

# Capítulo V

## Integração

Neste capítulo vamos apresentar a noção de integral segundo Riemann, estudar algumas das suas propriedades e referir algumas das suas aplicações. Começamos com uma motivação intuitiva clássica, baseada na noção de área de uma região plana e no chamado “método da exaustão”.

### 1 Introdução e motivação

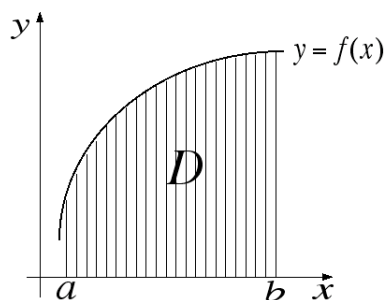
Classicamente, o conceito de integral aparece associado à noção intuitiva de área de uma região plana. Nós vamos seguir a via clássica para motivar a nossa exposição.

Considere-se uma função limitada  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  e sejam

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{e} \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x). \quad (1)$$

Suponhamos que  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , e consideremos a região plana (*cf.* a Figura 1)

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\} \quad (2)$$



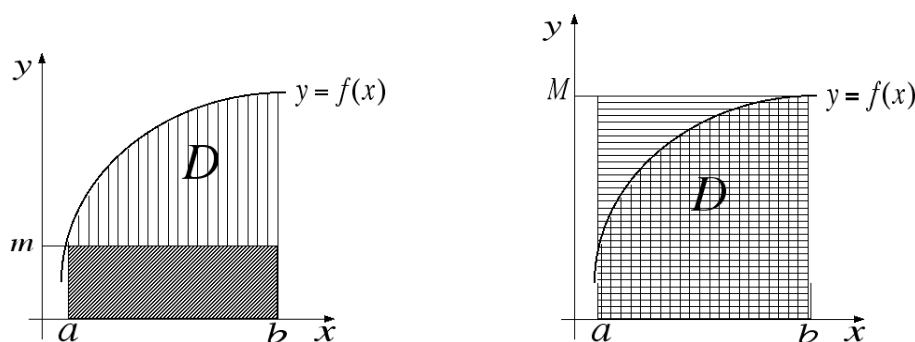
**Figura 1:** Região  $\mathcal{D}$  limitada pelo gráfico de  $f$ , pelo eixo  $OX$  e pelas rectas  $x = a$  e  $x = b$ .

Admitamos que é possível atribuir uma área ao conjunto  $\mathcal{D}$ , que representamos por área $\mathcal{D}$ , e que pretendemos determinar o valor desta área. Em geral, a forma geométrica de  $\mathcal{D}$  é pouco “regular”, pelo que as fórmulas da geometria elementar não são aplicáveis. Podemos pensar então em recorrer ao chamado “método da exaustão”, aproximando sucessivamente a área de  $\mathcal{D}$  pela área de figuras simples, quer inscritas em  $\mathcal{D}$ , quer circunscritas a  $\mathcal{D}$ , e considerar depois as melhores aproximações. Consideraremos apenas regiões rectangulares. Com as regiões inscritas em  $\mathcal{D}$  formaremos aproximações por *defeito*, e com as regiões circunscritas a  $\mathcal{D}$  formaremos aproximações por *excesso*.

É fácil reconhecer que

$$m(b-a) \leq \text{área}(\mathcal{D}) \leq M(b-a)$$

já que  $m(b-a)$  dá a área da região rectangular (*cf.* a Figura 2, à esquerda) de base  $b-a$  e altura  $m$ , inscrita em  $\mathcal{D}$ , enquanto que  $M(b-a)$  dá a área da região rectangular (*cf.* a Figura 2, à direita) de base  $b-a$  e altura  $M$ , circunscrita a  $\mathcal{D}$ . Então poderíamos encarar os números  $m(b-a)$  e  $M(b-a)$  como aproximações do valor da área de  $\mathcal{D}$ , por defeito e por excesso, respectivamente. É claro que, em geral, o erro cometido nestas aproximações é bastante grande, sendo também possível melhorá-las significativamente.



**Figura 2:** Primeiras aproximações para a área de  $\mathcal{D}$ ; por defeito (esquerda) e por excesso (direita).

Para melhorar estas aproximações, podemos proceder da seguinte forma:

- decompomos o intervalo  $[a, b]$  num número finito de subintervalos determinados pelos pontos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ , tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

a que chamamos *partição*  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  nos subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n];$$

- em cada subintervalo genérico,  $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ , repetimos o procedimento adoptado anteriormente, isto é definimos

$$m_i = \inf_{x \in J_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in J_i} f(x) \quad (3)$$

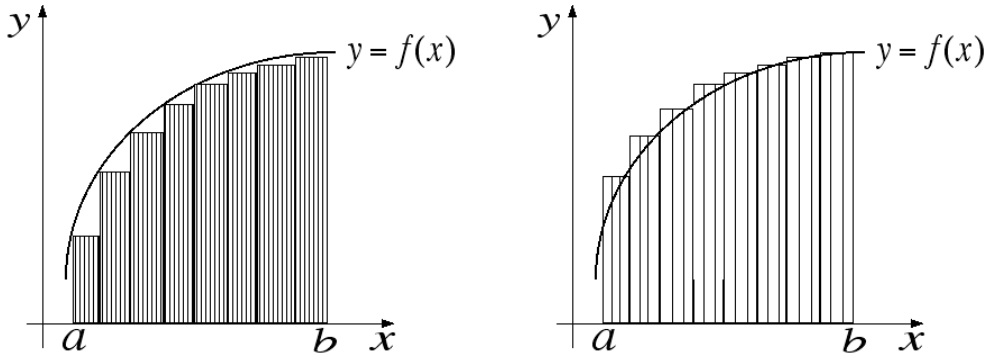
e consideramos as regiões rectangulares de base  $x_i - x_{i-1}$  e alturas  $m_i$  e  $M_i$ , respectivamente;

- com as regiões de alturas  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , construímos uma região poligonal inscrita em  $\mathcal{D}$  (Figura 3, à esquerda), cuja área é dada por

$$s(\mathcal{P}) = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(b - x_{n-1}), \quad (4a)$$

e com as regiões de alturas  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , construímos uma região poligonal circunscrita a  $\mathcal{D}$  (Figura 3, à direita), cuja área é dada por

$$S(\mathcal{P}) = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(b - x_{n-1}); \quad (4b)$$



**Figura 3:** Aproximações por defeito (esquerda) e por excesso (direita) da área de  $\mathcal{D}$ .

- aproximamos a área de  $\mathcal{D}$ , por defeito com a quantidade  $s(\mathcal{P})$  e por excesso com a quantidade  $S(\mathcal{P})$ , tendo-se para qualquer partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ ,

$$m(b - a) \leq s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P}) \leq M(b - a); \quad (5)$$

- melhoramos as aproximações  $s(\mathcal{P})$  e  $S(\mathcal{P})$ , aumentando o número de subintervalos em  $[a, b]$ , ou seja, introduzindo uma partição *mais fina* do que  $\mathcal{P}$ , digamos  $\mathcal{Q}$ ; se chamarmos  $s(\mathcal{Q})$  e  $S(\mathcal{Q})$  às aproximações correspondentes, por defeito e por excesso, respectivamente, não é difícil reconhecer que

$$m(b - a) \leq s(\mathcal{P}) \leq s(\mathcal{Q}) \leq S(\mathcal{Q}) \leq S(\mathcal{P}) \leq M(b - a), \quad (6)$$

uma vez que, aumentando o número de pontos em  $[a, b]$ , as aproximações por defeito e por excesso não podem piorar e, portanto, a primeira não pode diminuir nem a última pode aumentar;

- pelas condições (5) e (6), resulta que são limitados os conjuntos constituídos por todas as aproximações por defeito e por todas as aproximações por excesso, pelo que podemos considerar, no conjunto  $\Gamma$  de todas as partições de  $[a, b]$ , as quantidades

$$s = \sup_{\mathcal{P} \in \Gamma} s(\mathcal{P}) \quad \text{e} \quad S = \inf_{\mathcal{P} \in \Gamma} S(\mathcal{P}) \quad (7)$$

que mais não são do que as melhores aproximações, por defeito e por excesso, respectivamente, para o valor da área de  $\mathcal{D}$ ;

- no caso em que, de facto, é possível atribuir uma área à região  $\mathcal{D}$ , as quantidades  $s$  e  $S$  definidas em (7) tenderão ambas a “confundir-se” uma com a outra (mostra-se que, naquele caso, existe um único número real  $\alpha$  tal que  $s(\mathcal{P}) \leq \alpha \leq S(\mathcal{P})$ , para toda a partição  $\mathcal{P}$ ; cf. a bibliografia recomendada). ■

### Exemplo 1

(a) Seja  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ , para todo  $x$  em certo intervalo  $[a, b]$ .

