas y ganancias. Es posible que este estado involucre situaciones mucho más complejas, como cuentas por cobrar, contratos a plazo, etc. La correspondiente probabilidad, $\mathbb{P}(R_k < 0)$ se denomina"probabilidad de ruina, en un horizonte anual". Calcular estas probabilidades depende de cómo se aproxime la distribución de la variable compuesta $S_k = \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i}$. Ambos son problemas que se han desarrollado, extensamente, en el marco de la teoría de Riesgo Colectivo.

- **Problema 1**: Adicionalmente hay que escoger modelos paramétricos adecuados para la variable X_k. Parte de este trabajo consiste en establecer el tipo de función de cola (o función de supervivencia) $\mathbb{P}(X_k \geq x)$, clasificada en colas livianas, medianas y pesadas.

- **Problema 2**: dados P_k, $0 < \delta_k, \alpha_k < 1$, $\lambda_k > 0$, $X_k \sim F_k(.)$, $N_k \sim Poisson(\lambda_k)$, determinar ξ_k tal que la probabilidad de ruina de la Cedente $\mathbb{P}(R_k < 0)$ tenga como máximo un valor dado, pequeño.

4. Estructura de los datos

Los datos de costos en medicina prepagada son muy difíciles de obtener, posiblemente debido a la reserva de los mismos. Por lo que se tendrá que recurrir a simulación Monte Carlo. Los datos a simular son:

1. $n_{k,j}$: Número de total casos EAC en el canal k, para el mes j, con $j = 1, 2, \ldots, m$ y $m =$ número total de meses.

2. $x_{j,i}^{(k)}$: Costos del $i-$ésimo caso de EAC en el canal k, para el mes j, con $i = 1, 2, \ldots, n_{k,j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ y $m =$ número total de meses.

3. Identificador del tipo de enfermedad

4. Fecha de la factura de cobro

4.1. Objetivos

4.1.1. Objetivo general

Estimar mediante diferentes métodos el punto de retención óptimo de un reaseguro que una empresa de medicina prepagada debería tener para hacer frente al riesgo asociado a enfermedades de alto costo.

4.1.2. Objetivos específicos

Asumiendo datos $x_{j,i}^{(k)}$, $n_{k,j}$

1. Para las frecuencias observadas, $n_{k,j}$, las distribuciones utilizadas son la Poisson, la Binomial Negativa, o mezclas Poisson.
2. Determinar cuál tipo de distribución se ajusta mejor a los costos individuales observados $x_{j,i}^{(k)}$ y frecuencias observadas $n_{k,j}$.
3. Una vez determinadas las distribuciones para los costos y las frecuencias, el problema siguiente es establecer la distribución de la variable S_k. Se aplicarán varias metodologías propuestas para aproximar la distribución de esta variable, ya que no es posible obtener una expresión analítica que permita evaluarla exactamente. En particular, las distribución LogNormal (mediana) y la Pareto Generalizada (pesada) son dos distribuciones de interés (ver Hosking y Wallis (1987),Wang y Chen (2016)). En particular, se examinará la propuesta de Bee (2017), donde se propone el caso $X_k \sim LogNorm(\mu_k, \sigma_k^2)$, y $N_k \sim Poisson(\lambda_k)$.
4. Plantear la estimación de ξ con base en las metodologías para cálculo del valor de la retención óptima ξ, en reaseguro Stop-Loss, de Gerber y Jones (1976), Gerber (1982) y Waters (1979), para una cartera de costos de un tipo de enfermedad de alto costo.
5. Plantear la estimación de ξ de los costos conjuntos, S asumiendo independiencia y asumiendo un tipo de cópula, por ejemplo, Gumbel. Examinar metodologías para la estimación del valor de la retención óptima en reaseguros de excedente de pérdida (Stop-loss) en este caso, y plantear su estimación.
6. Finalmente, plantear una comparación con la metodología Black-Scholes, presentada en Girón y Herrera (2015).

5. Marco teórico del problema propuesto

Un problema que aparece en el sector de la salud, en las empresas de medicina prepagada es la obtención del punto de retención óptima y la prima que deberían pagar en un reaseguro. Estos pueden obtenerse mediante la aplicación de varias teorías, modelos estadísticos y métodos probabilísticos.

5.1. Teoría de riesgo Colectivo

Para poder realizar éste cálculo, se hace necesario la selección de modelos paramétricos que permitan capturar de la mejor manera posible el comportamiento de la variable de costos individuales observados $x_{j,i}^{(k)}$ y la variable de frecuencias observadas $n_{k,j}$ para cada una de las k enfermedades de alto costo.

Para la distribución de la variable de frecuencias observadas $n_{k,j}$, en la práctica se suelen utilizar en general tres tipos de leyes de frecuencias diferentes, que dependen de la posición de la varianza y del valor esperado de las frecuencias (más detalles acerca de los modelos de frecuencias usados en la práctiva en Deelstra y Plantin (2014)).

