Universidade Nova de Lisboa
Faculdade de Economia
Universidade Nova de Lisboa
Semestre de Primavera 2011/2012

Cálculo I

Caderno de exercícios Quatro

Complementos de funções reais de variáveis reais

Todos os exercicios não resolvidos nas aulas são considerados trabalhos de casa, endo os alunos convidados a resolverem-nos com o apoio dos docentes, se necessário.

Maria Helena Almeida
Claudia Andrade
Guilherme Pereira
Ernesto Freitas
Claudia Alves

1 Noções Topológicas

1.1 Exercícios Resolvidos

1. Indique se os seguintes números são naturais, inteiros, racionais, irracionais ou reais:

$$3,5 \qquad 5,(1) \qquad \frac{2}{5} \qquad \sqrt{2} \qquad \sqrt{-1} \qquad 6 \qquad \pi \qquad -\frac{1}{3} \qquad -3$$

   Resolução:

   Naturais: 6 | Inteiros: 6; -3 | Racionais: 3,5; 5,(1); $\frac{2}{5}$; 6; $-\frac{1}{3}$;-3

   Irracionais: $\sqrt{2}$; π | Reais: 3,5; 5,(1); $\frac{2}{5}$; $\sqrt{2}$; 6; π; $-\frac{1}{3}$;-3

2. Qual é o cardinal de cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{a, c\}$

   (b) $A = \{\}$

   (c) $A = \{\varnothing\}$

   (d) $A = \{0, 1\} \cup \{2, 3\}$

   (e) $A = \{10, 40\} \cup \{10, 20, 30\}$

   (f) $A = \mathbb{N}$

   (g) $A = \mathbb{Q}$

   (h) $A = [1, 3]$

   (i) $A =]1, 3[$

   (j) $A = \mathbb{R}$

   Resolução:

   (a) $\#A = 2$ (b) $\#A = 0$ (c) $\#A = 1$ (d) $\#A = 4$ (e) $\#A = 4$

   (f) $\#A = alef\ zero$ (g) $\#A = alef\ zero$ (h) $\#A = alef\ um$ (i) $\#A = alef\ um$ (j) $\#A = alef\ um$

3. Determine, se existir, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{1, 2\}$

   (b) $B =]-2, 1] \cup]3, 5]$

   (c) $C = \left\{x \in \mathbb{N} : \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} > \frac{1}{16}\right\}$

   (d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} \geq 2\right\}$

   (e) $E = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$

   (f) $F = \{x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : x \leq 1\}$

   (g) $G = E \cap F$

(h) $H = E \cup F$

Resolução:

(a) $A = \{1, 2\}$

Majorantes de A $= [2, +\infty[$ Minorantes de A $=]-\infty, 1]$

Supremo de A: 2 Ínfimo de A: 1

Máximo de A: 2 Mínimo de A: 1

A é limitado

(b) $B =]-2, 1] \cup]3, 5]$

Majorantes de B $= [5, +\infty[$ Minorantes de B $=]-\infty, -2]$

Supremo de B: 5 Ínfimo de B: -2

Máximo de B: 5 Mínimo de B: não existe (visto que o ínfimo não pertence ao conjunto B)

B é limitado

(c) $C = \left\{x \in \mathbb{N} : \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} > \frac{1}{16}\right\}$

Primeiro represente-se o conjunto por enumeração:

$C = \left\{x \in \mathbb{N} : \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} > \frac{1}{16}\right\} = \left\{x \in \mathbb{N} : \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right\} = \{x \in \mathbb{N} : x - 3 < 4\} =$

$= \{x \in \mathbb{N} : x < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Majorantes de C $= [6, +\infty[$ Minorantes de C $=]-\infty, 1]$

Supremo de C: 6 Ínfimo de C: 1

Máximo de C: 6 Mínimo de C: 1

C é limitado

(d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} \geq 2\right\}$

Primeiro represente-se o conjunto por enumeração:

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} \geq 2\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} - 2 \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{-x-1}{x} \geq 0\right\}$

	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$-x-1$	+	0	-	-	-
x	-	-	-	0	+
$\frac{-x-1}{x}$	-	0	+	S.S.	-

Logo $D = [-1, 0[$

Majorantes de D $= [0, +\infty[$ Minorantes de D $=]-\infty, -1]$

Supremo de D: 0 Ínfimo de D: -1

Máximo de D: não existe (visto que o supremo não pertence a D) Mínimo de D: -1

D é limitado

(e) $E = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} =]0, +\infty[\cap \mathbb{Q}$

Majorantes de E $= \varnothing$ Minorantes de E $=]-\infty, 0]$

Supremo de E: não existe (visto não existirem majorantes) Ínfimo de E: 0

Máximo de E: não existe (visto não existir supremo) Mínimo de E: não existe (ínfimo não pertence a E)

E não é limitado (visto que o conjunto E não tem majorantes)

(f) $F = \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x \leq 1\} =]-\infty, 1] \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Majorantes de F $= [1, +\infty[$

Minorantes de F $= \varnothing$

Supremo de F: 1

Ínfimo de F: não existe (não existem minorantes)

Máximo de F: não existe (visto o supremo não pertencer a F)

Mínimo de F: não existe (visto não existir ínfimo)

F não é limitado (visto que o conjunto F não tem minorantes)

(g) $G = E \cap F$

Primeiro represente-se o conjunto por enumeração:

$G = E \cap F = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x < 1\} = \varnothing$

Majorantes de G $= \varnothing$

Minorantes de G $= \varnothing$

Supremo de G: não existe

Ínfimo de G: não existe

Máximo de G: não existe

Mínimo de G: não existe

G não é limitado

(h) $H = E \cup F$

Primeiro represente-se o conjunto por enumeração:

$G = E \cup F = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x < 1\} = \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x < 0\} \cup]0, 1] \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 1\}$

Majorantes de H $= \varnothing$

Minorantes de H $= \varnothing$

Supremo de H: não existe

Ínfimo de H: não existe

Máximo de H: não existe

Mínimo de H: não existe

H não é limitado

4. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x > 0\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2x+3} \leq 0\right\}, \quad C = A \cap B$$

Para cada um deles indique:

(a) O conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes.

(b) O supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo, no caso de existirem.

Resolução:

Primeiro simplifique-se os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x > 0\} = \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Q}$

$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{2x+3} \leq 0\right\} = \left]-\frac{3}{2}, 1\right]$

$C = A \cap B =]0, 1] \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (atenção: 1 não pertence ao conjunto C)

(a)

Majorantes de $A = \varnothing$ | Minorantes de $A =]-\infty, 0]$

Majorantes de $B = [1, +\infty[$ | Minorantes de $B = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$

Majorantes de $C = [1, +\infty[$ | Minorantes de $C =]-\infty, 0]$

(b)

Supremo de A: não existe
Máximo de A: não existe

Ínfimo de A: 0
Mínimo de A: não existe

Supremo de B: 1
Máximo de B: 1

Ínfimo de B: $-\frac{3}{2}$
Mínimo de B: não existe

Supremo de C: 1
Máximo de C: não existe (note que 1 não pertence a C)

Ínfimo de C: 0
Mínimo de C: não existe

5. Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência, o derivado e diga se é aberto ou fechado cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = [1, 3]$

   (b) $A =]1, 3[$

   (c) $A = [1, 3[$

   (d) $A =]1, 3]$

   Resolução:

   Recorde que:

   - um ponto é interior se existe uma vizinhança desse ponto totalmente contida no conjunto.

   - um ponto é fronteiro se a vizinhança desse ponto intersecta simultaneamente com o conjunto e com o seu exterior

   - um ponto é exterior se existe uma vizinhança desse ponto que não intersecta o conjunto

   - um ponto é aderente se está no interior ou na fronteira do conjunto

   - um ponto é ponto de acumulação se para todas as vizinhanças desse ponto intersectarem com o conjunto excluindo esse ponto

   Nas respostas a cada uma das alíneas constate as semelhanças e as diferenças entre as respostas.

   (a)

   $int(A) =]1, 3[\,; fr(A) = \{1, 3\}\,; ext(A) =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[\,; \overline{A} = [1, 3]\,; A' = [1, 3]$ (o derivado é o conjunto dos pontos de acumulação).

   Como $\overline{A} = A$, o conjunto é fechado.

   (b)

   $int(A) =]1, 3[\,; fr(A) = \{1, 3\}\,; ext(A) =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[\,; \overline{A} = [1, 3]\,; A' = [1, 3]\,.$

   Como $int(A) = A$, o conjunto é aberto.

   (c)

   $int(A) =]1, 3[\,; fr(A) = \{1, 3\}\,; ext(A) =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[\,; \overline{A} = [1, 3]\,; A' = [1, 3]\,.$

   Como $int(A) \neq A$ e $\overline{A} \neq A$, o conjunto não é aberto nem fechado.

(d)

$int(A) =]1,3[\,; fr(A) = \{1,3\}\,; ext(A) =]-\infty,1[\,\cup\,]3,+\infty[\,; \overline{A} = [1,3]\,; A' = [1,3]\,.$

Como $int(A) \neq A$ e $\overline{A} \neq A$, o conjunto não é aberto nem fechado.

6. Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência, o derivado e diga se é aberto ou fechado cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = [1,3] \cup \{5\}$

   (b) $A = \{1,2,3\}$

   (c) $A = [1,3[\,\cup \{5\} \cup [6,9]$

   (d) $A = \mathbb{R}$

   (e) $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

   (f) $A = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$

   (g) $A = (\mathbb{Q} \cap [-2,-1]) \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cap [1,2])$

Resolução:

(a) $A = [1,3] \cup \{5\}$

$int(A) =]1,3[\,; fr(A) = \{1,3,5\}\,; ext(A) =]-\infty,1[\,\cup\,]3,5[\,\cup\,]5,+\infty[\,; \overline{A} = [1,3] \cup \{5\}\,; A' = [1,3]\,.$

Como $\overline{A} = A$, o conjunto é fechado.

(b) $A = \{1,2,3\}$

$int(A) = \varnothing; fr(A) = \{1,2,3\}\,; ext(A) = \mathbb{R}\backslash\,\{1,2,3\}\,; \overline{A} = \{1,2,3\}\,; A' = \varnothing.$

Como $\overline{A} = A$, o conjunto é fechado.

(c) $A = [1,3[\,\cup \{5\} \cup [6,9]$

$int(A) =]1,3[\,\cup\,]6,9[\,; fr(A) = \{1,3,5,6,9\}\,; ext(A) =]-\infty,1[\,\cup\,]3,5[\,\cup\,]5,6[\,\cup\,]9,+\infty[\,;$

$\overline{A} = [1,3] \cup \{5\} \cup [6,9]\,; A' = [1,3] \cup [6,9]\,.$

Como $int(A) \neq A$ e $\overline{A} \neq A$, o conjunto não é aberto nem fechado.

(d) $A = \mathbb{R}$

$int(A) = \mathbb{R}; fr(A) = \varnothing; ext(A) = \varnothing; \overline{A} = \mathbb{R}; A' = \mathbb{R}.$

Como $int(A) = A$ e $\overline{A} = A$, o conjunto é aberto e fechado.

(e) $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

$int(A) = \varnothing; fr(A) = \mathbb{R}; ext(A) = \varnothing; \overline{A} = \mathbb{R}; A' = \mathbb{R}.$

Como $int(A) \neq A$ e $\overline{A} \neq A$, o conjunto não é aberto nem fechado.

(f) $A = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$

$int(A) = \varnothing; fr(A) = [-1,1]\,; ext(A) =]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,; \overline{A} = [-1,1]\,; A' = [-1,1]\,.$

Como $int(A) \neq A$ e $\overline{A} \neq A$, o conjunto não é aberto nem fechado.

(g) $A = (\mathbb{Q} \cap [-2, -1]) \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [1, 2])$

$int(A) = \varnothing; fr(A) = [-2, -1] \cup [1, 2]\,; ext(A) = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]-1, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[\,;$

$\overline{A} = [-2, -1] \cup [1, 2]\,; A' = [-2, -1] \cup [1, 2]\,.$

Como $int(A) \neq A$ e $\overline{A} \neq A$, o conjunto não é aberto nem fechado.

7. Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência, o derivado e diga se é aberto ou fechado cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \left\{x : x = (-1)^n \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$
   (b) $A = \left\{x : x = \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$
   (c) $A = \left\{x : x = (-1)^n \frac{2n-1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$
   (d) $A = \left\{x : x = \frac{n^2}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$
   (e) $A = \{x : x = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}\}$

Resolução:

(a)

$int(A) = \varnothing; fr(A) = A \cup \{0\}$ (inclui todos os sublimites finitos);$ext(A) = \mathbb{R} \backslash (A \cup \{0\})\,;$

$\overline{A} = A \cup \{0\}\,; A' = \{0\}\,.$

Como $int(A) \neq A$ e $\overline{A} \neq A$, o conjunto não é aberto nem fechado.

(b)

$int(A) = \varnothing; fr(A) = A \cup \{0\}$ (inclui todos os sublimites finitos);$ext(A) = \mathbb{R} \backslash (A \cup \{0\})\,;$

$\overline{A} = A \cup \{0\}\,; A' = \{0\}\,.$

Como $int(A) \neq A$ e $\overline{A} \neq A$, o conjunto não é aberto nem fechado.

(c)

$int(A) = \varnothing; fr(A) = A \cup \{-2, 2\}$ (inclui todos os sublimites finitos);$ext(A) = \mathbb{R} \backslash (A \cup \{-2, 2\})\,;$

$\overline{A} = A \cup \{-2, 2\}\,; A' = \{-2, 2\}\,.$

Como $int(A) \neq A$ e $\overline{A} \neq A$, o conjunto não é aberto nem fechado.

(d)

$int(A) = \varnothing; fr(A) = A; ext(A) = \mathbb{R} \backslash A; \overline{A} = A; A' = \varnothing.$

Como $\overline{A} = A$, o conjunto é fechado.

(e)

$A = \{x : x = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$

$int(A) = \varnothing; fr(A) = A; ext(A) = \mathbb{R} \backslash A; \overline{A} = A; A' = \varnothing.$

Como $\overline{A} = A$, o conjunto é fechado.

8. Determine os pontos isolados de cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = [1, 2]$

   (b) $A = \{1, 2\}$

   (c) $A = [-1/2, 1/2] \cup \{0, 1, 2\}$

   (d) $A = \left\{x : x = (-1)^n \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$

   (e) $A = \{x : x = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}\} \cup]-1, 1[$

   (f) $A = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$

   (g) $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

   Resolução:

   (a) Não tem pontos isolados.

   (b) Os pontos isolados são 1 e 2.

   (c) Os pontos isolados são 1 e 2.

   (d) Os pontos isolados são todos os elementos do conjunto A.

   (e) Não tem pontos isolados, visto que $A = [-1, 1]$.

   (f) Não tem pontos isolados (o conjunto é denso).

   (g) Não tem pontos isolados (o conjunto é denso).

9. Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência, o derivado e diga se é aberto ou fechado cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $E = [0, 1] \times [2, 3]$

   (b) $E =]0, 1[\times]2, 3[$

   (c) $E = [0, 1] \times]2, 3[$

   (d) $E =]0, 1[\times]2, 3[$

   Resolução:

   (a)

   $int(E) =]0, 1[\times]2, 3[\,; fr(E) = (\{0, 1\} \times [2, 3]) \cup ([0, 1] \times \{2, 3\})\,;$

   $ext(E) = \mathbb{R}^2 \backslash E; \overline{E} = E; E' = E.$

   Como $\overline{E} = E$, o conjunto é fechado.

   (b)

   $int(E) =]0, 1[\times]2, 3[\,; fr(E) = (\{0, 1\} \times [2, 3]) \cup ([0, 1] \times \{2, 3\})\,;$

   $ext(E) = \mathbb{R}^2 \backslash ([0, 1] \times [2, 3])\,; \overline{E} = [0, 1] \times [2, 3]\,; E' = [0, 1] \times [2, 3]\,.$

   Como $int(E) = E$, o conjunto é aberto.