Independentemente da partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  em subintervalos  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , tem-se, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$m_i = \inf_{x \in J_i} f(x) = 0, \quad M_i = \sup_{x \in J_i} f(x) = 1$$

pelo que

$$s(\mathcal{P}) = 0, \quad S(\mathcal{P}) = 1 \times (x_1 - a) + 1 \times (x_2 - x_1) + \dots + 1 \times (b - x_{n-1}) = b - a.$$

Então  $s = 0$  e  $S = b - a$ , não sendo possível, neste caso, atribuir uma área à região  $\mathcal{D}$  associada à função  $f$ .

(b) Seja  $g(x) = k$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , com  $k$  uma constante e  $x$  em certo intervalo  $[a, b]$ .

Dada uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ , qualquer, em subintervalos  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , teremos, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$m_i = \inf_{x \in J_i} g(x) = k, \quad M_i = \sup_{x \in J_i} g(x) = k,$$

pelo que

$$s(\mathcal{P}) = S(\mathcal{P}) = k(b - a).$$

Então  $s = k(b - a)$  e  $S = k(b - a)$ , sendo possível, neste caso, atribuir à região  $\mathcal{D}$  a área  $k(b - a)$ . ■

Passemos agora à exposição rigorosa deste assunto, formalizando adequadamente as ideias intuitivas que acabamos de expor. A área da região  $\mathcal{D}$  vai dar lugar ao *integral de  $f$  em  $[a, b]$* , cada quantidade  $s(\mathcal{P})$ , que aproxima por defeito a área de  $\mathcal{D}$ , vai dar lugar a uma *soma inferior*, cada quantidade  $S(\mathcal{P})$ , que aproxima por excesso a área de  $\mathcal{D}$ , vai dar lugar a uma *soma superior*, o supremo  $s$  dará lugar ao *integral inferior de  $f$  em  $[a, b]$* , e o ínfimo  $S$  dará lugar ao *integral superior de  $f$  em  $[a, b]$* .

## 2 Definição de integral

Nesta secção apresentaremos a definição de integral segundo Riemann. Adoptando as notações introduzidas na secção anterior, podemos introduzir as seguintes definições.

A – Somas inferior e superior de Darboux

Dada uma partição  $\mathcal{P}$  do intervalo  $[a, b]$ , definimos a *soma inferior de Darboux* de  $f$  relativa a  $\mathcal{P}$  por

$$s(f; \mathcal{P}) = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(b - x_{n-1}) \quad (8a)$$

e a *soma superior de Darboux* de  $f$  relativa a  $\mathcal{P}$  por

$$S(f; \mathcal{P}) = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(b - x_{n-1}). \quad (8b)$$

As somas inferior e superior satisfazem o seguinte resultado.

### Teorema 1

Sejam  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  duas partições de  $[a, b]$  com  $\mathcal{Q}$  mais fina do que  $\mathcal{P}$ . Então

$$s(f; \mathcal{Q}) \geq s(f; \mathcal{P}) \quad \text{e} \quad S(f; \mathcal{Q}) \leq S(f; \mathcal{P}). \quad (9)$$

#### Demonstração

Vamos provar apenas o caso relativo às somas inferiores. O outro é semelhante.

Sejam  $t_0, t_1, \dots, t_n$  os pontos introduzidos em  $[a, b]$  pela partição  $\mathcal{P}$ .

Consideremos, em primeiro lugar, o caso mais simples em que  $\mathcal{Q}$  se obtém de  $\mathcal{P}$  juntando apenas um ponto, digamos  $q \in ]t_{j-1}, t_j[$ , para algum  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Sejam

$$m^* = \inf_{x \in [t_{j-1}, q]} f(x), \quad m^\dagger = \inf_{x \in [q, t_j]} f(x), \quad \text{e} \quad m_j = \inf_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x).$$

Tem-se

$$m_j \leq m^* \quad \text{e} \quad m_j \leq m^\dagger,$$

pelo que

$$\begin{aligned} s(f; \mathcal{Q}) - s(f; \mathcal{P}) &= m^*(q - t_{j-1}) + m^\dagger(t_j - q) - m_j(t_j - t_{j-1}) \\ &= m^*(q - t_{j-1}) + m^\dagger(t_j - q) - m_j(t_j - q + q - t_{j-1}) \\ &= (m^* - m_j)(q - t_{j-1}) + (m^\dagger - m_j)(t_j - q) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

e, portanto,  $s(f; \mathcal{Q}) \geq s(f; \mathcal{P})$ .

No caso em que  $\mathcal{Q}$  se obtém de  $\mathcal{P}$  juntando  $p$  pontos, este processo deve ser repetido  $p$  vezes. ■

Do Teorema 1 extrai-se a seguinte consequência.

### Corolário 1

Sejam  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  duas partições de  $[a, b]$ . Então

$$s(f; \mathcal{Q}) \leq S(f; \mathcal{P}). \quad (10)$$

*Demonstração*

Consideremos a partição  $\mathcal{R}$  que se obtém considerando os pontos envolvidos nas partições  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$ . Assim,  $\mathcal{R}$  é mais fina do que  $\mathcal{P}$  e do que  $\mathcal{Q}$ . Pelo Teorema 1, resulta que

$$s(f; \mathcal{Q}) \leq s(f; \mathcal{R}) \leq S(f; \mathcal{R}) \leq S(f; \mathcal{P}). \quad \blacksquare$$

Conjugando os resultados do Teorema 1 e do seu Corolário 1, concluímos que, se  $\mathcal{Q}$  for uma partição de  $[a, b]$  mais fina do que  $\mathcal{P}$ , então

$$m(b-a) \leq s(f; \mathcal{P}) \leq s(f; \mathcal{Q}) \leq S(f; \mathcal{Q}) \leq S(f; \mathcal{P}) \leq M(b-a). \quad (11)$$

**B – Integrais inferior e superior**

Considerando o conjunto  $\Gamma$  constituído pela totalidade das partições do intervalo  $[a, b]$ , definimos o *integral inferior* de  $f$  em  $[a, b]$  por

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\mathcal{P} \in \Gamma} s(f; \mathcal{P}), \quad (12a)$$

e o *integral superior* de  $f$  em  $[a, b]$  por

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{\mathcal{P} \in \Gamma} S(f; \mathcal{P}). \quad (12b)$$

Os integrais inferior e superior satisfazem o seguinte resultado.

**Teorema 2**

Sejam  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $\mathcal{P}$  uma partição de  $[a, b]$ . Então

$$m(b-a) \leq s(f; \mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(f; \mathcal{P}) \leq M(b-a), \quad (13)$$

onde  $m$  e  $M$  representam o ínfimo e o supremo, respectivamente, de  $f$  em  $[a, b]$ .

*Demonstração*

A primeira e a última condições são consequência imediata do resultado estabelecido em (11). Por outro lado, a segunda e a penúltima condições resultam das definições (12a) e (12b), respectivamente. Quanto à terceira condição, ela resulta das definições (12a) e (12b) em termos de ínfimo e supremo e do facto de se ter  $s(f; \mathcal{P}) \leq S(f; \mathcal{P})$ ,  $\forall \mathcal{P} \in \Gamma$ . ■

**C – Integrabilidade de  $f$**

Segundo Riemann, dizemos que  $f$  é *integrável* no intervalo  $[a, b]$  quando

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (14)$$

Ao valor comum aos dois integrais chama-se *integral* de  $f$  em  $[a, b]$  e representa-se por<sup>1</sup>

$$\int_a^b f(x) dx,$$

onde  $f$  é a *função integranda*,  $a$  é o *limite inferior do integral*,  $b$  é o *limite superior do integral*,  $[a, b]$  é o *intervalo de integração* e  $x$  é a *variável de integração*. O símbolo  $dx$  representa uma partícula formal que fixa a variável de integração.

### Teorema 3

Seja  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a)  $f$  é *integrável* em  $[a, b]$ ;
- (b) dado arbitrariamente  $\delta > 0$ , existem partições  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  de  $[a, b]$  tais que

$$S(f; \mathcal{Q}) - s(f; \mathcal{R}) < \delta;$$

- (c) dado arbitrariamente  $\delta > 0$ , existe uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  tal que

$$S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) < \delta;$$

#### Demonstração

(a) $\Rightarrow$ (b). Sendo  $f$  integrável em  $[a, b]$ , tem-se

$$\sup_{\mathcal{P} \in \Gamma} s(f; \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P} \in \Gamma} S(f; \mathcal{P}) = \int_a^b f(x) dx.$$

Então, dado  $\delta > 0$ , arbitrário, é possível refinar as partições de  $[a, b]$  e encontrar duas, digamos  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$ , tais que

$$\sup_{\mathcal{P} \in \Gamma} s(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{R}) < \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad S(f; \mathcal{Q}) - \inf_{\mathcal{P} \in \Gamma} S(f; \mathcal{P}) < \frac{\delta}{2}$$

ou seja, tais que

$$s(f; \mathcal{R}) > \int_a^b f(x) dx - \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad S(f; \mathcal{Q}) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\delta}{2},$$

donde se obtém o resultado de (b).