Para seleccionar la distribución para la variable de los costos individuales observados $x_{j,i}^{(k)}$, se hace necesario identificar el grado de severidad o peso de la cola derecha de la distribución $\mathbb{P}(X_k > x)$. Para ello se define para cada cartera k una función

$$e_k(\xi_k) = \mathbb{E}(X_k - \xi_k | X_k > \xi_k), \ \xi_k \geq 0 \tag{13}$$

denominada como función de vida media residual. De (13) se tiene que $\forall k$ cuando ξ_k tiene un valor finito, existe una expresión de su esperanza denotada por $\mathbb{E}(X_k)$, en términos de la función $(1 - F_{x_k}(x))$, y está dada por (Hogg y Klugman, 2009, pag. 59)

$$\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(X_k \wedge \xi_k) + e_k(\xi_k)\mathbb{P}(X_k > \xi_k) < \infty \tag{14}$$

donde $X_k \wedge a = \text{mín}(X_k, \xi_k) \in [0, a]$. La función (13) mide para unos costos ξ_k, la esperanza de que éstos sobrepasen dicha cantidad, o el costo esperado de la enfermedad k después de cierto umbral ξ_k. Usando la definición de esperanza condicional en (13) se tiene que

$$e_k(\xi_k) = \frac{\mathbb{E}(X_k - \xi_k)I(X_k > \xi_k)}{\mathbb{P}(X_k > \xi_k)} \tag{15}$$

que puede ser reescrita mediante (14) como

$$e_k(\xi_k) = \frac{\mathbb{E}(X_k) - (X_k \wedge \xi_k)}{\mathbb{P}(X_k > \xi_k)} \tag{16}$$

de (14) y (16), la vida media residual puede escribirse como (Martínez, 2014, pag. 7)

$$e_k(\xi_k) = \frac{\int_a^\infty (1 - F_{x_k}(x))dx}{1 - F_k(\xi_k)} \tag{17}$$

la ecuación anterior sugiere que existe una relación entre $e_k(\xi_k)$ y el comportamiento de la cola de la distribución $\mathbb{P}(X_k > \xi_k) = 1 - F_{X_k}(\xi_k)$ cuando $\xi_k \to \infty$, lo cual nos sirve para clasificar en tres categorías la severidad de los X_k dependiendo del comportamiento de $e_k(\xi_k)$ así

$$\text{Severidad} = \begin{cases} \text{baja = colas livianas: } e_k(\xi_k) \searrow, \ \text{cuando } a \to \infty \\ \text{media = colas medianas: } e_k(\xi_k) \to \text{cte}, \ \text{cuando } a \to \infty \\ \text{alta = colas pesadas: } e_k(\xi_k) \nearrow, \ \text{cuando } a \to \infty \end{cases}$$

más detalles acerca de $e_k(\xi_k)$ en Hall y Wellner (2017) y Hollander y Proschan (1984). Sobre el uso de la $e_k(\xi_k)$ en Beirlant y Teugels (1992) y Beirlant et al. (1994).

Una vez conocido el comportamiento de la vida media residual (17) para cada una de las carteras k, se realiza la el proceso de ajuste. En Moscadelli (2004) se recomienda usar la distribución Weibull en el caso de severidad liviana y las distribuciones Lognormal y Gumbel para el caso de severidad media y en Mora (2010) se recomienda usar las distribuciones Pareto, doble exponencial, t, distribuciones con colas Pareto y modelos mezclados. (Más detalles sobre el ajuste estadístico de las distribuciones en Klugman et al. (2012)).

Una vez seleccionadas las distribución que mejor ajustan a los costos individuales de los pacientes para la k-ésima cartera X_k y a las frecuencias de las k carteras N_k, se procede a aplicar una serie de metodologías con el fin de aproximar la distribución de las variables S_k. La suma aleatoria presentada en (1) representa el costo total de la enfermedad k en la vigencia de la póliza. La distribución de S_k se denomina como "distribución compuesta" la cual depende de la distribución que tenga N_k, en donde, si N_k se distribuye como una Poisson, entonces S_k tendrá una distribución Poisson compuesta o si N_k se distribuye Binomial, se dice que S_k tiene una distribución Binomial compuesta.

La función de distribución acumulada de la variable S_k se denota por $F_{S_k}(x)$, y se obtiene mediante el teorema de probabilidad total, donde

$$\begin{aligned}
F_{S_k}(x) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{N_k} X_{k,i} \leq x\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_k = n)\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{N} X_{k,i} \leq x | N = n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_{n_k}\mathbb{P}(X_{k,1} + X_{k,2} + \ldots + X_{k,n} \leq x) \\
F_{S_k}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{n_k} F_{X_k}^{*n}(x) \qquad (18)
\end{aligned}$$

con $p_{n_k} = P(N_k = n)$ y $F_{X_k}^{*n}(x) = \mathbb{P}(X_{k,1} + X_{k,2} + \ldots + X_{k,n} \leq x)$ la n-ésima convolución de F_{X_k} consigo misma (Feller, 1978). Lo anterior permite expresar la distribución acumulada de costos totales para la k-ésima cartera como una serie infinita de funciones. A pesar de que F_{S_k} es una serie infinita y por tanto permite realizar cálculos de probabilidades, es posible calcular la función generadora de momentos de S_k (Bowers et al., 1997, pag. 368-369) y a partir de éstos realizar aproximaciones para F_{S_k}.

