Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

México, Septiembre 2020.

Introducción al Análisis de Algoritmos

Notas de Clase

(Primera Parte, Segunda Versión)

Dra. María De Luz Gasca Soto

Licenciatura en Ciencias de la Computación,
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias, UNAM.

Prefacio

Estas notas forman parte del material que se revisa en el curso de Análisis de Algoritmos I que se imparte en la Facultad de Ciencias de la UNAM, para la Licenciatura en Ciencias de la Computación.

He tenido la oportunidad de impartir este curso los últimos años y he estado preparando y corrigiendo las presentes notas de clase para el curso, de las cuales esta resulta ser la segunda versión.

Considero que las áreas de Análisis, Diseño y Justificación de algoritmos debe ser tomado más en serio por las personas que de una u otra manera diseñan programas o bien están involucradas con la computación.

El presente trabajo, pretende dar una panorámica general de lo que es el análisis de algoritmos. Enfatizando que el análisis, diseño y justificación de algoritmos se puede realizar de manera formal usando como herramienta a la Inducción Matemática.

La bibliografía básica, para el material presentado en estas notas, está basada en los libros:

- **Udi Manber** [13]
  Introduction to Algorithms. A Creative Approach.
- **J. Kingston** [12]
  Algorithms and Data Structures: Design, Correctness and Analysis.
- **R. Neapolitan & K. Naimipour** [16].
  Foundations of Algorithms.

Dra. María De Luz Gasca Soto
Profesor Asociado, T.C.
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM.

Índice general

Capítulo 3

Inducción Matemática

En este capítulo se presenta la Inducción Matemática (IM) a través de ejemplos, para los cuales el grado de dificultad va variando de menor a mayor.

3.1. Introducción.

La Inducción Matemática es una técnica muy poderosa para realizar demostraciones. Generalmente trabaja de la siguiente manera.

IM Sea T el teorema que se quiere demostrar. Suponga que T tiene como parámetro a n cuyo valor puede ser un número natural. Se debe probar que T para todos los valores de n, par ello se prueban las siguentes condiciones:
1. T es válido para $n = 1$. [Base de Inducción]
2. Para todo $n > 1$, [Hipótesis de Inducción]
Si T es válido para $(n-1)$,
Entonces T es válido para n.

Ejemplo 3.1 Para todo par de números naturales x y n, probar que $(x^n - 1)$ es divisible por $(x-1)$.

Demostración.
$(x^n - 1)$ div $(x-1) \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $(x^n - 1) = k \cdot (x-1)$.
Base de Inducción: $n = 1$. $(x^1 - 1)$ div $(x-1)$ pues $(x^1 - 1) = 1 \cdot (x-1)$.
Hipótesis de Inducción: Asumimos que $(x^{(n-1)} - 1)$ div $(x-1)\ \forall\, x \in \mathbb{N}$
Es decir, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $(x^{(n-1)} - 1) = m \cdot (x-1)$.
Por demostrar que: $(x^n - 1)$ div $(x-1)\ \forall x \in \mathbb{N}$.
Por hipótesis de inducción:
$(x^{(n-1)} - 1) = m \cdot (x-1)\ \forall\, x \in \mathbb{N}$ y p.a. $m \in \mathbb{N}$.
$(x^n - 1) = x^n - x + x - 1 = x \cdot (x^{(n-1)} - 1) + (x-1)$
$= x \cdot (m \cdot (x-1)) + (x-1) = (x-1) \cdot (x \cdot m + 1)$.
Sea $k = x \cdot m + 1 \Rightarrow (x^n - 1) = k \cdot (x-1)$.

3.2. Principio de Inducción.

El Principio de Inducción se define formalmente como:

PI$_o$ Si una proposición P, con parámetro n, es verdad para $n = 1$ y si para toda $n \geq 1$ la *verdad* de P para $(n-1)$ implica la *verdad* para n, entonces la proposición P es verdadera para todo número natural.

Equivalentemente, se define de la siguiente manera:

PI$_1$ Si una proposición P con un parámetro n es verdadera para $n = 1$ y si para toda $n \geq 1$, es verdadera para n, implica ser verdadera para $(n+1)$ entonces P resulta ser verdadera para todo número natural n.

Diferentes variedades de inducción han sido desarrolladas. Por ejemplo, el *Principio Fuerte de Inducción (Strong Induction)*, también llamado Segundo Principio de Inducción:

S.I. Si una proposición P, con parámetro n, es verdadera para $n = 1$ y si, para toda $n > 1$, la verdad de P para todo número natural menor que n implica que P sea verdadera para n, entonces la proposición es verdadera para todo número natural.

La diferencia es que ahora es posible utilizar la proposición para cualquier número menor que n, lo cual puede ser muy útil para algunas demostraciones. Otra variación de la inducción:

IM$_1$ Si una proposición P con un parámetro n es verdadera para $n = 1$ y $n = 2$, y si para toda $n > 2$, la verdad de P para $(n-2)$, implica la verdad para n entonces P resulta ser verdadera para todo número natural.

Esta variación funciona en *caminos paralelos*. El caso base para $n = 1$ y el paso de inducción implican que la proposición P es verdad para todos los números impares; el caso base para $n = 2$ junto con el paso inductivo implican P para todos los números pares. A continuación se describe otra variación del proceso de Inducción Matemática.

IM$_2$ Si una proposición P con un parámetro n es verdadera para $n = 1$ y si, para cada $n > 1$, tal que n es un número potencia de 2, que P sea verdad para $n/2$, implica que sea verdad para n, entonces P resulta ser verdadera para todo número natural que sea una potencia entera de 2.

Esta versión resulta ser similar al Principio de Inducción original, PI$_o$, escribiendo el parámetro n como 2^k y realizando la inducción sobre k, iniciando con $k = 0$.

