Cálculo del VaR por medio de Cópulas para acciones de la BMV usando R

Teoría de Cópulas
Equipo 1

Elaborado por:

García Castillo Roberto
Campos Tzompantzi Carlos Daniel

Índice

1. Introducción **2**

2. Medidas de Riesgo **2**

3. Emisoras **3**

4. Hipótesis **3**

5. Datos **3**

6. Dependencia **4**

7. Ajuste de distribución teórica a los rendimientos **6**

8. Cópula ajustada y distribución conjunta **8**

9. Simulación **8**

10. Cálculo VaR y tVaR **9**

11. Resultados **9**

12. Conclusión **10**

Cálculo del VaR por medio de cópulas

1. Introducción

Las empresas que cotizan en bolsa emiten acciones a fin de obtener financiamiento para sus proyectos. El valor de sus acciones están sujetos a varios factores de riesgo y por vivir en el mismo mercado se podría pensar que existe una dependencia significativa en los rendimientos que pudieran tener sus acciones.

De forma general existen modelos parametricos y no parametricos para la medición del riesgo en activos financieros. En el caso de los modelos no parametricos, la relación de dependencia va implícita en los procedimientos del cálculo del riesgo, sin embargo, para los modelos paramétricos se tienen que hacer estimaciones sobre el grado de dependencia entre los activos y suponer distribuciones para los rendimientos, comúnmente la distribución normal.

Es sabido que los rendimientos de los activos financieros no se distribuyen normal de forma general, es por ello que buscamos usar un modelo con una cópula que se ajuste a los datos.

2. Medidas de Riesgo

En el manejo de capital es crucial conocer el riesgo al que estaríamos expuestos al invertir en algún activo o instrumento financiero, es por ello que existen las medidas de riesgo que nos ayudan a identificar y analizar la potencial pérdida y con ello decidir si se realizará la inversión o no.

Para medir el riesgo existe en varias métricas, las más comunes son: desviación estándar de los rendimientos, Sharpe ratio, beta (modelo CAPM), VaR y tVaR.

Las últimas 2 métricas están estrechamente relacionadas y son calculadas por diversos métodos, parametricos y no paramétricos. Además son ampliamente usadas en la gestión de riesgos en diferentes sectores financieros, es decir, no se limíta únicamente a la medición de riesgo de instrumentos bursátiles.

- **VaR:** El valor en riesgo es una medida estadística usada para medir el riesgo de un activo o portafolio, busca medir la pérdida máxima con un nivel de confianza específico en un horizonte de tiempo. Se calcula tomando el percentil del nivel de confianza de la pérdida, donde la pérdida es simulada por diferentes métodos que pueden ser paramétricos y no paramétricos.
- **tVaR:** También conocido como cVaR (VaR condicional) o Expected Shortfall, es una medida que se deriva del VaR, pues consiste en el valor esperado de la pérdida dado que la pérdida ha rebasado el VaR. Se considera una mejor medida de riesgo que el VaR pues cumple que es una medida coherente.

3. Emisoras

Se decidió usar acciones de emisoras listadas en la Bolsa Mexicana de Valores, en específico Walmart de México y Centro América y Coca-Cola Femsa.

- **WALMEX:** Walmart de México es una empresa que pertenece al sector retail, siendo la empresa líder en todo el mundo. En México tiene otras subsidiarias tales como Superama, Bodega Aurrera, Sam´s Club, entre otras.

  Walmart brinda oportunidades de desarrollo a pequeños productores y a PyMEs, quienes componen el 87 % del total de proveedores que tiene la compañía en México, además de que es el mayor empleador privado de México y el mundo. La empresa cotiza bajo el ticker $WALMEX en la BMV.

- **Coca-Cola Femsa:** Coca-Cola Femsa es la empresa líder en el sector bebidas en México y Latinoamérica, es una subsidiaria de FEMSA que posee el 48 % de sus acciones, con un 28 % en manos de subsidiarias de propiedad total de The Coca-Cola Company y el 24 % restante cotizado públicamente en la Bolsa Mexicana de Valores y la Bolsa de Nueva York.