Debido a que las variables aleatorias N_k y $X_{k,1}, X_{k,2}, \ldots$, son mutuamente independientes, entonces Escalante y Arango (2004, pag. 8) definen la media y la varianza de S como

$$\mathbb{E}(S_k) = \mu_{S_k} = \mu_{N_k}\mu_{X_k} \tag{19}$$

$$Var(S_k) = \sigma^2_{S_k} = \mu_{N_k}\sigma^2_{X_k} + \sigma^2_{N_k}(\mu_{X_k})^2 \tag{20}$$

en Bowers et al. (1997, pag. 369) se define la función generadora de momentos de S como

$$M_{S_k}(t) = \mathbb{E}(e^{tS_k}) = M_{N_k}[\ln M_{X_k}(t)] \tag{21}$$

y Escalante y Arango (2004, pag. 7) definen la función generadora de probabilidades de S como

$$\mathbb{P}_{S_k}(y) = \mathbb{E}(y^S_k) = P_{N_k}[P_{X_k}(y)] \tag{22}$$

La obtención de los momentos de S_k mediante la función generadora de momentos definida en (21) permite realizar aproximaciones de la función de distribución acumulada F_{S_k}, algunas de estas aproximaciones son descritas en Kaas et al. (2008, cap. 2 y cap. 3) y en Beard et al. (1984, cap. 3). Con estas aproximaciones se busca determinar los percentiles de F_{S_k} con el fin del posterior cálculo del Valor en Riesgo (VaR por sus siglas en inglés) y la cola del Valor en Riesgo (TVaR por sus siglas en inglés) de la k-ésima enfermedad de alto costo, con el fin de identificar si la pérdida puede ser asumida desde el presupuesto ordinario o si es necesario asumirse mediante la adquisición de un reaseguro. Donde, de ser este último el caso, se propone un punto de retención y un valor para la prima de reaseguro.

5.2. Reaseguro de excedente de pérdida

En el reaseguro de exceso de pérdida se debe especificar, entre otros términos, una prioridad o retención $\xi_k > 0$, un tope o garantía M y una prima de reaseguro o prima cedida Pc. Suponga un caso en donde ocurre un siniestro S_k, para el cual se puede presentar uno de varios escenarios. En primer lugar, suponga que $0 < S_k \leq \xi_k$, entonces para este caso la EMP sera quien asuma la totalidad del siniestro, ya que ξ_k es el punto acordado por la EMP y el reasegurador a partir del cual este último comenzará a cubrir los costos generados por el siniestro. En segundo lugar, suponga que $\xi_k < S_k \leq M$, entonces en este caso el asegurador asumirá la totalidad del valor ξ_k, mientras que el valor $\xi_k - S_k$ sera asumido por el reasegurador tal como fue acordado. En tercer lugar, suponga que $S_k > M$, es decir, el siniestro ocurrido es mayor que el tope máximo que pactado entre la EMP y el reasegurador, y por tanto, el reasegurador sera quien asuma la cantidad $M - \xi_k$, mientras que el asegurador deberá asumir además de la cantidad ξ_k, la cantidad $S_k - M$, debido a dicho siniestro superó el tope máximo pactado. Para cubrir la cantidad $S_k - M$, la EMP podrá considerar la adquisición de un segundo contrato de reaseguro con otra reaseguradora.

En este trabajo, se asumirá que el tope $M = \infty$, debido a que se está interesado en calcular el punto de retención óptimo ξ_k mediante diferentes criterios y por tanto el asumir un $M < \infty$ supondría un desarrollo más extenso que se saldría del cronograma de actividades estimado.

Para unos costos totales S_k tal que

$$(S_k)_+ = \begin{cases} 0 & S_k \leq 0 \\ S_k & S_k > 0 \end{cases}$$

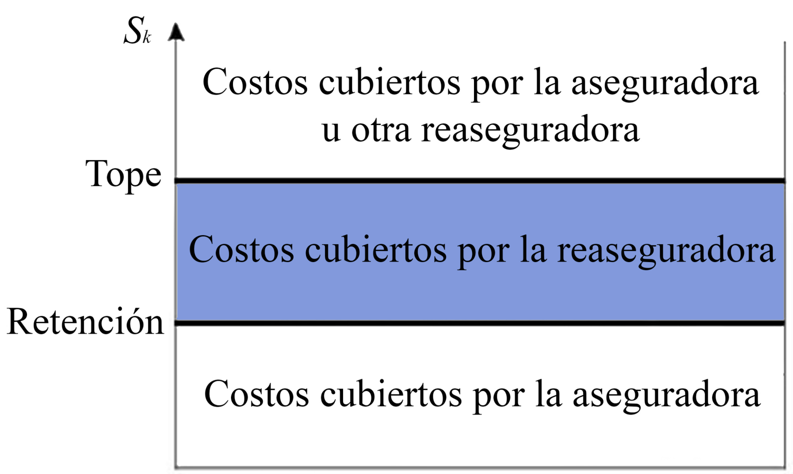
en Giraldo (1996) se define a la cantidad de los costos totales retenidos por el asegurador como

