Folha 10A – Séries numéricas (parte 1)

1. a) $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2$

Não se trata de uma série geométrica, já que o quociente entre dois termos consecutivos não é constante.

Esta série diverge porque $\lim_n (n^2) = +\infty$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-(5n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^5}\right)^n$

Trata-se, de facto, de uma série geométrica de razão $R = \frac{1}{3^5}$, logo convergente, cujo primeiro termo é $u_1 = \frac{1}{3}$.

Reparando que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^5}\right)^n = 1 + \frac{1}{3^5} + \left(\frac{1}{3^5}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3^5}} = \frac{3^5}{3^5-1},$$

conclui-se que a série dada possui soma

$$S = \frac{1}{3}\,\frac{3^5}{3^5-1} = \frac{3^4}{3^5-1}.$$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

Esta não é uma série geométrica, mas resulta de combinar duas séries geométricas, já que

$$\frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

onde

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é convergente com soma

$$S_1 = \frac{1}{1-R} = \frac{1}{1-1/3} \Rightarrow$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ é convergente com soma

$$S_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

2. a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n}$

Esta expressão representará uma série telescópica se o termo geral, $\frac{1}{n^2+2n}$, se puder escrever como diferença de dois termos de uma mesma sucessão. Para tal, vejamos que

$$n^2+2n = n\,(n+2)$$

pelo que é de esperar que existam constantes A e B tais que

$$\frac{1}{n^2+2n} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+2}.$$

Daqui,

$$1 = A(n+2) - Bn$$
$$1 = (A-B)n + 2A$$

donde

$$\begin{cases} A-B=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{cases}.$$

Então

$$\frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)},$$

tratando-se, de facto, de uma série telescópica. Estudemos agora a série dada, escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)} \right).$$

Para a sucessão das somas parciais, vem

$$S_n = \left(\underline{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \left(\underline{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{8}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{10}}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\cancel{\frac{1}{2(n-2)}} - \cancel{\frac{1}{2n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2(n-1)}} - \underline{\frac{1}{2(n+1)}}\right)$$
$$+ \left(\cancel{\frac{1}{2n}} - \underline{\frac{1}{2(n+2)}}\right)$$

ou seja,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$$

donde

$$\lim_n S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Consequentemente, a série dada converge e tem soma $S = \frac{3}{4}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Procuramos constantes A e B tais que

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} - \frac{B}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(n+2) - Bn \quad \Rightarrow \quad 1 = (A-B)n + 2A$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A-B=0 \\ 2A = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{cases}$$

Então a série dada pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \right),$$

tendo-se

$$S_n = \left(\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{12}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{12}} - \cancel{\frac{1}{24}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{24}} - \cancel{\frac{1}{40}}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\cancel{\frac{1}{2(n-1)n}} - \cancel{\frac{1}{2n(n+1)}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2n(n+1)}} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4}.$$

Consequentemente, a série converge e tem soma $S = \frac{1}{4}$.

3. a) $u_n = \dfrac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$

$\lim_n u_n = \lim_n \left(\dfrac{n}{n+1}\right) = 1,$

pelo que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{n+1}$ é divergente (condição necessária de convergência, ou condição suficiente de divergência, ou teste da divergência).

b) $w_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$ Há duas versões deste exercício. Ver no final a resolução da outra versão.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ par} \\ 1 & \text{se } n = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ -1 & \text{se } n = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{cases}$$

Então não existe $\lim_n \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

Novamente pela condição necessária de convergência, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ é divergente.

4. a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ Série de termos positivos.

Vamos comparar com a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$, através do 2º Critério de Comparação.

Temos

$$\lim_n \frac{\frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2+1}} = \lim_n \sqrt{\frac{n^4}{n^4+n^2+1}}$$

$$= 1 \ (\neq 0, \neq +\infty).$$

Então a série dada tem a mesma natureza que a série harmónica, logo é divergente.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ Série de termos positivos.

Como

$$\ln n > 1, \ \forall n \geq 3$$

vem

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}, \ \forall n \geq 3.$$

Como a série harmónica, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, é divergente, pelo 1º Critério de Comparação, concluimos que a série apresentada também é divergente.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^n}{n!}}_{u_n}$ Série de termos positivos.

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{e^n} = \lim_n \frac{e \ n!}{(n+1)n!}$$

$$= \lim_n \frac{e}{n+1} = 0 < 1.$$

Pelo Critério da razão (D'Alembert), a série converge.

d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{e^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{u_n}$ série de termos positivos.

$$\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n \sqrt[n]{e^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \lim_n \frac{e\,n}{n+1} = e > 1$$

Pelo Critério da Raiz (Cauchy), a série dada é divergente.

5. $(u_n)_n$, com $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (1+u_n)$ diverge.

De facto, $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1+u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$

e, se existir $\lim_n (1+u_n) = \ell$, então ter-se-á $\ell \geq 1$.
Pela condição necessária de convergência, a série diverge.

b) $(u_n)_n$ decrescente $\Rightarrow \sum \frac{1}{n+u_n}$ divergente.

Como $(u_n)_n$ é monótona e limitada, pq sendo decrescente com termos positivos, tem-se

$$0 < u_n \leq u_1, \forall n \in \mathbb{N},$$

conclui-se que $(u_n)_n$ é convergente, existindo $\ell = \lim_n u_n$.

Vamos então comparar com a série harmónica (2º Critério de Comparação):

$$\lim_n \frac{\frac{1}{n+u_n}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{n}{n+u_n} = \lim_n \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\underbrace{\frac{u_n}{n}}_{0}} = 1$$

Logo a série dada é da mesma natureza que a série harmónica e, portanto, é divergente.

c) $\lim_n (n u_n) = +\infty \Rightarrow \sum u_n$ é divergente.

- $\lim_n (n u_n) = +\infty \Leftrightarrow \lim_n \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = +\infty$

Pelo 2º Critério de Comparação, como $\sum \frac{1}{n}$ é divergente, conclui-se que $\sum u_n$ também é divergente.

d) $\lim_n (n^2 u_n) = 0 \Rightarrow \sum u_n$ é convergente

- $\lim_n (n^2 u_n) = 0 \Rightarrow \lim_n \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = 0$

Pelo 2º Critério de Comparação, como $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente, conclui-se que a série dada também é convergente.

Resolução da segunda versão de 3b).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)$$

Como $\operatorname{sen}\left(\frac{n^2\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n^2 \text{ é par } (n \text{ par}), \\ 1 \text{ ou } -1 & \text{se } n^2 \text{ é ímpar } (n \text{ ímp}), \end{cases}$

conclui-se que não existe $\lim_n \operatorname{sen}\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)$.

Então, pela condição necessária de convergência, resulta que a série apresentada é divergente.