La inducción puede ser usada de diversas maneras para probar propiedades que no necesariamente son números, pueden ser propiedades sobre gráficas, programas, iteraciones de programas, entes geométricos, entre otros. En la mayoría de los casos la inducción es sobre un número n que mide el tamaño del ejemplar del problema. Encontrar la medida correcta sobre la cual la inducción debe ser aplicada no es trivial. Por ejemplo, podría aplicarse la inducción sobre x y no sobre n en el Ejercicio 3.1, lo cual haría la prueba mucho más complicada. Algunas veces la medida del ejemplar no es natural y tiene que ser definida o *inventada* justamente para los propósitos de la inducción. El truco común de estas pruebas es la *extensión* de la proposición para una estructura más pequeña y de ahí demostrarlo para estructuras mayores.

3.3. Ejemplos de Inducción Matemática.

En esta sección detallaremos algunos ejemplos sencillos de inducción matemática. Iniciamos con algunos ejemplos algebraicos, después complicando un poco presentamos ejemplos geométricos para continuar con ejemplos que involucran teoría de gráficas y terminar con ejemplos más estructurados.

3.3.1. Ejemplos de Álgebra

A continuación presentamos algunos ejercicios clásicos de inducción mátematica, para los cuales basta un poco de manipulación algebraica.

Ejemplo 3.2 La suma de los primeros n números naturales es

$$S_n = n \cdot \frac{(n+1)}{2}.$$

Demostración. Inducción sobre n, el número de sumandos.
Base de Inducción: Si $n = 1 \Rightarrow 1 \cdot (1+1)/2 = 1$.
Hipótesis de Inducción: Supongase que para cualquier entero positivo n se tiene que,

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = n \cdot \frac{(n+1)}{2}.$$

Paso Inductivo: Por demostrar que

$$S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = (n+1) \cdot \frac{[(n+1)+1]}{2}.$$

Tenemos que:

$$S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1),$$

$$S_{n+1} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

Ejemplo 3.3 Mostrar que para todo número positivo se cumple que,

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Demostración. Inducción sobre n.
Base de Inducción: Si $n = 1 \Rightarrow S_1 = 1^2 = 1 = 1 \cdot (1+1) \cdot [(2 \times 1) + 1]/2 = 1$.
Hipótesis de Inducción: Supongase que para cualquier entero positivo n se tiene que,

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Paso Inductivo: Por demostrar que,

$$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Se tiene que,

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Por lo tanto,

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)\cdot[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

Ejemplo 3.4 Si n es un número natural y $(1+x)>0$ entonces $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$.

Demostración. Inducción sobre n.
Caso Base. Si $n=1 \Rightarrow (1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$.
Hipótesis de Inducción. Se asume que
$(1+x)^n \geq 1+n\cdot x,\ \forall\ x$ tal que $(1+x)>0$.
Paso Inductivo. Por demostrar que
$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot x,\ \forall\ x$ tal que $(1+x)>0$.
Tenemos que,

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)\cdot(1+x)^n \\ &\geq (1+x)\cdot(1+n\cdot x) \qquad \text{por inducción.} \\ &= 1+(n+1)\cdot x+n\cdot x^2 \\ &\geq 1+(n+1)\cdot x.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5 Si (x^n-y^n) es divisible por $(x-y)$ $\forall n,x,y \in \mathbb{N}$ con $x\neq y$.

Demostración. Inducción sobre n.
Caso Base. Si $n=1$ es obvio que (x^1-y^1) es divisible por $(x-y)$.
Hipótesis de Inducción. $(x^{n-1}-y^{n-1})$ es divisible por $(x-y)$ $\forall n,x,y \in \mathbb{N}$ con $x\neq y$.
Paso Inductivo. Por demostrar que cumple para n.
Intentemos poner (x^n-y^n) en términos de $(x^{n-1}-y^{n-1})$:

$$\begin{aligned}(x^n-y^n) &= x(x^{n-1}-y^{n-1}) + y(x^{n-1}-y^{n-1}) + x\cdot y^{n-1} - y\cdot x^{n-1} \\ &= x(x^{n-1}-y^{n-1}) + y(x^{n-1}-y^{n-1}) + x\cdot y(x^{n-2}-y^{n-2})\end{aligned}$$

Podemos aplicar la hipótesis de inducción sobre los primeros dos términos de la expresión resultante, así que estos son divisibles por $(x-y)$. El tercer término involucra a $(x^{n-2}-y^{n-2})$. Por tanto deberíamos usar el Segundo Principio de Inducción para realizar esta demostración. Este problema se deja de ejercicio.

3.3.2. Ejemplos de Geometría Computacional

En esta sección presentamos ejercicios simples de geometría computacional, son ejercicios resueltos usando inducción matemática, su grado de dificultad es mayor que la de los problemas presentados en la sección anterior.

Ejemplo 3.6 Calcular el número de regiones en el plano formadas por $\boldsymbol{n}$ líneas en posición general. Un conjunto de líneas en el plano se dice que está en **posición general** si no hay dos líneas paralelas ni tres que se intersecten en un punto en común.

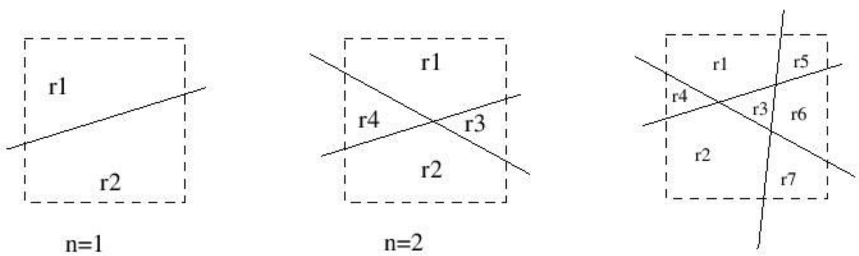


Figura 3.1: Regiones formadas en el plano.

Antes de presentar la solución a este ejercicio, observemos que:
Si $n = 1 \Rightarrow$ se forman 2 regiones
Si $n = 2 \Rightarrow$ se forman 4 regiones, pero $4 = 2 + 2 = 2 + n$.
Si $n = 3 \Rightarrow$ se forman 7 regiones, pero $7 = 4 + 3 = 4 + n$.
La Figura 3.1 ilustra esta situación.

