CÁLCULO

FICHA 1-B OUTUBRO DE 2008

Funções trigonométricas inversas

1. Calcule :

   (a) $2\arcsin(-1)$

   (b) $\cos(\arcsin\frac{1}{2})$

   (c) $\sin(\arccos\frac{3}{5})$

   (d) $\sin(\arctan 2)$

   (e) $\arccos(\sin\frac{5\pi}{4})$

   (f) $\tan\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

   (g) $\sin(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right))$

   (h) $\sin(\frac{\pi}{3} - \arctan\frac{4}{5})$.

2. Para cada uma das funções reais de variável real indicadas, determine o domínio e o contradomínio.

   (a) $f(x) = 2\arcsin(2x-1) + \pi$

   (b) $g(x) = \cos\pi + 3\arccos(1-4x)$

   (c) $h(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{x+2}\right) + \frac{\pi}{2}$

   (d) $i(x) = \frac{\pi}{3} + \arctan\left(\frac{1}{x+5}\right)$

3. Determine a expressão das derivadas das funções:

   (a) $f(x) = x\arcsin(4x)$

   (b) $g(t) = \arctan^2(7t)$

   (c) $h(y) = \sqrt{\sin y} + \arccos(\frac{1}{y})$

   (d) $i(x) = \cos(\arctan(3x))$

   (e) $j(x) = \sqrt{1 + \arctan x}$

   (f) $l(x) = \frac{1}{\arcsin x}$

   (g) $m(x) = \arcsin(\tanh x)$

   (h) $n(x) = \frac{\cosh x}{1+\tanh x}$

   (i) $o(x) = e^{3+\arg\cosh x}$

   (j) $p(x) = \arg\cosh(2 + \sin(x^2))$

   (k) $q(x) = (\arcsin(x^2))^{\frac{1}{2}}$

   (l) $r(x) = x^2.\sec^{-1}(1+x^2)$

4. Considere a função real de variável real definida por
$$t(x) = \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$$
   (a) Calcule $t(0) + t(-2)$.
   (b) Determine o domínio e o contradomínio de t.
   (c) Determine o conjunto de soluções de $A = \{x \in \mathbb{R} : t(x) > 0\}$.
   (d) Caracterize a função inversa de t.

5. Considere a função real de variável real definida por
$$g(x) = \frac{\pi}{3} + 2\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$$
   (a) Calcule $g(1) + g(-2)$.
   (b) Determine o domínio e o contradomínio de g.
   (c) Determine o conjunto de solução de $A = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq \frac{2\pi}{3}\}$.
   (d) Caracterize a função inversa de g.

6. Considere a função real de variável real definida por
$$g(x) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan(3x-1)$$
   (a) Calcule $g(1) + g(-2)$.
   (b) Determine o domínio, contradomínio e os zeros da função g.
   (c) Caracterize a função inversa de g.
   (d) Determine, sob a forma de intervalos de números reais, o conjunto de solução da condição $g(x) \geq \frac{\pi}{2}\}$.
   (e) Calcule $\sin(g(1))$.
   (f) Escreva a equação da recta tangente à curva $y = g(x)$ no ponto de ordenada π.

7. Considere a função real de variável real definida por
$$g(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arccot}\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$
   (a) Caracterize a função inversa de g.
   (b) Calcule o valor de $\cos(g(2) - \frac{\pi}{3})$.

No final deves ser capaz de:

1. Saber o significado das seguintes expressões: domínio de uma função; contradomínio de uma função; função real de variável real; função injectiva; função invertível; função inversa; inverso do valor de uma função.

2. Definir correctamente as funções arcsin, arccos, arctan (não esquecer a indicação de domínios e contradomínios).

3. Calcular o valor das funções arcsin, arccos, arctan em pontos dados.

4. Desenvolver expressões que contenham as funções arcsin, arccos, arctan.

5. Obter as derivadas de funções em que intervêm as funções arcsin, arccos, arctan.

Soluções da Ficha 1-B

1. (a) $-\pi$
   (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (c) $\frac{4}{5}$
   (d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
   (e) $\frac{3\pi}{4}$
   (f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
   (g) $-\frac{5}{13}$
   (h) $\frac{5\sqrt{3}-4}{2\sqrt{41}}$

2. (a) $D_f = \left[0, \frac{1}{2}\right]$; $D'_f = [0, 2\pi]$
   (b) $D_g = \left[0, \frac{1}{2}\right]$; $D'_g = [-1, 3\pi - 1]$
   (c) $D_h = \left]-\infty, -5\right] \cup \left[1, +\infty\right[$; $D'_h = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$
   (d) $D_i = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$; $D'_i = \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

3. (a) $\frac{df}{dx}(x) = \arcsin(4x) + \frac{4x}{\sqrt{1-16x^2}}$
   (b) $\frac{dg}{dt}(t) = \frac{14\arctan(7t)}{1+49t^2}$
   (c) $\frac{dh}{dy}(y) = \frac{\cos y}{2\sqrt{\sin y}} + \frac{1}{y^2\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}$
   (d) $\frac{di}{dx}(x) = -\frac{3\sin(\arctan(3x))}{1+9x^2}$
   (e) $\frac{1}{2\sqrt{1+\arctan(x)}(1+x^2)}$
   (f) $-\frac{1}{\arcsin^2(x)\sqrt{1-x^2}}$
   (g) $\operatorname{sech}(x)$
   (h) $\frac{\sinh(x)\cosh(x)+\sinh^2(x)-1}{\cosh(x)(1+\tanh^2(x))^2}$
   (i) $\frac{e^{3+\arg\cosh(x)}}{\sqrt{x^2-1}}$
   (j) $\frac{2x\cos(x^2)}{\sqrt{(2+\sin(x^2))^2-1}}$
   (k) $\frac{x}{\sqrt{(1-x^4)\arcsin(x^2)}}$
   (l) $2x\cos(1+x^2) - 4x^2\sin(1+x^2)$

4. (a) $\frac{\pi}{2}$
   (b) $D_t = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $D'_t = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$
   (c) $A = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]-1, +\infty\right[$
   (d)
$$\begin{array}{rcl} t^{-1} : \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x & \mapsto & \cot(y - \pi/4) - 1 \end{array}$$

5. (a) $\dfrac{4\pi}{3}$

   (b) $D_g =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$; $D'_g = \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{3}\right\}$

   (c) $A = [1, 2]$

   (d) $D_{g^{-1}} = \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{3}\right\}$; $\quad D'_{g^{-1}} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$; $\;g^{-1}(y) = \csc\left(\dfrac{y}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

6. (a) $\frac{\pi}{4} - 2(\arctan(2) + \arctan(-7))$

   (b) $D_g = \mathbb{R}$ $D'_g = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

   (c) $A = [1, 2]$

   (d)
$$\begin{array}{rcl} g^{-1} : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right) \end{array}$$

   (e) $]-\infty, \frac{1}{3}]$

   (f) $-\frac{3}{5}$

   (g) $y = -\frac{6}{1+(3\pi-1)^2}(x - \pi) + \frac{\pi}{2} - 2\arctan(3\pi - 1)$

7. (a)
$$\begin{array}{rcl} g^{-1} : \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] \setminus \{\frac{\pi}{2}\operatorname{arccot}(2)\} & \to & \mathbb{R}\ \{0\} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\cot(y-\pi/2)-2} \end{array}$$

   (b) $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{29}}$