EDICIONES
COMPLUTENSE

Anales del Seminario de Historia de la Filosofía
e-ISSN 0211-2337

ESTUDIOS

Tractatus Logico Philosophicus y *Analysis Situs*: aires de familia

Carlos Alberto Cardona
Profesor titular de la Escuela de Ciencias Humanas, Universidad del Rosario (Bogotá-Colombia)

https://dx.doi.org/10.5209/ashf.8373 Recibido: 08 de septiembre de 2022 • Aceptado: 08 de septiembre de 2024

Resumen: El artículo explora vasos comunicantes entre el Tractatus Logico Philosophicus de Ludwig Wittgenstein y el Analysis situs de Gottfried Wilhelm Leibniz. Se muestra que las caracterizaciones de objetos en el Tractatus y de puntos en el Analysis situs siguen patrones similares. También se exploran las similitudes y diferencias entre el pretender que «la proposición puede representar la realidad entera» (TLP, § 4.12) o «todas [las proposiciones] están unidas por una trama infinitamente fina al gran espejo» (TLP, § 5.511) y el hecho de que «cada sustancia simple [tiene] relaciones que expresan a todas las demás, y [por consiguiente] es un espejo vivo y perpetuo del universo» (Monadología, § 56).
Palabras clave: Analysis situs; objeto; punto; estado-de-cosas; expresión

ENG *Tractatus Logico Philosophicus* and *Analysis Situs*: family resemblances

Abstract: This paper explores affinities between Ludwig Wittgenstein's Tractatus Logico Philosophicus and Gottfried Wilhelm Leibniz's Analysis situs. It is shown that the characterizations of objects in the Tractatus and of points in the Analysis situs follow similar patterns. It also explores the similarities and differences between pretending that "propositions can represent the whole reality" (TLP, § 4.12) or "all [propositions] are connected into an infinitely fine network, to the great mirror" (TLP, § 5.511) and the fact that "each simple substance [has] relations that express all others, and [therefore] is a living and perpetual mirror of the universe" (Monadology, § 56).
Keywords: Analysis situs; object; point; state-of-affairs; expression

Cómo citar: Cardona, Carlos (2025) "*Tractatus Logico Philosophicus y Analysis Situs:* aires de familia". *Anales del Seminario de Historia de la Filosofía*, 42 (1), 53-66.

0. Introducción

Escribe Leibniz (1646-1716) en una de las presentaciones del proyecto orientado a ofrecer una *characteristica universalis*: «El Arte característico es el arte de formar y ordenar caracteres de manera tal que se refieran a pensamientos, es decir, que tengan entre sí aquella relación que tienen entre sí los pensamientos. La expresión es el agregado de caracteres que representan la cosa que se expresa».[1] Un atento lector del *Tractatus Logico Philosophicus*[2] (*TLP*) de Wittgenstein (1889-1951) reconocerá inmediatamente un aire de familia. Por ejemplo, «La forma de figuración es la posibilidad de que las cosas se combinen unas respecto de otras como los elementos de la figura» (*TLP,* § 2.151) y «La figura lógica de los hechos es el pensamiento» (*TLP,* § 3). Un ejercicio de articulación de las dos entradas de *TLP* nos autoriza para componer algo así: "La forma de figuración del pensamiento [figura lógica de los hechos] consiste en que expresa la posibilidad de

[1] Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1688/2013) [*LU*]. "Sobre los caracteres y sobre el arte característico". En J. Velarde y L. Cabañas (eds.), *G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Lengua universal, característica y lógica* (vol. 5, p. 359). Granada: Editorial Comares. Citaré las obras de Leibniz a partir de la edición en español preparada por Juan Antonio Nicolás (editorial Comares). Ver las convenciones para citación al final del artículo.

[2] En adelante *TLP*. Wittgenstein, Ludwig (1918/1973) [*TLP*]. *Tractatus Logico Philosophicus.* Madrid: Alianza Editorial.

que aquello que figura el pensamiento esté articulado de la misma manera como los elementos presentes en él". Esto es similar a la siguiente paráfrasis de la entrada de Leibniz: "es decir, que los elementos que entran en la figura tengan aquella relación que tienen entre sí los pensamientos". Veamos también: «En la proposición se expresa [*drücktsich*] sensoperceptivamente el pensamiento» (*TLP,* § 3.1) y «El pensamiento puede expresarse [*ausgedrückt*] en la proposición de un modo tal que a los objetos del pensamiento correspondan objetos del signo proposicional» (*TLP,* § 3.2). Estamos igualmente autorizados a componer algo así: "dado que a los objetos del pensamiento corresponden adecuadamente los objetos del signo proposicional, decimos que en la proposición se expresa sensoperceptivamente el pensamiento". Esto último se asemeja a la siguiente paráfrasis de Leibniz: "La expresión del pensamiento se logra a través de un agregado de caracteres que representen las cosas que se expresan". Bastan estos parecidos para que nos inclinemos a explorar si tales aires de familia puedan llevarse más hondo.

Con el título *Analysis situs* (*AS*) se reconoce y menciona el ensayo *Characteristica Geometrica* que Leibniz compartió con Christiaan Huygens (1629-1695) para que este último procediera a evaluar (1679). Leibniz señala, en la carta de presentación, que su *Analysis situs* tiene grandes ventajas sobre el álgebra, toda vez que alivia la imaginación y consigue que se ofrezcan descripciones completas de cualquier cosa imaginable sin emplear figuras o palabras.[3] La respuesta de Huygens no pudo ser más desalentadora: «He examinado atentamente lo que me enviáis referente a vuestra nueva Característica, pero por confesároslo francamente, no concibo, a la vista de lo que me mostráis, que podáis fundar en ello tan grandes esperanzas».[4] Ante la respuesta, Leibniz desistió de hacer públicos tales escritos. No obstante, el filósofo siguió trabajando y enriqueciendo el proyecto.

Posterior a la muerte del filósofo, las menciones al *Analysis situs* que hicieran Christian Wolff (1679-1754), Immanuel Kant (1724-1804) y Leonhard Euler (1707-1783) despertaron el interés por el manuscrito que aún no se hacía público.[5] Gracias a la publicación póstuma de los papeles de Huygens en 1833, el mundo académico tuvo acceso parcial al ensayo del filósofo alemán. Unido a lo anterior, el interés que despertó la geometría proyectiva en el siglo XIX, gracias a los trabajos independientes de Jean-Victor Poncelet (1788-1867), Karl Georg von Staudt (1798-1867) y Felix Klein (1849-1925), condujo a sugerir que las orientaciones de dicha geometría habían sido anticipadas en el *Analysis situs* de Leibniz. Klein, quien se ocupó de estudiar las figuras geométricas a partir de las propiedades que resultan invariantes bajo transformaciones continuas, nombró sus investigaciones con el título *Analysis situs.* El matemático nombró así su proyecto, toda vez que se trataba de la ciencia de las propiedades que dependen de la ubicación y no del tamaño.[6] Klein tomó prestado el nombre a partir de un escrito de Bernhard Riemann (1826-1866) en el que se evocan los trabajos de Leibniz: «El nombre *Analysis situs* fue dado por Leibniz a una rama del conocimiento ocupada de aquella parte de la teoría de las cantidades continuas [...] [basadas] en las relaciones de situación o posición que son independientes del tamaño relativo».[7] Henri Poincaré (1854-1912), siguiendo la marca impuesta por Riemann, también nombró su trabajo seminal en topología con el título *Analysis situs*.

La publicación de *La lógique de Leibniz* (1901) de Louis Couturat (1868-1914), a comienzos del siglo XX, llamó la atención hacia el *Nachlass* de Leibniz que, a la fecha, reposaba en Hanover y no contaba todavía con un estudio profundo. El entusiasmo de Bertrand Russell (1872-1970) por la filosofía de Leibniz y por el poder de la geometría proyectiva contribuyó a dirigir la atención al ignorado filósofo alemán. En el año 1897, Bertrand Russell publicó *An essay on the foundations of geometry.* El autor alude en este texto a dos formulaciones diferentes del *dictum* kantiano. La primera de ellas: «Si la geometría tiene certeza apodíctica, su objeto, a saber, el espacio, debe ser *a priori*, y como tal debe ser puramente subjetivo»; la segunda: «Si el espacio es puramente subjetivo, la geometría debe tener certeza apodíctica».[8] Formulo aquí una paráfrasis de la presentación que hice del programa de Russell en otro artículo:[9] Russell sostenía que el advenimiento de las geometrías no-euclidianas golpeaba de frente a la primera versión, más no así a la segunda. Efectivamente, dado que hay varios sistemas de geometría alternativos, no es claro que alguno de ellos lleve consigo la conciencia de su necesidad; en consecuencia, no es en los resultados de la geometría en donde se encuentra fundamento alguno para la pretendida subjetividad del espacio. Los argumentos que llevan a la primera versión prueban que alguna forma de externalidad es requisito necesario para la receptividad fenoménica, pero no prueban que dicha forma se ajuste necesariamente a los cánones de la geometría euclidiana. Ahora bien, si reconocemos que el espacio es subjetivo y debe darse *a priori*, hemos de admitir que alguna geometría posee certeza apodíctica. El filósofo quiso apoyarse en la recién fundada geometría proyectiva y dirigió sus esfuerzos a probar que si bien no era posible establecer una deducción trascendental de los resultados de la geometría euclidiana –y en eso Kant estaba equivocado–, sí era posible adelantar una deducción trascendental de los resultados de la geometría proyectiva –y esta modificación haría nuevamente plausible la argumentación kantiana–. En palabras de Russell: «Esta [la geometría proyectiva], mantendré, es necesariamente verdadera de cualquier forma de externalidad

[3] Carta de Leibniz a Huygens (octubre 1679); Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1679/2015) [*AS*]. "La característica geométrica. *Analysis situs*". En M. S. de Mora Charles (ed.), *G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Escritos matemáticos* (vol. 7 B, p. 418). Granada: Editorial Comares.

[4] (Carta de Huygens a Leibniz (noviembre 1679) *AS*, p. 418.

[5] De Risi, Vincenzo. (2007). *Geometry and Monadology. Leibniz's Analysis Situs and Philosophy of Space* (pp. 101, 108, 110). Boston: Birkhäuser.

[6] Klein, Felix. (1908/2004). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint Geometry* (p. 106). Mineola: Dover Publications, Inc.