Después de tal observación, podríamos concluir que para $i,\ i \leq 3$, la $i-$ésima línea añade i regiones. Si esto resulta ser verdad para toda i, entonces el número de regiones debe ser fácilmente calculado por $S_n = n \cdot (n+1)/2$. A continuación formalizamos tal resultado.

Afirmación 3.1 Añadir una línea a un conjunto de $(n-1)$ líneas en posición general en el plano incrementa el número de regiones en n.

Como ya se había visto la observación es cierta para $n \leq 3$. Se puede usar la afirmación como hipótesis de inducción y tratar de probar que agregar una línea a un conjunto de n líneas en posición general incrementa el número de regiones en $(n+1)$. Nótese que la hipótesis no maneja directamente el número de regiones sino más bien el crecimiento del número de regiones cuando una línea es añadida. Aún si la hipótesis fuera verdad, todavía se requiere calcular el número total de regiones... pero esta parte será directa.

Ahora trataremos de responder la siguiente pregunta: ¿Cómo puede una línea $\mathcal{L}$ incrementar el número de regiones en el plano? Dado que las líneas están en posición general, sucede que: (a) no pueden tocar una región en el borde; (b) si pueden cortar una región en dos partes, en tal caso una región más es formada; o (c) posiblemente nunca toquen una región. La Figura 3.2 ilustra estas situaciones.

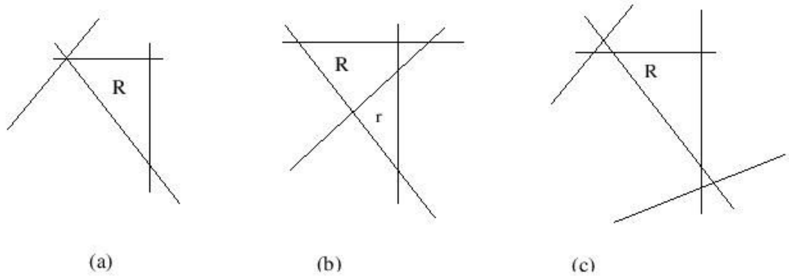


Figura 3.2: Regiones en el Plano

Sólo se requiere probar que la $(n+1)$-ésima línea intersecta exactamente $(n+1)$ regiones existentes. Podríamos probar el teorema directamente con esta afirmación, pero utilizaremos otra técnica de inducción.

Suponga que se quita la línea $\mathcal{L}_n$, n-ésima línea. Por la hipótesis de induccion, sin la línea $\mathcal{L}_n$, la $(n+1)$-ésima línea, $\mathcal{L}_{n+1}$, está añadiendo n nuevas regiones. De esta forma, únicamente se requiere probar que la presencia de la línea $\mathcal{L}_n$ provoca a la línea $\mathcal{L}_{n+1}$ agregar una región más.

Si se pone la línea $\mathcal{L}_n$ de regreso, como todas las líneas, $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{L}_{n+1}$ se intersectan en un punto p el cual se encuentra dentro de alguna región R, entonces ambas líneas intersectan a la región R. La Figura 3.3 ilustra esta situación.

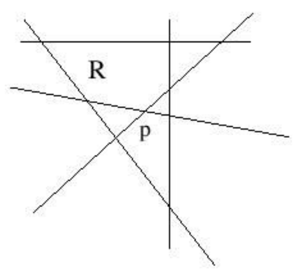


Figura 3.3: Intersección de $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{L}_{n+1}$

Cada línea, por separado, corta a R en dos partes, pero juntas cortan a R en cuatro secciones. Entonces al añadir la línea $\mathcal{L}_{n+1}$ cuando la línea $\mathcal{L}_n$ no está, se corta a la región R en dos. Añadir la línea $\mathcal{L}_{n+1}$ cuando la línea $\mathcal{L}_n$ sí está, afecta a R ya que R es dividida de dos a cuatro regiones. R es la única región afectada, ya que la línea $\mathcal{L}_n$ y la línea $\mathcal{L}_{n+1}$ se unen sólo en un punto: p.

Por lo tanto la línea $\mathcal{L}_{n+1}$ añade n regiones sin la presencia de la línea $\mathcal{L}_n$, pero agrega $(n+1)$ regiones con la línea $\mathcal{L}_n$ y la prueba queda terminada.

Teorema 3.2 El número de regiones en un plano formadas por n líneas en posición general es: $1 + n \cdot (n+1)/2$.

Demostración. Se ha demostrado que la n-ésima línea agrega n regiones más. La primera

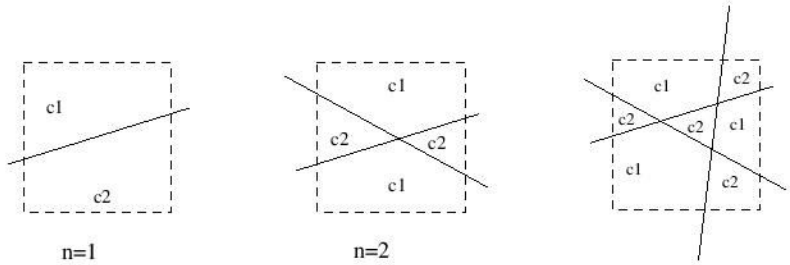


Figura 3.4: Coloración de Regiones en el Plano

línea genera dos regiones, de aquí que el número total de regiones para $n > 1$ es:

$$2+2+3+4+5+\cdots+n = 1+1+2+3+\cdots+n = 1+S_n = 1+n\cdot\frac{(n+1)}{2}.$$

Ejemplo 3.7 Un problema simple de coloración.

Teorema 3.3 Es posible colorear las regiones formadas por cualquier número de líneas en el plano con sólo dos colores.

Se asignan colores a las regines formadas por las líneas de tal manera que regiones vecinas tengan colores diferentes. Se dice que dos regiones son vecinas si y sólo sí tienen una arista en común. Si tal coloración es posible se denomina Coloración Válida.

