

Péndulo casero amortiguado y sus características en la dinámica del sistema

Carlos Cardinale and Federico Muñoz*
Escuela de Física, Universidad de Costa Rica
(Dated: August 24, 2020)

Se estudia el sistema del péndulo amortiguado y se demuestra que su dinámica no es estrictamente caótica. Este sistema si comparte características claves de un movimiento caótico pero carece de variables dinámicas para poder considerarlo caótico. La energía siempre tiene mayor decaimiento en los primeros periodos y la solución de Runge-Kutta para el diagrama de fase del movimiento completo está dada y discutida en la investigación.

I. INTRODUCCIÓN

El movimiento de un péndulo para ángulos pequeños, movimiento armónico simple, es de lo más estudiado en la física. Aparece muchas veces en las teorías de investigación desde la mecánica clásica hasta la cuántica y por eso su estudio ha abarcado gran importancia. La solución para el movimiento de cualquier ángulo (de $-\pi$ a π) no es exacta, tampoco, al introducir las fuerzas no conservativas; cosa que se tomará en cuenta en el experimento.

Para solucionar tal movimiento generalizado es indispensable saber de métodos numéricos y su respectiva programación computacional.

Por lo tanto, se planea entender por completo el movimiento del péndulo simple como se da en la naturaleza. En otras palabras, se estudia el péndulo simple sin sobre simplificar el movimiento y, en un principio, tomando en cuenta toda variable que afecte su dinámica. Como por ejemplo, resistencia del aire o fricción que se pueda dar en la oscilación.

I.1. Pregunta de Investigación

¿Es naturalmente caótico el sistema de péndulo simple al agregarle fuerzas no conservativas, disipadoras, al movimiento?

I.2. Objetivo General

Fortalecer las bases de métodos numéricos, y programación cuando se estudian sistemas con soluciones no analíticas.

I.3. Objetivos Específicos

- Crear un sistema de péndulo simple con materiales caseros que permitan el estudio detallado de su movimiento.

- Analizar datos, por medio de una aplicación móvil de alto nivel algorítmico, para la toma de fotos, con alta calidad, en cuadros por segundo.
- Demostrar que en la naturaleza hay sistemas complejos que su solución es posible solo con métodos numéricos.
- Mostrar diagramas de fase para cada condición inicial para determinar si el movimiento es caótico.

II. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

El péndulo simple en \mathbb{R}^2 , sin incluir fuerzas no conservativas, tiene energía cinética igual a $\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$ con energía potencial de $-mgl\cos(\theta)$; donde $m, l, \theta, \dot{\theta}$ son la masa, longitud de la cuerda, el ángulo de oscilación y la derivada del ángulo con respecto al tiempo. El Hamiltoniano tiene la siguiente forma:

$$H = p_{\theta}\dot{\theta} - L(\theta, t) = \frac{1}{2}\frac{p_{\theta}^2}{ml^2} - mgl\cos(\theta) \quad (1)$$

donde $L(\theta, t)$ es el Lagrangiano, p_{θ} es el momentum generalizado y t es el tiempo. El Hamiltoniano anterior es conservativo a no depender explícitamente del tiempo[7], y considerando solo ángulos pequeños, se puede obtener la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \quad (2)$$

con $\omega^2 = g/l$. Esta es una ecuación altamente conocida por ser la ecuación del movimiento armónico simple[4].

Ahora al sistema se le agrega las fuerzas no conservativas que son disipadoras de la energía y además se consideran ángulos de 0 a π . Estas consideraciones complican más el cálculo anterior. Entonces, para un ángulo determinado lo que cambia es la energía después de un tiempo ya que deja de ser conservativa. Esto entonces depende estrictamente de la posición inicial del sistema[1]. Debido a la fricción la energía disminuye con respecto al tiempo. La ecuación de Hamilton del péndulo simple para este caso sería:

$$H'(\theta; p_{\theta}; t) = H^{(0)} + H^{(1)}. \quad (3)$$

$H^{(0)}$ de la ecuación anterior es el Hamiltoniano constante en el tiempo calculado en la ecuación (1), $H^{(1)}$ es el