[7] Riemann, Bernhard (1857/2004). "The theory of Abelian Functions". En H. Weber (ed.) *Bernhard Riemann Collected Papers* (p. 82). Heber City, UT: Kendrick Press, Inc.

[8] Russell, Bertrand. (1897). *An essay on the foundations of geometry* (p. 1), Londres: Cambridge University Press.

[9] Carlos Cardona. (2011). "Teoría especial de la relatividad y conocimiento a priori". En G. Guerrero (comp.) *Einstein, científico y filósofo*, (p.p. 35-36). Cali: Universidad del Valle.

y es, dado que alguna forma tal es necesaria para la experiencia, completamente *a priori*»[10].

Russell identificó tres periodos en el desarrollo de las reflexiones filosóficas atadas a la evolución de las nuevas geometrías en el siglo XIX. Primer período [Lobachevsky (1792-1856)]: se obtuvieron sistemas geométricos, en principio consistentes, que niegan el quinto postulado de Euclides. Segundo período [Riemann]: el espacio se privó de características cualitativas para evitar referencias incómodas a la intuición y se convirtió en un caso particular de una concepción más amplia de *variedades.* Tercer período [Klein]: se introdujo un enfoque proyectivo por oposición a un enfoque métrico en el estudio del espacio. El paso del segundo al tercer período exhibe una oscilación pendular que va desde un extremo que sobrevalora la cantidad, al extremo opuesto en donde la cantidad es irrelevante. La crítica central de Russell al proyecto de Riemann se basa en el *dictum* de corte idealista según el cual no hay diferencia cuantitativa sin identidad cualitativa. Dado que la cantidad es un resultado de comparación de dos objetos cualitativamente semejantes, el conocimiento de las propiedades esenciales del espacio no se puede obtener sólo a partir de juicios de cantidad que pretendan negar los aspectos cualitativos.

Las críticas de Russell al segundo período lo condujeron a abrigar la esperanza de encontrar en la geometría proyectiva un candidato para estructurar *a priori* la forma posible de toda externalidad. El filósofo sugirió tres axiomas que, a su juicio, permitirían adelantar una deducción trascendental de los resultados resumidos en dicha geometría. Estos tres axiomas aseguran que: (1) todas las partes del espacio son cualitativamente semejantes y si las podemos distinguir, ello sólo se debe al hecho de que una reside fuera de la otra; (2) el espacio es continuo e infinitamente divisible, el cero de extensión es el punto; (3) dos puntos determinan tan sólo una recta (1897, p. 132).[11]

Pretendo defender en el artículo que los axiomas de Russell guardan un estrecho parecido con las formulaciones de Leibniz en el *Analysis situs* y que, dada la cercanía entre Russell y Wittgenstein durante la segunda década del siglo XX, algunos elementos de esta influencia latente se manifiestan en el *TLP*.

En la primera parte del escrito, presento los rasgos centrales del *Analysis situs* que, a mi juicio, sugieren similitudes estrechas con elementos de *TLP*. En la segunda parte, reformulo aspectos centrales del *TLP* forzando la relación que percibo con elementos del *Analysis situs*. En la parte final, me ocupo del concepto de expresión formulado en la *Monadología* y procuro advertir vasos comunicantes con las referencias a la expresión en *TLP*.

10 Ibidem. p. 6.

11 Ibidem. p. 132. La geometría proyectiva de Klein puede verse hoy como un modelo de geometría de incidencia. Una geometría de incidencia se puede concebir a partir de una estructura {*P, L, I*}, siendo *P* un conjunto cuyos elementos se llaman *puntos*, *L* un conjunto de subconjuntos de *P* denominados *rectas*, e *I* una relación de incidencia que establece la pertenencia de elementos de *P* en subconjuntos de *L*. Para que una estructura tal se denomine de incidencia, se requiere la satisfacción de cinco axiomas. Véase Buekenhout, Francis. (1995). "An Introduction to Incidence Geometry" (pp. 10-11). En F. Buekenhout (ed.) *Handbook of Incidence Geometry*. Amsterdam: Elsevier.

1. Motivación y estructura del *Analysis situs*

Leibniz se familiarizó a profundidad con los *Elementos* de Euclides durante su estancia en París (1672-76). Allí conoció, además, el programa cartesiano orientado a algebraizar la geometría y los trabajos de Girard Desargues (1591-1661) y Blaise Pascal (1623-1662) inclinados a ofrecer un acercamiento a los objetos de la geometría sin invocar propiedades métricas. Esta inmersión profunda en el horizonte de la geometría llevó a Leibniz a distanciarse de la presentación euclidiana y a advertir las limitaciones del enfoque cartesiano:

> Los comentarios no unidos a figuras suelen ser oscuros y tediosos [lo dice refiriéndose a Euclides], el cálculo algebraico [referido ahora a Descartes] con frecuencia pervierte la naturaleza de las cosas y nos hace pasar del *situs* y de las figuras a la magnitud y a los números, de modo que con frecuencia es difícil pasar de las figuras al cálculo, y al revés, hallado el cálculo, construir las figuras.[12]

El filósofo aspiraba a superar la incomodidad construyendo un método que se ocupara de los caracteres que representan el *situs* de los puntos y nos permitiera ignorar los rodeos que nos obligan a transitar por los cálculos algebraicos.[13] Hay un aire de familia similar en los trabajos de Desargues y Pascal; estos se entienden hoy como la antesala de la geometría proyectiva.[14]

Los *Elementos* de Euclides inician con la presentación de las definiciones de los objetos centrales de la geometría. Estas definiciones despiertan la imaginación del lector y le invitan a tener en su horizonte mental una representación de los términos definidos. Algunas de estas definiciones sugieren que un PUNTO es aquello que carece de partes; una LÍNEA es una extensión sin anchura; una LÍNEA RECTA, es aquella que yace uniformemente sobre los puntos que contiene; un PLANO es aquello que posee solo longitud y anchura.[15] Leibniz no ve en estas propuestas un ejercicio claro orientado a ofrecer una definición precisa. Estas definiciones son ejemplos de comentarios, no unidos a figuras, que fallan en su intención de orientar con precisión al lector agudo. Tales glosas le hacen creer al lector que cuenta con una imagen precisa de dichos objetos, cuando en realidad solo traen consigo obscuridad. Para superar la dificultad, el autor persigue una nueva presentación de la geometría que lleve, de suyo, a una definición sin ambigüedad de los objetos que menciona: puntos, rectas, planos, etc… El ejercicio busca concentrarse en las relaciones que guardan entre sí tales objetos antes que sacar a la luz naturalezas esenciales ocultas.

12 *AS*, p. 512.

13 *AS*, p. 442.

14 Hay una mención de Leibniz a Desargues en *AS*: «Como lo hacía Desargues, sería útil pensar en nombres nuevos y adecuados que fueran más fáciles y seguros para razonar sin figuras» (*AS*, p. 431).

15 Euclides. (trad. 1953). *The Thirteen Boks of the Elements* (p. 153). New York: Dover Publications, Inc.

Si bien, en geometría, lo que hacemos es concentrar nuestra atención en esta o aquella distribución de puntos, no podemos dejar de ocuparnos del espacio en su conjunto. En efecto, todos los puntos se reconocen en el mismo espacio y se distinguen por las relaciones de ubicación que podamos establecer entre ellos. El punto es lo más simple que puede concebirse en relación con la extensión. En contraste con el espacio, que contiene la extensión absoluta, cada punto expresa lo que es máximamente limitado en la extensión [el *situs* más simple, el mínimo que carece de partes].[16] Cada punto, al reconocerse como expresión de lo máximamente limitado, es congruente con cualquier otro. Nos ocuparemos de la congruencia en breve. El reconocimiento de un punto ante la presencia de otro, no nos lleva a advertir una diferencia esencial que podamos atribuir a un rasgo interno. Lo que se advierte es la relación de uno con el otro (su co-presencia); relación que es diversa por la multiplicidad de parejas que podrían concebirse. El reconocimiento de la relación, toda vez que cada punto es congruente con cualquier otro, no es algo diferente a señalar que uno de ellos está AHORA AQUÍ y el otro AHORA ALLÍ; esto es, el reconocimiento de «la relación de lugar o de *situs* que tienen MUTUAMENTE entre sí, lo que se entiende como la distancia entre ellos. Pues la DISTANCIA entre dos puntos no es otra cosa que la cantidad mínima de la vía[17] del uno al otro» (*AS*, p. 444).[18]

Dos parejas de puntos *AB* y *CD* están en la relación de CONGRUENCIA [notada así: *AB*γ*CD*], si puede aplicarse una pareja sobre la otra sin que se observe una mutación de una u otra.[19] La congruencia supone, simplemente, la posibilidad de superponer un objeto sobre el otro sin que se advierta diferencia alguna. Esto, por supuesto, admite que en el desplazamiento no hay variación alguna del complejo inicial que se lleva para superponerlo sobre el otro.[20]

En el estudio de los puntos por sus caracteres, cada carácter básico, *A* por ejemplo, nombra [designa] un punto. Así, *AB* designa el *situs* del complejo formado por los puntos *A* y *B*, a saber, cualquier extenso (vía) que los conecte. De manera similar, *ABC* designa el *situs* del complejo formado por los tres puntos, lo que alude al extenso rígido que los conecta (*AS*, p. 481). Si intentamos comparar puntos en la geometría de Leibniz y objetos en el *Tractatus*, podemos empezar por advertir que los objetos en *TLP* son simples así como lo son los puntos (*TLP* 2.02); nombres y caracteres son signos simples (*TLP* 3.202). A los objetos solo se les puede nombrar (*TLP*, 3.221). Así como una configuración de puntos estipula lo que Leibniz llama su *situs*, una configuración de objetos de *TLP* forma un estado-de cosas [*Sachverhalt*] (*TLP*, 2.0272): «En el estado-de-cosas los objetos están unidos entre sí como los eslabones de una cadena» (*TLP*, 2.03). Hay una discusión importante a propósito de la traducción adecuada del término *Sachverhalt*. C. K. Ogden lo traduce como "atomic fact" (hecho atómico),[21] Pears lo traduce como "state of affairs" (estado-de-cosas).[22] Particularmente interesante para nuestros propósitos es la traducción que sugiere Elizabeth Anscombe, quien propone: "situation" (situación).[23] *Sachverhalt* traduce, entonces, algo así como "la manera como los objetos simples están articulados (situados)". No ahondaremos en los motivos de la controversia y acogeremos indistintamente las propuestas de Pears y Anscombe.