  Actualmente es el embotellador público más grande de productos Coca-Cola en el mundo en términos de volumen de ventas. La compañía tiene operaciones en Latinoamérica, siendo México su mercado más grande y rentable. Coca-Cola Femsa cotiza en la BMV bajo el ticker $KOFUBL.

4. Hipótesis

Se realiza el análisis entre estas dos acciones porque intuitivamente pensamos que debe haber una correlación ya que Walmart es la empresa más grande del sector retail y Femsa la embotelladora de la compañía refresquera más grande del mundo. Por la naturaleza de los modelos de negocio de ambas empresas podemos pensar que una gran porción de las ventas de Femsa se dan por medio de Walmart o empresas subsidiarias, por lo que las ventas de ambas empresas debieran estar correlacionadas y por ende los rendimientos de sus acciones.

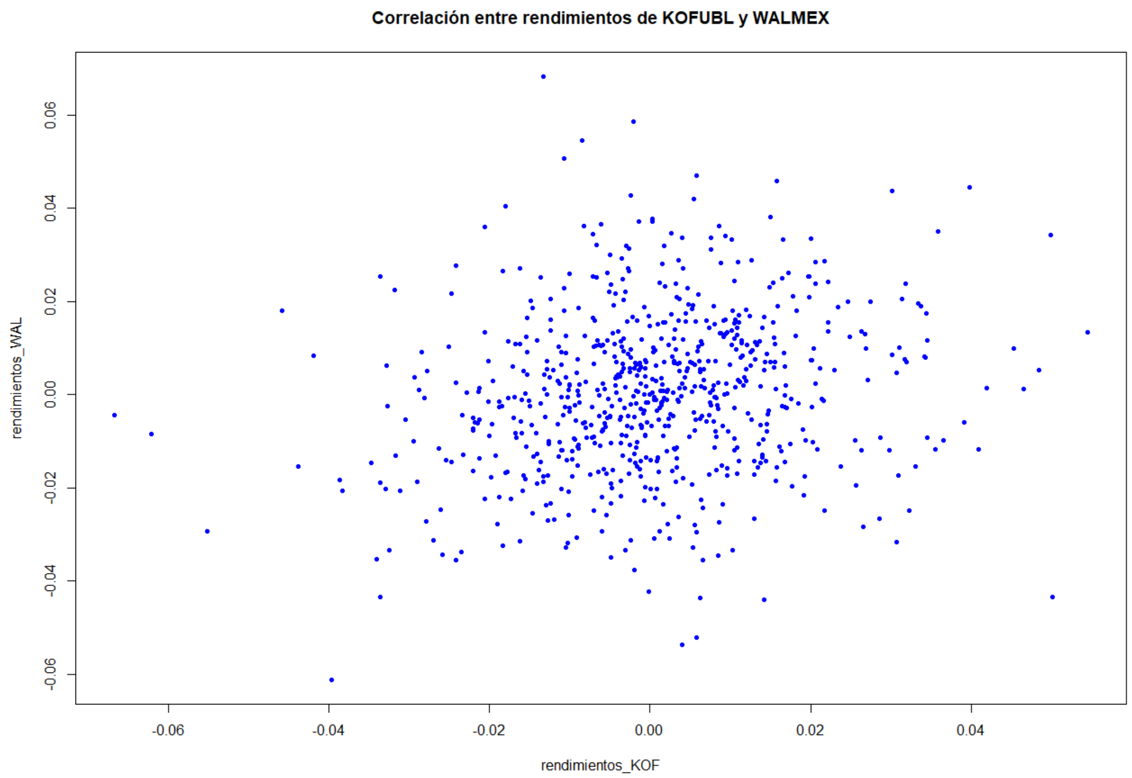
5. Datos

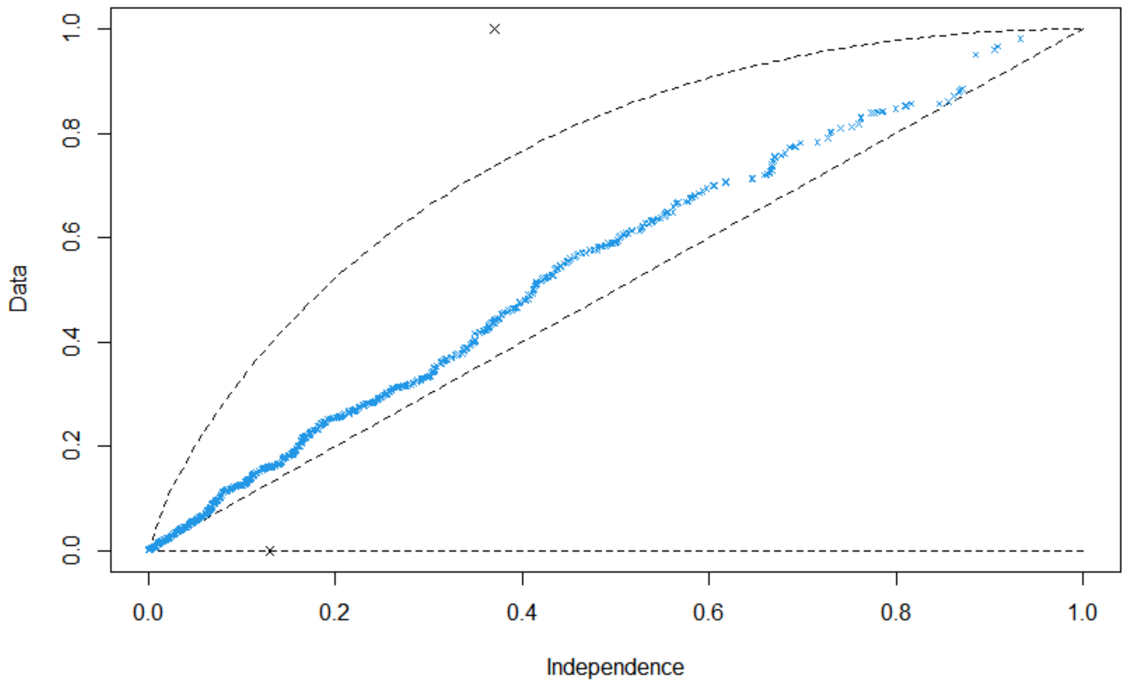
Para nuestro estudio usamos las series históricas de precios diarios de ambas emisoras empezando desde el año 2020 y hacemos uso de la paquetería en R de quantmod para cargar los datos de Yahoo finance.

El horizonte de tiempo de los datos es de mediano plazo, esto debido a que los cálculos de las medidas de riesgo deben ser monitoreadas de forma muy periodica, por lo que se toman los datos diarios más recientes para que puedan reflejar mejor el comportamiento de ambas emisoras.