* carlos.cardinale@ucr.ac.cr; federico.munozrojas@ucr.ac.cr

término nuevo que aparece debido a la fuerza de fricción en el nuevo Hamiltoniano, H' . $H^{(1)}$ es dependiente del tiempo y cuando $t \rightarrow \infty$ entonces $H' \rightarrow 0$. Esto es esperado por el hecho que en la naturaleza todo péndulo deja de oscilar después de cierto tiempo. La ecuación del movimiento en términos generales del ángulo, θ , viene dada por:

$$\ddot{\theta} + f_1(\theta, t)\dot{\theta} + f_2(\theta, t) = 0 \quad (4)$$

La ecuación se estudiará mas a fondo cuando se expliquen los resultados obtenidos por medio de métodos numéricos como Runge-Kutta[6]. f_1 y f_2 serán entonces aproximados con métodos numéricos. Las fuerzas disipativas pueden ser no lineales y tener una forma polinomial[9]. Solo se considera el término lineal ya que de incluir más términos en las fuerzas disipativas solo complica el sistema, pero no afecta en el cumplimiento de los objetivos planteados.

El diagrama de fase en este sistema no lineal puede ser graficado por computadora[3] una vez se tenga la energía potencial total aproximada experimentalmente. Para el caso del péndulo simple con un solo grado de libertad la ecuación tiene la forma siguiente:

$$\dot{\theta}(\theta) \propto \sqrt{E - U(\theta)} \quad (5)$$

El diagrama de fase además puede mostrar claramente el atractor del sistema. El atractor es un conjunto de puntos, o punto, en el diagrama de fases del cual la solución del sistema tiende a comportarse después de un tiempo largo[2]. El atractor para el péndulo simple amortiguado sin fuerzas impulsadas sería la posición en el cual deje de oscilar por completo[8]. Este punto por lo general es el origen del sistema pero depende del marco de referencia. De cualquier modo, el diagrama de fase puede ser centralizado, cosa que se hace en el paper.

III. EXPERIMENTO

III.1. Materiales

- Cuerda de aproximadamente $10.15\text{cm} \pm 0.2\text{cm}$
- Una masa con peso aproximado de $1.8\text{g} \pm 0.01\text{g}$
- Plástico protector transparente
- Cámara de video con capacidad de grabar video en alta definición a cámara lenta de 32x(960 fps)
- Computadora
- Cronómetro
- Protractor

III.2. Procedimiento y métodos

El experimento es construido con los materiales antes mencionados. Facilmente se pueden construir el sistema que se desea estudiar. La forma conveniente de armar el equipo, con los materiales, es como se muestra en la figura 1.

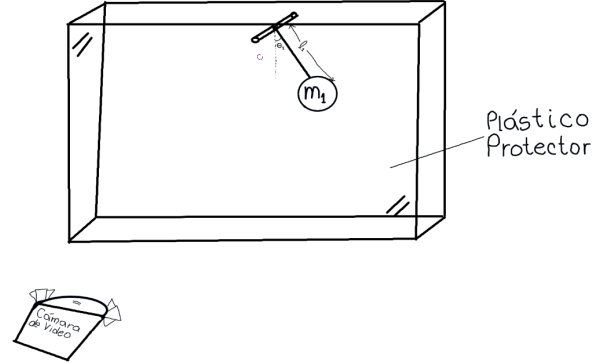


FIG. 1. Esquema del experimento para el péndulo simple donde se muestra como es armado el equipo.

Una vez armado el sistema de péndulo simple, se procede a explicar paso a paso la manera de tomar los datos experimentales.

El procedimiento para el caso del péndulo simple es:

1. Toma de datos en el ángulo de 30 grados.
2. Toma de datos en el ángulo de 45 grados.
3. Toma de datos para el ángulo de 60 grados.
4. Se repite para el otro lado de la simetría del eje y , es decir, para los ángulos de -30, -45 y -60 grados.
5. Se toman los datos de todos los ángulos por lo menos dos veces más. Siendo así, un total de 18 datos, tres para cada ángulo.
6. Se trabaja con el promedio de los datos para cada ángulo.

Los datos de importancia para cada prueba son, el ángulo y el tiempo en los casos de:

- medio periodo.
- periodo completo.

con esos datos y las variables directamente medibles del sistema, como la masa y la longitud de la cuerda, se procede a calcular las variables dependientes que describen mejor el movimiento. Estas variables son: la energía cinética y potencial, la energía disipada por las fuerzas no conservativas, el momentum y la posición. Y con el momentum y la posición se grafica el diagrama de fases.

IV. DATOS Y RESULTADOS

Los diagramas de fase mostrados tienen forma cuadrada debido a que solo se tomaron los datos cuando la posición o el momentum estaban en cero. En realidad la forma debería de ser elíptica y siempre con atracción al origen.

