Capítulo IV

Derivadas

Este quarto capítulo é dedicado ao estudo das derivadas de funções reais de uma variável real. A derivada e as suas aplicações desempenham um papel fundamental, tanto na própria Matemática, como noutros domínios aplicados, como a Física, a Economia, a Optimização, etc. Trata-se, portanto, de um tópico fundamental da Matemática.

1 Definições e significado geométrico

Sejam $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função de domínio D e $a\in D$ um ponto de acumulação de D, quer à esquerda quer à direita, isto é $a\in D\cap D'_+\cap D'_-$.

A. Derivada num ponto

Dizemos que a função f é derivável no ponto a quando existe (finito) o limite

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ , \tag{1a}$$

a que se chama *derivada de f no ponto a*. Pondo $x=a+h$, podemos dizer que $x\to a$ se e só se $h\to 0$, resultando

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ , \tag{1b}$$

que constitui uma definição alternativa para a derivada de f em a

Exemplo 1
Seja $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função derivável no ponto a. Vejamos quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) $f'(a)=\lim\limits_{x\longrightarrow a}\dfrac{f(a)-f(x)}{a-x}$; (b) $f'(a)=\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$;

(c) $f'(a)=\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$; (d) $f'(a)=\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$.

As afirmações (a), (b) e (c) são verdadeiras, enquanto que a afirmação (d) é falsa. Analisemos apenas as afirmações (c) e (d). Tem-se:

$$\begin{aligned}
\text{(c)}\ \lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[2\,\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right] \\
&= 2f'(a)-f'(a)=f'(a);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(d)}\ \lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[2\,\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right] \\
&= 2f'(a)+f'(a)=3f'(a)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2

Usando a definição ($1a$-b), determinar a derivada (em cada ponto onde ela exista) das funções definidas por:

(a) $f(x)=cx+d\,,x\in\mathbb{R}$; (b) $g(x)=\dfrac{1}{x}\,,\ x\neq 0$; (c) $h(x)=\sqrt{x}\,,\ x\in\mathbb{R}_0^+$;

(d) $j(x)=|x|\,,\ x\in\mathbb{R}$; (e) $k(x)=\operatorname{sen}x\,,\ x\in\mathbb{R}$; (f) $\ell(x)=\cos x\,,\ x\in\mathbb{R}$;

(g) $p(x)=\log x\,,\ x\in\mathbb{R}^+$; (h) $q(x)=e^x\,,\ x\in\mathbb{R}$; (i) $s(x)=x^2\,,\ x\in\mathbb{R}$.

Tratemos as alíneas (e), (g) e (h).

(e) Para cada $x\in\mathbb{R}$, vem

$$\begin{aligned}
k'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{\operatorname{sen}y-\operatorname{sen}x}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{y-x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{y+x}{2}\right)}{y-x} \\
&= \lim_{y\to x}\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{y-x}{2}\right)}{\dfrac{y-x}{2}}\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)=\cos\left(\frac{2x}{2}\right)=\cos x.
\end{aligned}\tag{2}$$

(g) Para cada $x\in\mathbb{R}^+$, vem

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{\log y-\log x}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{1}{y-x}\log\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= \lim_{y\to x}\frac{1}{y-x}\log\left(\frac{y-x+x}{x}\right)=\lim_{y\to x}\frac{1}{y-x}\log\left(1+\frac{y-x}{x}\right) \\
&= \lim_{y\to x}\log\left(1+\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y-x}}\right)^{1/(y-x)}=\log\left(e^{1/x}\right)=\frac{1}{x}.
\end{aligned}\tag{3}$$

(h) Recordar que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z-1}{z} = 1$.

As restantes alíneas tratam-se de maneira semelhante. ■

B. Derivadas laterais

Quando o limite que define $f'(a)$ através das expressões ($1a$-b) é estudado de um só lado. somos conduzidos à noção de *derivada lateral*:

- *derivada à esquerda de f em a* (para a ponto de acumulação à esquerda)

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}; \qquad (4a)$$

- *derivada à direita de f em a* (para a ponto de acumulação à direita)

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \qquad (4b)$$

Teorema 1
Sejam $f\colon D\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a\in D'_-\cap D'_+$. Então f é derivável em a se e só se existem e são iguais as derivadas laterais $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$.

Demonstração: Basta atender ao Teorema 9 do Capítulo III sobre limites laterais. ■

Exemplo 3
A função $f(x) = |x|$, $x\in\mathbb{R}$, não é derivável na origem. De facto,

$$f'_-(a) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \qquad \text{e} \qquad f'_+(a) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1, \qquad (5)$$

pelo que f não é derivável na origem (Teorema 1). ■

C. Outras definições

Sejam $f\colon D\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de domínio D e $A\subset D$. Dizemos que:

- f é derivável em A quando f é derivável em todo $a\in A$;
- f é *derivável* se f é derivável em todo o domínio D.

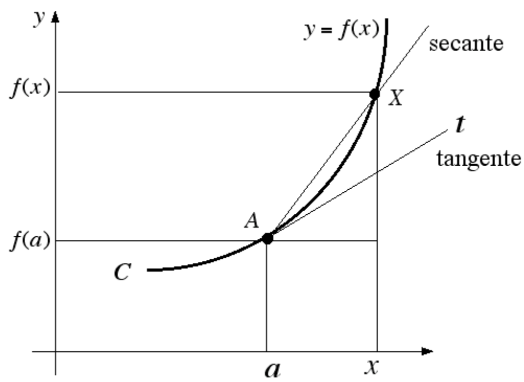
D. Interpretação geométrica da derivada

Consideremos a curva $\mathcal{C}$ de equação $y = f(x)$ que passa pelo ponto $A = (a, f(a))$. Seja $X = (x, f(x))$ um ponto genérico da curva. A razão incremental

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

dá o declive da recta que passa por A e X, que é secante à curva $\mathcal{C}$.

À medida que X se aproxima de A, a recta secante dá origem à recta t, que é tangente a $\mathcal{C}$ no ponto A. Tal recta t pode ser obtida como o limite, quando X se aproxima de A, das rectas secantes passando por A e X. Então, o declive m da recta tangente pode ser obtido como o limite dos declives das rectas secantes, à medida que X se aproxima de A, isto é,



$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,. \tag{6}$$

onde, no segundo membro, o limite define $f'(a)$. Isto justifica as seguintes conclusões.

Conclusão D.1

Quando f é derivável em a, a derivada $f'(a)$ dá o declive da recta tangente à curva de equação $y = f(x)$ no ponto de abcissa a.

Conclusão D.2

Uma equação da recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abcissa a é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{7}$$

Observação 1

Se a razão incremental tender para infinito, não existindo $f'(a)$, isto é, se

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty, \tag{8}$$

então a recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abcissa a é a recta vertical de equação $x = a$. ■

E. Significado da derivada

Existindo $f'(a)$, da definição $(1a)$ e da noção de limite quando x tende para a, significa que, para x próximo de a, a razão incremental

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

aproxima $f'(a)$, ou seja, as quantidades

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{e} \qquad f'(a)$$

diferem apenas por um "pequeno desvio" – chamemos-lhe *resto* – que será tanto menor quanto mais próximo de a se encontrar o ponto x. Trata-se então de um *resto relativo* a respeito do ponto a, que podemos representar por $\dfrac{R(x-a)}{x-a}$. Para x próximo de a, com $x \neq a$, escrevemos

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \frac{R(x-a)}{x-a}\,, \tag{9}$$

ou equivalentemente

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x-a). \tag{10}$$

Da expressão (9), tomando o limite quando $x \to a$ e usando a condição ($1a$), resulta

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x-a)}{x-a} = 0, \tag{11}$$

que dá uma condição de pequenez para o resto $R(x-a)$, traduzindo o facto de $R(x-a)$ tender para *zero* mais rapidamente do que x tende para a. Quando f é derivável em a, a decomposição (10) de $f(x)$, válida para x próximo de a, usada conjuntamente com a condição (11), justifica as seguintes conclusões.

Conclusão E.1
Para x próximo de a, a função f pode ser aproximada pelo polinómio $f(a)+f'(a)(x-a)$, de grau não superior a 1.

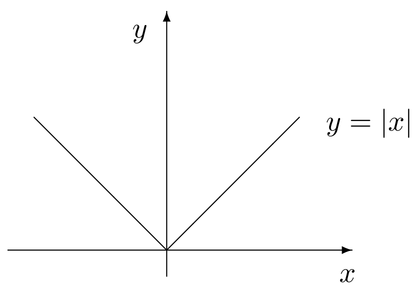
Conclusão E.2
Em torno do ponto a, a curva $y=f(x)$ confunde-se com a recta f $y=f(a)+f'(a)(x-a)$, que é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a. A curva $y=f(x)$ é "suave" em torno do ponto a, ou localmente linearizável, e não apresenta um bico em $x=a$.

Pelo que acabámos de expor e pelo que se viu no parágrafo A, podemos estabelecer a seguinte conclusão.

Exemplo 4
Do ponto de vista geométrico, estudemos a existência de derivada das seguintes funções no ponto indicado.

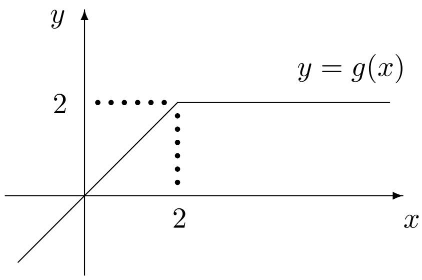
(a) $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$, ponto $a=0$.

A curva $y=|x|$ apresenta um bico na origem, pelo que a função não é linearizável em torno da origem. Logo f não é derivável em $x=0$.

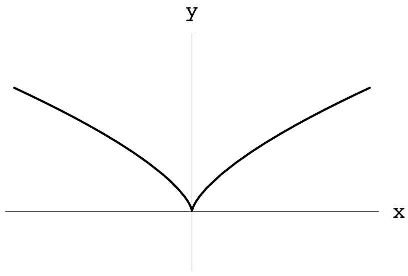


(b) $g(x)=\begin{cases} x & \text{se} \quad x\le 2,\\ 2 & \text{se} \quad x>2,\end{cases}$ ponto $a=2$.

A curva $y = g(x)$ apresenta um bico no ponto $(2, g(2))$, pelo que a função não é linearizável em torno desse ponto, ou seja, g não é derivável em $a = 2$

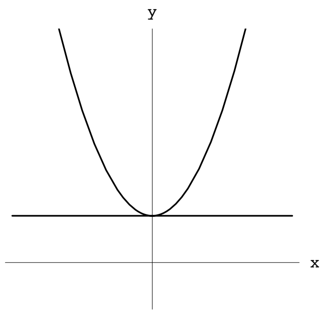


(c) $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, ponto $a = 0$.

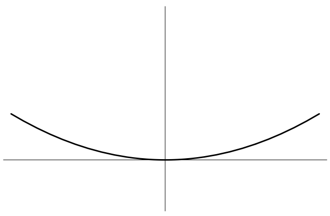


A curva apresenta um bico na origem. Logo, h não é linearizável em torno da origem, ou seja, não é derivável em 0.

(d) $k(x) = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$, ponto $a = 0$.



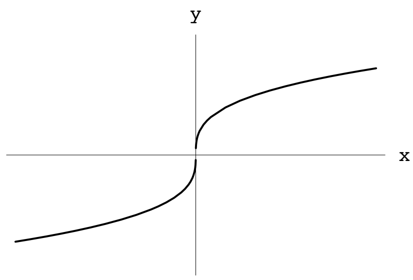
A função k é derivável em $a = 0$.
A curva não apresenta bico no ponto $(0, 1)$ e em torno de $(0, 1)$ a recta tangente à curva confunde-se com a própria curva.



Ampliação em torno de $(0, 1)$

(e) $j(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, ponto $a = 0$.

A função não é derivável em $a = 0$, pois a tangente ao gráfico de j em $a = 0$ é vertical, com a correspondente razão incremental a tender para $+\infty$.



■

2 Resultados sobre derivação pontual

Nesta secção vamos apresentar alguns dos resultados mais importantes sobre uma função derivável num ponto.

Teorema 2 [Continuidade de funções deriváveis]
Sejam $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $a\in D\cap D'$. Se f é derivável em a então f é contínua em a.

Demonstração
Como a é ponto de acumulação de D, a função f será contínua em a se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
Para $x\neq a$, tem-se

$$f(x)=f(x)-f(a)+f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,(x-a)\,+\,f(a)$$

pelo que

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,(x-a)\,+\,f(a)\right]=f'(a)\,\times 0\,+\,f(a),=f(a)$$

onde se atendeu a que f é derivável em a. ■

Observação 2

(a) O recíproco do Teorema 2 é falso, isto é:

$$f \text{ é contínua em } a \not\Longrightarrow f \text{ é derivável em } a\,. \tag{12}$$

Basta pensar em $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$, e no ponto $a=0$. *Cf.* o exemplo 4(a).

(b) Do Teorema 2 sai, equivalentemente, que:

$$f \text{ é descontínua em } a \not\Longleftarrow f \text{ não é derivável em } a\,. \tag{13}$$

De facto, se f fosse derivável em a, pelo Teorema 2, f seria também contínua em a.

(c) Com uma demonstração análoga à do Teorema 2, sai ainda que:

$$\text{existe } f'_+(a) \quad\Longrightarrow\quad f \text{ é contínua à direita em } a\,; \tag{14a}$$

$$\text{existe } f'_-(a) \quad\Longrightarrow\quad f \text{ é contínua à esquerda em } a\,. \tag{14b}$$

■

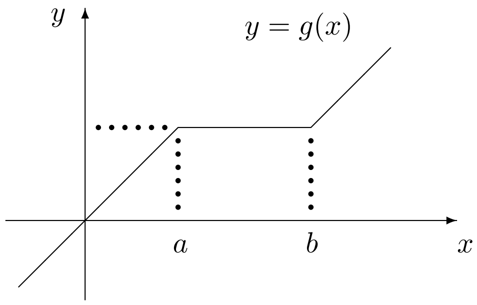
Exemplo 5

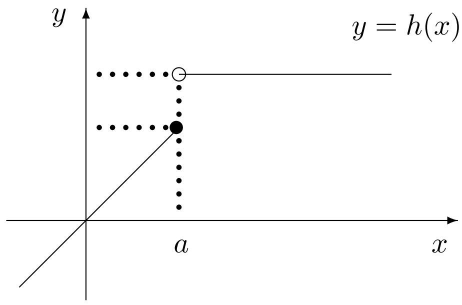
(a) A função $f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$ não é derivável em ponto algum de $\mathbb{R}$.

De facto, todo $a\in\mathbb{R}$ é ponto de descontinuidade de f.

(b) Consideremos as funções $g, h\colon D\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representadas na figura a seguir.