6. Dependencia

Realizamos pruebas de dependencia para corroborar que puede exisitir una dependencia entre los rendimientos de las emisoras, tal como se plantea en la hipótesis.





El primer gráfico no parece dar evidencia contundente de la existencia de dependencia, mientras que el K-plot solo nos permite visualizar una dependencia positiva, así que procedemos a realizar las pruebas de correlación usando los métodos de Kendall y Spearman, usando la función cor.test() en R. Obteniendo:

```
	Kendall's rank correlation tau

data:  rendimientos_KOF and rendimientos_WAL
z = 5.4191, p-value = 5.991e-08
alternative hypothesis: true tau is not equal to 0
sample estimates:
     tau 
0.134129 
```

```
	Spearman's rank correlation rho

data:  rendimientos_KOF and rendimientos_WAL
S = 51969689, p-value = 1.091e-07
alternative hypothesis: true rho is not equal to 0
sample estimates:
      rho 
0.1951414 
```

Para nuestro análisis no es muy relevante los valores específicos que toman la tau de Kendall o la rho de Spearman, pues solo buscamos rechazar la hipótesis nula de no dependencia, la cual es rechazada para ambas pruebas con un nivel de confianza de $\alpha = 0.001$, pues los p-values de ambas pruebas son significativos para valores muy pequeños de α.