Si bien, como vimos anteriormente, Leibniz define la congruencia pensando inicialmente en parejas de puntos, no tiene problema en valerse de la definición para aplicarla a puntos independientes o a eneuplas de puntos. Así: *A*γ*B* significa que el punto *A* es congruente con el punto *B*, es decir *A* puede ser superpuesto o sustituido por *B*, sin que de ello se advierta diferencia alguna (*AS*, p. 482).[24] No sabríamos qué pensar si intentamos figurar que no es el caso que *A*γ*B*. Esto vale tal cual, sin importar a qué punto nombra *A* o a cuál nombra *B* (caracteres simples).

Dijimos anteriormente que primero tendríamos que ocuparnos del espacio para proceder a hablar de puntos. Sin embargo, atendiendo la lógica de la composición del *Analysis situs*, este imperativo es impreciso. Leibniz concibe el punto como lo más simple, advierte después que todos los puntos son congruentes entre sí, lo que significa que solo difieren por las relaciones de ubicación que guarden entre ellos. A continuación, el autor procede a componer el espacio en su totalidad; lo hace de la siguiente manera:

> El lugar más sencillo, pero también el más ilimitado, es el lugar de todos los puntos congruentes con un punto dado, pues es el lugar de todos los puntos del universo, o sea el mismo espacio infinito, puesto que cualquier punto de todo el universo es congruente con un punto dado. Así se da la congruencia: *A*γ*Y*, el lugar de todos los *Y* será el espacio infinito.[25]

El espacio completo es, entonces, el lugar más simple, después del punto. ¿Cómo se constituye? Si se tiene un punto ejemplar *A*, se procede a concebir el *situs* de todos los puntos *Y* que satisfacen una condición simple: *A*γ*Y*. Tal definición

16 *AS*, p. 443.

17 La vía es un lugar continuo y sucesivo (cualquiera de sus partes tiene extremos comunes con la parte anterior y posterior). Tratándose de un punto, la vía se llama *LÍNEA* (*AS*, p. 444). El movimiento es la mutación continua del *situs* (*AS*, p. 507). La LÍNEA es el extenso que se describe por el movimiento de un punto (*AS*, p. 505). Dados dos puntos, la vía más simple se llama *RECTA* (*AS*, p. 445); si se mantienen fijos los extremos de una porción de recta, no se puede modificar la distancia entre ellos sin alterar la vía que los une.

18 *AS*, p. 444.

19 *AS*, p. 452.

20 Esta presuposición impone la rigidez de los instrumentos de comparación; cfr. Helmholtz, Hermann von (1870/1995). "On the Origin and Significance of Geometrical Axioms" (p. 237). En *Science and Culture Popular and Philosophical Essays*. Chicago: The University of Chicago Press.

21 Esta es la traducción al español que acoge Enrique Tierno Galván; cfr. Wittgenstein, L. (1918/1973). *Tractatus Logico Philosophicus*. Madrid: Alianza Editorial; trad. Enrique Tierno Galván.

22 Esta es la traducción al español que acogen Jacobo Muñoz e Isidoro Reguera; cfr. Wittgenstein, L. (1918/2010). *Tractatus Logico Philosophicus*. Madrid: Editorial Gredos; trad. Jacobo Muñoz e Isidoro Reguera. También es la traducción más reciente de Jesús Padilla Gálvez; cfr. Wittgenstein, L. (1918/2016).*Tratado Lógico-filosofico*. Valencia: Tirant Humanidades; trad. Jesús Padilla Gálvez.

23 Cfr. Anscombe, G. E. M. (1971). *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus* (pp. 29-30). South Bend (In): St Agustine's Press.

24 *AS*, p. 482.

25 *AS*, p. 484.

nos obliga a reunir todos los puntos posibles, dado que no hay distinción cualitativa alguna entre ellos: cada punto *Y* podría ser sustituido (o superpuesto) por *A* sin que ello refleje diferencia alguna.[26] Así las cosas, el espacio en su conjunto aparece como el lugar de todos los puntos [*locus omnium punctorum*].[27]

Comparemos la construcción del espacio con el primer axioma señalado por Bertrand Russell: (1) todas las partes del espacio son cualitativamente semejantes y si las podemos distinguir, ello sólo se debe al hecho de que una reside fuera de la otra. Si distinguimos entre los puntos *A* y *B*, como lo hemos explicado antes, ello no se debe a una diferencia intrínseca; se debe a que uno está AHORA AQUÍ y el otro AHORA ALLÍ. En este caso, hablamos de una distancia entre *A* y *B*. La distancia es, pues, una expresión del reconocimiento del *situs* que distingue uno del otro. Si no hubiese tal distinción, en virtud del principio de identidad de los indiscernibles, no tendríamos derecho a hablar de dos puntos. El punto, como dijimos, está máximamente limitado en la extensión (el mínimo que carece de partes). Compárese ahora con apartes de la presentación que Russell hace de su segundo axioma: el cero de extensión es el punto. El espacio es, por tanto, la extensión ilimitada. Dados dos puntos, presuponer que siempre pudo pensar en una vía que los contiene, es una forma de presentar el axioma en el que Russell invoca el carácter continuo del espacio [no hay lagunas en este].[28] Para ampliar el tratamiento de la identidad y las diferencias entre Wittgenstein y Leibniz, el lector puede seguir el artículo de R. Fogelin (1992).

Decir que *AB*γ*CD*, como hemos indicado, es advertir que el *situs* entre los puntos *A* y *B* es el mismo que hay entre *C* y *D*, lo que implica (como posibilidad) que el continuo que conecta *A* con *B* puede igualmente superponerse sobre el extenso entre *C* y *D*. La relación de congruencia entre parejas de puntos es simétrica: *AB*γ*BA*. Leibniz ofrece al respecto, acompañado de una figura, el siguiente argumento:

> [*AB*γ*BA*] puesto que el *situs* de los mismos entre sí es una relación en el sentido de que no implica ninguna discriminación entre los puntos y que ya entre los puntos no se puede discernir, puesto que siempre son congruentes. De aquí que se puedan transferir recíprocamente los unos en los otros conservando el *situs*, como *AB* en *(A)(B)* [en la figura 1].[29]

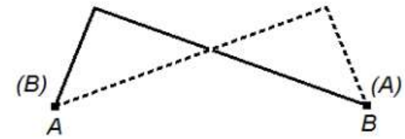


Figura 1. *AB*γ*BA*

Leibniz aduce la posibilidad de superponer el punto *(A)* sobre *B* y el punto *(B)* sobre *A* sin alterar el complejo continuo que liga *A* y *B* (el primer complejo se ilustra con trazo continuo, el segundo con trazo discreto), salvo por el hecho de tener que imaginar una rotación que demanda una nueva dimensión. La dificultad de llevar a cabo efectivamente la superposición sin admitir una rotación que involucre una nueva dimensión recuerda el problema kantiano de la congruencia de los incongruentes;[30] problema frente al cual Wittgenstein, en sintonía con Leibniz, anota:

> El problema kantiano de la mano derecha y de la mano izquierda, que no pueden hacerse coincidir superponiéndolas, se da ya en el plano, incluso en el espacio unidimensional, donde las dos figuras congruentes a y b tampoco pueden hacerse coincidir superponiéndolas sin sacarlas fuera de este espacio:

Figura 2. *TLP* 6. 36111

> La mano derecha y la mano izquierda son, en efecto, enteramente congruentes. Y nada tiene que ver con ello el que no sea posible [físicamente] hacerlas coincidir superponiéndolas.
>
> Sería posible [lógicamente] calzar el guante derecho en la mano izquierda si cupiera darle la vuelta en el espacio tetradimensional.[31] (*TLP*, 6.36111)

Si asumimos la convención de tomar los caracteres *X*, *Y*, *Z* como mención a puntos variables y los caracteres *A*, *B*, *C* como mención a puntos determinados, *AB*γ*AY* define el *situs* de todos los puntos *Y* que mantienen con *A* el mismo *situs* que hay entre *A* y *B*. Es decir, si aludimos a figuras con las que tenemos familiaridad, nos referimos a la superficie esférica de centro *A* y radio igual a la distancia que separa *A* y *B*. Nada nos obliga a pensar necesariamente en una métrica pitagórica; podemos imaginar métricas diferentes. Así define Leibniz el plano: «es el lugar de todos los puntos, cada uno de los cuales tiene el mismo *situs* respecto a dos puntos dados».[32]

[26] «Cuando veo el espacio veo todos sus puntos», dice Wittgenstein (1961a). [*NB*]. *Notebooks 1914-1916* (p. 48). Chicago: The Chicago University Press, editado por G. H. von Wright y G. E. M. Anscombe.

[27] Compárese con el manuscrito de Leibniz que Vincenzo de Risi recoge y hace público como apéndice 17 (op. Cit. p. 624). Vincenzo de Risi ofrece una interesante presentación de la evolución del concepto *Espacio* en la obra de Leibniz (pp. 165-177). Leibniz progresa desde una consideración en la que el espacio comporta extensión y no situación a una en la que el espacio se resuelve en un orden de situaciones. Particularmente interesantes son las razones que expone el comentarista para explicar por qué Leibniz conservó su apego a la formulación de un punto como carente de extensión.

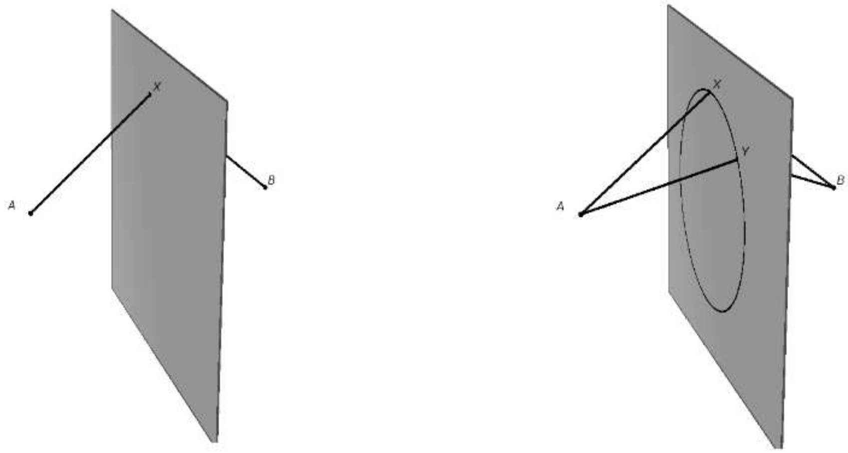
[28] Me abstengo de presentar o discutir los argumentos con los que Leibniz defiende la uniformidad, homogeneidad y continuidad del espacio.