(b) $\Rightarrow$ (c). Basta considerar uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  que envolva, pelo menos, os pontos das partições  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  e usar o resultado de (11) que dá

$$S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) < S(f; \mathcal{Q}) - s(f; \mathcal{R}) < \delta.$$

(c) $\Rightarrow$ (a). Se  $f$  não fosse integrável em  $[a, b]$ , ter-se ia obviamente

$$\int_a^{-b} f(x) dx > \int_{-a}^b f(x) dx$$

---

<sup>1</sup>Também se diz *integral definido* de  $f$  em  $[a, b]$ .

e considerando

$$\delta = \int_a^{-b} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

viria então, para qualquer partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ ,

$$S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) \geq \int_a^{-b} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \delta,$$

o que contraria a hipótese. ■

## Exemplo 2

Relativamente às funções consideradas no Exemplo 1, podemos concluir que:

(a) a função  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  não é integrável em intervalo algum  $[a, b]$ , já que

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^{-b} f(x) dx = b - a.$$

(b) A função  $g(x) = k$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , com  $k$  uma constante real, é integrável em qualquer intervalo  $[a, b]$ , porque

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^{-b} g(x) dx = k(b - a),$$

donde

$$\int_a^b g(x) dx = k(b - a). \quad \text{■}$$

## D – Significado geométrico atribuído ao integral

No caso de uma função limitada e não negativa,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , ser integrável, a existência de integral traduz a possibilidade de medir a região  $\mathcal{D}$  definida em (2). Por essa razão, pomos, por definição,

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x) dx. \quad (15)$$

## Observação 1

Só se define integral de uma função limitada, mas nem toda a função limitada é integrável (veja-se o Exemplo 2 (a)). Mais adiante, identificaremos algumas classes de funções limitadas que são integráveis. ■

## Observação 2 [Definição alternativa de integral]

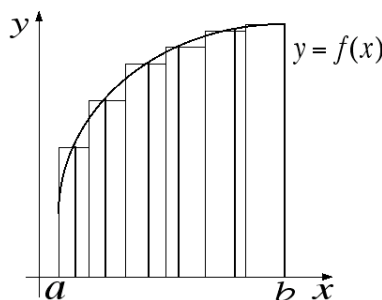
Vamos aqui descrever muito brevemente uma definição alternativa para o integral de  $f$  em  $[a, b]$ , recorrendo às chamadas *somas de Riemann*. Do ponto de vista intuitivo, e apelando novamente à noção de área, se  $f$  for uma função não negativa, para cada



partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ , vamos aproximar a área da região  $\mathcal{D}$  (cf. a Figura 1) por uma soma do tipo

$$\Sigma(f; \mathcal{P}) = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_n)(b - x_{n-1}), \quad (16)$$

onde cada  $c_i$  é um ponto escolhido arbitrariamente no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  determinado por  $\mathcal{P}$  (cf. a Figura 4).



**Figura 4:** Representação geométrica de uma soma de Riemann.

Dada uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ , chamamos amplitude de  $\mathcal{P}$  ao maior dos comprimentos dos subintervalos determinados por  $\mathcal{P}$  em  $[a, b]$ . Representámo-la por  $|\mathcal{P}|$ . A qualquer soma do tipo (16) chamamos *soma de Riemann* de  $f$  em  $[a, b]$  para a partição  $\mathcal{P}$ . O integral de  $f$  em  $[a, b]$  pode ser definido de forma equivalente à que apresentámos anteriormente, em termos das somas de Riemann. De facto, mostra-se que (cf. a bibliografia recomendada) a função  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , tendo-se

$$\int_a^b f(x) dx = \mathcal{I},$$

se e só se

$$\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \Sigma(f; \mathcal{P}) = \mathcal{I}, \quad (17a)$$

no sentido de que

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : |\mathcal{P}| < \varepsilon \implies |\Sigma(f; \mathcal{P}) - \mathcal{I}| < \delta, \quad (17b)$$

independentemente da escolha dos pontos  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . ■

A definição alternativa apresentada na Observação 2 para o integral de Riemann será usada de maneira crucial na Secção 7, onde analisaremos aplicações do integral ao cálculo de volumes e de comprimentos de curva.

### 3 Propriedades do integral

Nesta secção vamos apresentar algumas propriedades do integral que se revelarão extremamente úteis. Para a demonstração destas propriedades, consultar a bibliografia recomendada.

**Propriedade 1** [Aditividade do integral a respeito do intervalo de integração]

Sejam  $f$  limitada em  $[a, b]$  e  $c \in ]a, b[$ . Então  $f$  é integrável em  $[a, b]$  se e só se  $f$  integrável separadamente em  $[a, c]$  e  $[c, b]$ , tendo-se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (18)$$

■

No sentido de estender a Propriedade 1 a todos os reais  $a, b, c$ , adoptamos as seguintes convenções clássicas

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}, \quad (19a)$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad \text{para todos } a, b \in \mathbb{R}. \quad (19b)$$

**Propriedade 2** [Linearidade do integral]

Sejam  $f$  e  $g$  funções integráveis em  $[a, b]$ . Então:

(a) a soma  $f + g$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx; \quad (20)$$

(b) o produto  $fg$  é integrável em  $[a, b]$ ; em particular, se  $\alpha$  é uma constante real arbitrária, o produto  $\alpha f$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx. \quad (21)$$

■

**Propriedade 3**

Sejam  $f$  e  $g$  funções integráveis em  $[a, b]$ . Se  $|g(x)| \geq k > 0, \forall x \in [a, b]$ , então a função  $1/g$  é limitada e o quociente  $f/g$  é integrável. ■

**Propriedade 4** [Monotonia do integral]

Se  $f$  e  $g$  são integráveis em  $[a, b]$  e  $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx; \quad (22)$$

em particular, se  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ , então  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**Propriedade 5**

Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$  então a função  $|f|$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right|. \quad (23)$$

**Propriedade 6**

- (a) Se  $f$  é limitada em  $[a, b]$ , anulando-se em todos os pontos de  $[a, b]$  excepto, eventualmente, num número finito de pontos de  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = 0; \quad (24a)$$

- (b) se  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e  $g$  é uma função que difere de  $f$  apenas num número finito de pontos  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (24b)$$

**4 Condições suficientes de integrabilidade**

Nesta secção enunciaremos alguns resultados que estabelecem condições suficientes para a integrabilidade de uma função num intervalo, a partir dos quais identificaremos três classes de funções integráveis (Teoremas 4, 5 e 6).

**Teorema 4** [Integrabilidade das funções contínuas]

Se  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  é contínua então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

*Demonstração*

Vamos recorrer ao Teorema 3, nomeadamente ao facto de (c) implicar (a).

Seja  $\delta > 0$ , arbitrário. Sendo  $f$  contínua em cada  $x \in [a, b]$ ,

$$\exists \varepsilon > 0 : (y \in [a, b] \wedge |x - y| < \varepsilon) \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{b - a}.$$

Em geral,  $\varepsilon$  depende do ponto  $x$  e de  $\delta$  mas, por  $[a, b]$  ser fechado e limitado, é possível<sup>2</sup> fixar o mesmo  $\varepsilon$  para todos os pontos  $x \in [a, b]$ , tendo-se apenas  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ .

Consideremos agora uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  determinada por pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tais que  $x_i - x_{i-1} < \varepsilon$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . Em cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , o ínfimo e o supremo de  $f$  são atingidos porque  $f$  é contínua (Teorema de Weierstrass, Capítulo 2), pelo que existem  $\alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$m_i = f(\alpha_i) \quad \text{e} \quad M_i = f(\beta_i), \quad \text{com} \quad |\beta_i - \alpha_i| < \varepsilon,$$

---

<sup>2</sup>Facto que não demonstraremos.

tendo-se, para a partição  $\mathcal{P}$  considerada,

$$\begin{aligned} s(f; \mathcal{P}) &= f(\alpha_1)(x_1 - a) + f(\alpha_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\alpha_n)(b - x_{n-1}), \\ S(f; \mathcal{P}) &= f(\beta_1)(x_1 - a) + f(\beta_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\beta_n)(b - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Da continuidade de  $f$ , sai que  $|f(\beta_i) - f(\alpha_i)| = f(\beta_i) - f(\alpha_i) < \frac{\delta}{b-a}$ , donde

$$\begin{aligned} S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) &= [f(\beta_1) - f(\alpha_1)](x_1 - a) + \cdots + [f(\beta_n) - f(\alpha_n)](b - x_{n-1}) \\ &< \frac{\delta}{b-a} (x_1 - a) + \frac{\delta}{b-a} (x_2 - x_1) + \cdots + \frac{\delta}{b-a} (b - x_n) \\ &= \frac{\delta}{b-a} (x_1 - a + x_2 - x_1 + \cdots + b - x_{n-1}) \\ &= \frac{\delta}{b-a} (-a + b) = \delta. \end{aligned}$$

Consequentemente,  $f$  é integrável em  $[a, b]$ . ■

### Observação 3

O Teorema 4 estabelece que a continuidade de uma função garante a sua integrabilidade. No entanto, é conveniente reter que existem funções descontínuas que são integráveis. ■

### Teorema 5 [Integrabilidade das funções monótonas]

Se  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  é monótona então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

#### *Demonstração*

Se  $f$  é constante então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , como se viu no Exemplo 2 (b).

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $f$  é crescente em  $[a, b]$ .

Vamos recorrer novamente ao Teorema 3, parte (c)  $\Rightarrow$  (a).

Seja  $\delta > 0$ , arbitrário, e consideremos uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  determinada por pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tais que  $x_i - x_{i-1} < \frac{\delta}{f(b) - f(a)}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . Como  $f$  é crescente em  $[a, b]$ , tem-se, em cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,

$$m_i = f(x_{i-1}) \quad \text{e} \quad M_i = f(x_i),$$

donde

$$\begin{aligned} s(f; \mathcal{P}) &= f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}), \\ S(f; \mathcal{P}) &= f(x_1)(x_1 - a) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(b)(b - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) &= [f(x_1) - f(a)](x_1 - a) + \cdots + [f(b) - f(x_{n-1})](b - x_{n-1}) \\ &< \frac{\delta}{f(b) - f(a)} [f(x_1) - f(a) + \cdots + f(b) - f(x_{n-1})] \\ &= \frac{\delta}{f(b) - f(a)} [-f(a) + f(b)] = \delta \end{aligned}$$

e  $f$  é integrável em  $[a, b]$ . ■

#### Observação 4

Do Teorema 5, podemos concluir que, ainda que uma função não seja contínua, se for monótona, então é também integrável. Mais uma vez, chama-se a atenção para o facto de existirem funções que não são monótonas (nem contínuas) e, mesmo assim, são integráveis. ■

#### Teorema 6 [Integrabilidade das funções com um número finito de descontinuidades]

Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada possuindo um número finito de descontinuidades então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ . ■

##### Demonstração

Começemos por considerar o caso em que  $f$  possui apenas uma descontinuidade em  $x = a$ . Neste caso,  $f$  não é constante em  $[a, b]$ , pelo que  $M > m$ .

Fixemos arbitrariamente  $\delta > 0$ . Consideremos um ponto  $c \in ]a, b[$  tal que  $c - a < \frac{\delta}{2(M - m)}$ .

Como  $f$  é contínua em  $[c, b]$ ,  $f$  é integrável em  $[c, b]$  e, pelo Teorema 3, existe uma partição  $\mathcal{Q}$  de  $[c, b]$  determinada por pontos

$$c = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tal que  $S(f; \mathcal{Q}) - s(f; \mathcal{Q}) < \frac{\delta}{2}$ . Consideremos agora a partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  determinada pelos pontos de  $\mathcal{Q}$  e ainda pelo ponto  $a$ ,

$$a = x_0 < c = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

e sejam

$$m_1 = \inf_{x \in [a, c]} f(x) \quad \text{e} \quad M_1 = \sup_{x \in [a, c]} f(x).$$

Tem-se, obviamente,

$$m_1 \geq m \quad \text{e} \quad M_1 \leq M.$$

Para esta partição  $\mathcal{P}$ , vem

$$\begin{aligned} s(f; \mathcal{P}) &= m_1(c - a) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(b - x_{n-1}) \\ &= m_1(c - a) + s(f; \mathcal{Q}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f; \mathcal{P}) &= M_1(c - a) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_n(b - x_{n-1}) \\ &= M_1(c - a) + S(f; \mathcal{Q}) \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) &= (M_1 - m_1)(c - a) + S(f; \mathcal{Q}) - s(f; \mathcal{Q}) \\ &< (M - m)(c - a) + \frac{\delta}{2} \\ &< (M - m) \frac{\delta}{2(M - m)} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3, a função  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

No caso em que  $f$  possui apenas uma descontinuidade em  $b$ , a demonstração é semelhante.

Finalmente, no caso mais geral em que  $f$  possui um número finito de descontinuidades, decompõe-se  $[a, b]$  num número finito de subintervalos de forma a que cada um deles possua, quando muito, uma descontinuidade num dos extremos, e repete-se o raciocínio utilizado anteriormente. ■

Mostra-se ainda que, se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada possuindo uma quantidade numerável de descontinuidades então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

### Exemplo 3

A função  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{se } x \in [2, 4] \end{cases}$  é integrável por ser contínua (Teorema 4 e Propriedade 1). ■

### Exemplo 4

A função  $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0, 1] \\ -x & \text{se } x \in ]1, 3] \\ x^2 & \text{se } x \in ]3, 5] \end{cases}$  é integrável por possuir um número finito de descontinuidades (Teorema 5). ■

### Exemplo 5

A função  $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$  definida em  $[0, 1]$ , possui um número infinito de descontinuidades (todos os pontos da forma  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , são pontos de descontinuidade de  $h$ ). No entanto,  $h$  é integrável por ser monótona (ou por possuir uma quantidade numerável de descontinuidades). (Teorema 6). ■

## 5 O Teorema fundamental do cálculo

Um dos resultados mais notáveis do Cálculo está patente no teorema que agora iremos apresentar. Nele estabelece-se uma ligação crucial entre os conceitos de derivada e de integral, a partir da qual é possível obter um processo extremamente eficaz para o cálculo do integral, dispensando o recurso à definição apresentada na Secção 1.

Consideremos uma função limitada  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que é integrável. Para cada  $x \in [a, b]$ ,  $f$  é integrável em  $[a, x]$ , pelo que podemos definir uma nova função,  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , a partir da função  $f$ , pondo

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (25)$$

Vejamos que a passagem ao integral conduz a uma função que possui, em geral, melhores propriedades do que a função inicial. De facto, valem as seguintes propriedades.

### Propriedade 7

A função  $F$  definida em (25) é contínua (ainda que  $f$  não o seja).

#### *Demonstração*

Vamos demonstrar que  $F$  é contínua em cada  $c \in [a, b]$ , verificando primeiro que  $\lim_{x \rightarrow c^+} F(x) = F(c)$ , através da definição de limite lateral. Seja  $\delta > 0$ , arbitrário. Temos

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(c)| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \right| = \left| \int_c^x f(t) dt \right| \leq \int_c^x |f(t)| dt \\
&\leq \int_c^x L dt, && \text{porque } f \text{ é limitada e, portanto, } \exists L > 0 : |f(x)| \leq L, \\
&= L(x - c) && \text{cf. o Exemplo 2 (b),}
\end{aligned}$$

pelo que, para cada  $\delta$ , tomando  $\varepsilon = \delta/L$ , teremos  $0 < x - c < \varepsilon \implies |F(x) - F(c)| < \delta$ .

De maneira análoga, mostraríamos que  $\lim_{x \rightarrow c^-} F(x) = F(c)$ . ■

Repare-se que, o facto de  $f$  ser limitada em  $[a, b]$  foi suficiente para mostrar que  $F$  é contínua em  $[a, b]$  e, portanto, também limitada (Teorema de Weierstrass). Agora vamos ver que, se  $f$  for contínua (além de limitada), então  $F$  será derivável (além de contínua).

**Teorema 7** [Teorema Fundamental do Cálculo]

Seja  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então a função  $F: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  definida pela expressão (25) é derivável em  $[a, b]$ , tendo-se

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

*Demonstração*

Vamos demonstrar apenas que  $F'_+(x_0) = f(x_0)$ , para cada  $x_0 \in [a, b[$ , ou seja que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

mostrando que

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0: \quad 0 < h < \varepsilon \implies \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \delta. \quad (26)$$

Dado  $\delta > 0$ , como  $f$  é contínua em  $x_0$ ,

$$\exists \alpha > 0: \quad |y - x_0| < \alpha \implies |f(y) - f(x_0)| < \delta. \quad (27)$$

Mas

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{h} \left| \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt - hf(x_0) \right| \\
&= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - hf(x_0) \right| \\
&= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt \right| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \delta dt = \delta,
\end{aligned}$$

onde se usou o resultado de (27), por  $f$  ser contínua em  $x_0$ , sendo suficiente que  $h \leq \alpha$ , uma vez que  $t \in [x_0, x_0 + h]$ . Consequentemente, basta tomar  $\varepsilon = \alpha$  para que a condição (26) seja verificada.