(c)

$int(E) =]0,1[\times]2,3[\,; fr(E) = (\{0,1\} \times [2,3]) \cup ([0,1] \times \{2,3\})\,;$

$ext(E) = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [2,3])\,; \overline{E} = [0,1] \times [2,3]\,; E' = [0,1] \times [2,3]\,.$

Como $int(E) \neq E$ e $\overline{E} \neq E$, o conjunto não é aberto nem fechado.

(d)

$int(E) =]0,1[\times]2,3[\,; fr(E) = (\{0,1\} \times [2,3]) \cup ([0,1] \times \{2,3\})\,;$

$ext(E) = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [2,3])\,; \overline{E} = [0,1] \times [2,3]\,; E' = [0,1] \times [2,3]\,.$

Como $int(E) = E$, o conjunto é aberto.

10. Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência, o derivado e diga se é aberto ou fechado cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $F = \{1\} \times [2,3]$
   (b) $F = (]-1,1[\times]0,3[) \cup \{(2,2)\}$
   (c) $F = ([0,1] \times [1,2]) \cup ([1,2] \times [2,3])$
   (d) $F = ([-2,2] \times [-2,2]) \setminus (]-1,1[\times]1,1[)$

   Resolução:

   Dica: Represente os conjuntos.

   (a) $F = \{1\} \times [2,3]$

   $int(F) = \varnothing; fr(F) = F; ext(F) = \mathbb{R}^2 \setminus F; \overline{F} = F; F' = F.$

   Como $\overline{F} = F$, o conjunto é fechado.

   (b) $F = (]-1,1[\times]0,3[) \cup \{(2,2)\}$

   $int(F) =]-1,1[\times]0,3[\,; fr(F) = (\{-1,1\} \times [0,3]) \cup ([-1,1] \times \{0,3\}) \cup (2,2)\,;$

   $ext(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{([-1,1] \times [0,3]) \cup (2,2)\}\,; \overline{F} = ([-1,1] \times [0,3]) \cup (2,2)\,; F' = [-1,1] \times [0,3]\,.$

   Como $int(F) \neq F$ e $\overline{F} \neq F$, o conjunto não é aberto nem fechado.

   (c) $F = ([0,1] \times [1,2]) \cup ([1,2] \times [2,3])$

   $int(F) = (]0,1[\times]1,2[) \cup (]1,2[\times]2,3[)\,;$

   $fr(F) = (\{0\} \times [1,2]) \cup (\{1\} \times [1,3]) \cup (\{2\} \times [2,3]) \cup ([0,1] \times \{1\}) \cup ([0,2] \times \{2\}) \cup ([1,2] \times \{3\})\,;$

   $ext(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{([0,1] \times [1,2]) \cup ([1,2] \times [2,3])\}\,; \overline{F} = F; F' = F.$

   Como $\overline{F} = F$, o conjunto é fechado.

   (d) $F = ([-2,2] \times [-2,2]) \setminus (]-1,1[\times]1,1[)$

   $int(F) = (]-2,2[\times]-2,2[) \setminus ([-1,1] \times [-1,1])\,;$

   $fr(F) = (\{-2,2\} \times [-2,2]) \cup (\{-1,1\} \times [-1,1]) \cup ([-2,2] \times \{-2,2\}) \cup ([-1,1] \times \{-1,1\})$

   $ext(F) = \mathbb{R}^2 \setminus F; \overline{F} = F; F' = F.$

   Como $\overline{F} = F$, o conjunto é fechado.

11. Determine os pontos isolados de cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = [1, 2] \times [1, 2]$

   (b) $A = [1, 2] \times [1, 2] \cup \{(3, 4)\}$

   (c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}\right\}$

   (d) $A = [1, 2] \times \mathbb{Q}$

   (e) $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \times \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

   Resolução:

   (a) Não tem pontos isolados (b) O ponto isolado é $(3, 4)$ (c) Os pontos isolados são todos os elementos do conjunto A (d) Não tem pontos isolados (o conjunto é denso) (e) Não tem pontos isolados (o conjunto é denso)

12. Quando possível, dê exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que:

   (a) seja finito não vazio e aberto;

   (b) seja fechado mas não limitado;

   (c) seja igual ao seu derivado;

   (d) seja igual à sua fronteira;

   (e) tenha por exterior um intervalo limitado.

   Resolução:

   (a) Não é possível (b) $A = [2, +\infty[$ (c) $A = [2, +\infty[$ (d) $A = \{1\}$ (e) $A =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$

13. Quando possível, dê exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que:

   (a) seja finito não vazio e aberto;

   (b) seja fechado mas não limitado;

   (c) seja igual ao seu derivado;

   (d) seja igual à sua fronteira;

   (e) tenha por exterior um subconjunto limitado.

   Resolução:

   (a) Não é possível (b) $A = [2, +\infty[\times [0, 1]$ (c) $A = [2, +\infty[\times [0, 1]$

   (d) $A = \{1, 3\} \times \{1, 3\}$ (e) $A = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus ([0, 1] \times [0, 1])$

14. Quais dos seguintes conjuntos são conexos?

   (a) $A = [2, +\infty[$

   (b) $A = [2, 3[$

(c) $A = [2,3[\cup [4,5[$

(d) $A = [2,3[\times [4,5[$

(e) $A = ([-1,1[\times [1,2[) \cup ([-2,-1[\times [4,5[)$

Resolução:

A intuição para um conjunto ser conexo é "ser composto por uma única peça".

(a) É conexo (b) É conexo (c) Não é conexo (d) É conexo (e) Não é conexo

15. Quais dos seguintes conjuntos são convexos?

(a) $A = [2,+\infty[$

(b) $A = [2,3[$

(c) $A = [2,3[\cup [4,5[$

(d) $A = [2,3[\times [4,5[$

(e) $A = ([-1,1[\times [1,2[) \cup ([-2,-1[\times [4,5[)$

Resolução:

Um conjunto convexo é um conjunto com a seguinte propriedade: se dois quaisquer pontos estão no conjunto, então o segmento que os une também está contido nesse conjunto.

(a) É convexo (b) É convexo (c) Não é convexo (d) É convexo (e) Não é convexo

16. Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\right\} \\
B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}\right\} \\
C &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x,y\} < 4 \quad \wedge \quad y + \ln(x) \geq 0\right\}
\end{aligned}$$

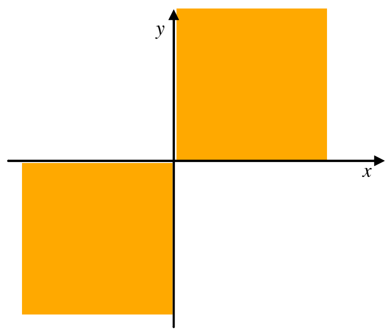
(a) Represente-os graficamente.

(b) Determine, para cada um, o interior, o exterior, a fronteira, a aderência e o derivado.

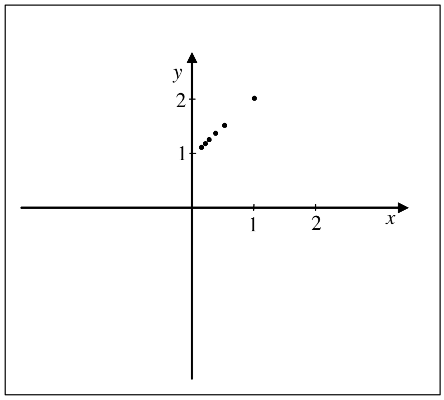
(c) Indique, justificando pela definição mas com recurso a alguma intuição, quais dos conjuntos são fechados. E convexos? E conexos?

Resolução:

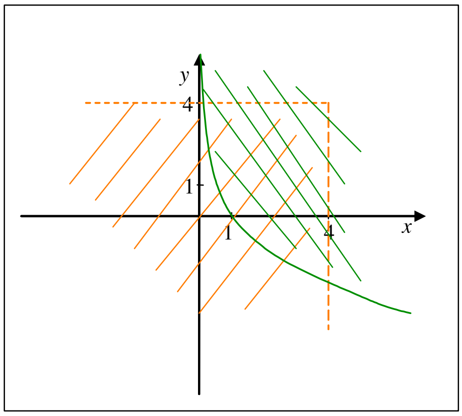
(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$



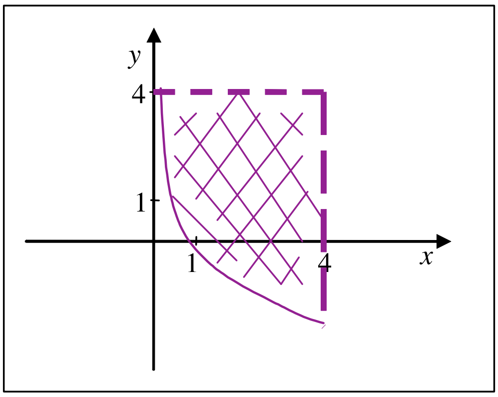
$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}\right\}$



$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x,y\} < 4 \quad \wedge \quad y + \ln(x) \geq 0\right\}$



Cuja intersecção é



(b)

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

$int(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}\,; ext(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 0\}$

$fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$

$ad(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}\,; A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}\}$

$int(B) = \varnothing; ext(B) = \mathbb{R}^2 \backslash (\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}\} \cup (0,1))$

$fr(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}\} \cup (0,1)$

$ad(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}\} \cup (0,1)$

$B' = (0,1)$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x,y\} < 4 \quad \wedge \quad y + \ln(x) \geq 0\}$

$int(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x,y\} < 4 \quad \wedge \quad y + \ln(x) > 0\}$

$ext(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x,y\} < 4 \quad \vee \quad y + \ln(x) > 0\}$

$fr(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (\max\{x,y\} = 4 \quad \wedge \quad y + \ln(x) \geq 0) \vee (\max\{x,y\} < 4 \quad \wedge \quad y + \ln(x) = 0)\}$

$ad(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x,y\} \leq 4 \quad \wedge \quad y + \ln(x) \geq 0\}$

$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x,y\} \leq 4 \quad \wedge \quad y + \ln(x) \geq 0\}$

(c)

A é fechado, é conexo e não é convexo.

B não é fechado, não é conexo e não é convexo.

C não é fechado, é conexo e é convexo.

17. Considere os conjuntos assim definidos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x^2 \leq 9\} \qquad \text{e} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq 2^x \leq 4\}$$

(a) Determine o conjunto $A \backslash B$ e represente-o em linguagem de intervalos.

(b) Seja o conjunto $D = (A \cap \mathbb{Z}) \cup (B \cap \mathbb{Q})$.Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência e o conjunto derivado de D. Diga ainda se D é aberto ou fechado.

(c) Seja o conjunto $E = (A \cap \mathbb{R}^-) \cup fr(B)$.Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência e o conjunto derivado de E. Diga ainda se E é aberto ou fechado.

Resolução:

(a) Primeiro determine-se cada um dos conjuntos A e B.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x^2 \leq 9\right\} = [-3, -1] \cup [1, 3] \quad \text{Dica: Faça o gráfico da parábola.}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq 2^x \leq 4\} = [0, 2]$$

Portanto

$$A \backslash B = [-3, -1] \cup]2, 3]$$

Faça um diagrama na recta real para o ajudar a responder.

(b)

$$D = (A \cap \mathbb{Z}) \cup (B \cap \mathbb{Q})$$

Vamos calcular cada um dos conjuntos em parênteses curvos primeiro.

$$A \cap \mathbb{Z} = ([-3, -1] \cup [1, 3]) \cap \mathbb{Z}$$

Do conjunto A quais são inteiros? Resposta:

$$A \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$$

E agora o outro conjunto:

$$B \cap \mathbb{Q} = [0, 2] \cap \mathbb{Q}, \text{ isto é, são os números racionais no intervalo } [0, 2]$$

Assim,

$$D = (A \cap \mathbb{Z}) \cup (B \cap \mathbb{Q}) = ([0, 2] \cap \mathbb{Q}) \cup \{-3, -2, -1, 3\}$$

Agora é fácil:

$int(D) = \varnothing$; $fr(D) = [0, 2] \cup \{-3, -2, -1, 3\}$; $ext(D) = \mathbb{R} \backslash ([0, 2] \cup \{-3, -2, -1, 3\})$

$\bar{D} = [0, 2] \cup \{-3, -2, -1, 3\}$; $D' = [0, 2]$

D não é aberto ($int(D) \neq D$)) nem é fechado ($\bar{D} \neq D$)).

(c)

$$E = \left(A \cap \mathbb{R}^-\right) \cup fr(B)$$

Vamos calcular cada um dos conjuntos em parênteses curvos primeiro.

$$A \cap \mathbb{R}^- = ([-3, -1] \cup [1, 3]) \cap \mathbb{R}^-$$

Do conjunto A quais são reais negativos. Resposta:

$$A \cap \mathbb{Z} = [-3, -1]$$

$$fr(B) = fr([0,2]) = \{0, 2\}$$

Assim,

$$E = \left(A \cap \mathbb{R}^-\right) \cup fr(B) = [-3, -1] \cup \{0, 2\}$$

Agora é fácil:

$int(E) =]-3, -1[\,; fr(E) = \{-3, -1, 0, 2\}\,; ext(E) = \mathbb{R} \backslash E; \bar{E} = E; E' = [-3, -1]$

E é fechado $(\bar{D} \neq D))$.

18. Seja o conjunto A dado por $A = [1, 2]$.

    (a) É o conjunto A fechado?

    (b) Determine o conjunto complementar de A. Este conjunto é aberto ou fechado?

    Resolução:

    (a) A é fechado, visto que $ad(A) = [1, 2] = A$.

    (b) $A^c =]-\infty, 1[\, \cup\,]2, +\infty[$. Este conjunto é aberto dado que $int(A^c) = A^c$.

19. Seja o conjunto A dado por $A = \mathbb{R} \backslash \{2\}$.

    (a) É o conjunto A aberto?

    (b) Determine o conjunto complementar de A. Este conjunto é aberto ou fechado?

    Resolução:

    (a) A é aberto dado que $int(A) = \mathbb{R} \backslash \{2\} = A$.

    (b) $A^c = \{2\}$. Este conjunto é fechado visto que $ad(A^c) = \{2\} = A^c$.

20. Diga se é verdadeiro ou falso:

    (a) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ que é limitado e tem cardinal infinito. Então A não tem pontos de acumulação.

    (b) A reunião de uma família infinita de conjuntos abertos é sempre um aberto.

    (c) A reunião de uma família infinita de conjuntos fechados é sempre um fechado.

    Resolução:

    (a) Falso, visto que pelo teorema de Bolzano-Weierstrass A tem pelo menos um ponto de acumulação.

    (b) Verdadeiro.

    (c) Falso, por exemplo $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, 4 - \frac{1}{n}\right] =]1, 4[$.

1.2 Exercícios Propostos

1. Indique se os seguintes números são naturais, inteiros, racionais, irracionais ou reais:

$$3,2 \qquad 3,(2) \qquad \frac{4}{10} \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt{-2} \qquad 5 \qquad e \qquad -\frac{1}{6} \qquad -4 \tag{1}$$

$$1.3333333... \qquad \sqrt{25} \qquad 0 \qquad \pi \qquad \pi/2 \qquad 10^{1gogol} \tag{2}$$

2. Qual é o cardinal de cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{1, 2\}$

   (b) $A = \{\}$

   (c) $A = \{\varnothing\}$

   (d) $A = \{0, 1, 2\} \cup \{3, 4, 5\}$

   (e) $A = \{5, 10, 15\} \cup \{10, 15, 20\}$

   (f) $A = \mathbb{Z}$

   (g) $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

   (h) $A = [2, 4]$

   (i) $A =]2, 4[$

   (j) $A = \mathbb{R}$

3. Determine, se existir, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \{0, 4\}$

   (b) $B =]-1, 0] \cup]2, 6]$

   (c) $C = \left\{x \in \mathbb{N} : 2^{x-3} > 8\right\}$

   (d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x+3} < 1\right\}$

   (e) $E = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$

   (f) $F = \{x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : x > 1\}$

   (g) $G = E \cap F$

   (h) $H = E \cup F$

4. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2} \leq 1\right\}, \quad C = A \cap B$$

   Para cada um deles indique:

(a) O conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes.