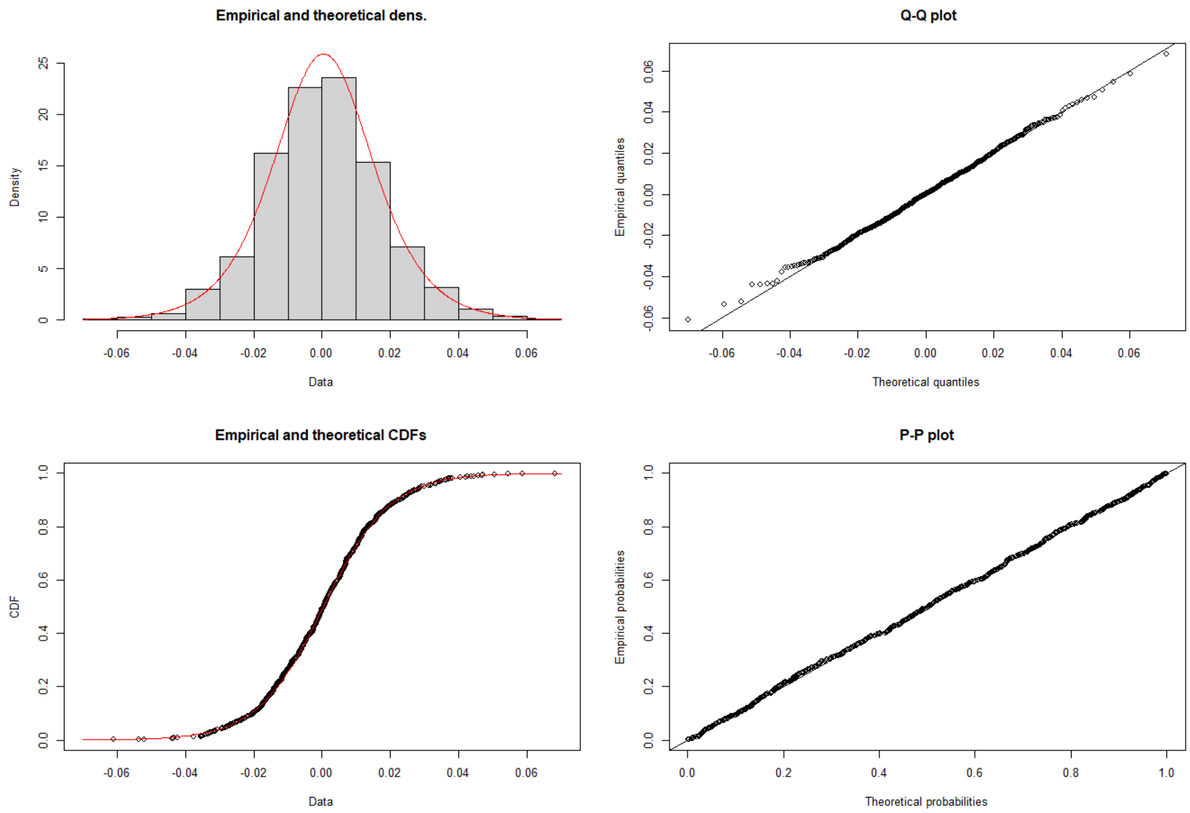
Una vez que se ha rechazado la hipótesis de no dependencia buscaremos ajustar distribuciones teóricas a los rendimientos de cada emisora para que con ellas hallemos una cópula usando el Teorema de Sklar.