De modo perfeitamente análogo, se mostraria que  $F'_-(x_0) = f(x_0)$ , para cada  $x_0 \in ]a, b]$ . ■

### Corolário 1

Toda a função contínua  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  possui primitiva em  $[a, b]$ .

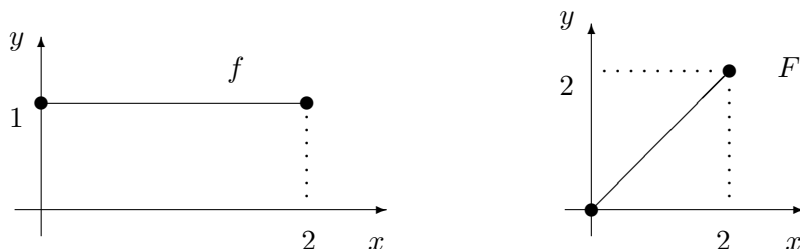
### Demonstração

De facto, qualquer função da forma  $F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$  constitui uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ . ■

### Observação 5

Quando  $f$  não é contínua, mantendo-se integrável, define-se na mesma a função  $F$  como em (25). Contudo,  $F$  pode não ser derivável, ou então, até ser derivável mas a sua derivada não coincidir com  $f$  nos pontos de descontinuidade de  $f$  (Exemplos 6, 7, 8 e 9).

### Exemplo 6

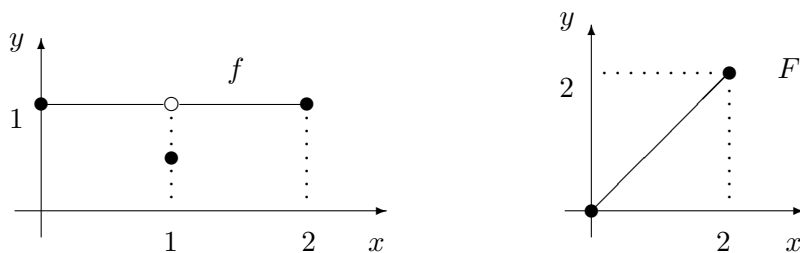


$f$  é contínua, logo integrável (Teorema 4) e primitivável (Teorema 7).

Define-se a função  $F$ , que é derivável. Além disso,

$$f(x) = 1 \implies F(x) = \int_0^x 1 dt = x, \forall x \in [0, 2].$$
 ■

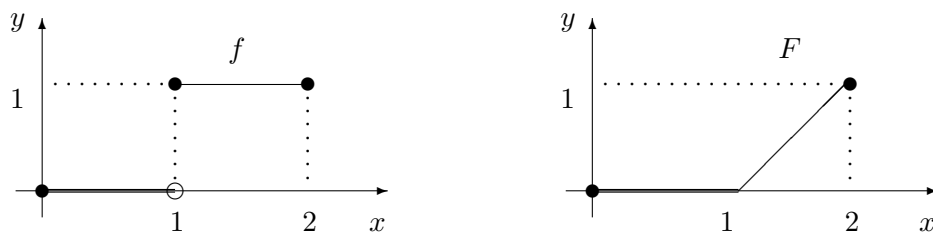
### Exemplo 7



$f$  possui uma descontinuidade removível em 1, logo é integrável (Teorema 6). No entanto,  $f$  não é primitivável (isto é,  $f$  não é a derivada de função alguma em  $[0, 2]$  (Teorema 8 de Darboux, Capítulo 4). Mesmo assim, a integrabilidade de  $f$  em  $[0, 2]$  é suficiente para que se possa definir a função  $F$ , como em (25). Como a função  $f$  deste Exemplo 7 difere da função  $f$  do Exemplo 6 apenas no ponto 1, os integrais das duas são iguais (Propriedade 6), pelo que  $F(x) = x, \forall x \in [0, 2]$ . Além disso,  $F$  é obviamente derivável, com  $F'(x) = 1, \forall x \in [0, 2]$ . Acontece, porém, que a derivada de  $F$  em 1 difere de  $f(1)$ . ■



### Exemplo 8



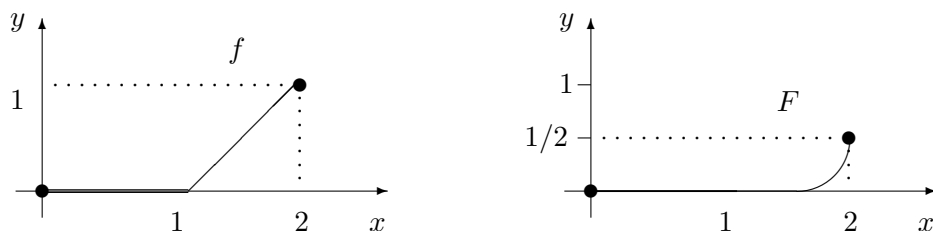
$f$  é limitada mas possui uma descontinuidade de salto no ponto 1. Logo  $f$  é integrável (Teorema 6) mas não é primitivável. Define-se novamente a função  $F$ , como em (25), e vem

$$x \in [0, 1[ \implies f(x) = 0 \implies F(x) = \int_0^x 0 \, dt = 0,$$

$$x \in [1, 2] \implies f(x) = 1 \implies F(x) = \int_1^x 1 \, dt = x - 1,$$

atestando a continuidade de  $F$ . No entanto  $F$  não é derivável em 1. ■

### Exemplo 9



Neste caso,  $f$  é contínua, logo é integrável (Teorema 4) e primitivável (Teorema 7), mas não é derivável em 1. Para a função  $F$ , que deverá ser derivável, vem

$$x \in [0, 1] \implies f(x) = 0 \implies F(x) = \int_0^x 0 \, dt = 0,$$

$$x \in [1, 2] \implies f(x) = x - 1 \implies F(x) = \int_1^x (t - 1) \, dt \stackrel{(*)}{=} \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2},$$

(\*) aceitemos esta igualdade que, por enquanto, não é clara.

confirmando-se, de facto, que se trata de uma função derivável. ■

Do ponto de vista do cálculo do integral de uma função, a consequência mais relevante que se extrai do Teorema 7 é a que se apresenta a seguir.

### Teorema 8 [Fórmula de Barrow]

Sejam  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $G$  uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ . Então

$$\int_a^b f(t) \, dt = G(b) - G(a). \quad (28)$$

■

### Demonstração

Ponha-se  $F(x) = \int_a^b f(x) dx$ . Como  $F$  e  $G$  são duas primitivas de  $f$  em  $[a, b]$ , então

$$G(x) = F(x) + \mathcal{C}, \quad x \in [a, b], \quad \mathcal{C} \text{ constante.}$$

Em particular, para  $x = a$ , vem

$$G(a) = F(a) + \mathcal{C} \implies \mathcal{C} = G(a),$$

pelo que

$$G(x) = F(x) + G(a), \quad x \in [a, b].$$

Para  $x = b$ , vem

$$G(b) = F(b) + G(a) \implies F(b) = G(b) - G(a)$$

ficando, assim, justificada a igualdade (28). ■

### Notação

Para traduzir a identidade (28), usamos a notação  $\int_a^b f(t) dt = \left[ G(x) \right]_a^b$ . ■

O Teorema 8 fornece um processo extremamente útil para o cálculo do integral de uma função num intervalo, onde ela possua primitiva. Basta fazer a diferença entre os valores da primitiva nos extremos de integração.