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre el número de líneas. Pero antes se debe considerar que las n líneas en el plano no necesariamente están en posición general.
Hipótesis de Inducción: Es posible colorear las regiones formadas por menos de n líneas en el plano con sólo dos colores.

3.3.3. Ejemplos de Teoría de Gráficas

En esta sección presentamos ejercicios sencillos que involucran Teoría de Gráficas, son resueltos usando inducción matemática, su grado de dificultad resulta ser mayor que el de los problemas presentados en la sección anterior. Ahora tendremos que usar herramientas o técnicas más fuertes para solucionar los problemas.

Ejemplo 3.8 La fórmula de Euler.

El siguiente planteamiento es conocido como la Fórmula de Euler. Considere una gráfica plana conexa con V vértices, E aristas y F caras. Una cara es una región encerrada por un conjunto de vértices y aristas. La región exterior se considera una cara y nos referiremos a ella como la cara exterior. Lo que contiene a una región también es considerado una

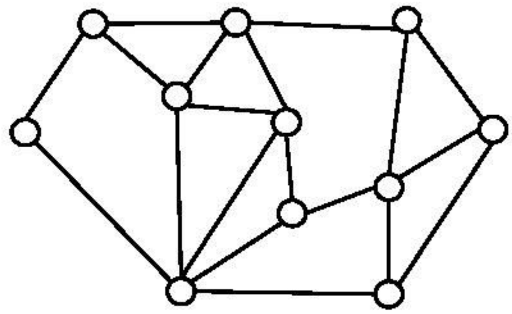


Figura 3.5: Ejemplo de gráfica plana.

cara. Por ejemplo un cuadrado tiene cuatro aristas, cuatro vértices y dos caras. La gráfica plana de la Figura 3.5 tiene 11 vértices, 19 aristas y 10 caras.

Dos vértices de una gráfica son conexos si es posible ir de un vértice al otro a través de aristas de la gráfica. Una gráfica es conexa si cada par de vértices están conectados.

Teorema 3.4 El número de vértices (V), aristas (E) y caras (F) en una gráfica arbitraria conexa y plana está relacionado con la fórmula $V + F = E + 2$.

Podemos probar este teorema con una variante de la inducción matemática conocida como **doble inducción**. La inducción procede primero sobre el número de vértices y después sobre el número de caras.

Considere primero una gráfica con una cara, esto indica que la gráfica no posee ningún ciclo. Una gráfica conexa sin ciclos es llamada **árbol**. Entonces lo primero que tenemos que probar es que para todos los arboles, se satisface la relación: $V + 1 = E + 2$.

Lema 3.5 Sea G una gráfica plana con una cara, V vértices y E aristas entonces se satisface que $V + 1 = E + 2$.

Demostración. Inducción sobre n el número de vértices.

Caso Base: $n = 1$ Si $n = 1$, tenemos la gráfica trivial de un vértice y ninguna arista. Aquí la fórmula queda, $1 + 1 = E + 2 \Rightarrow E = 0$. Así que la fórmula se satisface.

Hipótesis de Inducción: Un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas. Es decir, se asume que los árboles con n vértices tienen $n - 1$ aristas.

Paso Inductivo:
Consideramos ahora árboles con $n+1$ vértices. Se puede tener un vértice v conectado a otro por medio de una arista. En otro caso, todos los vértices están conectados por al menos dos aristas, si recorremos el árbol por las aristas de la gráfica, comenzando en cualquier vértice, entonces siempre podemos regresar al vértice inicial formándose así un ciclo, lo cual es una contradicción. Podemos quitar a v y la arista que lo conecta. El resultado es una gráfica conexa que por hipótesis de inducción cumple el enunciado. Nótese que por cada vértice agregado sólo se puede anexar una sola arista para que continue siendo un árbol, por lo cual la hipótesis se satisface.

Todo lo anterior sirve como caso base para la inducción sobre el número de caras. Por lo cual ahora procedemos a trabajar sobre el número de caras.

Hipótesis de Inducción Principal: Toda gráfica plana con n caras tiene tiene E aristas y V vértices satisface la relación: $V + n = E + 2$.

Paso Inductivo: Consideremos una gráfica con $n + 1$ caras. Debe existir una cara f, tal que tenga como vecina a la cara exterior. Como f es una cara entonces está encerrada en un ciclo. Eliminamos una arista que f comparta con la cara exterior, entonces no afectamos la conexidad de la gráfica, es decir, la gráfica continua siendo plana y conexa. Pero tenemos ahora una gráfica con una cara menos y una arista menos, podemos ahora aplicarle la hipótesis de inducción y el resultado se satisface. Entonces, si agregamos la arista, una cara también debe ser agregada cumpliendose la fórmula.

Esta demostración contiene tres parámetros: caras, vertices y aristas. Se usa inducción en un parámetro, el número de caras, pero el caso base requiere otro parámetro, el número de vertices. Definitivamente, hay que tener cuidado al escoger la secuencia correcta para realizar la inducción. Algunas veces, en la inducción se puede cambiar un párametro por otro, en otras es necesario combinar parámetros y en otras, es posible, aplicar en dos párametros distintos al mismo tiempo. Cambiando la secuencia en la que se aplica la inducción podemos tener una enorme diferencia en la dificultad de la demostración.

Ejemplo 3.9 Un problema de conjuntos independientes.

Primero veamos algunos conceptos básicos sobre Teoría de Gráficas. Una gráfica $G = (V, E)$ consiste de un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E, cada arista corresponde a una pareja de vértices distintos. Una gráfica puede ser **dirigida** o **no dirigida**. Las aristas en una gráfica dirigida son pares ordenados y son dibujadas con una flecha, es decir, una flecha tiene un vértice origen (cola) y un vértice destino (cabeza). Las aristas en una gráfica no dirigida son pares no ordenados. La Figura 3.6 muestra un par de gráficas, una no dirigida y la otra si dirigida.