[29] *AS*, p. 483.

[30] «¿Qué puede ser más semejante a mi mano o a mi oreja y más igual en todas sus partes que su imagen en el espejo? Y, sin embargo, yo no puedo colocar la mano que se ve en el espejo en el lugar del original; pues si esta es una mano derecha, aquella es, en el espejo, una izquierda, y la imagen de la oreja derecha es también una izquierda que jamás puede ocupar el lugar de la primera» Kant, Immanuel (1783/1981). *Prolegómenos a toda metafísica del porvenir* (§ 13). México: Editorial Porrúa. Kant intenta probar que la diferencia de orientación no es reducible a relaciones de situación y, con ello, que el espacio es algo más que un orden de situaciones.

[31] *TLP*, 6.36111.

[32] *AS*, p. 485.



(a) Plano *AX*γ*BX* (b) Circunferencia *ABX*γ*ABY*

Figura 3.

Esta definición se puede formular así: *AX*γ*BX*. La figura 3 (a) ilustra la construcción: dados *A* y *B* fijos, los puntos *X* se encuentran en lo que nosotros llamaríamos el plano mediatriz entre *A* y *B*. *ABX*γ*ABY* define una circunferencia (ver figura 3 (b)).[33] Es fácil advertir que *AY*γ*BY*γ*CY* define una línea recta: se trata de los puntos *Y* que están tanto en el plano *AY*γ*BY* como en el plano *BY*γ*CY*. La línea recta se concibe entonces como la intersección de dos planos. Por último, el *situs* de un punto individualizado –*Y*– se puede caracterizar así: *AY*γ*BY*γ*CY*γ*DY*, es decir, la intersección entre las rectas *AY*γ*BY*γ*CY* y *BY*γ*CY*γ*DY*.[34]

Estas construcciones simples, como lo señala Leibniz, pueden pasar por definiciones.[35] Así las cosas, presuponiendo que *A* y *B* nombran caracteres simples y γ estipula la relación de congruencia, *AX*γ*BX* presenta el plano mediatriz que definen *A* y *B* sin tener que pedirle al lector que intente imaginar algo que posee solo longitud y anchura. El mismo plano se podría individualizar a partir de otra pareja de puntos diferentes a *A* y *B*. De igual forma, *AY*γ*BY*γ*CY* presenta la única recta que yace tanto en el plano mediatriz que definen *A* y *B* como en el que definen los puntos *B* y *C*; todo ello sin tener que pedirle al lector que traiga a su mente algo que yace uniformemente sobre los puntos que contiene. La recta es, entonces, el lugar de cualesquiera puntos que se comportan del mismo modo respecto de tres puntos dados *A*, *B* y *C* (*AS*, p. 506).[36] Una vez dados dos puntos, ya queda establecida la vía más simple (la línea recta) que los contiene, cualquier otra vía será más extensa (*AS*, p. 445).[37] Esto coincide con el tercer axioma de Bertrand Russell.[38] Si queremos llamar la atención sobre un punto separado de los demás, un punto individualizado –*Y*–, basta con que señalemos que *AY*γ*BY*γ*CY*γ*DY*, es decir, la intersección del plano mediatriz que definen *A* y *B*, con el que definen *B* y *C* y con el que definen *C* y *D*.

Esta exploración muy superficial que hemos hecho por algunos pasajes del *Analysis situs* muestra la manera como Leibniz hace emerger los objetos básicos de la geometría sin presentar de ellos definiciones apoyadas en una glosa oscura. La emergencia de tales objetos se logra invocando simplemente las relaciones de ubicación establecidas a partir de la noción primordial de congruencia. Así las cosas, el *Analysis situs* puede pensarse, en principio, como una estructura que se asemeja a una geometría de incidencia. *P* es el conjunto de puntos (todos los objetos que son congruentes con un ejemplar de ellos, *A*), *L* es el conjunto de líneas rectas (cada recta es el *situs* formado por la intersección de dos planos). La relación de incidencia *I*, que determina qué puntos inciden en una misma recta y qué rectas inciden en un mismo punto, se puede concebir a partir de la relación de congruencia γ. Así, el punto *X* se encuentra en la recta[39] l_{ABC}, si y solo si, *X* hace parte de los *Y* tales que *AY*γ*BY*γ*CY*. Igualmente, la recta l_{ABC} incide sobre el punto *E*, si y solo si, existe un punto *D* tal que *AE*γ*BE*γ*CE*γ*DE*. Es fácil ver, aunque no presento los pasos intermedios, que dicha estructura satisface tres de los cinco axiomas de una geometría proyectiva.[40]

2. Elementos de *TLP* vistos a la luz del *Analysis situs*

Muchos comentaristas del *Tractatus* inician sus digresiones ocupándose de la ontología que subyace al tratado de lógica. El espectro de posibilidades para concebir la naturaleza de los objetos de *TLP*

33 Los segmentos *AX*, *BX*, *AY*, *BY* en la figura ilustran los continuos rígidos (vías simples) que se conciben conectando los puntos.

34 «El punto es el lugar de cualesquiera puntos que se comportan del mismo modo respecto a *A*, a *B*, a *C* y a *D*. Este es pues único, [es decir] determinado» (*AS*, p. 506).

35 *AS*, p. 494.

36 *AS*, p. 506.

37 *AS*, p. 445.

38 Véase *AS*, p. 468, §§ 60-63.

39 Es decir, *X* y l_{ABC} están en la relación de incidencia $I(X, l_{ABC})$.

40 Primer axioma: cada línea recta contiene al menos dos puntos. Segundo axioma: cada par de puntos está contenido en una y solo una recta. Tercer axioma: Hay al menos dos líneas rectas. El cuarto axioma exige que cualesquiera dos rectas tienen un punto en común. Así entonces, en la geometría proyectiva no hay rectas paralelas como sí las hay en el *Analysis situs*. El asunto se puede resolver si nos animamos a sugerir que las llamadas *rectas paralelas* en la geometría clásica realmente se cortan en puntos al infinito. Desargues introdujo puntos al infinito en su obra (cfr. Desargues, Girard. (1639/1981). "The Rough Draft on Conics (p. 70)". En J. V. Field y J. J. Gray (eds), *The Geometrical Work of Girard Desargues*. New York: Springer-Verlag). El quinto axioma es el principio de dualidad que demanda, entre otras cosas, la no existencia de paralelismo.

puede extenderse a lo largo de las siguientes franjas: (i) objetos de naturaleza física, a la manera de los puntos materiales de Hertz;[41] (ii) objetos de naturaleza fenomenológica: *sense-data*;[42] (iii) objetos lógicos (cfr. Stokhof 2002, cap. 2).[43]

Como quiera que interpretemos la ontología de *TLP*, los objetos son simples (*TLP*, 2.02) y, en ese orden de ideas, guardan semejanza con los puntos de la geometría. ¿Hay en *TLP* alguna alusión que soporte la semejanza mencionada? «(Los nombres son como puntos; las proposiciones, como flechas: tienen sentido)» (*TLP*, 3.144, también *NL*, p. 101).[44] Conviene advertir que el comentario de *NL* es de 1913, un período en el que estaba muy activo el intercambio con Bertrand Russell. A continuación, en dicho pasaje, señala el autor: «la forma de una proposición es como una línea recta» (*NL*, p. 102).[45] Los estados-de-cosas (*Sachverhalten*) son complejos: articulaciones de objetos (*TLP*, 2.01). Como veremos, los objetos son simples, pero dependientes; de otra parte, los estados-de-cosas son independientes entre sí, pero no son simples. Exploraremos tal contraste con más cuidado en breve.

No faltan en *TLP* alusiones a un parecido de familia muy estrecho entre espacio lógico y espacio geométrico; quizá la alusión más clara es: «*El lugar geométrico y el lógico concuerdan en que ambos son la posibilidad de una existencia*».[46] Las menciones a posibilidad y existencia resuenan con enfoques leibnizianos. Este enunciado aclara el aforismo 3.4 que afirma que la proposición determina un *lugar* [*Ort*] en el espacio lógico; además, la existencia de dicho lugar está garantizada por la existencia de las partes constitutivas. Aprehender la forma lógica de la proposición significa reconocer que sus partes constitutivas se estructuran de forma similar a como lo hacen los objetos en el hecho figurado. Michael Piekarski en un artículo en el que explora las conexiones estrechas entre Leibniz y Wittgenstein, anota, valiéndose del término leibniziano *expresión*: «La forma lógica es precisamente la *expresión* de la existencia de estructuras idénticas».[47] De manera semejante, reconocer una recta es aprehender los puntos que inciden en ella (aquellos que satisfacen $AY\gamma BY\gamma CY$ si seguimos a Leibniz). Especialmente destacado es el siguiente pasaje en el que Wittgenstein menciona explícitamente el término leibniziano "mundo posible": «En cada mundo posible existe un orden aun cuando este sea uno complicado, así como en el espacio no hay distribuciones ordenadas en contraste con desordenadas, sino que cada distribución de puntos está en orden» (*NB*, p. 83).[48]

Dado que una línea en Leibniz es el lugar continuo y sucesivo de un punto, la línea recta puede concebirse como una muy particular conexión continua de objetos-simples. Es esencial a la cosa el poder ser parte de un estado-de-cosas (*TLP*, 2.011). Igualmente, es esencial al punto (objeto simple) el que lo podamos individualizar al sacar a la luz su articulación en un *situs* complejo. «Al igual que no podemos en absoluto representarnos objetos espaciales fuera del espacio [...], tampoco podemos representarnos objeto alguno fuera de la posibilidad de su conexión con otros».[49] El espacio en Leibniz, como hemos visto, es la conjunción completa de todos los objetos congruentes con un punto dado a manera de ejemplar. El punto ya vive en un horizonte de infinitos objetos indistinguibles con él (salvo por la diferencia en el *situs*). Cuando nos representamos un punto –*Y*– de manera individualizada, ofrecemos una delimitación parecida a $AY\gamma BY\gamma CY\gamma DY$. Lo individualizamos gracias a las conexiones que guarda con otros; en el caso ilustrado, los puntos fijos *A*, *B*, *C* y *D*.