(b) O supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo, no caso de existirem.

5. Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência, o derivado e diga se é aberto ou fechado cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = [2, 5]$

   (b) $A =]2, 5[$

   (c) $A = [2, 5[$

   (d) $A =]2, 5]$

6. Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência, o derivado e diga se é aberto ou fechado cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = [0, 3] \cup \{6\}$

   (b) $A = \{-1, 1\}$

   (c) $A = [1, 2[\cup \{3\} \cup [4, 5]$

   (d) $A = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

   (e) $A = \mathbb{Q}$

   (f) $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$

   (g) $A = (\mathbb{Q} \cap [-1, 0]) \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0, 2])$

   (h) $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cup [-1, 1]$

   (i) $A = (\mathbb{Q} \cap [-1, 1]) \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0, 2])$

7. Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência, o derivado e diga se é aberto ou fechado cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = \left\{ x : x = (-1)^n \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$

   (b) $A = \left\{ x : x = \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$

   (c) $A = \left\{ x : x = (-1)^n \frac{n^2-1}{2n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$

   (d) $A = \left\{ x : x = \frac{n^3}{n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$

   (e) $A = \{ x : x = 2.(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N} \}$

8. Determine os pontos isolados de cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $A = [0, 2]$

   (b) $A = \{0, 2\}$

   (c) $A = [-2/3, 5/2] \cup \{1, 2, 3\}$

(d) $A = \left\{x : x = (-1)^n \frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$

(e) $A = \{x : x = 3.(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}\} \cup]-3, 3[$

(f) $A = [-2, 4] \cap \mathbb{Q}$

(g) $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [-2, 4]$

(h) $A = \{x : x = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}\}$

9. Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência, o derivado e diga se é aberto ou fechado cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $E = [-1, 1] \times [0, 2]$

   (b) $E =]-1, 1[\times]0, 2[$

   (c) $E = [-1, 1] \times]0, 2[$

   (d) $E =]-1, 1[\times [0, 2]$

10. Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência, o derivado e diga se é aberto ou fechado cada um dos seguintes conjuntos:

    (a) $F = \{2\} \times [2, 3]$

    (b) $F = (]-1, 2[\times]0, 1[) \cup \{(1, 1)\}$

    (c) $F = ([-1, 1] \times [-1, 1]) \cup ([1, 2] \times [0, 1])$

    (d) $F = ([-2, 2] \times \mathbb{R}) \setminus (]-1, 1[\times]-1, 1[)$

    (e) $F = (]-1, 1[\times]-1, 1[) \cup \{(2, 2)\}$

    (f) $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \left(\frac{1}{n}, 2\right), \forall n \in \mathbb{N}\right\}$

    (g) $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \left(1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}\right\}$

11. Determine os pontos isolados de cada um dos seguintes conjuntos:

    (a) $A = [1, 4] \times [-1, 2]$

    (b) $A = [0, 1] \times [0, 2] \cup \{(-1, 1)\}$

    (c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \left(1, 1 - \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}\right\}$

    (d) $A = \mathbb{Q} \times [0, 5]$

    (e) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

    (f) $A = [0, 2] \times [0, 2] \cup \{(1, 1)\}$

    (g) $A = \mathbb{Q} \times \{0, 5\}$

12. Quando possível, dê exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que:

    (a) seja finito e fechado e não vazio

    (b) seja aberto mas não limitado

    (c) seja igual ao seu interior

    (d) seja igual à sua fronteira e não seja finito

    (e) tenha por exterior um intervalo ilimitado

13. Quando possível, dê exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que:

    (a) seja finito e fechado e não vazio

    (b) seja aberto mas não limitado

    (c) seja igual ao seu interior

    (d) seja igual à sua fronteira e não seja finito

    (e) tenha por exterior um *intervalo* de $\mathbb{R}^2$ não limitado

14. Quais dos seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$são conexos?

    (a) $A =]-\infty, 1[$

    (b) $A = [1, 3[$

    (c) $A = [1, 2[\cup [10, 15[$

    (d) $A = [1, 2[\times [10, 15[$

    (e) $A = ([-1, 1[\times [-1, 1[) \cup ([2, 3[\times [0, 1[)$

    (f) $A = ([-2, -1] \times [0, 2]) \cup ([-1, 1] \times [0, 1]) \cup ([1, 2] \times [0, 2])$

15. Quais dos seguintes conjuntos são convexos?

    (a) $A =]-\infty, 1[$

    (b) $A = [1, 3[$

    (c) $A = [1, 2[\cup [10, 15[$

    (d) $A = [1, 2[\times [10, 15[$

    (e) $A = ([-1, 1[\times [-1, 1[) \cup ([2, 3[\times [0, 1[)$

16. Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy<0\right\}\\
B &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)=\left(\frac{2n+1}{2n},-\frac{1}{n}\right), \forall n\in\mathbb{N}\right\}\\
C &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \min\{x,y\}\geq 4 \quad\wedge\quad y-x<0\right\}\\
D &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\leq 4 \quad\wedge\quad y-x^2\leq 0 \ \wedge\quad y-1\geq 0\right\}\\
E &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-\ln x\geq 0 \quad\wedge\quad y-e^x<0\right\}\\
F &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\geq 2 \quad\wedge\ y=e^x\right\}\\
G &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\geq 2 \quad\vee\ y=e^x\right\}\\
G &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\geq 2 \quad\vee\ x=1\right\}
\end{aligned}$$

(a) Represente-os graficamente.

(b) Determine, para cada um, o interior, o exterior, a fronteira, a aderência e o derivado.

(c) Indique, justificando pela definição mas com recurso a alguma intuição, quais dos conjuntos são fechados. E convexos? E conexos?

17. Considere os conjuntos assim definidos

$$A=\left\{x\in\mathbb{R} : 16\leq x^4\leq 81\right\} \quad \text{e} \quad B=\{x\in\mathbb{R} : 0\leq \ln x\leq 1\}$$

(a) Determine o conjunto $A\backslash B$ e represente-o em linguagem de intervalos.

(b) Seja o conjunto $D=(A\cap\mathbb{Z})\cup(B\cap\mathbb{Q})$.Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência e o conjunto derivado de D. Diga ainda se D é aberto ou fechado.

(c) Seja o conjunto $E=(A\cap\mathbb{Z}^-)\cup fr(B)$.Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência e o conjunto derivado de E. Diga ainda se E é aberto ou fechado.

18. Seja o conjunto A dado por $A=[0,5]$.

(a) É o conjunto A fechado?

(b) Determine o conjunto complementar de A. Este conjunto é aberto ou fechado?

19. Seja o conjunto A dado por $A=\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

(a) É o conjunto A aberto?

(b) Determine o conjunto complementar de A. Este conjunto é aberto ou fechado?

20. Diga se é verdadeiro ou falso:

    (a) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado. Portanto não tem pontos de acumulação.

    (b) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right]$ é um conjunto aberto.

    (c) A reunião de uma família finita de conjuntos fechados é sempre um fechado.

21. Mostre que a distância de $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$, verifica as propriedades (válidas para quaisquer x, y, z $\in \mathbb{R}$):

    (a) (i) $d(x,y) \geq 0$

    (ii) $d(x,y) = d(y,x)$

    (iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

    (b) Verifique que as seguintes funções definidas para $x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$ não são distâncias.

    i. $d_1(x,y) = x - y$

    ii. $d_2(x,y) = |x| - y$

    iii. $d_3(x,y) = ||x| - y|$.

22. (a) Mostre que a intersecção de uma classe finita ou infinita de conjuntos fechados é ainda um conjunto fechado.

    (b) Mostre que a intersecção de uma classe finita de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto. Mostre, por meio de um contra-exemplo, que a intersecção de uma classe infinita de conjuntos abertos pode, contudo, não ser um conjunto aberto.

23. (a) Mostre que a reunião de uma classe finita ou infinita de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto.

    (b) Mostre que a reunião de uma classe finita de conjuntos fechados é ainda um conjunto fechado. Mostre, por meio de um contra-exemplo, que a reunião de uma classe infinita de conjuntos fechados pode, contudo, não ser um conjunto fechado.

1.3 Fichas de Auto-Avaliação

1.3.1 Ficha de Auto-Avaliação Nº1

1. Considere o conjunto
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = 1 + (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$
   (a) Determine o interior, a fronteira, o exterior, a aderência e o derivado de A.

   (b) Averigue se o conjunto A é aberto ou fechado.

   (c) Averigue se o conjunto A é limitado.

2. Seja a função real de variável real definida por
$$g(x) = x\cos(2x)$$
   (a) Determine a primeira derivada da função g.

   (b) Determine a primitiva da função g.

   (c) Seja o conjunto B definido por $B = \left\{ g(0), g(\frac{\pi}{4}), g(\pi) \right\}$. Averigue se B é um conjunto aberto ou se é um conjunto fechado.

3. Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^2 \leq 0 \right\} \\ B &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2 + \sin x \quad \right\} \\ C &= B \backslash A \\ D &= A \cap B \end{aligned}$$
   (a) Represente-os graficamente.

   (b) Determine o interior, o exterior, a fronteira, a aderência e o derivado de C. Indique, também, se o conjunto é aberto ou fechado, limitado, convexo e/ou conexo.

1.3.2 Ficha de Auto-Avaliação Nº2

1. Considere a seguinte função real de variável real dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ e^{-x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

   (a) Qual é o domínio da função f.

   (b) Indique em que pontos do domínio a função é contínua?

   (c) Indique em que pontos do domínio a função tem derivada?

   (d) Indique em que pontos do domínio a função é diferenciável?

   (e) Determine $\lim f\left(-\frac{1}{n}\right)$.

   (f) Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 2\}$. Determine o seu interior, fronteira, exterior, aderência, derivado. Além disso, averigue se o conjunto é fechado ou aberto.

   (g) Considere a sucessão $u_n = nf(n)$. É a sucessão u_n monótona?

   (h) Considere outra sucessão: $v_n = e + \int\limits_{-2n}^{-1} f(x)dx$ em que $n \in \mathbb{N}$. Averigue se o conjunto dos termos da sucessão v_n é fechado ou aberto.

2. Considere a função $f(x, y) = 2x^2 - y$.

   (a) Determine a curva de nível da função f com cota 1 e represente-a graficamente.

   (b) Determine $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

   (c) Seja o conjunto $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 2 \wedge x < 0\right\}$. Represente o conjunto B. Determine o seu interior, fronteira, aderência e derivado. Além disso, averigue se o conjunto é fechado ou aberto. Averigue também se é conexo e/ou convexo.

3. Considere a seguinte função real de variável real dada por $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.

   (a) Qual é o domínio da função f?

   (b) Determine a primitiva de f tal que no ponto de abcissa 0 tem ordenada $3 + \ln(2e)$.

   (c) Determine os limites de cada uma das sucessões $u_n = f(n), w_n = \sin n.f(n)$, $t_n = \sqrt[n]{f(n)}$ e $r_n = (n.f(n))^{n+2}$.

   (d) Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, supremo, máximo, ínfimo, mínimo do conjunto $F = \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : f(x) > 0\}$. É o conjunto F limitado?

2 Limites e Continuidade por Vizinhanças

2.1 Exercícios Resolvidos

1. Prove pela definição que sendo $f(x) = 2x$,então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 2a$.

   Resolução:

   $$\lim_{x \to a} f(x) = 2a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2a| < \varepsilon$$

   Então

   $$|f(x) - 2a| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 2a| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Seja $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$.

   Logo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 2a$.

2. Prove pela definição que a função cuja expressão é dada por x^2 é contínua em $x = 2$.

   Resolução:

   (a) Para provar que a função é contínua em $x = 2$, temos que ter $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ em que $f(x) = x^2$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$. Assim há que provar esta última igualdade.

   $$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - 2| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$$

   Logo

   $$\left|x^2 - 4\right| = |x - 2|\,|x + 2|$$

   Atente-se que por definição $|x - 2| < \delta$ e que um majorante de $|x + 2|$ é 5. Logo

   $$\left|x^2 - 4\right| = |x - 2|\,|x + 2| < 5\delta$$

   Logo seja $5\delta = \varepsilon$ e, portanto, $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

   Portanto, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ e x^2 é contínua em $x = 2$.

3. Seja a função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$.

   (a) A função f é contínua em $[1, 3]$?

   (b) A função f tem máximo e mínimo em $[1, 3]$?

   (c) A conclusão a que chegou na alínea anterior contradiz o Teorema de Weierstrass?

   Resolução:

   (a) A função f não é contínua em $[1, 3]$ dado que não é contínua em $x = 1$ $\left(\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)\right)$.

   (b) A função f tem máximo igual a 2, mas não tem mínimo.

   (c) Não contradiz o Teorema de Weierstrass, visto que este requere continuidade da função num intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ e neste caso não temos a continuidade.

2.2 Exercícios Propostos

1. Prove pela definição que:

   (a) Sendo $f(x) = 3x + 1$,então $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$.

   (b) Sendo $f(x) = \frac{1}{x}$,então $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

   (c) Sendo $f(x) = \sqrt{x}$,então $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$.

   (d) Sendo $f(x) = a + bx$,então $\lim\limits_{x \to k} f(x) = a + bk$.

   (e) Sendo $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$,então $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

2. Prove pela definição que:

   (a) A função cuja expressão é dada por $x + 1$ é contínua em $x = 2$.

   (b) A função cuja expressão é dada por x^4 é contínua em $x = 2$.

   (c) A função cuja expressão é dada por $\sqrt{x}$ é contínua em $x = a$.

3. Suponha que se pretendia provar pela definição que para a função $f(x) = 2x$, se tinha $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ (o que é errado: é 4). Observe a que incoerência chegará necessariamente ao usar a definição.

4. Seja a função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$.

   (a) A função f é contínua em $[1, 3]$?

   (b) A função f tem máximo e mínimo em $[1, 3]$?

   (c) A conclusão a que chegou na alínea anterior contradiz o Teorema de Weierstrass?

5. Comente a veracidade de cada alínea em relação à afirmação seguinte : "uma função que tenha limite finito à direita no ponto $x = a$ é contínua em a"se e só se:

   (a) Tiver limite finito à esquerda

   (b) Tiver limite finito à esquerda cujo valor é igual ao limite à direita

   (c) Tiver limite à esquerda diferente do limite à direita

   (d) Existir uma vizinhança de a em que a função esteja definida

6. Comente a frase

   "*A existência de limite num ponto equivale à continuidade nesse ponto*".

   (Sugestão: considere uma função f e suponha os casos em que o ponto pertence ou não ao domínio da função; ilustre as duas situações).

2.3 Fichas de Auto-Avaliação

2.3.1 Ficha de Auto-Avaliação N°1

1. Seja a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

   (a) Determine o domínio D da função f.

   (b) Indique se o domínio é fechado ou aberto.

   (c) Considere o conjunto $A = D \cap \mathbb{Q}$. Indique se A é aberto ou fechado.

   (d) Prove, pela definição, que f é contínua em $x = 0$.

   (e) Determine o conjunto dos majorantes e minorantes de D.

2. Seja a função real de variável real definida por $f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e $f(0) = 1$.

   (a) Determine a expressão analítica da função f.

   (b) Determine o domínio D da função f. É o conjunto D aberto e/ou fechado?

   (c) Tem a função f máximo no intervalo $[1, 3]$. Se sim, qual o seu valor?

   (d) Tem a função f mínimo no intervalo $[-1, 1]$. Se sim, qual o seu valor?

2.3.2 Ficha de Auto-Avaliação Nº2

1. Verdadeiro ou falso:

   (a) Se o ponto $(2,1)$ pertence ao gráfico de uma função e se f for contínua, então temos $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in V_\delta(1) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(2)$.

   (b) Se o ponto $(-1,3)$ pertence ao gráfico de uma função e se f for contínua, então temos $\exists\varepsilon > 0, \forall\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in V_\delta(-1) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(3)$.