### Exemplo 10

$$(a) \int_0^\pi \sin x dx = \left[ -\cos x \right]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

$$(b) \text{ Se } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 3 & \text{se } x \in ]1, 2] \end{cases} \text{ então } \int_0^2 f(x) dx \stackrel{\text{Prop. 6(b)}}{=} \int_0^1 1 dx + \int_1^2 3 dx \\ = \left[ x \right]_0^1 + \left[ 3x \right]_1^2 = (1 - 0) + (6 - 3) = 4.$$

$$(c) \int_{-5}^3 |x| dx = \int_{-5}^0 (-x) dx + \int_0^3 x dx = -\frac{1}{2} \left[ x^2 \right]_{-5}^0 + \frac{1}{2} \left[ x^2 \right]_0^3 = \frac{25}{2} + \frac{9}{2} = 7.$$

$$(d) \int_0^5 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \left[ \log(x^2 + 1) \right]_0^5 = \frac{1}{2} (\log 26 - \log 1) = \log \sqrt{26}.$$

$$(e) \text{ Se } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ x - 3 & \text{se } 3 < x \leq 6 \end{cases} \text{ então, novamente pela Propriedade 6 (b), vem}$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) dx &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 2 dx + \int_3^6 (x - 3) dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ 2x \right]_1^3 + \left[ \frac{x^2}{2} - 3x \right]_3^6 = \frac{1}{3} + (6 - 2) + \left( 0 + \frac{9}{2} \right) = \frac{53}{6}. \end{aligned}$$

**Consequência 1** [Derivação sob o sinal de integral]

Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  uma função derivável. Então  $f$  é integrável, em particular, entre  $a$  e  $\varphi(x)$ , tendo-se

$$\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = F(\varphi(x)) - F(a).$$

Pelo teorema da derivação de funções compostas, Teorema 4 do Capítulo 4, sai então

$$\left( \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right)' = F'(\varphi(x)) \varphi'(x),$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, podemos concluir que

$$\left( \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right)' = f(\varphi(x)) \varphi'(x). \quad (29a)$$

Mais em geral, sendo  $\varphi, \psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  funções deriváveis, tem-se

$$\left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)' = f(\psi(x)) \psi'(x) - f(\varphi(x)) \varphi'(x). \quad (29b)$$

Basta atender a que

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = \int_a^{\psi(x)} f(t) dt - \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$$

e conjugar o teorema fundamental do cálculo com o teorema da derivação de funções compostas. ■

**Exemplo 11**

Sendo  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que

$$\int_0^{x^2} f(t) dt = x^3 e^x - x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,$$

determinemos  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}_0^+$ . Derivando em ordem a  $x$  ambos os membros da igualdade anterior, vem

$$2xf(x^2) = 3x^2 e^x + x^3 e^x - 4x^3$$

e, para  $x > 0$ , sai

$$f(x^2) = \frac{1}{2}x [e^x(3+x) - 4x] \implies f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} [e^{\sqrt{x}}(3+\sqrt{x}) - 4\sqrt{x}].$$

Como  $f$  é contínua,

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}\sqrt{x} [e^{\sqrt{x}}(3+\sqrt{x}) - 4\sqrt{x}] = 0.$$

Concluindo,

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} [e^{\sqrt{x}}(3+\sqrt{x}) - 4\sqrt{x}], \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+. \quad \blacksquare$$

## 6 Teoremas clássicos do cálculo do integral

Do teorema fundamental do cálculo, Teorema 7, saem outras consequências que passamos a apresentar.

### Consequência 2 [Fórmula do valor médio para integrais]

Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua então existe  $c \in ]a, b[$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c). \quad \blacksquare$$

#### Demonstração

Sendo  $f$  contínua em  $[a, b]$ , possui aí primitiva, digamos  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F'(x) = f(x)$ .

Então  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ . Sendo  $F$  derivável, o teorema do valor médio de Lagrange (Teorema 10, Capítulo 4) garante que

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c), \quad \text{para algum } c \in ]a, b[,$$

e como  $F'(c) = f(c)$ , vem  $F(b) - F(a) = (b - a)f(c)$ , completando-se a demonstração.  $\blacksquare$

### Exemplo 12

Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Vejamos que, se  $f$  é contínua, então  $f$  possui pelo menos um zero em  $]a, b[$ .

Pela Fórmula do valor médio,  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ , para algum  $c \in ]a, b[$ . Como este integral é nulo, vem  $f(c)(b - a) = 0$ , para algum  $c \in ]a, b[$ , ou seja,  $f(c) = 0$ , para algum  $c \in ]a, b[$ .  $\blacksquare$

### Exemplo 13

Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e considere-se  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável, tal que  $g(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Vejamos que

$$\exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx. \quad (30)$$

A função  $f$  é limitada e atinge os seus extremos em  $[a, b]$ , por ser contínua (Teorema de Weierstrass, Capítulo 3), pelo que

$$\exists \alpha, \beta \in [a, b] : f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta), \quad \forall x \in [a, b].$$

Então

$$f(\alpha)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(\beta)g(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

uma vez que  $g$  é não negativa. Pela monotonia do integral (Propriedade 4)

$$f(\alpha) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq f(\beta) \int_a^b g(x) dx.$$

Consequentemente,

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = k \int_a^b g(x) dx$$

para algum  $k \in [f(\alpha), f(\beta)]$ . Pelo teorema do valor intermédio (Capítulo 3), existe  $c$  em  $[a, b]$  tal que  $f(c) = k$ , pelo que a igualdade (30) está justificada.  $\blacksquare$

**Exemplo 14**

Seja  $f$  integrável em  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ . Vejamos que, se  $f$  for contínua em certo ponto  $c \in [a, b]$  onde se tem  $f(c) > 0$ , então

$$\int_a^b f(x) dx > 0. \quad (31)$$

De facto, da continuidade de  $f$  em  $c$  e do Teorema 12 sobre a permanência do sinal das funções contínuas (Capítulo 3, Subsecção 3.4), existe um intervalo  $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$  contido em  $[a, b]$  tal que  $f(x) > 0, \forall x \in ]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ . Da Propriedade 1, sai então que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

onde o primeiro e o terceiro integrais são não negativos, em virtude da Propriedade 4, e o segundo integral é estritamente positivo, uma vez que, pela Fórmula do valor médio para integrais, se tem  $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x) dx = 2\varepsilon f(c)$ , com  $f(c) > 0$ . ■

**Consequência 3 [Integração por partes]**

Sejam  $f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  com  $f$  contínua,  $F$  uma sua primitiva e  $g$  de classe  $C^1([a, b])$ . Então

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \left[ F(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx. \quad (32)$$

■

*Demonstração*

A integrabilidade de  $fg$  e de  $Fg'$  sai da continuidade de  $f, g, F, g'$ . Por outro lado, temos

$$[F(x)g(x)]' = f(x)g(x) + F(x)g'(x),$$

pelo que  $Fg$  é uma primitiva de  $fg + Fg'$ . Então (Fórmula de Barrow)

$$\int_a^b [f(x)g(x) + F(x)g'(x)] dx = \left[ F(x)g(x) \right]_a^b,$$

que equivale à igualdade da fórmula (32).

**Exemplo 15**

$$(a) \int_0^2 xe^x dx = \left[ e^x x \right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - \left[ e^x \right]_0^2 = e^2 + 1.$$

$$(b) \int_1^e \log \sqrt{x} dx = \left[ x \log \sqrt{x} \right]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{e}{2} - \int_1^e \frac{1}{2} dx = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \left[ x \right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

■

**Consequência 4 [Integração por substituição]**

Sejam  $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $g: [c, d] \longrightarrow [a, b]$  de classe  $C^1([c, d])$  tal que  $g(c) = a$  e  $g(d) = b$ . Então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t))g'(t) dt. \quad (33)$$

### Demonstração

Por um lado, se  $F$  for uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , tem-se  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ . Por outro lado,  $(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$ , pelo que  $F \circ g$  é uma primitiva de  $(f \circ g)g'$ , donde

$$\int_c^d (f \circ g)(t)g'(t) dt = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) = F(b) - F(a).$$

■

### Observação 6

No integral do segundo membro de (33), os limites de integração  $c$  e  $d$  são quaisquer números reais tais que  $g(c) = a$ ,  $g(d) = b$ . Cf. o Exemplo 16. ■

### Exemplo 16

(a) Calculemos  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ , efectuando a mudança de variável  $x = \sin t$ .

Pondo  $g(t) = \sin t$ , vem  $g'(t) = \cos t$ . Quanto aos limites de integração, temos

$$\begin{cases} x = \sin t \\ x = 0 \end{cases} \implies \sin t = 0 \implies t = t_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} x = \sin t \\ x = 1 \end{cases} \implies \sin t = 1 \implies t = t_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

A escolha mais simples parece ser  $t_1 = 0$  e  $t_2 = \frac{\pi}{2}$ , resultando

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

A título de ilustração, faça-se outra escolha, por exemplo,  $t_1 = 2\pi$  e  $t_2 = \frac{\pi}{2}$ . Viria

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt$$

Mas  $\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$  e  $\cos t$  não tem sinal constante em  $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ , pelo que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( 2\pi - \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

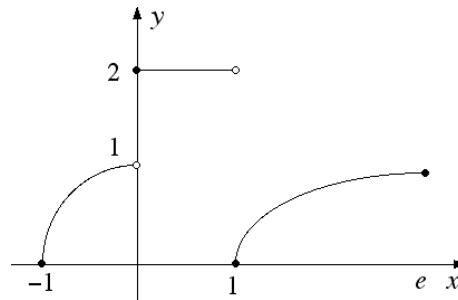
(b) Calculemos agora  $\int_1^2 x \sqrt{x-1} dx$ , efectuando a mudança de variável  $x-1 = t^2$ .