En las gráficas de energía con respecto al tiempo se consideró la energía inicial total como la energía potencial. El punto de referencia no es en el pivote (cambia al punto $(0, -l)$ siendo l la longitud de la cuerda). El propósito de eso era mostrar la energía perdida conforme pasa el tiempo, en donde, la energía graficada es positiva en todo momento. Así que por propósitos demostrativos y para mayor claridad se cambió el punto de referencia en esta parte.

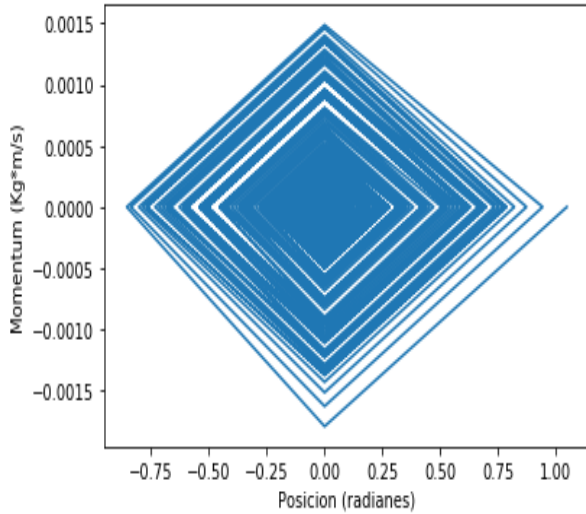


Diagrama de fase del péndulo simple a un ángulo inicial de 60 grados.

V. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

Una de las ecuaciones principales de este experimento recae en la ecuación (4). Con esta ecuación, en un principio, se tendría toda información relevante de la dinámica del péndulo. Esta ecuación toma la siguiente forma:

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \sin(\theta) = 0 \quad (6)$$

donde 2β es el factor que hace el movimiento amortiguado. El parámetro β es igual a $b/2m$, siendo b el factor de la fuerza no conservativa que amortigua la oscilación. La ecuación (6) no tiene solución analítica y solo se puede aproximar el resultado por medio de métodos numéricos. Se utilizó el método de Runge-Kutta de orden cuatro, para que la solución tenga mayor exactitud[5]. La ecuación es:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4) \quad (7)$$

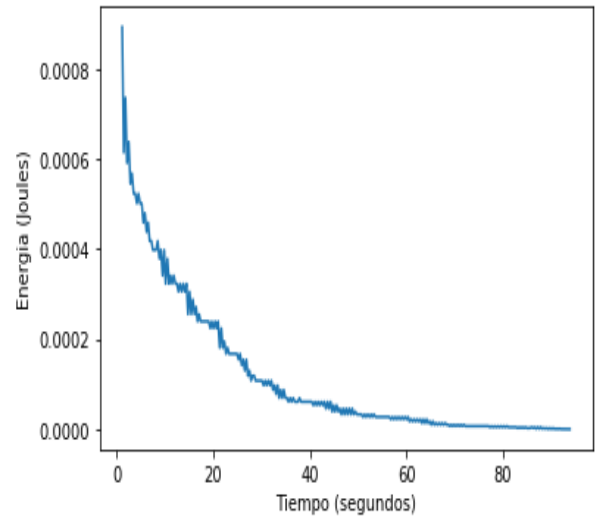


FIG. 2. Energía vs Tiempo del péndulo simple a un ángulo inicial de 60 grados.

siendo $y_1 = \theta$ y $y_2 = \dot{\theta}$. Antes de entrar en detalle de la solución numérica, se explica los datos obtenidos para cada ángulo inicial.

La figura (IV) muestra el diagrama de fase del sistema cuando el ángulo inicial es de 60 grados. El inicio del diagrama es cuando el momentum es cero y la posición es máxima. Se dice que el periodo de una oscilación completa es igual al movimiento que va desde un ángulo positivo con momentum cero al próximo ángulo positivo con momentum cero. Lo interesante del diagrama es como el movimiento decae bruscamente en los primeros periodos. Este decaimiento brusco es resultado de las fuerzas no conservativas. Estas fuerzas serían solamente las fuerzas de fricción. Hay fricción en el pivote, en la cuerda con el protractor y la resistencia del aire. Entonces, el decaimiento brusco se debe al sistema mismo, tratando de perder la mínima energía posible. Las figuras (10) y (11) muestran un comportamiento similar a la figura (IV), por lo tanto se cumple lo antes mencionado.