7. Ajuste de distribución teórica a los rendimientos

Ya que contamos con los rendimientos diarios por emisora vamos a buscar ajustar una distribución continua que los modele, para ello vamos a usar la función model_select() de la paquetería univariateML en R, con esta función ajustamos la mejor distribución que se ajuste a los datos por medio del criterio de Akaike (AIC). Obtenemos las siguientes distribuciones ajustadas:

- **WALMEX:** Obtenemos una distribución logística con los siguientes parámetros:

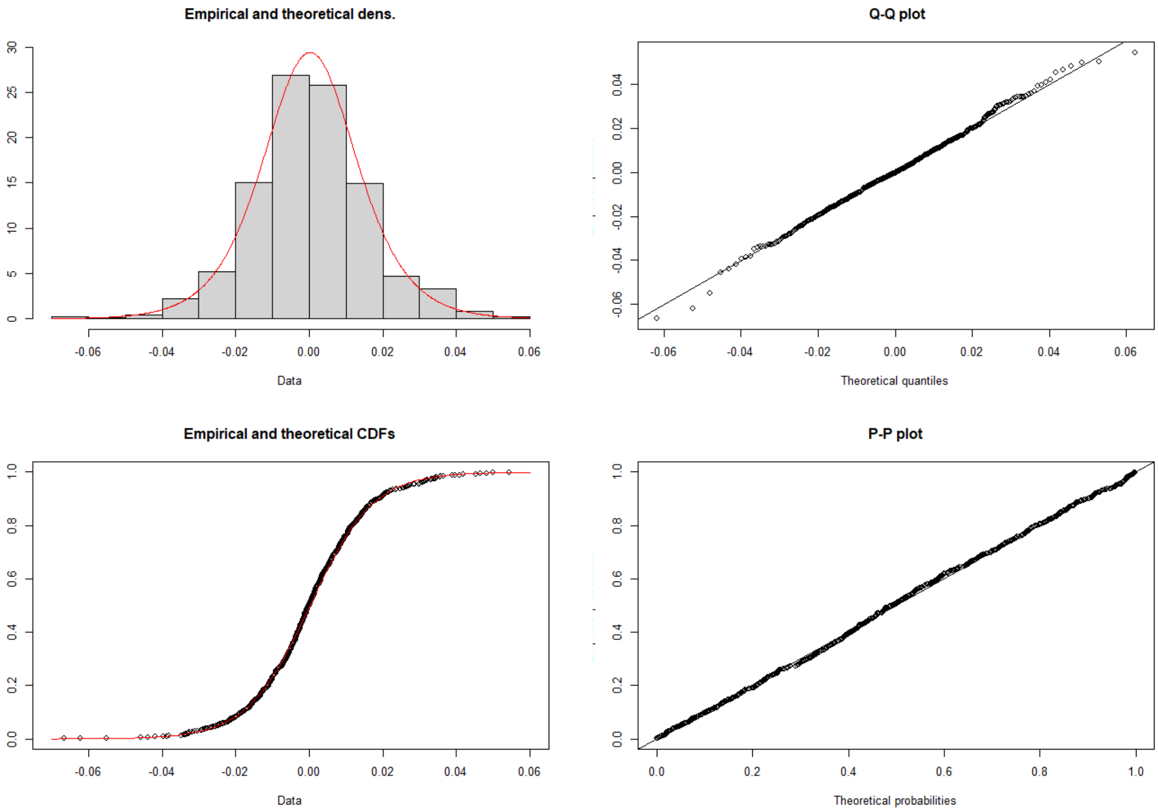
```
Maximum likelihood estimates for the Logistic model
 location      scale
0.0004048  0.0096409
```



Por si solo el histograma nos permite visualizar una distribución que pareciera simétrica y por encima se dibuja de color rojo la distribución de la logística. En el Q-Q plot podemos ver que los valores correspondientes a la cola de la distribución no los ajusta del todo bien. Por otro lado, el gráfico de la distribución acumulada y el P-P plot se puede visualizar un ajuste muy bueno.

- **KOFUBL:** Obtenemos una distribución logística con los siguientes parámetros:

```
Maximum likelihood estimates for the Logistic model
 location      scale
0.0002134  0.0085024
```



El histograma por si solo nos deja ver la existencia de una simetría en los datos, que pareciera casi perfecta, sobre este se dibuja la distribución teórica. Nuevamente en el Q-Q plot se puede notar que en las colas de la distribución existen algunos valores que no se ajustan a la línea recta. De la misma forma que con WALMEX, las gráficas de la distribución acumulada y el P-P plot muestran que los datos se ajustan muy bien.

