Universidade do Minho

Licenciatura em Ciências da Computação

Interação e Concorrência

Problem Set - 2

Carlos Beiramar a84628

9 de maio de 2021

Conteúdo

1 Exercício 1

Enunciado: Explain in your own words the meaning of the three new logical operators just introduced. For each of them specify a property resorting to it and describes in your own words its intended menaing.

$$\mathrm{E} \models \langle\!\langle\,\rangle\!\rangle\, \phi \;\text{ iff }\; \exists_{\mathrm{F} \in \{\mathrm{E'} | \mathrm{E} \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} \mathrm{E'}\}} \cdot \mathrm{F} \models \phi \tag{1}$$

$$\mathrm{E} \models [\![\,]\!]\, \phi \;\text{ iff }\; \forall_{\mathrm{F} \in \{\mathrm{E'} | \mathrm{E} \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} \mathrm{E'}\}} \cdot \mathrm{F} \models \phi \tag{2}$$

$$\mathrm{E} \models [\![\downarrow]\!]\, \phi \;\text{ iff }\; \mathrm{E} \downarrow \wedge \forall_{\mathrm{F} \in \{\mathrm{E'} | \mathrm{E} \overset{\epsilon}{\Longrightarrow} \mathrm{E'}\}} \cdot \mathrm{F} \models \phi \tag{3}$$

Resolução:

De (1) é possível verificar que, qualquer que seja o estado F a que se chega através de E realizando zero ou mais transições por τ, então F, eventualmente, irá satisfazer a fórmula ϕ.

De (2) é possível verificar que, a partir de um estado E, aplicando-lhe uma ou mais ações por τ, o estado F que é atingido irá necessariamente satisfazer a propriedade ϕ.

De (3), é possível verificar que $E \models [\![\downarrow]\!]\, \phi$, acontece quando, a partir de um estado E, que é convergente, ou seja, que nunca é submetido a um ciclo infinito por ações τ e, a partir desse mesmo estado E é possível chegar a um estado F por uma ou mais ações *tau* tal que F irá necessariamente satisfazer *phi*.

Definição das propriedades:

Propriedade para (1):

$$\begin{aligned}
\langle\!\langle \mathrm{K} \rangle\!\rangle\, (\phi \vee \psi) &= \langle\!\langle\,\rangle\!\rangle \langle K \rangle \langle\!\langle\,\rangle\!\rangle\, (\phi \vee \psi) \\
&= \langle\!\langle\,\rangle\!\rangle \langle \mathrm{K} \rangle \langle\!\langle\,\rangle\!\rangle\, \phi \;\vee\; \langle\!\langle\,\rangle\!\rangle \langle K \rangle \langle\!\langle\,\rangle\!\rangle\, \psi \\
&= \langle\!\langle \mathrm{K} \rangle\!\rangle\, \phi \;\vee\; \langle\!\langle \mathrm{K} \rangle\!\rangle\, \phi
\end{aligned}$$

Descrição da propriedade (1): O primeiro passo acontece por causa da definição das abreviações (definida mais abaixo como (4)). No segundo passo é aplicada a lei da distributividade presente na disjunção, esta propriedade encontra-se definida nos slides das aulas, $\langle \mathrm{a} \rangle\,(\phi \;\vee\; \psi) \;=\; \langle \mathrm{a} \rangle\,\phi \vee \langle \mathrm{a} \rangle\,\psi$. O terceiro passo novamente pela definição de abreviação (4).

Propriedade para (2):

$$\begin{aligned} [\![\mathrm{K}]\!]\,(\phi \wedge \psi) &= [\![\;]\!]\,[\mathrm{K}]\,[\![\;]\!]\,(\phi \wedge \psi) \\ &= [\![\;]\!]\,[\mathrm{K}]\,[\![\;]\!]\,\phi \;\wedge\; [\![\;]\!]\,[\mathrm{K}]\,[\![\;]\!]\,\psi \\ &= [\![\mathrm{K}]\!]\,\phi \;\wedge\; [\![\mathrm{K}]\!]\,\psi \end{aligned}$$

Descrição da propriedade (2): O primeiro passo acontece por causa da definição da abreviação (definida mais abaixo como (5)). No segundo passo é aplicada a lei de distributividade presente na conjunção, esta propriedade encontra-se definida nos slides das aulas, $[\mathrm{a}]\,(\phi \;\wedge\; \psi) = [\mathrm{a}]\,\psi \;\wedge\; [\mathrm{a}]\,\psi$.