En la gráfica (2) se puede observar que el decaimiento de la energía es exponencial. Regresando a la ecuación (3), que corresponde al Hamiltoniano dependiente del tiempo, se puede inferir entonces que $H^{(1)}$ tiene la forma de:

$$H^{(1)} = \epsilon H^{(0)}; \quad (8)$$

donde

$$\epsilon = -(1 - e^{-\alpha t}). \quad (9)$$

Así $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow H' = H^{(0)}$ y cuando $\epsilon \rightarrow \infty \Rightarrow H' \rightarrow 0$. Por lo tanto, para saber el decaimiento de cualquier sistema similar, es solo cuestión de ajustar α al valor que mejor se acomode a los resultados experimentales. Al comparar las gráficas para los otros dos ángulos (gráficas 12 y 13) el comportamiento es similar a excepción de

un mayor decaimiento de la energía cuando la energía inicial es mayor. Parece ser que la energía tiene mayor decaimiento dependiendo de sus condiciones iniciales del ángulo. Esto podría ser resultado de lo antes mencionado, el sistema inicialmente pierde energía bruscamente porque está acomodando su dinámica para que durante el resto del movimiento se pierda la mínima energía posible. También podría ser que el factor de la fuerza disipativa β sea diferente dependiendo el ángulo inicial del sistema.

Volviendo a la solución numérica de la ecuación (6) por el método Runge-Kutta, las condiciones iniciales fueron: $\theta = 60\pi/180, 45\pi/180, 30\pi/180$ con $\dot{\theta} = 0, 0, 0$ donde cada coma indica el sistema independiente a sus condiciones iniciales. El diagrama de fase utilizando este método esta dado en la figura (3). La razón por la cual se ve como un sistema con disipación mas fuerte es debido a la cantidad de iteraciones. Con muchas iteraciones el comportamiento sería más parecido al de la figura (IV). El parámetro β es una variable dinámica en este método y es necesario darle el debido ajuste que exprese mejor los datos experimentales. Para los otros dos ángulos, 45 y 30 grados, el diagrama de fase estan en las figuras (15) y (14), respectivamente.

Se concluye que el sistema siempre trata de perder la mínima energía posible. Es decir, trata de acomodar su dinámica para prolongar el movimiento el máximo tiempo posible. Cumple el principio de mínima acción. Además se encontró que el sistema no es estrictamente

caótico matemáticamente hablando pero si comparte ciertas características de sistemas caóticos.

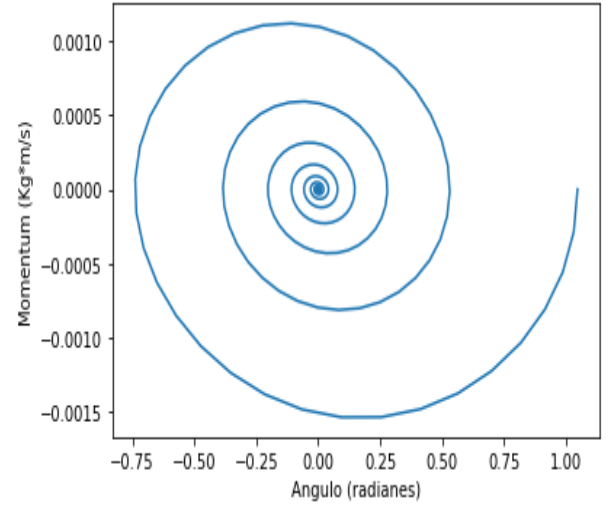


FIG. 3. Solución de la ecuación (6) por el método de Runge-Kutta para un ángulo inicial de 60 grados.

VI. ANEXOS

- [1] C. R. Galley. Classical mechanics of nonconservative systems. *Physical review letters*, 110(17):174301, 2013.
- [2] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. Classical mechanics addison-wesley. Reading, MA, 426, 1980.
- [3] J. B. Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, 2013.
- [4] D. Morin. *Introduction to classical mechanics: with problems and solutions*. Cambridge University Press, 2008.
- [5] T. Pang. An introduction to computational physics, 1999.
- [6] F. Scheck. *Mechanics: from Newton's laws to deterministic chaos*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [7] J. R. Taylor. *Classical mechanics*. University Science Books, 2005.
- [8] T. Tél and M. Gruiz. *Chaotic dynamics: an introduction based on classical mechanics*. Cambridge University Press, 2006.
- [9] J. Trueba, J. Baltanás, and M. A. Sanjuán. A generalized perturbed pendulum. *Chaos, Solitons & Fractals*, 15(5):911–924, 2003.

Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1	Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1	Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1
1.12	60	5.98	0	10.83	-35
1.28	0	6.17	-41	10.97	0
1.44	-49	6.32	0	11.14	36
1.62	0	6.51	42	11.31	0
1.79	54	6.65	0	11.48	-35
1.95	0	6.81	-40	11.64	0
2.11	-48	6.99	0	11.81	36
2.31	0	7.18	40	11.98	0
2.48	50	7.32	0	12.15	-35
2.63	0	7.48	-39	12.31	0
2.81	-46	7.65	0	12.48	35
2.96	0	7.82	39	12.62	0
3.15	47	7.99	0	12.79	-34
3.3	0	8.15	-39	12.95	0
3.49	-45	8.32	0	13.12	35
3.63	0	8.49	40	13.29	0
3.83	45	8.66	0	13.46	-34
3.98	0	8.83	-38	13.62	0
4.16	-44	8.99	0	13.79	35
4.31	0	9.16	39	13.96	0
4.5	45	9.33	0	14.13	-34
4.66	0	9.5	-36	14.29	0
4.83	-44	9.65	0	14.46	35
5	0	9.83	39	14.6	0
5.18	44	10	0	14.77	-31
5.31	0	10.13	-35	14.93	0
5.5	-42	10.3	0	15.1	34
5.65	0	10.5	38	15.27	0
5.84	43	10.64	0	15.44	-31

FIG. 4. Tabla de los primeros datos promedio de la posición y el tiempo del pendulo simple a 60 grados inicialmente (a un cuarto de periodo cada toma).

Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1	Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1	Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1
81.07	0	85.7	-3	90.34	0
81.24	-4	85.84	0	90.5	3
81.41	0	86.01	4	90.6	0
81.58	4	86.14	0	90.77	-1
81.71	0	86.38	-3	90.97	0
81.88	-4	86.48	0	91.11	2
82.01	0	86.64	4	91.24	0
82.18	4	86.78	0	91.41	-1
82.32	0	86.95	-2	91.61	0
82.52	-4	87.11	0	91.74	2
82.65	0	87.28	4	91.91	0
82.82	4	87.45	0	92.11	-1
82.95	0	87.62	-2	92.25	0
83.15	-3	87.79	0	92.42	1
83.29	0	87.92	4	92.52	0
83.49	4	88.09	0	92.65	-1
83.59	0	88.22	-2	92.89	0
83.76	-3	88.39	0	93.02	1
83.93	0	88.59	3	93.19	0
84.09	4	88.69	0	93.32	-1
84.23	0	88.89	-2	93.52	0
84.4	-3	89.03	0	93.62	1
84.56	0	89.19	3	93.83	0
84.73	4	89.36	0	93.96	0
84.87	0	89.5	-1	94.19	0
85.07	-3	89.7	0		
85.2	0	89.83	3		
85.37	3	89.97	0		
85.5	0	90.17	-1		

FIG. 5. Tabla de los últimos datos del movimiento del péndulo simple a ángulo inicial de 60 grados (a un cuarto de periodo cada toma).

Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1	Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1
28.52	4.2	37.15	1
28.89	-4.1	37.48	-0.7
29.16	4.1	37.85	0.4
29.46	-4	38.09	-0.5
29.83	3.9	38.46	0.4
30.13	-4	38.72	-0.4
30.47	3.7	39.06	0.3
30.77	-4	39.36	-0.2
31.11	3.6	39.77	0.2
31.38	-3.5	40	-0.1
31.74	3.5	40.34	0.2
32.05	-3.3	40.64	-0.1
32.42	2.9	40.94	0.1
32.72	-2.9	41.31	-0.1
33.02	2.8	41.58	0.1
33.32	-2.8	41.81	0
33.69	2.5	42.15	0.1
33.99	-2.4	42.72	0
34.3	2.2	43.02	0
34.6	-2.1	43.49	0
34.93	1.9		
34.93	-2		
35.27	1.7		
35.57	-1.6		
35.91	1.3		
36.21	-1.1		
36.54	1		
36.85	-0.7		

FIG. 7. Tabla de los últimos datos del movimiento del péndulo simple a ángulo inicial de 45 grados (a medio periodo cada toma).

Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1	Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1	Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1
1.34	45	10.54	15.8	19.56	6.6
1.68	-40	10.84	-15.9	19.9	-7.7
2.01	39.3	11.17	15.2	20.2	6.3
2.35	-39.1	11.51	-15.1	20.5	-7.5
2.68	36	11.85	14	20.84	6.3
3.02	-35	12.15	-15	21.14	-6.2
3.36	35	12.48	13	21.48	5
3.69	-33	12.82	-14	21.81	-6.1
3.99	31	13.12	12	22.15	5.9
4.33	-31	13.46	-13	22.45	-6
4.66	29	13.76	11	22.79	5.9
5	-30	14.09	-12	23.09	-5.7
5.34	26	14.43	10.9	23.39	5.7
5.64	-26	14.73	-11	23.69	-5.5
5.97	25	15.07	10.7	24.03	5.4
6.31	-25	15.37	-11	24.36	-5.5
6.64	24	15.7	10.4	24.7	5.4
6.95	-24	16.04	-10.3	25.03	-5.3
7.28	22	16.34	10.1	25.3	4.9
7.62	-22	16.64	-10	25.64	-5.2
7.95	20	16.98	9.8	25.97	4.8
8.26	-20	17.32	-10	26.31	-5.1
8.59	19	17.65	9.7	26.58	4.6
8.89	-19	17.95	-9.3	26.95	-5.1
9.23	16	18.29	7	27.25	4.4
9.56	-16	18.59	-9.1	27.58	-4.4
9.9	15	18.93	7	27.89	4.3
10.2	-15	19.26	-8	28.19	-4.2

FIG. 6. Tabla de los primeros datos del movimiento del péndulo simple a ángulo inicial de 45 grados (a medio periodo cada toma).

Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1	Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1
1.14	30.1	10.87	11.4
1.48	-25.8	11.2	-11.3
1.81	25.5	11.51	10.9
2.11	-25.1	11.84	-11.1
2.45	24.8	12.18	10.7
2.78	-24.3	12.48	-10.5
3.12	22.9	12.78	10.3
3.42	-22.2	13.12	-10.3
3.76	21.7	13.49	10.2
4.06	-21.1	13.75	-10.2
4.39	20.2	14.09	10.1
4.73	-20.2	14.42	-10
5.07	19.2	14.73	9.9
5.37	-19.4	15.06	-10
5.7	18.7	15.36	9.9
6	-17.3	15.7	-9.6
6.34	16.1	16	7.7
6.64	-16.9	16.34	-9.5
6.98	16.2	16.67	7.5
7.31	-16.2	16.97	-8.8
7.65	15.6	17.31	6.9
7.95	-15.6	17.61	-7
8.29	14.2	17.95	6.8
8.59	-15.1	18.25	-7.5
8.92	14.1	18.58	6.6
9.26	-14.1	18.92	-7.4
9.59	12.6	19.22	5.3
9.9	-14	19.52	-6.2
10.23	11.9	19.86	5.2
10.57	-13.4	20.19	-6.1

FIG. 8. Tabla de los primeros datos del movimiento del péndulo simple a ángulo inicial de 30 grados (a medio periodo cada toma).

Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1	Tiempo (s) ± 0.01 s	Posicion (grados) ± 0.1
20.5	5.9	30.22	1.3
20.8	-5.8	30.43	-1.3
21.13	5.5	30.8	1.2
21.47	-5.4	31.06	-1.1
21.8	5.3	31.5	1
22.07	-5.2	31.7	-0.8
22.44	5.2	32	0.9
22.71	-5.1	32.34	-0.6
23.08	4.9	32.64	0.4
23.35	-5	32.94	-0.3
23.72	4.8	33.28	0.5
24.02	-5	33.55	-0.1
24.35	4.5	33.85	0
24.66	-5	34.22	0
24.99	4.3		
25.29	-5		
25.63	3.9		
25.93	-4.1		
26.27	3.7		
26.57	-3.3		
26.94	2.8		
27.24	-3		
27.54	2.5		
27.88	-2.2		
28.18	1.8		
28.48	-2.1		
28.82	1.5		
29.15	-2.3		
29.49	1.4		
29.79	-2		

FIG. 9. Tabla de los últimos datos del movimiento del péndulo simple a ángulo inicial de 30 grados (a medio periodo cada toma).