$$Z_r = S_k \wedge \xi_k \tag{23}$$

y la cantidad de los costos totales cedidos al reasegurador como

$$Z_c = (S_k - \xi_k)_+ \tag{24}$$

Figura 1: Repartición de los costos totales en un reaseguro



Ahora bien, si P denota la prima total que recibe el asegurador y Pc la prima que cede al reasegurador, entonces la prima que retendrá se define por $Pr = P - Pc$. Además, definida $\mathbb{E}(S_k)$ en (19), se asume que $P > \mu_{N_k}\mu_{X_k}$, con $\frac{P}{\mu_{N_k}\mu_{X_k}} = 1 + \delta$, donde δ se denominará recargo. También asuma que $P_c > \mu_{N_k}\mathbb{E}[(S_k - \xi_k)_+]$, con $\frac{P_c}{\mu_{N_k}} = \mathbb{E}[(S_k - \xi_k)_+] = 1 + \alpha$, donde α es una constante denominada recargo de reaseguro y $0 < \delta < \alpha < 1$.

Dada una muestra de F_{S_k} de tamaño $\hat{\mu}_{N_k} = n$, y especificados δ y α, debe determinarse el valor de la retención ξ_k, de acuerdo a un criterio determinado. Los criterios que se usarán para determinar el valor del punto de retención ξ_k son descritos en Giraldo (1996).

5.3. Modelo de valoración de opciones Black-Scholes

El modelo de valoración de opciones Black-Scholes basado en opciones europeas fue propuesto por Black y Scholes (1973), y se deriva de la obtención de dos funciones que se usan para valorar el precio teórico de una opción *call* y una opción *put* europea cuando la acción no paga dividendos Girón y Herrera (2015). Dichas funciones son

$$C(\mathsf{F}, \tau) = e^{-r(\tau)}\left[\mathsf{F}N(d_1) - \mathsf{E}N(d_2)\right] \tag{25}$$
$$P(\mathsf{F}, \tau) = e^{-r(\tau)}\left[\mathsf{E}N(-d_2) - \mathsf{F}N(-d_1)\right] \tag{26}$$
$$\tag{27}$$

donde $C(.)$ es la prima de la opción de compra y $P(.)$ la prima de la opción de venta. Para obtener estas formulas, se define en el modelo Black-Scholes a

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{\mathsf{F}}{\mathsf{E}}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{28}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \tag{29}$$

De las formulas anteriores se tiene que F es el precio actual del contrato en el momento de la valoración de la opción, E es el precio de ejercicio (Lamothe y Pérez, 2006, cap. 114), r tipo de interés continuo, σ es la volatilidad del precio del contrato en términos anuales, (τ) es el tiempo hasta el vencimiento (expresado en años), $N(.)$ es el valor de un determinado punto de la función de distribución de una variable aleatoria normal estandarizada.

Además, en Black y Scholes (1973) se propone una expresión para la paridad *put-call*, y está dada por

$$C(\mathsf{F}, \tau) - P(\mathsf{F}, \tau) = e^{-r(\tau)}[\mathsf{F} - \mathsf{E}] \tag{30}$$

la cual permite finalmente la obtención del precio de la opción.

6. Estado del arte del problema propuesto

Los reaseguros de excedente de pérdida (SL=Stop Loss) se han desarrollado con base en la teoría de Riesgo Colectivo desde mediados del siglo XX, ver por ejemplo, Kahn (1962), Benktander (1977). Una referencia sobre el estado del arte de reaseguros de excedente de pérdida es Rytgaard (2004) y las referencias que cita.

Los reaseguros SL son los utilizados en la práctica comercial en el país para la cobertura de carteras de medicina prepagada, así como en la práctica internacional, ver (SuissRe, 1988, pag. 194).

Pero la estimación de la prima cedida $\mathbb{E}((S_k - \xi_k)_+)$ presenta problemas, ya que en una muestra S_k es posible que algunos datos sean menores que la retención y generen ceros, lo que lleva a un problema de sesgo. Este problema ha sido tratado en Seal (1969), Conolly (1955), Vajda (1951),Vajda (1955). Las referencias básicas para la estimación de la prima cedida SL, en las cuales se basa este trabajo de tesis son Straub (1978), Waters (1979), Gerber y Jones (1976), Gerber (1982).

El problema anterior tiene que ver con distribuciones de cola pesada. Trabajos más recientes sobre el cálculo de primas, relevantes para la tesis, son, por ejemplo, Ladoucette y Teugels (2006) y Gay (2005). En particular, la aplicación de la distribución Pareto Generalizada ha recibido mucha atención y se planea utilizar en este trabajo. Ver, por ejemplo, Chen et al. (2017), Dupuis y Tsao (1998). Un trabajo sobre la aplicación de la distribución Pareto Generalizada en seguros médicos es encontrada en Zisheng y Chi (2006).