8. Cópula ajustada y distribución conjunta

Ya que hemos ajustado una distribución a los rendimientos de forma individual vamos a ajustar una cópula a los datos para obtener con esta la función de distribución conjunta.

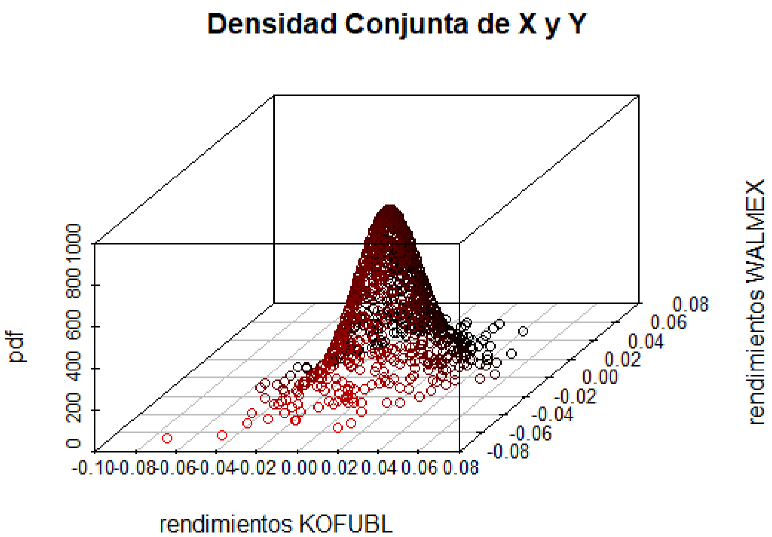
Para ello calculamos la distribución acumulada de cada rendimiento observado usando la distribución ajustada previamente, para KOFUBL vamos a llamar el vector u y para WALMEX v. Con estos dos vectores usamos la función BiCopSelect() del paquete VineCopula en R, buscamos determinar la cópula que mejor se ajuste usando nuevamente el criterio de Akaike.

Esto nos da como resultado una cópula de supervivencia de Gumbel con parámetro 1.15, una vez que se ha determinado la mejor cópula, procedemos a hallar la distribución conjunta para las marginales logísticas y la cópula de supervivencia de Gumbel usando la función mvdc() del paquete copula en R.

9. Simulación

En la función mvdc() introducimos la información que conocemos de las marginales y la cópula de supervivencia de gumbel para poder determinar la distribución conjunta, este resultado es posible por el Teorema de Sklar.

Una vez que hemos hallado la función de distribución conjunta con la función mvdc(), podemos hacer uso de la función rMvdc() para simular valores de los rendimientos de ambas acciones.



Estos valores simulados de los rendimientos de cada acción traen consigo la dependencia de la cópula de supervivencia de Gumbel. Así, el siguiente pasó será construir la función de pérdida asociada a ambas acciones.

10. Cálculo VaR y tVaR

Conociendo la distribución conjunta ya podemos calcular el VaR para las emisoras y para el portafolio el cual hemos decidido formarlo con una acción de cada emisora. Para ello vamos a recolectar en un vector los últimos precios conocidos de las emisoras, posteriormente vamos a simular 1000 veces vectores (x,y) de la distribución conjunta de los rendimientos, por medio de la función rMvdc(), así vamos a tener las simulaciones de los rendimientos de ambas emisoras tomando en cuenta la dependecia entre ellos modelada por la cópula.

Teniendo las simulaciones de los rendimientos vamos a reevaluar los ultimos precios, es decir, definamos S_t como el último valor conocido del precio y r_i el valor i-ésimo valor simulado para la acción, vamos a calcular la reevaluación como: $\hat{S}_i = S_t(1 + r_i)$, esto para los mil escenarios simulados y para ambas emisoras.