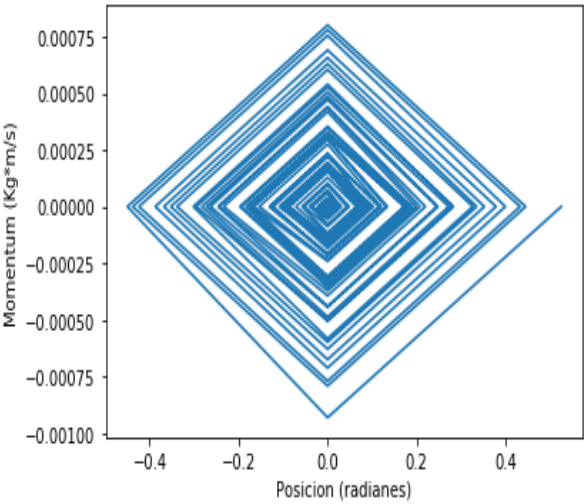


FIG. 11. Diagrama de fase del péndulo simple a un ángulo inicial de 30 grados.

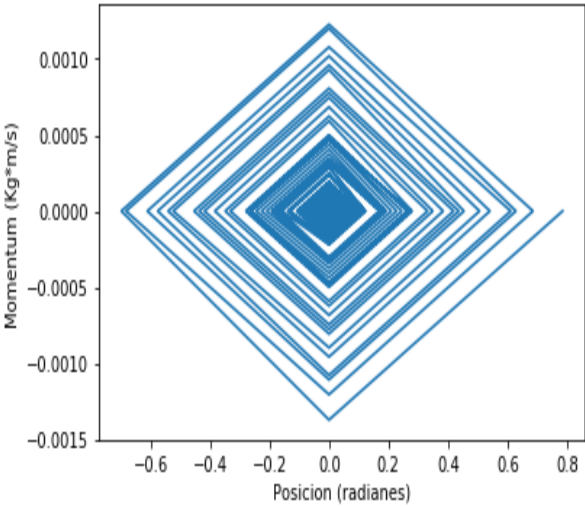


FIG. 10. Diagrama de fase del péndulo simple a un ángulo inicial de 45 grados.

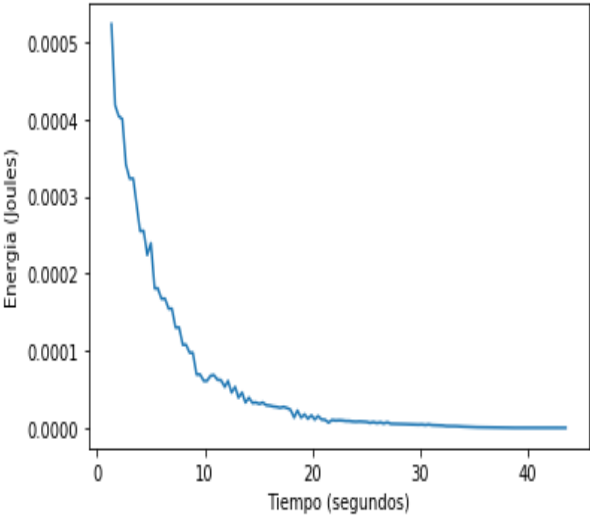


FIG. 12. Energía vs Tiempo del péndulo simple a un ángulo inicial de 45 grados.

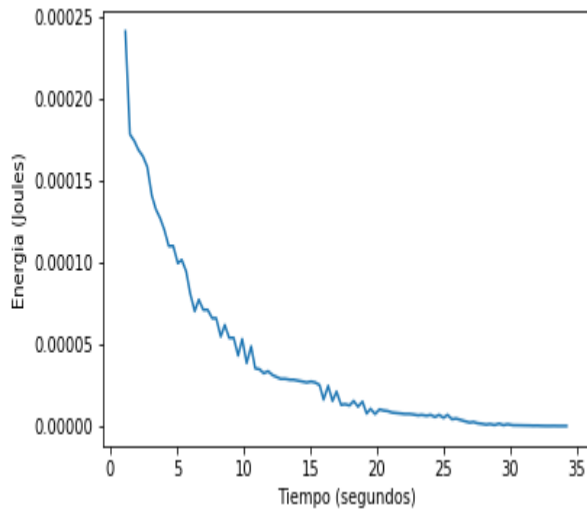


FIG. 13. Energía vs Tiempo del péndulo simple a un ángulo inicial de 30 grados.