   (c) Se o ponto $(0,1)$ pertence ao gráfico de uma função e se f for contínua, então temos $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

   (d) Se o ponto $(2,3)$ pertence ao gráfico de uma função e se f for descontínua, então temos $f(2) = 3$.

2. Seja a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{-\ln x}$.

   (a) Determine o domínio D da função f.

   (b) Será f prolongável por continuidade no ponto de abcissa 0?

   (c) Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 2\}$. Escreva o conjunto A na forma de intervalos.

   (d) Determine o interior, a fronteira, a aderência e o derivado do conjunto A. Diga se A é aberto ou fechado.

   (e) Determine o conjunto dos majorantes, minorantes, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo. Será o conjunto A limitado?

3. Seja a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

   (a) Será f injectiva?

   (b) Tem a função f assimptotas?

   (c) Seja a sucessão $u_n = (-1)^n f(n)$. Mostre que u_n não é monótona e determine o seu limite.

   (d) Determine $\int f(x)$.

   (e) A partir do gráfico de $f(x)$, como se constrói o gráfico de $-f(x+2)$? E o gráfico de $|-f(x)+3|$?

3 Diferencial de uma função num ponto; exemplos em $\mathbb{R}^n$; fórmulas de Taylor e de Mac-Laurin

3.1 Exercícios Resolvidos

1. Use o valor do diferencial para criar uma aproximação de primeira ordem a $\sqrt[3]{28}$

   Resolução:

   Considere a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e calcule-se a aproximação de primeira ordem:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

   isto é

$$\sqrt[3]{x} \approx \sqrt[3]{x_0} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,(x - x_0)$$

   Assim

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{28} &\approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}\,(28 - 27) \\ &\approx 3 + \frac{1}{27} \end{aligned}$$

2. Considere as duas funções seguintes muito simples

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2$$

   Calcule os valores aproximados de $f(1,21)$ e de $g(1,21)$ por uma aproximação de primeira ordem com base em $x = 1$. Constate que no primeiro caso (função côncava) a aproximação de primeira ordem sobreavalia o verdadeiro valor, enquanto no segundo caso (função convexa) subavalia.

   Resolução:

   Uma aproximação de 1ª ordem para $f(x)$ é dada por

$$f(x) \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,(x - x_0)$$

   Desta forma,

$$f(1,21) \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\,(1,21 - 1) = 1 + 0,5 \times 0,21 = 1,105$$

   Então esta aproximação sobreavalia o verdadeiro valor que é $\sqrt{1,21} = 1,10$

   Uma aproximação de 1ª ordem para $g(x)$ é dada por

$$g(x) \approx x_0^2 + 2x\,(x - x_0)$$

   Desta forma,

$$g(1,21) \approx 1^2 + 2 \times 1 \times (1,21 - 1) = 1 + 0,42 = 1,42$$

   Então esta aproximação subavalia o verdadeiro valor que é $1,21^2 = 1,441$.

3. Considere a função $f(x) = e^x$. Calcule o diferencial e o acréscimo da função nos pontos $x = 1, x = 2, x = 3$ e $x = 4$ para um mesmo acréscimo de $dx = 1$; construa um quadro onde compare os sucessivos diferenciais com os respectivos acréscimos; o que pode concluir da forma da função?

Resolução:

diferencial: $df = f'(x_0)dx = e^x dx$

acréscimo: $\Delta f = f(x + dx) - f(x) = e^{x+dx} - e^x = e^x \left(e^{dx} - 1\right)$

x	Diferencial	Acréscimo
1	e	$e\,(e-1)$
2	e^2	$e^2\,(e-1)$
3	e^3	$e^3\,(e-1)$
4	e^4	$e^4\,(e-1)$

Como $e - 1 > 1$, o acréscimo é sempre superior ao diferencial e portanto a função é convexa.

Como estamos a falar de diferenciais devíamos estar a calcular para um dx infinitesimal como $dx = 0,01$. No entanto, para comparar valores é necessário máquina de calcular (o que não se pretende neste curso). Se assim o desejássemos obteríamos as mesmas conclusões a partir da seguinte tabela:

x	Diferencial	Acréscimo
1	0.027182818	0.027319187
2	0.073890561	0.074261248
3	0.200855369	0.201863002
4	0.5459815	0.54872053

4. Considere a função $y = 3x^2 + 7x - 5$.

   (a) Determine o seu diferencial.

   (b) Considere uma variação de x de 2 para 3. Qual a variação de y resultante desta variação de x? Compare esta variação com a aproximação de primeira ordem a partir do diferencial.

   (c) Repita a alínea (b) para 4 e 5.

   (d) Observe graficamente a origem das diferenças entre a variação real e a aproximação.

Resolução:

Considerando $f(x) = 3x^2 + 7x - 5$.

(a) $df = f'(x)dx = (6x + 7)\,dx$

(b) A variação de y resultante da variação de x de 2 para 3 é dada por $\Delta f = f(3) - f(2) = 43 - 21 = 22$.

A aproximação de primeira ordem é $df = (6 \times 2 + 7) \times 1 = 19$

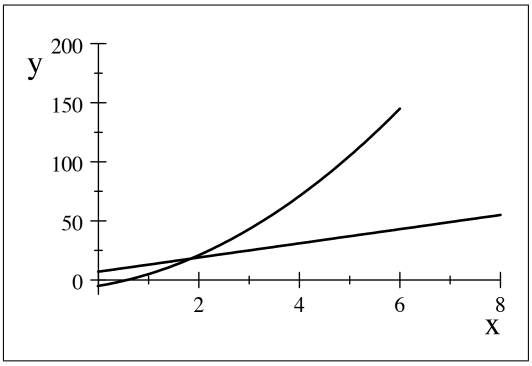
Existe uma diferença entre a variação real e a aproximação de primeira ordem de 3.

(c) A variação de y resultante da variação de x de 4 para 5 é dada por $\Delta f = f(5) - f(4) = 105 - 71 = 34$

A aproximação de primeira ordem é $df = (6 \times 4 + 7) \times 1 = 31$

Existe uma diferença entre a variação real e a aproximação de primeira ordem de 3.

(d)



Nota: Se as alíneas anteriores fossem para acréscimos infinitesimais como devia ser, teríamos o seguinte.

(b) A variação de y resultante da variação de x de 5 para $5,01$ é dada por $\Delta f = f(5,01) - f(5) = 105,3703 - 105 = 0,3703$.

A aproximação de primeira ordem é $df = (6 \times 5 + 7) \times 0,01 = 0,37$

Existe uma diferença entre a variação real e a aproximação de primeira ordem de 0,0003.

(c) A variação de y resultante da variação de x de $5,02$ para $5,03$ é dada por $\Delta f = f(5,03) - f(5,02) = 106,1127 - 105,7412 = 0,3715$

A aproximação de primeira ordem é $df = (6 \times 5,02 + 7) \times 0,01 = 0,3712$

Existe uma diferença entre a variação real e a aproximação de primeira ordem de 0,0003.

5. Considere as seguintes funções de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, calcule a expressão genérica (ou o valor concreto quando são dados pontos) do diferencial total:

   (a) $f(x, y) = x^2 + 8xy^4 + y^6$

   (b) $f(x, y) = e^x + e^y - e^{xy}$

   (c) $dx = 1, dy = -2$ e estamos "situados"no ponto $(3, 5)$, considerando a função da alínea (a).

   (d) $dx = 0,2, dy = 0,3$ e estamos "situados"no ponto $(2, 2)$, considerando a função da alínea (b).

Resolução:

(a)

$$df\,(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \left[2x + 8y^4\right] dx + \left[32xy^3 + 6y^5\right] dy$$

(b)

$$df\,(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \left[e^x - ye^{xy}\right] dx + \left[e^y - xe^{xy}\right] dy$$

(c)

$$df\,(3,5) = \left[2 \times 3 + 8 \times 5^4\right] \times 1 + \left[32 \times 3 \times 5^3 + 6 \times 5^5\right] \times (-2) = -56494$$

(d)

$$df\,(2,2) = \left[e^2 - 2e^{2\times 2}\right] \times 0,2 + \left[e^2 - 2e^{2\times 2}\right] \times 0,3 = 0,5 \times \left[e^2 - 2e^4\right] = -50,9$$

6. Sabendo por vias geométricas o valor de $sen(30^o)$ deduza o valor de $sen(31^o)$ pela Fórmula de Taylor no seu desenvolvimento até à 3ª ordem. Verifique o verdadeiro valor numa máquina de calcular.

   Resolução:

   Primeiro veja-se que

$$sen(31^{\text{o}}) = sen(30^{\text{o}} + 1^{\text{o}}) = sen\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)$$

   Vamos agora determinar a fórmula de Taylor até à 3ª ordem para a função $sen(x)$:

$$f(x) \approx f\,(x_0) + f'\,(x_0)\,(x - x_0) + f''\,(x_0)\,\frac{(x - x_0)^2}{2!} + f'''\,(x_0)\,\frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

   $f(x) = sen(x) \Longrightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

   $f'(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   $f''(x) = -sen(x) \Longrightarrow f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

   $f'''(x) = -\cos(x) \Longrightarrow f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

   $f^{(iv)}(x) = sen(x)$

   Assim

$$\begin{aligned} sen\,(31^{\text{o}}) &\approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{180} + f''\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^2}{2!} + f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^3}{3!} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^2}{2!} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^3}{3!} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{360}\pi - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \end{aligned}$$

   Esta aproximação resulta em $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{360}\pi - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 = 0.51503807296522$, enquanto que o número que se extrai da máquina de calcular é 0.515038074910054, o que resulta numa diferença de 0.000000001944830075.

   Se tivermos em conta que o erro é dado por

$$R_3 = f^{(IV)}\,(c)\,\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^4}{4!} \quad \text{com} \quad \frac{\pi}{6} < c < \frac{31\pi}{180}$$

   Logo um seu majorante é

$$|R_3| = \left|\sin(c)\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^4}{4!}\right| = |\sin(c)|\,\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^4}{4!} \leq 1\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^4}{4!} = \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^4}{4!}$$

   que se formos a uma máquina de calcular resulta em $\frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^4}{4!} = 0.000000003\,866\,3$ que é um valor acima da diferença encontrada visto que obtivémos um majorante para o erro.

7. Para a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$:

   (a) Desenvolva até à 3ª ordem em série de MacLaurin no abstracto e para o ponto de abcissa $x = 0,5$. Calcule também um majorante para o respectivo resto de Lagrange.

   (b) Desenvolva até à 5ª ordem em série de MacLaurin no abstracto e para o ponto de abcissa $x = 0,5$. Calcule também um majorante para o respectivo resto de Lagrange.

   (c) Comente sobre os resultados de (a) e (b)

Resolução:

A fórmula de MacLaurin faz o desenvolvimento em torno do ponto $x = 0$.

(a)

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\,\frac{x^3}{3!}$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}} \Longrightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{(x+1)^5}} \Longrightarrow f''(0) = \frac{3}{4}$

$f'''(x) = -\frac{15}{8\sqrt{(x+1)^7}} \Longrightarrow f'''(0) = -\frac{15}{8}$

$f^{(iv)}(x) = \frac{105}{16\sqrt{(x+1)^9}}$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x+1}} &\approx f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\,\frac{x^3}{3!} \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\frac{x^2}{2!} - \frac{15}{8}\frac{x^3}{3!} \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3
\end{aligned}$$

O erro é dado por

$$R_3 = f^{(IV)}(c)\,\frac{x^4}{4!} \quad \text{com} \quad 0 < c < x$$

Assim o seu majorante é dado por

$$|R_3| = \left| f^{(IV)}(c)\,\frac{x^4}{4!} \right| = \left| \frac{105}{16\sqrt{(c+1)^9}}\,\frac{x^4}{4!} \right| = \frac{105}{16\sqrt{(c+1)^9}}\,\frac{x^4}{4!}$$

Note que

$$\begin{aligned}
0 &< c < x \Leftrightarrow 0+1 < c+1 < x+1 \Leftrightarrow (0+1)^9 < (c+1)^9 < (x+1)^9 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(0+1)^9} < \sqrt{(c+1)^9} < \sqrt{(x+1)^9} \Leftrightarrow 16\sqrt{(0+1)^9} < 16\sqrt{(c+1)^9} < 16\sqrt{(x+1)^9} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{16\sqrt{(0+1)^9}} > \frac{1}{16\sqrt{(c+1)^9}} > \frac{1}{16\sqrt{(x+1)^9}} \Leftrightarrow \frac{105}{16\sqrt{(0+1)^9}} > \frac{105}{16\sqrt{(c+1)^9}} > \frac{105}{16\sqrt{(x+1)^9}} \\
&\Leftrightarrow \frac{105}{16} > \frac{105}{16\sqrt{(c+1)^9}} > \frac{105}{16\sqrt{(x+1)^9}}
\end{aligned}$$

Veja-se que

$$\frac{105}{16\sqrt{(c+1)^9}} < \frac{105}{16} \quad \forall c \in]0,x[$$

Logo

$$|R_3| < \frac{105}{16}\frac{x^4}{4!}$$

Assim para o ponto de abcissa $x = 0.5$ obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{0,5+1}} \approx 1 - \frac{1}{2} \times 0,5 + \frac{3}{8} \times 0,5^2 - \frac{5}{16} \times 0,5^3 = 0.8046875$$

e um majorante para o erro é $\frac{105}{16}\frac{0,5^4}{4!} = 0,0170898$

Se calcularmos o valor real obtemos $\frac{1}{\sqrt{0,5+1}} = 0,816496580927726$ cuja diferença para o valor aproximado é $0,011809080927726$ que obviamente é menor que o majorante do erro.

(b)

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(IV)}(0)\frac{x^4}{4!} + f^{(V)}(0)\frac{x^5}{5!}$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}} \Longrightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{(x+1)^5}} \Longrightarrow f''(0) = \frac{3}{4}$

$f'''(x) = -\frac{15}{8\sqrt{(x+1)^7}} \Longrightarrow f'''(0) = -\frac{15}{8}$

$f^{(IV)}(x) = \frac{105}{16\sqrt{(x+1)^9}} \Longrightarrow f^{(IV)}(0) = \frac{105}{16}$

$f^{(V)}(x) = -\frac{945}{32\sqrt{(x+1)^{11}}} \Longrightarrow f^{(V)}(0) = -\frac{945}{32}$

$f^{(VI)}(x) = \frac{10395}{64\sqrt{(x+1)^{13}}}$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x+1}} &\approx f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(IV)}(0)\frac{x^4}{4!} + f^{(V)}(0)\frac{x^5}{5!} \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\frac{x^2}{2!} - \frac{15}{8}\frac{x^3}{3!} + \frac{105}{16}\frac{x^4}{4!} - \frac{945}{32}\frac{x^5}{5!} \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{105}{384}x^4 - \frac{945}{3840}x^5
\end{aligned}$$

O erro é dado por

$$R_3 = f^{(VI)}(c)\frac{x^6}{6!} \quad \text{com} \quad 0 < c < x$$

Assim o seu majorante é dado por

$$|R_3| = \left| f^{(VI)}(c)\frac{x^6}{6!} \right| = \left| \frac{10395}{64\sqrt{(c+1)^{13}}}\frac{x^6}{6!} \right| = \frac{10395}{64\sqrt{(c+1)^7}}\frac{x^6}{6!}$$

Note que

$$\begin{aligned}
0 &< c < x \Leftrightarrow 0+1 < c+1 < x+1 \Leftrightarrow (0+1)^{13} < (c+1)^{13} < (x+1)^{13} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(0+1)^{13}} < \sqrt{(c+1)^{13}} < \sqrt{(x+1)^{13}} \Leftrightarrow 64\sqrt{(0+1)^{13}} < 64\sqrt{(c+1)^{13}} < 64\sqrt{(x+1)\,13} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{64\sqrt{(0+1)^{13}}} > \frac{1}{64\sqrt{(c+1)^{13}}} > \frac{1}{64\sqrt{(x+1)^{13}}} \Leftrightarrow \frac{10395}{64\sqrt{(0+1)^{13}}} > \frac{10395}{64\sqrt{(c+1)^{13}}} > \frac{10395}{64\sqrt{(x+1)^{13}}} \\
&\Leftrightarrow \frac{10395}{64} > \frac{10395}{64\sqrt{(c+1)^{13}}} > \frac{10395}{64\sqrt{(x+1)^{13}}}
\end{aligned}$$

Veja-se que

$$\frac{10395}{64\sqrt{(c+1)^{7}}} < \frac{10395}{64} \quad \forall c \in]0, x[$$

Logo

$$|R_3| < \frac{10395}{64}\frac{x^6}{6!}$$

Assim para o ponto de abcissa $x = 0.5$ obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{0,5+1}} \approx 1 - \frac{1}{2} \times 0,5 + \frac{3}{8} \times 0,5^2 - \frac{5}{16} \times 0,5^3 + \frac{105}{384} \times 0,5^4 - \frac{945}{3840} \times 0,5^5 = 0.8140869140625$$

e um majorante para o erro é $\frac{10395}{64}\frac{0,5^6}{6!} = 0.00352478027$.