Posteriormente vamos a calcular el P&L(Profit & Loss) de cada escenario simulado de la siguente forma: P&L$_i = S_t - \hat{S}_i$. Es importante notar que, por la forma en que estamos definiendo la P&L, los valores menores a cero indican una ganancia.

Finalmente vamos a tomar el percentil al nivel de confianza deseado de la P&L recien creada. Este proceso se realiza un número grande de veces y podemos obtener un vector que guarde el valor del VaR en cada uno de estos escenarios, y de esta forma obtenemos nuestro valor del VaR por medio de cópula. Asímismo, en cada uno de estos escenarios podemos calcular de forma simultenea el tVaR, para esto vamos a usar la función ES() del paquete cvar, la cual calcula el tVaR de una serie de datos a un nivel de confianza. Este procedimiento se realiza para cada una de las emisoras.

Por otro lado, para calcular el VaR y ES del portafolio calculamos un nuevo vector el cual será la suma de los vectores de P&L de las ambas emisoras y repetimos el proceso hallando el percentil y usando la función ES().

11. Resultados

Para tener un punto de comparación de los resultados obtenidos emplearemos otros métodos de simulación no paramétricos que suelen usarse para determinar el VaR y el tVaR.

Simulación Histórica.

Sea r_i el i-ésimo rendimiento observado en una ventana de n días, con $i = 1, ..., n-1$. El método de simulación histórica consiste en considerar que el último precio conocido S_t tendrá un rendimiento para el siguiente día correspondiente a cada uno de los rendimientos históricos r_i Posteriormente se busca construir la función de P&L, para este fin se calculan valores de la forma P&L$_i = S_t - S_t(1 + r_i)$. Una vez obtenida la función de P&L se calcular el VaR como el percentil que acumula (1-α)% a la izquierda de la distribución.

Boostrapping.

Para este método es necesario considerar n número de simulaciones, donde en cada una de ellas se obtiene un remuestro con reemplazo de los rendimientos observados en una ventana de tiempo, posteriormente se calcula la función de P&L de la misma forma que en el método de simulación histórica y se calcula el VaR como el percentil que acumula (1-α) % a la izquierda de la distribución.

Simulación de Montecarlo.

Sean μ y σ^2 la media y varianza, respectivamente, de los rendimientos obsevados en una ventana de tiempo. Este método consiste en suponer que los rendimientos provienen de una distribución que se distribuye $N(\mu, \sigma^2)$. Se realizan n simulaciones donde en cada una de ellas se simulan valores de la distribución normal con media μ y varianza σ^2 y posteriormente se calcula la función de P&L y el VaR de la misma forma que en los métodos anteriores.

- **Comparación VaR**

```
Table: VaR al 95%

|                       | KOFUBL| WALMEX| Portafolio|
|:----------------------|------:|------:|----------:|
|Copula                 | 3.3446| 1.9770|     4.2860|
|Simulación Histórica   | 3.3123| 1.9741|     3.9953|
|Simulación Monte-Carlo | 3.4779| 2.0425|     3.9899|
|Bootstrap              | 3.3638| 2.1002|     4.2225|
```

- **Comparación tVaR**

```
Table: tVaR al 95%

|                       | KOFUBL| WALMEX| Portafolio|
|:----------------------|------:|------:|----------:|
|Copula                 | 4.5668| 2.7218|     5.5090|
|Simulación Histórica   | 4.7765| 2.7345|     5.5625|
|Simulación Monte-Carlo | 4.3575| 2.5771|     5.1670|
|Bootstrap              | 4.9316| 2.6855|     5.4854|
```

12. Conclusión

Podemos notar que los valores del VaR y tVaR usando cópula son muy similares a los calculados con los modelos comparados, con lo que podemos decir que es un buen enfoque para modelar la dependencia usando un modelo semi-paramétrico sin hacer suposiciones sobre las distribuciones marginales o conjuntas ya que parece modelar la dependencia de manera similar a los modelos no paramétricos pero con dependencia implícita.