É simples constactar que g é contínua em D e derivável, apenas, em $D\setminus\{a,b\}$, enquanto que h é contínua em $D\setminus\{a\}$ e derivável em $D\setminus\{a\}$.





(c) A função $j(x)=x^{1/3}$, $x\in\mathbb{R}$ (Exemplo 4(e)) é contínua em $\mathbb{R}$ e derivável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(d) A função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ é derivável, apenas, em $x=0$.

De facto, f é descontínua para $x\neq 0$, logo é também não derivável para $x\neq 0$.

Por outro lado, f é contínua na origem, tendo-se

$$x\in\mathbb{Q} \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

$$x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0,$$

pelo que f é derivável na origem e $f'(0)=0$. ■

Teorema 3 [Aritmética da derivação pontual]
Sejam $f, g\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funções de domínio D, deriváveis no ponto $a\in D\cap D'$. Então:

(a) $(f\pm g)'(a) = f'(a)\pm g'(a)$;

(b) $(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$;

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\,g(a)-f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}$, desde que $g(a)\neq 0$.

Demonstração
(a) Exercício.

(b) Para a derivada do produto, atenda-se a que

$$\begin{aligned}(f\,g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f\,g)(x)-(f\,g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)\,g(x)-f(a)\,g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\,g(x)-f(a)\,g(x)+f(a)g(x)-f(a)\,g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,g(x) + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,f(a)\right] = f'(a)\,g(a)+g'(a)\,f(a).\end{aligned}$$

(c) Para a derivada do quociente,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)\,g(a) - f(a)\,g(x)}{(x-a)\,g(x)\,g(a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)\,g(a) - f(a)\,g(a) + f(a)\,g(a) - f(a)\,g(x)}{(x-a)\,g(x)\,g(a)} \\
&= \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,\frac{g(a)}{g(x)\,g(a)} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,\frac{f(a)}{g(x)\,g(a)}\right] \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,g(a) - \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,f(a)}{g(x)\,g(a)} \\
&= \frac{f'(a)\,g(a) - g'(a)\,f(a)}{[g(a)]^2}\,.
\end{aligned}$$

■

Consequências

1) Da regra (b) do Teorema 3 sai, em particular, que se k for uma constante então

$$(kf(x))' = k\,f'(x).$$

2) Da regra (c), desde que $f(x)\neq 0$, sai que

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,.$$ ■

Exercício

(a) Usando a definição das funções hiperbólicas (Apêndice C. do Capítulo III), verificar que:

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\,x,\ x\in\mathbb{R}, \qquad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\,x,\ x\in\mathbb{R},$$

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,x},\ x\in\mathbb{R}\,, \qquad \mathrm{coth}'(x) = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2\,x},\ x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(a) Usando a definição das funções hiperbólicas inversas (Apêndice D. do Capítulo III), verificar que:

(a) $\mathrm{argsh}'\,x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,,\ x\in\mathbb{R};$ (b) $\mathrm{argch}'\,x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,\ x\in\,]1,+\infty[;$

(c) $\mathrm{argth}'\,x = \dfrac{1}{1-x^2}\,,\ x\in\,]-1,1[;$ (d) $\mathrm{argcoth}'\,x = \dfrac{1}{1-x^2}\,,\ x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1].$

(c) Seja $f(x) = \dfrac{1}{3}\,x^3 - 2x^2 + 3x + 1,\ x\in\mathbb{R}$. Determinar os pontos do gráfico de f para os quais a tangente à curva é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

(d) Mostrar que a recta $y = -x$ é tangente à curva de equação $y = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$ e determinar o ponto de tangência.

(e) Seja $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$. Determinar os pontos do gráfico de f para os quais a tangente à curva é horizontal. ■

Teorema 4 [Derivada da função composta / Regra da Cadeia]
Sejam $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f(D) \subset B \subset \mathbb{R}$, e $a \in D \cap D'$, $b = f(a) \in B \cap B'$.
Se f é derivável em a e g é derivável em b então $g \circ f$ é derivável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a). \tag{15}$$

Demonstração: Consultar a bibliografia recomendada. ■

A fórmula (15) significa que a derivada da composta é o produto das derivadas, com cada uma delas calculada num ponto adequado. Com alguma ligeireza matemática, podemos dizer que a derivada da composta é o produto da derivada da função de fora calculada na de dentro pela derivada da função de dentro.

Exemplo 6

(a) $$\left[\log(\cos x^3)\right]' = \log'(\cos x^3)(\cos x^3)' = \frac{1}{\cos x^3}\,(\cos x^3)' = \frac{1}{\cos x^3}\,\cos'(x^3)\cdot(x^3)'$$

$$= \frac{1}{\cos x^3}\,\left(-\operatorname{sen} x^3\right)\,3x^2 = \frac{-3x^2\,\operatorname{sen} x^3}{\cos x^3}.$$

(b) Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável e defina-se uma nova função, pondo

$$g(x) = f(\operatorname{sen}^2 x) + f(\cos 2x)\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

Determinar $g'(x)$, usando a regra da cadeia.

Pela regra da cadeia, vem

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(\operatorname{sen}^2 x)(\operatorname{sen}^2 x)' + f'(\cos 2x)(\cos 2x)'\,, \quad x \in \mathbb{R} \\ &= 2\operatorname{sen} x\,\cos x\, f'(\operatorname{sen}^2 x) - 2\operatorname{sen} 2x\, f'(\cos 2x)\,, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostrar que se f é par então f' é ímpar e que se f é ímpar então f' é par.

Atendendo a que f é par e usando a regra da cadeia, para cada $x \in \mathbb{R}$, vem

$$f(x) = f(-x) \implies [f(x)]' = [f(-x)]' \implies f'(x) = -f'(-x)$$

e conclui-se que f' é uma função ímpar. A resolução da segunda parte é análoga.

■

Exercício

(a) Seja $f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(x^2) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Determinar $f'(4)$.

(b) Seja $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

(i) Determinar o domínio da função definida por $g(x) = f(f(x))$.

(ii) Usando o teorema da derivada da função composta, verificar que g é derivável, tendo-se $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

(c) Determinar $g'(x)$ em função de $f'(x)$, para:

(i)	$g(x) = f(x^2)$;	(ii)	$g(x) = f(\operatorname{sen}^2 x) + f(\cos^x)$;
(iii)	$g(x) = f\left(f(x)\right)$;	(iv)	$g(x) = f\left(f\left(f(x)\right)\right)$.

(d) Seja $\ell(x) = \begin{cases} \log{(x+1)} & \text{se } x \geq 0, \\ -\log{(-x+1)} & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Verificar que ℓ é derivável e estudar a continuidade de $\ell\,'$.

(e) Sejam $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0, \\ \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0, \end{cases}$ e $k(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{se } x \geq 0, \\ \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Estudar a continuidade e a derivabilidade de h e de k. ■

Quanto à derivação da função inversa, repare-se que:

- Se $f : A \longrightarrow B$ for bijectiva e derivável em certo ponto $a \in A$, a sua inversa, $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$, pode não ser derivável em $b = f(a)$.

  Veja-se o caso de $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, que é claramente derivável e, no entanto, a sua inversa, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, não é derivável em $0 = f(0)$. *Cf.* o Exemplo 5(c).

- Nos casos em que a inversa é derivável, de $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $\forall x \in A$, a regra da cadeia dá $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$, $\forall x \in A$, donde $f'(x) \neq 0$ e

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} .$$

  O problema surge quando se tem precisamente $f'(x) = 0$, que é o que acontece no caso citado anteriormente.

O resultado fundamebntal sobre a derivação da função inversa é o seguinte.

Teorema 5 [Derivada da função inversa]

Seja $f\colon D \longrightarrow B$, com $D, B \subset \mathbb{R}$, uma função bijectiva. Se f é derivável no ponto $a \in D \cap D'$, $f'(a) \neq 0$ e f^{-1} é contínua em $b = f(a)$, então f^{-1} é derivável em b, tendo-se

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,. \tag{16}$$

Demonstração
Por definição, tem-se

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(b) &= \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \lim_{y\to b} \frac{1}{\dfrac{y-b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} \\
&= \lim_{y\to b} \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}}
\end{aligned} \tag{17}$$

onde o denominador da última expressão é a razão incremental para $f'(f^{-1}(b))$. Então o último limite em (17) define o que se pretende, desde que seja tomado para $f^{-1}(y) \longrightarrow f^{-1}(b)$. Vejamos que podemos passar do limite em $y \to b$ para o limite pretendido. De facto, por um lado, da continuidade de f^{-1} no ponto b, tem-se

$$\lim_{y\to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b),$$

donde

$$y \longrightarrow b \implies f^{-1}(y) \longrightarrow f^{-1}(b).$$

Por outro lado, da injectividade de f^{-1}, sai que

$$f^{-1}(y) \longrightarrow f^{-1}(b) \implies y \longrightarrow b.$$

Consequentemente, tomar o limite com $y \to b$ equivale a tomar o limite com $f^{-1}(y) \to f^{-1}(b)$, e a última expressão em (17) dá então $\dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \dfrac{1}{f'(a)}$. ■

A fórmula (16) significa que a derivada da função inversa é o inverso da derivada da função directa, com cada uma delas calculada num ponto adequado.

Exemplo 7 [Derivadas das funções trigonométricas inversas]

(a) Usando o teorema da derivada da função inversa, mostrar que

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in \,]-1,1[\,. \tag{18}$$

Trata-se de determinar a derivada, num ponto genérico x, da inversa da função contínua e bijectiva (*cf.* o Apêndice B. do Capítulo III)

$$\cos\colon\ [0,\pi] \longrightarrow [-1,1].$$

Ponha-se $f(x) = \cos x$, $x \in [0,\pi]$. Então $f^{-1}(y) = \arccos y$, $y \in [-1,1]$.
Tem-se $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $x \in [0,\pi]$, sendo $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in]0,\pi[$.

Como $f(0) = 1$ e $f(\pi) = -1$, o Teorema 5 é aplicável em $]-1,1[$, dando

$$\arccos' y = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos y)} = \frac{-1}{\operatorname{sen}(\arccos y)} \;,\quad y \in]-1,1[. \tag{19}$$

Resta agora simplificar o denominador da última expressão. Para tal, repare-se que

$$y \in]-1,1[\Longrightarrow \arccos y \in]0,\pi[\;\text{ e }\; \operatorname{sen}(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$$

porque $\operatorname{sen}^2(\arccos y) + \cos^2(\arccos y) = 1$, ou seja, $\operatorname{sen}^2(\arccos y) + y^2 = 1$, sendo o seno positivo em $]0,\pi[$. Fica então justificada a fórmula (18).

(b) Usando o teorema da derivada da função composta, Teorema 4, é fácil verificar que, mais em geral, sendo u uma função derivável de x, se tem

$$(\arccos u)'(x) \;=\; \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} \tag{20}$$

nos pontos onde a derivada existe. ■

Resultados análogos ao do Exemplo 7 são válidos para as restantes funções trigonométricas inversas (*cf.* o Apêndice B. do Capítulo III), podendo construir-se a parte A. da tabela que figura no apêndice na parte final deste capítulo.

3 Derivada e crescimento local

Comecemos por observar que, dada $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável em $a \in D \cap D'$, se for $f'(a) > 0$, vem

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;>\; 0$$

e pelo teorema sobre a permanência do sinal no limite (Teorema 8 do Capítulo III), resulta que a razão incremental que define $f'(a)$ se mantém positiva em algum intervalo aberto centrado em a, ou seja, existe $J =]a-\epsilon, a+\epsilon[$ tal que

$$x \in J \cap D \;\Longrightarrow\; \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$$

donde, $f(x) - f(a)$ e $x - a$ têm o mesmo sinal, para $x \in J \cap D$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} x \in J \cap D \;\wedge\; x < a \quad &\Longrightarrow\; f(x) < f(a) \\ y \in J \cap D \;\wedge\; y > a \quad &\Longrightarrow\; f(y) > f(a). \end{aligned}$$

Analogamente, quando for $f'(a) > 0$, resulta

$$\begin{aligned} x \in J \cap D \;\wedge\; x < a \quad &\Longrightarrow\; f(x) > f(a) \\ y \in J \cap D \;\wedge\; y > a \quad &\Longrightarrow\; f(y) < f(a). \end{aligned}$$

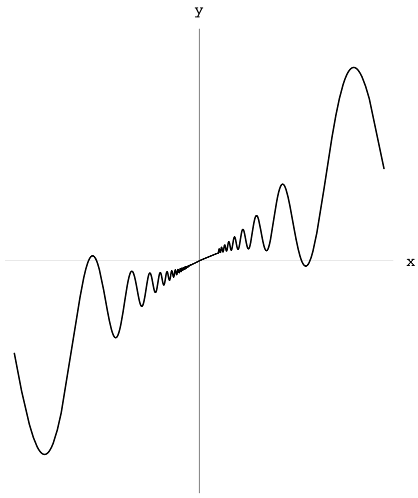
Observação 3

O que acabámos de ver não significa que se $f'(a) > 0$ então f seja crescente em vizinhança alguma do ponto a, uma vez que comparámos $f(x)$, $f(a)$ e $f(y)$ apenas para $x < a < y$ e não para x e y arbitrários em $J \cap D$. O sinal de $f'(a)$, só por si, nada diz sobre a monotonia de f nas vizinhanças do ponto a.

Analise-se, por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

que é derivável em $\mathbb{R}$. Em particular, tem-se $f'(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ e, no entanto, f não é crescente em vizinhança alguma da origem.



■

Teorema 6

Se $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é crescente então a sua derivada, onde existir, é não negativa.

Demonstração

Se fosse $f'(a) < 0$ para algum $a \in D$, então existiria um intervalo $J =]a - \delta, a + \delta[$ tal que $x \in J \cap D \ \wedge \ x < a < y \implies f(x) < f(a) < f(y)$ e f não seria crescente. ■

Teorema 7 [Fermat]

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável em $a \in D \cap D'_+ \cap D'_-$. Se f possui um extremo local em a então $f'(a) = 0$.

Demonstração

Se fosse $f'(a) > 0$, existiria um intervalo $J =]a - \delta, a + \delta[$ tal que

$$x \in J \cap D \ \wedge \ x < a < y \implies f(x) < f(a) < f(y)$$

e $f(a)$ não seria extremo local de f. Se fosse $f'(a) < 0$, a conclusão seria análoga. Logo, tem que ser $f'(a) = 0$. ■

Observação 4

1. O Teorema 7 refere-se apenas a casos em que:

   (a) f é derivável em a;

   não se aplica, por exemplo, à função $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, e ao ponto 0; f possui um extremo local na origem não sendo aí derivável;

(b) $a \in D'_-$ e $a \in D'_+$;

não se aplica, por exemplo, à função $f(x) = x,\ x \in [0,1]$, que possui um mínimo local na origem e um máximo local em 1, não se tendo $f'(0) = 0$ nem $f'(1) = 0$.