Se calcularmos o valor real obtemos $\frac{1}{\sqrt{0,5+1}} = 0,816496580927726$ cuja diferença para o valor aproximado é 0.00240966686522615 que obviamente é menor que o majorante do erro.

(c) Quando se faz um desenvolvimento com mais 2 termos obtivémos uma aproximação mais próxima do valor real.

3.2 Exercícios Propostos

1. Use o valor do diferencial para criar uma aproximação de primeira ordem a $\sqrt{5}$

2. **C**onsidere as duas funções seguintes muito simples

$$f(x) = \sqrt{2x} \quad \text{e} \quad g(x) = (2x)^2$$

   Calcule os valor aproximado de $f(2,1)$ e de $g(2,1)$ por uma aproximação de primeira ordem com base em $x = 2$. Constate que no primeiro caso (função côncava) a aproximação de primeira ordem sobreavalia o verdadeiro valor, enquanto no segundo caso (função convexa) subavalia.

3. Considere a função $f(x) = \ln x$. Calcule o diferencial e o acréscimo da função nos pontos $x = 1, x = 2, x = 3$ e $x = 4$ para um mesmo acréscimo de $dx = 0.01$; construa um quadro onde compare os sucessivos diferenciais com os respectivos acréscimos; o que pode concluir da forma da função?

4. Considere a função $y = 2x^2 + 6x - 1$.

   (a) Determine aexpressão geral do seu diferencial.

   (b) Considere uma variação de x de 3 para $3,01$. Qual a variação de y resultante desta variação de x? Compare esta variação com a aproximação de primeira ordem a partir do diferencial.

   (c) Repita a alínea (b) para 3.02 e 3.03.

   (d) Observe graficamente a origem das diferenças entre a variação real e a aproximação.

5. Considere as seguintes funções de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, calcule a expressão genérica (ou o valor concreto quando são dados pontos) do diferencial destas funções, em geral designado por diferencial total:

   (a) $f(x,y) = x^3 + 8xy^4 + (2y)^6$

   (b) $f(x,y) = \ln(xy) + \ln(x) - \ln(y) + \ln(\ln(x))$

   (c) $dx = 0,01, dy = -0,02$ e estamos situados no ponto $(0,1)$, considerando a função da alínea (a).

   (d) $dx = 0,25, dy = 0,1$ e estamos situados no ponto $(e,1)$, considerando a função da alínea (b).

6. Prática da fórmula de McLaurin

   a) As seguintes funções são grandes referências dos desenvolvimentos de Taylor e de McLaurin. Proceda ao seu desenvolvimento até ao momento em que se aperceba da lei de formação. Não se preocupe de momento com o resto pois será melhor compreendido com casos aplicados a cálculos concretos..

   $f(x) = e^x$

   $f(x) = \sin x$

   $f(x) = \cos x$

   $f(x) = \ln(x+1)$

b) O desenvolvimento da função $f(x) = \ln(x+1)$ apresenta um problema que só poderá ser bem compreendido em Cálculo 2. E o problema é que, ao contrário do que se passa com as outras três funções e com boa parte das funções mais familiares, o desenvolvimento de Taylor de $f(x) = \ln(x+1)$ só compensa se $-1 < x \leq 1$. Embora não possa compreender porquê, prepare o desenvolvimento numa folha excel até por exemplo à ordem 10, insira o valor da função numa outra célula, e compare o que se passa para diversos valores de x.

7. Os desenvolvimentos das funções trigonométricas inversas em fórmula de McLaurin são muito fastidiosos; oferecemos estes dois:

   $\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + ...$

   $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}..$

   Confirme os dois primeiros termos de cada desenvolvimento. Verá a quantidade de derivadas que terá de fazer só para isso!

8. Sabendo por vias geométricas o valor de $\cos(30^o)$ deduza o valor de $\cos(31^o)$ pela Fórmula de Taylor no seu desenvolvimento até à 3ª ordem. Verifique o verdadeiro valor numa máquina de calcular.

9. Para os cálculos concretos necessários a este exercício use uma folha excel. Nada contra.

   Para a função $f(x) = e^x$:

   (a) Desenvolva até à 3ª ordem em série de MacLaurin no abstracto e depois proceda aos cálculos para o ponto de abcissa $x = 0,5$. Calcule também um majorante para o respectivo resto de Lagrange.

   (b) Desenvolva até à 5ª ordem em série de MacLaurin no abstracto e depois para o ponto de abcissa $x = 0,5$. Calcule também um majorante para o respectivo resto de Lagrange.

   (c) Comente sobre os resultados de (a) e (b). Compare o majorante do erro com o erro efectivo (que ele próprio é uma aproximação...).

10. Considere as seguintes funções e os seguintes pontos:

    (a) $e^{-x} \operatorname{sen} x$ $\quad x = 0.2$

    (b) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $\quad x = 0.5$

    (c) $\log(x+1)$ $\quad x = 0.5$

    (d) $\sqrt[5]{x+1}$ $\quad x = 0.5$

    Desenvolva-as até à 3ª ordem (ou seja até ao termo onde figura a 3ª derivada) e depois até à 5ª ordem (ou seja até ao termo onde figura a 5ª derivada) em série de Mac-Laurin; para cada caso concreto calcule agora um majorante para o respectivo resto de Lagrange.

    (e) Faça um quadro síntese com as duas aproximações e os dois majorantes dos erros de cada uma das alíneas dos dois exercícios anteriores

11. Desenvolva em **fórmula de Taylor**, até à 3ª ordem e em torno do ponto 1, as seguintes funções; para cada caso concreto calcule um majorante para o respectivo resto de Lagrange:

    (a) $x^2 - 2x$

    (b) $x \log(x+1)$

    (c) $\sqrt{x}$

    (d) $e^{-(x-1)^2}$

12. Mostre como a função $\operatorname{arctg} x$ pode ser usada para calcular valores aproximados de π;como valor de π é universalmente conhecido (será mesmo...???) calcule o seu valor aproximado com uma aproximação de 5ª ordem pela fórmula de Mac-Laurin (**use o desenvolvimento que lhe oferecemos em 7**).

13. Comente as seguintes afirmações:

    (a) Sendo o erro que se comete quando se toma $f(a) + f'(a)(x-a)$ em vez de $f(x)$ dado aproximadamente por $\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$, este erro é não negativo quando a função é convexa.

    (b) O polinómio de Maclaurin de 2º grau que aproxima a função $f(x) = e^{x^2}$ é um polinómio completo (um polinómio completo do 2º grau tem a forma $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$).

14. Calcule as primeiras 4 casas decimais de e.

3.3 Ficha de Auto-Avaliação

1. Considere a seguinte função real de variável real $f(x) = \ln x$.

   (a) Determine o domínio de f.

   (b) Determine uma aproximação de ordem 3 para a função f em torno do ponto de abcissa 1.

   (c) Determine um majorante do erro da aproximação da alínea (b).

   (d) Determine $\int\limits_1^e f(x)dx$.

   (e) Considere o conjunto $C = \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : f(x) > 1\}$. Determine se C é aberto ou fechado.

   (f) Considere a sucessão $u_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n > 10 \\ 2^n & \text{se } n \leq 10 \end{cases}$. Determine $\lim f(u_n)$.

2. Considere $f(x, y) = x + \ln y$.

   (a) Determine o domínio da função f representando-o graficamente. Determine também o seu interior, fronteira, aderência e derivado. Indique se o domínio é fechado ou aberto.

   (b) Determine o diferencial total de f.

   (c) Determine a curva de nível da função f de cota 1 e designe esta função por $g(x)$.

   (d) Determine a fórmula de MacLaurin de ordem 4 da função g.

   (e) Seja a função p dada por $p(x) = f(-x^2, e^x)$. Determine, pela definição, a derivada da função p no ponto de abcissa 1.

3. Considere a seguinte função $f(x) = xg'(x)$. Sabendo que g é diferenciável até à ordem 4 e que $g'(-1) = 2g''(-1) = 3g'''(-1) = 6$, mostre que a fórmula de Taylor de ordem 2 da função f em torno do ponto de abcissa -1 é dada por $2x^2 + 7x - 1$.

4. Se todas as derivadas a partir de ordem 3 (inclusive) de uma função f for zero para todos os pontos do seu domínio e $f(2) = \frac{1}{2}f'(2) = \frac{1}{3}f''(2) = 1$, determine a função f.

4 Inversa, Implícita e Composta

4.1 Exercícios Resolvidos

1. Calcule a derivada das seguintes funções, recorrendo à aplicação da derivada da função composta:

   (a) $\cos(x^3)$

   (b) $(\ln x)^3$

   (c) $\cos^3(x)$

   (d) $\cos^3(x^3)$

   Resolução:

   (a) Sejam $f(x) = x^3$ e $g(x) = \cos x$.

   Assim,
   $$f'(x) = 3x^2 \text{ e } g'(x) = -\sin(x)$$
   A expressão analítica da função $gof(x)$ é: $\cos(x^3)$. Deste modo,
   $$\left(\cos(x^3)\right)' = g'(f(x))\ f'(x) = -\sin(x^3)3x^2 = -3x^2\sin(x^3)$$
   Na prática casos destes são resolvidos com algum automatismo (*derivada da função vezes derivada da base*). No entanto é útil ter a fórmula da função composta presente para futuros desenvolvimentos.

   (b) Sejam $f(x) = x^3$ e $g(x) = \ln x$.

   Assim,
   $$f'(x) = 3x^2 \text{ e } g'(x) = \frac{1}{x}$$
   A expressão analítica da função $fog(x)$ é: $(\ln x)^3$. Deste modo,
   $$\left((\ln x)^3\right)' = f'(g(x))\ f'(x) = 3\left((\ln x)^2\right)\frac{1}{x}$$

   (c) $\left(\cos^3 x\right)' = \left[(\cos x)^3\right]' = 3\cos^2 x.(-\sin x) = -3\left(\cos x\right)^2 \sin x$

   (d) $\left[\cos^3(x^3)\right]' = -3\cos^2(x^3).\sin(x^3).3x^2$

2. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(1) = 2$ e considere-se ainda a função $g(x) = e^x$. Justifique que $h = fog$ é uma função diferenciável em $x = 0$ e determine o valor da sua derivada nesse ponto.

   (a) **Resolução**:

   Como a derivada da função f existe e é finita no ponto 1, podemos dizer que f é uma função diferenciável em $x = 1$. Assim, sendo g uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ (e, em partícular, em

$x = 0$) e f é uma função diferenciável em $x = g(0) = 1$, podemos dizer que $h = fog$ é uma função diferenciável em $x = 0$. E, o valor da sua derivada nesse ponto é:

$$h'(0) = f'(g(0))\ g'(0) = f'(1)\ g\prime(0) = 2 \times e^0 = 2$$

Note-se que, $g'(x) = e^x$.

3. Suponha que conhece **as derivadas das funções inversas** das que são a seguir apresentadas **mas que não conhece as derivadas das próprias funções**. Utilizando a regra de derivação da função inversa, determine a derivada das funções dadas:

   (a) $\ln(x)$

   (b) $\arctan(x)$

   Resolução:

(a) A ideia é a seguinte: sabe que $(e^x)' = e^x$; e mais, sabe que $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)}$; como obter $[\ln x]'$?

Sabemos que $(e^{\ln x}) = x$;derivando ambos os lados vem $(\ln x)'\, e^{\ln x} = 1$.Podemos isolar o que queremos saber, $(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.

(b) A ideia é a mesma: sabe que $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;e mais, sabe que....ora diga; como obter então $[\arctan(x)]'$?

Sabemos que $\tan[\arctan(x)] = x$; então derivando ambos os lados da expressão vem $\frac{1}{\cos^2[\arctan(x)]}\,[\arctan(x)]' = 1$; já apareceu o bocado desejado..$[\arctan(x)]' = \cos^2[\arctan(x)]$; segue-se um interessante jogo de plavras: **qual o coseno quadrado do arco cuja tangente é** x? De outra forma, **se a tangente de um certo ângulo é x, quanto é o seu coseno ao quadrado**?

Ainda de outra maneira, a melhor! Há um ângulo α cuja tangente é x; qual é o quadrado do coseno de α?

Lembra-se da fórmula $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$ ou $\cos^2 a = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha}$;mas se e a tangente de um certo ângulo α é x... $\cos^2 a = \frac{1}{1+x^2}$;enfim

$$[\arctan(x)]' = \frac{1}{1 + x^2}$$

4. Suponha que conhece as derivadas das funções inversas das que são a seguir apresentadas mas que não conhece as derivadas das próprias funções. Utilizando a regra de derivação da função inversa, determine a derivada das seguintes funções, nos pontos indicados:

   (a) $\log(x)$ em $x = 100$

   (b) $\sqrt[5]{x}$ em $x = 1$

   Resolução:

(a) Suponho agora que sei que $(10^x)' = 10^x \ln 10$. Como saber a partir daqui $(\log(x))'$?

Na linha da ginástica anterior posso escrever $\log(10^x) = x$ ou $10^{\log x} = x$. Qual delas me convém neste caso? Exacto, a segunda! Porquê?

$\left(10^{\log x}\right)' = 1$,donde $(\log x)' \left(10^{\log x}\right) \ln 10 = 1$,sendo então $(\log x)' = \frac{1}{(10^{\log x}) \ln 10} = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{1}{100. \ln 2}$

(b) Suponho que sei que $(x^p)' = px^{p-1}$. Assim, usando o mesmo ponto de partida (qual?..) escreverei

$$\left[(\sqrt[p]{x})^p\right]' = p\,(\sqrt[p]{x})^{p-1}\,(\sqrt[p]{x})' = 1 \text{ donde } (\sqrt[p]{x})' = \frac{1}{p(\sqrt[p]{x})^{p-1}} = \frac{1}{p\sqrt[p]{1}^{p-1}} = \frac{1}{p}$$

5. Se f for diferenciável em certo ponto a, poder-se-á afirmar que f^{-1} é diferenciável no ponto correspondente $b = f(a)$?

   (a) **Resolução**:

Nem sempre; **portanto a resposta é não**. Seja o exemplo clássico: $f(x) = x^3$. Esta é uma função diferenciável no ponto $x = 0$ (na verdade, esta função é diferenciável em $\mathbb{R}$), mas a sua função inversa não é diferenciável no ponto $(0, f(0)) = (0, 0)$. De facto

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \text{ e } \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \text{ não está definida em } x = 0$$

6. Considere a *relação* implícita $x^2 + y^2 = 9$. A partir desta relação pode pensar-se em pelo menos uma função $y = f(x)$.

   (a) Por que motivo se diz *relação* implícita e não função implícita?

   (b) Qual a ordenada positiva do ponto de abcissa $x = 1$ por onde passa uma das funções *contidas* na relação implícita dada? Designe essa função por $f(x)$.

   (c) Calcule pela regra da derivada na forma implícita o valor de $f\,'(1)$.