Propriedade para (3):

$$\begin{aligned} [\![\downarrow]\!]\,(\phi \wedge \psi) &= [\![\;]\!]\,[\,\downarrow\,]\,[\![\;]\!]\,(\phi \wedge \psi) \\ &= [\![\;]\!]\,[\,\downarrow\,]\,[\![\;]\!]\,\phi \;\wedge\; [\![\;]\!]\,[\,\downarrow\,]\,[\![\;]\!]\,\psi \\ &= [\![\downarrow]\!]\,\phi \;\wedge\; [\![\downarrow]\!]\,\psi \end{aligned}$$

Descrição da propriedade (3): A descrição desta propriedade é análoga à descrição da propriedade (2).

2 Exercício 2

Eunciado: Explain the meaning formulas $\langle\!\langle \text{abac} \rangle\!\rangle$true and $\llbracket - \rrbracket$false. Illustrate their use through the specification of four different, non-bisimilar processes such that $\langle\!\langle \text{abac} \rangle\!\rangle \mathit{true}$ holds in two of them and $\llbracket - \rrbracket$false in the other two.

Resolução: Baseado nas seguintes abreviações:

$$\langle\!\langle \text{K} \rangle\!\rangle\, \phi \stackrel{\text{abv}}{=} \langle\!\langle\ \rangle\!\rangle \langle \text{K} \rangle \langle\!\langle\ \rangle\!\rangle\, \phi \tag{4}$$

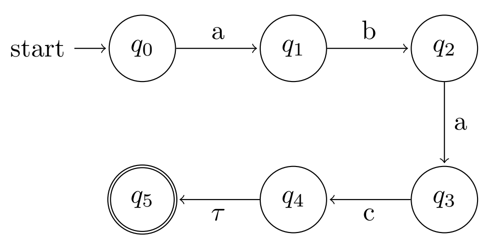
$$\llbracket \text{K} \rrbracket\, \phi \stackrel{\text{abv}}{=} \llbracket\ \rrbracket\, [\text{K}] \llbracket\ \rrbracket\, \phi \tag{5}$$

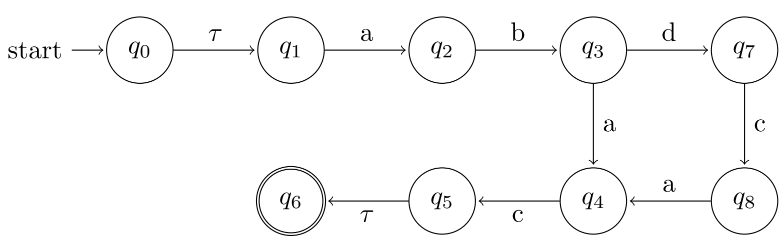
Para $\langle\!\langle \text{abac} \rangle\!\rangle$ true, por (4) temos que,

$$\langle\!\langle \text{abac} \rangle\!\rangle \text{ true} = \langle\!\langle \rangle\!\rangle \langle \text{abac} \rangle \langle\!\langle \rangle\!\rangle \text{ true}$$

descrevendo este resultado, é possível saber que, por nenhuma ou mais transições por τ é possível chegar a um estado que, se existir uma transição por a, seguida de uma transição por b, seguida de uma transição por a e por fim, uma transição por c, chega-se a um novo estado que, novamente por nenhuma ou mais transições por τ, chegará a um estado que verifica *true*.