«La forma del objeto [señala Wittgenstein] es la posibilidad de su ocurrencia en estados de cosas».[50] Así entonces, dado un objeto *Y*, su forma lógica es el despliegue de todas las posibles combinaciones en las que puede presentarse. Esto se puede expresar en un esquema como el que muestra la figura 4. *Y* es un punto, y todas las ramificaciones que se desprenden de *Y* figuran todas las rectas en las que *Y* participa (todos los estados-de-cosas que contemplan a *Y* como uno de sus eslabones). La forma lógica de un objeto hace las veces de una relación de incidencia que determina en qué posibles estados-de-cosas puede el objeto articularse. De igual manera, la forma lógica de un punto –*Y*– en el *Analysis situs* anticipa posibles incidencias: $A_nY\gamma B_nY\gamma C_nY\gamma D_nY$ con A_n, B_n, C_n, D_n una abigarrada colección de tétradas de puntos que hacen posible la individualización de *Y*.

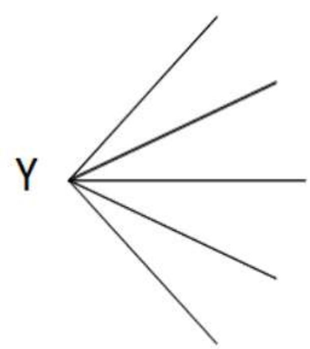


Figura 4. Expresión de la forma lógica de un objeto

Si forzamos la comparación con una geometría de incidencia, podemos imaginar que a la base de *TLP* subyace una estructura *{O, E, I }*, *O* nombra un conjunto de elementos simples (objetos), *E* un conjunto de articulaciones de elementos simples [*Sachverhalten*] y *I* una relación de incidencia que, en virtud de las formas lógicas de los objetos y de los estados-de-cosas, estipula de antemano qué relaciones son posibles. Conviene anotar que, a

[41] cfr. Malcolm, N. (1986). *Nothing is hidden: Wittgenstein´s criticism of his earlier thought* (cap. 1). Oxford: Blacwell.
[42] cfr. Anscombe op. cit., p. 26.
[43] cfr. Stokhof, Martin. (2002). *World and life as one. Ethics and Ontology in Wittgenstein´s Early Thought* (cap. 2). Stanford: Stanford University Press.
[44] *TLP*, 3.144, también Wittgenstein, L. (1913/1961b). [*NL*]. "Notes on logic" (p. 101). En G. H. von Wright y G. E. M. Anscombe (eds), *Ludwig Wittgenstein, Notebooks 1914-1916*. Chicago: The University Chicago Press.
[45] *NL*, p. 102.
[46] *TLP*, 3.411.
[47] Piekarski, M. (2020). "The Problem of Logical Form: Wittgenstein and Leibniz" (p. 68). *History of Philosophy-Logic, Studia Philosophiae Christianae*, 56, pp. 65-86.
[48] *NB*, p. 83.
[49] *TLP*, 2.0121.
[50] *TLP*, 2.0141.

diferencia de la definición original de una geometría de incidencia, no podemos hacer de los elementos de *E* subconjuntos de elementos de *O*. Un estado-de-cosas no es un conjunto de objetos simples, es una articulación de estos.

De manera similar, la forma de un estado-de-cosas es la posibilidad del modo y manera como los objetos se articulan (*TLP*, 2.033, 2.032). Si representamos un estado-de-cosas por un segmento de recta con sus extremos como lugares abiertos, dispuestos a acoger múltiples puntos, podemos hacernos una idea similar a la que se expone en la Figura 5. Los puntos A_n y B_n representan cualesquiera objetos que podrían ocupar los lugares de la articulación. Así, el esquema hace alusión a la multiplicidad de objetos (puntos) que podrían usarse para caracterizar el estado-de-cosas (recta). La presentación de *TLP* como geometría de incidencia no puede llevarse más lejos porque un estado-de-cosas puede llegar a necesitar más de dos elementos (objetos) para su caracterización completa y porque dos objetos pueden articularse en una multiplicidad de relaciones.

Figura 5. Expresión de la forma lógica de un estado-de-cosas

Los extremos pueden acoger diferentes objetos. Dos objetos encadenados en un estado-de-cosas, mientras exhiben su forma lógica, pueden, entonces, representarse como muestra la Figura 6. En las palabras de Griffin: «La forma lógica de un estado-de-cosas es la amalgama de las formas de los objetos que lo constituyen».[51]

Figura 6. Síntesis de formas lógicas

Conocer un objeto de *TLP* es, pues, conocer todas sus posibles ocurrencias en estados-de-cosas (*TLP*, 2.0123); de igual manera, individualizar un punto es reconocer el *situs* en relación con otros puntos. Para conocer el objeto, hay que conocer todas sus posibilidades de entrar en los hechos atómicos (*TLP* 2.0123), también conocer sus propiedades internas o formales (*TLP*, 2.01231). Por *propiedad interna* entiende Wittgenstein aquella que resulta impensable que el objeto pudiera no tener (*TLP* 4.123). El que un objeto tenga tal o cual propiedad interna no puede expresarse por medio de una proposición; pues una proposición figura un estado-de-cosas que podría tanto darse como no-darse. Por esa razón, el que algo caiga bajo una propiedad interna solo puede mostrase, de ninguna manera aseverarse (*TLP*, 3.221). Wittgenstein también distingue entre conceptos formales y conceptos propios (*TLP*, 4.126). El que algo caiga bajo un concepto propio, en el sentido en el que Frege identificaba los conceptos con funciones, se puede expresar mediante una proposición. Que algo caiga bajo un concepto formal no se puede expresar mediante proposiciones, sólo puede mostrase en el símbolo de ese objeto (su carácter, siguiendo a Leibniz). La expresión de un concepto formal se da gracias al uso de variables en el simbolismo. Objeto es uno de estos conceptos formales. Decir "Hay objetos y *x* es un objeto" es intentar erróneamente valerse del lenguaje descriptivo para presentar lo que en dicho lenguaje solo se puede mostrar. Que hay objetos se muestra en nuestro lenguaje por el hecho de que nos valemos de símbolos de variables. De igual forma, que hay puntos se muestra en el reconocimiento del *situs AγY*.

¿Decir *AγY* es una forma confusa de presentar la naturaleza de un punto? Veamos si la peculiar congruencia de cualesquiera par de puntos se puede presentar a la manera de una propiedad interna. Raymond Bradley, quien se ha esmerado en presentar vasos comunicantes Wittgenstein/Leibniz sugiriendo que Wittgenstein defiende un atomismo modal, defiende que para sostener que *x* tiene una propiedad interna Φ, se deben satisfacer las siguientes condiciones (p. 80):[52]

I. Φ es una característica [*Merkmale*] de *x* (*TLP*, 4.126)

II. El tener Φ de *x* se hace manifiesto en el potencial combinatorio de *x* con otros elementos simples

III. El tener Φ de *x* no se puede decir por medio de una proposición contingente, tan solo se puede mostrar en la proposición gracias a la clase de signo empleado para *x* (*TLP*, 4.126).

Si *A* nombra un punto dado como ejemplar y *X* un punto del cuál queremos conocer sus propiedades internas, estas, sin duda, se expresan en la fórmula *AγX*. No resulta complicado defender que γ satisface las condiciones mentadas. Al expresar *AγX* no estamos descubriendo un rasgo contingente de *X*, sino reconociendo a *X* como un carácter simple. De la misma manera en que «No: "El signo complejo '*aRb*' dice que *a* está en la relación *R* con *b*" sino: Que '*a*' está en cierta relación con '*b*' dice que *aRb*».[53] Así, el darse la característica γ de *X* no se conjetura mediante una proposición, sino que se muestra en las proposiciones en las que nos valemos de dicha propiedad (*TLP*, 4.124). En otras palabras, llamamos *Punto* a aquello tal que *AγX*. No pretendemos aseverar que *AγX* presente una propiedad de *X* que ya podríamos advertir con otros recursos.

«Cualquier cosa está, por así decirlo, en un espacio de posibles estados-de-cosas. Puedo representarme vacío ese espacio, pero no la cosa sin el

[51] Griffin, James. (1964). *Wittgenstein's Logical Atomism* (p. 76). Oxford: Clarendon Press.

[52] Bradley, Raymond. (1992). *The Nature of All Being, A Study of Wittgenstein's Modal Atomism*, (p. 80). Nueva York: Oxford University Press.

[53] *TLP*, 3.1432.

espacio» (*TLP*, 2.013).[54] El *situs* de un punto, como lo señalamos con anterioridad, solo puede determinarse de manera relativa. «El objeto espacial debe encontrase en el espacio infinito. (El punto espacial es un lugar argumental). La mancha en el campo visual no tiene, ciertamente, por qué ser roja, pero ha de tener un color: tiene, por así decirlo, el espacio cromático en torno suyo».[55] El ejemplo contrasta, sin embargo, con la siguiente presentación: «los objetos son incoloros» (*TLP*, 2.0232).[56] ¿Cómo se puede sostener que el espacio cromático esté, al fin de cuentas, constituido por objetos incoloros? Las manchas cromáticas están en un espacio cromático no en virtud de un rasgo que les es anterior a su participación en el espacio; más bien, son rojas o azules o verdes gracias a su peculiar posición (*situs*) en una carta cromática. La carta cromática (la multiplicidad de relaciones) en algún sentido ha de ser anterior.