   (d) A partir da forma $x^2 + y^2 = 9$ explicite a *função* $f(x)$ que passa no ponto indicado em (b) e confirme com recurso a esta função o valor encontrado em (c).

   Resolução:

(a) Embora se use e abuse da expressão *função implícita*, é melhor recordar que a expressão dada (e muitas outras) não oferecem a garantia de definirem uma função, unívoca. Na verdade não vem mal ao mundo mas fica bem ter este faco presente.

(b) Se $x = 1$ ....

$$1^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 8$$

Como é pedida a "ordenada positiva", a resposta é $\sqrt{8}$.

(c) Se $x^2 + y^2 = 9$, então, usando uma notação pedagógica...

$$\left(x^2+y^2\right)'_x = (9)'_x \Leftrightarrow 2x+2yy'=0 \Leftrightarrow y' = \frac{-x}{y} \Leftrightarrow f\,'(x) = \frac{-x}{f(x)}$$

Esta relação é válida ponto a ponto. Ou, como se costuma dizer, localmente. Ou seja, temos de conhecer um ponto que respeite a relação. Numa sua vizinhança podemos garantir que

$$f\,'(1) = \tfrac{-1}{f(1)} = \tfrac{-1}{\sqrt{8}} = -\tfrac{\sqrt{8}}{8}.$$

(d)

$$x^2+y^2=9 \Leftrightarrow y^2 = 9-x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{9-x^2}, \text{ pois é dito que } y>0$$

Deste modo,

$$f\,'(x) = \left(\sqrt{9-x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

No ponto $x=1$ (não precisamos de y como na *versão implícita*)

$$f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{9-1}} = -\frac{\sqrt{8}}{8}$$

7. Considere a seguinte função na forma implícita:

$$x+y^3 = y^5 - x^2 + 2y$$

Tente explicitar y como função de x. Como depressa perceberá, não consegue! Mas tente para perceber porquê!

Se admitir que de algum modo essa função existe, pelo menos em vizinhanças de alguns pontos, determine a sua derivada no ponto $(x,y)=(1,1)$. Este ponto não pode ser escolhido ao acaso! Porquê?

Resolução:

$$\left(x+y^3\right)'_x = \left(y^5-x^2+2y\right)'_x \Leftrightarrow 1+3y^2y' = 5y^4y' - 2x + 2y' \Leftrightarrow y' = \frac{-2x-1}{3y^2-2-5y^4}$$

Ora, quando $x=1$:

$$f'(1) = \frac{3}{4}$$

É óbvio que o ponto (x,y) tem que necessariamente ser solução da equação $x+y^3=y^5-x^2+2y$.

4.2 Exercícios Propostos

1. Calcule a derivada das seguintes funções, recorrendo à aplicação da derivada da função composta:

   (a) $\sin(x^4 + 2x)$

   (b) $\left(\ln\left(2x^3\right)\right)^4$

   (c) $\sin(\sin x)$

   (d) $\cos(\sin x)$

   (e) $\cos e^x$

   (f) $e^{\cos^2 x}$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Seja $f''(1) = 2$ e $f'(1) = 1$. Considere-se também a função $g(x) = \sin x$.

   (a) Justifique que $h = fog$ é uma função diferenciável em $x = \frac{\pi}{2}$ e determine o valor da sua derivada nesse ponto.

   (b) Será possível garantirmos que existe e é finito o valor de $h''\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

   (c) Em caso afirmativo, indique-o.

3. Suponha que conhece as derivadas das funções inversas das que são a seguir apresentadas mas que não conhece as derivadas das próprias funções. Utilizando a regra de derivação da função inversa, determine a derivada de cada uma das funções seguintes:

   (a) $\arcsin(x)$

   (b) $\sqrt{x}$

   (c) e^x

   (d) $\ln x$

4. Enuncie as condições de invertibilidade de uma função. Compare-as com as condições para aplicação da regra de derivação da função inversa.

5. Suponha que conhece as derivadas das funções inversas das que são a seguir apresentadas mas que não conhece as derivadas das próprias funções. Utilizando a regra de derivação da função inversa, determine a derivada das seguintes funções, nos pontos indicados:

   (a) e^x em $x = 0$

   (b) x^2 em $x = 2$

6. Considere a seguinte relação $y \ln x = 4 - x$.

   (a) Determine a forma explicita da função $y = f(x)$.

   (b) Determine a sua derivada.

   (c) Suponha que não era possível explicitar a função como fez em a). Deduza mesmo assim a derivada $f'(x)$ pela forma implícita.

   (d) Os resultados em b) e c) não parecem idênticos. Mas são. Explique porquê baseado num exemplo.

7. Considere a seguinte expressão implícita que relaciona as variáveis x e y : $x \ln y + y \ln x = 0$. Admita que esta expressão define y como função de x no ponto de abcissa $x = 1$. Isto é, que localmente existe $y = f(x)$.

   (a) Calcule $f(1)$.

   (b) Calcule $f'(1)$.

   (c) Diga, sem calcular a expressão de g, se a função $x = g(y)$ pode ter um extremo no único ponto para o qual tem informação.

   (d) Calcule $g\prime$ e confirme o resultado de c).

8. Considere a seguinte relação implícita muito simples que regula o mercado de casas de habitação em Lisboa:

$$\frac{I}{A}e^{I} = \sqrt{AI}$$

   onde A = valor mensal do aluguer de um apartamento e I = investimento mensal na renovação de apartamentos.

   (a) Sabendo que o mercado está em equilíbro em $I = 1$ (em certas unidades específicas), calcule A.

   (b) Calcule o impacto em A de uma variação infinitesimal do valor de I sem explicitar A como função de I.

   (c) Admita que a Câmara de Lisboa decidiu aumentar o valor de I em 0.01; qual deverá ser aproximadamente o novo valor mensal do aluguer dos apartamentos em Lisboa.

   (exercício de exame)

9. Sendo a função $y = f(x)$ dada implicitamente pela expressão:

$$2x^2 + y^3 - xy = 8$$

   (a) Determine um ponto (a, b) por onde a função passe; seja muito preguiçoso!

   (b) Calcule a primeira derivada da função nesse ponto.

(c) Verifique que sendo g a função inversa de f, $g\prime(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

10. Considere a seguinte função na forma implícita $x^{10000} + y^{5000} = 2$.

    (a) Admitindo que esta expressão define uma função $y = f(x)$ no ponto $(1, 1)$, determine $f'(1)$.

    (b) Calcule *aproximadamente* a variação em $f(x)$ quando x passa de 1 para 1.2.

    (c) Sem fazer novos cálculos nem deduções, calcule *aproximadamente* a variação de $g(y)$ quando y passa de 1 para 1.2.

4.3 Ficha de Auto-Avaliação

4.3.1 Ficha de Auto-Avaliação N°1

1. Considere as funções $f(x) = x^2 + 10$ e $g(x) = \arcsin x$. Caracterize as funções fog e gof , indique os respectivos domínio e contradomínio e determine a expressão das suas derivadas, caso existam.

2. Considere as funções $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

   (a) Determine fof e indique a fronteira do domínio desta função.

   (b) Determine gog e indique a fronteira do domínio desta função.

   (c) Determine fog e indique se o contradomínio é um conjunto aberto ou fechado.

   (d) Calcule $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$. Confirme o resultado graficamente.

   (e) Considerando uma função genérica f, diga se o domínio de fof coincide com o domínio de f. Caso não seja verdade, que relação pode estabelecer entre D_f e D_{fof}. Sugestão: inspire-se nas funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \ln x$.

3. Sejam as funções:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 0 \end{cases} \\ f(x) &= \arcsin x \end{aligned}$$

   (a) Considere a função $(fog)(x)$.

      i. Determine o seu domínio, bem como os pontos em que a função é contínua e nos que é diferenciável.

      ii. Determine os seus máximos, mínimos e assímptotas.

      iii. Esboce o seu gráfico.

   (b) Repita a alínea (a), mas considerando agora a função $(gof)(x)$.

4. Enuncie o Teorema de Weierstrass. Mostre que a função $f(x) = \frac{x+arctgx}{x-x^2}$ tem extremos no intervalo $[2, 3]$ (Sugestão: Não os determine.)

4.3.2 Ficha de Auto-Avaliação Nº2

1. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que

   $g(1) = 1$

   $g"(1) = 1$ e ainda

   $\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-1}{x^2-x} = 3$

   Considere-se ainda a função $f(x) = \ln x$ e a função $h = gof$

   (a) Determine o dominio de h.

   (b) Justifique que h é uma função contínua no seu domínio.

   (c) Será h uma função diferenciável em $x = e$? Em caso afirmativo, determine o valor da sua derivada nesse ponto.

   (d) Admita que a função g admite derivadas contínuas até 3ª ordem, desenvolva a função h em série de Taylor, até à 2ª ordem, em torno do ponto e.

2. Considere a relação implícita dada por: $x^2 + y^2 + xy = 100$. A partir desta relação pode pensar-se numa função $y = f(x)$.

   (a) Calcule a ordenada positiva do ponto de abcissa $x = 0$.

   (b) Calcule, pela regra da derivada de uma função na forma implícita, o valor de $f'(0)$.

   (c) Determine a forma geral da segunda derivada de f.

   (d) Desenvolva até à segunda ordem em série de MacLaurin a função $f(x)$.

3. Considere a expressão:

   $$x^2 \ln xy = 2$$

   que define uma relação implícita entre x e y. Suponha que existe uma função $y = f(x)$, localmente na vizinhança de $x_0 = 1$.

   (a) Escreva a fórmula de Taylor até à primeira ordem inclusivé que desenvolve $f(x)$ em torno do ponto 1.

   (b) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de $g(x) = f^{-1}(x)$ no único ponto para o qual tem informação.

5 Regras de l'Hospital e de Cauchy

5.1 Exercícios Resolvidos

1. Mostre que:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{6}x}{\operatorname{tg}\sqrt{3}x} = \sqrt{2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x+1}-e}{x^2} = +\infty$

   (c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{3\ln(2-x)} = \frac{1}{3}$

   (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^{-x^2} = 0$

   (e) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right] = \frac{1}{2}$

   Resolução:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{6}x}{\operatorname{tg}\sqrt{3}x} = \frac{0}{0}$

   Usando a Regra de Cauchy:$\frac{\sqrt{3}}{5} = 0.346\,41$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{6}x}{\operatorname{tg}\sqrt{3}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{6}}{\cos^2\sqrt{6}x}}{\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\sqrt{3}x}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{\cos^2 0}}{\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 0}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{1}}{\frac{\sqrt{3}}{1}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x+1}-e}{x^2} = \frac{0}{0}$

   Usando a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+1}-e}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+1}}{2x} = \frac{e^1}{0^+} = +\infty$$

   (c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{3\ln(2-x)} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{3\ln(2-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{3\frac{-1}{2-x}} = \frac{-1}{3\frac{-1}{2-1}} = \frac{1}{3}$$

   (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^{-x^2} = -\infty \times 0$

   Transforme-se numa indeterminação $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$:

   $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$

   Usando a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{-\infty.e^{+\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

   (e) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right] = \infty - \infty$

   Transforme-se numa indeterminação $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$:

   $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1^+} \left[\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right] = \frac{\infty}{\infty}$

Usando a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x + x - 1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \frac{0}{0}$$

Usando a Regra de Cauchy outra vez:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}$$

5.2 Exercícios Propostos

1. Mostre que:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 3x} = 2$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x+1}-e}{x^3} = +\infty$

   (c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2-x}{\ln(5-2x)} = \frac{1}{2}$

   (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x = 0$

   (e) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left[\frac{1}{\ln(x-1)} - \frac{1}{x-2}\right] = \frac{1}{2}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} [\sin x]^x = 1$

   (g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$

   (h) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{tg^2 x} = 1$

   (i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x)^{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = 1$

   (j) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x)^{\frac{x+1}{x^2}} = 1$

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x} = \frac{\sqrt{e}}{e}$.

2. Verifique que as três indeterminações seguintes podem ser resolvidas quer pela regra de Cauchy, quer por artifícios:

   (a) $f(x) = \frac{sen(x)}{1-\cos(x)}$ em $x = 0$

   (b) $f(x) = \frac{\log(x)}{sen(x-1)}$ em $x = 1$

   (c) $f(x) = \frac{e^{5x}-1}{3x}$ em $x = 0$

3. Aplicando a Regra de Cauchy ”vem” que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x-2}{2x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{6}{2} = 3$$

   Há erro, pois o limite é igual a 4. Como explica?

4. Calcule os limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$, com $a, b > 0$

   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \ln(x + e^x)$

   (c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\log \operatorname{tg} x}{\log \cos x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{2x-1}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

(f) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\pi - x}{\sin(4x)}$

(g) $\lim\limits_{x \to 0} x^x$

(h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

5.3 Ficha de Auto-Avaliação

1. Seja $f(x) = \sqrt{x} \quad \text{para} \quad x \neq 1.$

   (a) Determine o domínio de f. Indique se o conjunto é aberto ou fechado.

   (b) Averigue se f é prolongável por continuidade no ponto de abcissa 1. Em caso afirmativo, escreva a nova função j que resulta de prolongar por continuidade.

   (c) Seja $g(x) = 2$. Determine, se existirem, as funções fog e gof e mostre que as duas funções são diferentes.

   (d) Seja $g(x) = 1$. Determine, se existirem, as funções fog e gof e mostre que as duas funções são diferentes.

   (e) Determine $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{e^x - x}$.

   (f) Sem determinar a inversa de f, determine $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

2. Considere a seguinte função $f(x) = g(2x+2)$ em que g é diferenciável até à ordem 3. Sabendo que $g(2) = 3g'(2) = 2g''(2) = 4g'''(2) = 12$, determine a fórmula de Taylor de ordem 2 da função f em torno do ponto de abcissa 0.

3. Determine:

   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \sin x$

   (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$

   (d) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sin x}$

   (e) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^x$

   (f) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{\sin x}$

   (g) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

6 Os teoremas fundamentais sobre funções diferenciáveis

6.1 Exercícios Resolvidos

1. Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3(x) + \cos^3(3x) = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0, \pi]$.

   Resolução:

   Seja $f(x) = \operatorname{sen}^3(x) + \cos^3(3x)$. Temos de mostrar que esta função tem pelo menos um zero no intervalo $[0, \pi]$. Para tal efeito usaremos o Corolário do Teorema de Bolzano.

   1º f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, logo em $[0, \pi]$.

   2º $f(0) = 1 \wedge f(\pi) = -1 \Rightarrow f(0) \times f(\pi) < 0$

   3º Logo pelo Corolário do Teorema de Bolzano, f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0, \pi]$. Assim sendo, a equação $\operatorname{sen}^3(x) + \cos^3(3x) = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0, \pi]$.

2. Seja a equação $x^4 - 5x - 7 = 0$.

   (a) Prove que esta equação tem pelo menos uma raiz real no intervalo $[2, 3]$. Justifique, enunciando o teorema em que se baseou.

   (b) Prove que esta equação tem no máximo uma raiz no intervalo $[2, 3]$.

   (c) O que pode concluir sobre o número de raizes no intervalo $[2, 3]$.

   Resolução:

   (a) Seja $f(x) = x^4 - 5x - 7$.

   1º f é continua em $\mathbb{R}$ (por ser uma função polinomial), logo em $[2, 3]$.

   2º $f(2) = -1 \wedge f(3) = 59 \Rightarrow f(2) \times f(3) < 0$

   3º Logo pelo Corolário do Teorema de Bolzano, f tem pelo menos uma raiz no intervalo $[2, 3]$. Assim sendo, a equação $x^4 - 5x - 7 = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[2, 3]$.

   (b) $f'(x) = 4x^3 - 5 > 0$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5/4}$

   $f'(x) > 0$ ($f$crescente) $\Leftrightarrow x > \sqrt[3]{5/4}$

   $f'(x) < 0$ (f decrescente) $\Leftrightarrow x < \sqrt[3]{5/4}$

   Logo f é estritamente crescente em $[2, 3]$. Assim esta equação tem no máximo uma raiz no intervalo $[2, 3]$.