Existen otros desarrollos para estos reaseguros, como la aplicación de teoría de control estocástico óptimo o la aplicación de técnicas de ingeniería financiera, como la valoración de opciones aprovechando que la forma funcional de la prima cedida son exactamente iguales, pero no se consideran parte del estado del arte del problema propuesto.

Para Colombia se han realizado pocos trabajos en este tema, donde uno de los pioneros es realizado por Chicaíza (2005), donde la autora aborda la problemática del cálculo de la prima de las EAC mediante el método actuarial tradicional, donde examina dos tipos de reaseguro, a saber, los que cubren todos los costos que sobrepasen un umbral por paciente, y los costos que se generan por sucesos no esperados generados por una patología. Y también calcula la prima de las EAC mediante la teoría de valoración de opciones de Black-Scholes con el fin de comparar la prima pagada por afiliado mensualmente mediante ambos métodos. La autora concluye que el modelo de valoración de opciones brinda una buena aproximación al método actuarial y que por tanto puede ser utilizado como una alternativa para valorar las primas que se deben pagar en reaseguros de EAC.

En esta misma dirección, en Chicaíza y Cabedo (2009) los autores realizan la aplicación a un caso real, del método de valoración de opciones para calcular las primas de seguro. Inicialmente los autores realizan una revisión de aquellos trabajos en otros campos que han usado derivados para la cobertura del riesgo, hacen referencia a las similitudes entre el contrato de opciones y el contrato de seguros y dan las razones de por qué se puede usar la teoría de precio de opciones para estimar la prima a pagar en un operación de reaseguro. Posteriormente, realiza la estimación del cálculo de la prima usando el modelo Black-Scholes y comparan los resultados de la prima calculada con este modelo contra la calculada con el método actuarial. Finalmente concluyen al igual que en trabajos previos, que el modelo Black-Scholes brinda resultados no muy lejanos a los del método actuarial en la estimación de la prima de reaseguro para EAC, pues señalan que las opciones ofrecen un nivel de protección similar al de los seguros, donde ambas herramientas permiten cubrir cierto riesgo a cambio de una prima.

Continuando con esta linea de trabajo, otro trabajo realizado para Colombia, Girón y Herrera (2015) aborda la problemática del cálculo de la prima que se debe pagar para cubrir el riesgo generado por EAC para el caso de una Empresa de Medicina Prepagada (EMP), en donde al igual que Chicaíza (2005), lo hace mediante la comparación del método tradicional de reaseguro y la teoría de valoración de opciones de Black-Scholes. En su trabajo, los autores describen el funcionamiento tanto del reaseguro como el modelo de valoración de opciones, explican las similitudes y equivalencias entre éstos, y calcula la prima pura de riesgo que se pagaría tanto por el método actuarial del reaseguro como por el modelo de opciones. Los autores concluyen que el modelo propuesto por Black-Scholes presenta buenas aproximaciones al método actuarial cuando se tiene un deducible por debajo de los 200 millones de pesos, ya que cuando este deducible está por encima de esta cifra el riesgo generado por la incertidumbre es mayor.

7. Metodología propuesta

En primer lugar se determinará cuál de las distribuciones propuestas se ajusta a los costos individuales observados $x_{j,i}^{(k)}$. Para esto, se realizará el cálculo de la vida media residual (17) con el fin de observar el comportamiento de la severidad de la distribución de los costos, en donde se espera que debido a la naturaleza de las enfermedades de alto costo, las distribuciones para severidad media o alta sean las que presenten un mejor ajuste.

En segundo lugar, se realizará el ajuste de las frecuencias observadas $n_{k,j}$ junto con sus respectivas pruebas de bondad de ajuste. Una vez determinadas las distribuciones de los costos individuales observados $x_{j,i}^{(k)}$ y las frecuencias observadas $n_{k,j}$, se realizará la aproximación de la función de distribución acumulada de la variable S_k, F_{S_k}, en donde se realizará el cálculo tanto de la función de distribución acumulada empírica como de la teórica, junto con diferentes pruebas de bondad de ajuste para decidir cuál produce un mejor ajuste.

En tercer lugar, se realiza el cálculo de los momentos y los cumulantes tanto para la función de distribución acumulada de los costos individuales F_{X_k} como para la de costos totales F_{S_k}, con el fin de realizar el cálculo de los percentiles del 0.9, 0.95 y 0.99 de S_k ya sea mediante algunas aproximaciones (Kaas et al., 2008) o mediante simulación Montecarlo, para así realizar el cálculo del punto óptimo de retención.

8. Cronograma

Cronograma de actividades	**Meses**									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Desarrollo del marco teórico	X	X	X	X						
Revisión bibliográfica	X	X	X	X	X	X				
Análisis descriptivo y desarrollo analítico			X	X	X	X	X			
Estimación				X	X	X	X			
Análisis de resultados						X	X			
Conclusiones								X		
Organización y redacción			X	X	X	X	X	X		
Redacción del informe final								X	X	X
Organización para artículo de divulgación										X

9. Compromisos

- Puesta a consideración de los resultados más relevantes de la propuesta a una revista de circulación nacional o internacional.