2. O recíproco do Teorema 7 é claramente falso, isto é,

$$f'(a) = 0 \;\not\Longrightarrow\; f(a) \text{ é um extremo local de } f.$$

Basta pensar, por exemplo, em $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Tem-se $f'(0) = 0$ e, no entanto, $f(0)$ não é extremo local de f.

3. O Teorema 7 apenas afirma que os únicos candidatos a extremos locais de f atingidos em pontos interiores ao domínio são os pontos onde a derivada de f se anula.

■

4 Funções deriváveis num intervalos

Nesta secção abordaremos resultados fundamentais sobre o comportamento de uma função que possui derivada num intervalo.

4.1 Teorema do valor intermédio para a derivada

Nesta subsecção vamos apresentar um dos resultados mais notáveis deste curso. Trata-se do célebre teorema de Darboux, que estabelece que uma função derivada definida num intervalo, independentemente de ser contínua ou não, possui sempre a propriedade do valor intermédio, isto é, não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios. Significa que as eventuais descontinuidades de uma derivada definida num intervalo não podem ser de salto e serão sempre descontinuidades complicadas, na medida em que não podem impedir essa derivada de cumprir a propriedade do valor intermédio.

Teorema 8 [Valor intermédio para a derivada (Darboux)]
Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável e tal que $f'(a) \neq f'(b)$. Então, dado $k \in \mathbb{R}$ estritamente compreendido entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = k$.

Demonstração
Sem perda de generalidade, suponhamos que $f'(a) < f'(b)$.

(i) Considere-se o caso particular em que $k = 0$, $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$.
Como f é contínua em $[a,b]$, o teorema de Weierstrass (Teorema 16, Subsecção 3.5, Capítulo III), garante que f atinge os seus extremos em $[a,b]$. Mas

$$\begin{array}{lll} f'(a) < 0 & \Longrightarrow & f(a) > f(x) \text{ para } x \text{ em algum intervalo }]a, a+\epsilon[\\ f'(b) > 0 & \Longrightarrow & f(a) > f(x) \text{ para } x \text{ em algum intervalo }]a-\delta, a[\ , \end{array}$$

pelo que o mínimo de f não pode ser atingido em a nem em b, mas sim em algum ponto $c \in]a,b[$. Pelo Teorema 7 de Fermat, ter-se-á $f'(c) = 0$.

(ii) Considere-se agora o caso geral em que k é qualquer, $f'(a) < k$ e $f'(b) > k$. Para cada k, seja ϕ a função auxiliar definida por $\phi(x) = f(x) - kx,\ x \in [a,b]$. Tem-se

$$\phi'(a) = f'(a) - k < 0 \quad \wedge \quad \phi'(b) = f'(b) - k > 0\ .$$

Pelo que se viu no caso particular tratado em (i), conclui-se que

$$\exists c \in]a,b[:\ \ \phi'(c) = 0 \qquad \text{pelo que} \qquad \exists c \in]a,b[:\ \ f'(c) = k. \qquad \blacksquare$$

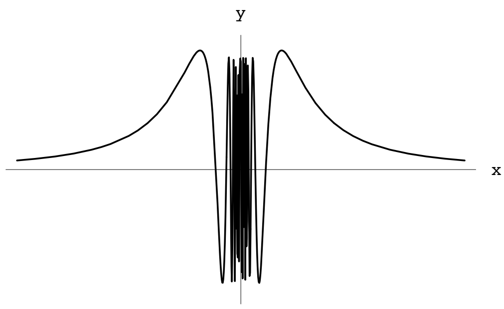
Exemplo 8

(a) Considere-se a função definida por $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

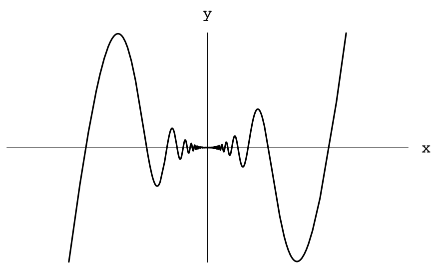
Esta função não possui a propriedade do valor intermédio. Então g não pode ser a derivada de função alguma $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Em particular, g não pode ser a deivada, em $[-1,1]$, de $\phi(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 0 \end{cases}$. Em particular, $\phi'(x) = g(x)$ para todo $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, mas ϕ não é derivável em $x = 0$.

(b) Por outro lado, a função $k : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$k(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$



é descontínua em 0 porque $\nexists \lim\limits_{x \to 0} k(x)$. No entanto, k goza da propriedade do valor intermédio e é a derivada da função



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

4.2 Teoremas de Rolle e de Lagrange

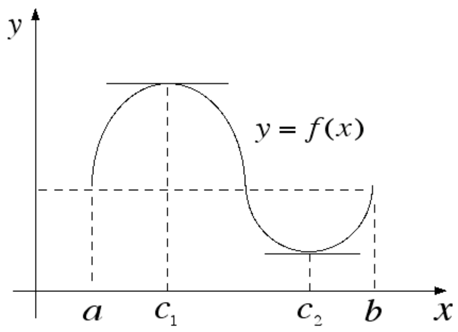
Veremos agora mais dois resultados importantes sobre funções deriváveis em intervalos, bem como algumas consequências que deles se extraem.

Teorema 9 [Rolle]
Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a,b[$. Se $f(a) = f(b)$ então existe $c \in\ ]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração
Se f é constante então $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a, b[$, e a conclusão do teorema é óbvia.

Suponhamos que f não é constante em $[a, b]$ tendo-se, no entanto, $f(a) = f(b)$. Da continuidade de f em $[a, b]$ e do teorema de Weierstrass (Teorema 16, Subsecção 3.5, Capítulo III), conclui-se que f atinge um mínimo e um máximo em $[a, b]$. Pelo menos um destes extremos é atingido em algum ponto $c \in]a, b[$, já que $f(a) = f(b)$ e que f não é constante. Pelo Teorem 7 de Fermat, em tal ponto c tem-se $f'(c) = 0$. ■

Observação 5 [Interpretação geométrica do teorema de Rolle]
Geometricamente, o teorema de Rolle estabelece que, estando f nas condições indicadas no enunciado do Teorema 9, existe algum ponto $c \in]a, b[$ tal que a tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa c é horizontal e, portanto, paralela à recta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. A figura mostra a recta horizontal que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e dois pontos c_1 e c_2 em $]a, b[$ para os quais a tangente à curva é horizontal. ■



Do teorema de Rolle extraem-se as seguintes consequências muito úteis no tratamento numérico de equações algébricas.

Corolários [do teorema de Rolle]
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a, b[$.

1. Entre dois zeros de f existe, pelo menos, um zero de f'.

2. Entre dois zeros consecutivos de f' existe, quando muito, um zero de f.

3. Não há mais do que um zero de f inferior ao menor zero de f', nem mais do que um zero de f superior ao maior zero de f'.

A demonstração destes corolários fica ao cuidado dos alunos. ■

Exemplo 9
Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, arbitrário, e mostremos que a equação $x^3 + x + \alpha = 0$ não pode ter mais do que uma raíz real.

Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 + x + \alpha$. Trata-se de uma função derivável em $\mathbb{R}$. Se a equação dada tivesse duas raízes reais então a função f possuiria dois zeros reais, pelo que f' possuiria, pelo menos, um zero real (Corolário 1 do Teorema 9). Mas $f'(x) = 3x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, que nunca se anula em $\mathbb{R}$. Portanto, a equação dada possui, quando muito, uma raíz real. ■

Exercício

(a) Seja $b\in\mathbb{R}$, arbitrário. O que pode dizer do número de soluções reais da equação $2x^3-24x+b=0$ em cada um dos intervalos $]-2,2[$, $]-\infty,-2[$ e $]2,+\infty[$?

(b) Seja $f(x)=5+3(x-1)^{2/3}$. Mostre que $f(0)=f(2)$ e que $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in]0,2[$.

Confronte o resultado com o Teorema de Rolle.

(c) Mostre que a equação $3x-\text{sen}^2\, x-2=0$ possui uma única solução em $[0,\pi]$. ■

Observação 6
Relativamente ao Teorema de Rolle, registemos as seguintes observações.

(a) É fundamental que f seja contínua em $[a,b]$.

Consideremos a função $f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\in[0,1[, \\ 0 & \text{se } x=1,\end{cases}$ que é derivável em $]0,1[$ com $f(0)=f(1)$. No entanto, $f'(x)=1\neq 0$, $\forall x\in]0,1[$, não existindo $c\in]0,1[$ tal que $f'(c)=0$.

Isto acontece porque f não é contínua em $[0,1]$.

(b) É fundamental que f seja derivável em $]a,b[$.

Consideremos $f(x)=|x|$, $x\in[-2,2]$, que é contínua em $[-2,2]$, com $f(-2)=f(2)$, mas para a qual não existe $c\in]-2,2[$ tal que $f'(c)=0$. Isto acontece porque f não é derivável em $]-2,2[$. ■

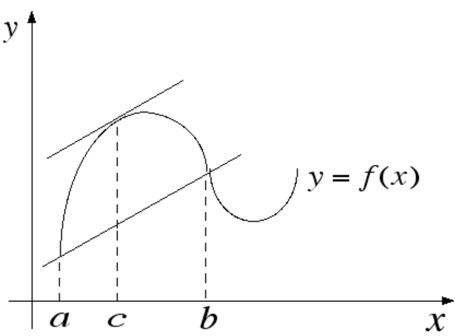
Um dos resultados mais importantes do cálculo diferencial é o que se exprime no seguinte teorema e que constitui uma extensão do Teorema de Rolle.

Teorema 10 [do valor médio de Lagrange]
Seja $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a,b[$. Então existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demonstração
Basta aplicar o Teorema 9 de Rolle à função auxiliar definida por

$$k(x)=f(x)-\frac{f(a)-f(b)}{b-a}\,x,\quad x\in[a,b].$$ ■

Observação 7 [Interpretação geométrica do teorema de Lagrange]
O Teorema de Lagrange estabelece que, estando f nas condições indicadas no enunciado,



existe algum ponto $c\in]a,b[$ tal que a tangente à curva de equação $y=f(x)$ no pondo de acissa c é paralela à recta que passa por $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$, secante à curva $y=f(x)$.

■

Exemplo 10

Mostrar que $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \operatorname{sen} x \leq x$, $\forall x > 0$.

(i) Seja $f(x) = \operatorname{sen} x - x$, $x \in \mathbb{R}$, que é derivável em $\mathbb{R}$, com $f'(x) = \cos x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Dado $x > 0$, arbitrário, apliquemos o teorema de Lagrange (Teorema 10) à função f no intervalo $[0, x]$. Vem que

$$\frac{(\operatorname{sen} x - x) - 0}{x - 0} = \cos c - 1 , \quad \text{para algum } c \in]0, x[.$$

Por ser $\cos c - 1 \leq 0$, $\forall c \in]0, x[$, resulta $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x} \leq 0$ e, como $x > 0$, vem $\operatorname{sen} x - x \leq 0$, pelo que $\operatorname{sen} x \leq x$.

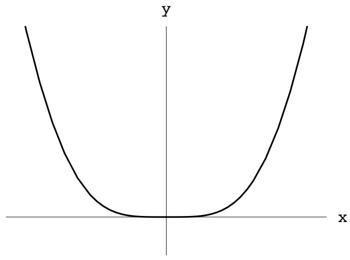
(ii) Seja agora $g(x) = \operatorname{sen} x + \dfrac{x^3}{6} - x$, $x \in \mathbb{R}$. Então $g'(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Para cada $x > 0$, arbitrário, apliquemos o Teorema de Lagrange à função g em $[0, x]$.
Sai que, para algum $c \in]0, x[$,

$$\frac{\operatorname{sen} x + \dfrac{x^3}{6} - x}{x} = \cos c + \frac{c^2}{2} - 1 ,$$

Mas $\cos c + \dfrac{c^2}{2} - 1 \geq 0$, $\forall c > 0$ (figura).

Então $\dfrac{\operatorname{sen} x + \dfrac{x^3}{6} - x}{x} \leq 0$, e por ser $x > 0$,

sai $\operatorname{sen} x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$.



Positividade de $\cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1$.

■

Exemplo 11

Mostrar que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Se $x = y$ a condição é verificada como igualdade.

(ii) Suponhamos que $x \neq y$, com $x < y$, e apliquemos o Teorema do valor médio de Lagrange à função $f(z) = \operatorname{sen} z$ no intervalo $[x, y]$. Tem-se $f'(z) = \cos z$ e conclui-se que existe $c \in]x, y[$ tal que $\cos c = \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x - y}$. Como $|\cos c| \leq 1$, $\forall c \in \mathbb{R}$, sai que $\left| \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x - y} \right| \leq 1$ e, portanto, que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$. ■

Exercício

(a) Mostrar que $e^x > 1 + x$, $\forall x \neq 0$.

(b) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a, b[$, com $f'(x) = k$, $x \in]a, b[$, k constante. Mostre que $f(x) = kx + m$, $\forall x \in [a, b]$, para certa constante real m que deverá especificar. ■

Vejamos agora algumas consequências importantes do teorema de Lagrange.

Corolários [do teorema de Lagrange]

1. Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a,b[$, então f é constante.

2. Se $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e tais que $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in]a,b[$, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in]a,b[$.

3. Seja $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Tem-se

(a) $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, se e só se f é crescente em I;

(b) $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, se e só se f é decrescente em I;

(c) se $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente crescente em I;

(d) se $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.

Demonstração

1. Exercício. Para cada $z \in]a,b]$, aplicar o Teorema de Lagrange à função f no intervalo $[a,z]$ e concluir que $f(x) = f(a)$, $\forall x \in]a,z]$.

2. Exercício. Considerar a função $\phi(x) = g(x) - f(x)$, $x \in [a,b]$, e aplicar o resultado de 1.

3. (a) Comecemos por admitir que $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, e mostremos que f é crescente em I. Dados $x, y \in I$, com $x < y$, quaisquer, apliquemos o teorema de Lagrange à função f em $[x,y]$. Vem que

$$\exists c \in]x,y[\quad \text{tal que} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c).$$

Como $f'(c) \geq 0$, $\forall c \in]x,y[$, sai que $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$, donde $f(y) \geq f(x)$.

Reciprocamente, suponhamos que f é crescente em I e mostremos que $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.

Dado $x \in I$, arbitrário, tem-se $f'(x) = \lim\limits_{y \longrightarrow x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Mas como f é crescente em I, sai que $f(y) - f(x)$ e $y - x$ têm o mesmo sinal, para todo $y \in I \backslash \{x\}$, pelo que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0, \ \forall y \in I \setminus \{x\}.$$

Pelo teorema sobre a permanência do sinal no limite (Teorema 8 do Capítulo III), conclui-se que $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.

