# Estimación matricial

Econometría 1 - 2021-2

26 de Febrero de 2021

## 1 Matriz de varianzas y covarianzas

Definimos la forma matricial del modelo a estimar:

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{1}$$

Donde:

- Y: vector de dimensiones $n \times 1$
- X: matriz de dimensiones $n \times (k+1)$
- $\beta$: vector de dimensiones $(k+1)\times$ 1
- $\varepsilon$: vector de dimensiones $n \times 1$

Se quiere minimizar la sumatoria de de errores al cuadrado

$$min \sum \varepsilon^2 = \varepsilon'\varepsilon \tag{2}$$

Donde

$$\begin{aligned} \varepsilon &= Y - \hat{Y} \\ \varepsilon &= Y - X\hat{\beta} \end{aligned} \tag{3}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} &min \sum \varepsilon^2 = \varepsilon'\varepsilon = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) \\ &= Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\beta \end{aligned}$$

Por calculo matricial

$$\begin{aligned} &\tfrac{\delta\varepsilon'\varepsilon}{\delta\hat{\beta}} = -2(X'Y) - (X'X)\hat{\beta} = 0 \\ &(X'Y) - (X'X)\hat{\beta} = 0 \\ &(X'X)\hat{\beta} = (X'Y) \end{aligned} \tag{4}$$

Debido a que la división no está definida en términos matriciales, multiplicamos a ambos lados por la inversa de (X'X)

$$\begin{aligned} &(X'X)^{-1}(X'X)\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \\ &\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \end{aligned} \tag{5}$$

Donde el $\beta$ estimado es:

$$\hat{\beta}_{(k+1)\times 1} = (X'X)^{-1}_{((k+1)\times(k+1))}X'Y_{(k+1)\times 1} \tag{6}$$

Una vez realizada la estimación del $\beta$ estimado es importante derivar la matriz $VAR{-}COV(\hat{\beta})$. Para esto necesitamos la siguiente definición del residual:

$$\hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta} \tag{7}$$

Luego, la definición de varianza es: $E[(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}|X))^2|X]$, sin embargo, nosotros tenemos matrices. Por lo tanto debemos tener en cuenta como obtener en términos matriciales lo que está en el valor esperado. Para obtener una matriz debemos realizar la siguiente operación matricial: $(\hat{\beta} - E[\hat{\beta}|X])(\hat{\beta} - E[\hat{\beta}|X])'$.

Para simplificar, remplacemos inicialmente Y en el vector estimado de betas.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$
$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)$$
$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon)$$
$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'X)\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon)$$

En este punto sabemos que $(X'X)^{-1}(X'X) = I$ y que para toda matriz invertible $A$ se cumple que $A^{-1}A = I$ y que $IA = AI = A$. De forma que tenemos:

$$\hat{\beta} = I\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \tag{8}$$

Resolviendo primero $E(\hat{\beta}|X)$:

$$E(\hat{\beta}|X) = E[\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon|X]$$
$$E(\hat{\beta}|X) = E(\beta|X) + E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon|X]$$
$$E(\hat{\beta}|X) = \beta + E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon|X]$$
$$E(\hat{\beta}|X) = \beta + (X'X)^{-1}E[X'\varepsilon|X]$$

Por supuesto de no endogeneidad o de independencia condicional, $E(\varepsilon|X) = E(\varepsilon) = 0$.. Esto se traduce también en que el vector $\varepsilon$ es ortogonal a las X, por lo que $X'\varepsilon = 0$ en valor esperado. Por lo tanto:

$$E(\hat{\beta}|X) = \beta \tag{9}$$

Con la ecuación (9) tenemos que:

$$\hat{\beta} - E(\hat{\beta}|X) = \hat{\beta} - \beta$$

Ahora teniendo en cuenta la ecuación (8) que nos dice que:

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

Si restamos $\beta$ a ambos lados de la igualdad tenemos:

$$\hat{\beta} - \beta = \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon - \beta$$