Referencias

Beard, R., Pentikäinen, T., & Pesonen, E. (1984). *Risk theory: the stochastic basis of insurance*, volume 3. London, Chapman and Hall.

Bee, M. (2017). Density approximations and var computation for compound poisson-lognormal distributions. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46(3):1825–1841.

Beirlant, J. & Teugels, J. L. (1992). Modeling large claims in non-life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 11(1):17–29.

Beirlant, J., Teugels, J. L., & Vynckier, P. (1994). Extremes in non-life insurance. In *Extreme value theory and applications*, pages 489–510. Springer.

Benktander, G. (1977). On the rating of a special stop loss cover. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 9(1-2):33–41.

Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654.

Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., & Nesbitt, C. (1997). Actuarial mathematics. *Society of Actuaries*, 2.

Chen, P., Ye, Z., & Zhao, X. (2017). Minimum distance estimation for the generalized pareto distribution. *Technometrics*, pages 1–14.

Chicaíza, L. (2005). Valoración de primas de reaseguro para enfermedades catastróficas utilizando el modelo de Black-Scholes. *Documentos de Trabajo Universidad Externado de Colombia*.

Chicaíza, L. & Cabedo, D. (2009). Using the Black-Scholes method for estimating high-cost illness insurance premiums in Colombia. *Innovar*, 19(33):119–130.

Conolly, B. (1955). Unbiased premiums for stop-loss reinsurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1955(3-4):127–134.

Deelstra, G. & Plantin, G. (2014). *Risk theory and reinsurance*. Springer-Verlag London.

Dupuis, D. & Tsao, M. (1998). A hybrid estimator for generalized pareto and extreme-value distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 27(4):925–941.

Escalante, C. & Arango, G. (2004). Aspectos básicos del modelo de riesgo colectivo. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 12(2):3–15.

Feller, W. (1978). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, volume 2. Limusa - Wiley, S.A.

Gay, R. (2005). Premium calculation for fat-tailed risk. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 35(1):163–188.

Gerber, H. & Jones, D. (1976). Some practical considerations in connection with the calculation of stop-loss premiums. *Transactions of the Society of Actuaries*, 28:215–231.

Gerber, H. U. (1982). On the numerical evaluation of the distribution of aggregate claims and its stop-loss premiums. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1(1):13–18.

Giraldo, N. (1996). Métodos de estimación del punto óptimo de retención en reaseguros de excedente de pérdida. In *Simposio de Estadística, Universidad Nacional de Colombia*, Santa Marta, Colombia.

Girón, L. & Herrera, F. (2015). Cálculo y comparación de la prima de un reaseguro de salud usando el modelo de opciones de Black-Scholes y el modelo actuarial. *Revista de Economía del Rosario. Julio-Diciembre*, 18(2):211–248.

Hall, W. & Wellner, J. (2017). Estimation of mean residual life. arXiv:1707.02484.

Hogg, R. & Klugman, S. (2009). *Loss distributions*, volume 2. John Wiley & Sons, Inc.

Hollander, M. & Proschan, F. (1984). Nonparametric concepts and methods in reliability. *Handbook of statistics*, 4:613–655.

Hosking, J. R. & Wallis, J. R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized pareto distribution. *Technometrics*, 29(3):339–349.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., & Denuit, M. (2008). *Modern actuarial risk theory: using R*, volume 2. Springer Science & Business Media.

Kahn, P. M. (1962). An introduction to collective risk theory and its application to stop-loss reinsurance. *Transactions of Society of Actuaries*, 14(40):400–425.

Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2012). *Loss models: from data to decisions*, volume 4. John Wiley & Sons.

Ladoucette, S. A. & Teugels, J. L. (2006). Reinsurance of large claims. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 186(1):163–190.

Lamothe, P. & Pérez, M. (2006). *Opciones Financieras y Productos Estructurados*, volume 3. McGraw-Hill, Madrid.

Martínez, C. (2014). *Condiciones suficientes para criterios de comparación estocástica*. PhD thesis, Facultad de Matemáticas, Universidad de Murcia, Murcia, España.

Mora, A. (2010). Estimadores del índice de cola y el valor en riesgo. *Cuadernos de Administración,*, Universidad del Valle, Julio-Diciembre(44):71–88.

Moscadelli, M. (2004). The modelling of operational risk: experience with the analysis of the data collected by the basel committee. Technical Report 517, Temi di discussione, Banca D'Italia.

Rytgaard, M. (2004). Stop-loss reinsurance. *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*.

Seal, H. (1969). *Stochastic theory of a risk business*. New York: John Wiley and Sons.

Straub, E. (1978). How to fix retention. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 78(1):95–104.

SuissRe (1988). *El reaseguro de los ramos generales*. Compañía Suiza de Reaseguros.

Vajda, S. (1951). Analytical studies in stop-loss reinsurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1951(1-2):158–175.

Vajda, S. (1955). Analytical studies in stop-loss reinsurance. ii. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1955(3-4):180–191.

Wang, C. & Chen, G. (2016). A new hybrid estimation method for the generalized pareto distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 45(14):4285–4294.