3. (b) A demonstração é análoga à de 3. (a).

3. (c) A demonstração é análoga à da primeira parte de (a).

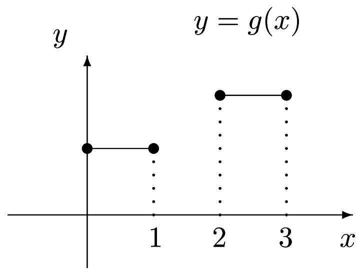
A segunda parte "falha" porque o teorema da permanência do sinal no limite não garante que seja $f'(x) > 0$ quando $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$, $\forall y \in I \setminus \{x\}$.

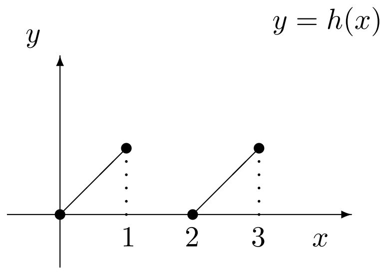
3. (d) A demonstração é análoga à da primeira parte de (a). ■

Observação 8

Repare-se que o Corolário 3 (c) do Teorema de Lagrange não é uma condição necessária e suficiente. De facto, basta pensar, por exemplo, em $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, que é estritamente crescente e, no entanto, $f'(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$, tendo-se $f'(0) = 0$. ■

Observação 9
Mantendo as hipóteses do Teorema de Lagrange, à excepção de considerar um domínio D que não seja necessariamente um intervalo, a conclusão do teorema ou dos seus corolários deixa de ser válida. Consideremos as funções seguintes





Tem-se $g'(x) = 0,\ \forall x \in [0,1] \cup [2,3]$, e ainda $h'(x) > 0,\ \forall x \in [0,1] \cup [2,3]$. No entanto, nem g é constante nem h é crescente. Isto acontece precisamente porque o domínio destas funções não é um intervalo. ■

Exercício
Sejam $f(x) = x,\ x \neq 0$, e $g(x) = \begin{cases} x+5 & \text{se } x > 0 \\ x+7 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

(a) Verifique que f e g são contínuas.

(b) Mostre que f e g são deriváveis e que $f' = g'$.

(c) Verifique que não existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) - f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(d) Explique porque não há contradição com o Corolário 2 do teorema de Lagrange.

5 Aplicação da derivada ao cálculo de limites

A derivada pode ser usada com sucesso no cálculo de limites, nomeadamente no levantamento de indeterminaçõeas do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Trata-se da técnica conhecida por *regra de L'Hospital* que passaremos agora a apresentar.

A versão mais simples desta regra refere-se ao caso em que pretendemos calcular

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \tag{21}$$

onde f e g são deriváveis em a, com $g'(a) \neq 0$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = g(a) = 0$. Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. No entanto, escrevendo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}\,, \tag{22}$$

conclui-se que o limite do quociente das funções é dado pelo quociente das correspondentes derivadas em a.

Em casos mais gerais, mantém-se esta coincidência de comportamento entre o quociente das funções e o quociente das correspondentes derivadas.

Teorema 11 [Regra de L'Hospital]
Sejam $f, g:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deriváveis e tais que:

- $g(x) \neq 0\,,\ \ g'(x) \neq 0\,,\ \ \forall x \in]a, b[\,;$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0.$

Se existir $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ então também existe $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, tendo-se

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Demonstração
Sejam F e G as extensões contínuas ao intervalo $[a, b[$ das funções f e g,

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } a < x < b, \\ \\ 0 & \text{se } x = a, \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } a < x < b, \\ \\ 0 & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Fixado arbitrariamente $z \in]a, b[\,$, consideremos a função Φ definida em $[a, z]$ por

$$\Phi(x) = F(x) + \frac{f(z)}{g(z)}\, G(x), \quad x \in [a, z].$$

A função Φ está nas condições do Teorema de Rolle (Teorema 9) no intervalo $[a, z]$. Logo existe $c \in]a, z[$ tal que $\Phi'(c) = 0$, ou seja, tal que $F'(c) - \dfrac{f(z)}{g(z)} G'(c) = 0$, ou ainda, tal que $\dfrac{F'(c)}{G'(c)} = \dfrac{f(z)}{g(z)}$.
Mas como $c \in]a, z[$, com $z \in]a, b[$, tem-se $F'(c) = f'(c)$ e $G'(c) = g'(c)$, resultando então que

$$\exists c \in]a, z[\,: \quad \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{23}$$

Tomando o limite em (23) quando $z \to a^+$, que acarreta $c \to a^+$ já que $c \in]a, z[\,$, vem

$$\lim_{z \to a^+} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

Observação 10
Demonstra-se um resultado análogo ao do Teorema 11 para o limite lateral à esquerda. Da conjugação dos dois resultados relativos a limites laterais, resulta um teorema para o limite "completo". Além disso, modificando a forma indeterminada para $\dfrac{\infty}{\infty}$, os resultados referidos anteriormente estendem-se com relativa facililidade. Vale, por isso, o eorema que apresentamos a seguir. ■

Teorema 12 [Extensão da Regra de L'Hospital]
Sejam $f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $I\backslash\{c\}$, com c ponto de I. Se

- $g'(x) \neq 0\,,\ \ \forall x \in I \setminus \{c\}$

- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell$, com $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$

então

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

desde que o segundo limite exista (finito ou infinito). ■

Observação 11
O Teorema 12 estende-se a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, desde que as hipóteses sejam formuladas em intervalos $]a, +\infty[$ e $]-\infty, b[$, respectivamente. ■

Observação 12 [Aplicabilidade da Regra de L'Hospital]
A regra de L'Hospital constitui uma "ferramenta" extremamente útil no cálculo de limites provenientes de indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$, ou outras quaiquer que se reduzam a uma destas formas. *Cf.* os Exemplos 12 (i), (j), (k). Claro que a regra pode ser usada sucessivamente, desde que a indeterminação permaneça em cada "etapa". Ocorre frequentemente o erro de "continuar a aplicar a regra" quando a indeterminação já não existe. *Cf.* os Exemplos 12 (f) e (g). ■

Exemplo 12

(a) Verificar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$, conclui-se que o limite proposto também vale 1.

(b) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos(3x) - 1 + 4{,}5x^2}{x^3}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Derivando uma vez, vem $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3\operatorname{sen}(3x) + 9x}{3x^2}$ e a indeterminação permanece. Derivando mais uma vez e calculando agora $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{-9\cos(3x) + 9}{6x}$, a indeterminação ainda permanece. Mas derivando uma terceira vez, vem $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{18\operatorname{sen}(3x)}{6} = 0$, pelo que todos os limites anteriores, incluindo o limite proposto, valem 0.

(c) Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Derivando uma vez e calculando $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^3-4}{2(x-1)}$, a indeterminação permanece. Derivando novamente vem $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{12x^2}{2} = 6$, pelo que o limite proposto vale 6.

(d) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2-2x+3}{5x^2+x-5}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Derivando uma vez obtém-se o limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{14x-2}{10x+1}$ e a indeterminação permanece.

Mas derivando novamente, vem $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$, e o limite proposto vale $\dfrac{7}{5}$.

(e) Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{4x^2-x-3}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Derivando uma vez a indeterminação desaparece porque $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-1}{8x-1} = \dfrac{3}{7}$, pelo que o limite proposto vale também $\dfrac{3}{7}$. Uma resposta errada muito frequente é

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{4x^2-x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{4x-1}{8x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\,.$$

(f) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x+2\operatorname{sen} x}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

O limite do quociente das derivadas é $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{1+2\cos x}$, que não existe, pelo que a regra de L'Hospital não é aplicável. No entanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x+2\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1+2\dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x} = 3.$$

(g) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Derivando uma vez obtém-se o limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, que não existe, logo a regra de L'Hospital não é aplicável. Mas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x}{1+\dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x} = 1.$$

(h) Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Para evitar derivar raízes, fazemos a mudança de variável $\sqrt{x}=u$. Ter $x\to 0^+$ equivale a ter $u\to 0^+$. O limite proposto transforma-se em $\lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{u}{1-e^{2u}}$, mantendo-se o mesmo tipo de indeterminação. Derivando uma vez, somos conduzidos a $\lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{1}{-2e^{2u}} = -\dfrac{1}{2}$. Logo, o limite proposto vale $-1/2$.

(i) Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo ∞^0, à qual a regra de L'Hospital não é aplicável. Torna-se necessário transformar esta indeterminação numa do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ ou $\dfrac{0}{0}$. Para tal, repare-se que

$$\lim_{x\to +\infty} (e^x - x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\log\left[(e^x-x)^{\frac{1}{x}}\right]} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\log(e^x-x)}. \tag{24}$$

Estudemos agora o limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\log(e^x - x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(e^x-x)}{x},$$

que conduz a uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Derivando, obtém-se $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-1}{e^x-x} = 1$. Da continuidade do logarítmo e da exponencial, conclui-se que o limite proposto vale e.

(j) Calcular $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\log x}$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo 0^0. Para aplicar a regra de L'Hospital, vamos transformar esta indeterminação, atendendo a que

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\log x} = \lim_{x\to 1^-} e^{\log\left[(1-x)^{\log x}\right]} = \lim_{x\to 1^-} e^{\log x\,\log(1-x)}. \tag{25a}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} \log x\,\log(1-x)$ conduz a uma indeterminação do tipo $0\times\infty$, torna-se necessário fazer novas manipulações. Notando que

$$\lim_{x\to 1^-} \log x\,\log(1-x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\log(1-x)}{\dfrac{1}{\log x}}, \tag{25b}$$

somos, finalmente, conduzidos a uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, à qual já podemos tentar aplicar a regra de L'Hospital. Derivando, obtém-se

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\dfrac{-1}{1-x}}{\dfrac{\frac{1}{x}}{(\log x)^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\log x)^2}{\dfrac{1}{x}-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(\log x)^2}{1-x}, \tag{25c}$$

que conduz a uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Derivando mais uma vez, obtém-se

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(\log x)^2 + 2x\dfrac{1}{x}\log x}{-1} = \lim_{x\to 1^-} \left[-(\log x)^2 - 2\log x\right] = 0. \tag{25d}$$

Consequentemente, em $(25b)$, o primeiro limite vale também 0, e do que se viu em $(25a)$, conclui-se que o limite proposto é igual a $e^0 = 1$.

(k) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} [\log(2x+1) - \log(x+2)]$.

Estamos perante uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$, à qual a regra de L'Hospital não é aplicável. Mas

$$\lim_{x\to+\infty} [\log(2x+1) - \log(x+2)] = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$$

e o limite no argumento do logarítmo conduz a uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Aplicando a regra de L'Hospital uma vez, é imediato que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1} = 2.$$

Consequentemente, o limite proposto vale $\log 2$. ∎

6 Fórmula de Taylor

Uma das aplicações mais notáveis da derivada está ligada à aproximação de funções por polinómios. Em particular, a fórmula de Taylor estabelece que uma função f com boas propriedades de derivabilidade pode ser aproximada, em torno de cada ponto, por um polinómio p, que pode ser escolhido de tal modo que f e p, juntamente com as respectivas derivadas até certa ordem, assumam o mesmo valor em determinado ponto $x = a$, fixado *a priori*. É assim possível, sobretudo no campo das aplicações, usar o polinómio aproximador em lugar da função original, podendo usufruir da simplicidade numérica das funções polinomiais para lidar com outro tipo de funções, como exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas.

6.1 Definições e nomenclatura

Para facilitar a exposição, vamos introduzir algumas definições muito úteis e algumas notações comuns. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in D \cap D'$ um ponto de acumulação do domínio de f e $n \in \mathbb{N}$. A *derivada de ordem* n da função f no ponto a define-se indutivamente por

$$\begin{array}{rcl} f^{(2)}(a) & = & f''(a) \ = \ (f')'(a) \\ f^{(3)}(a) & = & f'''(a) \ = \ (f'')'(a) \\ \cdots & & \cdots \qquad\qquad \cdots \\ f^{(n)}(a) & = & (f^{(n-1)})'(a). \end{array} \tag{26a}$$

Convencionando que a derivada de ordem 0 coincide com a própria função,

$$f^{(0)}(a) = f(a), \tag{26b}$$

tem-se, em geral,

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Observe-se que, para que se possa definir $f^{(n)}(a)$, é necessário que exista $f^{(n-1)}(x)$ em algum intervalo contendo o ponto a.

Sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo contendo o ponto a, dizemos que a função f: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ é:

- *n vezes derivável* no intervalo I se existe $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$;
- *infinitamente derivável* em I se existem, em cada $x \in I$, as derivadas de qualquer ordem da função f;
- *n vezes derivável* em a quando existe um intervalo J contendo a tal que f é $n-1$ vezes derivável em $I \cap J$ e, além disso, existe $f^{(n)}(a)$;
- *infinitamente derivável* em a se existe um intervalo J contendo a tal que f é infinitamente derivável em $I \cap J$;
- *de classe C^n em I*, e escrevemos $f \in C^n(I)$, quando f é n vezes derivável em I e $f^{(n)}$ é contínua em I (o que acarreta a continuidade de todas sa derivadas de f até à ordem $n-1$);
- *de classe C^∞ em I*, e escrevemos $f \in C^\infty(I)$, quando $f \in C^k(I), \forall k \in \mathbb{N}$ (e significa que f possui derivadas de todas as ordens, que são contí nuas em I);
- *de classe C^0 em I*, e escrevemos $f \in C^0(I)$, quando f é contínua em I.

Consequência
Das definições apresentadas, tem-se;

$$C^\infty(I) \subset \cdots \subset C^{k+1}(I) \subset C^k(I) \subset C^{k-1}(I) \subset \cdots \subset C^1(I) \subset C^0(I); \tag{28a}$$

$$f \text{ de classe } C^k \implies f\ k \text{ vezes derivável}; \tag{28b}$$

$$f\ k \text{ vezes derivável} \not\Longrightarrow f \text{ de classe } C^k. \tag{28c}$$

Exemplo 13
Toda a função *polinomial* é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.
Basta pensar que a derivada é ainda uma função polinomial, logo contínua.

Toda a função *racional* (quociente de polinómios) é de classe C^∞ no seu domínio.
Basta atender à regra de derivação de um quociente expressa no Teorema 3(c) e ainda ao facto de o produto de funções polinomiais ser uma função polinomial.

As funções *trigonométricas* são de classe C^∞ em cada intervalo onde são definidas.
Consequência da continuidade das funções trigonométricas e do facto de as derivadas das funções trigonométricas se expressarem em termos de novas funções trigonométricas.

A função *exponencial*, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.
A função exponencial é contínua e a derivada da exponencial é a própria exponencial.

A função *logarítmo* é de classe C^∞ no seu domínio (justificar).

