Árboles

Mayo 08, 2020

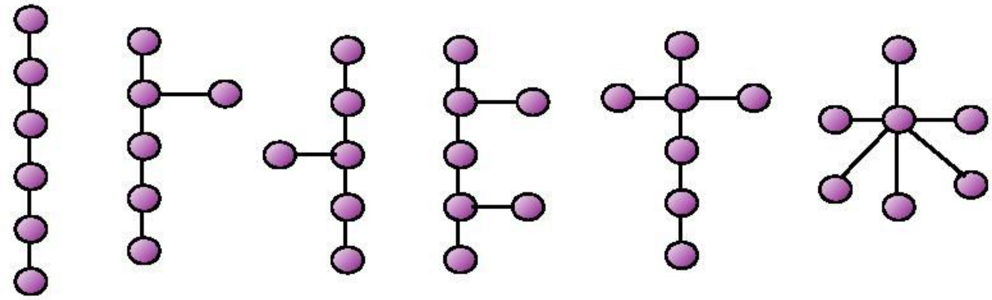
Los árboles son las gráficas conexas más simples y son muy interesantes no solo por sus propiedades topológicas sino por sus aplicaciones. Por ejemplo, buscar y organizar elementos de la gráfica o para para construir estructuras con ciertas características (árbol de peso mínimo o la ruta más corta).

Propiedades

Supongamos que un terremoto reciente ha destruido muchas carreteras en un estado. Por lo tanto, no es posible viajar entre ciertos puntos de diversas ciudades. Dado el costo que involucra reconstruir las carreteras, es deseable re-construir desde cero el menor número de carreteras para así conectar otra vez las ciudades.

El sistema original de carreteras puede ser modelado por una gráfica $G=(V, A)$ cuyos vértices corresponden a las ciudades, donde dos vértices de G están unidos por una arista si existe una carretera que conecta las dos ciudades, pero no pasa por ninguna otra ciudad. Sea E la colección de todas las aristas de G que corresponden a las carreteras destruidas. Entonces la gráfica $G' = G-E$ es disconexa. Sean $G_1, G_2, \ldots, G_n$ las componentes conexas de G'. El problema ahora consiste en construir una nueva gráfica H cuyo conjunto de vértices sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tales que v_iv_j $E(H)$ si y sólo si existe un vértice de G_i que está unido por una arista de E a un vértice de G_j. El número de carreteras que debe ser construido es el menor número de aristas en una sub-gráfica expansión (o generadora) conexa H' de H. Notemos que H' no contiene ciclos; de contenerlos, se pueden borrar aristas, para evitar los ciclos, la gráfica seguirá siendo conexa y obtendremos una sub-gráfica generadora, conexa y sin ciclos.

Con esta motivación en mente, definimos un **árbol** como una gráfica conexa sin ciclos. Cada arista en el árbol es un **puente**. Existe un sólo árbol de orden 1, uno de orden 2, uno de orden 3, pero hay tres árboles de orden 4. A continuación mostramos los seis árboles no isomorfos de orden 6.



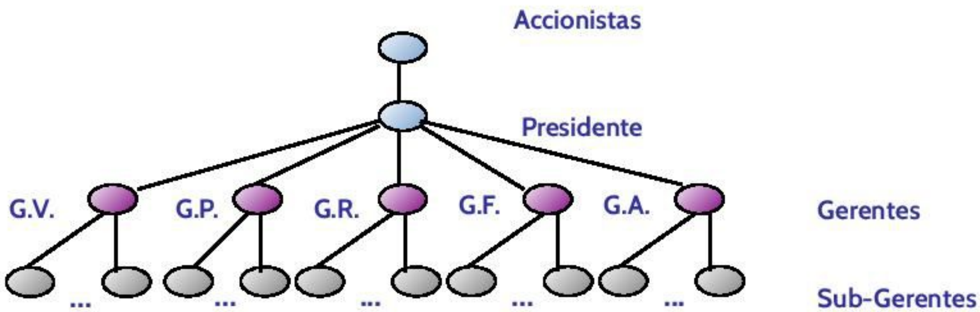
Una gráfica, conexa o disconexa sin ciclos es un **bosque**. Así, cada componente de un bosque es un árbol. Un **árbol [bosque] generador o de expansión** de una gráfica G es una sub-gráfica generadora de G que es un árbol [bosque].

Ahora regresemos al problema de las carreteras. Observemos que el menor número de carreteras a re-construir es al menos el número de aristas en el árbol generador de la gráfica H. Por supuesto que estamos suponiendo que el costo de construcción para cualesquiera dos carreteras es el mismo, aunque esto no sea real ni práctico, sólo didáctico.