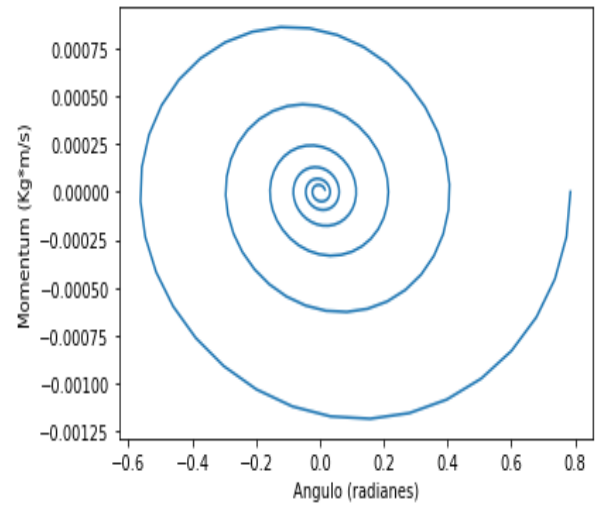


FIG. 15. Solución de la ecuación (6) por el método de Runge-Kutta para un ángulo inicial de 45 grados.

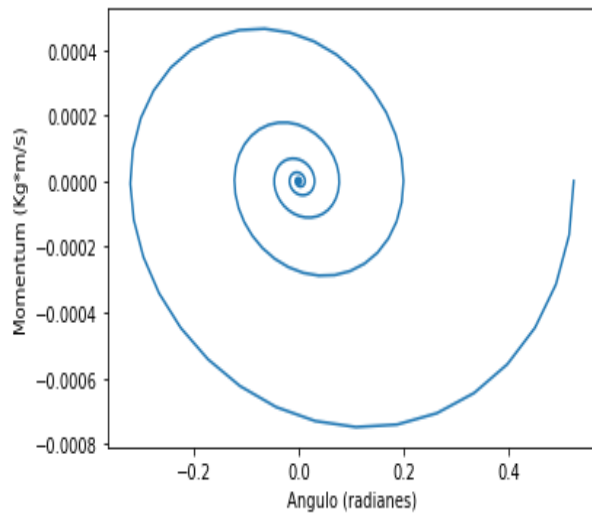


FIG. 14. Solución de la ecuación (6) por el método de Runge-Kutta para un ángulo inicial de 30 grados.

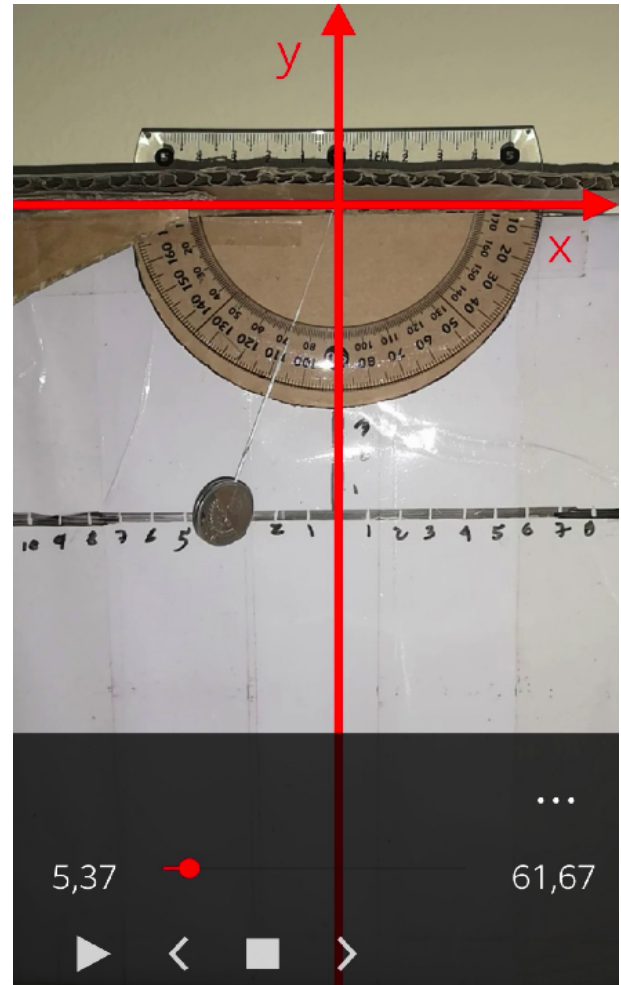


FIG. 16. Foto del equipo. Se puede ver como se estudió el movimiento a la hora de tomar datos. La posición de la masa es a 19.1 grados con un tiempo de 5,37 segundos