Así como ciertos estados-de-cosas fungen como figuras de otros, siempre que los objetos en el primero se combinen de una manera que es igual a la forma como los objetos se articulan entre sí en el hecho figurado, así mismo, los caracteres en una *Characteristica geometrica* deben combinarse para figurar las posibles articulaciones de los puntos que constituyen los objetos de interés de la geometría. La expresión *ABC*γ*DEF* sugiere que el *situs ABC* puede superponerse sobre el *situs DEF* sin que se advierta diferencia, salvo el hecho de que uno está AQUÍ AHORA y el otro está ALLÍ AHORA. En ese orden de ideas, podemos pensar, en el espíritu del *Tractatus*, que la composición *ABC* figura la composición *DEF*: «La relación figurativa consiste en las coordinaciones entre los elementos de la figura y los de las cosas».[57] Las articulaciones *A-D*, *B-E* y *C-F* y el buen ajuste de los *situs* correspondientes muestran la concordancia figurativa «Solo los puntos extremos *tocan* el objeto a medir» (*TLP*, 15121).[58]

Si existe lo complejo, debe existir lo simple, advierte Leibniz al comienzo de la *Monadología*.[59] El *Tractatus* supone una estructura en armonía con dicha cláusula. Los objetos son simples, pero no se dan de manera independiente o aislada; cada objeto vive en un espacio de posibles articulaciones. Estas articulaciones (estados-de-cosas) son la unidad básica de la complejidad. Tales unidades no son simples (son complejas), pero, como veremos en la próxima sección, son independientes entre sí. Los objetos, siendo simples, no son independientes. La totalidad de posibles articulaciones de simples constituye lo que Wittgenstein denomina *Realidad* [*Wirklichkeit*] (*TLP*, 2.06). De esta totalidad, unos estados-de-cosas acaecen, en tanto que los restantes no-acaecen. Wittgenstein denomina a los estados-de-cosas que acaecen *Hechos* [*Tatsachen*] (*TLP*, 1.1) y a la totalidad de los hechos la denomina *Mundo* [*Welt*] (*TLP*, 2.04). Como veremos en la próxima sección, hay una diferencia importante en lo que cada filósofo considera como la totalidad de lo que nos es dado, a saber, el mundo.

Hemos señalado varios aires de familia superficiales entre objetos en *TLP* y puntos en *AS*; así como entre rectas en *AS* y estados-de-cosas en *TLP*. Tales similitudes justifican que nos animemos a ver el *Tractatus* a la manera de una topología. A comienzos del siglo XIX, Poncelet advirtió la naturaleza dual de los teoremas de la geometría proyectiva. Cualquier enunciado o teorema de la geometría proyectiva plana puede someterse a una transformación de tal manera que la palabra *punto* sea sustituida por la palabra *recta,* la palabra *recta* por la palabra *punto* y se adelanten ajustes sintácticos. Toda transformación de ese estilo conduce a un nuevo enunciado que también es un teorema. De este brillante resultado se desprenden dos conclusiones sorprendentes: (1) cada vez que se demuestra un teorema, se demuestran realmente dos (el original y el dual que se obtiene con la transformación indicada); (2) un teorema que advierte una propiedad acerca de cierto conjunto de puntos puede leerse como si también advirtiera una propiedad acerca de un conjunto de rectas. La riqueza de los objetos de la geometría proyectiva no reside en que ellos se den en o requieran de una intuición para que después nosotros logremos poner en evidencia sus propiedades; sino que ellos están determinados por las redes de relaciones en la que se encuentran atados. En otro artículo he mostrado que, haciendo ajustes sintácticos, hasta cierto punto es posible intercambiar los vocablos *objeto* y *hecho* en cada entrada de *TLP*. Dicha transformación lleva a obtener como resultado otra entrada diferente de *TLP*. De tener éxito en esta provocativa sugerencia, se podría llevar el parecido de familia más hondo al mostrar que *TLP* entraña un principio de dualidad similar al que se advierte en la geometría proyectiva. Defender dicha tesis demanda un espacio que rebasa el que disponemos en este artículo.

3. Expresión en *TLP* y *Monadología*

Diferencias ontológicas. A pesar de las similitudes que hemos tratado de sacar a la luz, claro que hay diferencias muy hondas entre los dos autores. Para evaluar algunas diferencias centrales, debemos considerar el *Analysis situs* en armonía con la gran obra del filósofo alemán; en particular, con las presuposiciones expuestas en la *Monadología*. Para comenzar, siguiendo a Wittgenstein, el mundo, lo que de alguna manera nos es dado, es la totalidad de los hechos [*Tatsachen*], no de las cosas (*TLP*. 1.1). Entre tanto, Leibniz concibe el mundo como una abigarrada reunión de objetos simples (mónadas) entre los cuales no podemos concebir la existencia de lazos causales. Si mi propuesta de dualidad en *TLP* llegara a completarse con éxito, esta diferencia se disolvería. Las mónadas carecen de ventanas (*Mon*, § 7). Cada mónada vive su vida, por decirlo así, de manera absolutamente independiente. Llamaremos a tal condición *independencia ontológica*. La *línea-de-mundo* de una mónada, su devenir en el continuo temporal, transcurre con independencia de las líneas-de-mundo restantes. En el *Tractatus*, los objetos no gozan de dicha independencia, cada objeto se da en articulación con otros. No obstante, los hechos sí gozan de independencia (*TLP*, 5.134): «Algo puede ser el caso

54 *TLP*, 2.013.
55 *TLP*, 2.0131.
56 *TLP*, 2.0232.
57 *TLP*, 2.1514.
58 *TLP*, 15121.
59 Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1714/2010) [*Mon*]. "Monadología" (§ 2). En A. L. González (ed.), *G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Metafísica* (vol. 2). Granada: Editorial Comares.

o no ser el caso, y todo lo demás permanecer igual».[60] A esta nueva condición, presente en el *Tractatus*, la denominamos *independencia lógica*. Así las cosas, en la *Monadología* hay independencia ontológica; en el *Tractatus*, hay independencia lógica, no la hay ontológica.

Diferencias a propósito del papel de los principios lógicos. La conclusiones de la *Monadología* se van tejiendo gracias al reconocimiento de la validez de ciertos principios lógicos: el principio de no contradicción, el principio de razón suficiente y el principio de identidad de los indiscernibles.[61] Wittgenstein, por su parte, considera que los llamados principios lógicos son formulaciones que carecen de sentido [*sinnlos*]; en el mejor de los casos, resumen combinaciones tautológicas que, al fijar sus condiciones de posibilidad solo en una (lo verdadero), sacrifican el ámbito propio de la bipolaridad que es el que le corresponde a la proposición (*TLP*, 6.1). Solo con atender a la composición del símbolo podemos advertir que las combinaciones tautológicas son verdaderas.

El principio de razón suficiente (ley de la causalidad para Wittgenstein) no es una ley, sino la forma de una ley (*TLP*, 6.32). Se trata de una de esas formas *a priori* que estipulamos con el objeto de forzarnos a presentar de manera unitaria las repeticiones casuales que recogemos en nuestras observaciones del mundo físico. Dicho principio, entonces, prefigura qué tipo de norma de descripción acogemos; no es, de suyo, una descripción (*TLP*, 6.35).

En un lenguaje bien formado (una *Characteristica* siguiendo a Leibniz) sobra el signo de identidad (*TLP*, 5.53, 5.533). En *TLP*, se expresa la igualdad del objeto por medio de la igualdad del signo; no se ofrecen dos signos diferentes para el mismo objeto. Por esa razón, no se requiere el símbolo de identidad tal y como lo concibió Frege. La identidad no puede ser una relación entre objetos, pues en principio estos tendrían que pensarse como distintos: «Yo creo que sería posible excluir por completo el signo de identidad de nuestra notación y siempre indicar la identidad meramente por la identidad de los signos» (*NB*, p. 34).[62] En el espacio de Leibniz, cada punto es congruente con cualquier otro; lo que significa que no hay rasgo alguno interno que los distinga. Esto, sin embargo, no los confunde en una suerte de identidad porque el *situs* de cada uno se individualiza de manera diferente. La presentación *AY*γ*BY*γ*CY*γ*DY* sirve como descripción definida de un punto particular. En palabras de Wittgenstein:

> O bien una cosa tiene propiedades que ninguna otra posee, en cuyo caso cabe distinguirla sin más de las otras mediante una descripción y remitir a ella; o bien, por el contrario, hay varias cosas que tienen todas sus propiedades en común, en cuyo caso es absolutamente imposible señalar una de ellas. Porque si la cosa no viene distinguida por nada, entonces, yo no puedo distinguirla, dado que si no, ya estaría, en efecto, distinguida.[63]

En resumen. De una parte, el universo en Leibniz es una abigarrada reunión de objetos independientes (mónadas), sin nexo causal alguno, cuyo devenir fue previamente pensado y ajustado a los dictámenes del creador. Dictámenes que nosotros no podemos conocer de manera plena. Lo que nosotros creemos atribuir a un vínculo causal entre las unidades básicas, no es más que una armonía preestablecida por Dios.[64] La razón, cree Leibniz, auxiliada con los principios lógicos, puede, a su manera, advertir algunos de estos rasgos estructurales. En contraste con lo anterior, el mundo en Wittgenstein es la totalidad de los hechos (estructuras complejas), no de las cosas. Entre los hechos reina la independencia lógica. No hay tampoco vínculos causales entre estos (*TLP*, 5.135, 5.136). Para decirlo con las palabras de Leibniz, los hechos carecen de ventanas. Los denominados *Principios lógicos* no informan acerca de rasgos en el mundo. Aquello que estos principios intentan infructuosamente comunicar ya es patente (o se muestra) como propiedades formales de nuestro lenguaje.

A pesar de las grandes diferencias que hemos puesto de relieve, es posible recuperar la vía de los aires de familia si dirigimos nuestra atención a la noción de *expresión*. *Mónada* es el término que usa Leibniz para referir a la sustancia simple; de dicha caracterización se sigue que una mónada no pueda surgir o perecer por accidente, solo puede hacerlo por creación o aniquilación divina (*Mon*, § 6). La mónada tiene un devenir, lo que implica una unidad en la variación. Leibniz llama *percepción* al estado transitorio que envuelve o representa una multitud en la sustancia simple[65] y *apetición* a la acción que realiza el paso de una percepción a otra (*Mon*, § 15). En ese orden de ideas, la mónada aparece esencialmente como sustancia que es por naturaleza representativa (*Mon*, § 60). De la independencia ontológica se sigue que no podríamos dar cuenta de la percepción si nos restringimos a invocar razones mecánicas. Como una mónada no puede influir sobre otra, solo resta esperar que, mediante la intervención de Dios, se haya previsto que los padecimientos de una covarien con las modificaciones de la otra (*Mon*, § 51). Dado que en la mente de Dios habría la posibilidad de contemplar todas las posibles covariaciones y que se requiere una razón suficiente para que, entre la infinidad de opciones, Dios [el ser absolutamente perfecto y bueno] actualice una en lugar de las restantes, dicha razón, cree el filósofo, no puede ser diferente a la consideración de los grados de perfección que envuelve cada alternativa (*Mon*, §§ 53-55). Estas demandas de articulación, que no dejan espacio para la causalidad recíproca, exigen, pues, que, a propósito del devenir de cada mónada particular, exista una representación completa [una forma de percepción] de las alteraciones simultáneas de las mónadas restantes. En las palabras de Leibniz:

60 *TLP*, 1.21.
61 *Mon*, §§ 31, 32, 9.
62 *NB*, p. 34.
63 *TLP*, 2.02331.