Waters, H. R. (1979). Excess of loss reinsurance limits. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1979(1):37–43.

Zisheng, O. & Chi, X. (2006). Generalized pareto distribution fit to medical insurance claims data. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 21(1):21–29.

A. Apéndice

A.1. Glosario

Las definiciones aquí presentados se definen en base a conceptos médicos y conceptos de reaseguro. Muchas de las definiciones son extraídas de `https://www.fundacionmapfre.org/fundacion/es_es/publicaciones/diccionario-mapfre-seguros/`

Deducible - Cantidad por la que el asegurado es propio asegurador de sus riesgos y en virtud de la cual, en caso de siniestro, soportará con su patrimonio la parte de los daños que le corresponda.

Enfermedad - Alteración o desviación del estado fisiológico en una o varias partes del cuerpo, por causas en general conocidas, manifestada por síntomas y signos característicos, y cuya evolución es más o menos previsible.

Enfermedad de alto costo - Son aquellas enfermedades que son diagnosticadas como terminales y crónicas cuya atención requiere tratamiento continuo, prolongado, con medicamentos y procedimientos especiales.

Prima - Aportación económica que ha de satisfacer el contratante a la entidad aseguradora en concepto de contraprestación por la cobertura de riesgo que este le ofrece.

Prima de reaseguro - Prima que el asegurador paga al reasegurador en contraprestación del riesgo asumido por este.

Prioridad - Es el importe que el asegurador retiene por cuenta propia en cada siniestro o capital máximo que el asegurador conserva por su propia cuenta.

Reaseguro - Instrumento técnico del que se vale una entidad aseguradora para conseguir la compensación estadística que necesita, igualando u homogeneizando los riesgos que componen su cartera de bienes asegurados mediante la cesión de parte de ellos a otras entidades.

Recargo - Es un valor que tiene como finalidad compensar las posibles desviaciones entre la siniestralidad real y la estimada

Retención bruta - Es la parte de riesgo de la que el asegurador resulta responsable ante el asegurado, en caso de siniestro.

Retención neta -Es la parte de riesgo de la que realmente tiene que responder el asegurador por propia cuenta, en caso de siniestro.

Seguro - Contrato me mediante el cual una compañía de seguros, se obliga, mediante el cobro de una prima, de indemnizar dentro de los límites pactados, la manifestación concreta de un riesgo.

Siniestro - Es la manifestación concreta del riesgo asegurado, que produce unos daños garantizados en la póliza hasta determinada cuantía.

A.2. Marco legal de las enfermedades de alto costo

En Colombia, como bien lo define el Artículo 16 de la Resolución 5261 de 1994[1], las enfermedades catastróficas o alto costo son aquellas que debido a su naturaleza, tienen una baja frecuencia, poseen una alta complejidad técnica en su manejo, representan un bajo costo-efectividad en su tratamiento y sobre todo generan altos costos. Los tratamientos descritos en el Artículo 17[2] para manejar este tipo de enfermedades incluye

a) Tratamiento con radioterapia y quimioterapia para el cáncer.
b) Diálisis para insuficiencia renal crónica, transplante renal, de corazón de medula ósea y de cornea.
c) Tratamiento para el SIDA y sus complicaciones.
d) Tratamiento quirúrgico para enfermedades del corazón y del sistema nervioso central.
e) Tratamiento quirúrgico para enfermedades de origen genético o congénitas.
f) Tratamiento medico quirúrgico para el trauma mayor.
g) Terapia en unidad de cuidados intensivos.
h) Reemplazos articulares.

Además, debido a la naturaleza de este tipo de enfermedades, se establece en el Parágrafo 4 del Artículo 162 de la Ley 100 de 1993[3] que "toda entidad promotora de salud reasegurará los riesgos derivados de la atención de enfermedades calificadas por el consejo nacional de seguridad social como de alto costo". Adicionalmente, el Artículo 19 de la Ley 1122 de 2007[4] establece que "para la atención de enfermedades de alto costo las entidades promotoras de salud contratarán el reaseguro o responderán,

[1] Resolución 5261 de 1994, Artículo 16, Ministerio de Salud, República de Colombia.
[2] Resolución 5261 de 1994, Artículo 17, Ministerio de Salud, República de Colombia.
[3] Ley 100 de 1993, Artículo 162, República de Colombia.
[4] Ley 1122 de 2007, Artículo 19, República de Colombia.

directa o colectivamente por dicho riesgo, de conformidad con la reglamentación que sobre la materia expida el Gobierno Nacional".

De lo anterior se desprende que para el cubrimiento del riesgo asociado a las enfermedades de alto costo por parte de las entidades promotoras de salud (EPS) de ambos regímenes y las entidades obligadas a compensar (EOC), el Ministerio de Protección social expide el Decreto 2699 de 2007[5], con el cual se crea la Cuenta de Alto Costo, la cual opera como un fondo autogestionado por las mismas EPS y EOC para contribuir a estabilizar el sistema de salud en función del riesgo generado por los casos de alto costo.