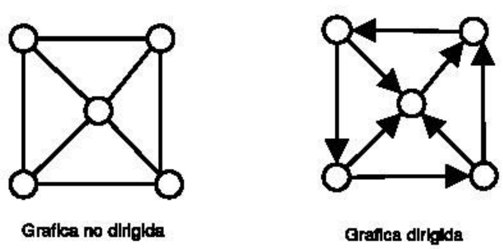


Figura 3.6: Gráfica no dirigida y dirigida

Se define el **grado** de un vértice v es el número de aristas incidentes en v. Una **trayectoria** es una secuencia de vértices v_1,v_2,...,v_k que están conectados por las aristas: (v_1,v_2), (v_2,v_3),...,(v_{k-1},v_k). Se dice que un vértice u **es alcanzado** por el vértice v si existe una trayectoria de u a v.

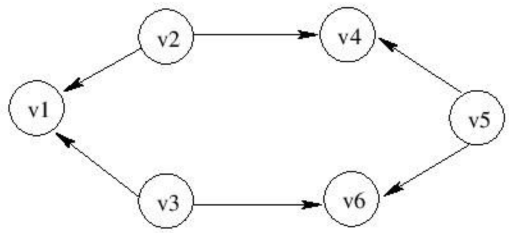


Figura 3.7: Gráfica para ejemplificar conjuntos independientes.

Sea $G = (V, E)$ una gráfica y sea U un conjunto de vértices, $U \subseteq V$. La subgráfica inducida por U es una subgráfica $H = (U, F)$ tal que F consiste de todas las aristas de E tal que ambos lados de la arista sean vértices de U.

Un **conjunto independiente** S en una gráfica $G = (V, E)$ es un conjunto de vértices tal que ninguno de los vértices en S son adyacentes entre sí.

En la figura 3.7, podemos ver que $S_1 = \{V_1, V_5\}$ y $S_2 = \{V_1, V_4, V_6\}$ son ejemplos de conjuntos ajenos, para la gráfica dada.

Teorema 3.6 Sea $G = (V, E)$ una gráfica dirigida. Existe un conjunto independiente $S(G)$ en G tal que para cada vértice en G puede ser alcanzado a partir de $S(G)$ por una trayectoria de longitud a lo más 2.

Demostración. Inducción sobre el número de vértices.

Hipótesis de Inducción:

El teorema resulta verdadero para toda gráfica dirigida con menos de n vértices.

Caso Base. El teorema es trivial para $n \leq 3$.

Paso Inductivo: Sea v un vértice arbitrario en V. Se define la **vecindad** de v como el conjunto $N(v) = \{v\} \cup \{w \in V | (v, w) \in E\}$.

La gráfica H inducida por el conjunto de vértices $V - N(v)$ tiene menos vértices que G; de esta manera, podemos usar la hipótesis de inducción para H. Sea $S(H)$ un conjunto independiente de H generado por la hipótesis de inducción. Ahora tenemos dos casos:

1. $S(H) \cup \{v\}$ es un conjunto independiente.
   En este caso, podemos hacer $S(G) = S(H) \cup \{v\}$, ya que para cada vértice en $N(v)$ se puede encontrar una trayectoria de tamaño 1 a partir de v. Los vértices que no están en $N(v)$ tienen una trayectoria de tamaño 2 a partir de $S(H)$, esto último por hipótesis de inducción.

2. $S(H) \cup \{v\}$ no es un conjunto independiente.
   En este caso, debe haber un vértice $w \in S(H)$ que sea adyacente a v. Ahora, $w \in S(H)$ implica que $w \in V - N(v)$, de donde se tiene que (v, w) no es una arista de G. Pero, asumimos que w es adyacente a v, y (w, v) es una arista de G. En este caso, sin embargo, cada vértice en $N(v)$ puede ser alcanzado por w, a través de v, con una trayectoria de longitud a lo más 2. Entonces podemos hacer $S(G) = S(H) \cup \{w\}$.

Reducimos el tamaño del problema de n a un número pequeño *dependiendo del ejemplar del problema*. Quitamos unicamente unos vértices para construir una demostración factible. Esto está muy bien balanceado en las demostraciónes entre eliminar varios vértices, en este caso la hipótesis se torna algo débil, y remover pocos vértices, en este caso hace la hipótesis fuerte. Encontrar este balance, es en muchos casos resulta ser el corazón de la demostración por inducción. Nótese entonces que usando el principio de inducción fuerte, requerimos asumir que el teorema es cierto para todo ejemplar más pequeño.

Ejemplo 3.10 Encontrando trayectorias ajenas por aristas en una gráfica.

Sea $G = (V, E)$ una gráfica conexa no dirigida. Se dice que dos trayectorias en G son ajenas por aristas, si no comparten ninguna arista. Sea O el conjunto de vértices en V con grado impar. Primero pedimos que el número de vértices en O sea par. Para probar esta afirmación, podemos notar que, al sumar el grado de todos los vértices, obtenemos dos veces el número de aristas. Pero, entonces todos los vértices de grado impar contribuyen un número par de veces en esta suma, así que se debe tener un número par de vértices de grado impar. Ahora, probaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.7 Sea $G = (V, E)$ una gráfica conexa no dirigida, y sea O un conjunto de vértices con grado impar. Podemos dividir los vértices de O en parejas y encontrar trayectorias ajenas por aristas que conecten cada par.

Demostración. Inducción sobre el número de aristas.
Caso Base. El teorema es claramente verdadero para una arista.

Hipótesis de Inducción: Sea m el número de aristas, el teorema es cierto para toda gráfica conexa no dirigida con menos de m aristas.