Pondo  $g(t) = t^2 + 1$ , vem  $g'(t) = 2t$ . Atendendo a que  $g(0) = 1$  e  $g(1) = 2$ , resulta

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \sqrt{x-1} dx &= \int_0^1 (1+t^2) \sqrt{t^2} 2t dt = 2 \int_0^1 (t^2 + t^4) dt \\ &= \frac{2}{3} [t^3]_0^1 + \frac{2}{5} [t^5]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

(c) Calculemos  $\int_{-1}^e f(x) dx$  para

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 2 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \log x & \text{se } 1 \leq x \leq e. \end{cases}$$



Recorrendo à Propriedade 6 (b), vem

$$\int_{-1}^e f(x) dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 2 dx + \int_1^e \log x dx,$$

onde o primeiro integral se calcula por substituição fazendo, por exemplo,  $x = \sin t$ , o segundo é imediato e o terceiro calcula-se por partes. Resulta  $\int_{-1}^e f(x) dx = \frac{\pi}{4} + 2 + 1$ .

■

### Exemplo 17

Sejam  $a \in \mathbb{R}^+$  e  $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Vejamos que:

(a) se  $f$  é par então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ;

(b) se  $f$  é ímpar então  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

(a) Sendo  $f$  par, tem-se  $f(x) = f(-x)$ ,  $\forall x \in [-a, a]$ , e então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(-x) dx}_J + \int_0^a f(x) dx.$$

Fazendo a mudança de variável  $x = -t$  no integral  $J$ , vem

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^0 f(t)(-1) dt + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(b) Sendo  $f$  ímpar, tem-se  $f(x) = -f(-x)$ ,  $\forall x \in [-a, a]$ , e então

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \underbrace{\int_{-a}^0 f(-x) dx}_J + \int_0^a f(x) dx.$$

Fazendo a mudança de variável  $x = -t$  no integral  $J$ , vem

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_a^0 f(t)(-1) dt + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

■

## 7 Aplicações do integral

Algumas aplicações geométricas do integral estão relacionadas com a área de um domínio plano, o comprimento de uma curva e o volume de um sólido de revolução.

### 7.1 Área de um domínio plano

Vamos retomar o problema que, na Secção 1, nos serviu de motivação à definição de integral. Em particular, no caso em que  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua tal que  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , definimos, na Secção 2D, a área do domínio limitado pelo gráfico de  $f$ , pelo eixo  $OX$  e pelas rectas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , representado na Figura 1, pela fórmula (15), que aqui reescrevemos

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x) dx.$$

Daqui extraem-se as seguintes consequências.

(a) Por um lado, se  $f(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$  então, por simetria em relação a  $OX$ , a área da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge f(x) \leq y \leq 0\}$$

coincide com a área de

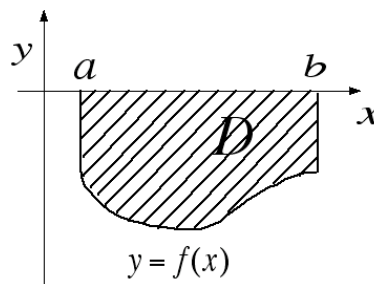
$$\mathcal{D}^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq -f(x)\}$$

e, portanto,

$$\text{área}(\mathcal{D}) = - \int_a^b f(x) dx. \quad (34)$$

Neste caso (a), mas também no caso em que  $f$  é não negativa, temos

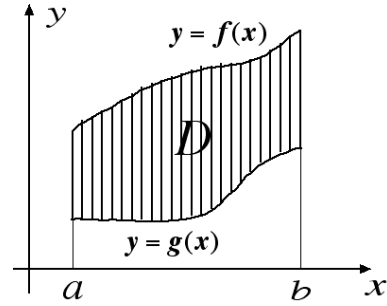
$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b |f(x)| dx.$$





(b) Por outro lado, se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e tais que  $0 \leq g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$ , então, a área da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$



pode ser calculada como  $\text{área}(\mathcal{D}) = \text{área}(\mathcal{D}_1) - \text{área}(\mathcal{D}_2)$ , onde  $\mathcal{D}_1$  é a região plana sob o gráfico de  $f$  e  $\mathcal{D}_2$  é a região plana sob o gráfico de  $g$ . Então

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

ou seja

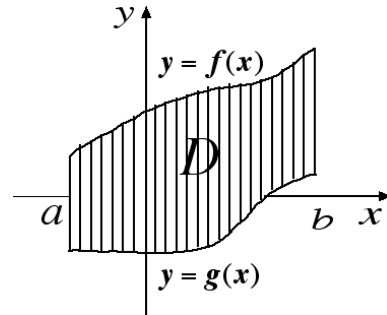
$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (35)$$

Repare-se que, também neste caso (b), poderíamos escrever

$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (36)$$

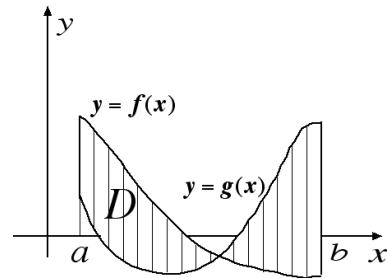
(c) Por translação segundo um vector oportuno orientado no sentido positivo de  $OY$ , seria fácil concluir que, dadas  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e tais que  $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$ , independentemente do sinal de  $f$  ou de  $g$ , a área da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$



poderia ser dada também pelo integral da equação (35) ou, equivalentemente, pelo da equação (36).

(d) Mais em geral, se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas, a área da região plana  $\mathcal{D}$  limitada pelos gráficos de  $f$  e de  $g$  e pelas rectas verticais  $x = a$  e  $x = b$  seria dada por

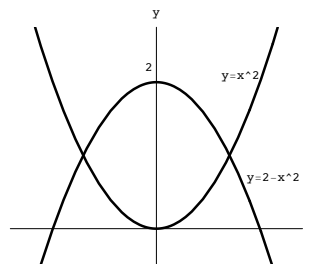


$$\text{área}(\mathcal{D}) = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx, \quad (37)$$

onde  $c$  é a abcissa do ponto de intersecção das duas curvas. Consequentemente, também neste caso, poderíamos exprimir a área de  $\mathcal{D}$  pelo integral da equação (36).

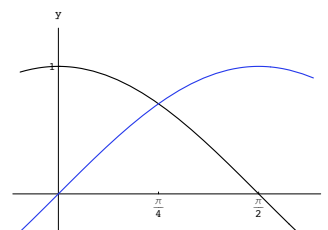
## Exemplo 18

(a) A área do domínio plano  $D$  limitado pelas curvas de equações  $y = x^2$  e  $y = 2 - x^2$ , que se intersectam para  $x = -1$  e para  $x = 1$ , é dada por



$$\text{área } \mathcal{D} = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = \left[ 2x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

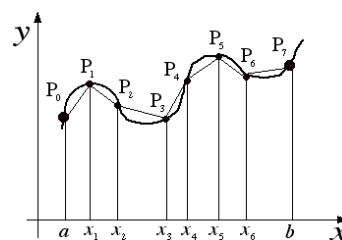
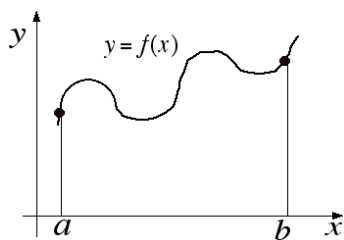
(b) A área do domínio plano  $D$  limitado pelas curvas de equações  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $x = 0$  e  $x = \pi/2$  é dada por



$$\begin{aligned} \text{área } \mathcal{D} &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \sin x| dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \left[ \sin x + \cos x \right]_0^{\pi/4} + \left[ -\cos x - \sin x \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

## 7.2 Comprimento de curvas

Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1([a, b])$ . Designemos por  $\mathcal{C}$  o arco de curva  $y = f(x)$ , com  $x \in [a, b]$ . Cf. a Figura em baixo à esquerda. Vamos dar uma definição para o comprimento do arco  $\mathcal{C}$ , recorrendo à definição alternativa de integral que apresentámos na Observação 2 da Subsecção 2D, em termos das somas de Riemann.