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'\varepsilon \tag{10}$$

Con lo anterior es más sencillo reemplazar la formula de la VAR-COV($\hat{\beta}$):

$$VAR - COV(\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta} - E[\hat{\beta}|X])(\hat{\beta} - E[\hat{\beta}|X])'|X] \tag{11}$$

Utilizando (9) en la ecuación (11):

$$VAR - COV(\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'|X]$$

Reemplazando (10):

$$VAR - COV(\hat{\beta}) = E[((X'X)^{-1}X'\varepsilon) \times ((X'X)^{-1}X'\varepsilon)'|X] \tag{12}$$

Podemos avanzar aplicando las propiedades de las matrices. Recordemos que: (A*B)'=B'*A'. Si A'A es invertible, entonces A'A es cuadrada y simétrica por lo tanto $(A' * A)'^{-1}$ también es simétrica (en otras palabras, con B=A'*A, tenemos que B'=B). Aplicando estas propiedades en (12):

$$VAR - COV(\hat{\beta}) = E[((X'X)^{-1}X'\varepsilon) \times ((X'X)^{-1}X'\varepsilon)'|X]$$

$$VAR - COV(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X' * X)'^{-1}|X]$$

Dado el condicional de las X, todo lo que tenga X se puede excluir del Valor Esperado:

$$VAR - COV(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon'|X)X(X' * X)'^{-1} \tag{13}$$

Con especial atención al término $\varepsilon * \varepsilon'$, si resolvemos tenemos:

$$\varepsilon * \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \ldots & \varepsilon_N \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon * \varepsilon' = \begin{matrix} {\varepsilon_1}^2 & \varepsilon_1 * \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_1 * \varepsilon_N \\ \varepsilon_2 * \varepsilon_1 & {\varepsilon_2}^2 & \cdots & \varepsilon_2 * \varepsilon_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_N * \varepsilon_1 & \varepsilon_N\varepsilon_2 & \cdots & {\varepsilon_N}^2 \end{matrix} \tag{14}$$

La matriz (14) es una matriz NXN. Cuando aplicamos E[$\varepsilon * \varepsilon'|X$], es como aplicar E[$.|X$] a cada entrada de la matriz [$\varepsilon * \varepsilon'|X$]. En ese sentido, nos importan dos casos:

1. $E[{\varepsilon_i}^2|X] = s^2$ para cualquier $i$ (supuesto de homoscedasticidad), con $s$ siendo el estimador de $\sigma$.
2. $E[\varepsilon_i \times \varepsilon_j|X] = 0$ para cualquier $i \neq j$ (supuesto de no autocorrelación residual)

Aplicando los supuestos de homoscedasticidad y no autocorrelación residual:

$$E[\varepsilon * \varepsilon'|X] = \begin{pmatrix} s^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & s^2 \end{pmatrix}$$

Sacando factor común de $s^2$ :

$$E[\varepsilon * \varepsilon'|X] = s^2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de la izquierda no es otra sino la identidad I, por lo cual:

$$E[\varepsilon * \varepsilon'|X] = s^2 \times I = s^2$$

De esta forma, retomando la demostración de la ecuación (13):

$$VAR - COV(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'\, s^2\, X(X' * X)'^{-1}$$

como $s^2$ : es un escalar podemos ponerlo en cualquier parte de la multiplicación:

$$VAR - COV(\hat{\beta}) = s^2(X'X)^{-1}X'X(X' * X)'^{-1}$$

Tenemos que $(X'X)^{-1}X'X = I$ , luego:

$$VAR - COV(\hat{\beta}) = s^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)'^{-1}$$
$$VAR - COV(\hat{\beta}) = s^2(X'X)'^{-1}$$

$$VAR - COV(\hat{\beta}) = s^2(X'X)^{-1} \tag{15}$$

De esta forma, en la ecuación (15) tenemos la $VAR - COV(\hat{\beta})$. Donde:

$$s^2 = \frac{\varepsilon' * \varepsilon}{(n - k - 1)}$$