Modelos no lineales en las variables

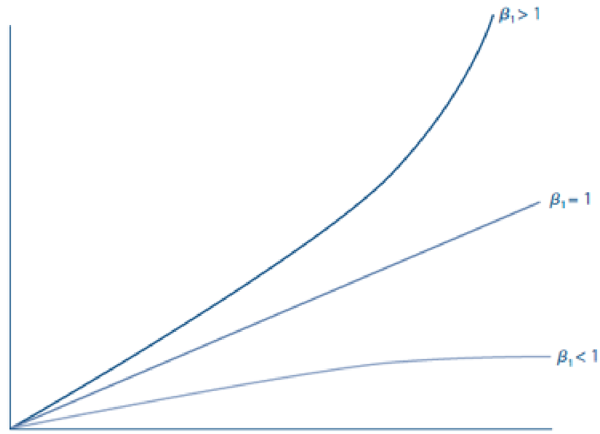
Econometría 1 - 2021-1

Febrero 19 2021

Hasta ahora hemos trabajado con modelos lineales en las variables y en los parámetros. En algunos casos se requiere otro tipo de modelos en los que las variables independientes o dependiente no sean lineales (transformaciones cúbicas, cuadráticas, logarítmicas, etc.). Sin embargo, los modelos que veremos a continuación siguen siendo lineales en los parámetros.

1 Modelo doblemente logarítmico (log-log)

Suponga que tiene una función de producción Cobb-Douglas $Y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1}$. De forma que la representación gráfica del modelo es:



El modelo econométrico a estimar estaría representado por $Y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} e^{\mu}$. Para estimarlo usted efectúa una linealización transformándolo con logaritmos:

$$FRP : LnY_i = Ln\beta_0 + \beta_1 LnX_i + \mu$$

Defina $Y_i^* = lnY_i, \alpha = ln\beta_0, X_i^* = lnX_i$, entonces el modelo continua siendo lineal en los parámetros y se puede estimar por MCO, considerando que:

$$FRP : Y_i^* = \alpha + \beta_1 X_i^* + \mu$$

Los estimadores de MCO obtenidos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}_1$ serán los mejores estimadores lineales insesgados de α y β_1, respectivamente. En el modelo log-log β_1 representa la elasticidad de Y respecto a X, es decir, el cambio porcentual en Y ante un cambio porcentual pequeño en X. Entonces si Y es la cantidad demandada de un bien y X representa su precio unitario, entonces β_1 mediría la elasticidad precio de la demanda.

Así, el modelo log-log es un modelo de elasticidad constante ya que:

$$\varepsilon_{Y,X} = \frac{\delta Y}{\delta X} * \frac{X}{Y} = \frac{\beta_1 \beta_0 X^{\beta_1 - 1} X}{\beta_0 X^{\beta_1}} = \beta_1$$

1.1 Ejemplo

1.1.1 Especificación del modelo

Suponga que usted quiere estimar la elasticidad de los salarios de los CEO con respecto a las ventas de las firmas. Para eso estima el siguiente modelo doblemente logarítmico:

$$Ln(salariosCEO_i) = Ln\beta_0 + \beta_1 Ln(ventas_i) + \mu \tag{1}$$

Dónde β_1 es la elasticidad del salario respecto a las ventas.

1.1.2 Estimación

Estimando por MCO la ecuación (1) con los datos de la base ceosal1 del Boston College[1]:

$$Ln\,salar\hat{i}osCEO_i = 4.822 + 0.257 * Ln(ventas_i)$$

	(1)
VARIABLES	ln(salario)
ln(ventas)	0.257***
	(0.0345)
Constante	4.822***
	(0.288)
Observaciones	209
R^2	0.211

Errores estándar en paréntesis
*** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1

Dónde β_1 es la elasticidad del salario respecto a las ventas.

1.1.3 Verificación

1. Dependencia:

   (a) Hipótesis:

      i. H_0 : No existe dependencia del modelo

      ii. H_a : Si existe dependencia del modelo

   (b) $\alpha = 5\%$

   (c) $Fc = \frac{CMR}{CMe} \sim F_{GLR,GLE}$

   (d) Criterio de decisión: Si $F_c > F_t$. En este caso el p-valor de la prueba F es 0, por lo que rechazo la hipótesis nula.

   (e) Con una confianza del 95% rechazo la hipótesis nula. Las variables independientes explican estadísticamente en su conjunto (en este caso solo tenemos una variable independiente) a la variable dependiente.