Consideremos una gráfica conexa no dirigida G con m aristas, y sea O el conjunto de vértices de grado impar. Si O es vacío, entonces el teorema se cumple. En otro caso, tomamos cualesquiera dos vértices en O. Como G es conexa, entonces existe una trayectoria que los conecta. Quitamos toda la trayectoria de G. La gráfica resultante tiene menos aristas. Podríamos usar la hipótesis de inducción para encontrar las trayectorias sobre el resto de vértices impares, completando la demostración. Pero el problema, es que, al remover la trayectoria podríamos obtener la gráfica disconexa. La hipótesis de inducción solamente se aplica sobre gráficas conexas. Debemos ser muy cuidadosos sobre cómo usar la hipótesis de inducción correctamente. Podemos evitar la dificultad en este caso con una ingeniosa idea: Podemos cambiar la hipótesis y adaptarla a nuestras necesidades. Si el problema fue de conectividad, entonces evitémoslo! Ahora planteamos una nueva hipótesis de inducción:

Hipótesis de Inducción modificada: Sea m el número de aristas, el teorema es cierto para toda gráfica no dirigida con menos de m aristas.

Esto es un teorema más fuerte y la demostración, en cambio, resulta ser simple.

Consideremos ahora una gráfica G com m aristas y O bajo las condiciones anteriores. La gráfica puede no ser conexa. En este caso, la gráfica es particionada en varias componentes conexas. Podemos tener dos vértices de grado impar de la misma componente. Entonces cada componente es una gráfica conexa por sí misma, luego tiene un número par de vértices impares. Por lo tanto, si tenemos algunos vértices de grado impar, podemos encontrar dos de ellos en tal componente. Entónces los dos vértices escogidos están en la misma componente, podemos conectarlos a través de una trayectoria. Al quitar dicha trayectoria, la gráfica tienen menos de m aristas y podemos aplicar la hipótesis de inducción. Entonces en la gráfica obtenida podemos unir a los vértices de grado impar en trayectorias ajenas por aristas. Ahora es posible agregar la trayectoria que fue quitada y completar la demostración.

Este es un ejemplo de una técnica muy poderosa conocida como **reforzamiento de la hipótesis de inducción**. La construcción consiste en cambiar la hipótesis por lo que necesitamos.

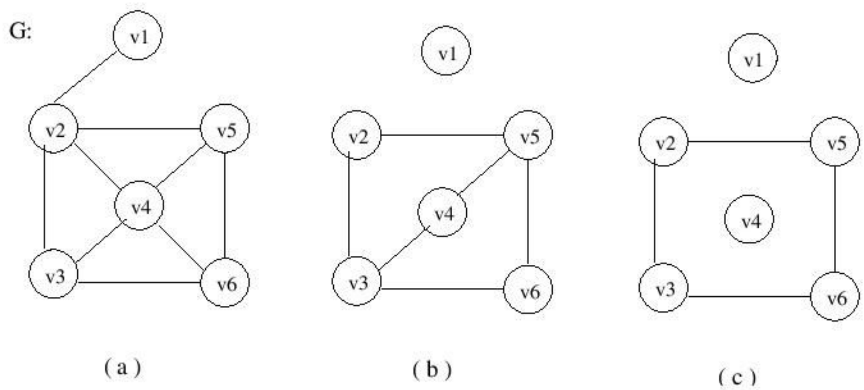


Figura 3.8: Gráfica para ejemplificar conjuntos ajenos.

Ejemplo. Consideremos la gráfica G de la Figura 3.8(a), los vértices de grado impar de G son $O = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$.

Una trayectoria entre v_1 y v_6 es $P(v_1, v_6) = v_1, v_2, v_4, v_6$. Al quitar las aristas de esta trayectoria de G, obtenemos la gráfica disconexa mostrada en la Figura 3.8(b). En la componente conexa no trivial tenemos dos vértices de grado impar: $\{v_3, v_5\}$. Ahora una trayectoria entre v_3 y v_5 es $P(v_3, v_5) = v_3, v_4, v_5$. Al quitar las aristas de esta trayectoria de esta componente no trivial, obtenemos la gráfica disconexa mostrada en la Figura 3.8(c). Ninguna de las componentes restantes tiene vértices de grado impar, así que hemos terminado. Claramente, las trayectorias obtenidas $P(v_1, v_6)$ y $P(v_3, v_5)$ son ajenas por aristas.

3.3.4. Otros Ejemplos

En esta sección presentamos problemas ingeniosos cuya solución se realiza usando inducción matemática. Estos problemas no resultan ser triviales, pero afortunadamente, si resultan ser muy buen material didáctico.

Empezamos con un Problema de Adoquinamiento, será nuestro primer ejemplo para mostrar cómo puede ser utilizada la inducción para probar rigurosamente que un algoritmo es correcto. El segundo ejemplo es una muestra de cómo la inducción matemática, puede ser usada para demostrar *cualquier* cosa, incluso absurdos! El problema está en hacer un mal uso y abuso de ella, lamentablemente este es un error común.

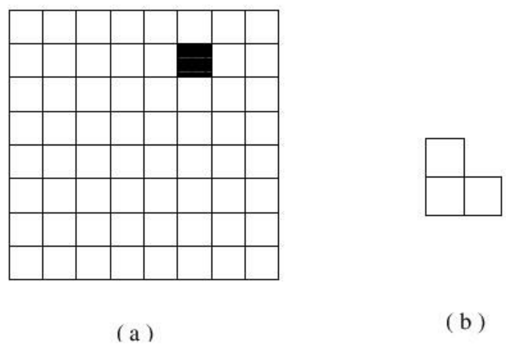


Figura 3.9: Ejemplar para el Problema de Adoquinamiento.

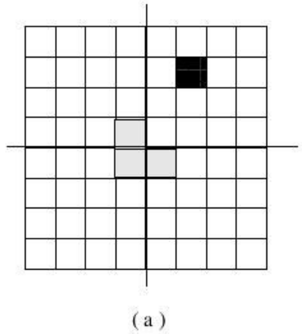
Ejemplo 3.11 Problema de Adoquinamiento.

Suponga que debe adoquinar una región dividida en cuadrados iguales. La región tiene un área de $m \times m$ cuadrados. Se tiene, como restricción adicional, que un cuadrado cualquiera puede ser distinguido como *cuadrado especial*. El adoquín dado tiene forma de una L y está integrado por tres cuadrados. La Figura 3.9(a) muestra una región de 8×8 cuadrados, en la cual se marca con negro al cuadrado especial. La Figura 3.9(b) ilustra el adoquín con el que se trabajará.