As funções *hiperbólicas* são de classe C^∞ em cada intervalo onde são definidas.
Resulta da definição destas funções em termos da exponencial e das regras de derivação.

A função $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é derivável em $\mathbb{R}$ mas não é de classe $C^1(\mathbb{R})$ porque a sua derivada existe em $\mathbb{R}$ mas não é contínua na origem. *Cf.* o exemplo 8 (b).

6.2 Polinómio de Taylor

Dada uma função $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo I, que é n vezes derivável no ponto $a \in I$, existem as constantes

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a)$$

com as quais podemos construir o polinómio

$$\mathrm{P}_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{29a}$$

ou ainda

$$\mathrm{P}_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{29b}$$

a que se chama *polinómio de Taylor de ordem n da função f em torno do ponto a.*

Derivando sucessivamente, vem

$$\begin{aligned}
P'_{n,a}(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{(n-1)} \\
P''_{n,a}(x) &= f''(a) + f'''(a)(x-a) + \frac{f^{(4)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{(n-2)} \\
&\cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\
P^{(n-1)}_{n,a}(x) &= f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a) \\
P^{(n)}_{n,a}(x) &= f^{(n)}(a)
\end{aligned} \tag{30}$$

e as restantes derivadas são identicamente nulas. Em particular, no ponto a tem-se

$$P_{n,a}(a) = f(a), \quad P'_{n,a}(a),\ f'(a), \quad \ldots, \quad P^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a). \tag{31}$$

Pode mostrar-se que não existe outro polinómio de grau $\leq n$ que, juntamente com as suas derivadas até à ordem n, verifique condições como as que figuram em (31). De facto, vale o seguinte resultado.

Teorema 13 [Unicidade do Polinómio de Taylor]
O polinómio $\mathrm{P}_{n,a}(x)$ é o único polinómio de grau não superior a n cujas derivadas no ponto a, desde a ordem 0 até à ordem n, coincidem com as correspondentes derivadas de f no ponto a.

Demonstração
Seja $Q(x)$ era um polinómio de grau não superior a n,

$$Q(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n, \tag{32}$$

verificando as condições

$$Q(a) = f(a)\ ,\ \ Q'(a) = f'(a)\ ,\ \ Q''(a) = f''(a)\ ,\ \ \cdots\ ,\ \ Q^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \tag{33}$$

e vejamos que tem que ser $Q(x) = \mathrm{P}_{n.a}(x)$. De facto, da definição (32), sai sucessivamente

- $Q(a) = a_0$ e, pela primeira igualdade de (33), sai que $a_0 = f(a)$.
- $Q'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + n\, a_n(x-a)^{n-1}$.
  Em particular, $Q'(a) = a_1$ e, pela segunda igualdade de (33), sai que $a_1 = f'(a)$.
- $Q''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-a) + \cdots + n\cdot(n-1)\, a_n(x-a)^{n-2}$.
  Em particular, $Q''(a) = 2a_2$ e, pela terceira igualdade de (33), sai que $2a_2 = f''(a)$, donde $a_2 = \dfrac{f''(a)}{2}$.
- E assim sucessivamente, até que se obtém $Q^n(x) = n!\, a_n$, donde também $Q^n(a) = n!\, a_n$.
  Pela última igualdade de (33), sai que $n!\, a_n = f^{(n)}(a)$, donde $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Substituindo em (32) as expressões obtidas anteriormente para $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, resulta precisamente

$$Q(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n,$$

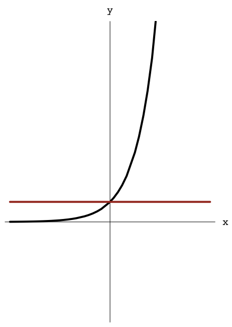
ou seja $Q(x) = \mathrm{P}_{n.a}(x)$. ■

Exemplo 14 [Polinómio de Taylor de algumas funções]
Determinemos o polinómio de Taylor com a orden indicada, em torno do ponto $a = 0$, para cada uma das seguintes funções;

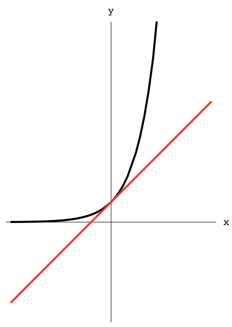
(a) $f(x) = \mathrm{e}^{\,x}$, $x \in \mathbb{R}$ (ordem n);
como $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^{\,x}$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vem em particular $f^{(k)}(0) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, donde

$$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\ ; \tag{34}$$

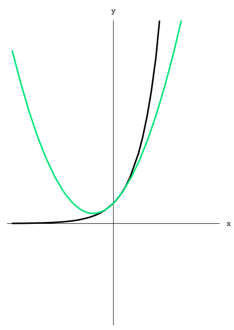
Nas figuras seguintes estão representados os polinómios de ordens $0, 1, 2, 3, 4, 5$.



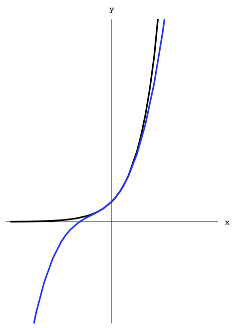
função f
polinómio $\mathrm{P}_{0,0}$



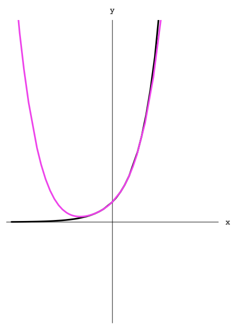
função f
polinómio $\mathrm{P}_{1,0}$



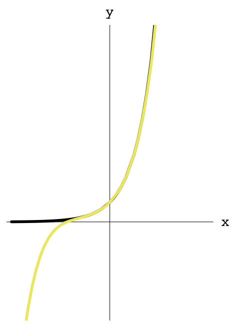
função f
polinómio $\mathrm{P}_{2,0}$



função f
polinómio $\mathrm{P}_{3,0}$



função f
polinómio $\mathrm{P}_{4,0}$



função f
polinómio $\mathrm{P}_{5,0}$

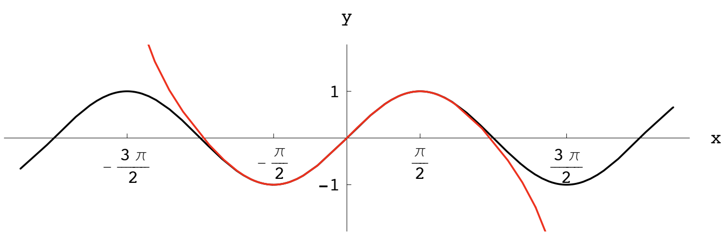
(b) $f(x) = \operatorname{sen} x,\ x \in \mathbb{R}$ (ordem $2n+1$);

tem-se

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad k = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots \\ 1 & \text{para} \quad k = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ -1 & \text{para} \quad k = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{cases} \tag{35}$$

e consequentemente

$$P_{2n+1,0}\,(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ; \tag{36}$$

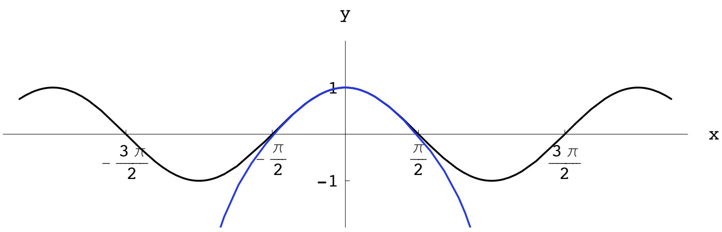


Função seno (preto) e polinómio de Taylor (vermelho).

(c) $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$ (ordem $2n$);

com uma resolução muito semelhante à do exemplo da alínea (b), sai

$$P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ; \tag{37}$$



Função cosseno (preto) e polinómio de Taylor (azul).

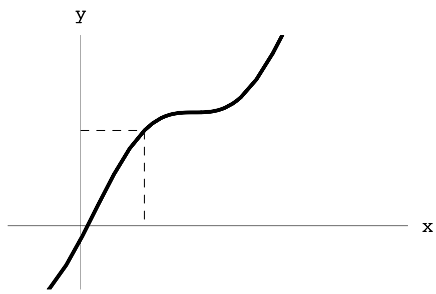
6.3 Aproximação de funções

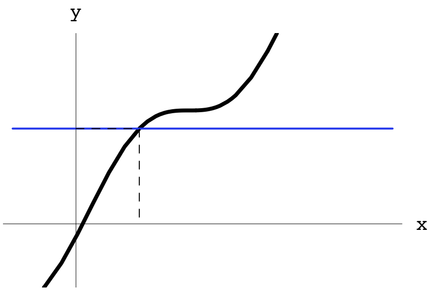
Já sabemos da Secção 1D deste Capítulo 4 que, sendo f derivável num ponto a, então para x próximo de a, a função f pode ser aproximada pelo poninómio de grau ≤ 1 que define a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a, ou seja, pelo polinómio $f(a) + f'(a)(x - a)$. Vamos agora melhorar esta aproximação; mais concretamente, vamos ver que uma função f que é n vezes derivável em a pode ser aproximada, numa vizinhança de a, pelo seu polinómio de Taylor de ordem n à volta do ponto a.

A. Motivação

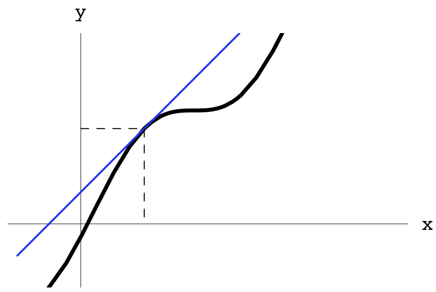
A título de motivação, analisemos um exemplo muito simples.

Consideremos uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que é n vezes derivável em $a \in I$, e os polinómios $P_{n,a}(x)$, construídos usando a definição ($29a$), que representamos graficamente nas figuras seguintes (curvas a azul).



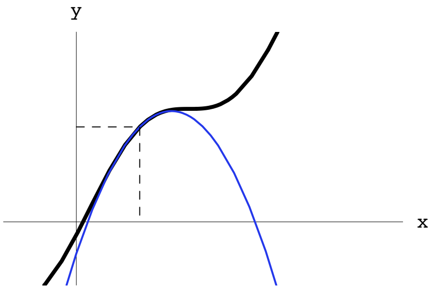


Função f (preto) e polinómio $p_{0,a}$ (azul).

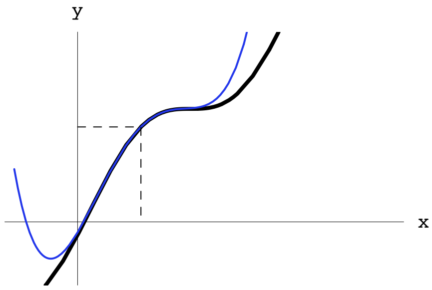


Função f (preto) e polinómio $p_{1,a}$ (azul).

Função f (preto) e polinómio $p_{2,a}$ (azul).



Função f (preto) e polinómio $p_{3,a}$ (azul).



B. Resultados

O resultado fundamental sobre a aproximação de funções por intermédio do polinómio de Taylor é apresentado no Teorema 15 e baseia-se no seguinte resultado preliminar.

Teorema 14

Sejam $f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções n vezes deriváveis ($n \geq 1$) no ponto $a \in I$. Então tem-se

$$g(a) = f(a),\ g'(a) = f'(a),\ g^{(2)}(a) = f^{(2)}(a),\ \ldots,\ g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \tag{38a}$$

se e só se

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - f(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{38b}$$

Para a demonstração, *cf.* a bibliografia recomendada para este curso. ■

Quando duas funções verificam as condições (38a), dizemos que elas possuem um *contacto de ordem* n no ponto a.

Teorema 15 [Fórmula de Taylor infinitesimal]

Seja $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no ponto $a \in I$. Então:

(i) para todo $x \in I$, tem-se

$$f(x) = \mathrm{P}_{n,a}(x) + \mathrm{R}_{n,a}(x), \tag{39a}$$

onde $\mathrm{P}_{n,a}$ é o polinómio de Taylor de ordem n da função f à volta do ponto a e $\mathrm{R}_{n,a}$ é uma função tal que

$$\lim_{x\to a} \frac{\mathrm{R}_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0; \tag{39b}$$

(ii) $\mathrm{P}_{n,a}$ é o único polinómio de grau não superior a n que obedece a uma decomposição como a de (39a) para $f(x)$, com $\mathrm{R}_{n,a}(x)$ verificando a condição (39b) de pequenez.

Demonstração

Para a parte (i), comecemos por escrever

$$f(x) = \mathrm{P}_{n,a}(x) + [f(x) - \mathrm{P}_{n,a}(x)]\,,$$

que traduz a decomposição

$$f(x) = \mathrm{P}_{n,a}(x) + \mathrm{R}_{n,a}(x)\,, \qquad \text{com} \quad \mathrm{R}_{n,a}(x) = f(x) - \mathrm{P}_{n,a}(x).$$

Como $\mathrm{P}_{n,a}$ e f possuem um contacto de ordem n no ponto a expresso nas condições (31), o Teorema 14 permite concluir que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\mathrm{P}_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Então f admite a decomposição (39a) com $\mathrm{R}_{n,a}(x)=f(x)-\mathrm{P}_{n,a}(x)$ a verificar a condição (39b). Para a parte (ii), suponhamos que existia outro polinómio $Q(x)$ de grau não superior a n tal que

$$f(x)=Q(x)+\mathrm{S}(x)\quad \text{com}\quad \lim_{x\to a}\frac{\mathrm{S}(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Então ter-se-ia

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=0$$

e pelo Teorema 14 resultaria

$$Q(a)=f(a),\ Q'(a)=f'(a),\ Q^{(2)}(a)=f^{(2)}(a),\ \ldots,\ Q^{(n)}(a)=f^{(n)}(a).$$

Logo, pelo teorema 13, concluir-se-ia que $Q(x)=\mathrm{P}_{n,a}(x)$. ■

A função $\mathrm{R}_{n,a}\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $\mathrm{R}_{n,a}(x)=f(x)-\mathrm{P}_{n,a}(x)$ designa-se por *resto de Taylor de ordem n da função f em torno do ponto a.* À expressão

$$f(x)=\mathrm{P}_{n,a}(x)+\mathrm{R}_{n,a}(x)\qquad \text{com}\qquad \lim_{x\to a}\frac{\mathrm{R}_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0, \tag{40}$$

chama-se *fórmula de Taylor de ordem n para a função f em torno do ponto a.*

Observação 13

A segunda condição em (40) exprime o facto de o resto de Taylor tender para 0 mais rapidamente do que $(x-a)^n$ tende para 0 e, portanto, muito mais rapidamente do que x tende para a.