Para tal, consideremos uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  definida por pontos  $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ . Sejam  $P_0, P_1, \dots, P_n$  os pontos correspondentes sobre a curva  $\mathcal{C}$  e consideremos a linha poligonal  $L_{\mathcal{P}}$ , figura em cima à direita, definida pelos segmentos de recta  $P_{i-1}P_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ . Quando os pontos  $P_i$  são considerados cada vez mais próximos uns dos outro, ou seja, quando o diâmetro  $|\mathcal{P}|$  da partição tende para zero, a linha poligonal  $L_{\mathcal{P}}$  tende a confundir-se com o arco  $\mathcal{C}$ . Então, por definição, pomos

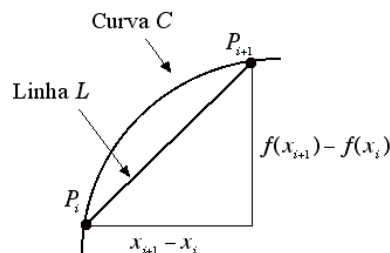
$$\text{comp } \mathcal{C} = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \text{comp } L_{\mathcal{P}}. \quad (38)$$

Por outro lado,

$$\text{comp } L_{\mathcal{P}} = \overline{P_0 P_1} + \overline{P_1 P_2} + \cdots + \overline{P_{n-1} P_n}$$

e, para cada segmento de recta  $P_{i-1} P_i$ , tem-se

$$\overline{P_i P_{i+1}} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}.$$



No entanto, como  $f$  é derivável, o teorema do valor médio de Lagrange dá

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(c_{i+1})$$

para algum  $c_{i+1} \in ]x_i, x_{i+1}[$ , resultando

$$\overline{P_i P_{i+1}} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f'(c_{i+1}))^2 (x_{i+1} - x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_{i+1}))^2} (x_{i+1} - x_i).$$

Consequentemente, o comprimento da linha poligonal  $L_{\mathcal{P}}$  é dado por

$$\text{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(c_{i+1}))^2} (x_{i+1} - x_i), \quad (39)$$

onde, no segundo membro, mais não temos do que uma soma de Riemann para a função  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ , que é integrável. Logo, tomando o limite quando  $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$  na equação (39) vem

$$\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \text{comp}(L_{\mathcal{P}}) = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (40)$$

Da definição expressa pela equação (38), sai

$$\text{comp}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (41)$$

### Exemplo 19

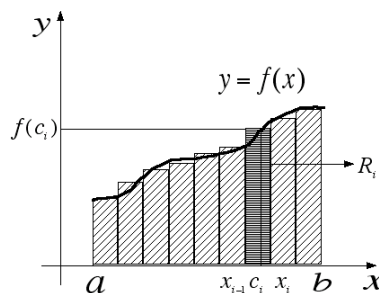
O comprimento do arco da curva de equação  $y = \text{ch } x$ , entre os pontos  $(-1, \text{ch}(-1))$  e  $(2, \text{ch } 2)$  é dado por

$$\text{comp}(C) = \int_{-1}^2 \sqrt{1 + \text{sh}^2 x} dx = \int_{-1}^2 \text{ch } x dx = [\text{sh } x]_{-1}^2 = \text{sh } 2 + \text{sh } 1. \quad \blacksquare$$

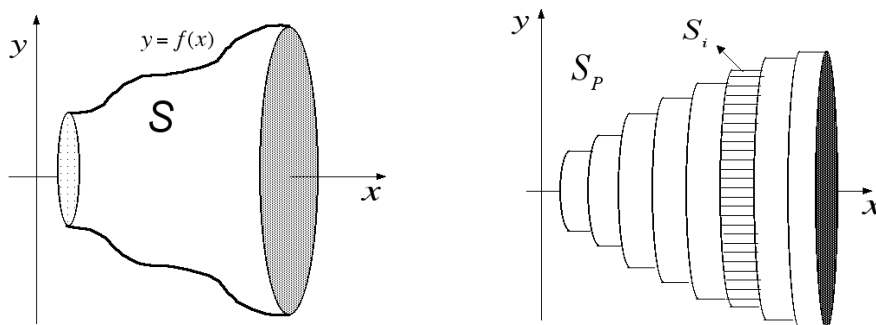
## 7.3 Volume de um sólido de revolução

Quando uma região plana roda em torno de uma recta  $r$  do mesmo plano, obtém-se um sólido dito de revolução. A recta  $r$  diz-se o eixo de rotação. Nesta secção, estamos interessados nos sólidos de revolução  $\mathcal{S}$  gerados pela rotação em torno do eixo  $OX$  de uma região plana  $\mathcal{D}$  definida como na equação (2), a partir de uma função contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$ . Cf. a Figura 1. Vamos dar uma definição para o volume do sólido  $\mathcal{S}$ , recorrendo novamente à definição alternativa de integral em termos das somas de Riemann.

Para tal, consideramos uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  definida pelos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Em cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , fixamos arbitrariamente um ponto  $c_i$ . Tomamos a região poligonal  $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$  definida pelas  $n$  regiões rectangulares de altura  $f(c_i)$  que se erguem sobre esses subintervalos.



Observamos que, quando o diâmetro  $|\mathcal{P}|$  da partição tende para zero, a região poligonal  $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$  tende a confundir-se com o domínio  $\mathcal{D}$  e o sólido  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  gerado por  $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$  tende a confundir-se com o sólido  $\mathcal{S}$  gerado por  $\mathcal{D}$ .



Sólido  $\mathcal{S}$  à esquerda e sólido  $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  à direita

Então, por definição, pomos

$$\text{vol } \mathcal{S} = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \text{vol } \mathcal{S}_{\mathcal{P}}. \quad (42)$$

No entanto, reparando que cada região elementar  $R_i$  gera um cilindro “achatado”  $S_i$  de volume

$$\text{vol}(S_i) = \pi \left( f(c_i) \right)^2 (x_i - x_{i-1})$$

obtemos

$$\text{vol}(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n \pi \left( f(c_i) \right)^2 (x_i - x_{i-1}). \quad (43)$$

No segundo membro da equação (43), temos precisamente uma soma de Riemann para a função  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \pi (f(x))^2$ , que é integrável. Logo, tomando o limite quando  $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$  na equação (43) vem

$$\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \text{vol}(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}) = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx. \quad (44)$$

Da definição (42), sai

$$\text{vol}(\mathcal{S}) = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx. \quad (45)$$

**Exemplo 20**

O volume do sólido  $\mathcal{S}$  gerado pela rotação em torno de  $OX$  da região

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 + 1\}$$

é dado por

$$\text{vol } \mathcal{S} = \int_{-1}^1 \pi(x^2 + 1)^2 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = 2\pi \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right).$$

■

**Exemplo 21**

A fórmula para o volume de uma esfera  $\mathcal{S}$  de raio  $r$  pode ser obtida pensando na esfera como o sólido gerado pela rotação em torno de  $OX$  da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2 \wedge y \geq 0\}$$

Atendendo à simetria da esfera, vem

$$\text{vol } \mathcal{S} = 2 \int_0^r \pi \left( \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi r^2 [x]_0^r - \frac{2\pi}{3} [x^3]_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

■

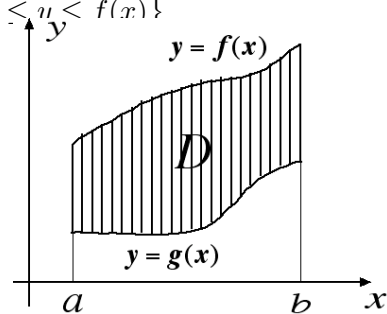
À semelhança do que fizemos na Subsecção 7.1 em relação ao conceito de área, podemos obter fórmulas mais gerais para o cálculo do volume de sólidos de revolução.

Por exemplo, no caso em que  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e  $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , então, o volume do sólido  $\mathcal{S}$  gerado pela rotação em torno de  $OX$  da região plana

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

é dado por

$$\text{vol}(\mathcal{S}) = \int_a^b \pi [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

**Exemplo 22**

O volume do sólido  $\mathcal{S}$  gerado pela rotação em torno de  $OX$  da região plana

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + 1 \leq y \leq 3\}$$

é dado por (tendo em conta a simetria)

$$\text{vol } \mathcal{S} = 2 \int_0^2 \pi \left( 3^2 - (-x + 3)^2 \right) dx = 2\pi \int_0^2 (-x^2 + 6x) dx = \frac{56\pi}{3}.$$

■

**Exemplo 23** [Volume de um toro (sólido com a forma de uma câmara de ar de pneu)]

O volume do sólido  $\mathcal{S}$  gerado pela rotação em torno de  $OX$  da região plana

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 + (y - 4)^2 \leq 1\}$$

é dado por (tendo em conta a simetria em relação à recta  $x = 4$ )

$$\begin{aligned} \text{vol } \mathcal{S} &= 2\pi \int_4^5 \left[ (4 + \sqrt{1 - (x - 4)^2})^2 - (4 - \sqrt{1 - (x - 4)^2})^2 \right] dx \\ &= 32\pi \int_4^5 \sqrt{1 - (x - 4)^2} dx \quad [\text{substituição } x - 4 = \sin t] \\ &= 32\pi \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 32\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 16\pi \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 16\pi \left( [t]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} [\sin 2t]_0^{\pi/2} \right) = 8\pi^2. \end{aligned}$$

■