Podemos considerar esta región como una matriz con m cuadrados en cada renglon y m cuadrados en cada columna. Supondremos que m es potencia de 2.

Problema de Adoquinamiento. Adoquinar la región de $m \times m$ con el adoquín dado, cubriendo un cada cuadrado exactamente una vez, con excepción del cuadrado especial, el cual no será cubierto por ningún adoquín.

Para el ejemplar dado de 8×8, la Figura 3.10(a) muestra donde se coloca el primer adoquín y en la Figura 3.10(b) se muestra la solución a este ejemplar.



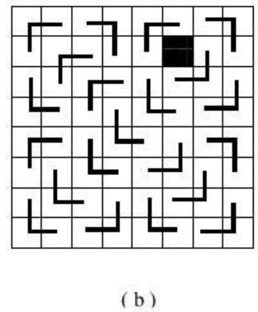


Figura 3.10: Solución al Problema de Adoquinamiento.

Teorema 3.8 El Problema de adoquinamiento siempre puede ser resuelto.
Demostración.

La prueba será por inducción matemática sobre n, tal que $m = 2^n$.

Caso Base: $n = 0$.

Si $n = 0$ entonces $m = 1$, lo que significa que tenemos una región de 1×1 que es un cuadrado el cual necesariamente es el cuadrado especial. Para esta región, nada tenemos por hacer.

Si $n = 1$ entonces $m = 2$, lo que significa que tenemos una región de 2×2. No importa donde se encuentre el cuadrado especial, para el resto de la región es posible acomodar siempre al adoquín.

Hipótesis de Inducción.

El Teorema es cierto para regiones de tamaño $2^{n-1} \times 2^{n-1}$.

Paso Inductivo.

Sea $m = 2^n$. Consideremos una región de tamaño $m \times m$, con un cuadrado especial puesto en cualquier posición arbitraria. Dividimos la región en cuatro subregiones iguales, dividiendo a la mitad tanto horizontal como verticalmente la región original. El cuadrado especial origial está en exactamente una de estas subregiones. Colocamos un adoquín en la mitad de la región original de tal forma que cada cuadrado del adoquín cubra cada una de las regiones en la que no se encuentre el cuadrado especial.

Para nuestro ejemplo, el cuadrado especial está en la sub-región R_2 y el adoquín se pone de tal forma cubre un cuadrado de cada una de las otras tres sub-regiones, como lo muestra la Figura 3.10(a).

Nombramos ahora a cada uno de los tres cuadrados del adoquín colocado "cuadrado especial" para la región correspondiente. Ahora bien, tenemos que cada una de las subregiones tiene tamaño $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ y contienen un cuadrado especial, así que por hipótesis de inducción cada sub-región puede ser adoquinada.

Resulta fácil ver que esta prueba induce directamente a un algoritmo para solucionar el problema, un algoritmo, quizá no computacional, pero si sencillo para aplicarlo manualmente. La estrategia usada en esta solución es conocida como *Divide y Vencerás*.

Ejemplo 3.12 Caballos del mismo color.

Demuestre que todos los caballos son del mismo color.

Demostración.

Probaremos que cualquier conjunto de caballos contiene únicamente caballos de un color. En particular, esto resutará cierto para el conjunto de todos los caballos.

Sea $\mathcal{H}$ un conjunto arbitrario de caballos. Usaremos inducción sobre n, el número de caballos en $\mathcal{H}$, para mostrar que todos los caballos en $\mathcal{H}$ tienen el mismo color.

Caso Base: $n = 0$.

Esto es trivialmente cierto, si no hay caballos en $\mathcal{H}$, entonces seguramente "todos" tienen el mismo color.

Si $n = 1$ entonces sólo hay un caballo, entonces es trivialmente cierto que "todos" los caballos en $\mathcal{H}$ tienen el mismo color.

Hipótesis de Inducción.

Cualquier conjunto de $(n-1)$ caballos contiene caballos del mismo color, podría ser que los caballos en conjuntos diferentes tengan colores diferentes.

Paso Inductivo. Consideremos cualquier número de n caballos en $\mathcal{H}$, llamémosles $h_1, h_2, h_3 ... h_n$. Sea $\mathcal{H}_1$ el conjunto de caballos resultante de quitar al caballo h_1 de $\mathcal{H}$, sea $\mathcal{H}_2$ el conjunto de caballos resultante de quitar al caballo h_2 de $\mathcal{H}$, de manera similar sea $\mathcal{H}_j$ el conjunto de caballos resultante de quitar al caballo h_j de $\mathcal{H}$. Hay $(n-1)$ caballos en cada uno de estos nuevos n conjuntos. Por lo tanto podemos aplicarles la hipótesis de inducción a cada uno. En particular, todos los caballos en $\mathcal{H}_1$ tienen el mismo color, digamos c_1 y todos los caballos en $\mathcal{H}_2$ tienen el mismo color, digamos c_2, posiblemente c_1 diferente de c_2. Pero, ¿ es realmente posible que el color c_1 sea diferente del color c_2? Seguramente no, ya que el caballo h_n pertenece a ambos conjuntos y por ende los colores c_1 y c_2 deben ser el color del caballo h_n. Ya que todos los caballos en $\mathcal{H}$ están en $\mathcal{H}_1$ o $\mathcal{H}_2$ podemos concluir que todos tienen el mismo color $c = c_1 = c_2$. Esto completa la demostración.

Reflexionemos sobre esta "demostración". ¿ Que falló ? Para empezar, ¡la hipótesis de inducción es absurda!