2. Relevancia:

   (a) Hipótesis:

      i. $H_0 : \beta_1 = 0$

      ii. $H_a : \beta_1 \neq 0$

[1]http://fmwww.bc.edu/ec-p/data/wooldridge/datasets.list.html

(b) $\alpha = 5\%$

(c) $tc = 7.44$

(d) Criterio de decisión: Si $F_c > F_t$. En este caso el p-valor de la prueba F es 0, por lo que rechazo la hipótesis nula.

(e) Conclusión: Con una confianza del 95% las ventas son relevantes para explicar el salario de los CEO. β_1 implica que un incremento de 1% en las ventas de la firma, aumenta en cerca de 0.257% el salario de los CEO (interpretación de elasticidad)

1.1.4 Predicción

En este caso el $R^2 = 0.211$ es la variación de LnY explicada por la variación de LnX

2 Modelos semi-logarítmicos

2.1 Modelo log-lin

Suponga que quiere estimar el salario en términos de los años de educación, a través de una estimación lineal:

$$salario_i = \beta_0 + \beta_1 * educ_i + u_i$$

usted puede obtener un $\hat{\beta_1}$, que significa que por cada año más de educación el salario aumentara en $\hat{\beta_1}$. Lo anterior significa que el año incrementar un año en el año 1 de educación e incrementar un año en el año 20 de educación tiene el mismo efecto sobre el salario. Lo anterior, puede ser poco razonable ya que se esperaría que un año más de educación superior, por ejemplo, tuviera un incremento diferenciado sobre el salario en comparación con un año más de educación primaria.

Teniendo en cuenta lo anterior, puede ser más razonable pensar que los años de educación incrementan en un porcentaje constante el salario, por ejemplo, un aumento de 5 a 6 años de educación, y un aumento de 11 a 12 años, incrementa el salario e 8%. El modelo log-lin permite obtener una aproximación a este efecto porcentual constante, ya que nos permite calcular semi-elasticidades.

Suponga un modelo log-lin de la forma:

$$ln(salario_i) = \beta_0 + \beta_1 * educ_i + u_i$$

Si $\Delta u_i = 0$, entonces:

$$\%\Delta salario_i = (100 * \beta_1)\Delta educ$$

Es decir, un año más de educación se relaciona con un cambio en el $\hat{salario}$ de $\beta_1 * 100\%$, este cambio porcentual se conoce como el rendimiento de un año más de educación.

2.2 Modelo lin-log

A diferencia del modelo log-lin, el modelo lin-log nos permite encontrar el cambio absoluto en Y dado un cambio porcentual en X. El modelo especificado sería el siguiente:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 * lnX_i + u_i$$

Ahora interprete β_1 como usualmente, es decir:

$$\beta_1 = \frac{cambio\, en\, Y}{cambio\, en\, lnX}$$

Teniendo en cuenta que un cambio en el log de un número es un cambio relativo, entonces:

$$\beta_1 = \frac{cambio\, en\, Y}{cambio\, relativo\, en\, X}$$

Ahora expresándolo de forma simbólica tenemos que:

$$\beta_1 = \frac{\Delta Y}{\Delta X/X}$$

Despejando ΔY tenemos que:

$$\Delta Y = \beta_1(\Delta X/X)$$

Entonces el cambio absoluto en Y (ΔY) es igual a β_1 por el cambio relativo en X ($\Delta X/X$). Si $\Delta X/X$ es 0.01 (1%), el cambio relativo en Y es de 0.01*β_1. Por lo tanto si se utiliza MCO para estimar un modelo lin-log, para interpretar el efecto del cambio en X sobre el cambio en Y se debe dividir β_1 sobre 100 (que es lo mismo que multiplicarlo por 0.01).

Suponga que usted quiere estimar cuanto cambia el ahorro de los individuos cuando sus ingresos incrementan en 1%. En este caso el modelo a estimar seria un modelo lin-log de la siguiente forma:

$$Ahorro_i = \beta_0 + \beta_1 * ln(ingreso_i) + u_i$$

Donde un aumento de 1% en el ingreso, en promedio, se relaciona con un cambio $\beta_1/100$ el ahorro de los individuos.

3 Resumen formas funcionales

Modelo	Variable Dependiente	Variable Independiente	Interpretación de β_1
Lin-Lin	y	x	$\Delta y = \beta_1\ \Delta x$
Lin-Log	y	ln(x)	$\Delta y = (\beta_1/100)\%\ \Delta x$
Log-Lin	ln(y)	x	$\%\ \Delta y = (100{*}\beta_1)\Delta x$
Log-Log	ln(y)	ln(x)	$\%\ \Delta y = \beta_1\%\Delta x$