Los árboles también son usados para representar situaciones de jerarquía; por ejemplo, podemos usar los árboles para describir niveles en una organización.

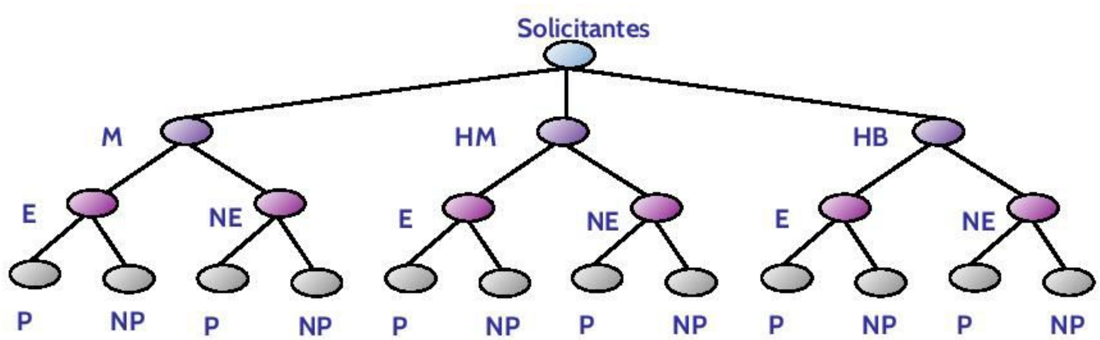
Árboles

Mayo 08, 2020



El árbol en la figura anterior representa una parte de una posible jerarquía de administración de un corporativo. Primero están los Accionistas, después el Presidente de la Empresa seguido de varios Gerentes (Ventas, Producción, Recursos humanos, Finanzas, Administración); y luego seguirían las sub-gerencias, después quizá las jefaturas...

Los árboles también sirven para describir procesos organizativos. Por ejemplo, supongamos que hay diversos solicitantes para un puesto en una compañía. Dado que la compañía es un empleador equitativo y pretende dar igualdad de oportunidades a todos, los aspirantes serán organizados según si son Mujeres (M) u hombres-de-minorías (HM) o si son hombres-blancos (HB). Después cada grupo será re-organizado de acuerdo a la Experiencia o No-Experiencia del solicitante (E, NE) y según el tipo de trabajo. Luego serán organizados de acuerdo a sus estudios, Con Prepa o sin Prepa (P, NP). La siguiente figura nos presenta el árbol que modela este ejemplo.



Notemos que cada árbol de orden 6 (presentado en la primera figura) tiene cinco aristas. El tamaño de los siguientes dos árboles, también es uno menos que su orden. De hecho esta es una propiedad que se enuncia en uno de los siguientes resultados.

Teorema T.1. Un árbol de orden p tiene tamaño $p-1$.

Corolario T.1. Sea G una grafica de orden p, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. G es un árbol.

2. G es una gráfica conexa de tamaño $p-1$.

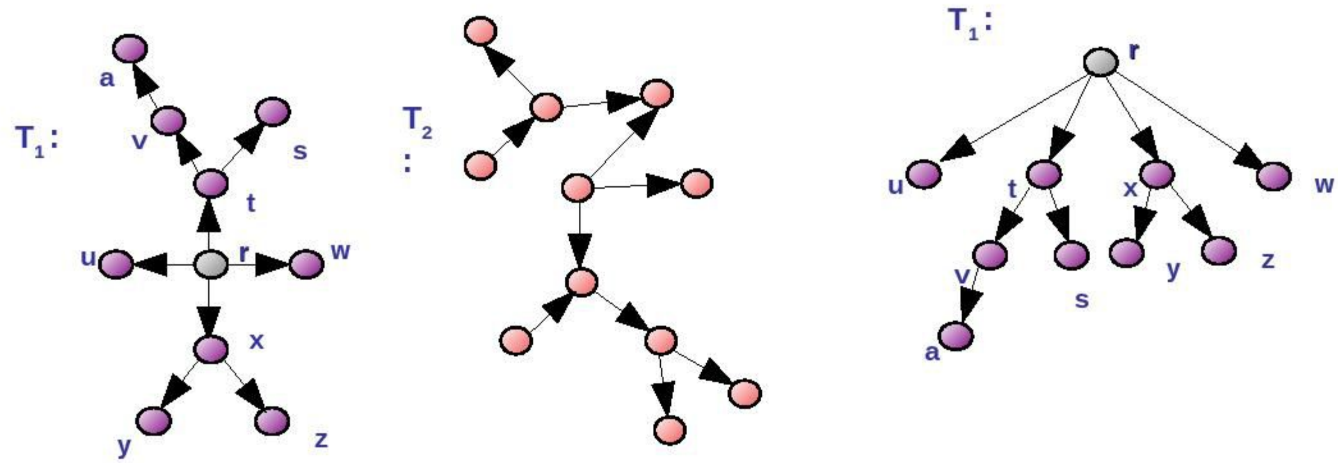
3. G tiene tamaño $p-1$ y no tiene ciclos.