El problema está en la afirmación: "el caballo h_n pertenece a ambos conjuntos" Esto **no** es cierto para $n = 2$, ya que $h_2 \notin \mathcal{H}_2$. El razonamiento fue correcto para $n = 0$ y $n = 1$. Además resulta verdad que el teorema se satisface para conjuntos de n caballos asumiendo que es verdad para $n - 1$, pero solo cuando $n \geq 3$. Podríamos ir de 2 a 3 o de 3 a 4 y así, pero **no** de 1 a 2. Ya que el caso base contiene sólo a 0 y a 1 y como no está permitido ir de 1 a 2, el paso inductivo no puede ser realizado. Este pequeño error de *liga* en la prueba es suficiente para invalidarla completamente.

3.4. Ejercicios

Ejercicio 3.1 Un problema sobre sumas de números impares.

Considere las siguientes sumas:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 8 &= 3 + 5 \\ 27 &= 7 + 9 + 11 \\ 64 &= 13 + 15 + 17 + 19 \\ 125 &= 21 + 23 + 25 + 27 + 29 \end{aligned}$$

El problema consiste en encontrar una expresión para la suma de la i-ésima columna y probar que tal expresión es correcta.

Ejercicio 3.2 Demostrar que para todo número natural $n, n \geq 1$, se satisface que,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1.$$

Ejercicio 3.3 La suma de la serie $8 + 13 + 18 + 23 + \cdots + (3 + 5 \cdot n)$ es: $2{,}5 \cdot n^2 + 5{,}5 \cdot n$.

Ejemplo 3.13 Pruebe, usando inducción matemática, que $(x^n - y^n)$ es divisible por $(x - y)$ $\forall n, x, y \in \mathbb{N}$ con $x \neq y$.

Ejercicio 3.4 Sean $a, b, n \in I\!N$. Pruebe que $2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a + b)^n$.

Ejercicio 3.5 Pruebe por inducción que $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k(k + 1)/2$.

Ejercicio 3.6 Pruebe por inducción que un número, dado en su representación decimal, es divisible entre 3 si y sólo sí la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

Ejercicio 3.7 Pruebe que un mapa plano puede ser coloreado con 3 colores, de tal forma que dos regiones vecinas esten iluminadas con colores diferentes, si y sólo sí cada región tiene un número par de regiones vecinas. Dos regiones son consideradas vecinas si tienen una arista en común.

Ejercicio 3.8 Sea K_n una gráfica completa no dirigida de n vértices (todos los vértices están conectados entre sí), y sea n un número par. Pruebe que las aristas de K_n pueden particionarse en exactamente $n/2$ arboles generadores. Un árbol generador es una subgráfica conexa que contiene todos los vértices y no posee ciclos.

Ejercicio 3.9 Considere $n \geq 3$ líneas en posición general en el plano. Pruebe que al menos una de las regiones formadas es un triángulo.

Ejercicio 3.10 Considere $n \geq 3$ líneas en posición general en el plano. Pruebe que esas líneas forman al menos $n - 2$ triángulos.

Ejercicio 3.11 Pruebe que las regiones formadas por n círculos en el plano pueden ser iluminadas con dos colores de tal forma que dos regiones vecinas tengan colores diferentes.

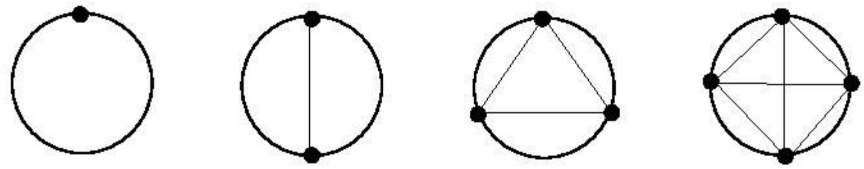


Figura 3.11: Cortes en un círculo.

Ejercicio 3.12 Pruebe usando inducción que: Si $(n+1)$ pelotitas, $n \geq 1$, son puestas en n cajas, entonces al menos una caja contiene más de una pelotita.

Ejercicio 3.13 Pruebe usando inducción matemática que la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos es igual al cuadrado de la suma de esos enteros.

Ejercicio 3.14 Sea n un entero positivo. Dibuje un círculo y marque n puntos regularmente espaciados alrededor de la circunferencia. Ahora dibuje una cuerda, dentro del círculo, entre cada par de estos puntos. En el caso $n = 1$ no hay pares de puntos, por lo que no se dibuja ninguna cuerda. La Figura 3.11 ejemplifica el problema para $n = 1, 2, 3, 4$. Finalmente, denote por $c(n)$ al número de secciones cortadas dentro del círculo. Es fácil ver que $c(1) = 1, c(2) = 2, c(3) = 4$ y $c(4) = 8$.

Encuentre la fórmula general para $c(n)$, usando inducción matemática. Hint: Determine $c(5)$ y $c(6)$ dibujando y contando las secciones.

Ejercicio 3.15 Considere el ejercicio anterior, ¿ Qué pasa si se permite poner los puntos irregularmente espaciados? Encuentre la fórmula general para $c(n)$, usando inducción matemática.

Ejercicio 3.16 Determine, por inducción, todos los valores enteros positivos de n para los cuales $n^3 > 2^n$.

Ejercicio 3.17 ¿ Qué está mal en la siguiente *prueba*?

Mostrar por inducción que todos los caballos en cualquier conjunto de $i \leq 1$ caballos tienen el mismo color.
Base: Para $i = 1$ cualquier conjunto tiene sólo un caballo, entonces todos tienen el mismo color.
Paso Inductivo: Para $i > 1$ asumimos que para cualquier conjunto de $i - 1$ caballos, todos tienen el mismo color. Sea S un conjunto de i caballos. Quitar un caballo de S, obteniendo un conjunto X de $i - 1$ caballos. Poner este caballo de regreso en el conjunto y quitar otro, para obtener un conjunto Y de $i - 1$ caballos. Por hipótesis de inducción, todos los caballos de X tienen el mismo tamaño. Por hipótesis de inducción, todos los caballos de X tienen el mismo tamaño. Ya que hay caballos de S que están tanto en X como en Y, no puede haber dos tamaños diferentes, se debe tener que el tamaño de los caballos en X es el mismo que el el tamaño de los caballos en Y. Por lo tanto, todos los caballos de S deben ser del mismo tamaño.