   (c) Pelas alíneas (a) e (b) conclui-se que a equação tem exactamente uma raiz no intervalo $[2, 3]$.

6.2 Exercícios Propostos

1. Prove que:

   (a) Qualquer polinómio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

   (b) Qualquer polinómio de grau par do tipo

   $$p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

   com $a_{2n}a_0 < 0$ e $n \in N$, tem pelo menos duas raízes.

2. Considere uma função f, contínua em R, e suponha que existem e são finitos os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   (a) Prove que f é limitada.

   (b) Supondo que $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) < 0$, indique, justificando, o máximo da função $\dfrac{1}{1+f^2(x)}$.

   (c) O que pode dizer acerca do mínimo $\dfrac{1}{1+f^2(x)}$? Justifique.

3. Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0, \pi]$.

4. Seja a função

   $$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = 3 \\ \frac{1}{3-x} & \text{se} \quad x \neq 3. \end{cases}$$

   (a) Verifique que $g(1) = g(3)$.

   (b) Constate que $g'(x) > 0$, $\forall x \in (1, 3)$.

   (c) Os resultados anteriores contradizem o Teorema de Rolle? Explique.

5. Use o teorema de Rolle para provar que, independentemente do valor de b, há no máximo um ponto x no intervalo $[-1, 1]$ para o qual $x^3 - 3x + b = 0$.

6. Seja $f(x) = 1 - \sqrt{|x|}$. Mostre que $f(1) = f(-1)$. Será legítimo aplicar o teorema de Rolle à função f no intervalo $[-1, 1]$? Justifique a sua resposta.

6.3 Fichas de Auto-Avaliação

6.3.1 Ficha de Auto-Avaliação N^{o}1

1. Considere a seguinte função real de variável real: $f(t) = \frac{\ln(|t+2|)}{e^t}$.

   (a) Indique, justificando, o domínio de f.

   (b) Estude f quanto à continuidade e à diferenciabilidade.

   (c) Enuncie o teorema de Rolle. Utilizando este teorema, o que pode concluir quanto à existência de um ponto de estacionaridade de f no intervalo $]-3,-1[$?

   (d) Seja $f\left|_{[0,+\infty[}\right.$ a restrição da função f ao intervalo$[0,+\infty[$.

      i. Mostre que $f\left|_{[0,+\infty[}\right.$ é uma função invertível. (Nota:pode ser conveniente saber que $\ln(2) > \frac{1}{2}$.)

      ii. Calcule o valor da derivada da função inversa de $f\left|_{[0,+\infty[}\right.$ no ponto $\ln(2)$.

(Exame de Cálculo I, 28/01/2005)

2. Sendo K um número real diferente de zero, considere a função f, definida em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ pela fórmula seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(\pi x)}{Kx} & \text{se} \quad x < 0 \\ arctg(\dfrac{1}{x}) & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

   (a) Estude a função, do ponto de vista da continuidade, em cada ponto do seu domínio.

   (b) Calcule os limites laterais de f no ponto 0 e indique, justificando, os valores de K para os quais f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

   (c) Calcule os limites de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$ e indique, justificando, se a função é limitada (em todo o seu domínio).

3. Considere a expressão:

$$x \ln y = 2$$

   que define uma relação implícita entre x e y. Suponha que existe uma função $y = f(x)$, localmente na vizinhança de $x_0 = 1$.

   (a) Escreva a fórmula de Taylor até à primeira ordem inclusivé que desenvolve $f(x)$ em torno do ponto 1.

   (b) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de $g(x) = f^{-1}(x)$ no único ponto para o qual tem informação.

6.3.2 Ficha de Auto-Avaliação Nº2

1. Seja a equação $x^3 + 3x - 8 = 0$.

   (a) Prove que esta equação tem pelo menos uma raiz real no intervalo $[-2, 3]$. Justifique, enunciando o teorema em que se baseou.

   (b) Prove, utilizando o teorema de Rolle, que a mesma equação tem exactamente uma raiz real naquele intervalo.

   (a) Enuncie o teorema de Lagrange.

   (b) Seja a função $f(x) = \sqrt{x}$ definida no intervalo $I = [0, 1]$. Faça um esboço da curva que representa f. Determine a equação da tangente à curva que é paralela ao segmento que une os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

   (a) Sejam f e g duas funções definidas num dado intervalo, tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo o x desse intervalo. O que pode dizer sobre a diferença $f(x) - g(x)$? Justifique a sua resposta, enunciando o corolário do teorema de Lagrange que é apropriado nesta situação.

   (b) Sejam $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{|x|}$. Mostre que estas funções têm a mesma derivada, de modo que $[f(x) - g(x)]' = 0$. Contudo, a sua diferença $f(x) - g(x)$ não é constante. Explique como é que isto é possível à luz do corolário referido na alínea anterior.

2. Considere a seguinte função na forma implícita $x^5 + xy^3 = 2y$.

   (a) Admitindo que esta expressão define uma função $y = f(x)$ no ponto $(1, 1)$, determine $f'(1)$.

   (b) Calcule aproximadamente a variação em $f(x)$ quando x passa de 1 para 1.2.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f' é diferenciável em $\mathbb{R}$, $f''(0) = 2$ e $f'(0) = 1$. Considere-se ainda a função $g(x) = \sin(2x)$. Justifique que $h = fog$ é uma função diferenciável em $x = \frac{\pi}{2}$ e determine o valor da sua derivada nesse ponto. Será possível garantirmos que existe e é finito o valor de $h''\left(\frac{\pi}{2}\right)$? Em caso afirmativo, indique-o.

7 Globalizando, faça por si mesmo ou consulte resoluções de exames

1. Seja a função $f(x) = x - 1$ se $x \leqslant 2$, e $x + 1$ se $x > 2$.

   (a) Determine o domínio D de f.

   (b) Estude f, quanto à continuidade, em todos os pontos do domínio.

   (c) Estude f, quanto à diferenciabilidade, em todos os pontos do domínio.

   (d) Seja a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = |x|$. Calcule as derivadas laterais de g no ponto $x = 0$. O que conclui sobre a diferenciabilidade de g em $x = 0$?

   (e) Calcule, se existirem, $(g \circ f)'(2)$, $(g \circ f)'(0)$ e $(g \circ f)'(1)$, em que $g \circ f$ é a função composta de g e f, e $(g \circ f)'$ a sua derivada.

2. Seja a função f tal que $f(x) = x \ln(x^2)$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

   (a) Defina função ímpar. Verifique que f é ímpar.

   (b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

   (c) Qual é o domínio? E o contradomínio?

   (d) A função f é contínua no seu domínio. Justifique.

   (e) Calcule a função derivada de f. Determine os máximos e os mínimos de f, se os houver, assim como os intervalos de monotonia.

   (f) Calcule a segunda derivada. Mostre que a função tem um ponto de inflexão em $x = 0$. O que tem a dizer sobre a existência do ponto de inflexão e o valor da segunda derivada nesse ponto?

   (g) A função tem assímptotas? Justifique a resposta.

   (h) Faça o gráfico da função.

   (i) Mostre, calculando o integral, que $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$. Comente este resultado, com base na interpretação geométrica do integral definido.

3. Considere a seguinte função real de variável real: $f(x) = e^x + ae^{-x}$, em que $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Indique, justificando, o domínio de f.

   (b) Estude f quanto à continuidade e à diferenciabilidade.

   (c) Mostre que $a > 0$ é uma condição necessária e suficiente para que f tenha um extremo local.

   (d) Assuma agora que $a > 0$.

      i. Calcule o extremo de f e diga se é um máximo ou um mínimo.

      ii. A função tem assímptotas? Justifique.

      iii. Esboce o gráfico de f.

iv. Escreva, para a função f, a fórmula de Taylor de 1ª ordem com resto de Lagrange em torno do ponto de extremo. Utilize-a para confirmar o resultado obtido na alínea 2(d)i. de que o extremo é, de facto, um máximo ou um mínimo.

(Exame de Cálculo I, 1/2/2003)

7.1 Soluções

1. Prove que:

Noções Topológicas

Secção 1.1. RESOLVIDOS NO TEXTO

Secção 1.2. Soluções

Ex.1.

Naturais: 5, 10^{1gogol}, $\sqrt{25}$,

Inteiros: 5; -4, 0

Racionais: 5; -4; 3,2; 3,(2); 0, $\frac{4}{10}$; -$\frac{1}{6}$; 1.3333333.....

Irracionais: $\sqrt{3}$; e, π , $\pi/2$

Reais: todos excepto $\sqrt{-2}$

Ex.2.

a) 2 b) 0 c) 1 d) 6 e) 4 f) alef zero g) alef um h) alef um i) alef um j) alef um

Ex.3.

a) majorantes $=[4,+\infty[$; minorantes $=]-\infty,0]$;supremo = 4; ínfimo = 0; máximo = 4; mínimo = 0.

b) majorantes $=[6,+\infty[$; minorantes $=]-\infty,-1]$;supremo = 6; ínfimo = -1; máximo = 6; mínimo = $\nexists$.

c) majorantes =$\nexists$; minorantes $=]-\infty,7]$;supremo = $\nexists$; ínfimo = 7; máximo = $\nexists$; mínimo = 7.

d) majorantes =$\nexists$; minorantes $=]-\infty,-3]$;supremo = $\nexists$; ínfimo = -3; máximo = $\nexists$; mínimo = $\nexists$.

e) majorantes $=[0,+\infty[$; minorantes = $\nexists$;supremo = 0; ínfimo = $\nexists$; máximo = 0; mínimo = $\nexists$.

f) majorantes =$\nexists$; minorantes $=]-\infty,1]$;supremo = $\nexists$; ínfimo = 1; máximo = $\nexists$; mínimo = $\nexists$.

g) majorantes =$\nexists$; minorantes = $\nexists$;supremo = $\nexists$; ínfimo = $\nexists$; máximo = $\nexists$; mínimo = $\nexists$.

h) majorantes =$\nexists$; minorantes = $\nexists$;supremo = $\nexists$; ínfimo = $\nexists$; máximo = $\nexists$; mínimo = $\nexists$.

Ex.4.

Conjunto A: majorantes =$\nexists$; minorantes $=]-\infty,0]$;supremo = $\nexists$; ínfimo = 0; máximo = $\nexists$; mínimo = $\nexists$.

Conjunto B: majorantes =$\nexists$; minorantes = $\nexists$;supremo = $\nexists$; ínfimo = $\nexists$; máximo = $\nexists$; mínimo = $\nexists$.

Conjunto C: majorantes =$\nexists$; minorantes $=]-\infty,1]$;supremo = $\nexists$; ínfimo = 1; máximo = $\nexists$; mínimo = 1.

Ex.5.

Para todas as alíneas temos:
$int(A) =]2,5[\,, fr(A) = \{2,5\}\,, ext(A) =]-\infty,2[\cup]5,+\infty[\,, \bar{A} = [2,5]\,, A' = [2,5]$
A diferença entre alíneas é:
(a) Fechado (b) Aberto (c) Nem aberto nem fechado (d) Nem aberto nem fechado

Ex.6.

a) $int(A) =]0,3[\,, fr(A) = \{0,3,6\}\,, ext(A) = \mathbb{R}\backslash A, \bar{A} = [0,3] \cup \{6\}\,, A' = [0,3]$, fechado.
b) $int(A) = \varnothing, fr(A) = \{-1,1\}\,, ext(A) = \mathbb{R}\backslash A, \bar{A} = A, A' = \varnothing$, fechado.
c) $int(A) =]1,2[\cup]4,5[\,, fr(A) = \{1,2,3,4,5\}\,, ext(A) = \mathbb{R}\backslash\left([1,2]\cup\{3\}\cup[4,5]\right),$
$\bar{A} = [1,2]\cup\{3\}\cup[4,5]\,, A' = [1,2]\cup[4,5]$, não é fechado nem aberto.
d) $int(A) = \mathbb{R}\backslash\{1\}\,, fr(A) = \{1\}\,, ext(A) = \varnothing, \bar{A} = \mathbb{R}, A' = \mathbb{R}$, aberto.
e) $int(A) = \varnothing, fr(A) = \mathbb{R}, ext(A) = \varnothing, \bar{A} = \mathbb{R}, A' = \mathbb{R}$, não é fechado nem aberto.
f) $int(A) = \varnothing, fr(A) = [-1,1]\,, ext(A) = \mathbb{R}\backslash[-1,1]\,, \bar{A} = [-1,1]\,, A' = [-1,1]\,,$
não é fechado nem aberto.
g) $int(A) = \varnothing, fr(A) = [-1,2]\,, ext(A) = \mathbb{R}\backslash[-1,2]\,, \bar{A} = [-1,2]\,, A' = [-1,2]\,,$
não é fechado nem aberto.
h) $int(A) =]-1,1[\,, fr(A) =]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\,, ext(A) = \varnothing, \bar{A} = \mathbb{R}, A' = \mathbb{R},$
não é fechado nem aberto.
i) $int(A) =]0,1[\,, fr(A) = [-1,0]\cup[1,2]\,, ext(A) =]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[\,, \bar{A} = [-1,2]\,, A' = [-1,2]\,,$
não é fechado nem aberto.

Ex.7.

a) $int(A) = \varnothing, fr(A) = A\cup\{0\}\,, ext(A) = \mathbb{R}\backslash(A\cup\{0\})\,, \bar{A} = A\cup\{0\}\,, A' = \{0\}\,,$
não é fechado nem aberto.
b) $int(A) = \varnothing, fr(A) = A\cup\{0\}\,, ext(A) = \mathbb{R}\backslash(A\cup\{0\})\,, \bar{A} = A\cup\{0\}\,, A' = \{0\}\,,$
não é fechado nem aberto.
c) $int(A) = \varnothing, fr(A) = A\cup\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\,, ext(A) = \mathbb{R}\backslash\left(A\cup\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\right)\,, \bar{A} = A\cup\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\,, A' = \left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}\,,$
não é fechado nem aberto.
d) $int(A) = \varnothing, fr(A) = A, ext(A) = \mathbb{R}\backslash A, \bar{A} = A, A' = \varnothing$, é fechado.
e) $int(A) = \varnothing, fr(A) = A, ext(A) = \mathbb{R}\backslash A, \bar{A} = A, A' = \varnothing$, é fechado.

Ex.8.
a) Não tem, todos os pontos são de acumulação
b) $\{0,2\}$;refresque o conceito: existem vizinhanças que apenas contêm cada um estes pontos e mais nenhum outro
c) $\{3\}$ Faça a representação gráfica, ajuda muito.
d) A ou seja, todos os pontos são isolados

e) Não tem. Os dois pontos *soltos* colam–se aos extremos do intervalo; se o intervalo dado fosse, por exemplo, $[0,2]$ já assim não seria.

f) Não tem. Não consegue abrir nennuma vizinhança nesse intervalo sem que ela esteja cheia de racinoais.

g) Não tem. Raciocínio semelhante.

h) $\{-1,1\}$,palavras para quê?

Ex.9.