64 Véase el siguiente pasaje en el que Wittgenstein parece hacer eco de una armonía preestablecida: «Si un Dios crea un mundo en el que determinadas proposiciones son verdaderas, con ello crea también un mundo en el que todas las proposiciones que se siguen de ellas son correctas» (*TLP*, 5.123)
65 (*Mon*, § 14). Leibniz no definió siempre la percepción en los mismos términos. La definición que aquí se presenta y comenta corresponde a los textos de madurez y funciona en armonía con la idea según la cual la percepción es la expresión de lo múltiple en lo uno.

> Ahora bien, esta ligazón o acomodamiento de todas las cosas creadas a cada una y de cada una a todas las demás, hace que cada sustancia simple tenga relaciones que expresan a todas las demás, y que por consiguiente sea un espejo vivo y perpetuo del universo.[66] (*Mon*, § 56)

En otro pasaje brillante de la Teodicea sostiene:

> Una de las reglas de mi sistema de la armonía general es, *que el presente está preñado del provenir,*[67] y que el que ve todo, ve en lo que es lo que será. Pero aún más, he establecido de una manera demostrativa que Dios ve en cada parte del universo el universo entero, a causa de la perfecta conexión de las cosas.[68]

Así entonces, toda sustancia expresa a todas las demás mediante las relaciones que mantiene con ellas (*Mon*, § 59). En el *Discurso de metafísica* sostiene Leibniz el principio general según el cual todo efecto expresa su causa (*DM*, § xxviii).[69] De este principio, Leibniz desprende que el alma tiene las ideas de las cosas en virtud de la acción continua de Dios y del hecho de que el alma es una expresión de la esencia, pensamiento y voluntad divina.

Desde la perspectiva del complejo sistema leibnizano, nosotros, en virtud de la percepción confusa, adquirimos la falsa creencia de la influencia causal entre las partes del universo. Sin embargo, una mirada atenta nos lleva a descubrir, más bien, la perfecta armonía preestablecida por el creador:

> [s]e puede suponer de una vez por todas que cada sustancia ha sido creada en su origen de tal manera que todo le sucede en virtud de sus propias leyes o inclinaciones de un modo que concuerda perfectamente con lo que sucede en todas las otras, todo como si una transmitiera alguna cosa sobre la otra en sus encuentros, de lo que, sin embargo, no hay ninguna necesidad, ni incluso ningún medio. Llamo a esto el sistema de correspondencia.[70] (*NS*, p. 236)

Ahora bien, ¿hay rasgos de *TLP* que sugieran alguna suerte de parentesco con el principio de la expresión? El principio de expresión, que Leibniz advierte en las mónadas, Wittgenstein lo reconoce en las proposiciones. Wittgenstein llama *expresión* a las partes de la proposición que caracterizan su sentido: «Expresión [*Ausdruck*] es todo lo que, esencial para el sentido de la proposición, pueden tener en común entre sí las proposiciones».[71] Se sugiere, en principio, que las proposiciones tienen algo en común y que ello, precisamente, es lo esencial para el sentido. Wittgenstein denomina a este elemento común la *forma lógica general de la proposición*.[72] En esta forma lógica, la expresión es constante, mientras todo lo demás es variable (*TLP,* 3.312). Dicha expresión debe contener una variable cuyos valores son las proposiciones que contiene (*TLP*, 3.313). Dado que los hechos atómicos son independientes, las proposiciones que los figuran no pueden permitir que una proposición elemental sea un componente de otra proposición. Así las cosas, la proposición compleja, que Frege entiende como una función veritativa de las proposiciones que la conforman, debe presentarse de una forma diferente en *TLP*.[73] En primer lugar, lo que es común a cualquier proposición compleja es que esta puede ser sustituida, por ejemplo, por alguna particular combinación en la que solo participan negaciones ($\sim p$) y disyunciones ($p \vee q$) (*TLP*, 3.3441). Dada la independencia, la complejidad que se expresa en la proposición compleja debe ser el resultado de las relaciones internas (*TLP*, 5.131).[74] Estas relaciones internas, que no se presentan bajo la forma de una proposición o de una función de las proposiciones elementales, puede mostrase a través de una *serie de formas* (*TLP*, 4.1252, 4.45), algo muy parecido a lo que Piekarski llama la ley de las series de Leibniz. Una serie de formas se puede expresar si se presenta un primer miembro y la forma general de la operación que da origen al siguiente a partir del precedente (*TLP*, 4.1273). En la noción de operación se centra, entonces, toda la esperanza para la expresión de la forma lógica general de la proposición. Así, cualquier proposición debe poder presentarse como el resultado de una serie de operaciones que tengan como base las proposiciones elementales (*TLP*, 5.234). Wittgenstein, haciendo uso de un lenguaje recursivo, recoge la aplicación sucesiva de una operación –como *O'O'O'a*– valiéndose de símbolos de la forma [*a, x, O'x*]. El primer término alude al comienzo de la serie, el segundo, a la forma de un miembro cualquiera y, el tercero, a la forma que le sigue a este en virtud de la operación (*TLP*, 5.2522). Este arsenal lleva al autor a una de las conclusiones técnicas más

---

66 *Mon*, § 56.

67 Cfr. *Mon*, § 22.

68 Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1714/2012) [*Teod*]. "Ensayos de Teodicea" (§ 360). En T. Guillén Vera (ed.), *G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Ensayos de Teodicea* (vol. 8). Granada: Editorial Comares.

69 (*DM*, § xxviii). Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1686/2010) [*DM*]. "Discurso de metafísica" (§ xxviii). En A. L. González (ed.), *G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Metafísica* (vol. 2). Granada: Editorial Comares.

70 Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1695/2010) [*NS*]. "Nuevo Sistema para explicar la naturaleza de las sustancias y su comunicación entre ellas, así como también la unión del alma y el cuerpo" (p. 236). En A. L. González (ed.), *G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Metafísica* (vol. 2). Granada: Editorial Comares.

71 *TLP*, 3.31.

72 Después de mostrar que no hay constantes lógicas, el autor concluye: «la única constante lógica es lo que todas las proposiciones tienen, por su naturaleza, en común unas con otras [la forma lógica general de la proposición]» (*TLP*, 5.47).

73 Es cierto que en *TLP* 5 Wittgenstein señala que la proposición es una función veritativa de las proposiciones elementales, sin embargo, como veremos a continuación, el autor tiene en mente, no una función fregeana, sino una serie de formas. Wittgenstein aclara este giro en *TLP* 5.1. «Las pseudofunciones lógicas son operaciones» (*NB*, p. 39). Michael Piekarski ve en este rasgo una referencia a la ley de las series sugerida por Leibniz: «Él [Leibniz] estaba más bien buscando una ley que pudiera ser expresada matemáticamente, esto es, que pudiera ser formulada en una ecuación algebraica concreta. Esta fórmula después buscada es la ley de las series (la regla de Leibniz) disponible tan solo en la perceptibilidad que es, de acuerdo con Leibniz, solo disponible a Dios» (*op. cit*., p. 77).

74 De la misma manera que las propiedades internas de los objetos no se pueden presentar en proposiciones, las relaciones internas tampoco se pueden figurar por medio de una proposición. En forma similar, dichas relaciones internas solo pueden mostrarse (*TLP*, 4.124, 4.126).

brillantes del tratado: «Todas las funciones veritativas son resultados de la aplicación sucesiva de un número finito de operaciones veritativas a las proposiciones elementales» (*TLP*, 5.31, 6).[75]

En resumen. Debe existir una forma general de la proposición [el único signo primitivo general de la lógica], ella es la esencia de la proposición. Dar dicha esencia es dar la esencia de toda descripción y, con ello, dar la esencia del mundo (*TLP*, 5.471, 5.4711). La operación que le permite a Wittgenstein dirigirse a su meta es la que se conoce como negación conjunta[76] "*N(p, q): ~p∧~q*" y que el autor presenta, toda vez que resiste el reconocimiento de las constantes lógicas, en la forma *(---V)(ξ,...)* (*TLP*, 5.5) [se niegan todas las combinaciones en las que alguno de los componentes es verdadero y solo se afirma en las combinaciones en las que todos su componentes son falsos]. Esta negación conjunta aplicada a un grupo de proposiciones –abreviada *N(ξ)*– permite presentar así la conclusión técnica final: «La forma general de la función veritativa es: [*p*, ξ, *N(ξ)*] Esta es la forma general de la proposición».[77]

Estos abstrusos giros técnicos no solo permiten eliminar las constantes lógicas y, con ello, nuestra propensión a verlas encarnadas en el mundo, también permiten defender que: «si se nos da una proposición también se nos da con ella los resultados de todas las operaciones veritativas que la tienen como base».[78] Así las cosas, contar con una proposición es contar también con todo el entramado del espacio lógico. Cora Diamond captura este tipo de resultado en una forma muy precisa:

> La metáfora del espacio lógico está atada, sostengo, a su idea de que en la construcción de proposiciones [Satz] usted puede ver cómo ellas tienen sus relaciones lógicas con otras proposiciones: esto viene de la metáfora del espacio lógico no solo como un espacio de situaciones posibles, sino también un espacio al interior del cual las proposiciones lógicas tienen sus relaciones lógicas con otras proposiciones, el espacio de inferencia.[79]

En cada proposición se expresa el todo, a la manera en que en una mónada se expresa el universo en plenitud: «¿Cómo puede la lógica, que todo lo abarca y que refleja el mundo, utilizar garabatos y manipulaciones tan especiales? Sólo en la medida en que todos ellos se anudan formando una red infinitamente fina, el gran espejo» (*TLP*, 5.511).[80] Así pues, la lógica es una figura especular del mundo (*TLP*, 6.13).