Exemplo de dois processos não bissimilares:



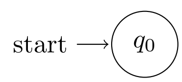


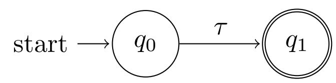
Para $\llbracket - \rrbracket$ false, por (5) temos que,

$$\llbracket - \rrbracket \text{ false} = \llbracket\ \rrbracket\, [-] \llbracket\ \rrbracket \text{ false}$$

descrevendo este resultado, é possível saber que, por nenhuma ou mais transições por τ chega-se a um estado onde, aplicando-lhe qualquer transição possível, chega-se a um estado onde, aplicando lhe zero ou mais transições por τ, chega-se as um estado que verifica $false$. Logo, toda a transição que não seja por τ não é permitida.

Exemplo de dois processos não bissimilares:





3 Exercício 3

Enunciado: In the logic you have studied in the lectures, formula

$$\langle - \rangle \, \text{true} \wedge [-\text{a}] \, \text{false}$$

expresses *inevitability*, i.e. the occurrence of action a is inevitable. Which on the formulas

(a) $\langle\!\langle - \rangle\!\rangle \, \text{true} \wedge [\![-\text{a}]\!] \, \text{false}$

(b) $[\![\;]\!] \, \langle\!\langle - \rangle\!\rangle \, \text{true} \wedge [\![-\text{a}]\!] \, \text{false}$

if any, would express a similar property in the observational setting? Justify your answer.If none seems suitable, provide an alternative specification.

Resolução:

De a) temos:

$$\langle\!\langle - \rangle\!\rangle \, \text{true} = \langle\!\langle \; \rangle\!\rangle \langle - \rangle \langle\!\langle \; \rangle\!\rangle \, \text{true} \tag{6}$$

e,

$$[\![-\text{a}]\!] \, \text{false} = [\![\;]\!] \, [-\text{a}] \, [\![\;]\!] \, \text{false} \tag{7}$$

logo, por a), (6) e (7),

$$\langle\!\langle - \rangle\!\rangle \, \text{true} \wedge [\![-\text{a}]\!] \, \text{false} = \langle\!\langle \; \rangle\!\rangle \langle - \rangle \langle\!\langle \; \rangle\!\rangle \, \text{true} \;\wedge\; [\![\;]\!] \, [-\text{a}] \, [\![\;]\!] \, \text{false} \tag{8}$$

De b) temos:

$$[\![\;]\!] \, \langle\!\langle - \rangle\!\rangle \, \text{true} = [\![\;]\!] \, \langle\!\langle \; \rangle\!\rangle \langle - \rangle \langle\!\langle \; \rangle\!\rangle \, \text{true} \tag{9}$$

e,

$$[\![-\text{a}]\!] \, \text{false} = [\![\;]\!][-a][\![\;]\!] \, \text{false} \tag{10}$$

logo por b), (9) e por 10:

$$[\![\;]\!]\langle\!\langle - \rangle\!\rangle \,\mathrm{true} \wedge [\![-\mathrm{a}]\!]\,\mathrm{false} \;=\; [\![\;]\!]\langle\!\langle\;\rangle\!\rangle\langle - \rangle\langle\!\langle\;\rangle\!\rangle\,\mathrm{true} \;\wedge\; [\![\;]\!][-a][\![\;]\!]\,\mathrm{false} \tag{11}$$

De forma a responder com mais clareza a este exercício, criei 2 processos:

$$E = a \cdot E + \tau \cdot 0$$
$$F = a \cdot F$$

Os dois estados anteriormente definidos têm a propriedade $\langle\!\langle - \rangle\!\rangle\mathrm{true} \wedge [\![-\mathrm{a}]\!]\,\mathrm{false}$. Isto é, o estado E tem esta propriedade porque é capaz de executar uma transição observável que satisfaz $\langle\!\langle - \rangle\!\rangle$ true e não é capaz de executar mais nenhuma transição observável que não seja a, o que, irá satisfazer a fórmula, $[\![-\mathrm{a}]\!]$ false, no entanto, no processo E é possível realizar uma transição não observável e atingir o estado 0, o que torna impossível fazer a transição a. É trivial verificar que no estado F só ocorrem transições por a.