Para todas as alíneas temos:
$int(E) =]-1,1[\times]0,2[\,, fr(E) = (\{-1,1\}\times[0,2]) \cup ([-1,1]\times\{0,2\})\,,$
$ext(E) = \mathbb{R}^2\backslash\,([-1,1]\times[0,2])\,, \bar{E} = [-1,1]\times[0,2]\,, E' = [-1,1]\times[0,2]$
A diferença entre alíneas é:
a) Fechado b) Aberto c) Nem aberto nem fechado d) Nem aberto nem fechado

Ex.10.
Dica: as representações gráficas ajudam muito, faça-as.
As soluções são apresentadas com alguma linguagem intuitiva.
Deve dar estas mesmas respostas analiticamente (cf as os exercícios resolvidos).

a) Interior é vazio; fronteira é o próprio conjunto; exterior é $R^2\backslash F$; aderência é o conjunto; derivado é o conjunto; o conjunto é fechado pois coincide com a sua aderência

b) Interior é a zona dentro do rectangulo; a fronteira é o contorno pois o ponto (1.1) está sobre ele; a aderência é o rectângulo mas fechado; idem para o derivado; não é fechado nem aberto por causa do ponto (1.1).

c) O interior do conjunto é o interior de cada quadrado mais o segmento que faz a junção entre eles (leia: reunião de conjuntos); a fronteira é o contorno da reunião; é fechado.

d) O conjunto é uma banda infinita com um buraco quadrado. As fronteiras pertencem-lhe. Assim sendo: o interior é o interior da banda no sentido coloquial; a fronteira é a reunião dos limites da banda com o contorno do quadrado;

e) O interior do conjunto é o interior do quadrado; a fronteira é o contorno do quadrado reunida com o ponto (2,2); o exterior é R^2 diminuido do conjunto e da sua fronteira; a aderência é o conjunto mais o contorno do quadrado; o derivado é apenas o quadrado fechado.

f) Interior vazio; fronteira é o conjunto reunido com (0,2); exterior é R^2 diminuido da fronteira; adreência igual à fronteira; derivado é o ponto (0,2); não fechado, não aberto.

g) Este fica para si....

Ex.11. a) Não tem b) (-1,1) c) A d) Não tem e) Não tem f) Não tem g) Não tem

Ex.12. a) $\{1\}$ b) $]1,+\infty[$ c) $]1,2[$ d) N e) $[1,2]$

Ex.13. a) $\{(1,2)\}$ b) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ c) $]0,1[\times]0,1[$ d) $\mathbb{R}X\ \{1\}$ (no sentido de produto cartesiano) e) $[0,1]\times[0,1]$

Ex.14. a) Sim b) Sim c) Não d) Sim e) Não f) Sim

Ex.15. a) Sim b) Sim c) Não d) Sim e) Não

Ex.16. Não disponível

Ex.17.

a) $[-3,-2] \cup]e,3]$
b) $D = \{-3,-2,3\} \cup ([1,e] \cap \mathbb{Q})$, $int(D) = \varnothing$, $fr(D) = D$, $ext(D) = \mathbb{R} \backslash D \{e\}$, $\bar{D} = D$, $D' = [1,e]$, $fechado$
c) $E = \{-3,-2,1,e\}$, $int(E) = \varnothing$, $fr(E) = E$, $ext(E) = \mathbb{R} \backslash E$, $\bar{E} = E$, $E' = \varnothing$, $fechado$

Ex.18. a) Fechado b) $A^c =]-\infty, 0[\cup]5, +\infty[$, aberto

Ex.19. a) Aberto b) $A^c = \{-1,1\}$, fechado

Ex.20. a) F b) F c) V

Ex.21. Não disponível

Ex.22. Não disponível

Ex.23. Não disponível

1.3 Fichas de Autoavaliação

Secção 1.3.1. Ficha de autoavaliação 1

Ex.1.

a) $int(A) = \varnothing$, $frA = A \cup \{0,2\}$, $ext(A) = \mathbb{R} \backslash (A \cup \{0,2\})$, $\bar{A} = A \cup \{0,2\}$, $A' = \{0,2\}$
b) Não é fechado nem aberto
c) É limitado.

Ex.2.

a) $g'(x) = \cos(2x) - 2x\sin(2x)$
b) $\frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$
c) Fechado

Ex.3.

Não disponível.

Secção 1.3.2. Ficha de autoavaliação 2

Ex.1.

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
c) $\mathbb{R}$
d) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
e) 1
f) $int(A) =]-\ln 2, 0[\cup]e^{-2}, +\infty[$, $fr(A) = \{-\ln 2, 0, e^{-2}\}$, $ext(A) =]-\infty, -\ln 2[\cup]0, e^{-2}[$,
$\bar{A} = [-\ln 2, 0] \cup [e^{-2}, +\infty[$, $A' = \bar{A}$, não é fechado nem aberto
g) Decrescente
h) Fechado

Ex.2.

Não disponível

Ex.3.

a) $\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$
b) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 4\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + 4$
c) $0, 0, 0, 1$
d) Majorantes $= \nexists$, sup $= \nexists$, max $= \nexists$, Minorantes $=]-\infty, 2]$, inf $= -2$, min $= \nexists$
Não limitado.

2 Limites e Continuidade por Vizinhanças

Secção 2.1.
Resolvida no texto

Secção 2.2.
Ex.4. a) Não b) Tem máximo mas não tem mínimo. c) Não.

Ex.5. a) F b) F c) F d) F

Fichas de autoavaliação
Secção 2.3.1. Ficha de autoavaliação 1
Ex.1.
a) $\mathbb{R}_0^+$
b) Fechado
c) Nem fechado nem aberto
e) Majorantes $= \nexists$, minorantes $=]-\infty, 0]$
Ex.2.
a) $f(x) = \sqrt{(1+x^2)}$
b) $\mathbb{R}$, fechado e aberto
c) Sim, $5\sqrt{10}+1$
d) Sim, 1

Secção 2.3.2. Ficha de autoavaliação 2

Ex.1.

a) F b) F c) F d) V

Ex.2.

a) $]0,1]$
b) Não
c) $\left]0, e^{-4}\right[$
d) $int(A) = A, fr(A) = \left\{0, e^{-4}\right\}, \bar{A} = \left[0, e^{-4}\right], A' = \left[0, e^{-4}\right]$,aberto.
e) Majorantes $= \left[e^{-4}, +\infty\right[$, minorantes $=]-\infty, 0], \sup = e^{-4}, \inf = 0, \max = \nexists, \min = \nexists$,limitado

Ex.3.

a) Não b) Sim c) 0 d) $-\frac{1}{x} + C$
e) Primeiro: translação de 2 unidades para a esquerda e depois simetria do gráfico resultante em relação ao eixo dos xx

Segundo: simetria do gráfico em relação ao eixo dos xx, translação de 3 unidades para cima e finalmente todas as ordenadas positivas ficam iguais enquanto que não positivas ficam o simétrico

Diferencial de uma função num ponto
Diferencial Exemplos em $\mathbb{R}^n$
Fórmulas de Taylor e MacLaurin
Controlo do resto

Secção 3.1.
Resolvidos no texto
Secção 3.2.

Ex.1. $\frac{9}{4}$

Ex.2. $f(2,1) \approx 2,05; g(2,1) \approx 17,6$

Ex.3. Côncava

Ex.4. a) $df = (4x+6)\,dx$ b) $0,18$ c) $0,1808$

Ex.5.

a) $df(x,y) = \left(3x^2 + 8y^4\right) dx + \left(32xy^3 + 12\,(2y)^5\right) dy$

b) $df(x,y) = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x \ln x}\right) dx$

c) $df(0,1) = -7,60$

d) $df(e,1) = \frac{3}{4e}$

Ex.6. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3; 0,857167301$

Ex.7.
a) $f(x) \approx e^{0,5}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right); f(0,5) \approx e^{0,5}\frac{79}{48}; \frac{e^{0,5}}{384}$

b) $f(x) \approx e^{0,5}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\right); f(0,5) \approx 2,7182; \frac{e^{0,5}}{46080}$

Ex.8.

a) $f(x) \approx x - x^2 + \frac{x^3}{3}; f(0,2) \approx \frac{61}{375}; -4e^{-c}\sin c\frac{x^4}{4!}, c \in [0,x]; \frac{0,2^4}{3!}$

b) $f(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3; f(0,5) = \frac{103}{128}; \frac{105}{16}\,(c+1)^{-\frac{9}{2}}\,\frac{x^4}{4!}, c \in [0,x]; \frac{105}{16}\frac{(0,5)^4}{4!}$

c) $f(x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}; f(0,5) = \frac{5}{12}; \frac{6}{(c+1)^4}\frac{x^4}{4!}, c \in [0,x]; 6\frac{(0,5)^4}{4!}$

d) $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3; f(0) \approx 1; f(2) \approx 6; \frac{105}{16}\,(1-c)^{-\frac{9}{2}}\,\frac{x^4}{4!}, c \in [0,x]; 0; \frac{105}{16}\frac{(2)^4}{4!}$

Ex.9. Não disponível

Ex.10. Não disponível

Ex. 11.

a) $f(x) = x^2 - 2x; 0$

b) $f(x) \approx \ln 2 + \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)(x-1) + \frac{3}{4}\frac{(x-1)^2}{2!} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(x-1)^3}{3!}; \frac{10}{16}\frac{(x-1)^4}{4!}$

c) $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3; \frac{15}{16}\frac{(x-1)^4}{4!}$

d) $f(x) \approx 1 - (x-1)^2; \frac{5}{6}x^4$

Ex.12. $2,89$

Ex.13.

a) Verdadeiro ; b) Falso

Ex.14. $2,7183$

Fichas de autoavaliação

Secção 3.3. Ficha de autoavaliação 1

Ex.1.

a) $\mathbb{R}^+$

b) $f(x) \approx (x-1) - (x-1)^2 + 2.(x-1)^3$

c) $\frac{(x-1)^4}{4}$

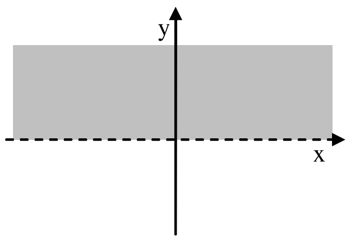
d) 1

e) Não é aberto nem fechado

f) $-\infty$

Ex.2.

a) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$



$int(D) = D, fr(D) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}, \bar{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}, D' = \bar{D}$, aberto

b) $df(x,y) = dx + \frac{1}{y}dy$

c) $g(x) = e^{1-x}$

d) $g(x) \approx e - ex + e\frac{x^2}{2} - e\frac{x^3}{6} + e\frac{x^4}{24}$

e) -1

Ex.4. $f(x) \approx \frac{3}{2}x^2 - 4x + 3$

Inversa, implícita e Composta
Secção 4.1.
Resolvidos no texto
Secção 4.2.

Ex.1.

(a) $(4x^3+2)\cos(x^4+2x)$

(b) $\frac{12}{x}\left(\ln\left(2x^3\right)\right)^3$

(c) $\cos(\sin x)*\cos x$

(d) $-\sin(\sin x)*\cos x$

(e) $-e^x\sin e^x$

(f) $2\cos x.(-\sin x).e^{\cos^2 x}$

Ex.2.

(a) 0 ; (b) -1

Ex.3.

(a) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; (c) e^x ; (d) $\frac{1}{x}$

Ex.5.

(a) 1 ; (b) 8

Ex.6.

(a) $\frac{4-x}{\ln x}$; (b) $-\frac{x\ln x-x+4}{x\ln^2 x}$; (d) p.e. no ponto $(e,4-e)$

Ex.7.

(a) 1 ; (b) -1 ; (c) Não. ; (d) $-\frac{\frac{x}{y}+\ln x}{\frac{y}{x}+\ln y}$

Ex.8.

(a) $\sqrt[3]{e^2}$

(b) $\left(1-\frac{\sqrt[3]{e^2}}{2}\right)$

(c) $\sqrt[3]{e^2}+0,01\left(1-\frac{\sqrt[3]{e^2}}{2}\right)=0,01+0,995\sqrt[3]{e^2}$

Ex.9. (a) $(0,2)$ (b) $\frac{1}{6}$

Ex.10. (a) -2 (b) -0.4 (c) -0.1

Secção 4.3 Fichas de autoavaliação

Secção 4.3.1. Ficha de autoavaliação 1

Ex.1.

$(f\circ g)(x)=(\arcsin x)^2+10;\quad (f\circ g)(x):[-1,1]\to\left[10,\frac{\pi^2}{4}+10\right]$

(gof) não está definida.

Ex.2. (a) $4x-3;\varnothing$ (b) $\sqrt[4]{x};\{0\}$ (c) $2\sqrt{x}-1$;fechado (d) $+\infty$ (e)$D_{g\circ g}\circ\subseteq D_g$

Ex.3.

(a)

i.) $\mathbb{R}$; contínua e diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

ii.) máximo $=\frac{\pi}{2}$; mínimo $=0$; A.H.: $y=0;y=\frac{\pi}{2}$

(b)

i.) $[-1,1]$; contínua e diferenciável em $[-1,1]\setminus\{0\}$

ii.) máximo $=1$; mínimo $=0$; A.: não tem

Secção 4.3.2. Ficha de autoavaliação 2

Ex.1. (a) $\mathbb{R}^+$ (c) $\frac{3}{e}$ (d) $1+\frac{3}{e}(x-e)-\frac{1}{e^2}(x-e)^2+R_2$

Ex.2. (a) 10 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{-3y+3xy'}{(2y+x)^2}$ (d) $10-\frac{1}{2}x-\frac{3}{80}x^2+R_2$

Ex.3. (a) $e^2-5e^2(x-1)$ (b) $\frac{6}{5}-\frac{1}{5e^2}x$

Regras de l'Hopital e de Cauchy

Secção 5.1.
Resolvidos no texto

Secção 5.2.

Ex.2. (a) ∞ (b) 1 (c) $\frac{5}{3}$

Ex.3. Não disponível

Ex.4. (a) $\ln a - \ln b$ (b) 1 (c) -1 (d) e^{-4} (e) $\nexists$ (f) $-\frac{1}{4}$ (g) 1 (h) $-\infty$

Secção 5.3. Ficha de autoavaliação
Secção 5.3.

Ex.1.

a) $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, não é aberto nem fechado

b) Sim, $j(x) = \sqrt{x}$

c) $(fog)(x) = \sqrt{2}, (gof)(x) = 2$

d) $(fog)(x) = \nexists, (gof)(x) = 1, x \neq 1$

e) 0

f) 4

Ex.2. $12 + 8x + 12x^2 + R_2$

Ex.3.

a) $\nexists$
b) $+\infty$
c) 0
d) 1
e) 1
f) 1
g) 0

Os teoremas fundamentais sobre funções diferenciáveis

Secção 6.1.
Resolvidos no texto

Secção 6.2.

Ex.2. (b) 1 (c) depende

Ex.4. (c) Não, pois g não é contínua em $x = 3$

Ex.6. Não, pois a função não é diferenciável no interior desse intervalo $2\sqrt{a}$

6.3.Fichas de autoavaliação
Secção 6.3.1. Ficha de Autoavaliação1

Ex.1.
(a) $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$
(b) contínua e diferenciável em todo o seu domínio
(c) nada se pode concluir
(d) ii.) $\left(\frac{1}{2} - \ln 2\right)^{-1}$

Ex.2.

(a) contínua em todo o seu domínio
(b) 2
(c) 0; 0; é limitada

Ex.3.

(a) $e^2 - 2e^2(x-1)$
(b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2e}x$

Secção 6.3.1. Ficha de Autoavaliação1

Ex.2. (b) $\frac{1}{4} + x$
Ex.3.
(a) constante
(b) g não é contínua
Ex.4. (a) -6 (b) -1.2
Ex.5. -2; 8

Secção 7 Globalizando, faça por si mesmo ou consulte resoluções de exames

Ex.1.

(a) $\mathbb{R}$

(b) contínua em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

(c) diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

(d) $g'(0^+) = 1$; $g'(0^-) = -1$

(e) $(gof)'(2^+) = +\infty$; $(gof)'(2^-) = 1$; $(gof)'(0) = -1$; $(gof)'(1^+) = 1$; $(gof)'(1^-) = -1$

Ex.2.

(b) $+\infty; -\infty$

(c) $\mathbb{R}; \mathbb{R};$

(e) $\ln x^2 + 2$, se $x \neq 0$; máx. relativo: $\frac{2}{e}$; min. relativo: -$\frac{2}{e}$

(f) $\frac{2}{x}$

(g) não tem

(h) não disponível

Ex.3.

(a) $\mathbb{R}$

(b) contínua e diferenciável em todo o seu domínio

(d)

i.) min. relativo: $2\sqrt{a}$

ii.) não tem

iii.) não disponível

iv.) $2\sqrt{a} + \frac{e^c + ae^{-c}}{2}\left(x - \ln\sqrt{a}\right)^2$, com $\ln\sqrt{a} < x < c$