Universidade do Minho

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia

Cálculo

Resolução da Ficha 7-A Novembro de 2008

Integração usando substituição

1. Calcule as seguintes primitivas, usando a substituição aconselhada em cada caso.

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

Esta é uma função do tipo $R(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2})$ com $a = b = 1$, pelo que a substituição aconselhada é $x = \operatorname{sen}(t)$. Desta forma, dx será substituído por $\cos(t)dt$ e os limites de integração alterados a partir da relação $x = \operatorname{sen}(t) \Rightarrow t = \operatorname{arcsen}(x)$: se $x = 0$ tem-se $t = \operatorname{arcsen}(0) = 0$; se $x = 1/2$ tem-se $t = \operatorname{arcsen}(1/2) = \pi/6$. De forma resumida

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \operatorname{sen}(t) \\ dx &\longrightarrow \cos(t)dt \\ x = 0 &\longrightarrow t = \operatorname{arcsen}(0) = 0 \\ x = \frac{1}{2} &\longrightarrow t = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Então

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}}\cos(t)\; dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{|\cos(t)|}\cos(t)\; dt$$

Como $\cos(t) > 0$, para $t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\cos(t)}\cos(t)\; dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}^2(t)\; dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right) dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\operatorname{sen}(2\frac{\pi}{6})}{2} - \left(-\frac{\operatorname{sen}(0)}{2}\right)\right] = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{24} \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_{-3}^{0} x\,(x+3)^{\frac{1}{3}}\; dx.$

Esta é uma função do tipo $R(x, (ax+b)^{p/q})$ com $a = 1$, $b = 3$, $p = 1$ e $q = 3$, pelo que a substituição aconselhada é $(ax+b) = (x+3) = t^m$, onde $m = \text{m.m.c}(3) = 3$, ou seja, $x + 3 = t^3$. Desta forma,

$$\begin{aligned} x + 3 &\longrightarrow t^3 \Rightarrow t = \sqrt[3]{x+3} \\ dx &\longrightarrow 3t^2 dt \\ x = -3 &\longrightarrow t = \sqrt[3]{-3+3} = 0 \\ x = 0 &\longrightarrow t = \sqrt[3]{0+3} = \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{0} x\ (x+3)^{\frac{1}{3}}\ dx &= \int_{0}^{\sqrt[3]{3}} \left(t^3-3\right)\ \left(t^3\right)^{\frac{1}{3}}\ 3t^2\ dt = \int_{0}^{\sqrt[3]{3}} \left(t^3-3\right)\ t\ 3t^2\ dt \\
&= 3\int_{0}^{\sqrt[3]{3}} \left(t^6-3t^3\right)\ dt = 3\left[\frac{t^7}{7}-\frac{3t^4}{4}\right]_0^{\sqrt[3]{3}} \\
&= 3\left[\frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^7}{7}-\frac{3\left(\sqrt[3]{3}\right)^4}{4}-0\right] = 3\left[\frac{9\sqrt[3]{3}}{7}-\frac{9\sqrt[3]{3}}{4}-0\right] \\
&= -\frac{81}{28}\sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_2^8 \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\ dx.$

Esta é uma função do tipo $R(x, x^{p/q}, x^{r/s})$ com $p=1$, $q=2$, $r=1$, $s=3$ pelo que a substituição aconselhada é $x=t^m$, onde $m=\text{m.m.c}(2,3)=6$, ou seja, $x=t^6$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
x = t^6 &\Rightarrow t = \sqrt[6]{x} \\
dx &\to 6t^5 dt \\
x = 2 &\to t = \sqrt[6]{2} \\
x = 8 &\to t = \sqrt[3]{8}
\end{aligned}$$

Então

$$\int_2^8 \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\ dx = \int_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{8}} \frac{\sqrt{t^6}}{t^6-\sqrt[3]{t^6}} 6t^5\ dt = \int_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{8}} \frac{t^3}{t^6-t^2} 6t^5\ dt = 6\int_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{8}} \frac{t^6}{t^4-1}\ dt$$

Como não se trata de uma fracção simples e o grau do numerador é maior que o grau do denominador, vamos efectuar a divisão

$$\begin{array}{r|l}
t^6+0t^5+0t^4+0t^3+0t^2+0t+0 & t^4-1 \\ \cline{2-2}
-t^6+0t^5+0t^4+0t^3+t^2+0t+0 & t^2 \\ \cline{1-1}
0t^6+0t^5+0t^4+0t^3+t^2+0t+0 &
\end{array}$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{t^6}{t^4-1} = t^2 + \frac{t^2}{t^4-1} = t^2 + \frac{t^2}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}$$