O polinómio de Taylor $\mathrm{P}_{n,a}$ pode ser utilizado para aproximar a função f nas vizinhanças do ponto a. A precisão de tal aproximação depende da ordem n do polinómio: *quanto mais elevada for a ordem do polinómio melhor será a aproximação considerada.*

Para cada x numa vizinhança de a, ao tomarmos $f(x)$ aproximado pelo correspondente valor $P_{n,a}(x)$, o erro cometido é dado pela diferença entre o valor exacto e o valor aproximado, ou seja por

$$R_{n,a}(x)=f(x)-P_{n,a}(x), \tag{41}$$

que é pequeno no sentido da segunda condição em (40). ■

Observação 14 [Fórmula de Taylor para funções polinomiais]

Um caso particular interessante corresponde a considerar f como função polinomial de grau n. Seja então $p\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função polinomial, sendo $p(x)$ um polinómio de grau n em x. O teorema 15 é aplicável a p, resultando

$$p(x)=\mathrm{P}_{n,a}(x)+\mathrm{R}_{n,a}(x)\,,\quad \text{com}\quad \lim_{x\to a}\frac{\mathrm{R}_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Então

$$\mathrm{R}_{n,a}(x) = p(x) - \mathrm{P}_{n,a}(x),$$

pelo que $\mathrm{R}_{n,a}(x)$ é um polinómio de grau$\leq n$, verificando

$$\mathrm{R}^{(k)}_{n,a}(a) = p^{(k)}(a) - \mathrm{P}^{(k)}_{n,a}(a) = 0\,, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Consequentemente, $\mathrm{R}_{n,a}(x)$ é o polinómio nulo e, para a função polinomial p, a fórmula de Taylor de ordem n reduz-se a

$$p(x) = \mathrm{P}_{n,a}(x) \quad \text{com} \quad \mathrm{R}_{n,a}(x) = 0. \tag{42}$$

Significa que a fórmula de Taylor é *exacta*, ou seja, é válida com resto nulo. E concluimos que o polinómio de Taylor de ordem n de uma função polinomial de grau n à volta de qualquer ponto a é o próprio polinómio $p(x)$. ■

Exemplo 15

Escreva o polinómio $q(x) = x^3 - 15x^2 + 75x - 120$ em potências de $x - 5$.

Atendendo à Observação 14, a fórmula de Taylor de ordem 3 à volta do ponto $a = 5$ é exacta para o polinmio q, tendo-se ($n = 3$ e $a = 5$)

$$q(x) = \mathrm{P}_{3,5}(x), \tag{43}$$

onde, como sabemos, $\mathrm{P}_{3,5}(x)$ é um polinmio em potências de $x - 5$. Da unicidade do polinmio de Taylor estabelecida no Teorema 15, significa então que $\mathrm{P}_{3,5}(x)$ é o polinómio pretendido. Agora, basta atender a que, pela definição (29a), se tem

$$\mathrm{P}_{3,5}(x) = q(5) + q'(5)(x-5) + \frac{q^{(2)}(5)}{2!}(x-5)^2 + \frac{q^{(3)}(5)}{3!}(x-5)^3 \tag{44}$$

e a que, do enunciado, vem

$$q'(x) = 3x^2 - 30x + 75\,, \;\; q^{(2)}(x) = 6x - 30\,, \;\; q^{(3)}(x) = 6$$

e, portanto,

$$q(5) = 5\,, \;\; q'(5) = 0\,, \;\; q^{(2)}(5) = 0\,, \;\; q^{(3)}(x) = 6$$

Substituindo na expressão (44) e atendendo à igualdade (43), vem

$$q(x) = 5 + (x-5)^3.$$

■

Exemplo 16

Determine o polinómio do terceiro grau cujas derivadas de ordens 0, 1, 2 e 3 no ponto 5 são todas iguais a 7.

Seja $p(x)$ o polinmio pedido. Pelo que se viu na observação 14, $p(x)$ coincide com o seu polinómio de Taylor de ordem 3 à volta do ponto $a = 5$,

$$p(x) = \mathrm{P}_{3,5}(x) = p(5) + p'(5)(x-5) + \frac{p^{(2)}(5)}{2!}(x-5)^2 + \frac{p^{(3)}(5)}{3!}(x-5)^3.$$

Do enunciado tem-se

$$p(5) = p'(5) = p^{(2)}(5) = p^{(3)}(5) = 7.$$

Então o polinómio pedido é

$$p(x) = 7 + 7(x-5) + \frac{7}{2!}(x-5)^2 + \frac{7}{3!}(x-5)^3.$$

■

6.4 Estimativa do erro

No contexto da aproximação de funções por polinómios através da fórmula de Taylor, torna-se fundamental fornecer uma estimativa para o erro cometido, definido na expressão (41). Ter-se-á $\mathrm{R}_{n,a}(x)$ positivo ou negativo, consoante o valor aproximado é menor ou maior do que o valor exacto mas, em geral, apenas nos interessa estimar a grandeza

$$|\mathrm{R}_{n,a}(x)| = |f(x) - \mathrm{P}_{n,a}(x)|\,. \tag{45}$$

Notando que $\mathrm{P}_{n,a}$ verifica as condições (31), vem

$$\mathrm{R}_{n,a}(a) = 0, \quad \mathrm{R}'_{n,a}(a) = 0, \quad \ldots, \quad \mathrm{R}^{(n)}_{n,a}(a) = 0\,. \tag{46}$$

Além disso, sendo $\mathrm{P}_{n,a}$ um polinómio de grau não superior a n, a sua derivada de ordem $n+1$ é nula, ou seja $\mathrm{P}^{(n+1)}_{n,a}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que $\mathrm{R}^{(n+1)}_{n,a}(x) = f^{(n+1)}(x)$. Assim sendo, no actual contexto da aproximação de funções por polinómios, podemos esperar que o resto de Taylor se possa especificar à custa da derivada de ordem $n+1$ de f. De facto, isto é possível, tal como se estabelece nos resultados que apresentaremos nos Teoremas 16 e 17.

Teorema 16 [Taylor-Lagrange]
Seja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^n([a,b])$ que é $n+1$ vezes derivável em $]a,b[$. Então, existe $c \in \,]a,b[$ tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\,.$$

Demonstração
Consideremos as funções auxiliares ϕ, ψ, α definidas em $[a,b]$ por

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= f(x) + f'(x)\,(b-x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}\,(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n,\\
\psi(x) &= (b-x)^{n+1},\\
\alpha(x) &= [\phi(b) - \phi(a)]\,\psi(x) - [\psi(b) - \psi(a)]\,\phi(x),
\end{aligned}$$

que são contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em $]a,b[$.

Tem-se $\alpha(a) = \alpha(b)$, pelo que podemos aplicar o Teorema de Rolle (Teorema 9) à função α no intervalo $[a,b]$. Sai que $\exists c \in \,]a,b[\colon\ \alpha'(c) = 0$, ou seja, sai que

$$\exists c \in \,]a,b[\,: \quad [\phi(b) - \phi(a)]\,\psi'(c) = [\psi(b) - \psi(a)]\,\phi'(c). \tag{47}$$

Da definição de ϕ e de ψ sai que

$$\begin{aligned}
&\phi(b) = f(b), \qquad \phi(a) = f(a) + f'(a)\,(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}\,(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(b-a)^n,\\
&\phi'(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}\,(b-x)^n, \qquad \phi'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\,(b-c)^n,\\
&\psi(a) = (b-a)^{n+1}, \qquad \psi(b) = 0,\\
&\psi'(x) = -(n+1)\,(b-x)^n, \qquad \psi'(c) = -(n+1)\,(b-c)^n.
\end{aligned}$$

Resta agora substituir estas expressões na equação (47) para provar a fórmula do Teorema 16.

■

Do teorema anterior pode obter-se o seguinte resultado de carácter mais geral.

Teorema 17 [Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange]
Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função $n+1$ vezes derivável no intervalo aberto I e a um ponto de I. Então, para cada $x \in I \backslash \{a\}$, existe $c_x \in \,]a, x[$ ou $c_x \in \,]x, a[$ tal que

$$f(x) = \mathrm{P}_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}. \tag{48}$$

Demonstração
Basta aplicar o Teorema 16 ao intervalo $[a, x]$. ■

Observação 15
A última parcela da fórmula (48) define o chamado *resto de Lagrange*. A equação (48) é conhecida por *fórmula de Taylor com resto de Lagrange*. Repare-se que o resto de Lagrange verifica a condição (39*b*) de pequenez, já que

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(c_x)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!\,(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\,(x-a) = 0.$$

São conhecidas outras formas para o resto da fórmula de Taylor, como a de Peano e a do integral (*cf.* a bibliografia recomendada), mas neste curso iremos considerar apenas o resto de Lagrange caracterizado no Teorema 17. ■

A fórmula (48) é essencial para controlar a precisão de qualquer aproximação polinomial através da fórmula de Taylor, porque permite obter uma estimativa para o erro cometido ao aproximar uma função pelo correspondente polinómio de Taylor com uma certa ordem. De facto,

$$|R_{n,a}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c_x)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}, \tag{49}$$

onde M representa o máximo de $|f^{(n+1)}|$ no intervalo de extremos a e x, desde que exista.

Exemplo 17
Calcular um valor aproximado de $\sqrt{\mathrm{e}}$ com um erro inferior a 10^{-3}.

Defina-se $f(x) = \mathrm{e}^{\,x}$, $x \in \mathbb{R}$. A fórmula de Taylor-Lagrange em torno do ponto $a = 0$ dá

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\,c_x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,,$$

com c_x entre 0 e x. Em particular, para $x = 1/2$, vem

$$\sqrt{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(1/2)^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\,c}}{(n+1)!}\,(1/2)^{n+1}\,.$$

Significa que podemos aproximar $\sqrt{\mathrm{e}}$ por $\dfrac{1}{2} + \dfrac{(1/2)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(1/2)^n}{n!}$, sendo o erro de tal aproximação dado por $\dfrac{\mathrm{e}^{\,c}}{(n+1)!}\,(1/2)^{n+1}$. Vamos então determinar n de modo a que se tenha

$$\frac{\mathrm{e}^{\,c}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 10^{-3}\,.$$

Ora, como $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, tem-se $\mathrm{e}^{\,c} \in [1, \mathrm{e}^{\,1/2}]$ e, portanto, $\mathrm{e}^{\,c} \in [1, 2]$. Basta então tomar uma ordem n tal que

$$\frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < 10^{-3}$$

ou seja, tal que

$$(n+1)!\,2^n > 10^3$$

ou ainda, tal que

$$n \geq 4.$$

Considerando $n = 4$, a aproximação pedida é dada por

$$\sqrt{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^4}{4!}$$

ou finalmente por

$$\sqrt{\mathrm{e}} = \frac{211}{128}\,.$$

■

Exemplo 18

Para cada $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$, considere a aproximação de $\operatorname{sen} x$ pelo correspondente valor do polinómio $\mathrm{P}_{7,0}(x)$. Indique a precisão dessa aproximação.

Da fórmula (36) do exemplo 14 (b), tem-se

$$\mathrm{P}_{7,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

e uma estimativa para o erro é obtida através de

$$\text{erro} \leq \left|\frac{f^{(8)}(c)}{8!}\,x^8\right|$$

Mas, pelo que vimos no exemplo 14 (b), temos $f^{(8)}(c) = \operatorname{sen} c$, e como $c \in]0, \frac{\pi}{4}[$ e o seno é crescente em $]0, \frac{\pi}{4}[$, vem

$$\text{erro} \leq \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{8!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^8 = 9,92 \times 10^{-9}$$

■

7 Primitivas

O problema central desta secção é o de, dada uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo I, determinar uma nova função $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \tag{50}$$

Trata-se do chamado problema da primitivação da função f no intervalo I. Existindo solução do problema, dizemos que f é *primitivável* em I e cada função F verificando (50) é chamada uma *primitiva* ou *antiderivadas* de f em I. Escrevemos

$$F(x) = P\Big(f(x)\Big) \qquad \text{ou} \qquad F(x) = \int f(x)dx. \tag{51}$$

Em particular, na segunda expressão de (51), o símbolo $\int$ representa um "S" alongado e "dx" é uma partícula formal usada para denotar a variável independente em relação à qual se está a primitivar. Da definição, é imediato que

$$F(x) = \int f(x)\, dx, \;\; \forall x \in I \quad \text{sse} \quad F'(x) = f(x), \;\; \forall x \in I,$$

ou seja, que

$$F \text{ é uma primitiva de } f \quad \text{sse} \quad f \text{ é a derivada de } F.$$

Fica assim claro que a primitivação é o processo inverso da derivação.

Exemplo 19
(a) A função definida por $F(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma primitiva de $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
De facto, basta atender a que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) A função definida por $F(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, é uma primitiva de $f(x) = \log x$, $x \in \mathbb{R}^+$.
Basta recordar que $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. ■

7.1 Consequências

Da definição de primitiva, extraem-se algumas consequências que passamos a enunciar.

Consequência 1
Se F é uma primitiva de f no intervalo I então toda a função

$$F(x) + \mathcal{C}, \quad x \in I, \tag{52}$$

com $\mathcal{C}$ uma constante real arbitrária, é também uma primitiva de f. ■

Basta notar que $[F(x) + \mathcal{C}]' = F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

Consequência 2
Se F_1 e F_2 são duas primitivas de f em I então $F_2(x) = F_1(x) + \mathcal{C}$, $x \in I$. ■

Basta atender a que $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, $x \in I$, e usar o teorema do valor médio de Lagrange (Corolário 2 do Teorema 10).

Observação 16

(a) Das Consequências 1 e 2 sai que, quando o problema da primitivação de uma função num intervalo é possível, ele admite uma infinidade de soluções - todas as que se obtêm de uma primitiva conhecida adicionando uma constante real arbitrária. Sendo esse o caso, a expressão geral das primitivas de f é

$$F(x) + \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} \text{ constante,}$$

onde F é uma primitiva conhecida; Escrevemos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \mathcal{C}. \tag{53}$$

(b) O problema da primitivação de uma função num intervalo pode também não possuir solução. É o que se passa, por exemplo, com a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

em qualquer intervalo e com a função

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

no intervalo $[0, 4]$. A justificação é dada pelo teorema de Darboux, Teorema 8, que estabelece que a derivada de uma função num intervalo possui a propriedade do valor intermédio e, portanto, não pode apresentar descontinuidades de salto.