Esta lacuna poderá ser contornada através da fórmula $[\![\;]\!]\langle\!\langle - \rangle\!\rangle\,\mathrm{true} \wedge [\![-\mathrm{a}]\!]\,\mathrm{false}$, pois agora o estado E já não satisfaz $[\![\;]\!]\langle\!\langle - \rangle\!\rangle$ true por causa da transição não observável $E \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} 0$.

No entanto esta formula também não será a mais adequada, imaginemos o processo $G = a \cdot G + \tau \cdot G$ que satisfaz $[\![-\mathrm{a}]\!]$false porque a única transição observável que pode fazer é o a. Contudo também tem a propriedade $[\![\;]\!]\langle\!\langle - \rangle\!\rangle$ true true já que G obedece a $\langle\!\langle - \rangle\!\rangle$ true.

Assim, interpretar isto como a inevitabilidade de a não é correto pois, há a possibilidade de o processo G executar ações não observáveis e nunca fazer uma transição por a.

Assim, a alternativa para a inevitabilidade de a terá que conter o conceito de convergência para garantir que as ações não observáveis de um processo nunca entram em ciclo infinito. Por isso, a especificação alternativa para garantir a inevitabilidade de a seria:

$$[\![\downarrow]\!]\langle\!\langle\;\rangle\!\rangle\,\mathrm{true} \;\wedge\; [\![-\mathrm{a}]\!]\,\mathrm{false}$$

que exclui uma possível divergência.

4 Exercício 4

Enunciado: In the lectures, you have studied a close relationship between *bisimilarity* and *modal equivalence* for the logic then introduced. Discuss in some detail if and how a similar result holds relating *observational equivalence* and *modal equivalence* for the extended logic.

Resolução:

Dois processos dizem-se *observacionalmente equivalentes* se existe uma *bissimulação fraca* S tal que $\langle E, F\rangle \in S$. Uma relação binária S in $\mathcal{P}$ é uma *bissimulação fraca* se, para qualquer $(E, F) \in S$ e $a \in \mathcal{L} \cup \{\epsilon\}$,

1. $E \stackrel{a}{\Longrightarrow} E' \;\Rightarrow\; F \stackrel{a}{\Longrightarrow} F' \;\wedge\; (E', F') \in S$

2. $F \stackrel{a}{\Longrightarrow} F' \;\Rightarrow\; E \stackrel{a}{\Longrightarrow} E' \;\wedge\; (E', F') \in S$

A relação $\approx$ tem imensas propriedades em comum com $\sim$. Existe também uma relação muito próxima entre uma *equivalência observacional* e uma *equivalência modal*, Γ.
Ao incluirmos os operadores $[K]$ e $\langle K\rangle$ ou o operador de divergência $[\![\downarrow]\!]$ sabemos que o facto de dois processos serem observacionalmente equivalentes, $E \approx F$, não implica que estes processos sejam modalmente equivalentes, $E \equiv_{\Gamma}$. Um processo E é uma imagem finita se para cada $a \in \mathcal{L} \cup \{\epsilon\}$, o conjunto $\{F : E \stackrel{\epsilon}{\Longrightarrow} F$ é finito, e E é uma imagem observacional finita se para cada elemento do conjunto $\{F : \exists \sqsupseteq \in (\mathcal{L} \cup \{\epsilon\})^{*}\}$ é imediatamente uma imagem finita. Uma *equivalência observacional* não é congruente com o operador $+$ por causa do poder inicial da transição não observável τ. Dois processos E e $\tau \cdot E$ são *observacionalmente equivalentes* mas para várias instâncias de F, os processos $E + F$ e $\tau \cdot E + F$ não são *observacionalmente equivalentes*.

Em suma, conclui-se que existe uma relação entre as definições de *equivalência observacional* e de *equivalência modal*.