Piekarski resume muy bien el resultado:

> Aun la proposición más simple, tal como "llueve hoy", refiere a todas las proposiciones describiendo las condiciones en las cuales la lluvia puede caer, la lluvia tiene que caer y en las cuales la lluvia no caerá. [...] Junto con la proposición –así como con las mónadas de Leibniz– el mundo entero es dado. Una proposición inicia el proceso de síntesis que culmina en el funcionamiento del lenguaje como un todo.[81]

Al comienzo de la *Teodicea*, Leibniz cita el siguiente epígrafe de Marco Manilio: «Qué tiene de extraño que los hombres puedan conocer el mundo: tienen el mundo en ellos mismos, y cada uno de ellos es, a la manera de una imagen pequeña, una copia de Dios».[82] Este hermoso epígrafe parece una clara paráfrasis de una de las entradas más complejas del *TLP*: «En rigor, lo que el solipsismo entiende es plenamente correcto, solo que eso no se puede decir, sino que se muestra. Que el lenguaje es mi mundo se muestra en que los límites del lenguaje [...] significan los límites de mi mundo» (*TLP*, 5.62).[83]

4. Epílogo

Los contextos de enunciación del *Tractatus Logico Philosophicus* y del *Analysis situs* son, por supuesto, diferentes. El trabajo de Leibniz, si bien apunta a elementos que fueron cabalmente entendidos dos siglos más tarde, encaja en la agenda de lo que hoy reconocemos como *filosofía moderna*. El trabajo de Wittgenstein, que contempla la aplicación de la nueva lógica, encaja en los albores de lo que reconocemos como *filosofía analítica*. No obstante la diferencia, cada uno se ocupa de ofrecer una *characteristica universalis*. Los caracteres que sirven para su construcción originaria nombran simples, que no se instalan en el sistema en virtud de sus rasgos individuales, sino en virtud de las potenciales relaciones que pueden tejerse con sus congéneres. La relación de congruencia, γ, en el *AS*, ofrece el horizonte para la construcción previa de los objetos (articulados de simples) que podrían llamar nuestra atención en el espacio geométrico. En forma similar, la articulación de las formas lógicas de objetos y hechos, anticipan el reconocimiento de todos los posibles estados-de-cosas (*situaciones*, siguiendo a Anscombe). El concepto *relación* reina en el centro de la constitución originaria de las dos *characteristicas*.

El mundo, entendido en forma vaga como aquello que nos es dado, es diferente en cada caso. Leibniz reconoce una abigarrada red de mónadas independientes y Wittgenstein admite la totalidad de estados-de-cosas independientes que son el caso. Así mismo, los principios lógicos orientan el tren de conclusiones que se advierten en el sistema de Leibniz, mientras que dichos principios carecen de valor epistémico en la estructura del *Tractatus*. No obstante estas diferencias sustanciales, Leibniz, reconociendo la naturaleza representativa de las mónadas, defiende que en cada mónada debe expresarse la totalidad del universo; en tanto que Wittgenstein concentra este aspecto especular en la proposición: en cada proposición se expresa el entramado completo del espacio lógico.

---

75 *TLP*, 5.31, 6.

76 La operación, muy elogiada por Bertrand Russell, fue propuesta por Henry M. Scheffer (1882-1964) en 1913. Tal operación suele presentarse con una barra así: *p* | *q*. La negación de *p*, ~*p*, se expresa: *p* | *p*.

77 *TLP*, 6.

78 *TLP*, 5.442.

79 Diamond, Cora. (2000). "Does Bismarck have a beetle in his box? The private language argument in the *Tractatus*" (p. 270). En A. Crary y R.Read (eds), The New Wittgenstein. Londres: Routledge.

80 *TLP*, 5.511.

81 Ibidem, p. 83.

82 *Teod*, p. 3.

83 *TLP*, 5.62.

La figura del espejo nos permite restituir la semejanza que estábamos tejiendo a pesar de las diferencias irreconciliables. Leibniz aclara esta figura en un pasaje del *Principio fundamental del raciocinio*. Una paráfrasis de este pasaje bien puede usarse como una buena presentación de las propuestas del *Tractatus*:

> Mas, cuando digo espejo no hay que pensar que concibo eso como si las cosas externas estuviesen siempre pintadas en los órganos y en el alma misma. Pues para que algo se exprese en otra cosa, basta con que se dé una cierta ley constante de las relaciones, ley por la cual, cada una de las cosas en uno [de los términos] pueda ser referida a cada una de las cosas que responden en el otro.[84]

Bibliografía

Entre paréntesis cuadrados se mencionan las siglas usadas para citar las obras de Leibniz y de Wittgenstein.

Anscombe, G. E. M. (1971). An Introduction to Wittgenstein's Tractatus. South Bend (In): St Agustine's Press.

Bradley, Raymond. (1992). The Nature of All Being, A Study of Wittgenstein's Modal Atomism. Nueva York: Oxford University Press.

Buekenhout, Francis. (1995). "An Introduction to Incidence Geometry". En F. Buekenhout (ed.) Handbook of Incidence Geometry, pp. 1-25. Amsterdam: Elsevier.

Cardona, Carlos. (2011). "Teoría especial de la relatividad y conocimiento a priori". En G. Guerrero (comp.) Einstein, científico y filósofo, (p.p. 31-66). Cali: Universidad del Valle.

De Risi, Vincenzo. (2007). Geometry and Monadology. Leibniz's Analysis Situs and Philosophy of Space. Boston: Birkhäuser.

Desargues, Girard. (1639/1981). "The Rough Draft on Conics". En J. V. Field y J. J. Gray (eds), The Geometrical Work of Girard Desargues, pp. 67-143. New York: Springer-Verlag.

Diamond, Cora. (2000). "Does Bismarck have a beetle in his box? The private language argument in the Tractatus". En A. Crary y R.Read (eds), The New Wittgenstein (pp. 262-292). Londres: Routledge.

Euclides. (trad. 1953). The Thirteen Boks of the Elements. New York: Dover Publications, Inc. Trad. T. Heath.

Fogelin, Robert. (1992). "Wittgenstein on Identity". En Philosophical Interpretations, pp. 169-185. New York: Oxford University Press.

Griffin, James. (1964). Wittgenstein's Logical Atomism. Oxford: Clarendon Press.

Helmholtz, Hermann von (1870/1995). "On the Origin and Significance of Geometrical Axioms". En Science and Culture Popular and Philosophical Essays, pp. 226-245. Chicago: The University of Chicago Press. Edición y traducción David Cahan.

Kant, Immanuel (1783/1981). Prolegómenos a toda metafísica del porvenir. México: Editorial Porrua. Trad. Francisco Larroyo.

Klein, Felix. (1908/2004). Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint Geometry. Mineola: Dover Publications, Inc. Trad. E. R. Hedrick y A. A. Noble.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1666/2015) [AS]. "Disertación de Arte Combinatoria". En M. S. de Mora Charles (ed.), G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Escritos matemáticos (vol. 7 B, pp. 548-643). Granada: Editorial Comares. Trad. M.Correia.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1679/2015) [AS]. "La característica geométrica. Analysis situs". En M. S. de Mora Charles (ed.), G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Escritos matemáticos (vol. 7 B, pp. 415-515). Granada: Editorial Comares. Trad. M. S. de M. Charles.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1686/2010) [DM]. "Discurso de metafísica". En A. L. González (ed.), G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Metafísica (vol. 2, pp. 162-204). Granada: Editorial Comares. Trad. A. L. González.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1688/2013) [LU]. "Sobre los caracteres y sobre el arte característico". En J. Velarde y L. Cabañas (eds.), G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Lengua universal, característica y lógica (vol. 5, pp. 359). Granada: Editorial Comares. Trad. O. M. Esquisabel.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1695/2010) [NS]. "Nuevo Sistema para explicar la naturaleza de las sustancias y su comunicación entre ellas, así como también la unión del alma y el cuerpo". En A. L. González (ed.), G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Metafísica (vol. 2, pp. 232-237). Granada: Editorial Comares. Trad. M. S. Fernández-García.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1714/2010) [Mon]. "Monadología". En A. L. González (ed.), G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Metafísica (vol. 2, pp. 327-342). Granada: Editorial Comares. Trad. M. J. Soto-Bruna.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. (1714/2012) [Teod]. "Ensayos de Teodicea". En T. Guillén Vera (ed.), G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Ensayos de Teodicea (vol. 8, pp. 2-477). Granada: Editorial Comares. Trad. T. Guillén V.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. (2009) [PR]. "Principio fundamental del raciocinio". En J. Arana (ed.), G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Escritos científicos (vol. 10, pp. 547-554). Granada: Editorial Comares. Trad. T. Guillén V (no se conoce fecha del original).

Malcolm, N. (1986). Nothing is hidden: Wittgenstein´s criticism of his earlier thought. Oxford: Blacwell.

Piekarski, M. (2020). "The Problem of Logical Form: Wittgenstein and Leibniz". History of Philosophy-Logic, Studia Philosophiae Christianae, 56, pp. 65-86.

Riemann, Bernhard (1857/2004). "The theory of Abelian Functions". En H. Weber (ed.) Bernhard Riemann Collected Papers (79-134). Heber City, UT: Kendrick Press, Inc. Trad. R. Baker, Ch. Christenson y H. Orde.

Russell, Bertrand. (1897). An essay on the foundations of geometry, Londres: Cambridge University Press.

Stokhof, Martin. (2002). World and life as one. Ethics and Ontology in Wittgenstein´s Early Thought. Stanford: Stanford University Press.

[84] Leibniz, Gottfried Wilhelm. (2009) [*PR*]. "Principio fundamental del raciocinio" (p. 552). En J. Arana (ed.), *G. W. Leibniz obras filosóficas y científicas, Escritos científicos* (vol. 10). Granada: Editorial Comares. (No se conoce fecha del original)

Wittgenstein, Ludwig (1918/1973) [TLP]. Tractatus Logico Philosophicus. Madrid: Alianza Editorial. Trad. E. T. Galván.

Wittgenstein, Ludwig. (1918/2010). Tractatus Logico Philosophicus. Madrid: Editorial Gredos; trad. Jacobo Muñoz e Isidoro Reguera.

Wittgenstein, Ludwig. (1918/2016). Tratado Lógico-filosofico. Valencia: Tirant Humanidades; trad. Jesús Padilla Gálvez.

Wittgenstein, L. (1961a). [NB]. Notebooks 1914-1916. Chicago: The Chicago University Press, editado por G. H. von Wright y G. E. M. Anscombe, trad. G. E. M. Anscombe.

Wittgenstein, L. (1913/1961b). [NL]. "Notes on logic". En G. H. von Wright y G. E. M. Anscombe (eds), Ludwig Wittgenstein, Notebooks 1914-1916, pp. 93-107, Chicago: The University Chicago Press. Trad. G. E. M. Anscombe.