Posterior a la creación de la Cuenta de Alto Costo, con el fin de dar cumplimiento al literal b) del Artículo 25 de la Ley 1122 de 2007[6] y evitar la selección adversa de usuarios por parte de las EPS y EOC, se decide incluir en la Cuenta de Alto Costo otras enfermedades, y para ellos, en el Artículo 1 de la Resolución 3974 de 2009[7] se establecen como enfermedades de alto costo

1. Cáncer de cérvix
2. Cáncer de mama
3. Cáncer de estómago
4. Cáncer de colon y recto
5. Cáncer de próstata
6. Leucemia linfoide aguda
7. Leucemia mieloide aguda
8. Linfoma hodgkin
9. Linfoma no hodgkin
10. Epilepsia
11. Artritis reumatoidea
12. Infección por el Virus de Inmunodeficiencia Humana (VIH) y Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida (SIDA).

Además para completar la definición de los eventos y servicios de alto costo, en el Artículo 126 de la Resolución 5521 de 2013[8] se define como eventos y servicios de alto costo para el régimen contributivo

[5]Decreto 2699 de 2007, Ministerio de protección social, República de Colombia.

[6]Ley 1122 de 2007, Artículo 25, República de Colombia.

[7]Resolución 2974 de 2009, Artículo 1, Ministerio de protección social, República de Colombia.

[8]Resolución 5521 de 2013, Artículo 126, Ministerio de salud y protección social, República de Colombia.

1. Trasplante renal, corazón, hígado, médula ósea y córnea.
2. Diálisis peritoneal y hemodiálisis.
3. Manejo quirúrgico para enfermedades del corazón.
4. Manejo quirúrgico para enfermedades del sistema nervioso central.
5. Reemplazos articulares.
6. Manejo médico quirúrgico del paciente gran quemado.
7. Manejo del trauma mayor.
8. Diagnóstico y manejo del paciente infectado por VIH.
9. Quimioterapia y radioterapia para el cáncer.
10. Manejo de pacientes en Unidad de Cuidados Intensivos.
11. Manejo quirúrgico de enfermedades congénitas.

y para el régimen subsidiado a

1. Trasplante renal, corazón, hígado, médula ósea y córnea.
2. Manejo quirúrgico de enfermedades cardiacas, de aorta torácica y abdominal, vena cava, vasos pulmonares y renales, incluyendo las tecnologías en salud de cardiología y hemodinamia para diagnóstico, control y tratamiento, así como la atención hospitalaria de los casos de infarto agudo de miocardio.
3. Manejo quirúrgico para afecciones del sistema nervioso central, incluyendo las operaciones plásticas en cráneo necesarias para estos casos, así como las tecnologías en salud de medicina física y rehabilitación que se requieran, asimismo, los casos de trauma que afectan la columna vertebral y/o el canal raquídeo siempre que involucren daño o probable daño de médula y que requiera atención quirúrgica, bien sea por neurocirugía o por ortopedia y traumatología.
4. Corrección quirúrgica de la hernia de núcleo pulposo incluyendo las tecnologías en salud de medicina física y rehabilitación que se requieran.
5. Atención de insuficiencia renal aguda o crónica, con tecnologías en salud para su atención y/o las complicaciones inherentes a la misma en el ámbito ambulatorio y hospitalario.
6. Atención integral del gran quemado. Incluye las intervenciones de cirugía plástica reconstructiva o funcional para el tratamiento de las secuelas, la internación, fisiatría y terapia física.
7. Pacientes infectados por VIH/SIDA.
8. Pacientes con cáncer.
9. Reemplazos articulares.
10. Internación en Unidad de Cuidados Intensivos.

11. Manejo quirúrgico de enfermedades congénitas.
12. Manejo del trauma mayor.

Por otro lado, el Artículo 127[9] definen los tipos de lesiones que debe tener un paciente para ser considerado como gran quemado y por tanto, ser considerado como un paciente que requiere un servicio o evento de alto costo

1. Quemaduras de 2° y 3° grado en más del 20 % de la superficie corporal.
2. Quemaduras del grosor total o profundo, en cualquier extensión, que afectan a manos, cara, ojos, oídos, pies y perineo o zona ano genital.
3. Quemaduras complicadas por lesión por aspiración.
4. Quemaduras profundas y de mucosas, eléctricas y/o químicas.
5. Quemaduras complicadas con fracturas y otros traumatismos importantes.
6. Quemaduras en pacientes de alto riesgo por ser menores de 5 años y mayores de 60 años o complicadas por enfermedades intercurrentes moderadas, severas o estado crítico previo.

Finalmente, en el Artículo 128[10] se define que para considerar a un paciente como de trauma mayor se requiere que éste tenga una o múltiples lesiones graves provocadas por violencia exterior, las cuales requieran para su manejo médico-quirúrgico realización de procedimientos o intervenciones terapéuticas múltiples y que cualquiera de estos se efectúe bajo un servicio de alta complejidad.

[9] Resolución 5521 de 2013, Artículo 127, Ministerio de salud y protección social, República de Colombia.

[10] Resolución 5521 de 2013, Artículo 128, Ministerio de salud y protección social, República de Colombia.