Como o denominador da última fracção racional tem raizes 1 e -1 (ambas de multiplicidade 1), e $\pm i$,tem-se

$$\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Cx+D}{t^2+1}$$

onde $A=1/4$, $B=-1/4$ e $C=1/2$. Portanto

$$t^2 + \frac{t^2}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} = t^2 + \frac{1}{4\left(t-1\right)} - \frac{1}{4\left(t+1\right)} + \frac{1}{2\left(t^2+1\right)}$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_2^8 \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}\,dx &= 6\int_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{8}} \left(t^2+\frac{1}{4\,(t-1)}-\frac{1}{4\,(t+1)}+\frac{1}{2\,(t^2+1)}\right) dt \\
&= 6\left[\frac{t^3}{3}+\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\ln|t+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right]_{\sqrt[6]{2}}^{\sqrt[6]{8}} \\
&= 6\left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt[6]{8}^3}{3}+\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{8}-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{8}+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{8} \\ -\left(\frac{\sqrt[6]{2}^3}{3}+\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{2}-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{2}+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{2}\right)\end{array}\right] \\
&= 6\left[\begin{array}{c} \frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{8}-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{8}+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{8} \\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{2}-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[6]{2}+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{2}\right)\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3^x}{3^{2x}-3^x-2}\,dx.$

Esta é uma função do tipo $R(x,3^x,3^{2x})$ pelo que a substituição aconselhada é $3^{mx}=t$, onde $m=\text{m.d.c}(1,2)=1$, ou seja, $3^x=t$. Desta forma,

$$
\begin{aligned}
3^x = t &\Rightarrow x=\log_3 t \\
dx &\to \frac{1}{t\ln(3)}dt \\
x=0 &\to t=3^0=1 \\
x=1 &\to t=3^1=3
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3^x}{3^{2x}-3^x-2}\,dx &= \int_1^3 \frac{t}{t^2-t-2}\cdot\frac{1}{t\ln 3}dt = \frac{1}{\ln 3}\int_1^3 \frac{1}{t^2-t-2}\,dt \\
&= \frac{1}{\ln 3}\int_1^3 \frac{1}{(t-2)\,(t+1)}\,dt = \frac{1}{\ln 3}\int_1^3 \left[\frac{1}{3\,(t-2)}-\frac{1}{3\,(t+1)}\right] dt \\
&= \frac{1}{\ln 3}\left[\frac{1}{3}\ln|t-2|-\frac{1}{3}\ln|t+1|\right]_1^3 \\
&= \frac{1}{\ln 3}\left[\begin{array}{c}\frac{1}{3}\ln|3-2|-\frac{1}{3}\ln|3+1| \\ -(\frac{1}{3}\ln|1-2|-\frac{1}{3}\ln|1+1|)\end{array}\right] \\
&= \frac{1}{\ln 3}\left[\begin{array}{c}\frac{1}{3}\ln 1-\frac{1}{3}\ln 3 \\ -(\frac{1}{3}\ln 1-\frac{1}{3}\ln 2)\end{array}\right] = \frac{1}{\ln 3}\left[-\frac{1}{3}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2\right] \\
&= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{\ln 2}{\ln 3}
\end{aligned}
$$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}.$

Esta é uma função do tipo $R(x,\sqrt{x^2+9})$ pelo que a substituição aconselhada é $x=3\operatorname{senh}(t)$. Desta forma,

$$
\begin{aligned}
x=\operatorname{senh}(t) &\Rightarrow t=\operatorname{argsenh}(x/3) \\
dx &\to \cosh(t)dt \\
x=0 &\to t=\operatorname{argsenh}(0)=0 \\
x=1 &\to t=\operatorname{argsenh}(1/3)
\end{aligned}
$$

Então

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} &= \int_0^{\operatorname{argsenh}(1/3)} \frac{1}{\sqrt{9\,\operatorname{senh}^2(t)+9}} 3\cosh(t)\ dt \\ &= \int_0^{\operatorname{argsenh}(1/3)} \frac{1}{|3\cosh(t)|} 3\cosh(t)\ dt\end{aligned}$$

Como $\cosh(t) > 0$, $\forall t \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} &= \int_0^{\operatorname{argsenh}(1/3)} 1\ dt \\ &= [t]_0^{\operatorname{argsenh}(1/3)} = \operatorname{argsenh}(1/3)\end{aligned}$$