Teorema T.2. Todo árbol no trivial contiene al menos dos vértices terminales.

Teorema T.3. Si u y v son dos vértices distintos de un árbol T, entonces T contiene exactamente una (u,v)-trayectoria.

Árboles Enraizados *[Rooted Trees]*

Ahora hablaremos de árboles dirigidos. Un **árbol dirigido** es una digráfica asimétrica cuya gráfica subyacente es un árbol. Es decir, es un árbol donde en vez de aristas se tienen arcos (flechas). Un árbol dirigido ***T*** es llamado **árbol enraizado** si existe un vértice ***r*** de ***T***, llamado **raíz**, tal que para cada vértice ***v*** de ***T***, existe una ***(r,v)***-trayectoria en ***T***. La siguiente figura muestra dos árboles dirigidos T_1 y T_2; el árbol dirigido T_1 sí es un árbol enraizado, con raíz ***r***, mientras que T_2 no es un árbol enraizado, aunque sí es dirigido.



Si ***T*** es un árbol enraizado, entonces se acostumbra dibujar la raíz hasta arriba, en el nivel ***0***. Los vecinos de ***r*** se ponen un nivel abajo, en el nivel ***1***. Cualquier vértice adyacente a un vértice en el nivel ***1***, estará en el nivel ***2*** y así sucesivamente. En general, todo vértice en el nivel ***i***, ***i>0***, es adyacente a exactamente un vértice del nivel ***i-1***. Más formalmente, un vértice ***x*** en un árbol enraizado con raíz ***r*** está en el nivel ***i*** si y sólo si la ***(r-x)***-trayectoria tiene longitud ***i***. El árbol enraizado T_1, es ilustrado por niveles, en la extrema derecha de la figura anterior.

El siguiente resultado presenta una caracterización de los árboles enraizados.

Teorema T.4. Un árbol dirigido ***T*** es un árbol enraizado si y sólo si ***T*** contiene un vértices ***r*** con ingrado ***id(r) = 0*** e ingrado ***id(v) = 1*** para todos los otros vértices de ***T***,

Del **Teorema T.4**, podemos deducir que todo árbol enraizado contiene una única raíz.

Cuídate y

Quedate en casa, es tu lugar seguro

Saludos, Lucy Gasca

Glosario

Ingrado ***[indegree]*****:** El ingrado de un vértice ***v*** en una digráfica ***D*** es el número de vértices adyacentes a ***v, id(v).*** De manera informal, podemos decir que el ingrado es el número de arcos que *entran* a ***v.***

Exgrado ***[outdegree]*****:** El exgrado de un vértice ***v*** en una digráfica ***D*** es el número de vértices adyacentes desde ***v.*** De manera informal, podemos decir que el exgrado es el número de arcos que *salen de* ***v.***

Vértice de corte, ***[cut-vertex]*****:** Un **vértice *v*** en una gráfica ***G*** es llamado de **corte** si al quitarlo de la gráfica aumenta el número de componentes conexas: $\kappa(G\text{-}v) > \kappa(G)$. Así si ***v*** es un vértice de corte, ***G-v*** es disconexa.

Puente ***[bridge]*****:** Una arista ***e*** el llamada **puente** si ***G-e*** es disconexa.

Orden de una gráfica ***[Order]*****:** El **orden** de una gráfica es su número de vértices.

Tamaño de una gráfica ***[size]*****:** El tamaño de una gráfica es su número de aristas.

Sub-gráfica generadora ***[spanning subgraph]*****:** Una **sub-gráfica generadora o de expansión** de una gráfica ***G*** es una sub-gráfica que contiene a todos los vértices de ***G***.

Vértice terminal ***[end-vertex]*****:** Es un vértice de grado 1.

Cuídate y

Quedate en casa, es tu lugar seguro

Saludos, Lucy Gasca