(c) Mais adiante vamos abordar algumas regras de primitivação muito úteis. Convém, no entanto, registar que estas regras não permitem determinar as primitivas de todas as funções primitiváveis. Um exemplo bem conhecido (*cf.* a bibliografia recomendada) é o da função definida por e^{-x^2}, $x \in \mathbb{R}$, que, como ficará claro mais adiante, é primitivável em qualquer intervalo I e, no entanto, as regras que iremos abordar não permitem determinar as primitivas desta função. ■

Exemplo 20

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + \mathcal{C};$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + \mathcal{C}.$$ ■

7.2 Primitivas imediatas

Chamamos *primitivas imediatas* àquelas primitivas que se obtêm por simples reversão das regras de derivação, recorrendo, eventualmente, a alguns artifícios de cálculo. A partir de um quadro de derivadas do tipo

Função	*Derivada*
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
ax	a
x^k	kx^{k-1}

facilmente construimos um quadro de primitivas imediatas. Para tal, basta fazer uma troca de colunas, adicionar uma constante arbitrária aos elementos da coluna da direita e, eventualmente, ajustar constantes. Resulta

Função	*Primitiva*
e^x	$e^x + \mathcal{C}$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + \mathcal{C}$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + \mathcal{C}$
a	$ax + \mathcal{C}$
x^{k-1}	$x^k/k + \mathcal{C}$

Mais em geral, sendo $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável num intervalo I e a, α constantes reais, alguns exemplos de primitivas imediatas são:

$$(i)\ \int a\,dx = ax + \mathcal{C}\quad (a \in \mathbb{R}) \qquad (ii)\ \int f'(x) f^{\alpha}(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + \mathcal{C}\quad (\alpha \neq -1)$$

$$(iii)\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + \mathcal{C} \qquad (iv)\ \int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + \mathcal{C}\quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1)$$

$$(v)\ \int \cos(f(x)) f'(x)\,dx = \operatorname{sen}(f(x)) + \mathcal{C} \qquad (vi)\ \int \operatorname{sh}(f(x)) f'(x)\,dx = \operatorname{ch}(f(x)) + \mathcal{C}$$

É assim possível construir uma tabela de primitivas imediatas (Apêncice 1 deste capítulo) que mais não é do que uma lista de regras obtidas por leitura revertida de regras de derivação. Em cada caso, pôs-se dentro do sinal $\int \cdots dx$ uma "expressão" na forma de "derivada de alguma função". A tabela diz-nos, no segundo membro, qual é essa função. Por exemplo, a regra *(vi)* afirma que a primitiva de uma "expressão" do tipo $\operatorname{sh}(f(x))\, f'(x)$ é igual a $\operatorname{ch}(f(x)) + \mathcal{C}$; isto acontece porque a derivada de $\operatorname{ch}(f(x)) + \mathcal{C}$ é precisamente igual a $\operatorname{sh}(f(x)) f'(x)$. Para que a tabela seja útil, devemos ser capazes de traduzir a "expressão" a primitivar numa das formas contempladas na tabela dentro do símbolo $\int \cdots dx$. Este passo representa a única dificuldade do processo de primitivação imediata. Ele requer um conhecimento razoável das regras de derivação.

Exemplo 21 [Primitivas imediatas]

1. $\displaystyle\int (-\operatorname{sen} x)(\cos x)^5\, dx = \frac{(\cos x)^6}{6} + \mathcal{C}.$ [Regra 4. da tabela]

2. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int \frac{e^x}{1+(\mathrm{e}^{\,x})^2}\, dx = \operatorname{arctg}(e^x) + \mathcal{C}.$ [Regra 15. da tabela]

3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{7+e^x}\, dx = \log\left(7+e^x\right) + \mathcal{C}.$ [Regra 3 da tabela]

4. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt[4]{(5+e^x)^3}}\, dx = \int e^x(5+e^x)^{-3/4}\, dx = \frac{(5+e^x)^{-3/4+1}}{-3/4+1} + \mathcal{C}$

$\displaystyle = 4\sqrt[4]{5+e^x} + \mathcal{C}.$ [Regra 4 da tabela]

■

7.3 Regras de primitivação

O cálculo das primitivas de uma função baseia-se num conjunto de regras, as chamadas *regras de primitivação*, que se obtêm a partir das regras de derivação.

A. Regra de primitivação por decomposição

Resulta da regra da derivação da soma de funções e da regra de derivação do produto de uma função por uma constante. Se u e v são funções deriváveis e α e β são constantes reais, então

$$[\alpha u(x) + \beta v(x)]' = \alpha u'(x) + \beta v'(x). \tag{54}$$

Em termos de primitivas, a regra (54) traduz-se por

$$\int \big[\alpha u'(x) + \beta v'(x)\big]\, dx = \alpha u(x) + \beta v(x) + \mathcal{C}.$$

Pondo, mais em geral, $u'(x) = f(x)$, $v'(x) = g(x)$ e $u(x) = F(x)$, $v(x) = G(x)$, com F e G primitivas de f e de g, respectivamente, e atendendo a que

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C}, \qquad \int g(x)dx = G(x) + \mathcal{C},$$

vem

$$\int \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + \mathcal{C}.$$

Podemos então estabelecer o seguinte resultado.

Conclusão A [Primitivação por decomposição]
Sejam f e g funções primitiváveis num intervalo I e α, β duas constantes reais.. Então $\alpha f + \beta g$ é primitivável em I, tendo-se

$$\int \big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big] dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx\,. \tag{55}$$

Exemplo 22

$$\int\left(5\cos x-\frac{2}{5}e^x+\frac{3\,\mathrm{sen}\,x}{1+\cos^2 x}\right)dx=5\int\cos x\,dx-\frac{2}{5}\int e^x\,dx-3\int\frac{-\,\mathrm{sen}\,x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$=5\,\mathrm{sen}\,x-\frac{2}{5}e^x-3\,\mathrm{arctg}(\cos x)+\mathcal{C} \qquad \blacksquare$$

B. Regra de primitivação por partes

Resulta da regra de derivação de um produto de funções. Se u e v são funções deriváveis, então

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x). \tag{56}$$

Em termos de primitivas, podemos traduzir a igualdade (56) por

$$\int\big[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\big]\,dx=u(x)v(x)+\mathcal{C}.$$

Numa forma mais útil, do que se viu em 7.3A., podemos escrever

$$\int u'(x)v(x)dx=u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)dx+\mathcal{C}.$$

Pondo agora $u'(x)=f(x)$, $v(x)=g(x)$, $u(x)=F(x)$, onde F é uma primitiva de f, sai

$$\int f(x)g(x)dx=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)dx,$$

ou ainda,

$$\int f(x)g(x)dx=\left(\int f(x)dx\right)g(x)-\int\left(\int f(x)dx\right)g'(x)dx. \tag{57}$$

Podemos então estabelecer a seguinte conclusão.

Conclusão B [Primitivação por partes]
Sejam $f\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ primitivável, $F\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ uma primitiva de f e $g\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ derivável, tais que o produto Fg' é primitivável em I. Então fg é primitivável em I, tendo-se

$$\int f(x)g(x)dx=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)dx. \tag{58}$$

Podemos ler a fórmula (58) da seguinte forma: *a primitiva de um produto é igual à primitiva do primeiro factor a multiplicar pelo segundo factor, menos a primitiva do novo produto que resulta de multiplicar o factor que já está primitivado pela derivada do segundo factor.* A regra de primitivação expressa na fórmula (58) evidencia que a primitiva de um produto pode ser calculada em dua partes: na primeira, primitiva-se apenas o primeiro factor, que depois é multiplicado pelo segundo; na segunda parte, primitiva-se o produto da função que já está primitivada pela derivada do segundo factor.

Observação 17

(a) Para que o método de primitivação por partes tenha sucesso, pelo menos um dos factores deve ter primitiva imediata; o método resulta quando se sabe primitivar o produto que aparece na segunda parte (*cf.* o exemplo 23 (a)).

(b) Em geral, conhecendo a primitiva de ambos os factores, escolhe-se para primeiro aquele que menos se simplifica a derivar (*cf.* o exemplo 23 (b)).

(c) O método de primitivação por partes pode ser aplicado com suceso para primitivar uma função que não tem primitiva imediata, digamos $f(x)$, interpretando-a como o produto $1f(x)$ e começando por primitivar o factor 1,

$$\int f(x)dx = \int 1f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx = \cdots \tag{59}$$

Este é o processo habitualmente utilizado para primitivar, por exemplo, logarítmos, arcos trigonométricos e argumentos hiperbólicos (*cf.* o exemplo 23 (c)).

(d) Ao aplicar o método de primitivação por partes duas ou mais vezes sucessivas, é frequente reencontrarmos a primitiva inicial afectada de um certo coeficiente (diferente de 1). A primitiva proposta pode ser obtida como solução de uma equação cuja incógnita é precisamente essa primitiva (*cf.* o exemplo 23 (d)). ■

Exemplo 23

(a) $$\int x \log x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + \mathcal{C}.$$

Repare-se que o factor $\log x$ não possui primitiva imediata. Devemos, portanto, primitivar primeiro o factor x.

(b) $$\int xe^x dx = x\,e^x - \int e^x dx = x\,e^x - e^x + \mathcal{C}.$$

Aqui conhecemos a primitiva de ambos os factores. Mas o polinómio "complica-se" quando primitivado, porque aumenta de grau, e simplifica-se quando derivado. É então conveniente guardá-lo para segundo factor.

(c) $$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x\,dx &= \int 1 \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int x\,\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

O arco-tangente não tem primitiva imediata, mas foi muito simples usar o método de primitivação por partes para o primitivar.

(d) $$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx\right) \\ &= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.\end{aligned}$$

Então podemos escrever

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x dx$$

e resolvendo esta última equação a respeito da incógnita $\int \mathrm{e}^{\,x} \operatorname{sen} x dx$, resulta

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{e^x}{2}\,(\operatorname{sen} x - \cos x) + \mathcal{C}. \qquad \blacksquare$$

C. Regra de primitivação por substituição

Resulta da regra de derivação de uma função composta. Se u e v são funções deriváveis e a composta $u \circ v$ está bem definida, então

$$[u\,(v(t))]' = u'\,(v(t))\,v'(t). \tag{60}$$

Em termos de primitivas, podemos escrever

$$\int u'\,(v(t))\,v'(t)\,dt = u\,(v(t)) + \mathcal{C}.$$

Pondo $u'(x)\!=\!f(x)$, $u(x)\!=\!F(x)$, $v(x)\!=\!g(x)$ e $v'(x)\!=\!g'(x)$, onde F é uma primitiva de f, vem

$$\int f\,(g(t))\,g'(t) = F\,(g(t)) + \mathcal{C}. \tag{61}$$

A expressão (61) pode adquirir uma forma mais útil, atendendo a que $F(g(t))+\mathcal{C}$ indica uma primitiva genérica de $f(x)$ calculada em $x\!=\!g(t)$. De facto, podemos escrever

$$\int f\,(g(t))\,g'(t) = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)}, \tag{62}$$

mas a expressão (62) ainda não é bem o que nos interessa. No entanto, tendo em conta que, em geral, o problema que nos é proposto é o de calcular $\int f(x)\,dx$, basta então desfazer a substituição $x = g(t)$ na fórmula (62), através de $t = g^{-1}(x)$. Legitimando as "manobras" anteriores, a conclusão é a seguinte.

Conclusão B [Primitivação por substituição]
Sejam $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável no intervalo I, F uma primitiva de f em I, e $g\colon J \longrightarrow I$ uma função bijectiva com derivada não nula em cada ponto de J. Então $F \circ g$ é uma primitiva de $(f \circ g)\,g'$ em J, tendo-se

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f\,(g(t))\,g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)}. \tag{63}$$

A expressão (63) exprime a regra de primitivação por substituição de variável. Mais concretamente, ela indica que o cálculo da primitiva de $f(x)$ pode ser efectuado da seguinte forma:

- faz-se a substituição $x = g(t)$;
- calcula-se depois a nova primitiva $\displaystyle\int f(g(t))\, g'(t)\, dt$;
- desfaz-se a substituição, regressando à variável inicial x, através de $t = g^{-1}(x)$.

Observação 18
Em geral, aplica-se o método de primitivação por substituição quando não se sabe primitivar a função dada por outro processo, ou ainda quando o cálculo da primitiva dada se simplifica significativamente. O sucesso do método depende, obviamente, da substituição adoptada. A dificuldade está em intuir uma substituição adequada para a primitiva que nos é proposta. Para a escolha da substituição, podemos recorrer a uma tabela onde se listam substituições de sucesso para os casos mais importantes (Apêndice 2 deste capítulo). ■

Exemplo 24

(a) Para calcular $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$, faça-se a substituição definida por $x-1 = t^2,\ t \geq 0$. Vem $x = 1+t^2,\ t \geq 0$, e no âmbito da fórmula (63), tem-se $g(t) = 1+t^2$. Então $g'(t) = 2t$ e somos conduzidos ao cálculo da nova primitiva,

$$\int (1+t^2)\sqrt{t^2}\, 2t\, dt = 2\int (t^2+t^4)\, dt = \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + \mathcal{C}.$$

Para regressar à variável x, desfaz-se a substituição, notando que $t = \sqrt{x-1}$ com $x \geq 1$, uma vez que $t \geq 0$. Resulta finalmente

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \mathcal{C}.$$

(b) Para calcular $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, faça-se a substituição $x = \cos t$, com $t \in [0,\pi]$. Neste caso, tem-se $g(t) = \cos t$ e $g'(t) = -\operatorname{sen} t$, para $t \in [0,\pi]$. Calculemos então

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\operatorname{sen} t)\, dt &= -\int \operatorname{sen}^2 t\, dt = -\int \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int (\cos 2t - 1)\, dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\, \cos t - \frac{1}{2}t + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Para regressar à variável x, atenda-se a que $x = \cos t,\ t \in [0,\pi] \Leftrightarrow t = \arccos x$, $x \in [-1,1]$ e a que, para $t \in [0,\pi]$, $\cos t = x \Leftrightarrow \operatorname{sen} t = \sqrt{1-x^2}$, uma vez que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Então

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arccos x + \mathcal{C}.$$

(c) Para calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, faça-se $x = t^2$, $t > 0$. Depois de introduzir a substituição, caimos numa primitiva que podemos determinar recorrendo ao método de primitivação por partes. Vem

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arcsen} t}{t}\,2t\,dt &= 2\int \operatorname{arcsen} t\,dt \;=\; 2\int 1\ \operatorname{arcsen} t\,dt \\
&= 2\left(t\ \operatorname{arcsen} t - \int t\,\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right) \\
&= 2t\ \operatorname{arcsen} t + \int (-2t)(1-t^2)^{-1/2}\,dt \\
&= 2t\ \operatorname{arcsen} t + 2\sqrt{1-t^2} + \mathcal{C},
\end{aligned}$$

donde, regressando à variável x, resulta

$$\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ \operatorname{arcsen}\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + \mathcal{C}.$$

(d) Para calcular $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$, faça-se $x = t^6$, $t \geq 0$. A solução é

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx \;=\;& \frac{3}{5}\,x^{5/3} - \frac{3}{4}\,x^{4/3} - \frac{6}{7}\,x^{7/6} + x + \frac{6}{5}\,x^{5/6} - \frac{3}{2}\,x^{2/3} \\
& -2\,x^{1/2} + 6\,x^{1/6} - 3\log\left(1+x^{1/3}\right) - 6\ \operatorname{arctg}(x^{1/6}) + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

(e) Para calcular $\displaystyle\int x\,\sqrt[4]{1+x}$, faça-se $1+x = t^4$, $t \geq 0$. Vem

$$\int x\,\sqrt[4]{1+x} = \frac{4}{9}\,\sqrt[4]{(1+x)^9} - \frac{4}{5}\,\sqrt[4]{(1+x)^5} + \mathcal{C}.$$

■

7.4 Primitivação de funções racionais

A primitivação de funções definidas como quociente de polinómios (funções racionais),

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{x\in\mathbb{R}:\ Q(x) = 0\}\,, \tag{64}$$

é feita com uma técnica muito própria que se baseia na decomposição da fracção $P(x)/Q(x)$ em fracções mais simples, ditas *elementares*. Para obter uma tal decomposição, é crucial a determinação dos zeros do polinómio Q, bem como a especificação da natureza e da multiplicidade de cada zero. Omitindo aqui alguns resultados sobre polinómios, passemos à descrição desta técnica.

Passo 1 Divisão dos polinómios (nem sempre é necessário).

Se $\operatorname{grau} Q \geq \operatorname{grau} P$ então efectua-se a divisão dos dois polinómios. Resulta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; S(x) \;+\; \frac{R(x)}{Q(x)}\,, \tag{65}$$

onde S e R são polinómios e $\operatorname{grau} R < \operatorname{grau} Q$. A fracção $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ deve agora ser decomposta, como virá explicado nos passos seguintes.

Passo 2 Decomposição de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ em fracções simples.

(a) Determinam-se os zeros de Q, atendendo a que:

- se Q é um polinómio de grau n então Q possui exactamente n zeros, que podem ser reais ou complexos;
- os zeros complexos ocorrem sempre aos pares de conjugados, isto é, se $a + bi$ é um zero de Q então $a - bi$ também é um zero de Q;
- cada zero de Q pode ser *simples* ou de *multiplicidade um*, quando anula Q mas não anula a sua derivada Q', e pode ser *múltiplo* com *multiplicidade* $k > 1$, quando anula Q e todas as suas derivadas até à ordem $k - 1$ mas não anula a derivada de ordem k;
- o polinómio Q possui o zero real $x = a$ com multiplicidade $k \geq 1$ se, na factorização de Q, o factor $(x - a)$ ocorre exactamente k vezes;
- o polinómio Q possui o par de zeros complexos $x = a \pm b\imath$ com multiplicidade $k \geq 1$ se, na factorização de Q, o factor $[(x-a)^2 + b^2]^k$ ocorre exactamente k vezes.

(b) Decompõe-se $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ numa soma de fracções simples, com base nos zeros de Q encontrados em (a), atendendo a que:

- cada zero real $x = a$, com multiplicidade k, contribui com k fracções simples da forma

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}\,,\quad \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}\,,\quad \cdots\,,\quad \frac{A_k}{x-a}\,, \tag{66}$$

  onde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são constantes reais a determinar;

- cada par de zeros complexos conjugados $x = a \pm b\imath$, com multiplicidade k, contribui com k fracções simples da forma

$$\frac{P_1x + Q_1}{[(x-a)^2+b^2]^k}\,,\quad \frac{P_2x + Q_2}{[(x-a)^2+b^2]^{k-1}}\,,\quad \cdots\,,\quad \frac{P_kx + Q_k}{(x-a)^2+b^2} \tag{67}$$

  onde $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_k, Q_k$ são constantes reais a determinar.

(c) Calculam-se as constantes A_i, P_i, Q_i que figuram nos numeradores das fracções simples (66) e (67), recorrendo ao chamado método dos *coeficientes indeterminados*, que virá exposto nos exemplos que se apresentam a seguir. Na prática, recorre-se muitas vezes a outras regras bastante simples que, conjugadas com o método anterior, simpificam significativamente os cálculos a efectuar[1].

Passo 3 Cálculo das primitivas.

O cálculo da primitiva inicial é efectuado a partir do que se viu nos passos anteriores, nomeadamente, a partir da expressão (65), onde $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ se escreve como uma soma de parcelas dos tipos (66) e (67). Então

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int S(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx\,,$$

onde a primeira primitiva no segundo membro é imediata, por se tratar de um polinómio, e a segunda primitiva é a soma das primitivas das fracções simples envolvidas na decomposição. Todas as fracções da forma (66) têm primitiva imediata (regra 4. da potância e regra 3. do logarítmo). As fracções da forma (67) podem ser primitivadas através de uma substituição de variável. A última, em particular, pode ser tratada como primitiva imediata, depois de algumas manipulações algébricas (regra 15. do arco-tangente). ■

Exemplo 25

1. Calcular $\displaystyle\int \frac{2x^5-4x^4+4x^3-4x^2+3x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$.

   Passo 1 Neste caso, grau $P=5$ e grau $Q=4$, pelo que é necessário efectuar a divisão dos dois polinómios. Resulta

$$\frac{2x^5-4x^4+4x^3-4x^2+3x}{(x^2+1)(x-1)^2} = 2x + \frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,.$$

   Passo 2 Vamos decompor a fracção no segundo membro da última equação em fracções simples.

   (a) Os zeros de $Q(x)=(x^2+1)(x-1)^2$ são:
   $x=1$, real com multiplicidade 2;
   $x=\pm i$, complexos conjugados com multiplicidade 1.

[1]Para a descrição de outras regras práticas, consultar, por exemplo, o livro *Princípios de Análise Matemática Aplicada* de Jaime Carvalho e Silva (McGraw Hill, 1994).

(b) A fracção decompõe-se numa soma de três fracções simples, duas delas associadas ao zero real de multiplicidade 2 e a outra associada ao par de complexos conjugados de multiplicidade 1,

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{Px+Q}{x^2+1}\,, \tag{68}$$

onde A_1, A_2, P e Q são constantes a determinar.

(c) Da equação (68), reduzindo ao mesmo denominador, sai que

$$\begin{aligned} x &= A_1(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + (Px+Q)(x-1)^2 \\ &= (A_2+P)x^3 + (A_1-A_2-2P+Q)x^2 + (A_2+P-2Q)x + (A_1-A_2+Q), \end{aligned}$$

donde

$$A_2+P=0\,, \quad A_1-A_2-2P+Q=0\,, \quad A_2+P-2Q=1\,, \quad A_1-A_2+Q=0,$$

e, portanto

$$A_1 = \frac{1}{2}\,, \quad A_2 = 0\,, \quad P = 0\,, \quad Q = -\frac{1}{2}\,. \tag{69}$$

A concluir este segundo passo, da equação (68) e das expressões (69), resulta

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}\,.$$

Passo 3 Do que se viu anteriormente, sai

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^5-4x^4+4x^3-4x^2+3x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx &= \int 2x\,dx + \int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx \\ &= \int 2x\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= x^2 - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-x}\,dx$.

Passo 1 Não é necessário dividir os polinómios.

Passo 2 Obter $\displaystyle\frac{4x^2+x+1}{x^3-x} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1}$.

Passo 3 Resulta $\displaystyle\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-x}\,dx = \log \frac{|x-1|^3\,(x+1)^2}{|x|} + \mathcal{C}.$

3. Calcular $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$

Passo 1 Não é necessário dividir os polinómios.

Passo 2 Obter $\displaystyle\frac{x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{-x}{x^2+1}$.

Passo 3 Resulta

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+2)^2}\,dx = \log\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} + \mathcal{C}.$$

■

Tabela de primitivas imediatas

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Primitivas Imediatas

Na lista de primitivas que se segue, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável no intervalo I e $\mathcal{C}$ denota uma constante real arbitrária. Adoptou-se a notação f para $f(x)$

1. $\displaystyle\int a\,dx = ax + \mathcal{C}$

2. $\displaystyle\int f' f^{\alpha}\,dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C} \quad (\alpha \neq -1)$

3. $\displaystyle\int \frac{f'}{f}\,dx = \log|f| + \mathcal{C}$

4. $\displaystyle\int a^f f'\,dx = \frac{a^f}{\log a} + \mathcal{C} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash 1)$

5. $\displaystyle\int f' \cos f\,dx = \operatorname{sen} f + \mathcal{C}$

6. $\displaystyle\int f' \operatorname{sen} f\,dx = -\cos f + \mathcal{C}$

7. $\displaystyle\int \frac{f'}{\cos^2 f}\,dx = \operatorname{tg} f + \mathcal{C}$

8. $\displaystyle\int \frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}\,dx = -\operatorname{cotg} f + \mathcal{C}$

9. $\displaystyle\int f' \operatorname{tg} f\,dx = -\log\,|\cos f| + \mathcal{C}$

10. $\displaystyle\int f' \operatorname{cotg} f\,dx = \log\,|\operatorname{sen} f| + \mathcal{C}$

11. $\displaystyle\int \frac{f'}{\cos f}\,dx = \log\left|\frac{1}{\cos f} + \operatorname{tg} f\right| + \mathcal{C}$

12. $\displaystyle\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f + \mathcal{C}$

13. $\displaystyle\int \frac{f'}{\operatorname{sen} f}\,dx = \log\left|\frac{1}{\operatorname{sen} f} - \operatorname{cotg} f\right| + \mathcal{C}$

14. $\displaystyle\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\,dx = \arccos f + \mathcal{C}$

15. $\displaystyle\int \frac{f'}{1+f^2}\,dx = \operatorname{arctg} f + \mathcal{C}$

16. $\displaystyle\int \frac{-f'}{1+f^2}\,dx = \operatorname{arccotg} f + \mathcal{C}$

17. $\displaystyle\int f' \operatorname{ch} f\,dx = \operatorname{sh} f + \mathcal{C}$

18. $\displaystyle\int f' \operatorname{sh} f\,dx = \operatorname{ch} f + \mathcal{C}$

19. $\displaystyle\int \frac{f'}{\operatorname{ch}^2 f}\,dx = \operatorname{th} f + \mathcal{C}$

20. $\displaystyle\int \frac{f'}{\operatorname{sh}^2 f}\,dx = -\coth f + \mathcal{C}$

21. $\displaystyle\int \frac{f'}{\sqrt{f^2+1}}\,dx = \operatorname{argsh} f + \mathcal{C}$

22. $\displaystyle\int \frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}\,dx = \operatorname{argch} f + \mathcal{C}$

23. $\displaystyle\int \frac{f'}{1-f^2}\,dx = \operatorname{argth} f + \mathcal{C}$

24. $\displaystyle\int \frac{f'}{1-f^2}\,dx = \operatorname{argcoth} f + \mathcal{C}$

Tabela de substituições

Primitivas por Substituição

Na lista de substituições que se segue, a, b e c são constantes reais arbitrárias. A notação $R(\cdots)$ indica uma função racional dos monómios que se encontram dentro dos parêntesis. Na coluna da esquerda, figuram diferentes tipos de funções primitiváveis Na coluna da direita sugere-se, em cada caso, uma substituição adequada à função indicada na coluna da esquerda.

Tipo de Função	Substituição
1. $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^k}$, $k \in \mathbb{N},\ k > 1$	$x = a \operatorname{tg} t$
2. $\dfrac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^k}$, $k \in \mathbb{N},\ k > 1,\ b^2 - 4ac < 0$ onde $P(x)$ é um polinómio de grau inferior a $2k$	$ax + \dfrac{b}{2} = t$
3. $\dfrac{P(x)}{[(x-p)^2+q^2]^k}$, $k \in \mathbb{N},\ k > 1$ onde $P(x)$ é um polinómio de grau inferior a $2k$	$x = p + qt$
4. $R(a^{rx},\, a^{sx},\, \ldots)$	$a^{mx} = t$ com $m = \text{m.d.c.}(r, s, \ldots)$
5. $R(\log_a x)$	$t = \log_a x$
6. $R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}, \ldots\right)$	$\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^m$ com $m = \text{m.m.c.}(q, s, \ldots)$
7. $R\left(x, (ax+b)^{p/q},\, (ax+b)^{r/s}, \ldots\right)$	$(ax+b) = t^m$ com $m = \text{m.m.c.}(q, s, \ldots)$
8. $R\left(x, x^{p/q},\, x^{r/s}, \ldots\right)$	$x = t^m$ com $m = \text{m.m.c.}(q, s, \ldots)$
9. $R\left(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2}\right)$	$x = \dfrac{a}{b} \operatorname{sen} t$ ou $x = \dfrac{a}{b} \cos t$ ou $x = \dfrac{a}{b} \operatorname{th} t$
10. $R\left(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right)$	$x = \dfrac{a}{b} \operatorname{tg} t$ ou $x = \dfrac{a}{b} \operatorname{sh} t$
11. $R\left(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right)$	$x = \dfrac{a}{b} \sec t$ ou $x = \dfrac{a}{b} \operatorname{ch} t$
12. $R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a - bx}\right)$	$x = \dfrac{a}{b} \operatorname{sen}^2 t$ ou $x = \dfrac{a}{b} \cos^2 t$
13. $R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a + bx}\right)$	$x = \dfrac{a}{b} \operatorname{tg}^2 t$

Tipo de Função	Substituição
14. $R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{bx-a}\right)$	$x = \dfrac{a}{b}\sec^2 t$
15. $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$	se $a>0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+t$ se $c>0$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+tx$ se $ax^2+bx+c = a(x-r_1)(x-r_2)$ faz-se $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_1)t$ ou $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_2)t$
16. $x^m(a+bx^n)^{p/q}$	se $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a+bx^n = t^q$ se $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a+bx^n = x^n t^q$
17. $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ com	
(a) R ímpar em $\operatorname{sen} x$ isto é $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\cos x = t$
(b) R ímpar em $\cos x$ isto é $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\operatorname{sen} x = t$
(c) R par em $(\operatorname{sen} x, \cos x)$ isto é $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$\operatorname{tg} x = t$, sendo então (supondo $x \in]0, \pi/2[$) $\operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
(d) nos restantes casos (e até nos anteriores)	$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, sendo $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
18. $R(\operatorname{sen} mx, \cos mx)$	$mx = t$
19. $R(e^x \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	$x = \log t$
20. $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ com	
(a) R ímpar em $\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x = t$
(b) R ímpar em $\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x = t$
(c) R par em $(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	$\operatorname{th} x = t$, sendo $\operatorname{sh} x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
(d) nos restantes casos (e até nos anteriores)	$\operatorname{th}\dfrac{x}{2} = t$, sendo $\operatorname{sh} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$
21. $R(\operatorname{sh} mx, \operatorname{ch} mx)$	$mx = t$